Zbyněk Kubáček

MATEMATIKA

pre 3. ročník gymnázia
a 7. ročník gymnázia
s osemročným štúdiom

2. časť

SPN
SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO

SPN

Zbyněk KUBÁČEK

MATEMATIKA

pre **3.** ročník gymnázia

a **7.** ročník gymnázia s osemročným štúdiom

2. ČASŤ

Autor © **doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, PhD.**, 2013

Foto © Pavel Čisárik, 2013

Lektori: Mgr. Tatiana Hiková
PaedDr. Iveta Kohanová, PhD.

Grafický dizajn © SPN – Mladé letá, s. r. o.

Obálka © akademický maliar Peter Galvánek

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod č. 2013-3830/13762:4-919 zo dňa 25. marca 2013 ako učebnicu matematiky pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 2. časť. Schvaľovacia doložka má platnosť 5 rokov.

Prvé vydanie, 2013

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Výtvarná redaktorka Mgr. Ľubica Suchalová
Technická redaktorka Ivana Bronišová

Vyšlo vo vydavateľstve
Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, s. r. o.,
Sasinkova 5, 811 08 Bratislava

Vytlačila Slovenská Grafia, a. s., Bratislava

ISBN 978-80-10-02289-2

OBSAH

5 NIEKOĽKO ZÁKLADNÝCH KONŠTRUKCIÍ / 7

5.1 Množiny bodov s danými vlastnosťami ... / 7
5.2 ... a ako ich skonštruovať / 19
5.3 Rysujeme súmerné, posunuté a otočené útvary / 28
5.4 Ďalšie úlohy / 33
VÝSLEDKY / 35

6 TÁLESOVA KRUŽNICA / 41

6.1 Tálesova kružnica / 41
6.2 Obvodový a stredový uhol / 44
6.3 Ďalšie úlohy / 49
VÝSLEDKY / 51

7 ŠTYRI VÝZNAČNÉ PRIESEČNÍKY V TROJUHOLNÍKU / 55

7.1 Osi strán a osi uhlov v trojuholníku / 55
7.2 Priesečník výšok trojuholníka (ortocentrum) / 57
7.3 Ťažnice a ťažisko / 58
7.4 Ďalšie úlohy / 59
VÝSLEDKY / 62

8 POČÍTAME, KONŠTRUUJEME A RYSUJEME / 64

8.1 Ako môžu pomôcť výpočty / 64
8.2 Ďalšie úlohy / 71
VÝSLEDKY / 79

9 MERANIE / 84

9.1 Pracujeme s približnými hodnotami / 84
9.2 Na dĺžky sú najlepšie trojuholníky / 89
9.3 Počítame obsahy / 96
9.4 Ďalšie úlohy / 106
VÝSLEDKY / 110

LITERATÚRA / 120

5 NIEKOĽKO ZÁKLADNÝCH KONŠTRUKCIÍ

V tejto a nasledujúcich troch kapitolách sa budeme zaoberať najmä konštrukciami a rysovaním. Ukážeme, že rysovanie môže byť užitočné pre architekta, zememerača aj námorníka. Pripomenieme si niekoľko základných konštrukcií a ich súvis s jednoduchými vlastnosťami trojuholníkov, rovnobežníkov a kružníc. Hoci mnohé z týchto vlastností sa nám budú zdať intuitívne úplne jasné, budeme sa snažiť overiť ich správnosť. Precvičíme si tak schopnosť argumentovať a zistíme, či dokážeme presvedčiť aj niekoho, kto o správnosti našich „zrejmých“ tvrdení pochybuje.

Mnoho z toho, čím sa budeme zaoberať, vedeli už starogrécki matematici. Netreba sa preto čudovať, že sa viackrát stretneme s Euklidovými Základmi, ktoré sa ako učebnica geometrie používali dve tisícročia (niektorí matematici však celkom oprávnene nepovažujú použitie Euklidových Základov ako učebnice za príliš dobrý nápad).

Hoci dnes sa už namiesto ručného rysovania používa rôzny grafický softvér, stále platí: kto chce pochopiť základy, mal by najprv rysovať sám. Skúsenosti a porozumenie získané vlastnou manipuláciou s kružidlom, pravítkom a uhlomerom nemôže v tejto prvej etape nahradiť žiadny počítačový program. A navyše zistíme, čo všetko sa dá pomocou týchto troch jednoduchých pomôcok narysovať.

5.1 Množiny bodov s danými vlastnosťami ...
5.2 ... a ako ich skonštruovať
5.3 Rysujeme súmerné, posunuté a otočené útvary
5.4 Ďalšie úlohy

Detail výzdoby okna milánskeho dómu. Gotické ornamenty (odborne nazývané kružba) sú krásnym príkladom konštrukcií pomocou pravítka a kružidla.

5.1 Množiny bodov s danými vlastnosťami ...

NA ÚVOD KONŠTRUKČNÁ ÚLOHA

- Na úvod konštrukčná úloha
- Hľadáme jednoduché množiny bodov s danými vlastnosťami
- Späť ku konštrukčným úlohám

Začneme typickou konštrukčnou úlohou. Vyriešte ju sami, až potom čítajte náš komentár. (Ak sa vám nedarí objaviť riešenie, skúste tento návod: poloha bodu C je určená dvomi informáciami – poznáme jeho vzdialenosť od úsečky AB a jeho vzdialenosť od bodu B). Rysovať zatiaľ nemusíte, tým sa budeme podrobnejšie zaoberať v nasledujúcej časti tejto kapitoly.

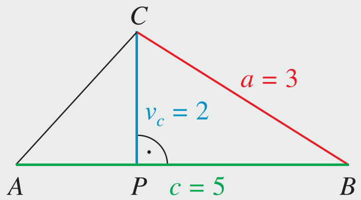
ÚLOHA

1. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom $c = 5$, $v_c = 2$, $a = 3$.

RIEŠENIE

Náčrt, rozbor a zdôvodnenie konštrukcie

Veľkosti, ktoré v trojuholníku ABC poznáme, sme vyznačili na obr. 1. Naša konštrukcia vychádza z nasledujúcich úvah. Vzdialenosť bodov A, B poznáme, preto tieto dva body môžeme pokladať za dané. Potrebujeme nájsť bod C. Ten podľa zadania musí spĺňať dve požiadavky:



Obr. 1

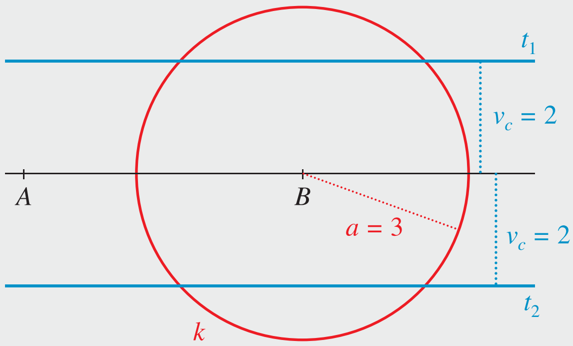
1. Z podmienky $v_c = 2$ vyplýva, že vzdialenosť bodu C od priamky AB je 2 (viete to vysvetliť spolužiakom?).

Vzdialenosť bodu C od priamky AB je dĺžka úsečky CP, ktorá je kolmá na AB, pričom bod P leží na priamke AB (pozri obr. 1).

Vzdialenosť priamok t, AB je dĺžka úsečky, ktorá je kolmá na AB, pričom jeden jej krajný bod leží na AB a druhý na t (na obr. 2 sme takúto úsečku vyznačili bodkovane).

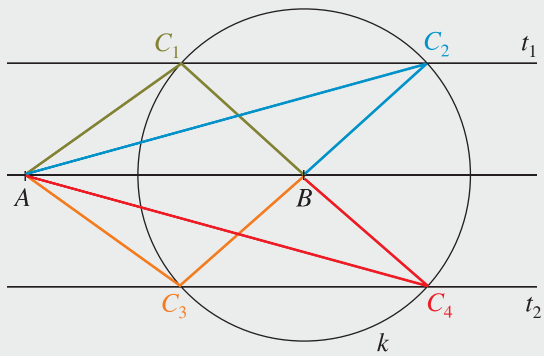
Túto vzdialenosť od priamky AB majú všetky body, ktoré ležia na niektorej z dvoch priamok t_1, t_2, ktoré sme na obr. 2 vyznačili **modro**. Tieto priamky sú rovnobežné s AB, vzdialenosť každej z nich od AB je 2.
Žiadny iný bod v rovine už túto vlastnosť nemá – majú ju teda *iba* body ležiace na t_1 alebo t_2 (prečo?). Preto hľadaný bod C musí ležať na niektorej z priamok t_1, t_2. (Toto si dobre rozmyslite, až potom čítajte ďalej.)

2. Z podmienky $a = 3$ vyplýva, že vzdialenosť bodu C od bodu B je 3.
Túto vzdialenosť od bodu B majú všetky body, ktoré ležia na kružnici k so stredom B a polomerom 3, na obr. 2 vyznačenej **červeno**. Žiadny iný bod roviny už túto vlastnosť nemá (majú ju teda *iba* body kružnice k). Preto hľadaný bod C musí ležať na kružnici k.



Obr. 2

Ak zvolíme za C ktorýkoľvek bod ležiaci na niektorej z priamok t_1, t_2, vždy dostaneme trojuholník ABC, v ktorom $v_c = 2$ (rozmyslite si to). Ak za C zvolíme ktorýkoľvek bod kružnice k – s výnimkou jej priesečníkov s priamkou AB – vždy dostaneme trojuholník ABC, v ktorom $a = 3$ (prečo sme vylúčili priesečníky s priamkou AB?). Ak chceme, aby v našom trojuholníku ABC platili obidve podmienky – teda $a = 3$ aj $v_c = 2$ – musíme za C zvoliť bod, ktorý leží na kružnici k a *súčasne* na niektorej z priamok t_1, t_2. Ako vidno na obr. 3, také body existujú štyri – označili sme ich C_1 až C_4. Týmto štyrom bodom C zodpovedajú štyri trojuholníky, ktoré sme na obr. 3 farebne odlíšili.



Obr. 3

Tieto trojuholníky sú hľadanými riešeniami našej úlohy. Všimnite si, že trojuholníky ABC_1 a ABC_3 sú (nepriamo) zhodné, to isté platí pre trojuholníky ABC_2 a ABC_4.

Pripomíname: Dva trojuholníky sa nazývajú zhodné, ak po vystrihnutí z papiera môžeme jeden priložiť na druhý tak, že sa presne kryjú. Ak je potrebné pred týmto priložením jeden z trojuholníkov prevrátiť na opačnú stranu (teda otočiť rubom nahor), hovoríme o nepriamej zhodnosti. Ak to nie je potrebné (teda na to, aby sa jeden trojuholník presne kryl s druhým, ho stačí iba vhodne posunúť a pootočiť), hovoríme o priamej zhodnosti.

Opis konštrukcie
Z predchádzajúcich úvah vyplýva tento postup konštrukcie trojuholníka ABC (v ľavom stĺpci je slovný opis, v pravom zápis pomocou matematickej symboliky):

KTORÝ ZÁPIS – OPISNÝ ALEBO SYMBOLICKÝ – SA ROZHODNETE POUŽÍVAŤ, NECHÁVAME NA VAŠE ROZHODNUTIE. PODSTATNÉ JE, ABY ZÁPIS KONŠTRUKCIE BOL JASNÝ A JEDNOZNAČNÝ. MATEMATICKÁ SYMBOLIKA JE JEDNA Z MOŽNOSTÍ, AKO TO DOSIAHNUŤ (ALE NIE JEDINÁ), VYŽADUJE VŠAK ZNALOSŤ ZÁKLADNÝCH MNOŽINOVÝCH POJMOV A SYMBOLOV – INAK ŤAŽKO POCHOPÍTE, PREČO SME NAPR. V ZÁPISE BODU 4 NAPÍSALI BOD C DO ZLOŽENÝCH ZÁTVORIEK $\{\}$.

Postupne narysujeme 1. úsečku AB dĺžky 5,	1. úsečka AB, $\lvert AB \rvert = 5$
2. priamku t rovnobežnú s priamkou AB, ktorá od nej má vzdialenosť 2,	2. priamka t $t \parallel AB$, $d(t, AB) = 2$
(z našich úvah vieme, že takéto priamky existujú dve, označili sme ich t_1, t_2)	
3. kružnicu k so stredom B a polomerom 3.	3. kružnica $k(B, r = 3)$
Potom 4. nájdeme priesečník kružnice k s priamkou t; tento priesečník je vrchol C trojuholníka.	4. bod C, $\{C\} = k \cap t$
(túto formuláciu chápeme tak, že hľadáme priesečník kružnice k s priamkami, ktoré sme zostrojili v bode 2, teda s obidvoma priamkami t_1, t_2)	
Keď už poznáme všetky tri vrcholy, tak 5. narysujeme trojuholník ABC.	5. trojuholník ABC

Poznámka. Pri riešení konštrukčnej úlohy je zvykom uviesť, koľko riešení má daná úloha. V úlohe 1 máme na výber z dvoch odpovedí:

Štandardný postup riešenia konštrukčnej úlohy má štyri časti:

NÁČRT A ROZBOR (hľadanie vlastností a vzťahov, ktoré umožnia skonštruovať požadovaný objekt)

OPIS POSTUPU KONŠTRUKCIE

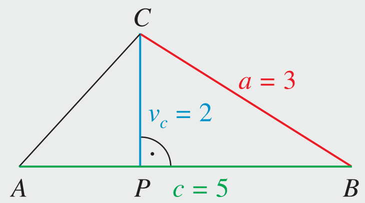
OVERENIE SPRÁVNOSTI KONŠTRUKCIE (kontrola, či skonštruovaný objekt má všetky vlastnosti požadované v zadaní)

DISKUSIA (počet riešení a podmienky, za ktorých je úloha riešiteľná).
Diskusia o podmienkach, za ktorých je úloha riešiteľná, sa týka konštrukčných úloh, v ktorých je určené iba to, ktoré veličiny sú dané, nie sú však určené ich konkrétne veľkosti (takto formulovaná úloha 1 by znela „zostrojte trojuholník ABC, ak je dané a, c, v_c“).

- Ak nás – pri danej polohe vrcholov A, B – zaujíma počet rôznych bodov C v rovine, ktoré vyhovujú podmienkam zadania, bude odpoveď: *Úloha má 4 riešenia.*
- Ak nás zaujíma, koľko „tvarom rôznych“ trojuholníkov spĺňa podmienky zadania, budeme zhodné trojuholníky ABC_1 a ABC_3 pokladať za jedno riešenie a zhodné trojuholníky ABC_2 a ABC_4 za „tvarom odlišné“ druhé riešenie.
  Odpoveď bude: *Úloha má dve riešenia.*

INÉ RIEŠENIE ÚLOHY 1

Existujú aj iné postupy konštrukcie trojuholníka ABC z úlohy 1. S jedným sa stretneme na s. 64, ďalší ukážeme teraz.
Zostrojíme najprv pravouhlý trojuholník BCP (P je päta výšky z vrcholu C na stranu AB, pozri obr. 1), v ktorom poznáme veľkosť prepony (a) a jednej odvesny (v_c).



(*Obr. 1*)

Pri jeho konštrukcii využijeme Tálesovu vetu: Ak BC je priemer kružnice l a X je bod ležiaci na l rôzny od B, C, tak uhol BXC je pravý (žiadny iný bod X v rovine už túto vlastnosť nemá, ukážeme to v úlohách 2 až 4 v kapitole 6).

PRIPOMEŇTE SI NAJPRV TÁLESOVU VETU (PODROBNEJŠIE SA JEJ BUDEME VENOVAŤ V NASLEDUJÚCEJ KAPITOLE), AŽ POTOM ČÍTAJTE ĎALEJ.

Konštrukcia trojuholníka BCP
Body B a C, ktorých vzdialenosť poznáme, môžeme pokladať za dané.
Hľadáme bod P. Ten musí spĺňať dve požiadavky:
1. Z podmienky $\mathbf{v_c = 2}$ vyplýva, že vzdialenosť P od bodu C je 2, preto bod P musí ležať na **modrej** kružnici m so stredom C a polomerom 2 (pozri obr. 4),
2. $\mathbf{|\sphericalangle BPC| = 90°}$, preto bod P musí ležať na **červenej** kružnici l s priemerom BC (tu využívame Tálesovu vetu aj informáciu, ktorú sme uviedli v zátvorke za jej znením).

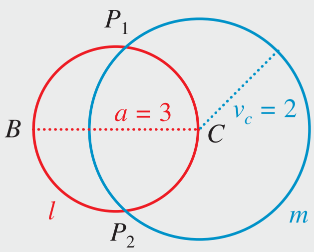
Preto bod P je priesečník kružníc l a m. Ako vidíme na obr. 4, existujú dva také body: P_1 a P_2.

Konštrukcia vrcholu A
Keď už poznáme polohu bodu P, môžeme nájsť vrchol A.

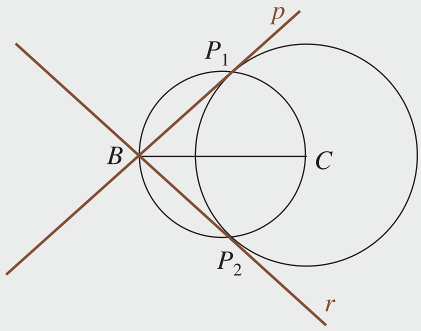
SKÚSTE (PRINAJMENŠOM) OD TOHTO MIESTA POKRAČOVAŤ V RIEŠENÍ SAMI, POTOM SVOJ VÝSLEDOK POROVNAJTE S NAŠÍM.

Ten musí spĺňať dve požiadavky:
1. Musí ležať na priamke BP (a byť rôzny od bodu B, prečo?). Na obr. 5 sme dve možné polohy priamky BP vyznačili ako **hnedé** priamky p, r .
2. Z podmienky $\mathbf{c = 5}$ vyplýva, že vzdialenosť bodu A od bodu B je 5, teda A leží na **zelenej** kružnici n so stredom B a polomerom 5 (pozri obr. 6).

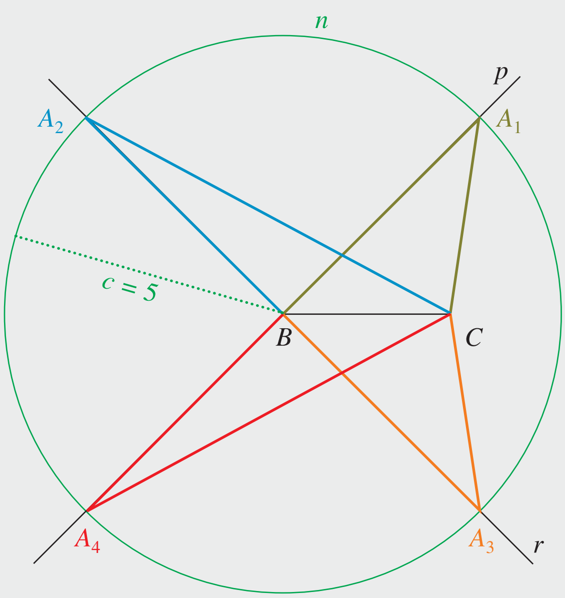
Preto A nájdeme ako priesečník kružnice n a jednej z priamok p, r. Na obr. 6 vidno, že existujú štyri také body, ktorým zodpovedajú štyri trojuholníky A_1BC až A_4BC. Kontrolu, že každý z týchto trojuholníkov spĺňa všetky podmienky zadania, prenechávame vám.



Obr. 4



Obr. 5



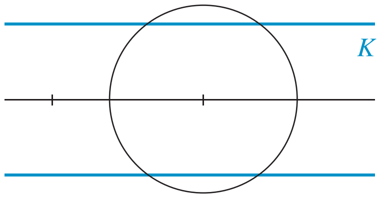
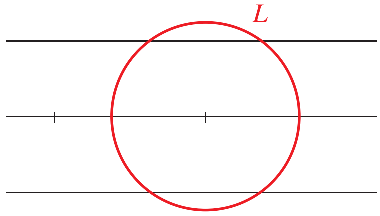
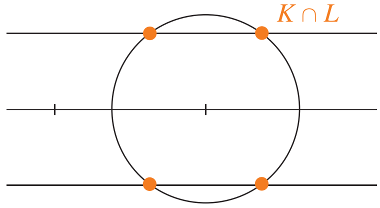
Obr. 6

Porovnaním obrázkov 3 a 6 zistíme, že sme dospeli k rovnakému výsledku ako v predchádzajúcom riešení úlohy 1 (pre väčšiu názornosť sme zodpovedajúce si trojuholníky na obidvoch obrázkoch vyznačili rovnakou farbou).

Pri tejto konštrukcii trojuholníka ABC sa možno stretnúť s pomerne častou chybou (preto sme vás vyzvali, aby ste riešenie dokončili sami – chceli sme zistiť, či sa jej vyhnete). Náčrt na obr. 1 (ktorý je iba ilustračný) môže totiž vzbudiť nesprávny dojem, že bod P musí ležať medzi bodmi A a B – teda že výška na stranu AB musí ležať vnútri hľadaného trojuholníka ABC. Ak sa tým necháme ovplyvniť, budeme bod A hľadať nie na celej priamke BP, ale iba na polpriamke BP s krajným bodom B. Takýmto postupom nájdeme body A_1 a A_3 z obr. 6, neobjavíme však riešenia A_2 a A_4.

HĽADÁME JEDNODUCHÉ MNOŽINY BODOV S DANÝMI VLASTNOSŤAMI

Postup, ktorý sme použili v riešení úlohy 1 na s. 8, možno stručne opísať takto: Hľadáme bod C, ktorý má spĺňať dve podmienky.

Preto nájdeme	*Symbolicky*	
• všetky body, ktoré spĺňajú **prvú** podmienku (v našom prípade to boli všetky body ležiace na priamkach t_1, t_2),		*ak množinu (súbor) všetkých bodov spĺňajúcich prvú podmienku označíme* ***K***
• všetky body, ktoré spĺňajú **druhú** podmienku (v našom riešení všetky body kružnice k).		*a množinu všetkých bodov spĺňajúcich druhú podmienku označíme* ***L****,*
Bod, ktorý hľadáme, spĺňa **obidve** podmienky, preto musí ležať súčasne v obidvoch týchto súboroch (matematicky v *množinách*) bodov.		*tak obidve podmienky spĺňa každý prvok množiny* $\boldsymbol{K \cap L}$.

Zápis $K \cap L$ čítame „K prienik L" a označujeme ním všetky prvky, ktoré patria súčasne do množiny K aj do množiny L.

ÚLOHA

2. Diskutujte o tom, či možno takto opísať aj druhé riešenie úlohy 1 zo s. 10.

Uvedeným spôsobom možno vyriešiť mnohé konštrukčné úlohy. Ak chceme tento postup používať, potrebujeme vedieť, ako vyzerajú množiny bodov, spĺňajúce niektoré jednoduché podmienky. Pre takéto množiny bodov v rovine sa vžilo pomenovanie *množina bodov s danými vlastnosťami (s danou vlastnosťou)*, starší názov bol *geometrické miesto bodov.*

Pozrime sa najprv na podmienky, s ktorými sme sa stretli v našich dvoch riešeniach úlohy 1. Napríklad červená kružnica k bola množinou všetkých bodov (v rovine), ktorých vzdialenosť od bodu B je 3.

Formulácia

množina L je množina všetkých bodov (v rovine), ktorých vzdialenosť od bodu B je 3

znamená:

všetky body množiny L majú uvedenú vlastnosť (vzdialenosť každého z nich od B je 3), žiadne ďalšie body roviny už túto vlastnosť nemajú, teda danú vlastnosť majú iba body ležiace v množine L.

ÚLOHA

3. Opíšte týmto spôsobom (ako množinu všetkých bodov roviny s nejakou vhodnou vlastnosťou)

a) dvojicu priamok t_1, t_2 z prvého riešenia úlohy 1,

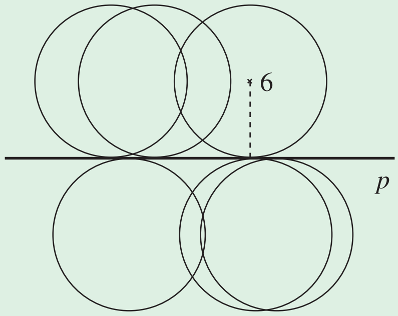
b) kružnicu m z druhého riešenia,

c) všetky body kružnice l z druhého riešenia okrem bodov B a C.

Teraz budeme riešiť obrátenú úlohu: k danej vlastnosti budeme hľadať množinu všetkých bodov, ktoré majú túto vlastnosť.

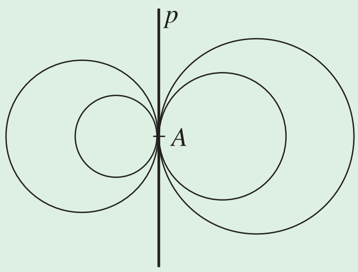
ÚLOHY

4. Chceme narysovať kružnicu s polomerom 6 tak, aby sa dotýkala danej priamky *p*. Ktoré body v rovine môžu byť stredom takej kružnice?

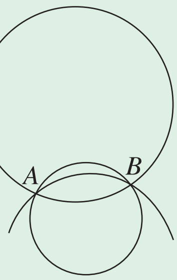


MATEMATICKÁ FORMULÁCIA:
NÁJDITE (V ROVINE) MNOŽINU STREDOV VŠETKÝCH KRUŽNÍC, KTORÉ MAJÚ POLOMER 6 A DOTÝKAJÚ SA DANEJ PRIAMKY *p*.
V ĎALŠOM TEXTE UPREDNOSTNÍME SLOVNÉ FORMULÁCIE, KTORÉ SÚ PRE ČITATEĽA ZROZUMITEĽNEJŠIE.

5. Narysovali sme priamku *p* a na nej sme zvolili bod *A* (matematické vyjadrenie: daná je priamka *p* a na nej bod *A*). Chceme narysovať kružnicu, ktorá sa dotýka priamky *p* v bode *A*. Ktoré body v rovine môžu byť stredmi takej kružnice?



6. Chceme narysovať kružnicu, ktorá prechádza danými dvoma bodmi *A*, *B*. Ktoré body v rovine môžu byť stredmi takej kružnice?



7. Daný je ostrý uhol s vrcholom *V*. Vnútri tohto uhla chceme narysovať kružnicu tak, aby sa dotýkala obidvoch jeho ramien.
Ktoré body môžu byť stredmi takej kružnice?

8. Chceme narysovať kružnicu, ktorá sa dotýka dvoch daných rovnobežiek *p, r*.
Ktoré body môžu byť stredmi takej kružnice?

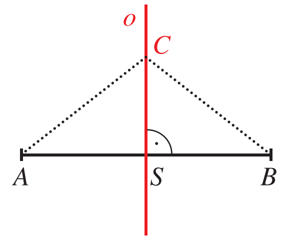
9. Dané sú dva body *A, B*. Chceme narysovať rovnoramenný trojuholník *ABC* so základňou *AB*. Ktoré body roviny môžu byť hľadanými vrcholmi *C*?

Riešením úloh 6, 7 a 9 sú množiny, s ktorými sa stretneme častejšie:

- **Os úsečky *AB*** je priamka, ktorá je kolmá na *AB* a prechádza stredom tejto úsečky.
  Os úsečky *AB* možno opísať ako množinu všetkých bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov *A, B* (teda tvoria ju všetky body *C*, pre ktoré platí $|AB| = |BC|$.
- **Os uhla**, ktorého veľkosť je z intervalu (0°, 180°), je polpriamka, ktorej krajným bodom je vrchol uhla a ktorá tento uhol rozdeľuje na dva uhly rovnakej veľkosti.
  Os uhla možno opísať ako množinu všetkých bodov ležiacich vnútri tohto uhla, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od obidvoch jeho ramien.

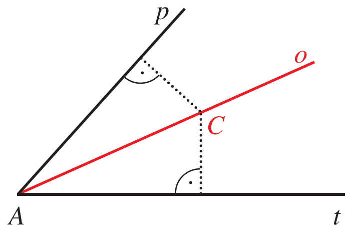
Os úsečky AB je priamka, ktorá prechádza stredom S úsečky AB a je na ňu kolmá.

Tvoria ju všetky body C, ktoré majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť.



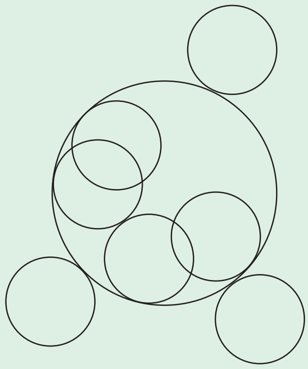
Os konvexného uhla je polpriamka, ktorá ho rozdeľuje na dva uhly s rovnakou veľkosťou.

Tvoria ju všetky body C ležiace vnútri uhla, ktoré majú od jeho ramien p, t rovnakú vzdialenosť.



ÚLOHY

10. Narysovali sme kružnicu k so stredom S a polomerom 5. Chceme narysovať kružnicu m s polomerom 2, ktorá sa bude kružnice k
a) dotýkať zvonka
b) dotýkať zvnútra
c) dotýkať.
Ktoré body môžu byť stredmi kružnice m?



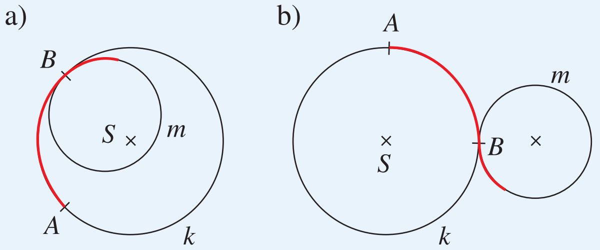
11. Daná je kružnica k so stredom S a polomerom 5. Chceme narysovať kružnicu s polomerom 7, ktorá sa dotýka kružnice k.
Ktoré body roviny môžu byť stredmi tejto kružnice?

12. Narysovali sme kružnicový oblúk (časť kružnice k) s krajnými bodmi A, B a stredom S. Chceme narysovať ďalší kružnicový oblúk (časť kružnice m), ktorý naň hladko nadviaže v bode B.
Ktoré body v rovine môžu byť stredmi kružnice m?

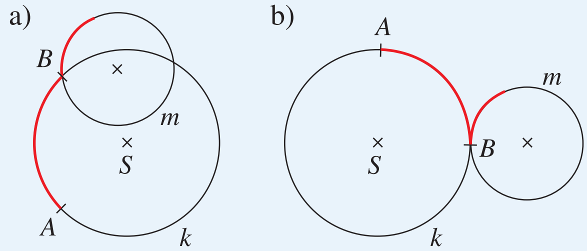
Čo myslíme formuláciou *oblúk kružnice m hladko nadväzuje v bode B na oblúk kružnice k*

Kružnice k, m sa dotýkajú v bode B (teda majú v tomto bode spoločnú dotyčnicu), pričom nadväzujúci oblúk leží na opačnej strane priamky BS než oblúk AB. (Význam poslednej podmienky by mal byť zrejmý z obr. 8 b.)

Pre lepšie pochopenie pojmu „hladko nadviazať“ odporúčame chvíľu diskutovať o obrázkoch 7 a 8. Všimnite si, že na obr. 8 b) síce obidva oblúky majú spoločnú dotyčnicu v bode B, ale nepokladáme ich za hladko nadväzujúce.



Obr. 7
Príklady hladko na seba nadväzujúcich kružnicových oblúkov.



Obr. 8
Príklady kružnicových oblúkov, ktoré na seba nadväzujú v bode B, ale nie hladko.

ÚLOHA

13. Daná je úsečka AB. Chceme narysovať kružnicový oblúk, ktorý na ňu hladko nadviaže v bode B.
a) Sformulujte vysvetlenie pojmu *kružnicový oblúk hladko nadväzujúci na úsečku v bode B.*
b) V ktorých bodoch roviny môže ležať stred tohto kružnicového oblúka?

SPÄŤ KU KONŠTRUKČNÝM ÚLOHÁM

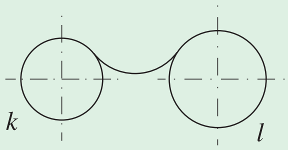
Keď už vieme nájsť množiny bodov zodpovedajúce jednoduchým podmienkam, môžeme skúsiť vyriešiť niekoľko konštrukčných úloh. V každej opíšte postup konštrukcie tak, ako sme to urobili v závere riešenia úlohy 1 a zdôvodnite jeho správnosť. V úlohe 15 riešenie aj narysujte.

ÚLOHY

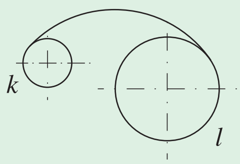
S úlohami 14 až 17 sa môžeme stretnúť v učebniciach technického kreslenia.

14. Do daného ostrého uhla vpíšte kružnicu s polomerom 2. (Úlohu možno sformulovať aj odlišne: dané dve rôznobežné priamky hladko spojiť kružnicovým oblúkom s polomerom 2.)

15. Spojte hladko dve dané kružnice k, l kružnicovým oblúkom (časťou kružnice m) s daným polomerom.
Polomery kružníc k, l zvoľte $r_k = 1{,}5$ cm, $r_l = 2{,}5$ cm, vzdialenosť ich stredov $|S_kS_l| = 5{,}5$ cm, polomer spájajúceho oblúka zvoľte $r_m = 6$ cm. Kružnice k, l spojte najprv oblúkom znázorneným na obr. 9, potom oblúkom znázorneným na obr. 10.



Obr. 9

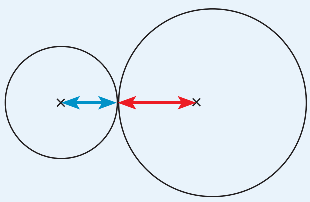


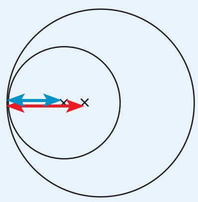
Obr. 10

Dotýkajúce sa kružnice: vzťah medzi polomermi a vzdialenosťou stredov, poloha dotykového bodu

Riešenie úlohy 15 je založené na dvoch jednoduchých poznatkoch o dotýkajúcich sa kružniciach (potrebovali ste ich už pri riešení úloh 10 a 11):

- Ak sa dve kružnice dotýkajú zvonka, tak vzdialenosť ich stredov sa rovná súčtu ich polomerov (obr. 11). Platí aj obrátené tvrdenie: ak sa vzdialenosť stredov dvoch kružníc rovná súčtu ich polomerov, tak sa tieto dve kružnice dotýkajú zvonka (toto si rozmyslite).
- Ak sa dve kružnice dotýkajú zvnútra, tak vzdialenosť ich stredov je rozdiel polomeru väčšej a polomeru menšej kružnice (obr. 12). Aj v tomto prípade platí i obrátené tvrdenie (sformulujte ho).
  V obidvoch prípadoch bod dotyku leží na priamke prechádzajúcej stredmi obidvoch kružníc (skontrolujte to na obr. 11 a 12).


Obr. 11


Obr. 12

RIEŠENIE ÚLOHY 15

V ďalšom sa sústredíme iba na konštrukciu oblúka znázorneného na obr. 10. Začneme ***rozborom***, teda hľadaním vzťahov a vlastností, ktoré umožnia skonštruovať požadovaný oblúk.

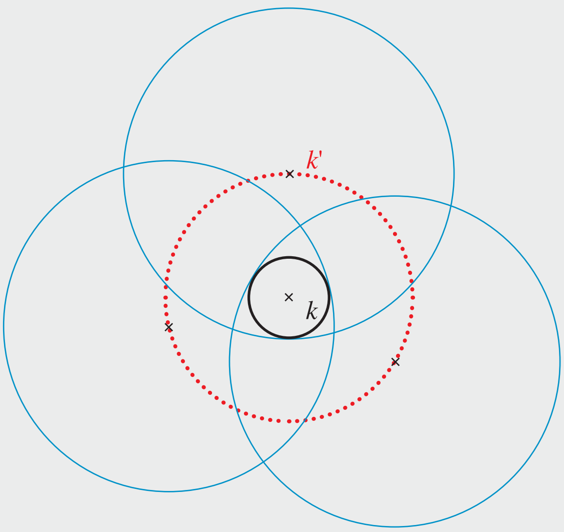
1. Obidve kružnice *k, l* sa dotýkajú tohto oblúka zvnútra. Oblúk teda musí spĺňať dve podmienky: musí sa ho zvnútra dotýkať kružnica *k* a musí sa ho zvnútra dotýkať aj kružnica *l*. Preto stred *S* tohto oblúka budeme hľadať tak, že nájdeme
   - stredy všetkých kružníc s polomerom 6 cm, ktorých sa zvnútra dotýka kružnica *k*,
   - stredy všetkých kružníc s polomerom 6 cm, ktorých sa zvnútra dotýka kružnica *l*.

   Hľadaný stred *S* musí patriť do prvej aj druhej skupiny (množiny) bodov, musí teda ležať v ich prieniku.

ODPORÚČAME PRIPOMENÚŤ SI TERAZ RIEŠENIE ÚLOHY 10, V KTOREJ SME HLADALI PODOBNÚ MNOŽINU BODOV.

2. Pri hľadaní týchto množín využijeme druhý poznatok z poznámky pred týmto riešením (pozri obr. 12). Z neho vyplýva: Ak sa kružnica *k* (stred S_k, polomer r_k = 1,5 cm) dotýka zvnútra kružnice *m* (stred *S*, polomer r_m = 6 cm), tak vzdialenosť stredov *S* a S_k je $r_m - r_k = 6 - 1{,}5 = 4{,}5$ cm. To znamená, že stred *S* leží vo vzdialenosti 4,5 cm od bodu S_k. Musí teda ležať na kružnici *k*' so stredom S_k a polomerom 4,5 cm.

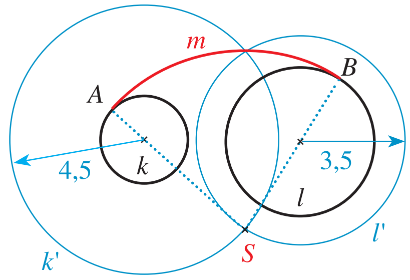
   Každý bod kružnice *k*' je stredom kružnice, ktorá má polomer 6 cm a ktorej sa zvnútra dotýka kružnica *k*. Žiadny iný bod roviny už túto vlastnosť nemá (ako to vyplýva z poznatkov, ktoré sme uviedli v poznámke pred týmto riešením?).



Vyjadrené „v reči množín bodov s danou vlastnosťou“:
kružnica k' (so stredom S_k a polomerom 4,5 cm) je množina stredov všetkých kružníc m, ktoré majú polomer 6 cm a ktorých sa kružnica k dotýka zvnútra.

3. Z podobných úvah vyplýva: množina stredov všetkých kružníc *m*, ktoré majú polomer 6 cm a ktorých sa zvnútra dotýka kružnica *l*, je kružnica *l*' so stredom S_l a polomerom 3,5 cm (dobre si rozmyslite, či tejto formulácii skutočne rozumiete).

4. Stred *S* hľadaného oblúka musí ležať na kružnici *k*' aj na kružnici *l*', nájdeme ho teda ako priesečník týchto kružníc (na obr. 13 sme hľadaný oblúk znázornili iba pre jeden z dvoch priesečníkov kružníc *k*', *l*').



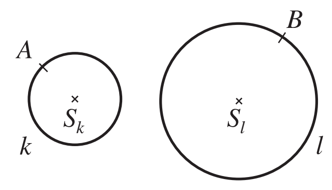
Obr. 13

Zdôvodnenie, že kružnica m s týmto stredom S a polomerom 6 cm sa skutočne dotýka obidvoch kružníc k, l (teda ***overenie správnosti konštrukcie***, ktoré je obdobou skúšky správnosti pri riešení rovníc) prenechávame na vás a diskusiu v triede. Poznamenávame, že veľmi dobrou pomôckou na kontrolu správnosti je narysovať kružnice k, l a skutočne skonštruovať spájajúci oblúk.

V úlohe 10 na s. 70 uvidíme, prečo rysovanie nemôže úplne nahradiť dôkaz správnosti konštrukcie.

Takisto vám prenecháme aj zápis jednotlivých krokov konštrukcie, teda ***postup konštrukcie.*** V ňom okrem opisu, ako nájdeme stred hľadaného oblúka, treba vyriešiť ešte jeden technický problém. Ak chceme spájajúci oblúk narysovať presne, potrebujeme nájsť body A, B, v ktorých sa kružnica m dotýka kružníc k a l. Z úvodu tohto riešenia vieme, že dotykový bod leží na priamke spájajúcej stredy daných kružníc (na obr. 13 sú tieto spojnice vyznačené bodkovanou čiarou). Preto dotykový bod A na kružnici k nájdeme ako jej priesečník s priamkou SS_k (je to ten z dvoch priesečníkov, ktorý leží mimo úsečky SS_k), postup pre kružnicu l je rovnaký.

Poznámka. *V úlohe 15 konštruujeme spájajúci oblúk s* daným *polomerom. Táto podmienka – daný polomer – pôsobí trochu umelo. Mohlo by sa zdať, že prirodzenejšie je určiť body, v ktorých sa má hľadaný oblúk napojiť na kružnice k, l. Tento dojem je však nesprávny: takto formulovaná úloha nemá vo všeobecnosti riešenie (presný význam slov* vo všeobecnosti *vysvetlíme na konci poznámky).*



Obr. 14

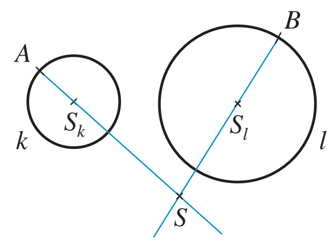
Pozrime sa na úlohu o konštrukcii oblúka s krajnými bodmi A, B, ktorý hladko spája kružnice k, l. Budeme ju riešiť pre polohu kružníc k, l a bodov A, B znázornenú na obr. 14.

Aj tu platí to, čo všade inde v tejto učebnici: pokúste sa úlohu najprv riešiť sami, až potom čítajte ďalej.

Využijeme poznatok z úvodu riešenia úlohy 15: bod dotyku dvoch dotýkajúcich sa kružníc leží na priamke spájajúcej ich stredy. Hľadaný oblúk sa má dotýkať

- *kružnice k v bode A, preto bod A leží na priamke spájajúcej stred S a stred S_k. Inak povedané: body A, S, S_k ležia na jednej priamke, teda bod S musí ležať na priamke AS_k;*
- *kružnice l v bode B, preto jeho stred S musí ležať na priamke BS_l.*

Stred S hľadaného oblúka teda musí byť priesečník priamok AS_k a BS_l (prečo?). Ak tento priesečník nájdeme (obr. 15) a pokúsime sa narysovať oblúk so stredom S, narazíme na problém. Neexistuje totiž oblúk so stredom S, ktorý by súčasne prechádzal obidvoma bodmi A, B (skontrolujte to).

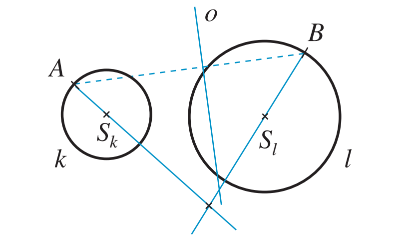


Obr. 15

Z tohto príkladu vidno, prečo súčasťou riešenia konštrukčnej úlohy musí byť aj overenie správnosti konštrukcie (teda kontrola, či skonštruovaný objekt má vlastnosti požadované v zadaní).

Naše úvahy pri hľadaní stredu S mali podobu: Ak S je stred hľadaného oblúka, tak S musí byť priesečník priamok AS_k a BS_l. Preto nájdený priesečník je jediný možný kandidát na stred S. Keďže tento priesečník nám nevyhovuje, tak oblúk s požadovanými vlastnosťami neexistuje (diskutujte o tejto úvahe, napr. so susedom/susedkou v lavici).

Všimnite si podobnosť týchto úvah s postupom pri riešení rovníc. Úpravami rovnice najprv nájdeme možné korene. Skúškou správnosti potom zistíme, ktorý z týchto možných koreňov spĺňa pôvodnú rovnicu.



Obr. 16

V čom bol problém? *Stred S oblúka, ktorý hľadáme, musí okrem uvedených dvoch podmienok (S leží na priamkach AS_k a BS_l) spĺňať ešte ďalšiu: má mať rovnakú vzdialenosť od bodov A a B (prečo?). Množina všetkých bodov s touto vlastnosťou je os úsečky AB (priamka o na obr. 16). Bod, ktorý spĺňa všetky tri uvedené podmienky, musí byť priesečníkom priamok AS_k, BS_l a osi úsečky AB. Ako vidíme na obr. 16, v našom prípade táto situácia nenastala (naopak na obr. 13 je znázornená taká poloha bodov A, B, pri ktorej táto situácia nastala).*

Nie je ťažké skontrolovať, že platí aj obrátené tvrdenie: Ak nejaký bod S spĺňa všetky tri uvedené podmienky, potom spájajúci oblúk so stredom S existuje (diskutujte o tom so spolužiakmi).

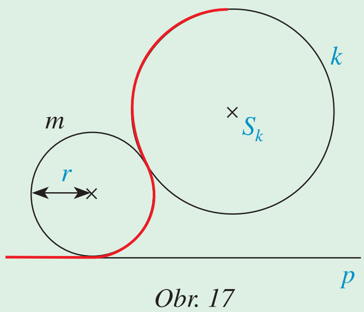
Z týchto úvah vyplýva: Spájajúci oblúk existuje iba vtedy, keď sa priamky AS_k, BS_l a os úsečky AB pretnú v jednom bode. Zrejme je to pomerne zriedkavá situácia, ktorá však niekedy môže nastať (z riešenia úlohy 15 vieme, že pre niektoré dvojice bodov A a B taký oblúk existuje). To vyjadrujeme formuláciou, že daná úloha nemá vo všeobecnosti riešenie (teda má ho iba v niektorých špeciálnych prípadoch).

ÚLOHY

16. Kružnicu k chceme hladko spojiť s priamkou p kružnicovým oblúkom (časťou kružnice m), aby vznikla červená krivka na obr. 17. Polomer r kružnice m je daný (na obr. 17 sú údaje, ktoré sú dané – kružnica k, priamka p a polomer r – vyznačené modrou farbou).

a) Opíšte a zdôvodnite konštrukciu spájajúceho oblúka.

b) Ako treba zvoliť polomer r, aby úloha mala riešenie ? (Predpokladáme, že k, p majú polohu znázornenú na obr. 17.)

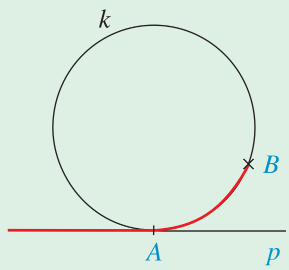


Obr. 17

ÚLOHU MOŽNO OPÍSAŤ AJ DYNAMICKY: PO PRIAMKE p SA KOTÚĽA KRUŽNICA m S POLOMEROM r. MÁME NARYSOVAŤ POLOHU KRUŽNICE m V OKAMIHU, KEĎ SA ZARAZÍ O KRUŽNICU k.

17. Daná je priamka p, na nej bod A a mimo nej bod B. Chceme skonštruovať kružnicu k, ktorá prechádza bodom B a dotýka sa priamky p v bode A. V nasledujúcom opise tejto konštrukcie doplňte chýbajúce časti textu. Potom konštrukciu zdôvodnite.

1. Narysujeme kolmicu na priamku p, ktorá prechádza bodom ....., označíme ju t.
2. Narysujeme ..... úsečky ....., označíme ju ..... .
3. Priesečník priamok t a ..... označíme S, tento bod je ..... .
4. Narysujeme kružnicu so stredom ..... a polomerom ..... .



ZADANIE BY SME MOHLI SFORMULOVAŤ AJ MENEJ ABSTRAKTNE: NA PRIAMKU p POTREBUJEME HLADKO NADVIAZAŤ V BODE A KRUŽNICOVÝM OBLÚKOM TAK, ABY SME SA DOSTALI DO BODU B.

5.2 ... a ako ich skonštruovať

V predchádzajúcej časti sme konštrukcie opisovali, ale – s výnimkou úlohy 15 – sme nerysovali. Ak chceme narysovať množiny bodov, s ktorými sme sa doteraz stretli, musíme ovládať niekoľko základných konštrukcií: rovnobežku s danou priamkou, kolmicu na danú priamku, os úsečky a os uhla.

- Euklidovské a neeklidovské konštrukcie
- Ako súvisia os úsečky, kolmica a os uhla s rovnoramenným trojuholníkom
- Striedavé uhly a rovnobežnosť

EUKLIDOVSKÉ A NEEUKLIDOVSKÉ KONŠTRUKCIE

Postup rysovania závisí od toho, aké prostriedky máme k dispozícii. Od čias starovekej gréckej matematiky sa za ideál pokladá zostrojiť daný útvar len pomocou kružidla a pravítka (pravítko pritom možno použiť iba na rysovanie rovných čiar, nie na meranie).

Požiadavka založiť konštrukcie iba na priamkach a kružniciach sa pripisuje zakladateľovi aténskej Akadémie Platónovi a jeho filozofii: kruh je pre Platóna dokonalým útvarom. Euklides, ktorý matematické vzdelanie získal pravdepodobne v Aténach od Platónových žiakov, sa touto požiadavkou riadil v svojich Základoch. Preto sa konštrukcie, ktoré možno uskutočniť len pomocou pravítka a kružidla (bez merania), nazývajú *euklidovské.*

S euklidovskými konštrukciami súvisia prvé tri z piatich postulátov v Euklidových Základoch:
1. Ľubovoľné dva body možno spojiť úsečkou.
2. Ľubovoľnú úsečku možno nekonečne predĺžiť.
3. Možno nakresliť kružnicu s ľubovoľným stredom a ľubovoľným polomerom.

Euklides, ako si ho predstavoval ilustrátor v 15. storočí.

Euklidovské konštrukcie možno prirovnať k spoločenskej hre (tak ich napokon vníma mnoho matematikov). Hľadaný útvar je určený nejakými bodmi (napr. trojuholník tromi svojimi vrcholmi), cieľom konštrukcie je tieto body skonštruovať. Použiť môžeme iba pravítko a kružidlo a pravítkom nesmieme merať vzdialenosti. Nové body smieme získať iba ako priesečník dvoch priamok, dvoch kružníc alebo priamky a kružnice. Pritom
- narysovať kružnicu môžeme iba vtedy, keď poznáme bod, ktorý je jej stredom, a jej polomer (určený dĺžkou úsečky, ktorej obidva krajné body poznáme),
- narysovať priamku môžeme len vtedy, keď poznáme dva body na nej ležiace.

V histórii sa vyskytlo niekoľko matematikov, zaujímajúcich sa o to, ktoré objekty dokážeme skonštruovať, ak zmeníme alebo sprísnime euklidovské pravidlá. Holanďan Frans van Schooten sa zaoberal konštrukciami, pri ktorých možno používať iba pravítko (ktorým možno rysovať priamky a prenášať veľkosti úsečiek, nie však merať ich dĺžky). Podobným problémom sa neskôr venoval Charles Julies Brianchon (1783 – 1864). Talian Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) naopak skúmal konštrukcie, pri ktorých sa používa iba kružidlo. V r. 1797 dokázal, že každá euklidovská konštrukcia pomocou pravítka a kružidla sa dá uskutočniť aj bez pravítka – len pomocou kružidla (priamku pritom pokladáme za skonštruovanú, ak zostrojíme dva jej body). Až v r. 1928 sa zistilo, že k rovnakému výsledku dospel už v r. 1672 matematik dánskeho pôvodu Georg Mohr (1640 – 1697).

Frans van Schooten
1615 – 1660

Lorenzo Mascheroni
(1750 – 1800)

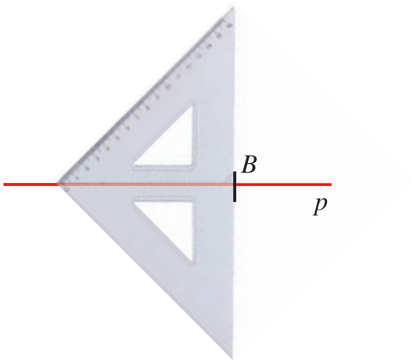
Otázka, ktoré konštrukcie sú možné iba pomocou pravítka alebo iba pomocou kružidla, je pre čistého matematika zaujímavá sama osebe – ako pekný matematický problém. Van Schooten, Brianchon aj Mascheroni mali však aj inú motiváciu: prvých dvoch inšpirovalo zememeračstvo, v ktorom sa nezvykne používať kružidlo, Mascheroniho zasa použitie kružidla pri konštrukcii presných meracích prístrojov.

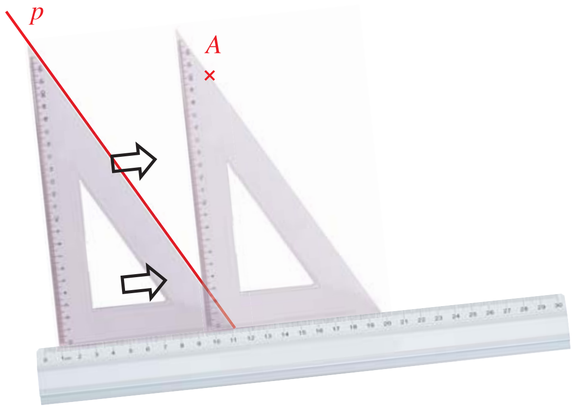
Situácia sa zmení, ak prestaneme klásť dôraz na dodržiavanie euklidovských pravidiel a bude nás zaujímať hlavne to, ako narysovať požadovaný obrázok s dostatočnou presnosťou.

Je to podobný rozdiel ako medzi závodom v športovej chôdzi z miesta A do miesta B (dôraz sa kladie na to, že nesmiete bežať) a úlohou dostať sa rýchlo pešo z A do B (kedy je dôležité najmä doraziť do B, hoci aj poklusom).

Vtedy zistíme, že
- v niektorých prípadoch existuje jednoduchší postup ako euklidovská konštrukcia.

  Typickým príkladom je rysovanie rovnobežiek a kolmíc. Euklidovské konštrukcie, ktoré ďalej opíšeme, sú zdĺhavejšie a často menej presné (keďže nikto nedokáže rysovať *úplne* presne) ako použitie pravítka s ryskou, resp. dvojice pravítok.





Narysovať kolmicu, ak máme pravítko s ryskou, nie je problém. To isté platí pre rysovanie rovnobežiek pomocou dvoch pravítok.

- V iných prípadoch sa ako najvhodnejšia ukáže práve euklidovská konštrukcia. To platí napríklad pre zostrojenie pravidelného šesťuholníka (pozri obr. 18).

Obr. 18
Euklidovská konštrukcia pravidelného šesťuholníka je založená na poznatku, že dĺžka strany šesťuholníka je rovnaká ako polomer opísanej kružnice. Na kružnici zvolíme východiskový bod, od ktorého nanesieme po obvode kružnice šesťkrát jej polomer.

- Niekedy dokážeme narysovať aj útvary, ktoré pomocou euklidovských konštrukcií nemožno zostrojiť.

  Jedným z príkladov je konštrukcia pravidelného 7-uholníka vpísaného do danej kružnice. Možno postupovať metódou pokus-omyl. Zvolíme roztvorenie kružidla (ktoré by mohlo byť stranou hľadaného sedemuholníka) a od zvoleného východiskového bodu na kružnici nanesieme túto veľkosť sedemkrát po jej obvode (podobne, ako sme pri konštrukcii pravidelného 6-uholníka nanášali šesťkrát polomer kružnice). Naším cieľom je po siedmich naneseniach skončiť vo východiskovom bode. Podľa toho, či skončíme pred alebo za týmto bodom, meníme roztvorenie kružidla tak dlho, až sa s dostatočnou presnosťou trafíme do východiskového bodu. Neskôr sa stretneme aj s príkladmi iných neeuklidovských konštrukcií.

Odporúčame vyskúšať si tento návod na konštrukciu pravidelného 7-uholníka a tiež diskutovať o tom, prečo túto konštrukciu – hoci v nej nemeriame a používame iba kružidlo – nemožno označiť za euklidovskú.

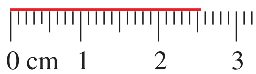
Tvar pravidelného sedemuholníka majú niektoré britské mince.

Ak sa nebudeme obmedzovať iba na euklidovské konštrukcie, môže nám pri rysovaní pomôcť aj meranie dĺžok alebo veľkostí uhlov (poznamenajme, že meranie sa nepokladá za čisto geometrický prostriedok). Ak však chceme výsledný obrázok narysovať dostatočne presne, musí byť dostočne presné aj meranie. Túto požiadavku sa nám nie vždy podarí splniť klasickým školským pravítkom a uhlomerom. Vyskúšajte si to v nasledujúcej úlohe.

ÚLOHA

18. Narysujte úsečku AB tak, aby ste pri rysovaní nepoznali jej dĺžku (napríklad vyznačte na papieri dva body a spojte ich úsečkou). Potom úsečku zmerajte, zmeranú dĺžku vydeľte dvoma a na základe toho nájdite stred S úsečky AB.

Potom skontrolujte presnosť svojho postupu: Kružidlom narysujte kružnicu so stredom S, ktorá prechádza bodom A. Ak táto kružnica prechádza aj bodom B, bol váš postup dostatočne presný (presnosť je tu vyjadrená vašou schopnosťou rozlíšiť, či bod B leží alebo neleží na kružnici).



Ak meraním zistíme, že dĺžka úsečky je niekde medzi 25 a 26 mm, bližšie k 25, nemusí sa nám podariť pomocou školského pravítka nájsť jej stred s dostatočnou presnosťou. Ak má byť „výpočtová“ konštrukcia (zmeraj dĺžku úsečky – vydeľ dvoma – nanes na úsečku vypočítanú polovičnú dĺžku) úspešná, potrebujeme dostatočne presné meradlo.

Niektoré z euklidovských konštrukcií, ktoré ďalej opíšeme, skutočne využijeme pri rysovaní, niektoré budú iba teoretické a pri rysovaní ich nahradíme inými postupmi. V nasledujúcom texte však dôležitejšie ako použiteľnosť konštrukcií bude ich zdôvodnenie. Vďaka nemu si v pamäti oživíme niektoré jednoduché vlastnosti rovinných útvarov a precvičíme si logické uvažovanie.

AKO SÚVISIA OS ÚSEČKY, KOLMICA A OS UHLA S ROVNORAMENNÝM TROJUHOLNÍKOM

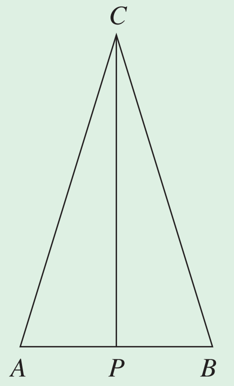
Euklidovské konštrukcie kolmice, osi uhla aj osi úsečky vychádzajú z vlastností rovnoramenného trojuholníka. Tie si pripomenieme v nasledujúcej úlohe.

ÚLOHA

19. Doplňte chýbajúce časti textu.

Ak P je stred základne AB rovnoramenného trojuholníka ABC, tak trojuholníky APC a ..... sú zhodné podľa vety ..... (pretože strana PC je spoločná, ...). V zhodných trojuholníkoch majú uhly pri zodpovedajúcich si vrcholoch rovnakú veľkosť. Preto sú uhly BPC a ..... rovnako veľké. Súčet týchto dvoch uhlov má veľkosť 180°, preto každý z nich má veľkosť ..... . To znamená, že spojnica vrcholu C a stredu P základne je ..... na priamku AB. Preto CP je os úsečky ..... .

Rovnakú veľkosť musia mať aj uhly ACP a ..... Z toho vyplýva, že polpriamka CP je os uhla ..... .



V úlohe 19 sme overili, že

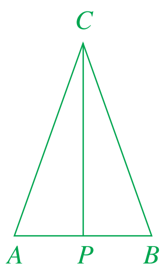
v každom rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB leží vrchol C na osi úsečky AB. (1)

PLATÍ TO AJ NAOPAK:

ak bod C leží na osi úsečky AB (a je rôzny od stredu tejto úsečky), tak trojuholník ABC je rovnoramenný. (2)

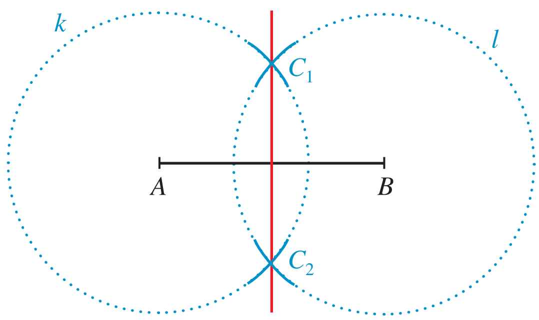
SKÚSTE VYSVETLIŤ, AKO MOŽNO (2) ZDÔVODNIŤ POMOCOU VETY *sus* O ZHODNOSTI TROJUHOLNÍKOV. ZDÔVODNENÍM (1) A (2) SME SKONTROLOVALI PRAVDIVOSŤ TVRDENIA *MNOŽINA VŠETKÝCH BODOV C V ROVINE, KTORÉ MAJÚ ROVNAKÚ VZDIALENOSŤ OD BODOV A A B, JE OS ÚSEČKY AB* (ROZMYSLITE SI, ČI JE VÁM TO JASNÉ). TENTO POZNATOK JE VÄČŠINE Z NÁS INTUITÍVNE ZREJMÝ, PRETO NECÍTIME POTREBU JEHO DÔKAZU. MATEMATICI VŠAK MAJÚ S RÔZNYMI ZDANLIVO ZREJMÝMI TVRDENIAMI ZLÉ SKÚSENOSTI (OBČAS SA TOTIŽ ZISTÍ, ŽE NIEKTORÉ NEPLATÍ), PRETO KONTROLUJÚ SPRÁVNOSŤ AJ TAKÝCHTO INTUITÍVNE JASNÝCH POZNATKOV.

Ak je trojuholník ABC rovnoramenný a P je stred základne AB, tak



- priamka CP je kolmá na AB,
- priamka CP je os úsečky AB,
- polpriamka CP je os uhla ACB.

Preto, ak narysujeme dva rôzne rovnoramenné trojuholníky ABC_1 a ABC_2 s tou istou základňou AB, tak body C_1 aj C_2 ležia na osi úsečky AB. Os úsečky je priamka, na jej určenie stačia dva rôzne body. Z toho vyplýva: priamka C_1C_2 musí byť os úsečky AB. Z uvedenej úvahy (dobre si ju rozmyslite) vyplýva štandardná euklidovská konštrukcia osi úsečky, pozri obr. 19. Rovnaký postup môžeme použiť aj pri hľadaní stredu danej úsečky AB (prečo?).

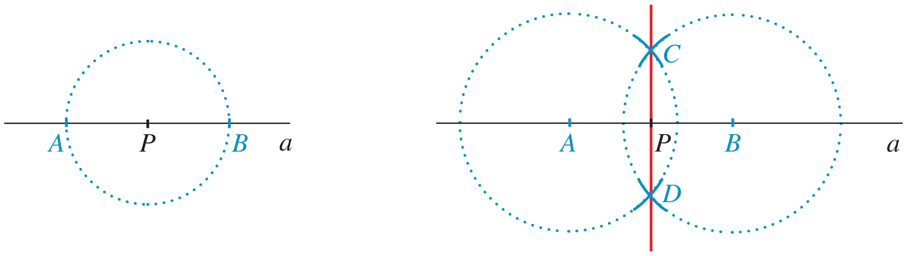


Obr. 19
Konštrukcia osi úsečky AB pomocou pravítka a kružidla.

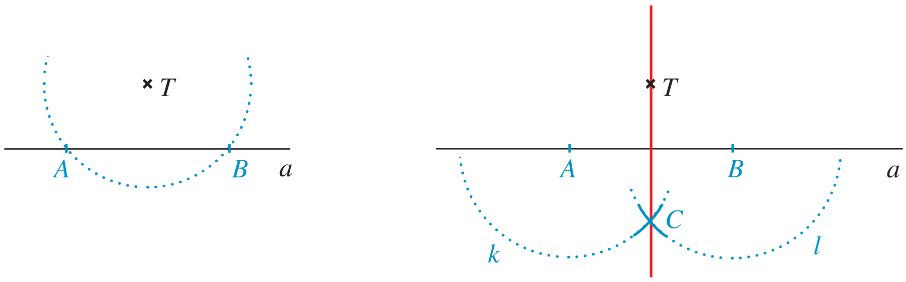
ÚLOHA

20. Opíšte postup konštrukcie osi úsečky a diskutujte o zdôvodnení jej správnosti.

Os úsečky AB je na túto úsečku kolmá. Preto euklidovská konštrukcia kolmice daným bodom na danú úsečku vychádza z rovnakej myšlienky ako konštrukcia osi úsečky. Dva možné prípady sme znázornili na obr. 20 (daný bod P leží na priamke a) a 21 (daný bod T leží mimo priamky a).



Obr. 20
Konštrukcia kolmice na priamku a v bode P, ktorý leží na a.



Obr. 21
Konštrukcia kolmice na priamku a prechádzajúcej bodom T, ktorý leží mimo a.

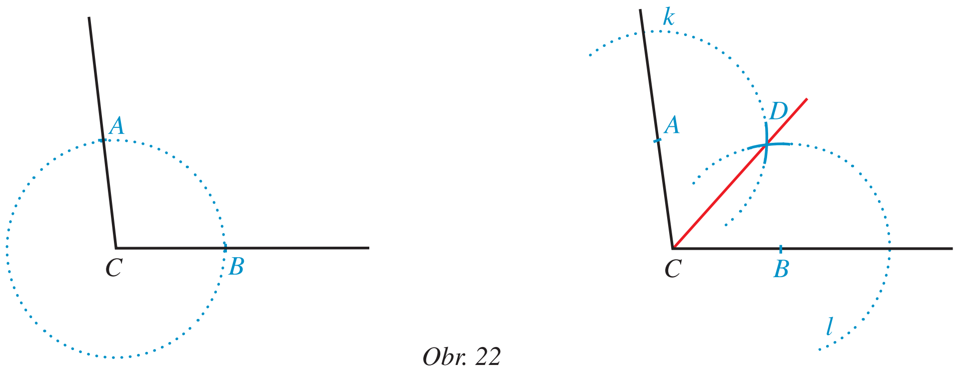
ÚLOHA

21. Opíšte postup obidvoch konštrukcií a vysvetlite, ako súvisia s konštrukciou osi úsečky.

V úlohe 19 sme si pripomenuli, že v rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB je os úsečky AB súčasne aj osou uhla pri vrchole C.

Toto vyjadrenie nie je úplne presné (ale veríme, že každý čitateľ ho pochopil správne). V čom je (formálny) problém: os úsečky je priamka, kým os uhla je polpriamka.

Preto aj euklidovská konštrukcia osi daného uhla bude súvisieť s konštrukciou osi úsečky. Postup sme znázornili na obr. 22.



Obr. 22
Konštrukcia osi uhla.

ÚLOHA

22. Opíšte postup konštrukcie osi uhla a zdôvodnite ho.

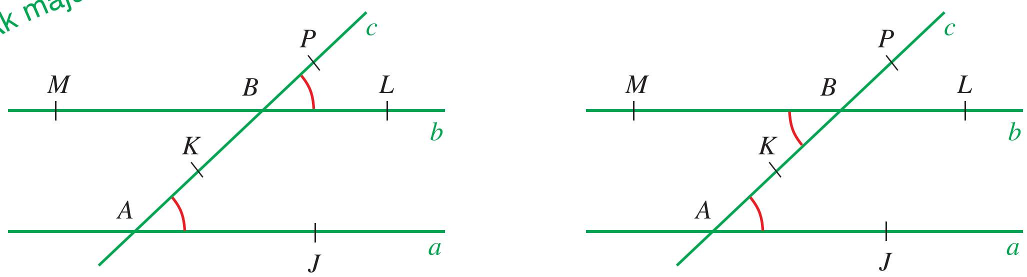
STRIEDAVÉ UHLY A ROVNOBEŽNOSŤ

Pri úvahách o rovnobežkách použijeme toto kritérium rovnobežnosti (pozri obr. 23): Ak priamka *c* pretína priamky *a, b* v bodoch *A, B* a uhly *JAK* a *LBP* majú rovnakú veľkosť, tak priamky *a, b* sú rovnobežné.

V Euklidových Základoch nájdeme aj dôkaz obráteného tvrdenia: Ak sú priamky *a, b* rovnobežné, tak uhly *JAK* a *LBP* majú rovnakú veľkosť (toto je ďalšie z tvrdení, ktoré väčšina z nás pokladá za zrejmé). V dôkaze sa využíva piaty Euklidov postulát – posledné z piatich úvodných tvrdení, z ktorých vychádza euklidovská geometria. Možno ho sformulovať takto: *Každým bodom, ktorý leží mimo danej priamky, možno viesť jedinú rovnobežku s touto priamkou.* Otázka, ako tento postulát súvisí s predchádzajúcimi štyrmi, zohrala v histórii matematiky významnú úlohu. Snaha o jej zodpovedanie priviedla matematikov v 19. storočí k poznatku, že môžu existovať geometrické štruktúry, v ktorých prvé štyri euklidovské postuláty platia, ale piaty neplatí. Takéto štruktúry sa nazývajú neeuklidovské geometrie.

Keďže uhly *LBP* a *MBK* majú rovnakú veľkosť (je to dvojica vrcholových uhlov), možno predchádzajúcu podmienku vysloviť aj v podobe

Ak majú striedavé uhly *JAK* a *MBK* rovnakú veľkosť, tak priamky *a, b* sú rovnobežné.



Obr. 23
Priamky a, b sú rovnobežné práve vtedy, keď červeno vyznačené uhly majú rovnakú veľkosť.

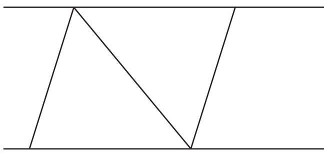
Dvojica uhlov znázornených na obr. 23 vpravo sa nazýva *dvojica striedavých uhlov pri priamkach a, b* (toto označenie sa používa aj v prípade, že *a, b* nie sú rovnobežné).

ÚLOHA

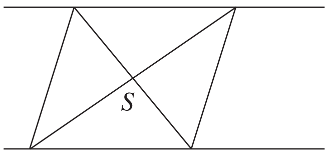
23. Daná je priamka *p* a mimo nej bod *A*. Chceme narysovať priamku, ktorá je rovnobežná s *p* a prechádza bodom *A*. Asi sa zhodneme, že najjednoduchší postup je skonštruovať rovnobežku pomocou dvoch pravítok (z ktorých jedno musí byť trojuholníkové, pozri obrázok na s. 20). Navrhnite, ako postupovať, keď máte iba jedno pravítko s ryskou.

Každý z nasledujúcich poznatkov možno využiť na euklidovskú konštrukciu rovnobežky s danou priamkou:

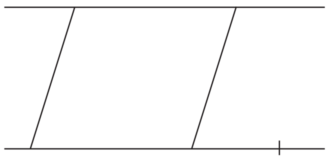
1. Ak sú trojuholníky *ABD* a *CDB* zhodné, tak sú priamky *AB* a *DC* rovnobežné (obr. 24).
2. Ak bod *S* leží v strede úsečiek *AC* a *DB*, tak priamky *AB* a *DC* sú rovnobežné (obr. 25).
3. Ak majú úsečky *AD* a *BC* rovnakú dĺžku a uhly *BAD* a *EBC* rovnakú veľkosť, tak sú priamky *AB* a *DC* rovnobežné (obr. 26).



Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26

ÚLOHA

24. a) Overte správnosť uvedených troch tvrdení.

b) Daná je priamka *p* a mimo nej bod *D*. Na základe každého z troch uvedených tvrdení navrhnite euklidovskú konštrukciu priamky, ktorá je rovnobežná s *p* a prechádza bodom *D*.

PODOBNE AKO V ÚLOHE 19, AJ TVRDENIA 1 AŽ 3 VÄČŠINA Z NÁS POKLADÁ ZA OČIVIDNÉ. ÚLOHU 24 PRETO CHÁPTE AKO PRÍLEŽITOSŤ NA PRECVIČENIE VAŠEJ SCHOPNOSTI ARGUMENTOVAŤ. TREBA UKÁZAŤ, ŽE V NIEKTOREJ VHODNE ZVOLENEJ DVOJICI STRIEDAVÝCH UHLOV PRI PRIAMKACH *AB* A *DC* MAJÚ OBIDVA UHLY ROVNAKÚ VEĽKOSŤ (TÝM JE ZARUČENÁ ROVNOBEŽNOSŤ, POZRI OBR. 23). MÁTE VYSVETLIŤ, AKO MOŽNO EXISTENCIU TAKEJTO DVOJICE UHLOV ODVODIŤ Z DANÝCH INFORMÁCIÍ (NAPR. V PRÍPADE TVRDENIA K OBR. 24 Z TOHO, ŽE TROJUHOLNÍKY *ABD* A *CDB* SÚ ZHODNÉ).

RIEŠENIE

Uvedieme riešenie pre tvrdenie znázornené na obr. 26.

a) *Najprv použijeme informáciu o rovnakej veľkosti uhlov EBC a BAD.*
Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku *ABD* (obr. 27) je 180°:

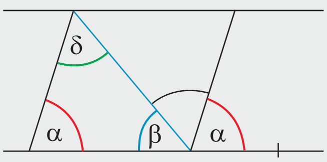
$$\alpha + \delta + \beta = 180°. \qquad (1)$$

Aj súčet označených uhlov pri vrchole *B* – teda uhlov *EBC, CBD* a *DBA* – je 180°, pritom podľa zadania uhol *EBC* má rovnakú veľkosť ako *BAD* (teda veľkosť α):

$$\alpha + |\sphericalangle\, CBD| + \beta = 180°. \qquad (2)$$

Z porovnania (1) a (2) vidíme, že uhol *CBD* musí mať veľkosť δ:

$$|\sphericalangle\, CBD| = \delta$$



Obr. 27
Uhly CBD a ADB musia mať rovnakú veľkosť.

Potom vyžijeme informáciu o rovnakej dĺžke úsečiek AD a CB.

Trojuholníky *ABD* a *CDB* (obr. 28) sú zhodné podľa vety *sus* (strana-uhol-strana): strany *AD* a *CB* majú rovnakú dĺžku podľa zadania našej úlohy, strana *DB* je spoločná, uhly *ADB* a *CBD* majú rovnakú veľkosť δ.

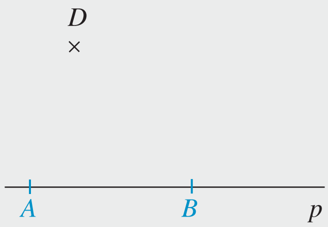
V zhodných trojuholníkoch majú uhly pri zodpovedajúcich si vrcholoch rovnakú veľkosť, preto

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|.$$

Obr. 28
Trojuholníky ABD a CDB sú zhodné (obr. vľavo), preto uhly ABD a CDB majú rovnakú veľkosť (obr. vpravo).

Teraz už môžeme použiť naše kritérium rovnobežnosti: našli sme dvojicu striedavých uhlov pri priamkach AB a DC (sú to uhly ABD a CDB), pre ktorú vieme dokázať, že obidva uhly majú rovnakú veľkosť. Preto sú priamky AB a DC rovnobežné.

b) Zvoľme na priamke p dva body A, B (obr. 29). Ak chceme využiť poznatok, ktorý sme overili v časti a), potrebujeme skonštruovať úsečku BC, ktorá má rovnakú dĺžku ako AD a zviera s priamkou p rovnaký uhol ako úsečka AD (pričom bod C leží na rovnakej strane od p, ako bod D, korektne matematicky „body C, D ležia v tej istej z dvoch polrovín, na ktoré rozdeľuje rovinu priamka p“).



Obr. 29

Ak máme byť úplne presní: nepotrebujeme celú úsečku BC, potrebujeme iba bod C.

To môžeme dosiahnuť tak, že skonštruujeme trojuholník BFC, ktorý vznikne posunutím trojuholníka ABD po priamke p tak, že vrchol A sa posunie do bodu B. Zo zhodnosti $\Delta\, ABD \cong \Delta\, BFC$ vyplýva, že úsečky AD a BC majú rovnakú dĺžku a uhly BAD a FBC majú rovnakú veľkosť (nakreslite si obrázok a skontrolujte správnosť tejto úvahy).

V trojuholníku ABD poznáme dĺžku všetkých strán (pretože poznáme polohu vrcholov A, B a D). Máme teda zostrojiť trojuholník BFC, v ktorom poznáme dĺžku všetkých strán.

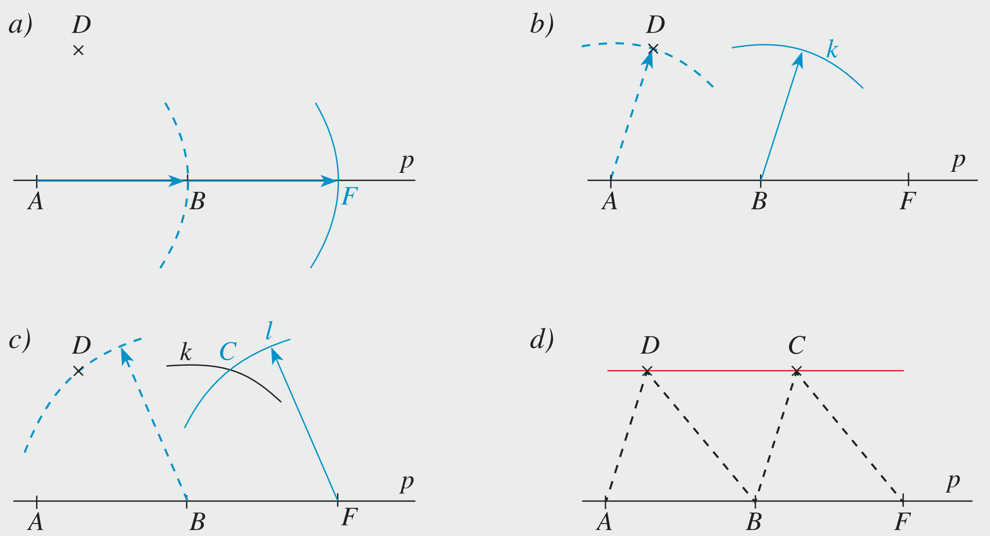
Konštrukciu trojuholníka BFC, v ktorom poznáme dĺžku všetkých troch strán, možno opísať pomocou množín bodov s danou vlastnosťou. Poloha bodov B, F je v našom prípade daná. Bod C nájdeme ako priesečník dvoch kružníc:

- kružnica k je množina všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu B sa rovná danej dĺžke strany BC (v našom prípade je to dĺžka úsečky AD),
- kružnica l je množina všetkých bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od bodu F sa rovná danej dĺžke strany FC (v našom prípade je to dĺžka úsečky BD).

Postup konštrukcie je znázornený na obr. 30:

1. Kružidlom (obr. 30 a) nanesieme na priamku p od bodu B dĺžku úsečky AB (teda narysujeme kružnicu – presnejšie kružnicový oblúk so stredom B a polomerom $|AB|$, aby sme našli ten jeho priesečník s priamkou p, ktorý je rôzny od bodu A). Dostaneme tak bod F.

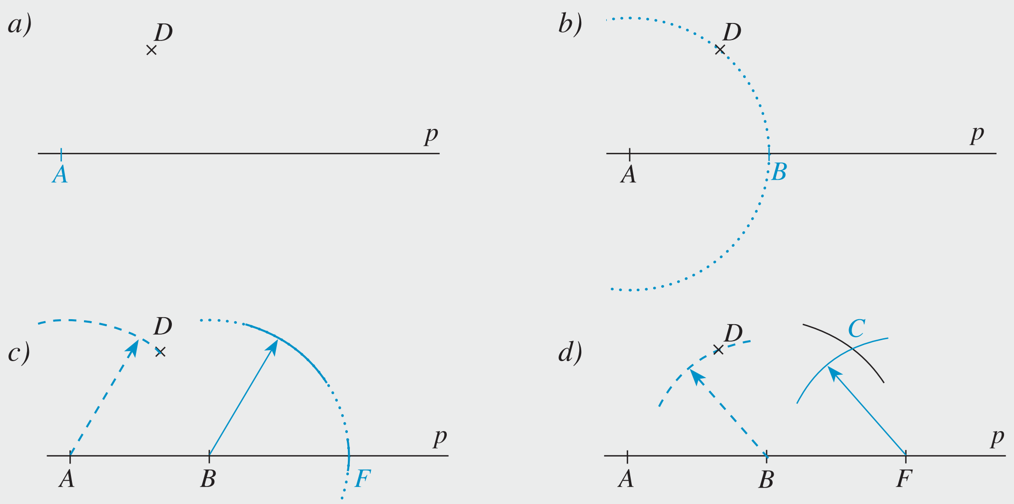
2. Narysujeme (obr. 30 b) kružnicu k so stredom B a polomerom $|AD|$ (opäť – ako vidno z obrázka – stačí narysovať len vhodný kružnicový oblúk).
3. Narysujeme (obr. 30 c) kružnicu l so stredom F a polomerom $|BD|$. Priesečník oblúkov k, l je bod C.
4. Priamka DC (obr. 30 d) je hľadaná rovnobežka prechádzajúca bodom D.

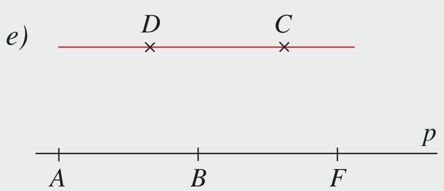


Obr. 30
Euklidovská konštrukcia rovnobežky.

Pozrime sa na konštrukciu znázornenú na obr. 30 z hľadiska jej prácnosti. Pri konštrukcii bodu C musíme rysovať kružnicové oblúky s tromi rôznymi polomermi – teda musíme dvakrát meniť rozovretie kružidla. Navrhnutý postup konštrukcie možno upraviť tak, aby sme potrebovali pracovať iba s dvoma rôznymi polomermi. Dosiahneme to vhodnou voľbou bodov A, B (skontrolujte, že konštrukcia na obr. 30 je správna pri akejkoľvek polohe dvojice bodov A, B na priamke p). Zjednodušená verzia konštrukcie je na obr. 31, na vás prenechávame jej opis a diskusiu, v čom je zjednodušenie a ako sme ho dosiahli.

Úlohu sme už splnili, ale navrhnutá konštrukcia je zbytočne prácna.





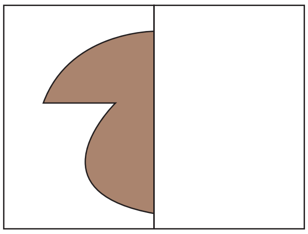
Obr. 31
Euklidovská konštrukcia rovnobežky (zjednodušená verzia).

5.3 Rysujeme súmerné, posunuté a otočené útvary

- Zrkadlový obraz a osová súmernosť
- Posunutie
- Rotačná symetria a otočenie
- Stredová súmernosť

Niekedy potrebujeme narysovať kópiu nejakého útvaru, ktorá je voči originálu posunutá, otočená alebo je jeho zrkadlovým obrazom. Ukážeme, ako nám pri tom pomôžu kolmice, rovnobežky a kružnice.

ZRKADLOVÝ OBRAZ A OSOVÁ SÚMERNOSŤ



Obr. 32
Viete dokresliť druhú polovicu obrázka, a potom ukázať os súmernosti a dve zrkadlovo zhodné polovice?

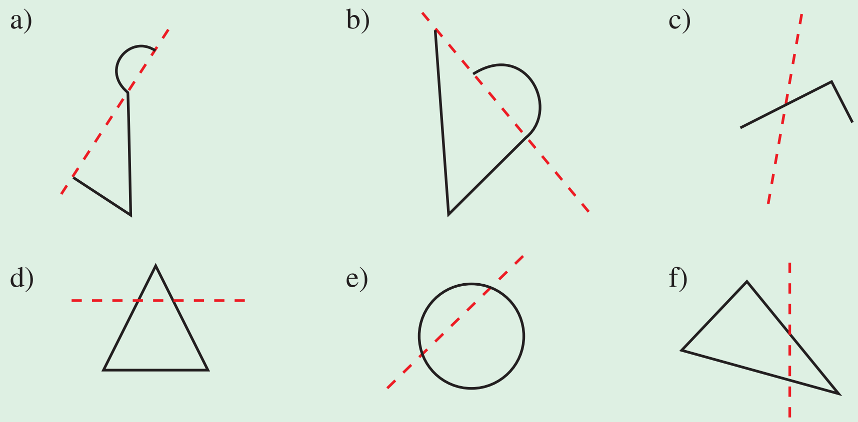
Spomeňte si na úlohy *dokresli druhú polovicu obrázka* (pozri obr. 32), ktoré ste riešili ešte ako malé deti. Výsledkom v nich bol súmerný obrázok: priamka – os súmernosti ho rozdeľovala na dve polovice, z ktorých jedna bola zrkadlovým obrazom druhej.

Kreslíme súmerné obrázky

V úlohe 25 nakreslíme niekoľko ďalších súmerných obrázkov. Od obr. 32 sa budú líšiť dvoma detailmi: os súmernosti nebude vždy zvislá a kresba v zadaní cez ňu bude prechádzať z jednej strany na druhú.

ÚLOHY

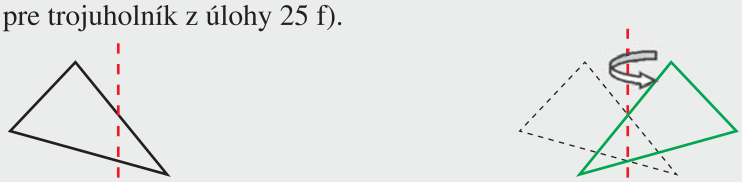
25. Prekreslite obrázky na papier a doplňte ich (stačí rukou) tak, aby boli súmerné podľa červeno vyznačenej osi súmernosti. Dokreslite iba to, čo je nevyhnutné na to, aby vznikol súmerný obrázok.



S osovou súmernosťou sa stretávame v prírode aj v ľudských výtvoroch.

RIEŠENIE

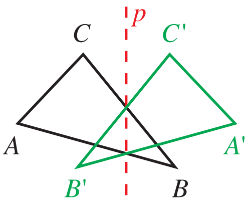
Asi ste prišli na to, že chýbajúcu časť obrázka (teda to, čo treba dokresliť) nájdeme tak, že kresbu zo zadania preklopíme okolo danej osi súmernosti. Dostaneme tak zrkadlový obraz pôvodnej kresby. Na nasledujúcej dvojici obrázkov sme tento postup znázornili pre trojuholník z úlohy 25 f).



Pôvodnú kresbu ... *... preklopíme okolo osi súmernosti, dostaneme tak jej zrkadlový obraz.*

Riešenie úlohy 25 f) – obidva trojuholníky v jednom obrázku – je na obr. 33 (doplnená časť je vyznačená zeleno).

V riešení úlohy 25 sme sa stretli s dvojicou rovinných útvarov, z ktorých jeden vznikne preklopením druhého okolo priamky p. V takom prípade hovoríme, že jeden útvar je s druhým **súmerný podľa priamky p**, alebo že jeden je **obraz** druhého **v súmernosti podľa priamky p**.



Obr. 33

Trojuholník $A'B'C'$ je súmerný s trojuholníkom ABC podľa priamky p.

Bod A' je súmerný s bodom A podľa priamky p.

Ako narysovať zrkadlový obraz

ÚLOHY

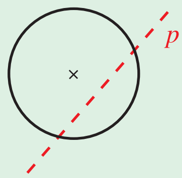
26. a) Na obr. 33 je bod A' súmerný s bodom A podľa priamky p. Opíšte čo najpresnejšie vzájomnú polohu priamky p a úsečky $A'A$.
Odpoveď na otázku a) využite pri riešení úloh b) a c).
b) Daná je os súmernosti p a bod A, ktorý neleží na p. Opíšte konštrukciu bodu A', ktorý je s A súmerný podľa p.
c) Vieme, že bod A je súmerný s bodom B podľa priamky p. Polohu bodov A, B poznáme, nepoznáme však polohu priamky p. Ako skonštruujeme priamku p?

27. Bod A leží na priamke p. Ktorý bod je s ním súmerný podľa p?

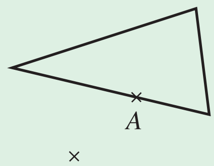
28. Daná je kružnica k a priamka p. Potrebujeme narysovať kružnicu k' súmernú s k podľa priamky p (pozri napr. obr. 34). Chceme použiť iba euklidovské prostriedky (nemôžeme teda napr. merať). Opíšte postup v prípade, že
a) poznáte stred kružnice k,
b) nepoznáte stred kružnice k.

Pri rysovaní zrkadlových obrazov nám môžu pomôcť odpovede na nasledujúce otázky.

29. Narysujte do zošita obrázky približne zodpovedajúce obrázkom 34 a 35 (alebo si vymeňte zošity so susedom, on narysuje predlohy pre vás a vy preňho – tým tiež dosiahneme, že nebudete poznať polomer kružnice v zadaní podľa obr. 34).
a) Do predlohy podľa obr. 34 dorysujte kružnicu, ktorá je s kružnicou z predlohy súmerná podľa priamky p.
b) Do predlohy podľa obr. 35 dorysujte trojuholník, ktorý je s trojuholníkom z predlohy osovo súmerný, a to tak, aby obrazom bodu A v tejto súmernosti bol bod B.



Obr. 34

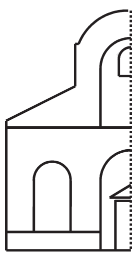


Obr. 35

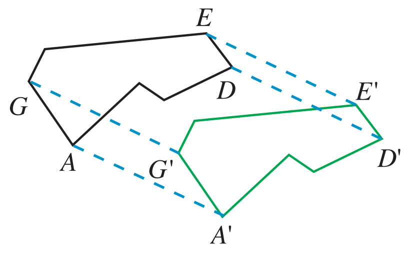
Teraz si skontrolujte, či ste osovej súmernosti porozumeli.

Úlohu môžete skomplikovať tým, že na predlohe z obr. 34 nevyznačíte stred kružnice.

Ak chcete využiť osovú súmernosť a základné geometrické útvary pri rysovaní menej abstraktných obrázkov, skúste navrhnúť a narysovať fasádu v renesančnom štýle. Ako inšpiráciu ponúkame dve fasády, ktoré navrhol Leon Battista Alberti (1404 – 1472), jeden z významných predstaviteľov talianskej renesancie. Vľavo je kostol Tempio Malatestiano v Rimini (naznačená je Albertiho pôvodná predstava), vpravo bazilika Sant´Andrea v Mantove. Na internete skúste vyhľadať ďalšie Albertiho fasády, napr. kostoly San Sebastiano v Mantove alebo Santa Maria Novella vo Florencii.



POSUNUTIE



Obr. 36

Po rysovaní súmerných obrázkov sa naša pozornosť obráti na posunuté obrázky. Úloha: k danému útvaru treba narysovať zhodný útvar, len o niečo posunutý. Na obr. 36 je originálny obrázok čierny, posunutý obrázok zelený. Modré úsečky spájajú bod pôvodného obrázka so zodpovedajúcim bodom v posunutom obrázku. Pri posunutí nemeníme sklon obrázka, teda napr. zvislý smer na pôvodnom obrázku zostane zvislým aj na posunutom obrázku. Z toho vyplýva, že na obr. 36 platí $ED \| E'D'$, $GA \| G'A'$ atď. (toto si rozmyslite).

a)

b)

c)

d)

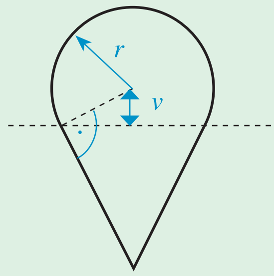
e)

Obr. 39
Príklady rotačnej symetrie

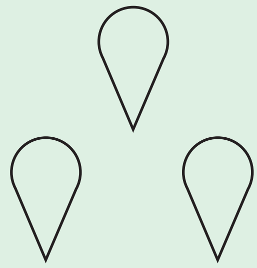
a) zvierací motív z keramiky Indiánov z údolia rieky Mimbres,
b) tri obrnené nohy zo znaku ostrova Man,
c) heraldická päťlistá ruža (taká je napr. v erbe Prešova),
d) gotický ornament,
e) pôdorys pevnosti z erbu Nových Zámkov.

ÚLOHA

30. a) Opíšte čo najpresnejšie vzťah medzi úsečkami EE', DD', GG' a AA' na obr. 36.
Odpoveď na otázku a) využite pri riešení úlohy b).
b) Narysujte kvapku znázornenú na obr. 37 (výsledný tvar závisí od toho, ako zvolíte veľkosti v, r). Potom obrázok doplňte dvoma ďalšími rovnakými kvapkami tak, aby ste dostali tri kvapky usporiadané do rovnostranného trojuholníka (pozri obr. 38).



Obr. 37



Obr. 38

ROTAČNÁ SYMETRIA A OTOČENIE

V prírode aj v ľudských výtvoroch sa okrem osovej súmernosti stretávame s ďalším typom symetrie – s rotačnou symetriou. Jej opis by mal byť zrejmý z príkladov na obr. 39. Ak rotačne symetrickú kresbu otočíme o vhodný uhol s veľkosťou $\alpha \in (0°, 360°)$, dostaneme kresbu zhodnú s pôvodnou.

ÚLOHY

31. Prečo v opise rotačnej symetrie hovoríme o otočení o uhol s veľkosťou $\alpha \in (0°, 360°)$, t. j. prečo vylučujeme uhly $\alpha = 0°$, $\alpha = 360°$? (Najprv si v diskusii ujasnite, čo je otočenie o 0°, o 360°).

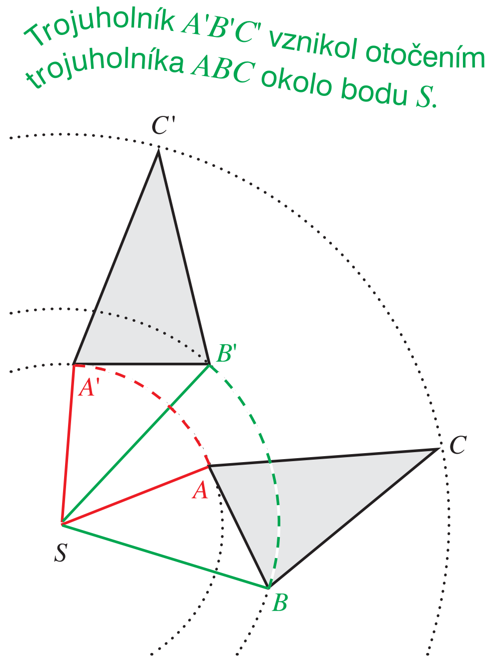
32. a) O aký uhol treba otočiť jednotlivé kresby na obr. 39, aby vznikla kresba zhodná s pôvodnou? (Pozor, pre každú kresbu existuje takých uhlov viac.) Pri určení veľkosti uhla využite štandardnú dohodu: pri otáčaní proti smeru hodinových ručičiek má uhol otočenia kladnú veľkosť, pri otáčaní v opačnom smere má zápornú veľkosť.
b) Niektoré z kresieb na obr. 39 sú navyše aj osovo súmerné. Zistite, ktoré to sú a nájdite ich osi súmernosti.

Ako sa osovo súmerné obrázky skladajú z dvoch polovíc, ktoré sú jedna zrkadlovým obrazom druhej, tak sa rotačne symetrické obrázky skladajú z niekoľkých zhodných častí, ktoré vzniknú jedna z druhej otočením (napr. kresba na obr. 39 e) sa skladá zo šiestich takýchto častí (skontrolujte to). Ak teda chceme rysovať rotačne symetrické obrázky, potrebujeme vedieť k útvaru (časti obrázka) narysovať jeho kópiu otočenú o daný uhol. V úlohe 33 budeme riešiť túto úlohu pre trojuholník, vám prenechávame úvahy o otáčaní kružníc.

ÚLOHY

33. Trojuholník $A'B'C'$ na obr. 40 vznikol otočením trojuholníka ABC okolo bodu S. Pri otáčaní sa každý z vrcholov trojuholníka ABC pohybuje po kružnici so stredom S. Kde na obr. 40 je znázornený uhol, o ktorý sme trojuholník ABC otočili?

34. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC. Mimo neho zvoľte bod S. Potom narysujte trojuholník $A'B'C'$, ktorý vznikne otočením trojuholníka ABC okolo bodu S o uhol 40°.



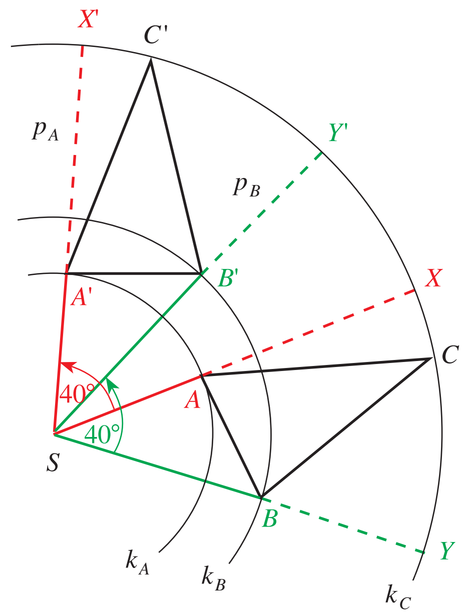
Obr. 40

RIEŠENIE

Postup vyplýva z obr. 40. Narysujeme polpriamky SA, SB a SC s krajným bodom S a tri kružnice so stredom S: kružnicu k_A prechádzajúcu bodom A, k_B prechádzajúcu cez B a k_C prechádzajúcu cez C. Bod C' nájdeme ako priesečník kružnice k_C s polpriamkou p_C, ktorej krajný bod je S a ktorá zviera s SC uhol 40° (meraný proti smeru hodinových ručičiek). Rovnakým postupom nájdeme aj body A' a B' – prvý ako priesečník kružnice k_A s polpriamkou p_A, druhý ako priesečník k_B a p_B (pozri obr. 41).

Poznámka. *Pri konštrukcii bodu C' sme použili uhlomer, body B' a A' možno skonštruovať aj bez neho. Ukážeme, ako. Uhly CSC', XSX' a YSY' na obr. 41 majú rovnakú veľkosť 40°, preto sú úsečky CC', XX' a YY´ – kvôli prehľadnosti sme vyznačili iba ich krajné body – rovnako dlhé (toto si dobre rozmyslite). Po tom, ako sme zostrojili bod C', už dĺžku* $|CC'|$ *poznáme. Preto pri konštrukcii bodu A' stačí naniesť túto dĺžku kružidlom na kružnicu* k_C *od bodu X (priesečník polpriamky SA s kružnicou* k_C*) proti smeru hodinových ručičiek. Dostaneme tak bod X'. Hľadaný bod A' je potom prienik kružnice* k_A *s polpriamkou SX'. Konštrukcia bodu B' je rovnaká.*

(Tento postup nám v tomto prípade – keď zostrojujeme iba tri body A', B' a C' – veľa práce neušetrí, oceníme ho však pri konštrukcii väčšieho počtu bodov.)



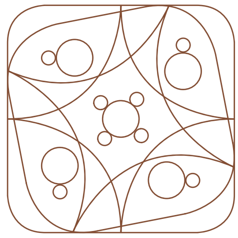
Obr. 41
Po zostrojení bodu C' môžeme dĺžku úsečky CC' použiť ako meradlo veľkosti otočenia: ak body X a X' ležiace na kružnici k_C *majú rovnakú vzdialenosť ako body C a C', tak uhol XSX' je 40° (pozri poznámku).*

ÚLOHA

35. Útvar na obr. 42 je rotačne symetrický – ak ho otočíme o 72°, bude sa otočený útvar presne kryť s pôvodným (uistite sa v diskusii, či je vám toto tvrdenie jasné). Opíšte, ako nájdeme stred otáčania, teda bod, okolo ktorého musíme útvar otočiť.

Obr. 42

Ak hľadáte praktickejšie využitie pre konštrukcie otočených útvarov, skúste narysovať návrh ozdobných puklíc alebo kruhového geometrického vzoru. Niekoľko inšpirácií je na obrázkoch.



STREDOVÁ SÚMERNOSŤ

Obrázky na dvojhlavých hracích kartách sú typickým príkladom stredovo súmerných kresieb.

Špeciálny prípad otočenia je otočenie o 180°, ktoré má vlastný názov – je to tzv. stredová súmernosť. O dvoch útvaroch, z ktorých jeden vznikol otočením druhého okolo bodu S o 180° hovoríme, že jeden je s druhým **súmerný podľa stredu S**. Útvar, ktorý je stredovo súmerný sám so sebou (teda otočením o 180° dostaneme ten istý útvar), sa nazýva **stredovo súmerný**.

ÚLOHA

36. Ktoré kresby z obr. 39 na s. 30 sú stredovo súmerné?

Hoci stredová súmernosť je otočením, pri rysovaní stredovo súmerných obrázkov sa zaobídeme bez uhlomeru a kružnicových oblúkov, ktoré pri zostrojovaní otočených obrázkov spravidla potrebujeme (pozri riešenie úlohy 34).

ÚLOHY

37. a) Narysujte alebo načrtnite obrázok, na ktorom bod A' vznikol otočením bodu A okolo bodu S o 180° (bod A zvoľte rôzny od S). Opíšte vzájomnú polohu bodov A, A' a S.

Odpoveď na otázku a) využite pri riešení úloh b) a c).

b) Daný je trojuholník ABC a mimo neho bod S. Opíšte, ako pomocou pravítka a kružidla (ale bez uhlomeru) skonštruujeme trojuholník $A'B'C'$, ktorý je stredovo súmerný s ABC podľa stredu S.

c) Vieme, že bod A je súmerný s bodom B podľa stredu S. Polohu bodov A, B poznáme, nepoznáme však polohu bodu S. Ako nájdeme bod S?

38. Narysujte trojuholník ABC, mimo neho zvoľte bod X. Potom skonštruujte trojuholník, ktorý je stredovo súmerný s trojuholníkom ABC tak, aby obrazom bodu A bol bod X.

5.4 Ďalšie úlohy

Nie vždy je našou úlohou *objaviť* postup nejakej konštrukcie. Niekedy je postup známy a našou úlohou je postupovať podľa neho. Túto dôležitú zručnosť – pracovať podľa daného návodu – si vyskúšame v úlohách 39 a 40. Prvá súvisí s architektúrou – budeme rysovať jednoduchú *gotickú kružbu*, druhá je z učebnice technického kreslenia.

Hlava mníšky

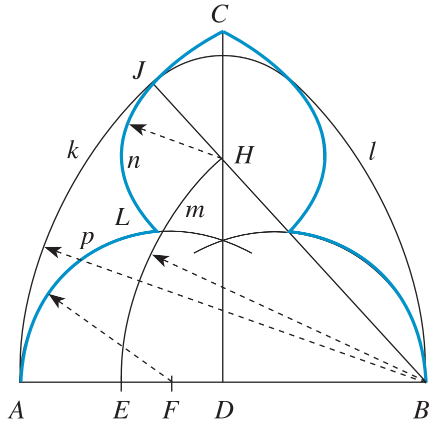
Gotický ornament na obr. 43 sa nazýva *hlava mníšky*. Uvádzame jeden z možných postupov jeho konštrukcie.

Najprv narysujeme rovnostranný lomený oblúk ACB (v ňom stredmi kružníc tvoriacich oblúk sú krajné body jeho základne AB).

1. Narysujeme úsečku *AB*.
2. Narysujeme kružnicu *k* so stredom *B* a polomerom *AB* a kružnicu *l* so stredom *A* a polomerom *AB*, jeden z ich priesečníkov označíme *C*.
3. Lomený oblúk tvoria oblúky *AC* a *CB*.

Ďalej opíšeme len konštrukciu ľavej polovice hlavy mníšky (v krivočiarom trojuholníku ACD), pravá polovica je s ňou súmerná.

4. Stred úsečky *AB* označíme *D*, stred úsečky *AD* označíme *E*, stred úsečky *ED* označíme *F*.
5. Narysujeme kružnicu *m* so stredom *B* a polomerom *EB*, jej priesečník s úsečkou *CD* označíme *H*.
6. Priesečník polpriamky *BH* s kružnicou *k* označíme *J*.
7. Narysujeme kružnicu *p* so stredom *F* a polomerom *AF*.
8. Narysujeme oblúk kružnice *n* so stredom *H* a polomerom *HJ* od bodu *J* po jeho priesečník *L* s kružnicou *p*.
9. Ľavú polovicu hlavy mníšky tvoria oblúky *CJ*, *JL* a *LA*.



Obr. 43

Pri veľmi presnom rysovaní zistíme, že bod L leží na priamke AH, ale neleží na kružnici m.

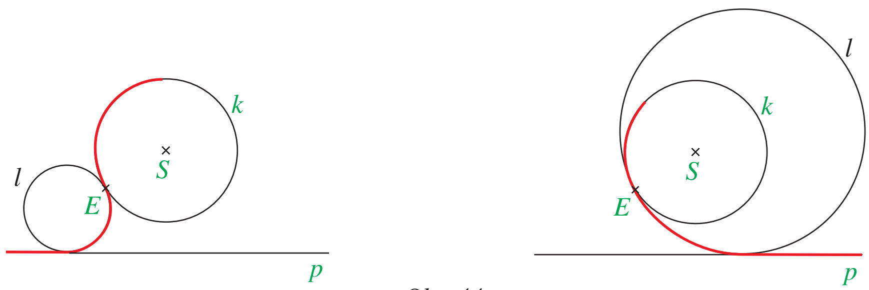
ÚLOHA

39. Narysujte podľa tohto návodu *hlavu mníšky*.

Zdôvodňujeme cudziu konštrukciu

V učebniciach technického kreslenia sa nie vždy uvádza zdôvodnenie konštrukcií. To – ak chceme opísaný postup pochopiť – musíme objaviť sami. Vyskúšajte to na nasledujúcej úlohe.

Daná je priamka *p*, kružnica *k* so stredom *S* a bod *E* ležiaci na *k*. Máme skonštruovať kružnicu *l*, ktorá sa dotýka priamky *p* a súčasne sa v bode *E* dotýka kružnice *k*. Na obr. 44 sme znázornili dve riešenia tejto úlohy (zelené písmená označujú prvky, ktoré sú dané).



Obr. 44

Červenou čiarou sme vyznačili možnú interpretáciu tejto úlohy: hľadáme kružnicu l, ktorej oblúk hladko spojí priamku p a oblúk kružnice k (s krajným bodom E).

V učebnici je uvedený tento postup:

1. Narysujeme dotyčnicu t ku kružnici k v bode E.
2. Priesečník priamok t, p označíme G.
3. Nájdeme os o uhla s vrcholom G, ktorého ramená vytvárajú priamky t, p.
4. Priesečník priamok o, SE označíme L.
5. Hľadaná kružnica l má stred L, jej polomer je úsečka LE.

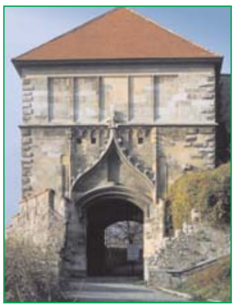
ÚLOHY

40. Zvoľte k, E a p približne tak, ako je to znázornené na obr. 44 a skonštruujte podľa uvedeného postupu kružnicu l.

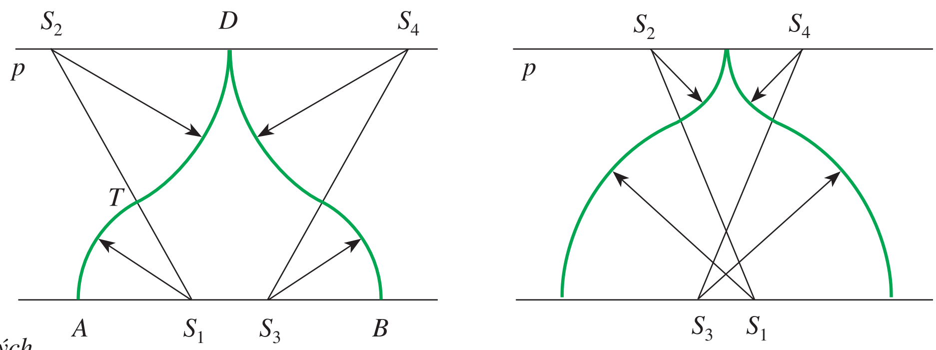
41. Narysovaný obrázok využite pri zdôvodnení konštrukcie.

Oslí chrbát (španielsky alebo tiež kýlový oblúk)

Pravá aj ľavá časť oblúka nazývaného *oslí chrbát* je zložená z dvoch hladko na seba nadväzujúcich kružnicových oblúkov. Jeho konštrukciu sme znázornili na obr. 45 (vľavo pre jednu voľbu polohy stredov S_1 až S_4, vpravo pre inú možnú voľbu). Stredy S_1, S_3 ležia na priamke AB, stredy S_2, S_4 na priamke p, ktorá je rovnobežná s AB a prechádza bodom D.



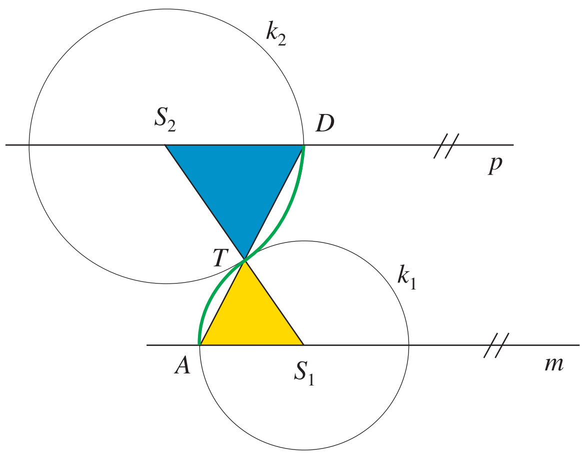
Oslí chrbát je jeden z typických gotických oblúkov. Na obrázku je oslí chrbát na Žigmundovej bráne Bratislavského hradu.



Obr. 45

Pre konštrukciu oslieho chrbta sú dôležité tieto informácie:

- bod T, v ktorom sa na dolný kružnicový oblúk AT napája horný oblúk TD, leží na spojnici stredov S_1 a S_2 a súčasne leží aj na spojnici bodov A a D (pozri obr. 46),
- trojuholníky ATS_1 a DTS_2 (na obr. 46 žltý a modrý) sú podobné, obidva sú rovnoramenné.



Obr. 46

ÚLOHA

42. Narysujte aspoň jeden oslí chrbát – ideálne by bolo, keby si každý v triede zvolil vlastnú polohu stredov S_1 až S_4. Skontrolujete tak, či ste konštrukcii znázornenej na obr. 45 a 46 porozumeli.

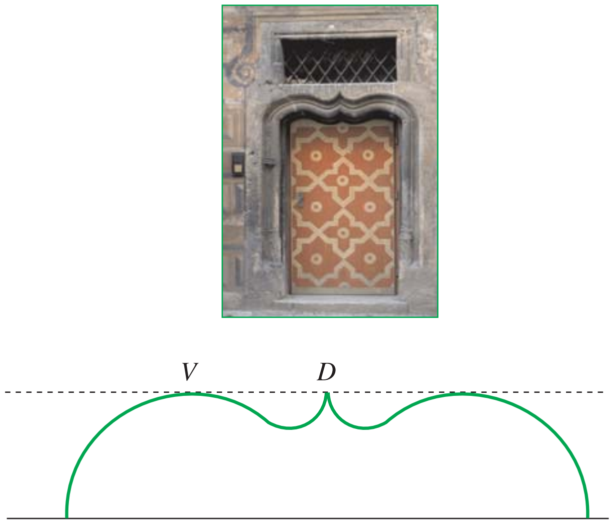
Oslí chrbát nie je svojou výškou (vzdialenosť priamok *p* a *m* na obr. 46) a rozpätím (dĺžka úsečky *AB*) určený jednoznačne. Vidno to aj na obr. 45, kde sú dva rôzne oslie chrbty s rovnakým rozpätím a rovnakou výškou. Ak však okrem rozpätia a výšky budeme poznať polomer jednej z kružníc alebo polohu bodu *T* na úsečke *DA*, budú už tieto údaje určovať tvar oslieho chrbta jednoznačne.

ÚLOHY

43. Opíšte konštrukciu oslieho chrbta na obr. 45, ak poznáte jeho rozpätie, výšku a
a) polomer S_1A dolnej kružnice,
b) bod *T*, v ktorom sa oblúk dolnej kružnice napája na oblúk hornej kružnice.

44. a) Najjednoduchší prípad oslieho chrbta je oblúk, v ktorom majú všetky štyri kružnice rovnaký polomer. Opíšte postup konštrukcie takéhoto oslieho chrbta, ak je dané jeho rozpätie a výška.
b) Narysujte oslí chrbát zložený z oblúkov štyroch kružníc s rovnakým polomerom tak, aby jeho výška bola polovica rozpätia. (Toto je pomerne často sa vyskytujúca podoba oslieho chrbta.)

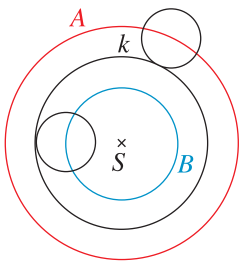
45. Oslí chrbát na obr. 47 má špeciálny tvar: najvyšší bod *V* dolného oblúka leží v rovnakej výške ako bod *D*. Opíšte postup konštrukcie takéhoto oblúka, ak je daná jeho výška a rozpätie.



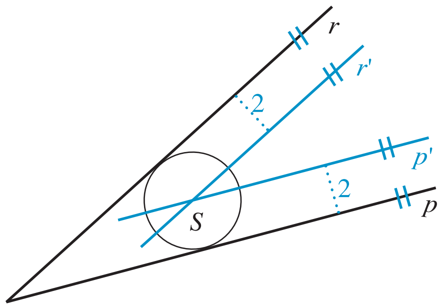
Obr. 47

NIEKOĽKO ZÁKLADNÝCH KONŠTRUKCIÍ – VÝSLEDKY

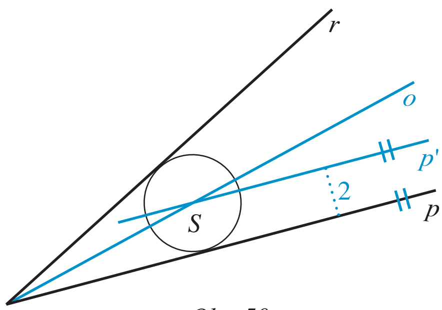
2. Áno. Najprv sme takýmto postupom skonštruovali bod *P* (ako priesečník kružníc *l, m*), potom sme opäť týmto postupom skonštruovali bod *A* (ako priesečník kružnice *n* s niektorou z priamok *p, r*).
3. a) Množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od priamky *AB* je 2.
b) Množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu *C* je 2.
c) Z riešenia na s. 10 vyplýva, že je to množina všetkých bodov *X* v rovine, pre ktoré je uhol *CXD* pravý (táto množina sa nazýva *Tálesova kružnica*).
4. Každý bod, ktorý leží na niektorej z dvoch priamok *s*, *t*, ktoré sú rovnobežné s *p* a majú od nej vzdialenosť 6.
5. Každý bod, ktorý leží na priamke *s*, ktorá je kolmá na *p* a prechádza bodom *A*, okrem bodu *A*. Hľadaná množina bodov je teda priamka *s* bez bodu *A*. (Priamka *s* sa nazýva *normála k priamke p v bode A*.)
6. Každý bod priamky, ktorá je kolmá na úsečku *AB* a prechádza jej stredom. (Táto priamka sa nazýva *os úsečky AB*.)



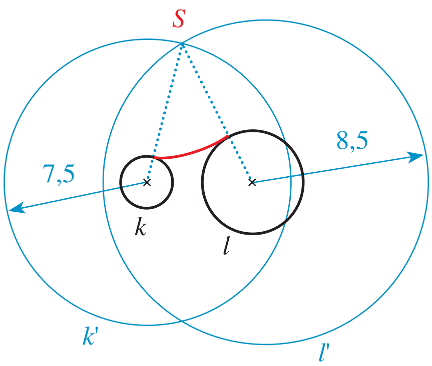
Obr. 48



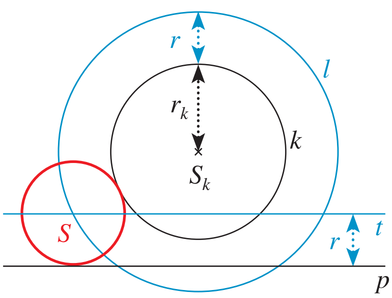
Obr. 49



Obr. 50



Obr. 51



Obr. 52

7. Každý bod ležiaci vnútri daného uhla, ktorý má rovnakú vzdialenosť od obidvoch jeho ramien. Všetky takéto body vytvárajú polpriamku, ktorá daný uhol rozdeľuje na dva uhly polovičnej veľkosti. Táto polpriamka vychádza z bodu V (vrcholu uhla), ten však už do nej nepatrí. (Polpriamka rozdeľujúca daný uhol na dva uhly polovičnej veľkosti sa nazýva *os uhla*.)

8. Priamka s, ktorá je rovnobežná s priamkami p, r a leží v strede medzi nimi, teda má rovnakú vzdialenosť od priamok p, r. (Takáto priamka sa niekedy nazýva *os rovnobežiek p, r*, používa sa aj názov *os pásu ohraničeného rovnobežkami p, r*.)

9. Každý bod ležiaci na osi úsečky AB (pozri riešenie úlohy 6) okrem stredu úsečky AB. Hľadaná množina bodov je teda os úsečky bez jej priesečníka s úsečkou AB.

10. a) Každý bod ležiaci na kružnici so stredom S a polomerom 7 (množina ***A*** vyznačená na obr. 48 červenou).

b) Každý bod ležiaci na kružnici so stredom S a polomerom 3 (množina ***B*** vyznačená na obr. 48 modrou).

c) Každý bod, ktorý je riešením úlohy 10 a) alebo 10 b). (Riešením úlohy 10 c) je teda zjednotenie množín A a B, t. j. množina $A \cup B$, pozri obr. 48).

11. Každý bod, ktorý leží na kružnici so stredom S a polomerom 12 (vtedy sa kružnice dotýkajú zvonka) alebo na kružnici so stredom S a polomerom 2 (vtedy sa dotýkajú zvnútra).

12. Každý bod priamky SB okrem bodu B (prečo sme vylúčili bod B?). Keby sme navyše požadovali, aby nadväzujúci oblúk nebol časťou pôvodnej kružnice k, museli by sme ešte vylúčiť bod S.

13. a) Kružnicový oblúk (časť kružnice k so stredom S) nadväzuje hladko na úsečku AB v bode B, ak B je krajný bod oblúka a uhol SBA je pravý (teda priamka AB sa v bode B dotýka kružnice k), pričom začiatok nadväzujúceho oblúka leží na opačnej strane od priamky SB ako úsečka AB (skúste nakresliť obrázok, na ktorom nebude splnená iba táto druhá podmienka).

b) V ľubovoľnom bode priamky SB okrem bodu B.

14. Uvádzame obrazový opis dvoch možných konštrukcií. Prvá vychádza z riešenia úlohy 4 (pozri obr. 49). Stred S hľadanej kružnice nájdeme ako priesečník priamok p', r'. Priamka p' je rovnobežná s ramenom p daného uhla, má od neho vzdialenosť 2, priamka r' je rovnobežná s ramenom r a má od neho vzdialenosť 2. Poznamenajme, že z dvoch priamok, ktoré sú rovnobežné s p a majú od neho vzdialenosť 2, sme zvolili tú, ktorá sa pretína s daným uhlom (pretože stred S hľadanej kružnice leží vnútri daného uhla), tá istá poznámka platí aj pre r.
Druhá konštrukcia vychádza z riešenia úloh 4 a 7 (pozri obr. 50). Stred S nájdeme ako priesečník osi o daného uhla a priamky p', ktorá je rovnobežná s ramenom p a má od neho vzdialenosť 2 (opäť sme z dvoch takých priamok zvolili tú, ktorá sa pretína s daným uhlom).

15. (oblúk znázornený na obr. 9) Tento oblúk sa dotýka kružníc k, l zvonka. Jeho stred S nájdeme ako priesečník kružníc k' (stred S_k, polomer $r_m - r_k = 7{,}5$ cm) a l' (stred S_l, polomer $r_m - r_l = 8{,}5$ cm). Bod, v ktorom hľadaný oblúk hladko nadväzuje na kružnicu k, leží na spojnici stredov kružníc k, m (na obr. 51 vyznačená bodkovanou čiarou), to isté platí aj pre kružnicu l.

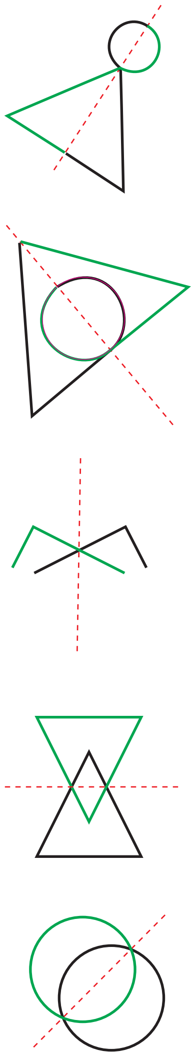
16. a) Hľadaný oblúk sa dotýka

- kružnice k zvonka, preto jeho stred S musí ležať na kružnici l (stred S_k, polomer $r_k + r$, pozri obr. 52),
- priamky p, preto S leží na priamke t, ktorá je rovnobežná s p a má od nej vzdialenosť r, pričom t leží „na rovnakú stranu od p“ ako kružnica k (matematicky vyjadrené: priamka t a kružnica k ležia v tej istej z dvoch polrovín, na ktoré priamka p rozdeľuje rovinu). Druhá z dvoch priamok, ktorá má od p

danú vzdialenosť r, nás nezaujíma (jednak vieme, že stred S musí ležať v rovnakej polrovine ohraničenej priamkou p ako stred S_k, jednak sa táto druhá priamka s kružnicou l nemôže pretať – prečo?).
S nájdeme ako priesečník priamky t a kružnice l. Nezabudnite, že v opise konštrukcie treba opísať aj spôsob, ako skonštruujeme body, v ktorých sa hľadaný oblúk napája na priamku p a na kružnicu l.
b) Priemer $2r$ kružnice m musí byť rovnaký alebo väčší ako je medzera medzi priamkou p a kružnicou k (jej veľkosť je vzdialenosť stredu S_k od priamky p mínus polomer r_k). Vyplýva to napr. z dynamického opisu úlohy 16.
17. 1. A, 2. os AB, u (voľba písmena je na vás, rovnaké písmeno potom treba použiť v bode 3), 3. u, stred kružnice k, 4. S, $|SA|$ (alebo $|SB|$).
V konštrukcii využívame množiny bodov, ktoré sme našli v riešení úloh 5 a 6.
19. (APC) a BPC, (podľa vety) *sss,* t. j. strana-strana-strana, (je spoločná,) strany AC a BC majú rovnakú dĺžku – sú to ramená rovnoramenného trojuholníka. Strany AP a BP majú rovnakú dĺžku – polovicu dĺžky základne AB, (uhly BPC a) APC, (má veľkosť) 90°, kolmá (na priamku AB), (os úsečky) AB, (uhly ACP a) BCP, (os uhla) ACB.
20. Z textu pred zadaním vyplýva, že stačí skonštruovať dva rovnoramenné trojuholníky so spoločnou základňou AB. Kružnice k, l (so stredmi A, B) majú rovnaký polomer r (väčší ako polovica dĺžky $|AB|$). Bod C_1 leží na kružnici

- k, preto $|AC_1| = r$,
- l, preto $|AC_2| = r$,

teda ABC_1 je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. To isté platí pre trojuholník ABC_2.
21. Obr. 20: Najprv vyznačíme body A, B tak, aby P bol stred úsečky AB. Potom postupom z obr. 19 zostrojíme os úsečky AB. Tá je kolmá na AB a prechádza jej stredom, teda bodom P.
Obr. 21: Na priamke p vyznačíme body A, B tak, aby ABT bol rovnoramenný trojuholník so základňou AB (body A, B ležia na kružnici so stredom T, preto majú od bodu T rovnakú vzdialenosť). Z textu pred úlohou 20 vyplýva, že stačí zostrojiť ešte jeden rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Preto narysujeme kružnice k, l so stredmi A, B a rovnakým polomerom a za bod C zvolíme ten ich priesečník, ktorý leží na opačnej strane od priamky p ako bod T. Potom CT je os úsečky AB, preto je kolmá na p. (Túto konštrukciu možno upraviť, aby sme pri nej nemuseli meniť rozovretie kružidla, vtedy druhým priesečníkom kružníc k, l bude bod T.
22. Na ramenách uhla zostrojíme body A,B tak, aby ABC bol rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Rovnako ako v riešení úlohy 21 potrebujeme zostrojiť ešte jeden rovnoramenný trojuholník ABD so základňou AB. Bod D nájdeme ako priesečník kružníc k, l so stredmi A, B a rovnakým polomerom.
23. Daným bodom A narysujeme kolmicu na priamku p, to bude priamka t. Potom narysujeme v bode A kolmicu u na priamku t. Priamka u je hľadaná rovnobežka. (Podmienka rovnobežnosti znázornená na obr. 23 je splnená, pretože obidve priamky p, u zvierajú s priamkou t rovnaký uhol 90°.)
24. Tvrdenie 1. a) V zhodných trojuholníkoch majú vnútorné uhly pri zodpovedajúcich si vrcholoch rovnakú veľkosť. Preto, ak $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, tak platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|$. Uhly ABD a CDB sú striedavé uhly pri priamkach AB a DC, preto (podľa nášho kritéria rovnobežnosti z obr. 23) sú tieto priamky rovnobežné.
Poznámka: Na zdôvodnenie rovnosti $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|$ by stačilo predpokladať, že trojuholníky ABD a CDB sú podobné, teda požadovať „menej“ než zhodnosť. Toto „menej“ je však iba zdanlivé. Trojuholníky ABD a CDB majú spoločnú stranu BD, preto platí: ak sú tieto trojuholníky podobné, tak už musia byť aj zhodné. Teda požiadavka podobnosti (ktorá stačí na zdôvodnenie rovnosti $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|$) je v tomto prípade rovnocenná s požiadavkou zhodnosti uvedených trojuholníkov.
b) Na p zvolíme dva body A, B, tým budú určené dĺžky strán trojuholníka ABD. Potom skonštruujeme s ním zhodný trojuholník CDB: vrcholy B, D sú dané, vrchol C nájdeme ako priesečník kružníc k (stred B, polomer je dĺžka úsečky AD) a l (stred D, polomer je dĺžka úsečky AB). Hľadanou rovnobežkou je priamka DC.
Možná úprava konštrukcie: Body A, B zvolíme tak, aby ABD bol rovnoramenný trojuholník so základňou AB (teda nastavíme na kružidle vhodné roztvorenie a narysujeme kružnicu so stredom v D, jej priesečníky s p budú body A, B). Kružnica k bude mať rovnaký polomer, aký máme už na kružidle nastavený. Roztvorenie kružidla však budeme musieť zmeniť pri rysovaní kružnice l.
Tvrdenie 2. a) Trojuholníky ABS a CSD sú zhodné podľa vety *sus* (strana-uhol-strana): podľa zadania platí $|AS| = |CS|$, $|BS| = |DS|$, uhly ASB a CSD majú rovnakú veľkosť (je to dvojica vrcholových uhlov). Zo zhodnosti vyplýva, že uhly ABS a CDS majú rovnakú veľkosť. Tieto dva uhly sú striedavé uhly pri priamkach AB a DC, preto (podľa kritéria rovnobežnosti z obr. 23) sú AB a DC rovnobežky.
b) Na priamke p zvolíme body A, B. Nájdeme stred úsečky BD (konštrukcia na obr. 19), to bude bod S. Narysujeme úsečku AC prechádzajúcu cez S tak, aby AC mala dvojnásobnú dĺžku ako AS (teda narysujeme polpriamku AS, bod C nájdeme ako jej priesečník s kružnicou, ktorá má stred S a polomer SA). Hľadanou rovnobežkou je priamka DC.



a)

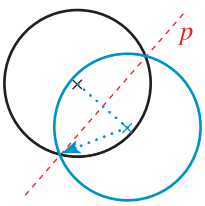
b)

c)

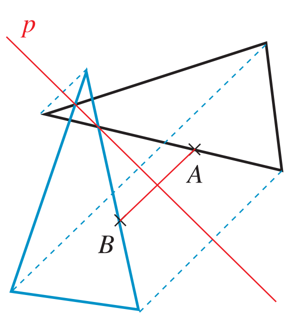
d)

e)

Obr. 53



Obr. 54



Obr. 55

25. Doplnená časť obrázka je vyznačená zelenou.
a) obr. 53 a) **b)** obr. 53 b) **c)** obr. 53 c) **d)** obr. 53 d) **e)** obr. 53 e)
26. a) Priamka p je kolmá na úsečku $A'A$ a prechádza jej stredom, t. j. p je os úsečky $A'A$.
b) Bodom A vedieme kolmicu k na priamku p, tá ju pretne v bode S. Na k nájdeme bod A' tak, aby S bol stred úsečky $A'A$ (teda na k nanesieme od bodu S vzdialenosť $|AS|$ na „opačnú stranu od bodu S, než ležal bod A“, napr. tak, že narysujeme kružnicu m (stred S, polomer $|AS|$) a nájdeme jej priesečník s k rôzny od bodu A).
c) Skonštruujeme os úsečky AB (pozri napr. obr. 19 na s. 22), to je hľadaná priamka p.
27. On sám (takéto body, ktorých obrazom v súmernosti sú ony samy, sa nazývajú *samodružné*).
28. Kružnica k' má rovnaký polomer ako kružnica k, jej stred S' je súmerný podľa p so stredom S kružnice k.
a) Skonštruujeme obraz S' bodu S v súmernosti podľa p (pozri riešenie úlohy 26 a). Aby sme našli polomer kružnice k', zvolíme na k ľubovoľný bod B a zostrojíme jeho obraz B' v súmernosti podľa p – hľadaný polomer je potom $|S'B'|$. Narysujeme kružnicu k' so stredom S' prechádzajúcu bodom B'.
b) Jednou z možností je nájsť konštrukčne stred kružnice k (pozri obr. 1 na s. 56) a potom zopakovať postup z riešenia úlohy 28 a) – takýto postup sa v matematike opisuje formuláciou *riešenie úlohy* 28 b) *prevedieme na riešenie úlohy* 28 a). Iná možnosť: na k zvolíme body A, B, C, nájdeme ich obrazy A', B', C' v súmernosti podľa p, a potom skonštruujeme kružnicu k' prechádzajúcu bodmi A', B', C'.
29. a) Pozri obr. 54, použijeme postup z riešenia úlohy 28 a). Pri hľadaní polomeru modrej kružnice môžeme využiť, že priesečník priamky p s čiernou kružnicou musí ležať aj na modrej kružnici (prečo?). Kontrola presnosti rysovania: aj druhý priesečník čiernej a modrej kružnice leží na p.
b) Pozri obr. 55. Najprv nájdeme os súmernosti p ako os úsečky AB (červené čiary na obr. 55). Potom narysujeme obrazy vrcholov čierneho trojuholníka v súmernosti podľa p. Kontrola presnosti rysovania: ak sú dve priamky navzájom súmerné, tak ich priesečník musí ležať na osi súmernosti p.
30. a) Všetky uvedené úsečky sú navzájom rovnobežné a rovnako dlhé. Navyše majú ešte jednu vlastnosť, ktorú predchádzajúci opis nevystihuje, je však z našej predstavy o posunutí zrejmá: všetky spojnice *pôvodný bod – posunutý bod* sú „v rovnakom smere“. Na opis tejto vlastnosti sa v matematike používa pojem *vektor*, my sa uspokojíme s pracovným opisom „všetky spojnice *pôvodný bod – posunutý bod* majú rovnaký azimut“.
b) Pozri obr. 56. Narysovali sme prvú kvapku (horná kvapka na obr. 56), potom rovnostranný trojuholník $VV'V''$ tak, aby strana $V'V''$ bola vodorovná (postupne sme narysovali zvislú priamku z prechádzajúcu „špicou kvapky“ – bodom V, dve polpriamky s, t vychádzajúce z V, ktoré zvierajú s priamkou z uhol 30°, a napokon kolmicu k na z, jej priesečníky s polpriamkami s a t sú body V' a V'', vzdialenosť k od bodu V závisí od toho, ako veľký chceme trojuholník $VV'V''$). Bodmi S, A, B sme viedli rovnobežky s VV', na ne sme naniesli od bodov A, S, B vzdialenosť $|VV'|$, dostali sme tak body S', A', B', pomocou ktorých už vieme zostrojiť posunutú kvapku. Postup pre tretiu kvapku je obdobný, úlohu úsečky VV' (určujúcej smer a veľkosť posunutia) má teraz úsečka VV'' (iná možnosť je využiť zvislú priamku z a zostrojiť body S'', A'', B'' ako obrazy bodov S', A', B' v súmernosti podľa z). Poznamenajme ešte, že namiesto trojuholníka $VV'V''$ by nám rovnako dobre poslúžil aj niektorý z rovnostranných trojuholníkov $AA'A''$, $BB'B''$ alebo $SS'S''$.
31. Otočiť obrázok o 0° znamená vôbec s ním nepohnúť (teda každý bod kresby zostane na svojom mieste). Keby sme v opise rotačnej symetrie pripustili aj

otočenie o 0°, vyhovoval by takejto podmienke každý obrázok – pretože každá kresba otočená o 0° sa iste zhoduje sama so sebou. Podobná úvaha platí pre otočenie o 360°.

32. a) O uhol $\frac{360°}{5} = 72°$ uhol – 72° alebo o ich ľubovoľný celočíselný násobok (teda napr. o – 144°, o 432°, ...). Otázke zo zadania vyhovujú aj odpovede „o 0°“, tie však pre nás nie sú zaujímavé (pozri úlohu 31).

b) O uhol $\frac{360°}{3} = 120°$ alebo jeho ľubovoľný celočíselný (nulový, kladný alebo záporný) násobok. Všetky tieto veľkosti vyjadruje zápis „$k \cdot 120°$, kde k je celé číslo“ (teda $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$).

c) $k \cdot 72°$, kde k je celé číslo,

d) $k \cdot 90°$, kde k je celé číslo,

e) $k \cdot 60°$, kde k je celé číslo.

33. Veľkosť uhla otočenia má každý z uhlov BSB' a ASA' a vo všeobecnosti každý uhol XSX', kde X je nejaký bod pôvodného útvaru a X' zodpovedajúci bod otočeného útvaru. Túto veľkosť má teda aj uhol CSC', ktorý na obr. 40 nie je vyznačený (zmenšilo by to prehľadnosť obrázka).

35. Všetkých päť „špicov“ útvaru z obr. 42 leží na kružnici, ktorej stredom je hľadaný stred otáčania. Ak poznáme aspoň tri body danej kružnice (my ich poznáme až päť), vieme jej stred nájsť postupom znázorneným na obr. 1 na s. 56.

36. Kresby d) a e), pre ktoré jeden z uhlov v riešení úlohy 32 bol 180°.

37. a) S je stred úsečky AA'.

b) Úsečky AS, BS, CS predĺžime na dvojnásobne dlhé úsečky AA', BB', CC' tak, aby stredom každej z nich bol bod S.

c) Ak A a B sú dva rôzne body, tak S je stred úsečky AB. Ak A aj B označuje ten istý bod, tak $S = A = B$.

38. Najprv nájdeme stred súmernosti S ako stred úsečky AX. Ďalej postupujeme ako v riešení úlohy 37 b).

40. Pozri obr. 57.

41. Hľadaná kružnica l sa dotýka kružnice k v bode E, preto

- jej stred L musí ležať na priamke SE (pretože bod, v ktorom sa dotýkajú dve kružnice, leží na spojnici ich stredov),
- priamka t – ktorá je dotyčnicou kružnice k v bode E – je súčasne aj dotyčnicou kružnice l. Ďalšou dotyčnicou kružnice l je priamka p. Preto stred L hľadanej kružnice l musí mať rovnakú vzdialenosť od priamok t a p, musí teda ležať na osi uhla, ktorého ramená vytvárajú priamky t, p.

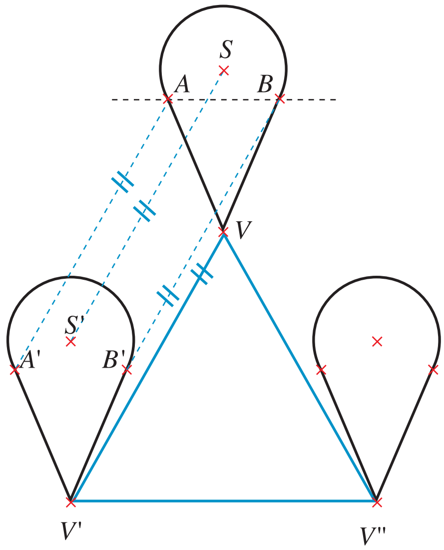
Preto L musí byť priesečník priamok SE a osi o.

43. Červené body na obr. 58, 59 sú dané (body A, B, D sú určené rozpätím oblúka a jeho výškou), čísla označujú poradie krokov konštrukcie.

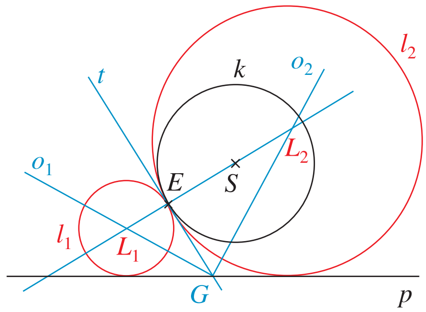
a) Pozri obr. 58. **1, 2** Narysujeme oblúk kružnice so stredom S_1 a polomerom S_1A od bodu A po priesečník s úsečkou AD (to je bod T z obr. 46); **3, 4** Narysujeme priamku S_1T a nájdeme jej priesečník s priamkou, ktorá je rovnobežná s AB a prechádza bodom D (tento priesečník je stred S_2); **5** Narysujeme oblúk kružnice so stredom S_2 od bodu T po bod D. Tak narysujeme ľavú časť oslieho chrbta. Pravú časť môžeme rysovať súbežne (teda po narysovaní dolného ľavého oblúka, kým máme ešte kružidlo nastavené na veľkosť jeho polomeru, narysujeme hneď aj pravý dolný oblúk, a po ľavom hornom oblúku narysujeme pravý horný oblúk).

b) Pozri obr. 59. Stred S_1 nájdeme ako priesečník osi úsečky AT s priamkou AB (pretože trojuholník ATS_1 je rovnoramenný so základňou AT a bod S_1 leží na priamke AB). Keď poznáme stred S_1, môžeme ďalej postupovať rovnako ako v úlohe 42 a.

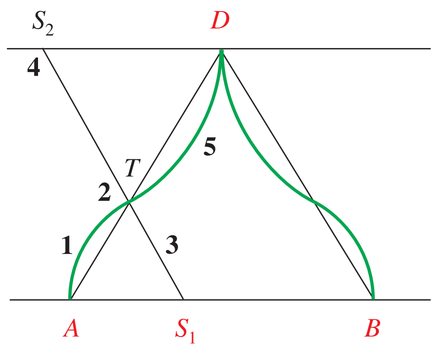
44. a) Ak majú kružnice so stredom S_1 a S_2 rovnaký polomer, musí bod T le-



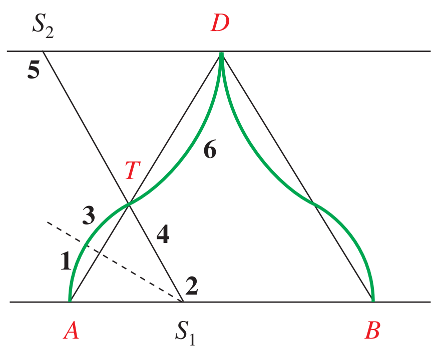
Obr. 56



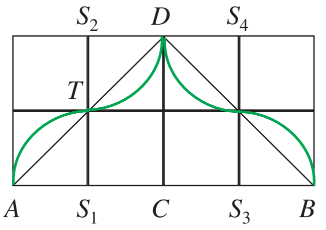
Obr. 57



Obr. 58



Obr. 59



Obr. 60

žať v strede úsečky AD. Toto tvrdenie je intuitívne zrejmé, uvedieme však aj formálne zdôvodnenie. Trojuholníky AS_1T a DS_2T sú zhodné (vieme, že sú podobné, teraz navyše predpokladáme, že $|S_1A| = |S_2D|$, teda dve navzájom si zodpovedajúce strany týchto podobných trojuholníkov majú rovnakú dĺžku), preto $|AT| = |DT|$. Keď poznáme polohu bodu T, môžeme oslí chrbát rysovať postupom znázorneným na obr. 59.

b) Pozri obr. 60. Polomer všetkých štyroch kružníc je štvrtina rozpätia AB (teda polovica výšky CD), S_1 je stred úsečky AC, úsečky S_1S_2 a CD sú rovnobežné (teda S_2 je presne nad S_1).

45. Polomer dolného oblúka (so stredom S_1) musí byť rovnaký ako výška oblúka. Preto stred S_1 bude ležať na úsečke AB, jeho vzdialenosť od A sa bude rovnať výške oslieho chrbta (ktorá je daná). Ak poznáme rozpätie oslieho chrbta, jeho výšku a stred jednej z kružníc, vieme ho zostrojiť (úloha 43 a)). Z konštrukcie tiež vidno, že takýto oblúk možno skonštruovať len vtedy, keď daný pomer jeho výšky k rozpätiu je menší ako 1 : 2.

6 TÁLESOVA KRUŽNICA

6.1 Tálesova kružnica
6.2 Obvodový a stredový uhol
6.3 Ďalšie úlohy

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, ako možno pri riešení konštrukčných úloh využiť množiny bodov s danými vlastnosťami. Jednou z takých množín je aj Tálesova kružnica. Na odvodenie jej vlastností a typické príklady použitia sa pozrieme v prvej časti tejto kapitoly. V ďalšej – nepovinnej – časti sa budeme zaoberať všeobecnejším tvrdením – vzťahom medzi stredovým a obvodovým uhlom v kružnici. To súvisí s ďalšou užitočnou množinou bodov – s bodmi, z ktorých vidno úsečku pod daným uhlom. V závere kapitoly sa záujemca dozvie, ako možno takúto množinu využiť v námornej navigácii.

6.1 Tálesova kružnica

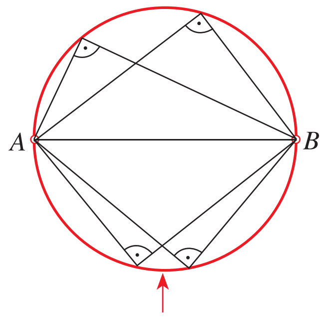
Pripomeňme **Tálesovu vetu** (ktorú sme použili v riešení úlohy 1 na s. 10 – 11):

Ak AB je priemer kružnice k a X je bod ležiaci na k rôzny od A, B, tak uhol AXB je pravý.

Možno ju sformulovať aj takto:

Z každého bodu kružnice k s priemerom AB, okrem bodov A a B, vidno úsečku AB pod uhlom $90°$.

V súvislosti s touto vlastnosťou sa kružnica k označuje ako **Tálesova kružnica**. V nasledujúcom texte budeme *Tálesovou kružnicou nad úsečkou AB* nazývať kružnicu k s priemerom AB, z ktorej sú vynechané body A, B. (Pod akým uhlom vidno úsečku AB z bodov A a B ?)



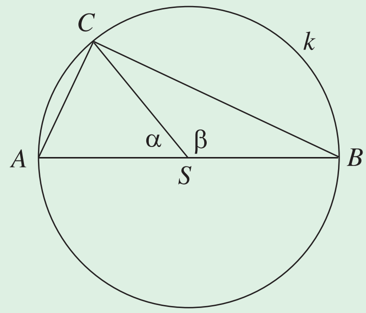
TÁLESOVA KRUŽNICA NAD ÚSEČKOU AB

Niektoré úvahy o Tálesovej kružnici sme robili už v učebnici pre prvý ročník. Teraz ich zopakujeme a pozrieme sa na vlastnosti Tálesovej kružnice trocha dôkladnejšie.

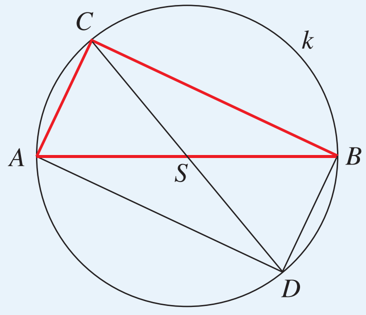
Dôkaz Tálesovej vety

ÚLOHA

1. a) Zdôvodnite tvrdenie: Trojuholníky ASC a BSC (S je stred kružnice k, pozri obr. 1) sú rovnoramenné.
b) Označme α a β veľkosti uhlov ASC a BSC. Vypočítajte veľkosti uhlov ACS a BCS.
c) Vysvetlite, ako z tohto výpočtu vyplýva, že uhol ACB je pravý.



Obr. 1



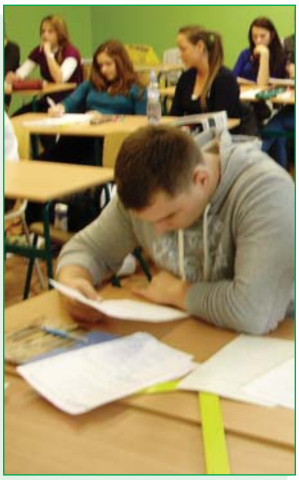
Obr. 2

Existuje aj názornejšie zdôvodnenie Tálesovej vety: ak polomer CS predĺžime na priemer CD, dostaneme štvoruholník $ADBC$, ktorého uhlopriečky AB a CD sú rovnako dlhé a navzájom sa rozpoľujú. Z tejto vlastnosti vyplýva, že $ADBC$ je obdĺžnik. V ňom sú všetky uhly, teda aj uhol ACB, pravé.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že zdôvodnenie z obr. 2 nemá s úvahami z úlohy 1 veľa spoločného. Nie je to však pravda: úvahy z úlohy 1 sú skryté aj v obr. 2. Potrebujeme ich totiž na dôkaz tvrdenia, ktoré v zdôvodnení na obr. 2 využívame: ak sú uhlopriečky štvoruholníka $ADBC$ rovnako dlhé a navzájom sa rozpoľujú, tak $ADBC$ je obdĺžnik.

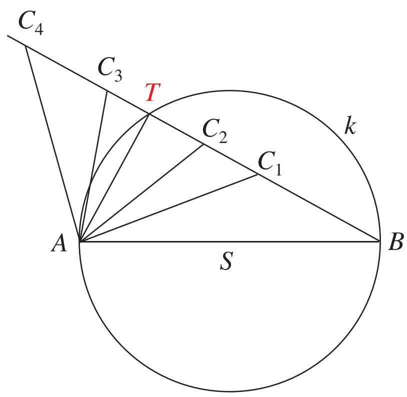
Úlohou 1 sme overili, že z každého bodu Tálesovej kružnice nad úsečkou AB vidno úsečku AB pod uhlom 90°. Otázka je, či túto vlastnosť majú *len* body Tálesovej kružnice, alebo či v rovine existujú ešte nejaké ďalšie body, z ktorých AB vidno pod pravým uhlom. Pripomeňme, že túto informáciu sme potrebovali napr. v druhom riešení úlohy 1 na s. 10 (na čo sme túto informáciu potrebovali?).

Riešením úloh 2 až 4 sa presvedčíme, že body ležiace mimo Tálesovej kružnice už túto vlastnosť nemajú. Inak povedané: ak nejaký bod túto vlastnosť má, tak musí ležať na Tálesovej kružnici nad úsečkou AB.



Iné body v rovine už túto vlastnosť nemajú

Pri zdôvodňovaní tejto odpovede nám pomôže obr. 3. Narysujeme polpriamku s krajným bodom B pretínajúcu kružnicu k v bode T. Ak sa bod C bude pohybovať po polpriamke BT smerom od bodu B, bude sa uhol BAC zväčšovať (toto si rozmyslite).



Obr. 3

ÚLOHY

2. Ako sa pri tomto pohybe bodu C (pozri obr. 3) bude meniť veľkosť uhla ACB ? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Z Tálesovej vety vieme, že ak sa pri svojom pohybe bod C dostane do bodu T (pozri obr. 3), bude uhol ACB pravý.

3. Akú veľkosť bude mať uhol ACB, ak bod C bude
a) vnútri úsečky BT?
b) na polpriamke BT, ale mimo úsečky BT?

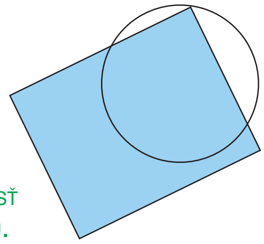
ÚLOHA

4. Zdôvodnite uvedené tvrdenie. Diskutujte tiež o tom, pod akým uhlom vidno úsečku AB
a) z bodov ležiacich vnútri úsečky AB
b) z bodov ležiacich na priamke AB, ale mimo úsečky AB.

Z riešenia úlohy 3 vyplýva: Úsečku AB vidno pod uhlom 90° iba z bodov Tálesovej kružnice. Z bodov, ktoré ležia vnútri kružnice k, vidno AB pod tupým uhlom, z bodov ležiacich mimo kruhu ohraničeného kružnicou k, vidno AB pod ostrým uhlom.

Naše doterajšie zistenia môžeme vysloviť „v reči“ množiny bodov s danou vlastnosťou:

Tálesova kružnica nad úsečkou AB je množina všetkých bodov, z ktorých úsečku AB vidno pod uhlom 90°.

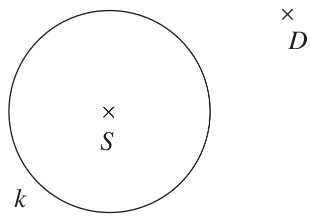


S Tálesovou vetou súvisí aj zobrazený postup hľadania stredu kruhu. Na kruh priložíme obdĺžnikový papier alebo obálku tak, aby jeden roh ležal na kružnici (pozri obrázok). Nájdeme priesečníky okrajov papiera s kružnicou. Ich spojnica je priemer kruhu, ten rozpolíme. Iná možnosť je urobiť tento postup dvakrát za sebou. Priesečník nájdených priemerov je hľadaný stred kruhu.

Typické použitie Tálesovej vety – konštrukcia dotyčnice ku kružnici z bodu ležiaceho mimo kružnice

Daná je kružnica k so stredom S a bod D, ktorý leží mimo kruhu ohraničeného touto kružnicou (obr. 4). Úlohou je skonštruovať dotyčnicu ku kružnici k prechádzajúcu bodom D.

Euklidovská konštrukcia je založená na známom poznatku: ak T leží na kružnici k, tak priamka DT je dotyčnica kružnice k práve vtedy, keď je uhol STD pravý (načrtnite si obrázok a rozmyslite si to). Ak teda chceme nájsť dotyčnicu kružnice k prechádzajúcu bodom D, potrebujeme na kružnici k nájsť bod T, pre ktorý sa $|\sphericalangle STD| = 90°$.



Obr. 4

ÚLOHA

5. Na základe tohto poznatku navrhnite euklidovskú konštrukciu dotyčnice ku kružnici k prechádzajúcej bodom D.

Túto euklidovskú konštrukciu používa väčšina ľudí nanajvýš v škole. Len čo sa dostanú z dohľadu učiteľov matematiky, postupujú inak: skusmo prikladajú pravítko tak dlho, kým nenájdu podľa nich tú správnu polohu, v ktorej pravítko prechádza cez D a dotýka sa k. V nasledujúcej úlohe nás bude zaujímať, akú presnosť dokážete týmto postupom dosiahnuť.

ÚLOHA

6. Narysujte polkružnicu – časť kružnice k s čo najväčším polomerom tak, aby jej stred S ešte ležal na papieri, na ktorý rysujete. Bod S vyznačte (budete ho potrebovať). Na papieri zvoľte niekoľko rôznych bodov D ležiacich mimo kruhu ohraničeného kružnicou k.
a) Opísaným skusmým postupom narysujte každým z týchto bodov dotyčnicu ku k a vyznačte bod T, ktorý pokladáte za bod jej dotyku s k.
b) Potom narysujte čo najpresnejšie Tálesovu kružnicu k_{SD} nad úsečkou SD.
Teraz môžete porovnávať výsledky skusmej a euklidovskej konštrukcie: čím bližšie k vami vyznačenému bodu T bude ležať priesečník kružníc k a k_{SD}, tým viac sa zhoduje výsledok týchto dvoch rôznych postupov. Diskutujte o výsledkoch, ku ktorým ste porovnaním dospeli.

S takouto situáciou sme sa stretli napr. v riešení úlohy 1 na s. 10. Odporúčame ju ako inšpiráciu pri riešení úlohy 7.

Tálesova kružnica a konštrukcie trojuholníkov

Tálesovu kružnicu možno využiť pri konštrukciách trojuholníkov, v ktorých poznáme stranu (napr. a), výšku na niektorú ďalšiu stranu (napr. v_c) a ešte nejaký ďalší prvok (napr. stranu c).

ÚLOHA

7. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom
a) $a = 10$, $v_a = 3$, $v_c = 4$,
b) $c = 13$, $v_a = 11$, $v_b = 12$.

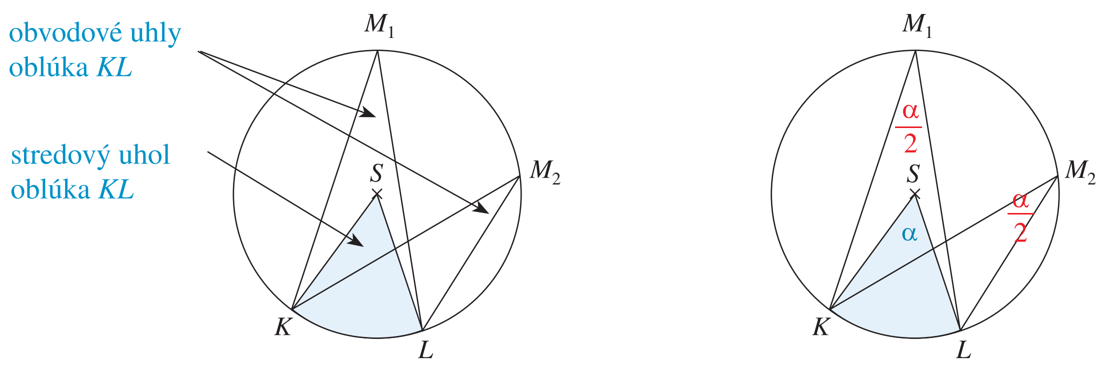
Skontrolujte, či ste sa pri konštrukcii nedopustili chyby, o ktorej sme hovorili v poznámke za druhým riešením úlohy 1 na s. 11.

6.2 Obvodový a stredový uhol

Tálesova veta je špeciálny prípad všeobecnejšieho vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom v kružnici. Tomu sa budeme venovať v tejto nepovinnej časti.

Pojmy *obvodový* a *stredový uhol* sú vysvetlené na obr. 5. Vzťah medzi ich veľkosťami je sformulovaný už v Euklidových Základoch: Ak stredový uhol oblúka kružnice KL má veľkosť α, tak všetky obvodové uhly prislúchajúce k tomuto oblúku majú veľkosť $\frac{\alpha}{2}$ (pozri obr. 6).

Všetky obvodové uhly oblúka *KL* majú rovnakú veľkosť – polovicu veľkosti stredového uhla.



Obr. 5 Obr. 6

Stredový uhol oblúka KL kružnice k je uhol KSL (S je stred kružnice k, oblúk KL leží vnútri tohto stredového uhla).

Obvodový uhol prislúchajúci k oblúku KL kružnice k je každý uhol KML, kde M je bod kružnice k ležiaci mimo oblúka KL.

V úlohách 8 až 13 skontrolujeme platnosť tohto tvrdenia.

Začneme najjednoduchším prípadom: stred S kružnice k leží vnútri obvodového uhla KML (pozri obr. 7, bod N je priesečník priamky MS s kružnicou k). Využijeme, že trojuholníky KSM a LSM sú rovnoramenné (prečo sú rovnoramenné?).

ÚLOHA

8. a) Skontrolujte, že pre uhly α_1, α_2, β_1, β_2 na obr. 7 platí: $\alpha_1 = 2\beta_1$, $\alpha_2 = 2\beta_2$.
b) Vysvetlite, ako z toho vyplýva uvedené tvrdenie o obvodovom a stredovom uhle.
c) Skontrolujte, že takto možno tvrdenie o obvodovom a stredovom uhle dokázať aj v špeciálnom prípade, keď úsečka KM prechádza stredom S kružnice (obr. 8).

Zostáva ešte dokázať tvrdenie o obvodovom a stredovom uhle pre prípad, že bod S leží mimo uhla KML (pozri obr. 9). Na tomto dôkaze môžeme predviesť dva typické spôsoby uvažovania v matematike.

Prvý spôsob: ak sa niečo osvedčilo predtým, prečo to nevyskúšať aj teraz? V úlohe 8 a) sme využívali vlastnosti rovnoramenných trojuholníkov. Pozrime sa, či sa tak dá postupovať aj v prípade znázornenom na obr. 9.

ÚLOHA

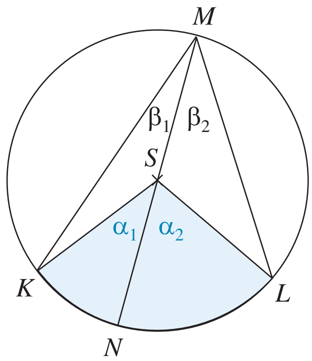
9. Pokúste sa dokázať vzťah medzi stredovým a obvodovým uhlom na obr. 9 pomocou vhodnej dvojice rovnoramenných trojuholníkov.

Inou možnosťou je využiť už predtým dokázané tvrdenia. Tak postupoval pri dôkaze vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom na obr. 9 Euklides. Myšlienka jeho postupu je znázornená na obr. 10. Euklides využil, že už pozná vzťah medzi stredovým a obvodovým uhlom k oblúku NK (červený) aj k oblúku NL (zelený), pretože bod S leží na ramene príslušných obvodových uhlov (touto polohou sme sa zaoberali v úlohe 8 c). Zo vzťahov platných pre oblúky NL a NK odvodil vzťah medzi stredovým a obvodovým uhlom k oblúku KL (modrý).

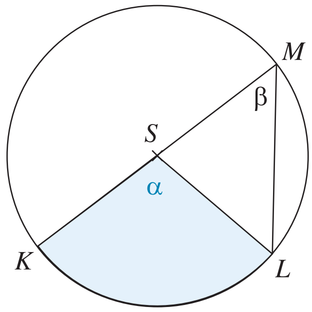
ÚLOHA

10. Vysvetlite tento Euklidov dôkaz.

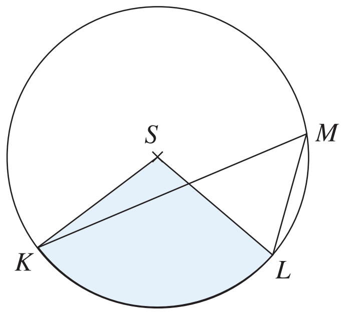
Prvý prípad – obvodový uhol je ostrý



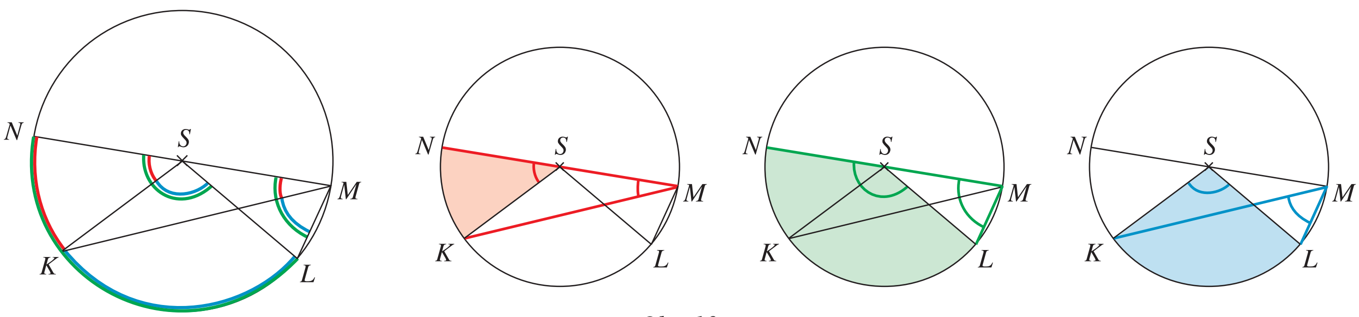
Obr. 7



Obr. 8



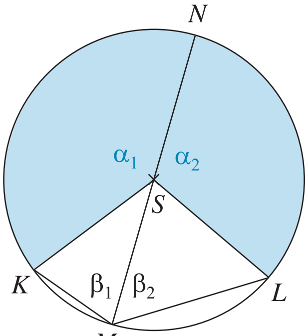
Obr. 9



Obr. 10
Dôkaz z Euklidových Základov.
Oblúčiky rovnakej farby znázorňujú zodpovedajúce si dvojice stredový uhol – obvodový uhol: modré pre oblúk KL, zelené pre oblúk NL, červené pre oblúk NK.

Druhý prípad – obvodový uhol je tupý

V našich doterajších úvahách sme oblúk na obr. 7 až 10 kreslili kratší ako polkružnica – teda jeho stredový uhol bol menší ako 180°. Mali by sme preto skontrolovať, či tvrdenie o vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom platí aj pre oblúky so stredovým uhlom väčším ako 180°. Aj tu máme na výber (prinajmenšom) z dvoch možností. Jednou z nich je skontrolovať, či úvahy, ktoré sme použili pre oblúk kratší ako polkružnica, platia aj pre dlhšie oblúky. Predvedieme si to na úvahe z riešenia úlohy 8 a).



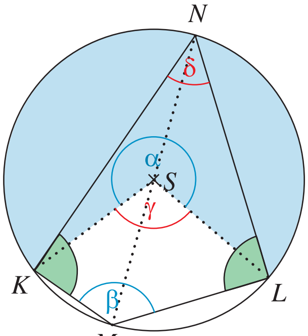
Obr. 11

ÚLOHA

11. Skontrolujte, že použitím rovnakých úvah ako v riešení úlohy 8 a) možno aj pre uhly α_1, α_1, β_1, β_2 znázornené na obrázku 11 dokázať rovnosti $\alpha_1 = 2\beta_1$, $\alpha_2 = 2\beta_2$.

Podobne môžeme skontrolovať, že aj úvahy, ktoré sme použili pri riešení úloh 8 c) a 9, platia rovnako pre stredové uhly väčšie ako 180°. Tak bude dokázané, že vzťah medzi veľkosťou stredového a obvodového uhla platí pre ľubovoľný oblúk kružnice.

Inú možnosť, ako overiť platnosť tohto vzťahu pre stredové uhly väčšie ako 180° (keď už ju máme overenú pre stredové uhly do 180°), ukážeme v úlohe 13. Pomôže nám pritom Tálesova veta.



Obr. 12

$\alpha + \gamma = 360°$

$\beta + 90° + \delta + 90° = 360°$

(súčet uhlov v štvoruholníku *KMLN*)

$\gamma = 2\delta$

ÚLOHA

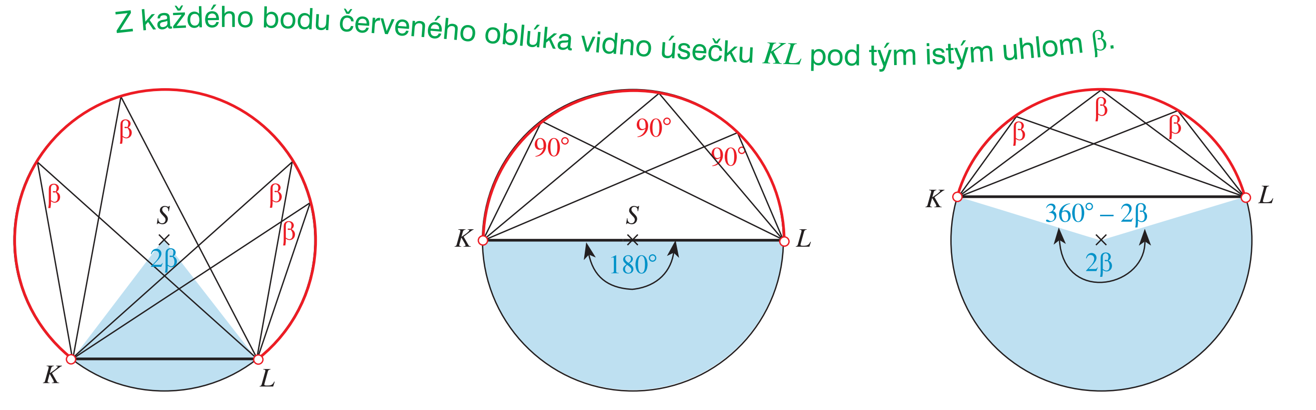
12. Skontrolujte, že Tálesova veta je špeciálny prípad vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom (akú veľkosť má v tomto prípade stredový uhol?).

Odvodenie vzťahu medzi stredovým uhlom α oblúka *KNL* a obvodovým uhlom *KML* je naznačené na obr. 12. Bod *N* je zvolený tak, aby *MN* bol priemer kružnice. Pri odvodení využijeme tieto poznatky:
(1) súčet uhlov α a γ je 360°,
(2) súčet uhlov v štvoruholníku *KMLN* je 360°, pritom uhly pri vrcholoch *K* a *L* (vyznačené zelenou farbou) sú pravé,
(3) uhol γ je dvojnásobok uhla δ.

ÚLOHA

13. a) Skontrolujte správnosť uvedených tvrdení.
b) Vysvetlite, ako z nich možno odvodiť, že uhol α je dvojnásobok uhla β.

Poznatok o vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom, ktorý sme odvodzovali v úlohách 8 až 13, možno sformulovať aj takto (pozri obr. 13):



Obr. 13
Zo všetkých bodov červeného oblúka kružnice vidíme úsečku KL pod uhlom β.
Prvý obrázok je pre ostrý uhol β, druhý pre uhol β = 90° (Tálesova veta), tretí pre tupý uhol β.

Konštrukcia oblúka, z ktorého vidno úsečku pod daným uhlom

ÚLOHY

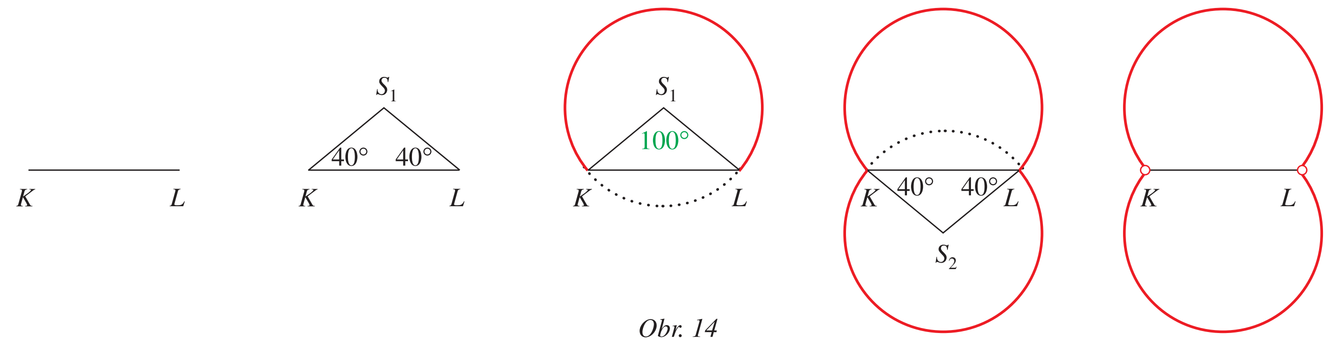
14. Daná je úsečka KL. Opíšte konštrukciu oblúka kružnice, z ktorého vidno túto úsečku pod uhlom a) 50°, b) 90°, c) 140°.

15. a) Skontrolujte správnosť nasledujúceho postupu konštrukcie oblúka, z ktorého vidno úsečku KL pod uhlom 50°.
1. Narysujeme polpriamku p s krajným bodom K, ktorá zviera s úsečkou KL uhol 50°.
2. V bode K narysujeme kolmicu k na p.
3. Narysujeme priamku r, ktorá je osou úsečky KL.
4. Priesečník priamok k a r je stred S hľadaného kružnicového oblúka.
5. Narysujeme kružnicový oblúk so stredom S a krajnými bodmi K a L, ktorý leží na opačnej strane od KL ako polpriamka p.

b) Zistite, či opísaný postup zostane správny, ak uhol 50° nahradíme tupým uhlom, napr. 140°. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Tento postup pochádza z 3. knihy Euklidových Základov.

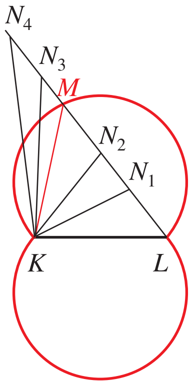
Na základe našich doterajších poznatkov vieme zostrojiť dva oblúky kružnice, z ktorých vidno úsečku KL pod uhlom 50° (pozri obr. 14): jeden z nich – so stredom S_1 – leží nad touto úsečkou, druhý – so stredom S_2 – pod ňou. Úsečku KL vidno pod uhlom 50° z každého bodu týchto dvoch oblúkov okrem bodov K a L. (Pod akým uhlom vidno úsečku KL z bodov K a L ?)



Obr. 14
Dva oblúky, z ktorých vidno úsečku KL pod uhlom **50°** *(veľkosť uhlov pri vrcholoch K a L treba zvoliť tak, aby stredový uhol KS_1L mal veľkosť 2 ·* **50°** *=* **100°***).*

V úlohách 2 až 4 na s. 42 – 43 sme ukázali, že všetky body, z ktorých vidno úsečku AB pod uhlom 90°, ležia na Tálesovej kružnici tejto úsečky. Teda *iba* z Tálesovej kružnice nad úsečkou AB vidno túto úsečku bod uhlom 90°. Rovnakým spôsobom možno zdôvodniť, že úsečku KL vidno pod uhlom 50° *iba* z červeno vyznačených bodov na obr. 14 vpravo.

EXISTUJÚ EŠTE ĎALŠIE BODY, Z KTORÝCH VIDNO ÚSEČKU KL POD UHLOM 50°?



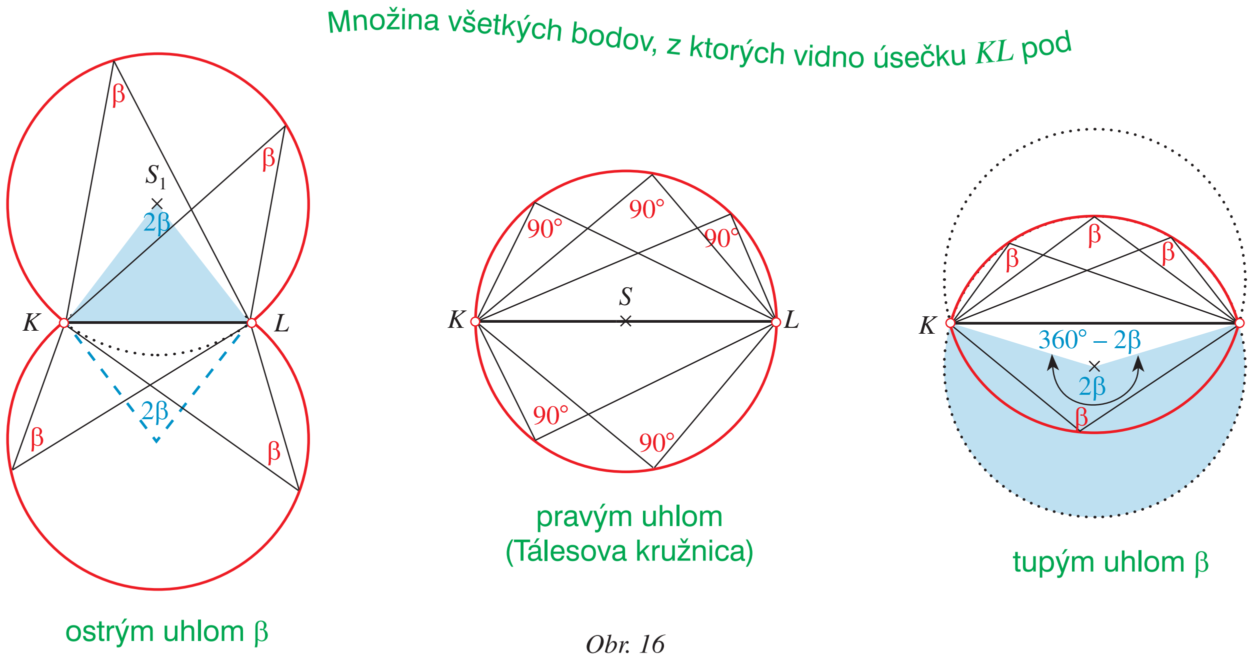
Obr. 15

ÚLOHA

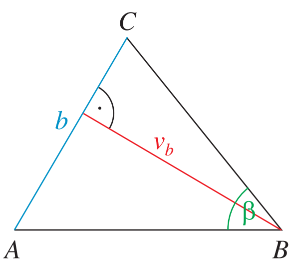
16. Na obr. 15 sú dva kružnicové oblúky z obr. 14. Zopakujte úvahy z úloh 2 až 4 a zdôvodnite tak, že okrem bodov týchto oblúkov v rovine už neexistujú ďalšie body, z ktorých vidno úsečku KL pod uhlom 50°.

Naše doterajšie zistenia z úloh 8 až 16 možno zhrnúť „v reči" množiny bodov s danými vlastnosťami, pozri obr. 16. Tento obrázok dostaneme, ak ku každému kružnicovému oblúku na obr. 13 doplníme oblúk s ním súmerný podľa priamky KL.

Použitie týchto množín bodov s danými vlastnosťami predvedieme v úlohách 17 a 20.



Obr. 16



Obr. 17

OBVODOVÝ UHOL A KONŠTRUKCIA TROJUHOLNÍKA

Chceme skonštruovať trojuholník ABC, v ktorom poznáme dĺžky strany b, výšky v_b a veľkosť uhla β. Z náčrtu na obr. 17 vyplýva, že úsečku AC (ktorej dĺžku poznáme) vidíme z bodu B pod uhlom β (aj jeho veľkosť poznáme). O bode B máme teda dve informácie:

- vieme, pod akým uhlom z neho vidno úsečku AC
  Preto B musí ležať v množine tých bodov, z ktorých úsečku AC vidno pod uhlom β (táto množina sa skladá z dvoch kružnicových oblúkov k_1, k_2, pozri obr. 16).

- poznáme jeho vzdialenosť od priamky AC (tou je dĺžka výšky v_b).
  Preto B musí patriť do množiny tých bodov, ktorých vzdialenosť od priamky AB je v_b (z riešenia úlohy 1 na s. 8 vieme, že touto množinou je dvojica priamok p_1, p_2 rovnobežných s AB, z ktorých každá má od AB vzdialenosť v_b).

Kružidlo a pravítko na obraze Rembrandta van Rijn Staviteľ lodí a jeho žena (1633).

ÚLOHA

17. Dokončite toto riešenie. Potom opíšte postup konštrukcie trojuholníka ABC, v ktorom $b = 4$ cm , $v_b = 3$ cm , $\beta = 42°$.

6.3 Ďalšie úlohy

Konštrukcia dotyčnice bez použitia Tálesovej kružnice

V 3. knihe Euklidových Základov nájdeme postup konštrukcie dotyčnice, ktorý nevyužíva Tálesovu kružnicu. Daná je kružnica k so stredom S a bod D, ktorý leží zvonka kružnice k. Postup konštrukcie dotyčnice ku kružnici k prechádzajúcej bodom D:

1. Narysujeme úsečku SD, jej priesečník s k označíme E.
2. Narysujeme kružnicu l so stredom S prechádzajúcu bodom D.
3. V bode E narysujeme kolmicu na SD, jej priesečník s l označíme G.
4. Narysujeme úsečku SG, jej priesečník s k označíme H.
5. Priamka DH je hľadaná dotyčnica ku kružnici k prechádzajúca bodom D.

ÚLOHA

18. a) Skonštruujte podľa tohto postupu dotyčnicu ku kružnici k prechádzajúcu bodom D ležiacim zvonka tejto kružnice (získate tak obrázok, ktorý môžete využiť v časti b) tejto úlohy).
b) Zdôvodnite správnosť tejto konštrukcie.

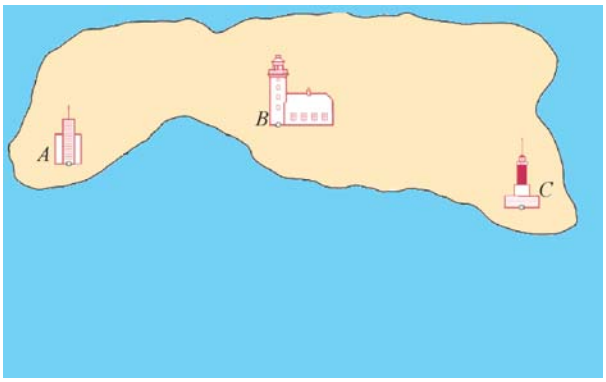
Navigácia a Snelliova úloha

Jedna z úloh pobrežnej navigácie je určiť svoju polohu na mori, ak vieme zistiť azimut k niekoľkým bodom, ktorých polohu na mape poznáme (maják, nejaký výrazný bod na pobreží, napr. veža kostola).

Jednou z možností je zmerať azimut na dva známe body. Na základe toho vieme rysovaním na mape určiť svoju polohu.

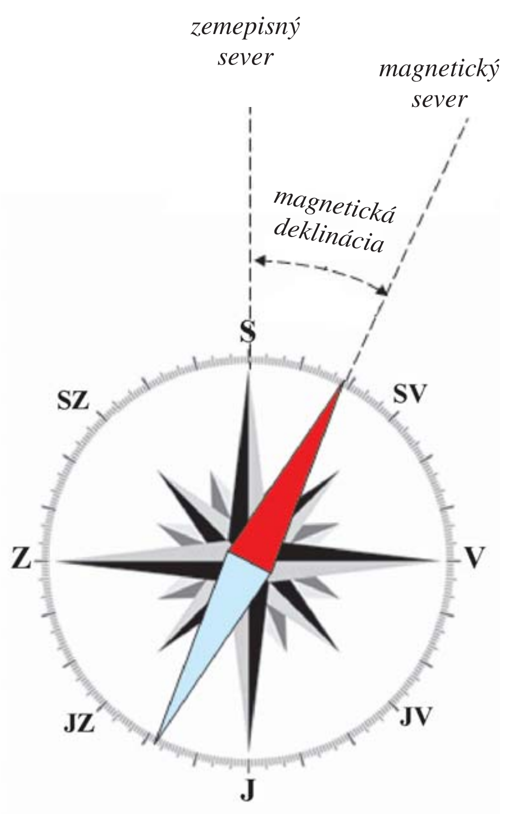
ÚLOHA

19. Zistili ste, že zemepisný azimut na maják C je 52°, zemepisný azimut na vežu A je 320° (pozri obr. 18, smer na sever je zvislo nahor).
a) Opíšte, ako z týchto údajov určíte vašu polohu na mape.
b) Zvoľte v zošite body A, C tak, aby ich poloha približne zodpovedala polohe bodov A, C na obrázku a rysovaním určite vašu polohu.



Obr. 18

Praktická realizácia tohto postupu je o čosi komplikovanejšia. Strelka kompasu, ktorým zisťujeme azimut, totiž neukazuje smer k zemepisnému severu, ale k severnému *magne-*



tickému pólu. Aby sme z uhla zmeraného kompasom – magnetického azimutu – zistili zemepisný azimut, potrebujeme poznať veľkosť magnetickej deklinácie – uhla medzi zemepisným a magnetickým severom. Magnetická deklinácia nadobúda na rôznych miestach zeme rôzne hodnoty, tie sa navyše časom menia.

Postup, ktorý použijeme v nasledujúcej úlohe sa tejto komplikácii vyhýba, pretože nevyžaduje údaj o magnetickej deklinácii. Stačí poznať uhly, pod ktorými vidíme úsečky AB a BC.

ÚLOHA

20. Kompasom zmeraný (teda magnetický) azimut na vežu A je 317°, na kostolnú vežu B je 359°, na maják C je 49°.

a) Pod akými uhlami vidíme úsečky AB a BC?

Vašu polohu na mape môžete teraz určiť ako priesečník dvoch kružnicových oblúkov – jedného, z ktorého vidno pod konštantným uhlom úsečku AB, a druhého, z ktorého vidno pod konštantným uhlom úsečku BC.

b) Zvoľte v zošite body A, B, C tak, aby ich poloha približne zodpovedala polohe bodov A, B, C na obrázku a rysovaním určite vašu polohu.

c) Riešte rovnakú úlohu pre trojicu azimutov 195° (veža A) – 150° (kostolná veža B) – 130° (maják C).

Willebrord Snellius
1580 – 1626

Postup opísaný v úlohe 20 ako prvý v novoveku použil Holanďan Willebrord Snellius (Willebrord Snel van Royen). Určil tak vzdialenosť svojho leidenského domu od troch význačných budov v Leidene: radnice a dvoch kostolov. Výpočet bol súčasťou veľkého Snelliovho projektu – merania Zeme pomocou triangulácie – ktorý opísal v knihe Eratosthenes Batavus (Holandský Eratostenes) z r. 1617. Willebrord Snellius je dnes známy najmä vďaka zákonu o lome svetla pri prechode z jedného prostredia do druhého (napr. zo vzduchu do vody), ktorý má jeho meno.

Úloha 20 vyjadrená matematicky:
Dané sú body A, B, C. Nájdite bod D tak, aby uhly ADB a BDC mali v tomto poradí veľkosti α a β.
Z takto sformulovaného zadania nijako nevidno, že sa za ním skrýva problém z reálneho sveta. Čistá matematika sa zaoberá riešením takto abstraktne formulovaných úloh – použité prostriedky sú pritom rovnaké pre úlohu, ktorá má svoj pôvod v nejakom reálnom probléme, aj pre vymyslenú hádanku. Keby sme sa však pri vyučovaní sústredili len na riešenie problémov v takejto matematickej podobe, pripravili by sme sa o dôležitý rozmer matematiky (a jeden zo zdrojov jej rozvoja). Tým je aplikácia matematiky – jej rôzne použitia od riešenia jednoduchých otázok z bežného života až po problémy vznikajúce v rôznych oblastiach vedy a techniky.

1. a) Úsečky *AS, BS* a *CS* majú rovnakú dĺžku, pretože sú to polomery kružnice *k*.
b) Súčet uhlov v trojuholníku *ACS* je 180° a uhly *ACS* a *ASC* majú rovnakú veľkosť. Preto $\alpha + 2 \cdot |\sphericalangle ACS| = 180°$, odtiaľ $|\sphericalangle ACS| = \dfrac{180° - \alpha}{2}$.
Podobne platí $|\sphericalangle BCS| = \dfrac{180° - \beta}{2}$.
c) Uhol *ACB* je súčet uhlov *ACS* a *BCS*, preto

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \beta}{2} = \frac{360° - \overbrace{(\alpha + \beta)}^{= 180°}}{2} = \\ = \frac{180°}{2} = 90°$$

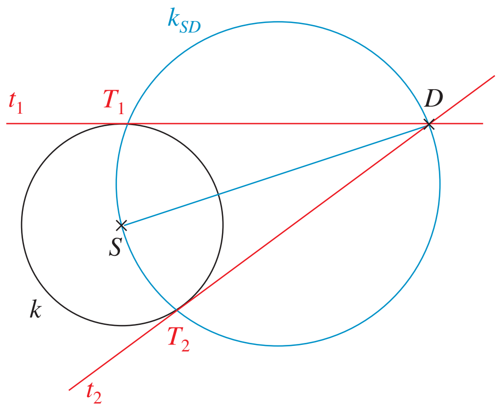
(pri výpočte sme využili, že súčet $\alpha + \beta$ je 180°).
2. So zväčšovaním vzdialenosti bodov *C* a *B* sa uhol *ACB* zmenšuje. Zdôvodnenie:
V trojuholníku *ABC* je súčet uhlov 180°, preto $|\sphericalangle ACB| = 180° - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BAC|$. Pritom veľkosť uhla *ABC* (pri vrchole *B*) sa pri pohybe bodu *C* nemení, veľkosť uhla *BAC* (pri vrchole *A*) sa zväčšuje. Preto sa veľkosť uhla *ACB* musí zmenšovať.
3. a) Väčší ako 90°, teda tupý. **b)** Menší ako 90°, teda ostrý. Vyplýva to z odpovede na úlohu 2.
4. Ak zvolíme ľubovoľný bod *C* ležiaci mimo priamky *AB*, tak môžeme narysovať polpriamku *BC* s krajným bodom *B*. Z riešenia úloh 2 a 3 vieme, že uhol, pod ktorým z bodu *C* vidno úsečku *AB*, je

- tupý, ak *C* leží vnútri kruhu ohraničeného kružnicou *k*,
- pravý, ak *C* leží na Tálesovej kružnici nad úsečkou *AB*,
- ostrý, ak *C* leží mimo kruhu ohraničeného kružnicou *k*.

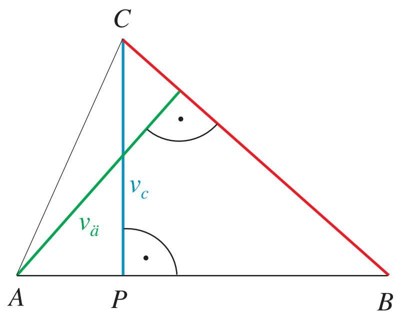
Ak *C* leží vnútri úsečky *AB*, vidno z neho túto úsečku pod uhlom 180°. Ak *C* leží na priamke *AB*, ale mimo úsečky *AB*, tak z neho túto úsečku vidno pod uhlom 0°.
5. Skonštruujeme stred úsečky *SD* a narysujeme kružnicu k_{SD} s priemerom *SD*. Jej priesečník s kružnicou *k* označíme *T*. Hľadaná dotyčnica je priamka *DT*.
Pri rysovaní zistíme, že existujú dva body, ktoré sme v postupe označili *T*. Na obr. 19 sme ich označili T_1, T_2. Každému z nich zodpovedá jedna z dvoch dotyčníc – červených priamok t_1, t_2.)
7. a) Známe veľkosti sú farebne vyznačené na obr. 20. Pomocou Tálesovej kružnice (kružnica *k* na obr. 21) zostrojíme najprv pravouhlý trojuholník *PBC*. Vrchol *A* musí ležať

- na priamke *BP* (priamky *d, e* na obr. 21),
- vo vzdialenosti $v_a = 3$ od priamky *BC*, teda na jednej z dvoch priamok *g, h* na obr. 21 (farby použité na obr. 21 zodpovedajú farbám známych veľkostí z obr. 20)

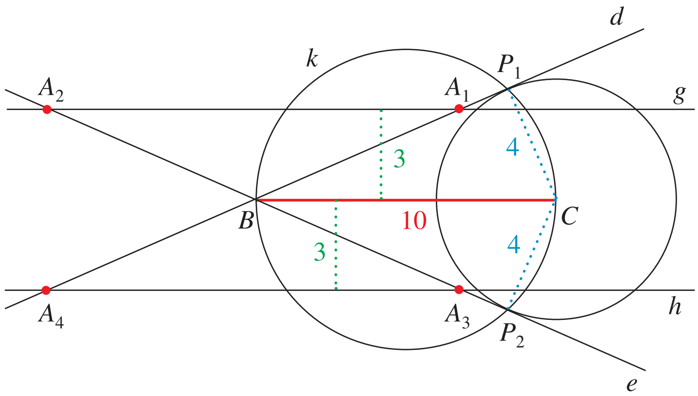
Ako priesečníky dostaneme štyri body A_1 až A_4, ktorým zodpovedajú štyri trojuholníky (obr. 22). Všetky spĺňajú podmienky zadania (skontrolujte to). Trojuholníky A_1BC a A_3BC a takisto A_2BC a A_4BC sú nepriamo súmerné.



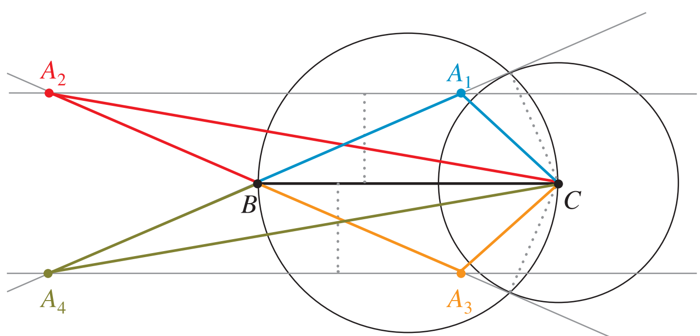
Obr. 19



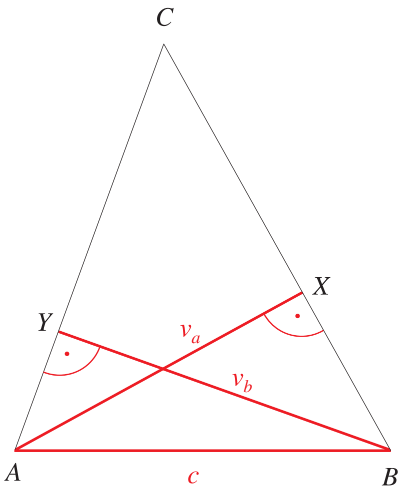
Obr. 20



Obr. 21



Obr. 22



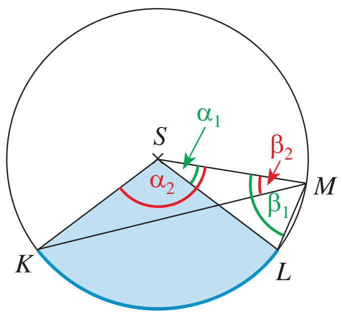
Obr. 23

b) Známe dĺžky sú vyznačené na obr. 23 červenou. Trojuholníky *ABX* a *ABY* sú pravouhlé, preto body *X* a *Y* ležia na Tálesovej kružnici *k* nad úsečkou *AB*. Bod *X* nájdeme ako priesečník kružnice *k* s kružnicou *m* (stred *A*, polomer v_a), bod *Y* ako priesečník kružnice *k* s kružnicou *n* (stred *B*, polomer v_b). Keď poznáme body *X* a *Y*, nájdeme vrchol *C* ako priesečník *AY* a *BX*.

8. a) *SK*, *SM* a *SL* sú polomery kružnice, preto sú trojuholníky *KSM* a *LSM* rovnoramenné. Súčet uhlov v trojuholníku je 180° a v trojuholníku *KSM* majú uhly pri vrcholoch *K* a *M* rovnakú veľkosť, preto $|\sphericalangle KSM| = 180° - 2\beta_1$.
Súčasne $|\sphericalangle KSM| + |\sphericalangle KSN| = 180°$. Z týchto dvoch rovností vyplýva $\alpha_1 = |\sphericalangle KSN| = 2\beta_1$. Rovnosť $\alpha_2 = 2\beta_2$ sa dokáže rovnako.
b) $|\sphericalangle KSL| = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2|\sphericalangle KML|$.

9. Využijeme rovnoramenné trojuholníky *KSM* a *LSM* (obr. 24) a rovnosti $\alpha_1 = 180° - 2\beta_1$ (trojuholník *LSM*), $\alpha_2 = 180° - 2\beta_2$ (trojuholník *KSM*). Potom

$$|\sphericalangle KSL| = \alpha_2 - \alpha_1 = (180° - 2\beta_2) - (180° - 2\beta_1) = 2(\beta_1 - \beta_2) =$$
$$= 2|\sphericalangle KML|.$$



Obr. 24

10. Vieme, že platí $|\sphericalangle NSK| = 2 \cdot |\sphericalangle NMK|$ (červené oblúčiky), $|\sphericalangle NSL| = 2 \cdot |\sphericalangle NML|$ (zelené oblúčiky). Potom

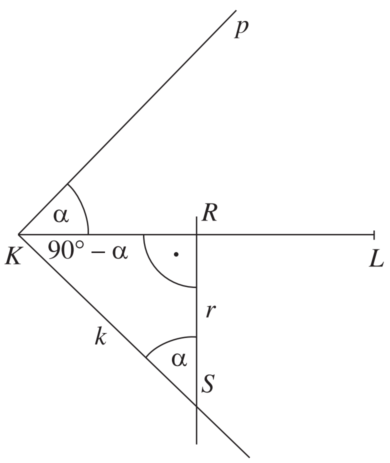
$$\underbrace{|\sphericalangle KSL|}_{\text{modrý}} = \underbrace{|\sphericalangle NSL|}_{\text{zelený}} - \underbrace{|\sphericalangle NSK|}_{\text{červený}} = 2 \cdot |\sphericalangle NML| - 2 \cdot |\sphericalangle NMK| =$$
$$= 2(|\sphericalangle NML| - |\sphericalangle NMK|) = 2 \cdot |\sphericalangle KML|$$

12. Pomocou obvodového a stredového uhla možno Tálesovu vetu sformulovať takto: Ak má stredový uhol veľkosť 180°, tak obvodový uhol má veľkosť 90° (pozri tiež obr. 13).

13. b) $\alpha \overset{(1)}{=} 360° - \gamma \overset{(3)}{=} 360° - 2\delta \overset{(2)}{=}$
$$= 360° - 2 \cdot (360° - 90° - 90° - \beta) = 2\beta$$
(číslo nad znakom = označuje, ktorý z poznatkov uvedených pred úlohou 13 sme použili).

14. b) Dva oblúky (ak *KL* bude vodorovná, tak jeden z nich leží nad *KL* a druhý pod *KL*) vytvoria kružnicu, ktorej priemerom je *KL*. Úsečku *KL* vidno pod uhlom 90° zo všetkých bodov tejto kružnice okrem bodov *K* a *L*.
c) Narysujeme
1. rovnoramenný trojuholník *KLS*, v ktorom uhly pri vrcholoch *K* a *L* majú veľkosť 50° (potom $|\sphericalangle KSL| = 180° - 2 \cdot 50° = 80°$, jeho doplnok do 360° je $280° = 2 \cdot 140°$), *S* bude stred oblúka, ktorý hľadáme,
2. kružnicu *k* so stredom *S* prechádzajúcu bodmi *KL*, kratší z jej dvoch oblúkov s krajnými bodmi *K* a *L* je oblúk, z ktorého vidno *KL* pod uhlom 140°.

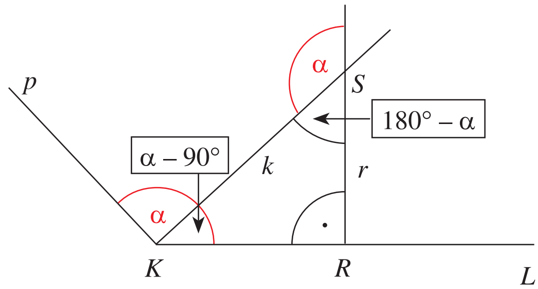
Opísanou konštrukciou získame dva oblúky s požadovanou vlastnosťou, v každej z dvoch polrovín, na ktoré rozdelí rovinu priamka *KL*, bude ležať jeden z týchto oblúkov.
Iný možný postup je opísaný v úlohe 15 b).



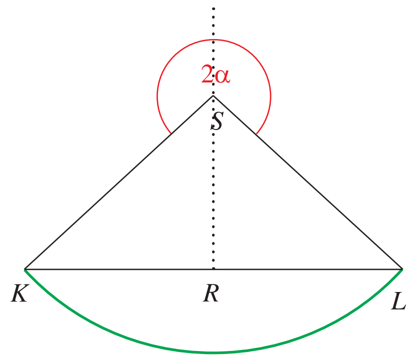
Obr. 25

15. a) Pozri obr. 25. Treba skontrolovať, že stredový uhol *KSL* má veľkosť $2 \cdot 50° = 100°$. Ak *p* zviera s *KL* uhol $\alpha = 50°$ a *k* je kolmá na *p*, tak *KL* a *k* zvierajú uhol $90° - \alpha$ (pozri obr. 25). Potom uhol pri vrchole *S* v pravouhlom trojuholníku *KRS* (*R* je stred KL) má veľkosť α, a teda stredový uhol KSL má veľkosť 2α.

b) Opísaný postup vedie k správnemu výsledku aj pre tupé uhly α. Ak p a KL zvierajú tupý uhol α (pozri obr. 26), tak k a KL zvierajú uhol $\alpha - 90°$. Potom $|\sphericalangle KSR| = 180° - \alpha$, a teda $|\sphericalangle KSL| = 2 \cdot |\sphericalangle KSR| = 360° - \alpha$. Preto zelený oblúk so stredom S a krajnými bodmi K, L, ktorý leží na opačnú stranu od KL ako polpriamka p (obr. 27), tvoria vrcholy obvodových uhlov zodpovedajúce stredovému uhlu 2α.



Obr. 26

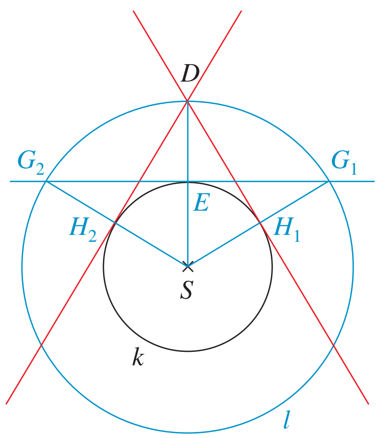


Obr. 27

17. Bod B nájdeme ako priesečník niektorej z priamok p_1, p_2 s niektorým z kružnicových oblúkov k_1, k_2.

Postup konštrukcie (v krokoch 2 a 3 konštruujeme kružnicové oblúky k_1 a k_2, teda množinu všetkých bodov, z ktorých vidno úsečku pod uhlom 42°, pozri úlohu 14):

	poznámky
1. Narysujeme úsečku AC, $\lvert AC\rvert = 4$ cm.	
2. Narysujeme rovnoramenný trojuholník ACS, v ktorom majú vnútorné uhly pri vrcholoch A a C veľkosť 48° (potom bude mať stredový uhol ASC veľkosť 84°, čo je dvojnásobok veľkosti $\beta = 42°$).	Bod S teda nájdeme ako priesečník priamok AX a BY takých, že uhly XAC a YCA majú veľkosť 48°, také body S existujú dva, označíme ich S_1, S_2.
3. Narysujeme kružnicový oblúk k so stredom S, polomerom SA a krajnými bodmi A, C tak, aby ležal na tej istej strane od AC ako stred S – matematická formulácia: oblúk s krajnými bodmi A, C a bod S ležia v tej istej z dvoch polrovín, na ktoré rovinu rozdeľuje priamka AC.	Keďže body S sú dva, budú aj dva kružnicové oblúky, označíme ich k_1, k_2.
4. Narysujeme priamku p, ktorá je rovnobežná s AC a má od nej vzdialenosť $v_b = 3$ cm,	Existujú dve také priamky, označíme ich p_1, p_2.
5. Bod B je priesečník kružnicového oblúka k a priamky p.	V našom prípade teda hľadáme priesečníky k_1 s p_1, k_1 s p_2, k_2 s p_1, k_2 s p_2.

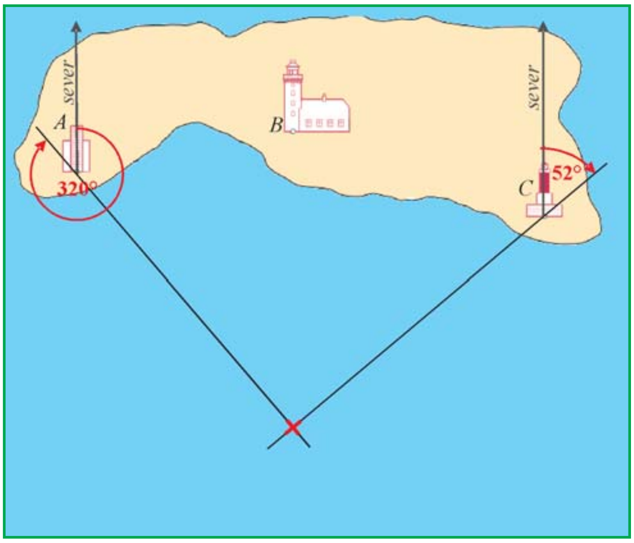


Obr. 28

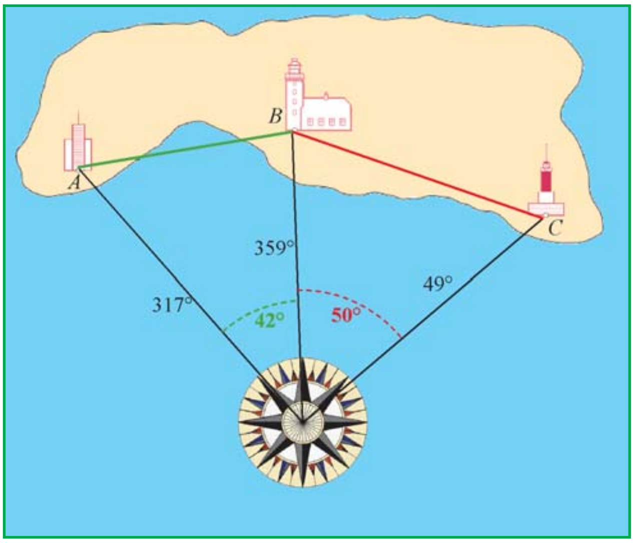
18. a) Pozri obr. 28 (rysovaním dostaneme dva rôzne body označené v postupe písmenom G – na obrázku sme ich označili G_1, G_2, podobne dostaneme dva body H).

b) Bod H leží na kružnici k, preto DH je dotyčnica ku k práve vtedy, keď uhol SHD je pravý. Trojuholníky SHD a SEG sú zhodné (podľa vety *sus* – strany SE a SH majú rovnakú dĺžku, takisto strany SD a SG a uhol pri vrchole S je spoločný), pritom trojuholník SEG má pravý uhol pri vrchole E. Preto je pravý aj uhol SHD, teda $SH \perp DH$.

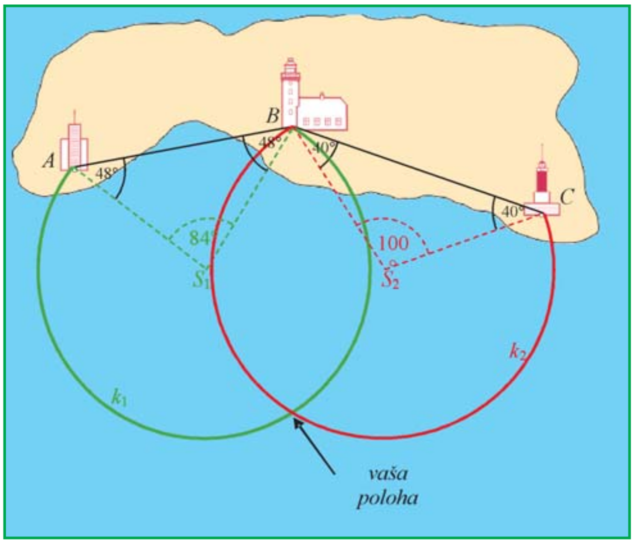
19. Pozri obr. 29
20. a) Pozri obr. 30.
b) Pozri obr. 31. Úsečku AB vidno pod uhlom 42° zo všetkých bodov zeleného oblúka k_1 so stredom S_1 (stredový uhol AS_1B má veľkosť $2 \cdot 42° = 84°$), úsečku BC vidno pod uhlom 50° z bodov červeného oblúka k_2 so stredom S_2.
Druhý oblúk ležiaci nad úsečkou BC, z ktorého vidno túto úsečku tiež pod uhlom 50° (porovnaj s obr. 14), nás nezaujíma, pretože z nameraných azimutov vidno, že hľadaná poloha je pod úsečkami AB, BC (prečo?), podobne nás nezaujíma ani druhý oblúk, z ktorého vidno AB pod uhlom 42°.
c) V tomto prípade leží hľadaná poloha nad úsečkami AB a BC.



Obr. 29



Obr. 30



Obr. 31

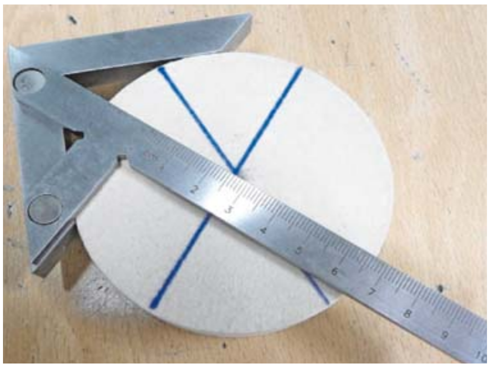
7 ŠTYRI VÝZNAČNÉ PRIESEČNÍKY V TROJUHOLNÍKU

Za štyri význačné priesečníky v trojuholníku sa pokladajú stred kružnice trojuholníku opísanej, stred kružnice do trojuholníka vpísanej, priesečník výšok a ťažisko. Všetky súvisia s množinami bodov s danými vlastnosťami alebo konštrukčnými úlohami: pri úvahách o existencii prvých troch využijeme základné množiny bodov, ktoré sme spomínali v kapitole 5 – os úsečky a os uhla. Vlastnosti ťažiska využijeme pri riešení niektorých konštrukčných úloh.

7.1 Osi strán a osi uhlov v trojuholníku
7.2 Priesečník výšok trojuholníka (ortocentrum)
7.3 Ťažnice a ťažisko
7.4 Ďalšie úlohy

7.1 Osi strán a osi uhlov v trojuholníku

Jednou z konštrukcií, v ktorých sa využíva os úsečky, je hľadanie stredu kružnicového oblúka. Občas sa totiž môžeme ocitnúť v situácii, že v už narysovanej kružnici nie je vyznačený stred, ktorého polohu však z nejakého dôvodu potrebujeme poznať.



Na hľadanie stredu kruhu majú remeselníci špeciálny nástroj (je založený na podobnej myšlienke ako naša konštrukcia). Už z toho vidno, že je to problém, s ktorým sa možno stretnúť nielen v zbierkach úloh z matematiky.

Hľadáme stred kružnicového oblúka

So základnou myšlienkou tejto konštrukcie sme sa stretli už v úlohe 6 na s. 13: ak body *A, B* ležia na kružnici *k*, tak stred *S* tejto kružnice leží na .... *AB*.

ÚLOHA

1. Doplňte chýbajúci text v predchádzajúcej vete. Zdôvodnite platnosť tvrdenia, ktoré tak dostanete.

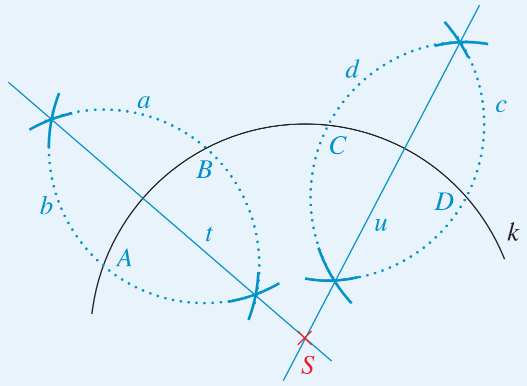
Toto tvrdenie platí pre ľubovoľnú dvojicu bodov ležiacich na kružnici. Vyjadrené pomocou pojmu *tetiva kružnice* (= spojnica dvoch bodov ležiacich na kružnici):

Stred kružnice leží na osi každej tetivy tejto kružnice, je teda priesečníkom všetkých takýchto osí.

Dobre si rozmyslite, či je vám táto formulácia jasná.

ÚLOHA

2. Na základe tohto poznatku navrhnite euklidovskú konštrukciu stredu kružnice (alebo kružnicového oblúka) *k*. Svoj návrh potom porovnajte s konštrukciou znázornenou na obr. 1.



Obr. 1

Euklidovská konštrukcia stredu oblúka kružnice *k* (s pevne nastaveným rozovretím kružidla, teda oblúky *a, b, c, d* majú rovnaký polomer). Body *A, D* volíme čo najďalej od seba (zvýši sa tým presnosť výsledku). Bod *B* (stred oblúka *b*) je priesečník oblúkov *k, a*, podobne bod *C* (stred oblúka *c*) je priesečník oblúkov *k, d*. Konštrukcia však zostane správna aj v prípade, že za *B* a *C* zvolíme iné body než priesečníky *k* s oblúkmi *a, d* (prečo?).

Každou trojicou bodov neležiacich na jednej priamke je určená nejaká kružnica

Z úvah, ktoré sme použili pri hľadaní stredu kružnicového oblúka, vyplýva toto – pomerne zrejmé – tvrdenie: Pre každé tri body *A, B, C*, ktoré neležia na priamke, vieme nájsť kružnicu, ktorá nimi prechádza. Inak vyjadrené: každou trojicou bodov, ktoré neležia na jednej priamke, je určená nejaká kružnica.

ÚLOHA

3. Doplňte chýbajúce časti v nasledujúcom texte zdôvodnenia uvedeného tvrdenia:
Os úsečky *AB* (označme ju *t*) a os úsečky *BC* (označme ju *u*) nie sú rovnobežné, pretože .... Preto sa priamky *u, t* pretínajú v jednom bode (označme ho *S*). Bod *S*

- leží na osi úsečky *AB*, preto od neho majú body .... rovnakú vzdialenosť (označme túto vzdialenosť *r*),
- leží na osi úsečky *BC*, preto .... Pritom vzdialenosť $|BS|$ = ..., preto aj $|CS|$ = ...

Z toho vyplýva, že všetky tri body *A, B, C* majú rovnakú vzdialenosť *r* od bodu ...., preto musia ležať na kružnici so stredom .... a polomerom ....

Kružnica trojuholníku opísaná

Pripomeňte si najprv dve tvrdenia, ktoré ste dokázali v úlohách 1 a 3:

Stred kružnice leží na osi každej tetivy tejto kružnice, je teda priesečníkom všetkých takýchto osí. (A)

Pre každé tri body *A, B, C*, ktoré neležia na priamke, vieme nájsť kružnicu, ktorá nimi prechádza. (B)

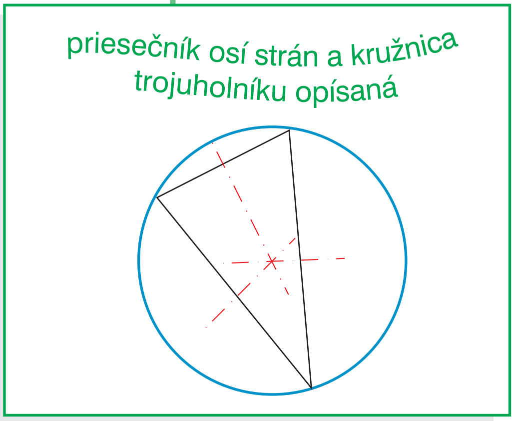
ÚLOHA

4. Vysvetlite, ako súvisia tvrdenia (A) a (B) s nasledujúcimi tvrdeniami o kružnici trojuholníku opísanej:

Každému trojuholníku možno opísať kružnicu. (C)

V každom trojuholníku sa osi strán pretínajú v jednom bode. (D)

Stred kružnice trojuholníku opísanej je priesečník osí jeho strán. (E)



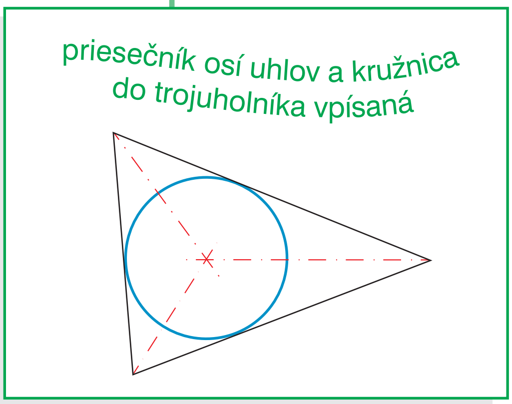
Kružnica do trojuholníka vpísaná

Z riešenia úloh 3 a 4 vyplýva, že v každom trojuholníku *ABC* existuje bod, ktorý má rovnakú vzdialenosť od všetkých troch vrcholov *A, B, C* – tento bod je stred kružnice opísanej trojuholníku *ABC*. Podobnými úvahami možno dokázať aj nasledujúce tvrdenia.

ÚLOHY

5. Ukážte, že v každom trojuholníku *ABC* existuje bod, ktorý má rovnakú vzdialenosť od všetkých troch strán trojuholníka.

6. Sformulujte tvrdenia podobné tvrdeniam (C), (D) a (E) pre kružnicu vpísanú trojuholníku *ABC*. Svoje tvrdenia zdôvodnite.

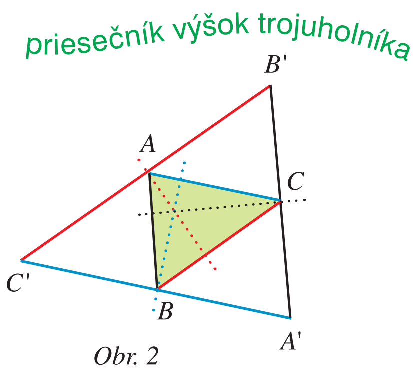


7.2 Priesečník výšok trojuholníka (ortocentrum)

Na niektoré dôkazy prídeme sami, pri niektorých ďalších obdivujeme nápad niekoho iného. Skôr do tej druhej skupiny patrí dôkaz tvrdenia, že v každom trojuholníku *ABC* sa jeho tri výšky musia pretínať v jedinom bode. Na obr. 2 je znázornený dôkaz pre prípad ostrouhlého trojuholníka *ABC*.

V tomto prípade pojem výška chápeme v zmysle *priamka, prechádzajúca vrcholom trojuholníka a kolmá na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka* (uistite sa, či tejto formulácii rozumiete). Keby sme tu výšku nechápali ako priamku (ale iba ako úsečku), nemohli by sme tvrdiť, že výšky v tupouhlom trojuholníku sa pretínajú v jedinom bode (pozri riešenie úlohy 8). Všimnite si, že výška ako priamka je už tretí význam pojmu výška v trojuholníku. Ďalšie dva sú

- výška ako číslo (teda vzdialenosť vrcholu trojuholníka od priamky, na ktorej leží protilahlá strana trojuholníka),
- výška ako úsečka (napr. výška na stranu *AB* v trojuholníku *ABC* je úsečka, ktorá je kolmá na priamku *AB*, pričom jeden jej krajný bod leží na priamke *AB*, druhým krajným bodom je vrchol *C*)



Obr. 2

Ak každým vrcholom trojuholníka ABC vedieme rovnobežku s protiľahlou stranou tohto trojuholníka, vznikne nový trojuholník A'B'C'. Výšky pôvodného trojuholníka ABC sa zhodujú s osami strán nového trojuholníka A'B'C'.

ÚLOHY

7. a) Ukážte, že bod C je stred strany $A'B'$ (pozri obr. 2). Platí podobné tvrdenie aj pre body A, B ?
b) Vysvetlite, ako z časti a) vyplýva, že výška na stranu AB v trojuholníku ABC je totožná s osou strany $A'B'$ v trojuholníku $A'B'C'$.
c) Vysvetlite, ako z časti b) vyplýva tvrdenie: všetky tri výšky trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode.

SKONTROLUJTE SI PRESNOSŤ SVOJHO RYSOVANIA: PRETLI SA NA VAŠOM OBRÁZKU VŠETKY TRI VÝŠKY V JEDINOM BODE?

8. Na obr. 2 sme znázornili situáciu pre ostrouhlý trojuholník. Narysujte podobný obrázok pre tupouhlý trojuholník.
Potom diskutujte o tom, či aj v prípade tupouhlého trojuholníka zostanú v platnosti úvahy z úlohy 7.

Úvahy, ktoré sme použili v predchádzajúcich úlohách, platia pre každý trojuholník. Sú však zbytočne zložité, ak chceme existenciu priesečníka výšok dokázať len pre nejaký špeciálny prípad – napríklad v pravouhlom alebo rovnoramennom trojuholníku.

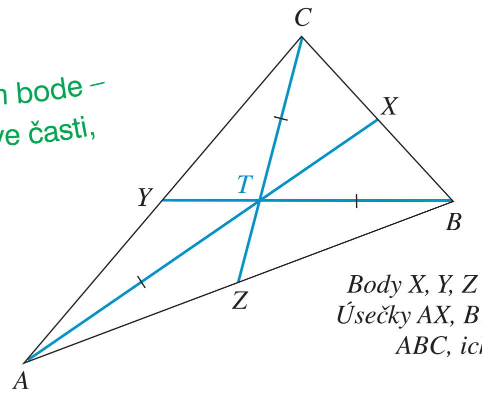
ÚLOHA

9. Diskutujte o tom, ako čo najjednoduchšie dokázať, že
a) v pravouhlom trojuholníku
b) v rovnoramennom trojuholníku
sa všetky tri výšky pretínajú v jednom bode.

7.3 Ťažnice a ťažisko

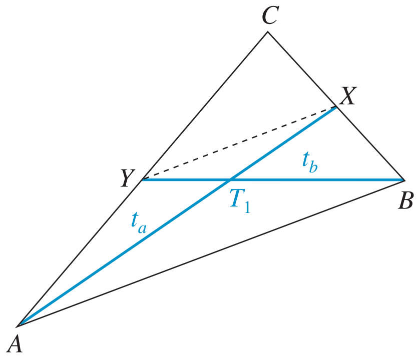
Posledným zo spomínaných štyroch význačných priesečníkov v trojuholníku je ťažisko – bod, v ktorom sa pretínajú všetky tri ťažnice (pripomeňme, že ťažnica je spojnica vrcholu trojuholníka so stredom protiľahlej strany).

Všetky tri ťažnice sa pretínajú v jednom bode – ťažisku, ktoré každú z nich delí na dve časti, ich dĺžky sú v pomere 1 : 2.

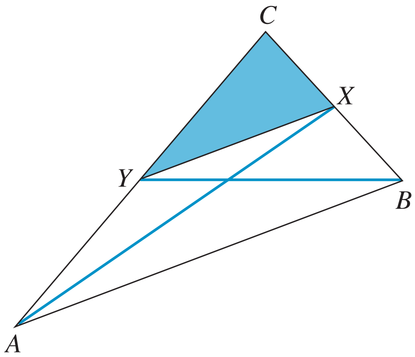


Body X, Y, Z sú stredy strán BC, AC a AB. Úsečky AX, BY a CZ sú ťažnice trojuholníka ABC, ich priesečník T je ťažisko.

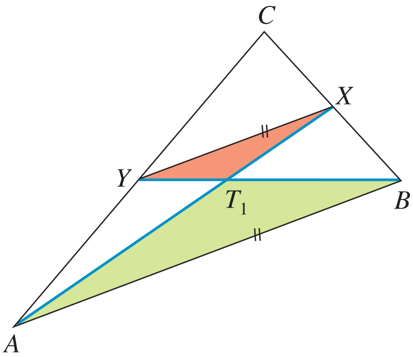
Obrázkami 3 až 5 a úlohou 10 si pripomenieme tvrdenie, že ťažisko rozdeľuje každú z ťažníc v pomere 1 : 2, aj dôkaz, že ťažnice sa skutočne pretnú v jednom bode. Doplnenie chýbajúcich častí textu v úlohe 10 prenechávame na vás – preveríte si tak, či zdôvodneniu rozumiete.



Obr. 3
X, Y sú stredy strán BC, AC, T_1 je priesečník ťažníc AX a BY



Obr. 4
$\Delta\, YXC \sim \Delta\, ABC$,
preto $YX \parallel AB$ *a* $\dfrac{|YX|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}$



Obr. 5
$\Delta\, XYT_1 \sim \Delta\, ABT_1$, *pričom* $\dfrac{|XY|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}$,
preto platí aj $\dfrac{|XT_1|}{|AT_1|} = \dfrac{1}{2}$ *a* $\dfrac{|YT_1|}{|BT_1|} = \dfrac{1}{2}$

ÚLOHA

10. Doplňte chýbajúce časti textu v nasledujúcom zdôvodnení a uistite sa v diskusii, či sú vám jednotlivé tvrdenia jasné.
Trojuholník *YXC* (na obr. 4 modrý) je podobný trojuholníku *ABC*, koeficient podobnosti je $\frac{1}{2}$ (uhol pri vrchole *C* je v obidvoch trojuholníkoch rovnaký a dĺžky strán *YC* a *CX* sú polovicou dĺžok strán .... a ....). Preto

- uhly *CYX* a .... sú rovnaké, teda priamky *AB* a *YX* sú rovnobežné,
- dĺžky strán trojuholníka *YXC* sú polovičné v porovnaní s dĺžkami strán trojuholníka ...., teda

$$\frac{|YX|}{|AB|} = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Trojuholníky ABT_1 a XYT_1 (na obr. 5 zelený a červený) sú podobné – zhodujú sa vo všetkých troch uhloch: $\sphericalangle\, BAT_1$ a $\sphericalangle\, YXT_1$ je dvojica striedavých uhlov pri rovnobežkách *AB* a *YX*, preto $|\sphericalangle\, BAT_1| = |\sphericalangle\, YXT_1|$, rovnako možno zdôvodniť rovnosť .... = ... Rozmery trojuholníka XYT_1 sú teda všetky rovnakým násobkom zodpovedajúcich rozmerov trojuholníka .... Z (*) už vieme, že dĺžka strany *XY* je .... dĺžky zodpovedajúcej strany *AB*. Preto aj dĺžky strán YT_1 a XT_1 musia byť .... dĺžok zodpovedajúcich strán BT_1 a AT_1. To znamená, že bod T_1 delí každú z ťažníc *AX* a *BY* v pomere 1 : 2 (pričom dlhší je vždy úsek medzi vrcholom a bodom T_1).

Ak teraz označíme T_2 napr. priesečník ťažníc t_a a t_c, tak zopakovaním predchádzajúcich úvah zistíme, že bod T_2 rozdeľuje obidve tieto ťažnice v pomere .... Teda ťažnicu t_a rozdeľuje v pomere 1 : 2 bod T_1 aj bod T_2. Preto platí $T_1 = T_2$. To znamená, že všetky tri ťažnice sa pretínajú v jedinom bode.

7.4 Ďalšie úlohy

V nasledujúcej úlohe si vyskúšate konštrukcie, o ktorých sme hovorili v tejto kapitole: budete rysovať ťažnice, výšky, osi strán a hľadať stred kružnice danej tromi bodmi. Aby toto rysovanie prinieslo aj iný úžitok, než len púhe precvičenie jednoduchých konštrukcií, narysovaný obrázok využijeme na overenie dvoch zaujímavých tvrdení o trojuholníkoch. Tie súvisia s pojmami *Eulerova priamka* a *kružnica deviatich bodov*.

ÚLOHA

11. a) Na čistý papier formátu A4 narysujte trojuholník ABC, ktorý nie je pravouhlý ani rovnoramenný (trojuholník zvoľte dostatočne veľký, aby ste mohli rysovať čo najpresnejšie).
V tomto trojuholníku skonštruujte
- priesečník výšok V,
- ťažisko T,
- stred K opísanej kružnice.

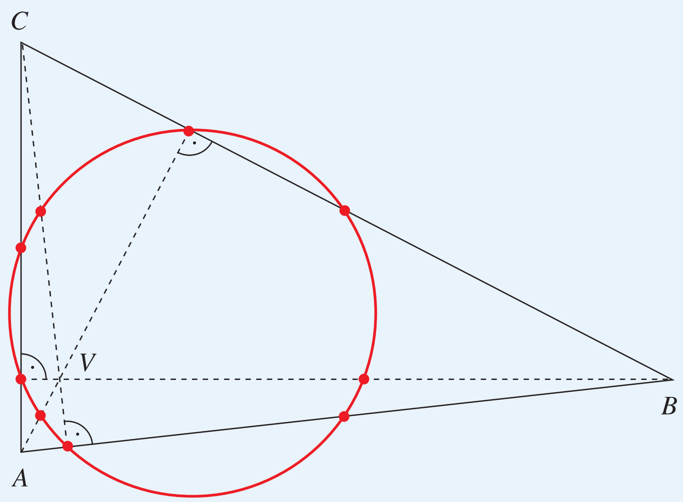
Na rysovanie pravých uhlov použite pravítko s ryskou, osi uhlov a strán konštruujte pomocou kružidla.

b) Pri dostatočne presnom rysovaní zistíte, že body V, T a K ležia na jednej priamke.

Táto priamka sa nazýva Eulerova priamka trojuholníka ABC. Tvrdenie, že body V, T a K ležia na jednej priamke, dokázal Leonhard Euler v článku z r. 1765. Prišiel naň mimochodom, pri riešení inej úlohy: skonštruovať trojuholník, z ktorého je známa iba poloha ťažiska, priesečníka výšok, stredu opísanej a stredu vpísanej kružnice.

c) Skonštruujte kružnicu k, ktorá prechádza stredmi strán trojuholníka ABC.

d) Pri dostatočne presnom rysovaní zistíte, že
- na tejto kružnici ležia aj päty výšok trojuholníka ABC (päta výšky v_a na stranu a je priesečník priamky, na ktorej leží strana a, s priamkou, na ktorej leží výška v_a),
- stredom kružnice k je stred úsečky VK.



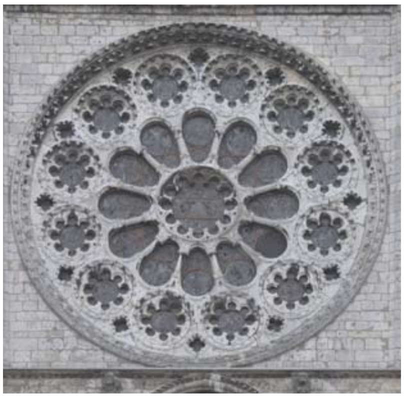
Kružnica deviatich bodov

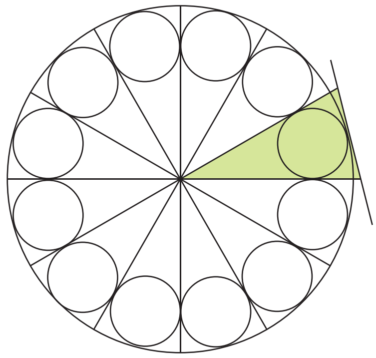
Kružnica k je v literatúre známa ako *kružnica deviatich bodov* – okrem šiestich bodov, o ktorých sme hovorili v zadaní (stredy strán a päty výšok) na nej ležia ešte stredy úsečiek AV, BV a CV. Začiatkom 19. storočia ju nezávisle od seba objavilo viacero matematikov. Podľa jedného z nich – Karla Feuerbacha (1800 – 1834) – sa niekedy nazýva aj *Feuerbachova kružnica* (Feuerbach tiež dokázal, že kružnica k sa zvnútra dotýka kružnice opísanej trojuholníku ABC – overte to na svojom obrázku).

Ťažisko, stredy kružníc trojuholníku vpísanej a opísanej alebo priesečník výšok sú zaujímavé tým, že sa v nich pretínajú tri priamky súvisiace s trojuholníkom. Takých bodov existuje viac. V literatúre alebo na internete môžete nájsť napr. Gergonnov, Nagelov, Lemoinov či Napoleonov bod. O tom, kedy sa v jednom bode pretnú tri priamky, z ktorých každá prechádza jedným vrcholom trojuholníka, hovorí veta, ktorú v r. 1678 publikoval taliansky matematik Giovanni Ceva (1647 – 1743).

Gotická rozeta

Jednou z konštrukcií, s ktorými sa môžeme stretnúť napr. v gotickej architektúre, je niekoľko menších dotýkajúcich sa kružníc s rovnakým polomerom vpísaných do veľkej kružnice (na obr. 6 je na obvode kruhového okna 12 menších dotýkajúcich sa kružníc). Gotickí architekti boli majstri v používaní pravítka a kružidla, preto – aby sme boli štýloví – sa v nasledujúcej úlohe obmedzíme iba na tieto dva nástroje.



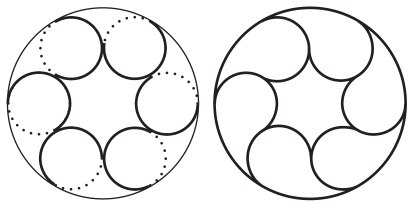


Obr. 6
Rozeta (kruhové okno) na západnom priečelí katedrály v Chartres (Francúzsko) z 12. storočia. (Foto: Guillaume Piolle).

ÚLOHA

12. Do danej kružnice máme vpísať 12 rovnakých kružníc tak, ako je to znázornené na obr. 6 vpravo. Opíšte euklidovskú konštrukciu takejto rozety.
(Ak sa vám počet 12 kružníc zdá príliš veľký, rozmyslite si najprv konštrukciu pre menší počet, napr. pre 4 alebo 6 kružníc.)

Pri hľadaní polomeru jednej z 12 kružníc môže pomôcť jednoduché pozorovanie: táto kružnica je vpísaná do zeleného trojuholníka na obr. 6. Skôr ako tento fakt využijete, diskutujte o jeho zdôvodnení.



Gotický vyrezávaný drevený panel zo 16. st. Na obrázku vpravo sme znázornili, ako môžeme spojením častí kružníc vytvárať nové tvary.

Trojuholníky a konštrukčné úlohy

Výdatným zdrojom konštrukčných úloh sú konštrukcie trojuholníkov. Ich najčastejšia podoba je *skonštruovať trojuholník, v ktorom poznáme veľkosti troch jeho prvkov*. Týmito prvkami sú niektoré spomedzi strán $a, b, c,$ uhlov α, β, γ, výšok v_a, v_b, v_c a ťažníc t_a, t_b, t_c. S takýmito úlohami sme sa už stretli. Trojuholníky, v ktorých poznáme trojice (a, b, c), (a, b, γ), (a, β, γ) či (a, b, α) sme konštruovali v predchádzajúcich ročníkoch. Prípady (a, c, v_c), (a, v_a, v_c), (c, v_a, v_b), (b, v_b, β) sme riešili v tejto učebnici (úloha 1 na s. 7, úloha 7 na s. 44 a úloha 17 na s. 49). V úlohách 13 a 14 pridáme trojice (a, c, t_b) a (t_a, t_b, t_c).

Okrem týchto tzv. *nepolohových* úloh, v ktorých určujeme iba *veľkosti* prvkov, teda dĺžky úsečiek alebo veľkosti uhlov, existujú aj *polohové* úlohy. V nich sú dané niektoré body hľadaného trojuholníka, prípadne aj veľkosti niektorých jeho prvkov. Napríklad *skonštruovať trojuholník, ak sú dané jeho vrcholy A, B a ťažisko T*, alebo *vrcholy A, B, päta Y výšky na stranu b a veľkosť uhla* γ.

Niektoré konštrukcie trojuholníkov majú prirodzené použitie napr. v zememeračstve (uvidíme to v kapitole 9). Ostatné môžeme pokladať za hlavolamy na preverenie našich matematických schopností (skôr k tým druhým možno zaradiť napr. konštrukciu z úlohy 14). Môže sa však stať, že úloha, ktorá pôsobí dojmom vymyslenej matematickej hádanky, sa nečakane osvedčí pri riešení nejakého praktického problému.

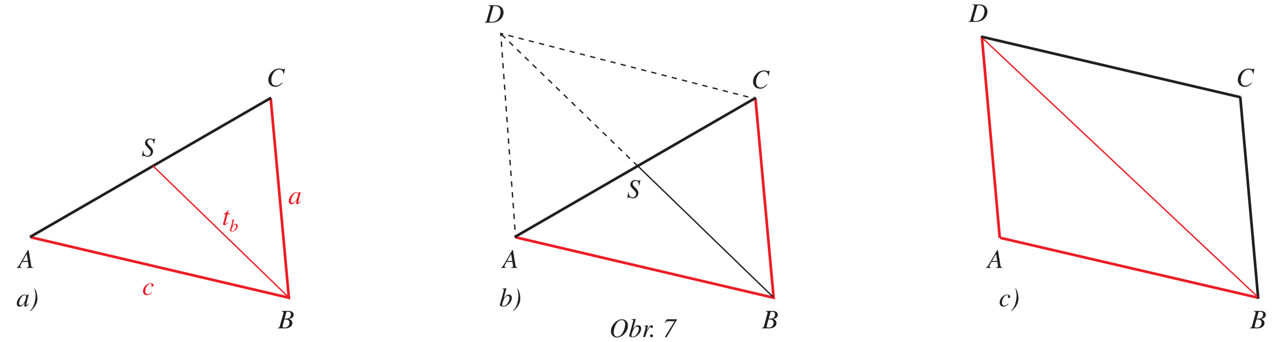
Ťažnice, ťažisko a konštrukcie trojuholníkov

V nasledujúcich dvoch konštrukčných úlohách nežiadame, aby ste urobili rozbor – teda objavili myšlienku konštrukcie. Tú vám prezradíme. Vašou úlohou je z tejto myšlienky odvodiť postup konštrukcie.

Prvá úloha

Skonštruujme trojuholník ABC, v ktorom poznáme dĺžky a, c, t_b (na obr. 7 a) sú vyznačené červeno).

Konštrukciu možno založiť na tejto úvahe:
Ak úsečku *BS* (*S* je stred strany *AC*) predĺžime na dvojnásobne dlhú úsečku *BD*, budú sa úsečky *AC* a *BD* navzájom rozpoľovať. Preto *ABCD* bude rovnobežník – pozri obr. 7 b). Ten vieme skonštruovať: najprv skonštruujeme trojuholník *ABD*, pretože v ňom poznáme všetky tri strany – pozri obr. 7 c).



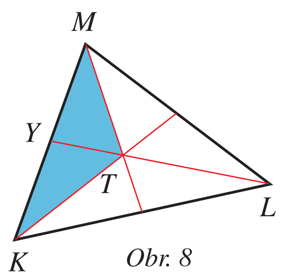
Obr. 7

ÚLOHA

13. Opíšte konštrukciu trojuholníka *ABC*, v ktorom poznáte dĺžky strán *a*, *c* a dĺžku ťažnice t_b.

Druhá úloha

Skonštruujme trojuholník KLM, v ktorom poznáme dĺžky všetkých troch ťažníc (známe dĺžky sú na obr. 8 vyznačené červeno).



Obr. 8

Pri konštrukcii nám pomôže táto úvaha:
V trojuholníku *KTM* (na obr. 8 modrý, *T* je ťažisko trojuholníka *KLM*) poznáme dĺžky strán *KT* a *MT* (tie sú $\frac{2}{3}\,t_k$ a $\frac{2}{3}\,t_m$) a dĺžku ťažnice na stranu *KM* (tá je $\frac{1}{3}\,t_l$). Preto tento trojuholník vieme skonštruovať postupom z riešenia úlohy 13. Na nájdenie vrcholu *L* potom využijeme fakt, že bod *T* leží v jednej tretine ťažnice *YL*, pričom polohu bodov *Y* a *T* už poznáme (*Y* je stred strany *KM*).

ÚLOHA

14. a) Skontrolujte v diskusii, či vám je uvedená úvaha jasná.
b) Opíšte konštrukciu trojuholníka *KLM*, v ktorom poznáte dĺžky ťažníc t_k, t_l, t_m.

ŠTYRI VÝZNAČNÉ PRIESEČNÍKY V TROJUHOLNÍKU – VÝSLEDKY

1. (na) osi úsečky *AB*. Zdôvodnenie: trojuholník *ASB* je rovnoramenný so základňou *AB*, preto (úloha 19 na s. 22) vrchol *S* leží na osi úsečky *AB*.
2. Zvolíme dve rôzne tetivy oblúka *k* a nájdeme ich osi. Priesečník týchto osí je hľadaný stred *S* oblúka *k*. Konštrukcia znázornená na obr. 1 je špeciálny prípad tohto všeobecného postupu. Špeciálnosť je v tom, že dĺžky obidvoch tetív *AB*,

CD volíme rovnaké ako polomery kružnicových oblúkov *a, b, c, d*, pomocou ktorých konštruujeme osi týchto tetív (teda narysovaním napr. oblúka *a* splníme súčasne dva ciele: narysujeme oblúk, ktorý potrebujeme pri zostrojení osi úsečky a súčasne zvolíme druhý krajný bod tejto úsečky).

3. (pretože) body *A, B, C* neležia na jednej priamke, (majú body) *A, B* (rovnakú vzdialenosť), (preto) od neho majú body *B, C* rovnakú vzdialenosť, $|BS| = r$, (preto aj) $|CS| = r$, (od bodu) *S*, (so stredom) *S* (a polomerom) *r*.

5. Takým bodom (označme ho *S*) je priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole *A* a osi vnútorného uhla pri vrchole *B*. Bod *S* má rovnakú vzdialenosť od strán *AB* a *AC* (lebo leží na osi uhla *CAB*) a rovnakú vzdialenosť od strán *BA* a *BC* (lebo leží aj na osi uhla *ABC*). Strana *AB* sa vyskytuje v prvej (*AB, AC*) aj v druhej (*BA, BC*) dvojici, preto *S* má rovnakú vzdialenosť od všetkých troch strán. Z toho, že *S* má rovnakú vzdialenosť od strán *AC* a *BC*, vyplýva, že *S* musí ležať aj na osi uhla *BCA*. Osi uhlov trojuholníka *ABC* sa teda pretínajú v jednom bode.

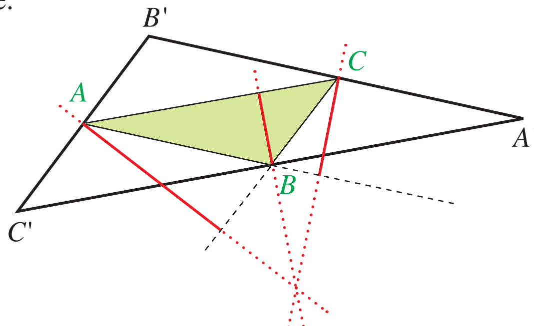
6. V každom trojuholníku sa osi uhlov pretínajú v jednom bode *S* (pozri riešenie úlohy 5). Ak narysujeme kružnicu so stredom *S*, ktorej polomer sa rovná vzdialenosti *S* napr. od strany *AB*, bude priamka *AB* dotyčnicou tejto kružnice. To platí aj pre zvyšné strany trojuholníka *ABC*. Preto do každého trojuholníka možno vpísať kružnicu (teda kružnicu, ktorá sa dotýka všetkých troch strán trojuholníka). Jej stred *S* je priesečník osí uhlov trojuholníka, jej polomer je vzdialenosť bodu *S* od ktorejkoľvek strany trojuholníka.

7. a) Trojuholníky *BA'C, ACB'* sú zhodné (toto tvrdenie – ktoré asi časť z vás bude pokladať za zrejmé – možno zdôvodniť vetou o zhodnosti *usu*: uhly *BA'C* a *ACB'* majú rovnakú veľkosť – sú to súhlasné uhly pri rovnobežkách *C'A'* a *AC*, uhly *A'BC, CAB'* majú rovnakú veľkosť – sú to súhlasné uhly pri rovnobežkách *BC* a *B'C'*, strany *BA'* a *AC* majú rovnakú dĺžku – to možno zdôvodniť viacerými spôsobmi, napr. tým, že *BA'CA* je rovnobežník). Preto majú strany *A'C* a *CB'* rovnakú dĺžku, teda *C* je stred úsečky *A'B'*.

b) Priamky *AB* a *B'A'* sú rovnobežné, preto výška v_{AB} na stranu *AB* (ktorá je na *AB* kolmá) je kolmá aj na priamku *A'B'*. Teda v_{AB} je kolmá na úsečku *A'B'* a prechádza jej stredom *C* (to vieme z úlohy 7 a). Preto v_{AB} je os tejto úsečky.

c) Výšky v trojuholníku *ABC* sú osami strán v trojuholníku *A'B'C'*. O osiach strán už vieme (z úloh 3 a 4), že sa v každom trojuholníku – teda aj v trojuholníku *A'B'C'* – pretínajú v jednom bode.

8. Pozri obr. 9. Úvahy z úlohy 7 zostanú v platnosti, jediný rozdiel bude v tom, že priesečník výšok trojuholníka *ABC* (totožný s priesečníkom osí strán trojuholníka *A'B'C'*) nebude ležať vnútri trojuholníka *ABC*. Práve kvôli tejto situácii sme sa v poznámke na s. 57 dohodli, že pojem *výška trojuholníka* budeme v tejto súvislosti chápať nie ako úsečku, ale ako priamku. Na obr. 9 sú výšky ako priamky znázornené bodkovane, časť znázornená plnou čiarou je výška ako úsečka.



Obr. 9

9. b) V rovnoramennom trojuholníku možno využiť, že výška na základňu je súčasne os súmernosti trojuholníka (teda jedna z výšok na rameno trojuholníka je súmerná podľa tejto osi s výškou na druhé rameno).

10. ... polovica dĺžok strán ***AC*** a ***CB*** ... uhly *CYX* a ***CAB*** ... s dĺžkami strán trojuholníka ***ABC*** ... rovnosť $|\sphericalangle \boldsymbol{ABT_1}| = |\sphericalangle \boldsymbol{XYT_1}|$... trojuholníka $\boldsymbol{ABT_1}$ ... **polovica** ... **polovice** ... **1 : 2**.

12. *1. etapa – konštrukcia polomeru malej kružnice.* Skonštruujeme dva vrcholy (označme ich *A, B*) pravidelného šesťuholníka vpísaného do danej kružnice *k* (konštrukcia je opísaná na obr. 18 na s. 20). Skonštruujeme os úsečky *AB*, jej priesečník s *k* označíme *K* (*AK* je potom strana pravidelného 12-uholníka vpísaného do *k*). Nájdeme os úsečky *AK*, jej priesečník s *k* označíme X_1. V bode X_1 narysujeme dotyčnicu *t* ku kružnici *k*. Predĺžením úsečiek *SA, SK* (*S* je stred kružnice *k*) po ich priesečníky s dotyčnicou *t* (označme ich *A', K'*) dostaneme zelený trojuholník *SA'K'* z obr. 6. Skonštruujeme os uhla *SA'K'*. Jej priesečník s SX_1 (SX_1 je os uhla *A'SK'*) je stred *Z* malej kružnice. Jej polomer určuje úsečka ZX_1.

2. etapa – rysovanie 12 kružníc. Dĺžku *AK* (strana pravidelného 12-uholníka vpísaného do *k*) nanesieme od bodu X_1 12-krát na obvod kružnice *k*. Dostaneme tak body X_2 až X_{12} – v nich sa budú malé kružnice dotýkať kružnice *k*. Každý z týchto bodov spojíme so stredom *S*. Narysujeme kružnicu *l* so stredom *S* a polomerom *SZ* (bod *Z* sme skonštruovali v 1. etape). Priesečníky *l* s úsečkami SX_1 až SX_{12} sú stredy malých kružníc. Tie teraz už vieme narysovať, pretože poznáme ich stredy aj ich polomer (ten určuje úsečka ZX_1, ktorú sme skonštruovali v 1. etape).

13. Uvádzame iba jednu z viacerých možností: 1. Zostrojíme trojuholník *ABD*, $|AB| = c$, $|AD| = a$, $|BD| = 2t_b$, 2. Bodom *D* vedieme rovnobežku *p* s priamkou *AB*. 3. Bodom *B* vedieme rovnobežku *q* s priamkou *AD*. 4. Priesečník *p* a *q* je vrchol *C*.

14. b) *1. etapa* – skonštruujeme trojuholník *KTM*: 1. Narysujeme trojuholník *KTZ*, v ktorom $|KZ| = \frac{2}{3}t_m$, $|KT| = \frac{2}{3}t_k$, $|TZ| = \frac{2}{3}t_l$. 2. Bodom *Z* vedieme rovnobežku *p* s priamkou *KT*. 3. Bodom *T* vedieme rovnobežku *q* s priamkou *ZK*. 4. priesečník *p* a *q* je bod *M*. *2. etapa* – konštrukcia bodu *L*: 5. Úsečku *ZT* predĺžime na dvojnásobne dlhú úsečku *ZL* (teda $|TL| = |TZ| = \frac{2}{3}t_l$).

8 POČÍTAME, KONŠTRUUJEME A RYSUJEME

8.1 Ako môžu pomôcť výpočty
8.2 Ďalšie úlohy

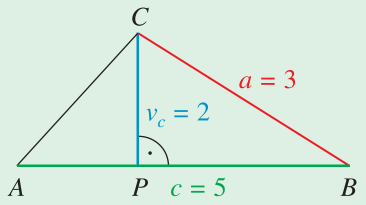
V predchádzajúcich kapitolách sme sa pri riešení konštrukčných úloh zaobišli prakticky bez výpočtov. Teraz sa situácia zmení a my uvidíme, ako môžu výpočty pomôcť v rôznych fázach riešenia konštrukčnej úlohy: pri hľadaní postupu konštrukcie, pri kontrole jej správnosti a pri určovaní počtu riešení.

8.1 Ako môžu pomôcť výpočty

Na úvod ukážeme ďalšie riešenie úlohy 1 na s. 7.

ÚLOHA

1. Narysujte trojuholník ABC, v ktorom $c = 5$, $v_c = 2$, $a = 3$ (pozri náčrt na obr. 1).



Obr. 1

Úmyselne uvádzame už tretie riešenie tej istej úlohy (dve riešenia sme uviedli v kapitole 5). Chceme tak pripomenúť, že vo všeobecnosti neexistuje iba jediné správne riešenie nejakého problému. K cieľu môže často viesť aj iný postup než ten, ktorý napadol vám. Nezavrhujte preto iné pokusy o riešenie len preto, že sa nezhodujú s tým, ktorý poznáte vy.

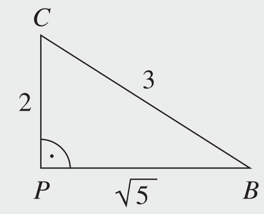
INÉ RIEŠENIE ÚLOHY 1 Z KAPITOLY 5

Od postupu, ktorý sme uviedli v druhom riešení úlohy 1 na s. 10 (pripomeňte si ho, až potom čítajte ďalej), sa bude toto riešenie líšiť iba spôsobom konštrukcie trojuholníka BCP.
Trojuholník BCP je pravouhlý, pričom poznáme dĺžky prepony BC a odvesny CP. Vieme preto pomocou Pytagorovej vety vypočítať dĺžku strany PB:

$$|PB| = \sqrt{a^2 - v_c^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

V pravouhlom trojuholníku BCP teraz poznáme dĺžky všetkých troch strán (obr. 2). Môžeme ho preto zostrojiť

- buď ako trojuholník, v ktorom poznáme všetky tri strany (v tomto prípade nevyužijeme informáciu o pravom uhle pri vrchole P),
- alebo ako trojuholník, v ktorom poznáme dve strany (PB a PC) a uhol nimi zovretý (teda nevyužijeme informáciu o dĺžke prepony BC).

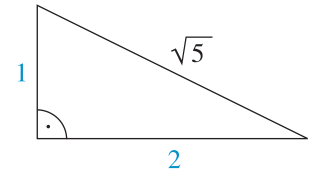


Obr. 2

Pripomeňte si stručne postup jednej aj druhej konštrukcie.

Keď už máme zostrojený trojuholník BCP, je zvyšok riešenia rovnaký ako v riešení úlohy 1 na s. 10.

V obidvoch konštrukciách trojhuholníka *BCP*, ktoré sme uviedli v predchádzajúcom riešení, sa stretneme s požiadavkou narysovať úsečku s dĺžkou $\sqrt{5}$ (to je dĺžka strany *PB*). Postup rysovania tejto úsečky závisí od toho, či požadujeme alebo nepožadujeme euklidovskú konštrukciu. V prípade, že naša konštrukcia nemusí byť euklidovská, potrebujeme dostatočne presné meradlo, aby sme úsečku s dĺžkou $\sqrt{5} = 2{,}236...$ zostrojili s potrebnou presnosťou (pozri tiež text pred úlohou 18 na s. 21). Euklidovskej konštrukcii sa budeme venovať v úlohách 2 a 3.



Ako zostrojiť úsečku dĺžky $\sqrt{5}$ euklidovskými prostriedkami?

Na zostrojenie úsečky s dĺžkou $\sqrt{5}$ môžeme použiť Pytagorovu vetu.

Keďže $5 = 1^2 + 2^2$,

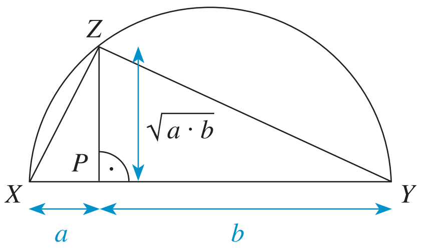
stačí zostrojiť pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 1 a 2. Prepona tohto trojuholníka bude mať požadovanú dĺžku $\sqrt{5}$.

ÚLOHA

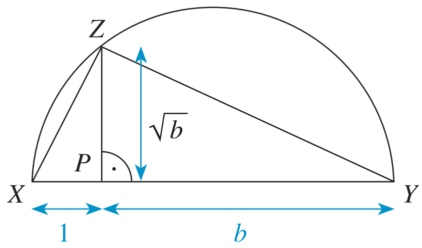
2. Vysvetlite túto myšlienku podrobne. Navrhnite, ako týmto spôsobom skonštruovať úsečky dĺžok $\sqrt{10}$, $\sqrt{34}$.

Ďalšou možnosťou je použitie Euklidovej vety o výške (pozri obr. 3).

Pripomeňte si Euklidovu vetu o výške a jej odvodenie založené na podobnosti pravouhlých trojuholníkov *XPZ* a *ZPY* na obr. 3 (prečo sú podobné?)



Obr. 3
Podľa Euklidovej vety o výške má v pravouhlom trojuholníku XYZ výška ZP dĺžku
$|ZP| = \sqrt{|XP| \cdot |YP|}$.



Obr. 4
Z obr. 3 vyplýva táto často používaná euklidovská konštrukcia úsečky s dĺžkou $\sqrt{b}$.

(Odkiaľ vieme, že trojuholník *XYZ* je pravouhlý? Úsečka *XY* je priemer polkružnice na obrázku, preto – podľa Tálesovej vety – je uhol *XZY* pravý.)

Ak na obr. 3 zvolíme $a = 1$, $b = 5$, bude mať výška *PZ* požadovanú dĺžku $\sqrt{5}$.

ÚLOHY

3. Opíšte a zdôvodnite jednotlivé kroky tejto konštrukcie úsečky s dĺžkou $\sqrt{5}$.

4. Potom zhrňte celý postup riešenia úlohy 1 založený na zostrojení úsečky dĺžky $\sqrt{5}$ (napr. tak, že zapíšete postup konštrukcie).

Podobne ako v úlohe 1, aj v nasledujúcich úlohách nám pomôže výpočet dĺžky úsečky. Vďaka nemu dokážeme v úlohe 5 skontrolovať správnosť konštrukcie, ktorú navrhol niekto iný (a ktorej zdôvodnenie nepoznáme) a navrhnúť postup konštrukcie v úlohe 7.

Zlatý rez

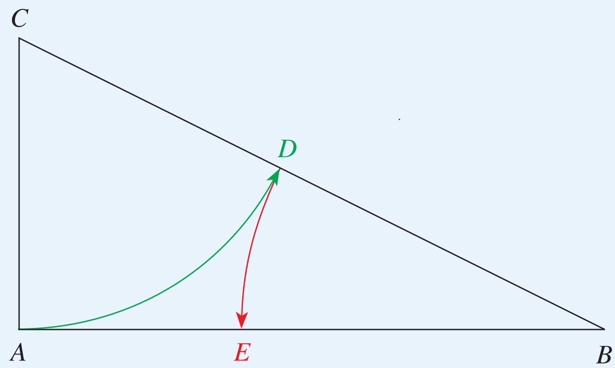
Dojem, akým na nás pôsobí umelecké dielo – obraz, socha alebo budova, je ovplyvnený aj jeho proporciami – pomermi medzi veľkosťou jednotlivých častí. Jedným z pomerov, s ktorým sa často stretneme v teoretických prácach o umení, je *zlatý rez*.

Niektorí historici predpokladajú, že zlatý rez poznali už matematici z Pytagorovej školy (6. st. pred n. l.). Tento pomer totiž súvisí s vlastnosťami pentagramu – pravidelnej päťcípej hviezdy, ktorými sa pytagorejci zaoberali. Zlatý rez si našiel obdivovateľov uvádzajúcich množstvo príkladov jeho výskytu v prírode a použitia v umeleckých dielach. K viacerým z týchto tvrdení (vrátane dvoch najpopulárnejších: zlatý rez v architektúre aténskeho chrámu bohyne Atény – Partenonu a tvar ulity lodenky Nautilus pompilius) treba však pristupovať s veľkou opatrnosťou – často je v nich prianie otcom myšlienky.

Chrám Partenon

Ulita lodenky

Konštrukcia na obr. 5 pochádza od gréckeho matematika Heróna z Alexandrie (asi 10 – asi 75 n. l.). Herón je v školskej matematike známy najmä vďaka Herónovmu vzorcu na výpočet obsahu trojuholníka (pozri úlohu 37 na s. 109).



Obr. 5
Bod E rozdeľuje úsečku AB na dve časti EB a AE v pomere zlatého rezu. Trojuholník ABC je pravouhlý, dĺžka AC je polovica z AB. Zelený oblúk kružnice má stred C a polomer CA, červený oblúk má stred B a polomer BD.

Zlatým rezom rozdeľujeme úsečku na dve časti

Bod E rozdeľuje úsečku AB na dve časti EB a AE *v pomere zlatého rezu*, ak pomer kratšej časti k dlhšej je rovnaký ako pomer dlhšej časti k celej úsečke, t. j.

$$|AE| : |EB| = |EB| : |AB|. \qquad (*)$$

Konštrukcia takéhoto bodu E je znázornená na obr. 5.

Správnosť tejto konštrukcie skontrolujeme v úlohe 5. Jej časť a) má dva ciele: skontrolovať, či je vám jasná konštrukcia znázornená na obr. 5, a preveriť, či sa dokážete vyjadrovať dostatočne presne.

ÚLOHA

5. a) Predstavte si, že máte postup tejto konštrukcie opísať telefonicky priateľovi. Navrhnite vhodnú formuláciu na tento účel.

b) Pomocou rovnosti (*) vypočítajte pomer dĺžok $\dfrac{|EB|}{|AB|}$.

c) Potom vypočítajte pomer dĺžok $\dfrac{|EB|}{|AB|}$ na obr. 5. Na základe toho skontrolujte správnosť konštrukcie zlatého rezu znázornenej na obr. 5.

V predchádzajúcom postupe bola daná dĺžka celej úsečky, ktorú chceme rozdeliť. Teraz nás bude zaujímať situácia, keď poznáme dĺžku jednej z dvoch jej častí, ktoré sú v pomere zlatého rezu. V úlohe 6 budeme za známu pokladať dlhšiu z týchto dvoch častí, v úlohe 7 kratšiu z nich.

K JEDNEJ Z DVOCH ČASTÍ HĽADÁME DRUHÚ

ÚLOHY

6. Navrhnite konštrukciu, ktorou k danej úsečke EB nájdeme od nej kratšiu úsečku GB tak, aby dĺžky EB a GB boli v pomere zlatého rezu.

7. a) Skontrolujte, že pre dĺžky úsečiek AE a EB z obr. 5 platí $\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Teda: veľkosť úsečky EB je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-násobok (t. j. približne 1,618-násobok) dĺžky úsečky AE.

b) Navrhnite konštrukciu, ktorou k danej úsečke EB nájdeme úsečku AE tak, aby platilo $\frac{|EB|}{|AE|} = \Phi$.

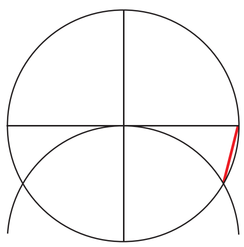
ČÍSLO $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$ SA SPRAVIDLA OZNAČUJE Φ ALEBO φ (VEĽKÉ ALEBO MALÉ GRÉCKE PÍSMENO FÍ) A NAZÝVA SA ZLATÝ REZ (BOŽSKÝ REZ, ZLATÝ PODIEL ALEBO ZLATÝ POMER).

Doteraz sme počítali dĺžky úsečiek, teraz nás čaká výpočet veľkostí uhlov.

PRIPOMEŇME POJEM, S KTORÝM SA STRETNEME V NASLEDUJÚCICH ÚLOHÁCH: PRAVIDELNÝ n-UHOLNÍK JE n-UHOLNÍK, V KTOROM MAJÚ VŠETKY STRANY ROVNAKÚ DĹŽKU A MOŽNO MU OPÍSAŤ KRUŽNICU (NA NEJ LEŽIA VŠETKY JEHO VRCHOLY). PRAVIDELNÝ n-UHOLNÍK SA TEDA SKLADÁ Z n ROVNAKÝCH ROVNORAMENNÝCH TROJUHOLNÍKOV, V KTORÝCH UHOL OPROTI ZÁKLADNI MÁ VEĽKOSŤ $\frac{360°}{n}$.

PRAVIDELNÝ DVANÁSŤUHOLNÍK

Na obrázku 6 je znázornená konštrukcia strany pravidelného 12-uholníka vpísaného do kružnice. Odporúčame, aby ste si konštrukciu pravidelného 12-uholníka vychádzajúcu z tohto návodu vyskúšali (preveríte si tak presnosť svojho rysovania, ale najmä to, či ste návod správne pochopili).



Obr. 6

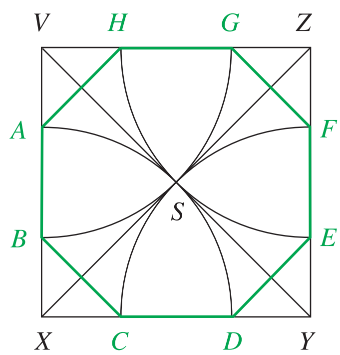
ÚLOHA

8. Zdôvodnite správnosť konštrukcie strany pravidelného 12-uholníka na obr. 6.

PRAVIDELNÝ OSEMUHOLNÍK

ÚLOHA

9. Skontrolujte správnosť konštrukcie pravidelného osemuholníka znázornenej na obr. 7. (Túto konštrukciu nájdeme v spise *De mensuris* pripisovanom Herónovi z Alexandrie (asi 10 – asi 75 n. l.). Dielo však v skutočnosti napísal neznámy autor z neskoršieho obdobia.)

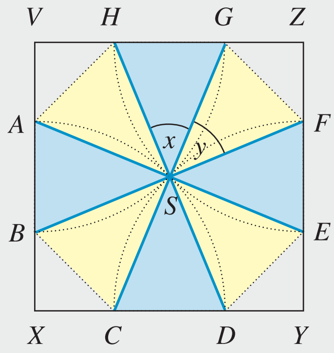


Obr. 7

Z každého zo štyroch vrcholov štvorca XYZV narysujeme kružnicu, ktorej polomer je polovica dĺžky uhlopriečky štvorca. Priesečníky kružnicových oblúkov so stranami štvorca určujú vrcholy pravidelného osemuholníka ABCDEFGH.

RIEŠENIE

Osemuholník *ABCDEFGH* sa skladá z ôsmich rovnoramenných trojuholníkov *ASB, BSC, ..., GSH, HSA* (na obr. 8 modré a žlté). Ak chceme dokázať, že *ABCDEFGH* je pravidelný osemuholník, treba skontrolovať, že tieto trojuholníky sú navzájom zhodné.
Zatiaľ vieme, že navzájom zhodné sú všetky modré trojuholníky na obr. 8 (všetky majú totiž rovnaký uhol pri vrchole *S* – jeho veľkosť sme označili x) a rovnako sú zhodné všetky žlté trojuholníky (veľkosť ich uhla pri vrchole *S* sme označili y).



Obr. 8

Stačí preto dokázať, že modrý trojuholník je zhodný so žltým. To môžeme urobiť dvoma spôsobmi:

- *prvé riešenie:* skontrolujeme, že modrý a žltý trojuholník majú rovnakú veľkosť uhla pri vrchole *S*,
  Táto rovnaká veľkosť musí byť $x = y = 45°$, pretože (pozri obr. 8) platí $4x + 4y = 360°$, t. j. $x + y = 90°$.
- *druhé riešenie:* skontrolujeme, že modrý a žltý trojuholník majú rovnakú dĺžku základne (ktorá je stranou osemuholníka *ABCDEFGH*).

PRVÉ RIEŠENIE

Skontrolujeme, že uhol *GSH* má veľkosť 45°.

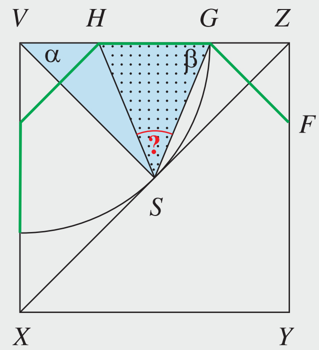
NEČÍTAJTE HNEĎ RIEŠENIE, SNAŽTE SA HO OBJAVIŤ SAMI. AK SA VÁM NEDARÍ, SKÚSTE TENTO NÁVOD: VEĽKOSŤ UHLA *GSH* MOŽNO VYPOČÍTAŤ POMOCOU VEĽKOSTÍ α, β NA OBR. 9. UHOL α POZNÁTE, POMOCOU NEHO VIETE VYPOČÍTAŤ UHOL β.

Modrý trojuholník *VSG* je rovnoramenný so základňou *SG* (prečo?) a uhol pri vrchole *V* má veľkosť $\alpha = 45°$ (prečo?),

preto $\beta = \dfrac{180° - \alpha}{2} = \dfrac{135°}{2} = 67{,}5°$.

Aj bodkovaný trojuholník *HSG* je rovnoramenný, preto v ňom uhol pri vrchole *S* má veľkosť

$180° - 2\beta = 180° - 2 \cdot 67{,}5° = 45°$.



Obr. 9

DRUHÉ RIEŠENIE

Skontrolujeme, že úsečky *HG* a *GF* na obr. 9 majú rovnakú dĺžku.

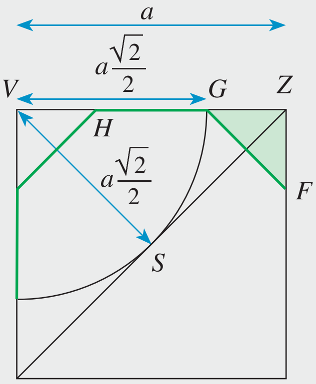
AJ TERAZ SKÚSTE OBJAVIŤ POSTUP VÝPOČTU SAMI (BUDE TO MOŽNO JEDNODUCHŠIE, AKO ČÍTAŤ NÁŠ ZÁPIS RIEŠENIA). V PRÍPADE NÚDZE SI POMÔŽTE NÁVODOM: *VG* JE POLOVICA UHLOPRIEČKY ŠTVORCA. POMOCOU *VG* A STRANY ŠTVORCA VYPOČÍTAME NAJPRV *GZ*, POTOM *HG*. DĹŽKU *GF* NÁJDEME Z PRAVOUHLÉHO TROJUHOLNÍKA *GZF*, V KTOROM POZNÁME DĹŽKY ODVESIEN.

Vypočítame dĺžky úsečiek HG, GF

Ak štvorec *VXYZ* má stranu a, tak jeho uhlopriečka *VY* má podľa Pytagorovej vety dĺžku $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Kružnica na obr. 9 má teda polomer $|VS| = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Potom (pozri obr. 10)



Obr. 10

$$|GZ| = a - a\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$|HG| = |VZ| - 2|GZ| = a - 2\left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\sqrt{2} - a = a\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Dĺžku $|GF|$ vypočítame pomocou Pytagorovej vety z pravouhlého rovnoramenného trojuholníka GZF:

$$|GF|^2 = 2 \cdot |GZ|^2 = 2\left[a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2 = 2a^2\left(1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4}\right) = 2a^2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = a^2(3 - 2\sqrt{2}),$$

preto

$$|GF| = a\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Pri umocňovaní výrazu $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ na druhú sme použili vzorec $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ pre $A = 1$, $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Skontrolujeme, či sa $|GF| = |HG|$

Treba skontrolovať, či platí

$$\underbrace{a\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}_{|GF|} = \underbrace{a\left(\sqrt{2} - 1\right)}_{|HG|}, \quad \text{t. j.} \quad \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Otázka je, či by nestačilo vypočítať obidve čísla na kalkulačke a tak ich porovnať. Ak to vyskúšate (urobte to), dostanete dve rovnaké hodnoty. Napriek tomu však nemožno len na základe toho s istotou tvrdiť, že ide o dve rovnaké čísla. Dôvod: kalkulačka zobrazí len niekoľko prvých cifier za desatinnou čiarkou. Z toho, že sa dve čísla zhodujú na týchto zobrazených miestach, ešte nevyplýva, že sa zhodujú aj na všetkých ďalších, ktoré už kalkulačka nezobrazí. Na základe takéhoto kalkulačkového experimentu môžeme tvrdiť len to, že dané čísla sa líšia veľmi málo. Na zdôvodnenie ich rovnosti preto musíme nájsť nejaký iný postup.

Čísla na obidvoch stranách rovnosti sú kladné, preto stačí preveriť, či sa rovnajú ich druhé mocniny (rozmyslite si túto úvahu):

$$\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \qquad \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Opäť sme použili vzorec $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

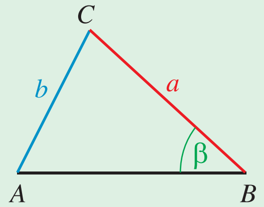
Z týchto výpočtov vyplýva, že dĺžky $|GF|$ a $|HG|$ sú skutočne rovnaké, a teda osemuholník $ABCDEFGH$ je pravidelný.

V niektorých prípadoch dokážeme o počte riešení konštrukčnej úlohy rozhodnúť len na základe narysovaného obrázka. Nie vždy je však len z obrázka zrejmé, či sa dve narysované kružnice alebo priamka s kružnicou pretínajú, dotýkajú alebo vôbec nemajú spoločné body. V takom prípade nám môže pomôcť výpočet. Ukážeme si to na nasledujúcej trojici konštrukčných úloh.

ÚLOHA

Odporúčame rozdeliť sa v triede na tri skupiny, každá narysuje riešenie jednej úlohy. Porovnajte navzájom svoje obrázky a diskutujte, či na ich základe možno rozhodnúť o počte riešení.

10. Skonštruujte trojuholník ABC, v ktorom
a) $a = 8$, $\beta = 61°$, $b = 7$,
b) $a = 8$, $\beta = 30°$, $b = 4$,
c) $a = 7$, $\beta = 59°$, $b = 6$.

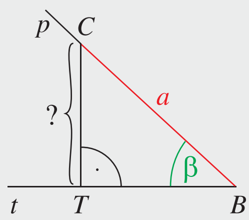


RIEŠENIE

Vo všetkých troch prípadoch možno zvoliť rovnaký postup konštrukcie:
1. Narysujeme dve polpriamky p, t so spoločným krajným bodom B, ktoré zvierajú uhol β.
2. Na polpriamke p vyznačíme bod C tak, aby úsečka BC mala dĺžku $\boldsymbol{a}$.
3. Narysujeme kružnicu k so stredom C a polomerom $\boldsymbol{b}$. Jej priesečník s polpriamkou t je vrchol A.

Počet riešení tejto úlohy závisí od počtu priesečníkov kružnice k a polpriamky t. Pri rysovaní s najväčšou pravdepodobnosťou zistíte, že len na základe obrázka nemožno s istotou rozhodnúť, či sa k a t pretli v dvoch bodoch, v jednom bode (teda t je dotyčnica k) alebo sa nepretli vôbec.

Počet priesečníkov kružnice k s polpriamkou t závisí od toho, či polomer b kružnice k je menší, rovnaký alebo väčší ako vzdialenosť bodu C od t.



Obr. 11

Rozmyslite si najprv, ako súvisí počet priesečníkov k a t s polomerom kružnice k a vzdialenosťou jej stredu od t (prípadne si načrtnite obrázok), až potom čítajte ďalej.

Túto vzdialenosť – dĺžku úsečky CT (pozri obr. 11) vieme vypočítať z pravouhlého trojuholníka TBC, v ktorom poznáme uhol β a dĺžku prepony a. Z rovnosti $\frac{|CT|}{a} = \sin\beta$ dostávame

$$|CT| = a \cdot \sin\beta$$

Vypočítajme túto veľkosť pre každú z troch našich konštrukčných úloh:

a) Pre $a = 8$, $\beta = 61°$ dostávame $|CT| = 8 \cdot \sin 61° = 6{,}996\,957...$. Polomer kružnice k je v tomto prípade $b = 7$. Vzdialenosť bodu C od polpriamky t je menšia ako tento polomer, preto sa k a t pretnú v dvoch bodoch. Existujú teda dva trojuholníky, ktoré sú riešením našej úlohy: jeden ostrouhlý, druhý tupouhlý, pričom v obidvoch prípadoch sa veľkosť uhla pri vrchole A bude iba málo líšiť od 90° (ako sme na to prišli?).

b) Pre $a = 8$, $\beta = 30°$ sa $|CT| = 8 \cdot \sin 30° = 4$. Polomer kružnice k je rovnaký ako vzdialenosť jej stredu C od polpriamky t. Preto t a k majú jediný spoločný bod (t je dotyčnica kružnice k) a riešením danej úlohy je jediný trojuholník (ten je pravouhlý, prečo?).

c) Pre $a = 7$, $\beta = 59°$ máme $|CT| = 7 \cdot \sin 59° = 6{,}000\,171...$. V tomto prípade $b < |CT|$, preto sa kružnica k nepretína s polpriamkou t. Úloha teda nemá riešenie.

Ak máme byť úplne presní, tak kružnica k a polpriamka t majú dva priesečníky iba vtedy, keď $|CT| < b \le a$. Pre $b > a$ totiž jeden z dvoch priesečníkov kružnice k a priamky BT leží mimo polpriamky t.

Existuje aj iný postup riešenia úlohy 10 založený na vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom v kružnici – pozri riešenie úlohy 17 na s. 49. Použite tento postup na konštrukciu trojuholníka z úlohy 10 a). Diskutujte o tom, ako sa na výsledku prejaví naše zistenie, že rysovaním je prakticky nemožné zistiť, koľko má táto úloha riešení.

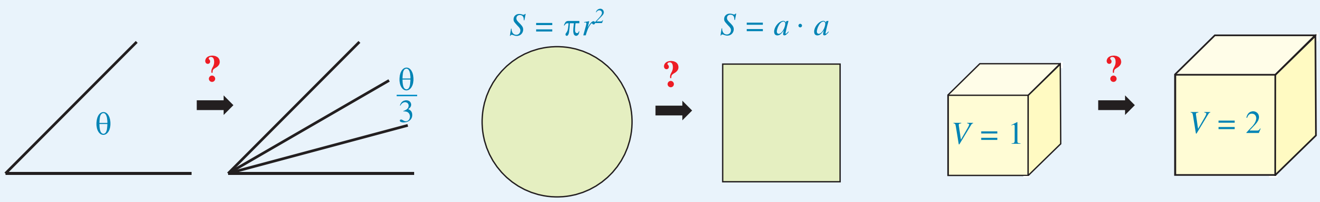
8.2 Ďalšie úlohy

Tri klasické problémy antickej matematiky

Už v staroveku boli známe úlohy, ktoré odolávali pokusom o riešenie pomocou euklidovských konštrukcií. Slávnu trojicu tvorili

- TRISEKCIA UHLA: k narysovanému uhlu skonštruovať uhol tretinovej veľkosti,
- KVADRATÚRA KRUHU: k narysovanému kruhu skonštruovať štvorec s rovnakým obsahom,
- ZDVOJENIE KOCKY: k danej kocke (kocka je daná dĺžkou svojej hrany) skonštruovať hranu tej kocky, ktorá má dvojnásobný objem.

Až v polovici 19. storočia sa matematikom podarilo dokázať, že ani jednu z týchto úloh nemožno vyriešiť iba pomocou euklidovských konštrukcií.



Trisekcia uhla | Kvadratúra kruhu | Zdvojenie kocky

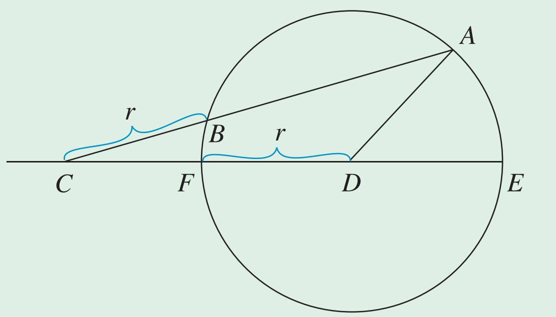
Trisekcia uhla

Na riešenie úlohy o trisekcii uhla dokázali starovekí grécki matematici navrhnúť niekoľko konštrukcií (ktoré však nevyhnutne museli využívať aj iné ako euklidovské prostriedky – pozri úvodný text). V žiadnej z nich však nepoužívali meranie, teda postup, ktorý by sa väčšine z nás zdal najprirodzenejší: zmerať daný uhol, veľkosť vydeliť tromi a narysovať uhol s tretinovou veľkosťou. Ich snahou totiž bolo nájsť riešenie čisto geometrickými prostriedkami – pomocou priesečníkov rôznych kriviek alebo priamok.
Jedným z týchto postupov je nasledujúca konštrukcia.

ÚLOHA

11. Rysujte na papier A4 položený „naležato“.

1. Narysujte ostrý uhol, jeho vrchol označte D. Narysujte kružnicu so stredom D a polomerom r, napr. $r = 8$ cm. Jej priesečníky s ramenami uhla označte A a E. Úsečku ED predĺžte za bod D, jej priesečník s kružnicou označte F.
2. (*Podstatný krok, ktorý súčasne predstavuje neeuklidovskú časť konštrukcie.*) Nastavte pravítko tak, aby prechádzalo bodom A, ryska označujúca na pravítku vzdialenosť 8 cm bola na kružnici medzi A a F a ryska označujúca 0 (nulu) bola na priamke DF zvonka kružnice. Rátajte s tým, že budete musieť chvíľku skúšať, kým sa vám podarí pravítko takto nastaviť.
3. Keď sa vám to podarí, narysujte priamku, jej priesečník s ED označte C, priesečník s kružnicou označte B (druhý priesečník je A), pozri obr. 12.
4. Zmerajte veľkosti uhlov ACE a ADE. Ak ste rysovali presne, bude veľkosť uhla ACE tretina veľkosti uhla ADE.



Obr. 12

V originálnej konštrukcii sa na hladké pravítko – bez značiek na meranie vzdialeností – vyznačila velkosť polomeru kružnice (preto sa tento postup niekedy opisuje ako konštrukcia s označeným pravítkom). Toto vyznačenie v našom opise zastupujú rysky označujúce na pravítku čísla 0 a 8.

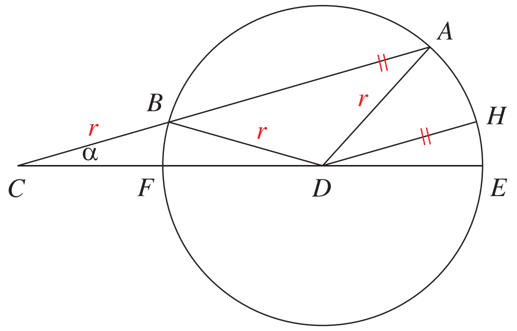
Archimedes
stvárnený maliarom
Jusepe de Ribera
(1591 – 1652)

Tento postup, ktorý vymyslel pravdepodobne Archimedes (asi 287 – asi 212 pred n. l.), sa zachoval v arabskom odpise:

Ak do kruhu narysujeme úsečku AB a predĺžime ju tak, že BC sa rovná polomeru kruhu, a potom C spojíme so stredom kruhu, teda s bodom D, a túto spojnicu predĺžime až do bodu E, tak oblúk AE je trojnásobok oblúka BF.

ÚLOHA

12. Diskutujte o tom, ako uvedená formulácia súvisí s našou konštrukciou (pri diskusii môže pomôcť obrázok, ktorý ste narysovali v úlohe 11).

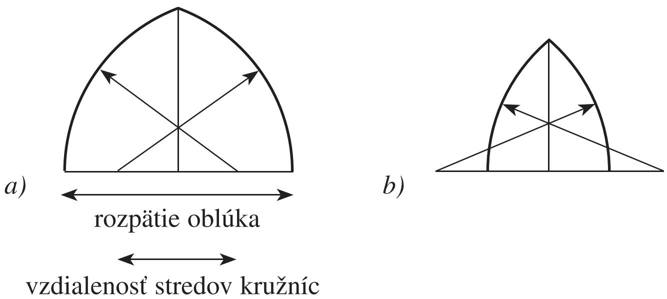


Obr. 13

Skontrolujme teraz, či je Archimedovo tvrdenie skutočne pravdivé, teda či – bez ohľadu na to, ako zvolíme polohu bodov *A* a *B*, bude vždy uhol *ADE* trojnásobkom uhla *ACE*.
Do obrázka, ktorý ste narysovali v úlohe 11, dorysujte úsečku *BD* a úsečku *DH* rovnobežnú s *CA*. Veľkosť uhla *BCF* označte písmenom α.

ÚLOHA

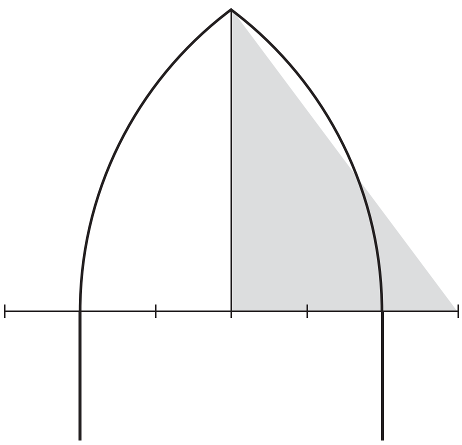
13. a) Vypočítajte postupne veľkosť týchto uhlov na obr. 13 (nezabudnite, že úsečky *CB*, *BD* a *DA* majú rovnakú dĺžku a *CA* a *DH* sú rovnobežky):
1. *BDF*, 2. *DBA*, 3. *DAB*.
4. *ADH*, 5. *HDE*, 6. *ADE*.
b) Diskutujte, ako z týchto výpočtov vyplýva pravdivosť uvedeného Archimedovho tvrdenia a opísanej trisekcie uhla.



Obr. 14

Gotický oblúk
Typickým znakom gotickej architektúry je lomený oblúk. Ten je tvorený dvomi oblúkmi kružnice. Priamka spájajúca stredy kružníc tvorí základňu oblúka. „Štíhlosť“ oblúka závisí od toho, či je vzdialenosť stredov kružníc menšia (obr. 14 a) alebo väčšia ako rozpätie oblúka (obr. 14 b).

Ku klasickým gotickým oblúkom patrí oblúk *recto*, v ktorom polomer kružnice je päť štvrtín rozpätia oblúka.



Obr. 15

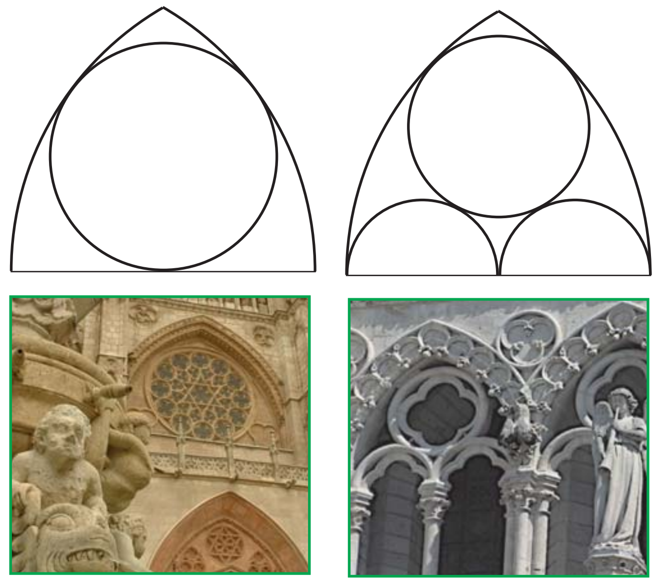
ÚLOHA

14. Charakteristické pre oblúk *recto* je, že jeho výška je rovnaká ako jeho rozpätie, teda tento oblúk je vpísaný do štvorca. Použitím Pytagorovej vety skontrolujte, že je to pravda. Využite sivo vyznačený pravouhlý trojuholník na obr. 15.

Na obr. 16 sú znázornené dve často sa vyskytujúce usporiadania prvkov v oblúku gotického okna. Aby naše úvahy neboli príliš komplikované, sú lomené oblúky na obrázku rovnostranné, t. j. rozpätie oblúka je rovnaké ako polomery kružníc, ktoré oblúk vytvárajú. (Nečítajte ďalej, kým si nebudete istí, že predchádzajúcej vete rozumiete.)

Ak chceme takéto gotické okno narysovať, potrebujeme zistiť, kde leží stred kružnice, ktorá je do okna vpísaná. Pri výpočte nám pomôže Pytagorova veta.

Začneme oknom na obr. 16 a). Nech obidve kružnice tvoriace jeho lomený oblúk majú polomer napríklad $R = 10$. Označme hľadaný polomer vpísanej kružnice r. Potom sivo vyznačený pravouhlý trojuholník na obr. 17 má strany dĺžky 5, r, $10 - r$. Ak zapíšeme pre tento trojuholník Pytagorovu vetu, dostaneme jednoduchú rovnicu, z ktorej vieme vypočítať hľadaný polomer r.

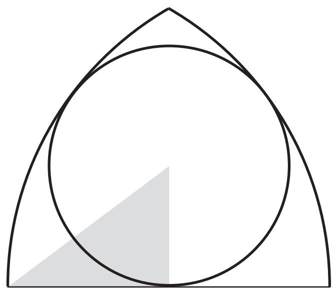


Obr. 16

a) Priečelie katedrály v španielskom Burgose, *b) katedrála vo francúzskom Amiense.*

ÚLOHA

15. Skontrolujte, že sivo vyznačený trojuholník má skutočne uvedené dĺžky strán. Vypočítajte hodnotu r. Na základe toho navrhnite konštrukciu kružnice vpísanej do tohto gotického okna. (Snažte sa byť štýloví a navrhnite euklidovskú konštrukciu.)



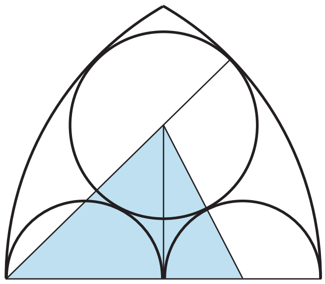
Obr. 17

K výbave magistra operis – stredovekého staviteľa chrámov, neodmysliteľne patrili kružidlo a pravítko. Pomocou nich rysoval ornamenty vytvárané z kružníc a ich častí používané najmä pri výzdobe oblúkov gotických okien.

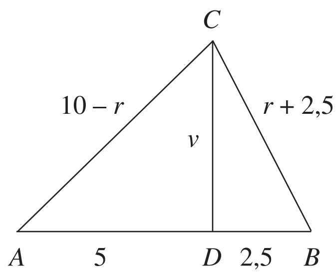
Stredovekí stavitelia

Pozrime sa teraz na okno na obr. 16 b). Opäť budeme predpokladať, že kružnice tvoriace jeho oblúk majú polomer $R = 10$. Obidve menšie kružnice majú potom polomer $R_1 = 2{,}5$. Označme hľadaný polomer vpísanej kružnice r.

Modro vyznačený trojuholník ABC na obr. 18 nie je pravouhlý, možno ho však rozdeliť na pravouhlé trojuholníky ADC a BDC (obr. 19). Ak dĺžku CD vyjadríme pomocou Pytagorovej vety v obidvoch pravouhlých trojuholníkoch a tieto dve vyjadrenia dáme do rovnosti, dostaneme rovnicu, z ktorej môžeme vypočítať hľadaný polomer r.



Obr. 18

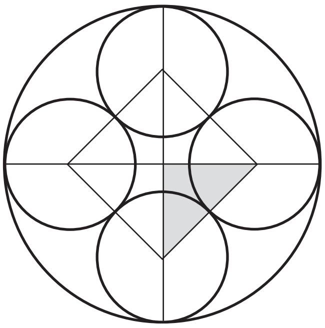


Obr. 19

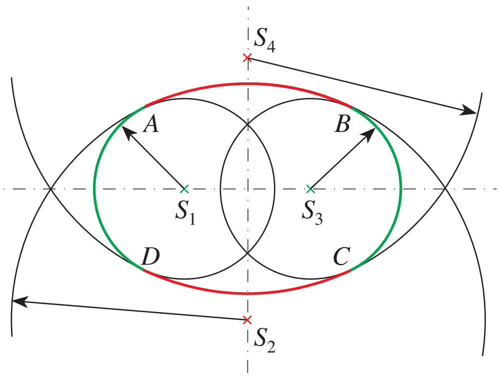
ÚLOHA

16. Skontrolujte dĺžky úsečiek na obr. 19. Potom vypočítajte neznámu dĺžku r.

Obr. 20 a)
Okno so štvorlístkom, Chiswick (Anglicko).



Obr. 20 b)



Obr. 21
Ovál sa skladá zo štyroch kružnicových oblúkov.

Oválna kupola barokového Kostola trinitárov (Kostol Najsvätejšej Trojice) v Bratislave.

Gotický štvorlístok

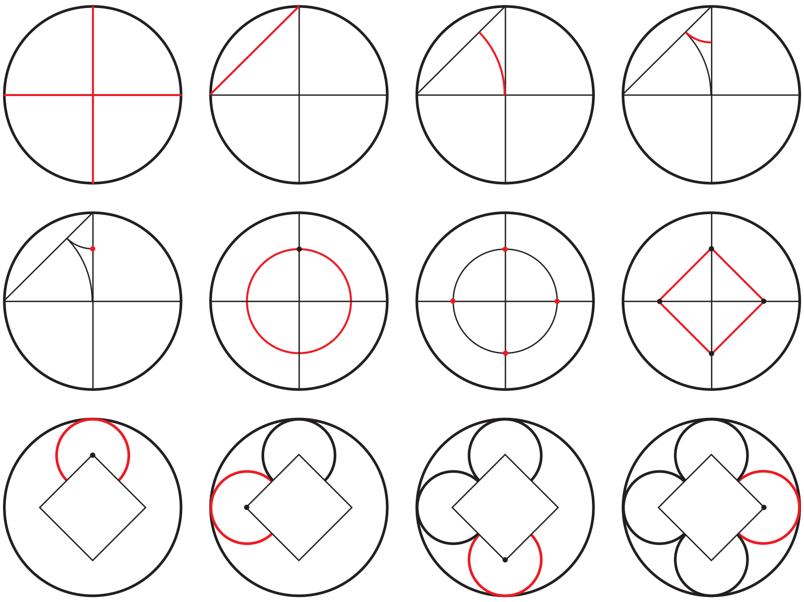
K typickým gotickým ornamentom patrí štvorlístok. Ten na obr. 20 a) vytvárajú oblúky štyroch dotýkajúcich sa menších kružníc vpísaných do veľkej kružnice.

Pri výpočte polomeru menších vpísaných kružníc nám pomôže sivý trojuholník na obr. 20 b). Dĺžky jeho strán vieme vyjadriť pomocou polomeru veľkej kružnice (ktorý pokladáme za známy) a hľadaného polomeru menšej kružnice.

ÚLOHA

17. Vypočítajte polomer *r* vpísaných kružníc na obr. 20 b). Kvôli prehľadnosti zvoľte polomer veľkej kružnice za jednotku dĺžky.

Jednu z možných konštrukcií takéhoto štvorlístka sme znázornili na obr. 22.



Obr. 22
Obrázkový návod jednej z konštrukcií štvorlístka.

ÚLOHA

18. Zdôvodnite správnosť konštrukcie na obr. 22.

Ovál a barok

Ovál patrí k charakteristickým tvarom baroka. Nevymysleli ho síce barokoví architekti, často ho však používali a dokázali ním veľmi dômyselne narábať. Ovál vznikne spojením štyroch kružnicových oblúkov, ktoré na seba hladko nadväzujú. Prvý a tretí oblúk (na obr. 21 zelené) majú rovnaký polomer, rovnako tak druhý a štvrtý oblúk (na obrázku červené). Ovál je súmerný podľa osi S_1S_3 aj podľa osi S_2S_4.

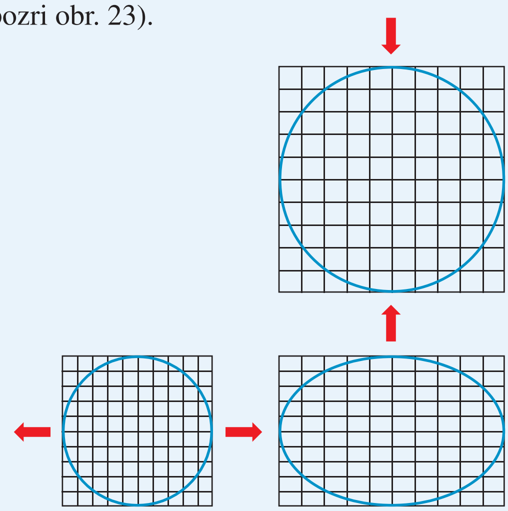
ÚLOHA

19. a) Ľavý zelený a horný červený oblúk na seba nadväzujú v bode A (pozri obr. 21). Aká musí byť vzájomná poloha bodu A a stredov S_1 a S_2, aby oblúky na seba nadviazali *hladko* (teda aby v mieste prechodu z jedného oblúka na druhý nevznikol žiadny zlom, pozri tiež obr. 7 a 8 na s. 14)?
b) Zvoľte stredy S_1 až S_4 a narysujte ovál. Je štyrmi stredmi určený jediný ovál, alebo možno oválov s danými štyrmi stredmi narysovať viac?

V NASLEDUJÚCEJ ÚLOHE SI SKONTROLUJETE, ČI STE KONŠTRUKCIU OVÁLU SKUTOČNE POCHOPILI.

Ovál a elipsa

Ovál sa často zamieňa s elipsou. Elipsa je krivka, ktorá vznikne – voľne povedané – ak kružnicu roztiahneme alebo stlačíme v jednom smere (pozri obr. 23).

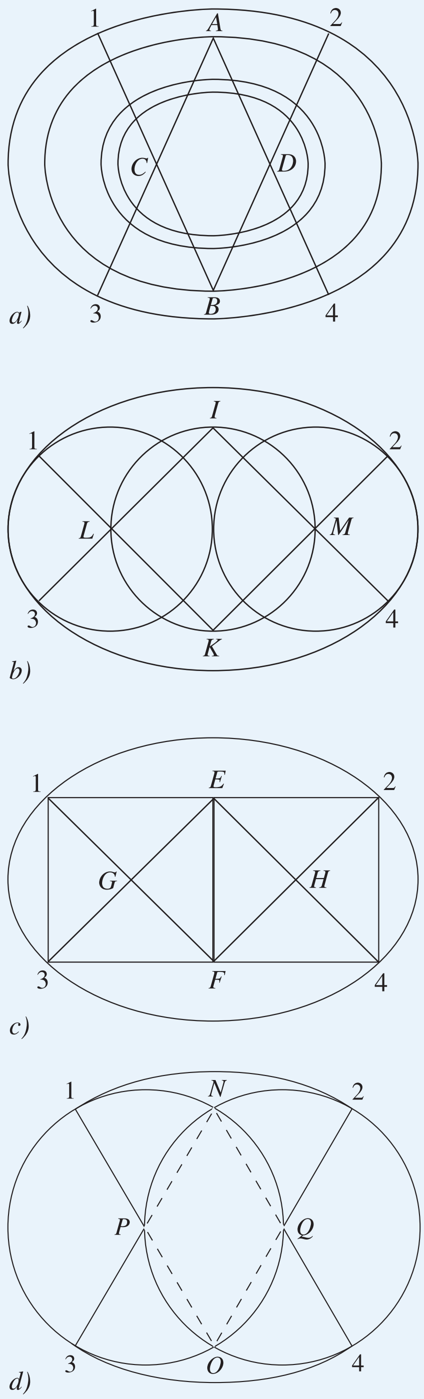


Obr. 23

Na obrázku 23 vľavo dole je kružnica. Ak na tomto obrázku zachováme zvislé rozmery, ale každý vodorovný rozmer zväčšíme napr. 1,5-krát (teda obrázok 1,5-krát roztiahneme vo vodorovnom smere), dostaneme elipsu na obrázku vpravo dole. Tú istú elipsu dostaneme aj stlačením kružnice na obrázku hore: vodorovné rozmery zachováme, každý zvislý zmenšíme na dve tretiny.

Z tohto opisu elipsy vidno, že do daného obdĺžnika je vpísaná jediná elipsa: obdĺžnik vznikne roztiahnutím štvorca, ktorého strana má dĺžku kratšej strany obdĺžnika, elipsa vpísaná do obdĺžnika vznikne roztiahnutím kružnice vpísanej do tohto štvorca. Do obdĺžnika možno však vpísať viacero – dokonca nekonečne veľa – rôznych oválov (konštrukciu naznačíme v úlohe 24). Elipsa sa úplne nezhoduje ani s jedným z nich, niektoré ovály sa jej však veľmi podobajú.

Veľký vplyv na rozšírenie oválu v období neskorej renesancie a baroka malo dielo Sedem kníh o architektúre (I Sette libri dell'architettura), ktoré napísal významný taliansky architekt a teoretik Sebastiano Serlio (1475 – 1554). V prvej knihe – venovanej geometrii – sú štyri návody na konštrukciu oválu. Trojuholníky CAD, CBD, ktoré sú základom prvej konštrukcie (obrázok 24 a) sú rovnostranné. Použitie základných geometrických útvarov (trojuholníkov, štvorcov, kruhov) ako podkladu pre konštrukcie, ktoré vidno na Serliových obrázkoch, bol obľúbený nástroj umelcov nielen v renesancii, ale aj v predchádzajúcich a nasledujúcich obdobiach.



Obr. 24

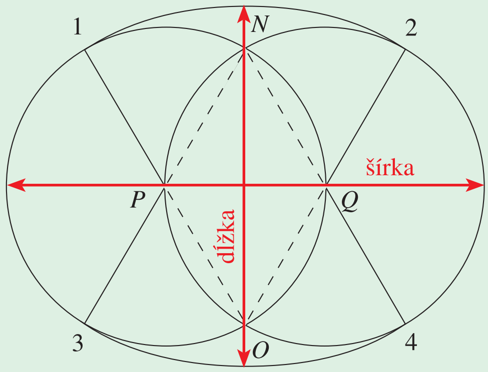
Pápež Alexander VII. vraj ešte v deň svojej voľby požiadal Gian Lorenza Berniniho o návrh novej úpravy námestia. Berniniho projekt sa realizoval v rokoch 1656 – 1667. Kolonády na námestí tvoria dnes časť štátnej hranice medzi Vatikánom a Talianskom.

Ovál a námestie sv. Petra

Štvrtá zo Serliových konštrukcií (obr. 24d), ktorú sám Serlio odporúča ako zvlášť peknú, sa v praxi používala pomerne často. Vychádzal z nej aj popredný architekt obdobia baroka Gian Lorenzo Bernini (1598 – 1680) pri projektovaní námestia svätého Petra vo Vatikáne.

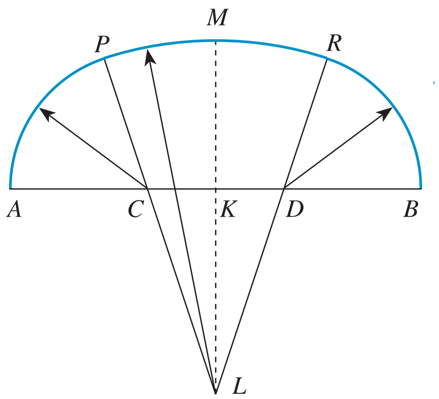
ÚLOHY

20. Vypočítajte pomer šírky a dĺžky oválu skonštruovaného podľa štvrtej zo Serliových konštrukcií (pozri obr. 25). Potom skontrolujte, nakoľko sú s týmto výsledkom v súlade rozmery námestia svätého Petra: 184 m × 240 m.



Obr. 25

Odporúčame overiť si uvedené rozmery (môžete napr. využiť možnosť merať vzdialenosti na satelitných mapách na internete).



Obr. 26

Oválny oblúk

S oválom – presnejšie s polovicou oválu – sa stretneme v oválnom oblúku. Na obr. 26 je znázornená štandardná konštrukcia používaná už stredovekými kamenármi: Rozpätie oblúka rozdelíme na niekoľko rovnako dlhých častí (spravidla tri alebo štyri, na obr. 26 sú to tri časti), dĺžka jednej časti bude polomer menšieho oblúka oválu. Potom na zvislej osi súmernosti (na obr. 26 čiarkovaná) zvolíme stred oblúka oválu s väčším polomerom.

ÚLOHY

21. Pripomeňte si stručne postup konštrukcie oválneho oblúka na obr. 26 (AC je tretina rozpätia AB, bod L závisí od našej voľby).

Stredovekí kamenári volili dĺžku KL rovnakú ako rozpätie AB alebo jeho zlomok (napr. polovicu AB).

22. Vypočítajte pomer výšky oblúka k jeho rozpätiu (teda $\frac{|KM|}{|AB|}$), ak v konštrukcii znázornenej na obr. 26 za dĺžku KL zvolíme
a) rozpätie AB,
b) polovicu rozpätia AB.
Aby vaše výpočty boli prehľadnejšie, zvoľte za jednotku dĺžky úsečku CK : $|CK| = 1$.

Ako závisí výška oválneho oblúka od polohy bodu L

Výška KM oblúka na obr. 26 závisí od voľby bodu L. V úlohe 22 sme výšku KM vypočítali pre dve polohy bodu L, teraz nás zaujíma všeobecná odpoveď: ako táto výška závisí od dĺžky úsečky KL.

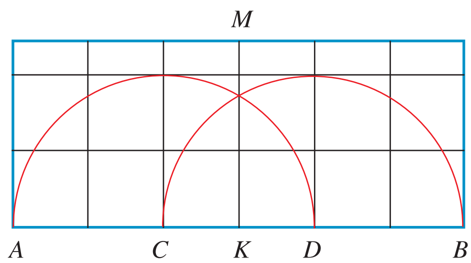
Oválne oblúky na nádvorí múzea (bývalej nemocnice) Hospital de Santa Cruz, Toledo (Španielsko).

ÚLOHA

23. Ak vo výpočtoch z riešenia úlohy 22 nahradíme konkrétnu dĺžku úsečky KL premennou x a pre túto hodnotu x vypočítame výšku KM, bude mať výsledok – vyjadrenie výšky KM – podobu predpisu funkcie. Tá dĺžke x priradí výšku KM. Nájdite predpis tejto funkcie.

Ako skonštruovať oválny oblúk s daným rozpätím a danou výškou

Predpis funkcie, ktorý sme našli v riešení úlohy 23, umožňuje k danej vzdialenosti $x = |LK|$ vypočítať výšku oblúka $y = |KM|$. Z praktického hľadiska je však zaujímavejší opačný problém: daná je výška oblúka a úlohou je nájsť polohu bodu L tak, aby oblúk na obr. 26 mal túto požadovanú výšku. V úlohách 24 a 25 budeme hľadať oválny oblúk zodpovedajúci konštrukcii na obr. 26, v ktorom je pomer výšky a rozpätia $|KM| : |AB| = 2{,}5 : 6$. Inak povedané, budeme konštruovať oválny oblúk, ktorý je vpísaný do obdĺžnika s rozmermi $2{,}5 \times 6$, pričom menšie kružnice majú polomer 2 (pozri obr. 27).

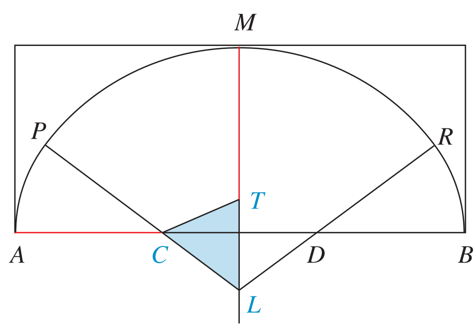


Obr. 27
Hľadáme oválny oblúk vpísaný do modrého obdĺžnika (teda najvyšší bod oblúka je bod M), pričom krajné časti oblúka ležia na červených polkružniciach.

Túto otázku možno riešiť viacerými spôsobmi. Z nich vyskúšame dva: v úlohe 24 konštrukciu bez pomoci výpočtu, v úlohe 25 konštrukciu založenú na výpočte.

Ďalšou možnosťou je postup pokus-omyl: Zvolíme na osi úsečky AB niektorý bod L za stred väčšej kružnice a skonštruujeme oválny oblúk. Podľa toho, či má skonštruovaný oblúk výšku väčšiu alebo menšiu ako je požadovaná hodnota 2,5, zmeníme v ďalšom pokuse polohu bodu L.

V prvom riešení nájdeme také vlastnosti hľadaného oblúka, ktoré možno využiť pri jeho konštrukcii. V našom prípade platí (pozri obr. 28): ak bod T na obr. 28 zvolíme tak, aby dĺžka MT bola rovnaká ako polomer AC bočného oblúka, tak trojuholník CLT bude rovnoramenný so základňou CT. Ak poznáme polohu bodov C a T, vieme nájsť bod L.



Obr. 28
Červené úsečky majú rovnakú dĺžku, modrý trojuholník CTL je rovnoramenný so základňou CT.

ÚLOHA

24. a) Vysvetlite, prečo je trojuholník CLT rovnoramenný.

b) Diskutujte o tom, ako možno informáciu o trojuholníku CTL využiť na nájdenie bodu L. Na základe toho opíšte postup konštrukcie oválneho oblúka vpísaného do obdĺžnika $2{,}5 \times 6$ na obr. 27. Potom tento oblúk skonštruujte.

V druhom riešení určíme polohu bodu L výpočtom. Využijeme pritom výsledok úlohy 23, v ktorej sme našli vzťah medzi dĺžkami $x = |KL|$ a $y = |KM|$ (K je stred úsečky AB). Potrebujeme vypočítať, ako treba zvoliť x, aby sa $|KM| = 2{,}5$ (pripomeňme, že v úlohách 22 a 23 sme zvolili za jednotku dĺžky úsečku CK : $|CK| = 1$).

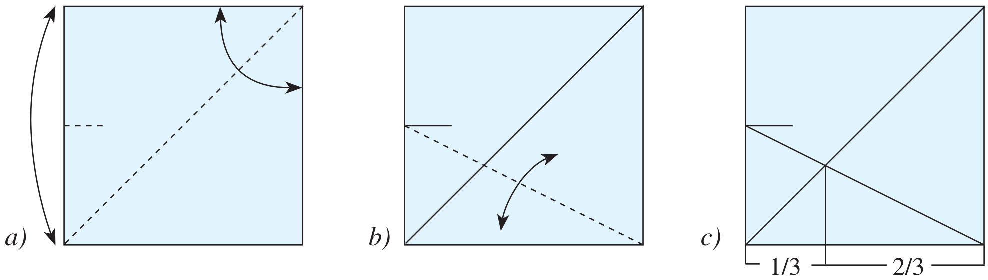
ÚLOHA

25. a) Napíšte rovnicu, ktorej riešením je hľadaná veľkosť $x = |KL|$.
b) Rovnicu z časti a) vyriešte. Na základe výsledku opíšte postup konštrukcie oválneho oblúka vpísaného do obdĺžnika 2,5 × 6 na obr. 27.

ORIGAMI
Origami (z japonských slov *oru* + *kami* = *skladať papier*) je umenie vytvoriť prehýbaním a skladaním papiera rôzne trojrozmerné predmety. Spravidla sa používa papier tvaru štvorca a nepripúšťa sa lepenie ani strihanie.

Mnohé postupy origami vyžadujú rozdelenie strany papierového štvorca buď na niekoľko rovnako dlhých častí, napr. na tretiny alebo sedminy, alebo v nejakom pomere (napr. 2 : 5). Za štýlové sa pritom pokladá nájsť toto rozdelenie iba skladaním papiera, nie meraním (touto požiadavkou origami pripomína euklidovské konštrukcie). Nájsť rozdelenie na 2, 4, 8 alebo 16 rovnako širokých pruhov je jednoduché: preložením papiera „na polovicu“ dostaneme dva rovnako široké pruhy, ďalším takým preložením štyri atď. Rozdelenie na 3, 5, 7 či 9 rovnako širokých pruhov (alebo na dva pruhy, ktorých šírky sú v danom pomere) je už o niečo zložitejšie.
Na obr. 29 je znázornené rozdelenie na tretiny.

Asi najznámejší model origami je žeriav.

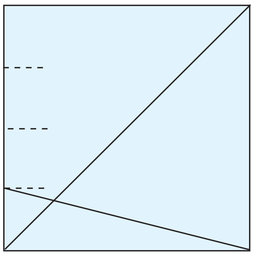


Obr. 29
Ako nájsť šírku jednej tretiny strany papierového štvorca.
a) Papier preložíme po uhlopriečke „na polovicu“ (priložením protiľahlých strán k sebe).
b) Vytvoríme záhyb na uhlopriečke jedného z dvoch „polovičných pruhov“.
c) Priesečník dvoch uhlopriečnych záhybov určuje tretinu strany štvorca.

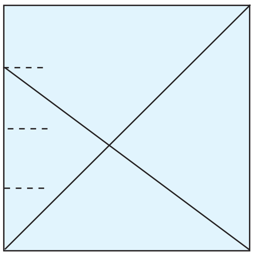
ÚLOHY

26. Zdôvodnite správnosť tejto konštrukcie.

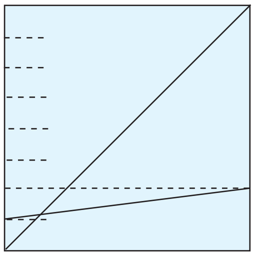
Ďalšie tri konštrukcie sú znázornené na obr. 30 až 32.
(V prvých dvoch sme papier rozdelili na štyri rovnako široké pruhy, v tretej na osem).



Obr. 30



Obr. 31



Obr. 32

Ďalší známy model origami.

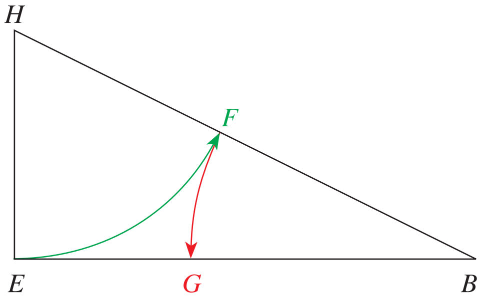
ÚLOHY

27. Akú časť strany štvorca (alebo rozdelenie v akom pomere) určujú priesečníky dvoch uhlopriečok na obr. 30 až 32? Svoje odpovede zdôvodnite.

28. Navrhnite postup na rozdelenie strany štvorca v pomere 4 : 5, 3 : 8, 1 : 8, 1 : 10 (posledné dve rozdelenia môžete získať pomocou prvých dvoch opakovaným delením niektorej časti štvorca na polovice).

POČÍTAME, KONŠTRUUJEME A RYSUJEME – VÝSLEDKY

2. $10 = 1^2 + 3^2$, $34 = 3^2 + 5^2$, preto stačí skonštruovať pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžok 1 a 3, resp. 3 a 5.
3. Narysujeme priamku p, na nej zvolíme bod P. Na p zostrojíme body X, Y tak, aby P ležal medzi bodmi X, Y a aby platilo $a = |XP| = 1$, $b = |PY| = 5$. (Ak chceme byť euklidovsky dôsledný, musíme mať jednotku dĺžky danú v podobe úsečky. Tú nanesieme kružidlom od bodu P jedenkrát, aby sme dostali bod X a päťkrát, aby sme dostali bod Y.) Nájdeme stred úsečky XY a narysujeme polkružnicu s priemerom XY. Zostrojíme kolmicu na p v bode P. Priesečník kolmice a polkružnice je bod Z. Úsečka PZ je hľadaná úsečka s dĺžkou $\sqrt{5}$.
5. a) Narysujeme úsečku AB, ktorú máme rozdeliť. V bode A narysujeme kolmicu AC na túto úsečku, jej dĺžka je polovica dĺžky úsečky AB. Spojíme body B a C. Narysujeme kružnicu so stredom C a polomerom AC, jej priesečník s úsečkou BC označíme D. Narysujeme kružnicu so stredom B a polomerom BD. Jej priesečník s úsečkou AB je hľadaný bod E.
b) Aby boli naše výpočty prehľadnejšie, budeme za jednotku dĺžky pokladať úsečku AB (teda ostatné dĺžky vyjadríme ako jej násobky): $|AB| = 1$. Označme a dĺžku úsečky EB (teda a určuje, koľkonásobok dĺžky úsečky AB je dĺžka úsečky EB : $|EB| = a \cdot |AB|$). Potom podľa definície zlatého rezu sa $\frac{1-a}{a} = \frac{a}{1}$, odtiaľ $1 - a = a^2$. Táto kvadratická rovnica má riešenia $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Hľadané riešenie musí byť kladné (je to dĺžka úsečky), preto ním môže byť iba $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Preto $\frac{|EB|}{|AB|} = \frac{a \cdot |AB|}{|AB|} = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
c) Opäť budeme dĺžku úsečky $|AB|$ pokladať za jednotku dĺžky: $|AB| = 1$. Potom $|AC| = \frac{1}{2}$ a podľa Pytagorovej vety sa $|BC| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Pre bod D platí $|CD| = |AC| = \frac{1}{2}$. Potom $|EB| = |DB| = |BC| - |BD| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Táto dĺžka sa zhoduje s dĺžkou, ktorú sme vypočítali v riešení úlohy 5 b).



Obr. 33

6. Pre zlatý rez platí: pomer dĺžok kratšej a dlhšej časti je rovnaký ako pomer dĺžok dlhšej časti a celej úsečky. Preto postup, ktorým k dlhšej časti nájdeme kratšiu časť, musí byť rovnaký ako postup, ktorým k celej úsečke nájdeme dlhšiu časť. Teda (pozri obr. 33): ak *EB* je dlhšia z dvoch častí, ktoré sú v pomere zlatého rezu a *EH* je polovica z *EB*, tak *GB* je hľadaná kratšia časť.

7. a) Uvedieme dve riešenia:

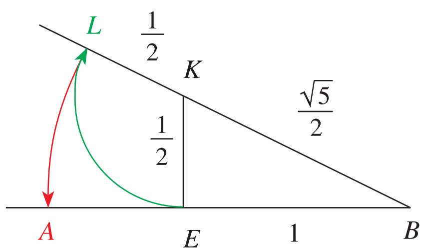
Prvé riešenie: Zvoľme dĺžku kratšej úsečky za jednotku dĺžky: $|AE| = 1$, označme b dĺžku úsečky *EB* (teda b určuje, koľkonásobok dĺžky úsečky *AE* je dĺžka úsečky *EB*, $|EB| = b \cdot |AE|$). Potom úsečka *AB* má dĺžku $1 + b$. Podľa opisu zlatého rezu platí $\frac{1}{b} = \frac{b}{1+b}$. Úpravou tejto rovnosti dostaneme kvadratickú rovnicu $b^2 - b - 1 = 0$. Jej korene sú $b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Číslo b, ktoré hľadáme, je kladné (je to dĺžka úsečky *EB*), preto ním môže byť iba koreň $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Potom $\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{b \cdot |AE|}{|AE|} = b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Druhé riešenie: Z riešenia úlohy 5 b) vieme, že $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|EB|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, t. j. $|AE| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot |EB|$. Potom $\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{|EB|}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot |EB|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

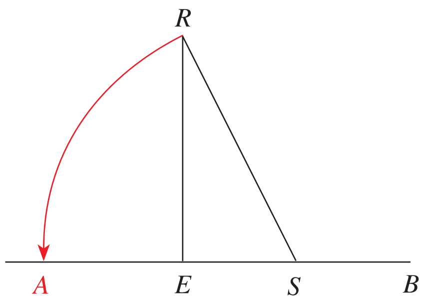
Podľa zadania malo platiť $\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, preto treba skontrolovať, či sa $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Táto rovnosť je ekvivalentná s rovnosťou $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$ (ak označíme $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, tak prvá rovnosť má tvar $\frac{1}{x} = y$, druhá má tvar $xy = 1$), ktorú možno ešte upraviť do podoby $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$.

Na skontrolovanie poslednej rovnosti stačí použiť vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, pre $a = \sqrt{5}$, $b = 1$.



Obr. 34

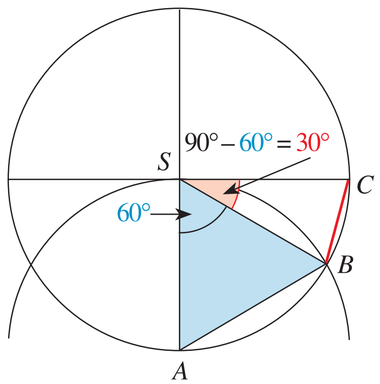
b) Pozri obr. 34. Treba skonštruovať úsečku, ktorej dĺžka je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-násobok dĺžky úsečky *EB*. Pre prehľadnosť zápisov zvoľme dĺžku *EB* za jednotku dĺžky: $|EB| = 1$. Z riešenia úlohy 5 vieme, ako skonštruovať úsečku dĺžky $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (úsečka *BK* na obr. 34). K tejto úsečke treba ešte pripočítať polovicu úsečky *EB* (úsečka *LK*).



Obr. 35

Iný možný postup je na obr. 35: *S* je stred úsečky *EB*, úsečka *ER* je kolmá na *EB* a má rovnakú dĺžku, červený oblúk kružnice má stred v bode *S*.

8. Pravidelný 12-uholník sa skladá z 12 rovnakých rovnoramenných trojuholníkov (ich ramenami sú polomery kružnice), v každom z nich má uhol oproti základni veľkosť $\frac{360°}{12} = 30°$. Preto stačí skontrolovať, či uhol *BSC* (pozri obr. 36) má veľkosť 30°. Modrý trojuholník *ASB* je rovnostranný (obidve kružnice na obrázku majú rovnaké polomery, *AS* a *BS* sú polomery jednej z týchto kružníc, *AB* je polomer druhej kružnice), preto všetky jeho vnútorné uhly – teda aj uhol *ASB* – majú veľkosť 60°. Polomery *AS* a *CS* sú navzájom kolmé, preto uhol *BSC* má veľkosť 90° – 60° = 30°.



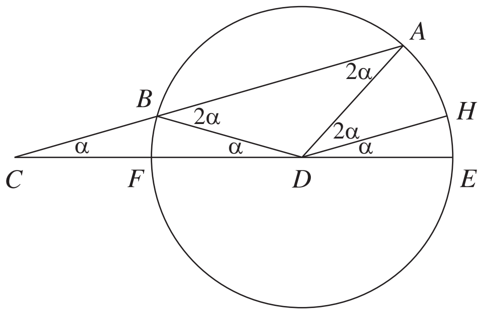
Obr. 36

12. V tvrdení k zvolenému bodu *B* (bod *A* môžeme pokladať za daný) rysovaním nájdeme bod *E*. Konštrukcia z úlohy 11 je riešenie obrátenej úlohy: poznáme polohu bodu *E* (bod *A* pokladáme opäť za daný) a hľadáme bod *B*, ku ktorému tento bod *E* patrí. Informácie o bode *B* pritom vyplývajú z tvrdenia:

priamka AB musí pretať priamku ED v bode C, ktorého vzdialenosť od B sa rovná polomeru kružnice.

13. a) Pozri obr. 37.

1. Trojuholník CBD je rovnoramenný (CB aj BD sa rovnajú polomeru kružnice), preto $|\sphericalangle BDF| = \alpha$,
2. Uhol DBA má veľkosť 2α:
   $|\sphericalangle DBA| = 180° - |\sphericalangle DBC| = 180° - (180° - |\sphericalangle BCF| - |\sphericalangle BDF|) =$
   $= 180° - (180° - \alpha - \alpha) = 2\alpha$.
3. Trojuholník ABD je rovnoramenný (DB aj DA sú polomery kružnice), preto $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DBA| = 2\alpha$.
4. CA a DH sú rovnobežky, uhly DAB a ADH sú striedavé, preto $|\sphericalangle ADH| = 2\alpha$.
5. CA a DH sú rovnobežky, uhly BCF a HDE sú súhlasné, preto $|\sphericalangle HDE| = \alpha$.
6. $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ADH| + |\sphericalangle HDE| = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$.



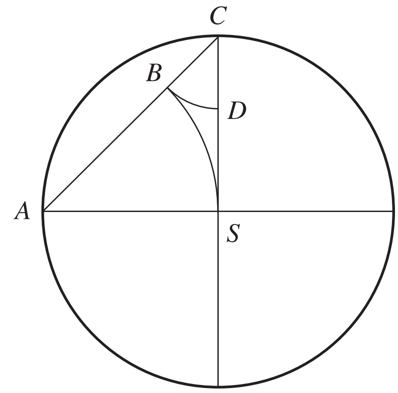
Obr. 37

14. Výška zvislej odvesny sivého trojuholníka na obr. 15 je $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, preto šírka a výška oblúka sú rovnaké.

15. Riešením rovnice $25 + r^2 = (10 - r)^2$ je $r = \frac{15}{4} = 3{,}75$, to sú $\frac{3}{8}$ z 10, teda z rozpätia oblúka. Tri osminy môžeme skonštruovať napr. trikrát opakovaným delením na polovicu (postupne dostaneme polovicu, štvrtinu a osminu rozpätia, $\frac{3}{8}$ sú súčet štvrtiny a osminy).

16. Riešením rovnice $(10 - r)^2 - 5^2 = (r + 2{,}5)^2 - 2{,}5^2$ je $r = 3$.

17. Strany pravouhlého sivého trojuholníka na obr. 20 b) majú dĺžky $1 - r$, $1 - r$, $2r$. Podľa Pytagorovej vety sa $(1 - r)^2 + (1 - r)^2 = (2r)^2$, odtiaľ $r^2 + 2r - 1 = 0$. Kladný koreň tejto rovnice je $r = \sqrt{2} - 1$ (druhý koreň je záporný).



Obr. 38

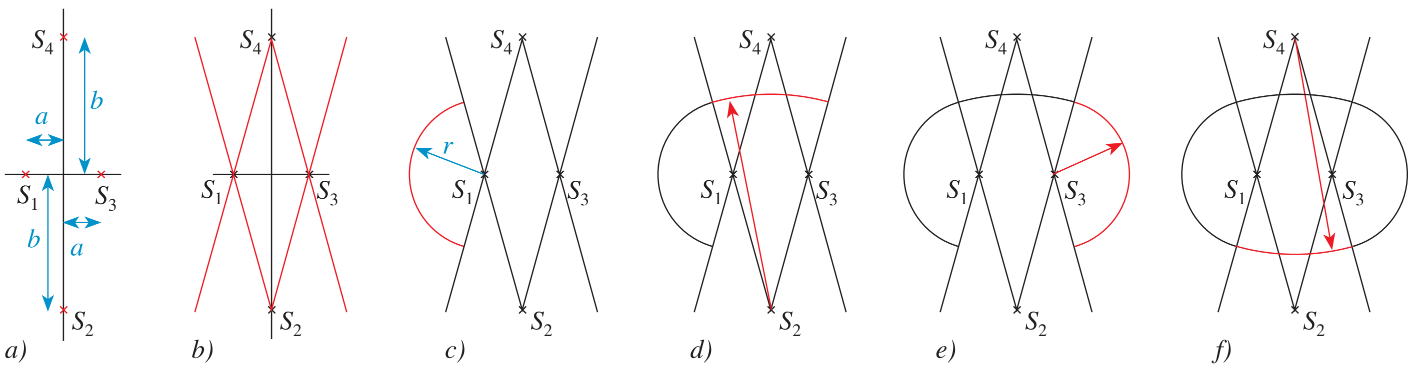
18. Treba skontrolovať, že dĺžka úsečky CD na obr. 38 je $\left(\sqrt{2} - 1\right)$-násobok polomeru SA (pozri riešenie úlohy 17). Ak zvolíme polomer SA za jednotku dĺžky, bude $|SA| = |SC| = |AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{|SA|^2 + |SC|^2} = \sqrt{2}$,
$|CD| = |CB| = |AC| - |AB| = \sqrt{2} - 1$

19. a) Bod A musí ležať na priamke prechádzajúcej stredmi S_1 a S_2.

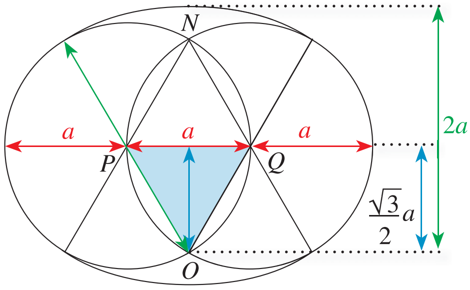
Prvé zdôvodnenie: Kružnice k (so stredom S_1 a polomerom S_1A) a l (so stredom S_2 a polomerom S_2A) sa dotýkajú v bode A. Bod dotyku dvoch kružníc leží na priamke prechádzajúcej ich stredmi.

Druhé zdôvodnenie: Obidva oblúky musia mať v mieste prechodu – teda v bode A – spoločnú dotyčnicu. Dotyčnica k prvému oblúku v bode A je kolmá na polomer S_1A, dotyčnica k druhému oblúku je kolmá na polomer S_2A. Ak sa majú tieto dotyčnice v bode A zhodovať, musia sa zhodovať priamky S_1A a S_2A, teda bod A musí ležať na priamke prechádzajúcej stredmi S_1 a S_2.

b) Postup konštrukcie je na obr. 39 a – f. Dĺžky označené modro (*a, b* na obr. 39 a, *r* na obr. 39 c) závisia od našej voľby.



Obr. 39
Konštrukcia oválu



Obr. 40

Oválov s danými štyrmi stredmi možno narysovať nekonečne veľa. Ak chceme ovál určiť jednoznačne, musíme okrem stredov S_1 až S_4 zvoliť ešte polomer jednej z kružníc tvoriacich ovál (to sme urobili na obr. 39 c).

20. Modrý trojuholník OPQ je rovnostranný (P a Q sú stredy kružníc, ktoré majú rovnaký polomer a PQ, PO a OQ sú polomery týchto kružníc). Označme dĺžku jeho strany a. Potom oblúky so stredmi P a Q majú polomer a (červené úsečky na obr. 40), oblúky so stredmi O a N majú polomer $2a$ (zelené úsečky).

Výška rovnostranného trojuholníka OPQ je $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (modré úsečky). Preto šírka oválu je $3a$ (3 červené úsečky), polovica jeho dĺžky je $2a - \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (rozdiel zelenej a modrej úsečky), teda dĺžka je $2\left(2a - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = 4a - a\sqrt{3}$. Hľadaný pomer je $\frac{3a}{a\left(4-\sqrt{3}\right)} = \frac{3}{4-\sqrt{3}} = 1{,}322\ 78... \approx 1{,}32$. Rozmery námestia sú v pomere $\frac{240}{184} = 1{,}304\ 34... \approx 1{,}30$.

21. AB rozdelíme na tretiny bodmi C, D. Na osi úsečky AB zvolíme bod L ležiaci pod AB. Narysujeme polpriamky LC, LD. Narysujeme oblúk kružnice so stredom C a polomerom CA od bodu A po priesečník s LC (bod P). Narysujeme oblúk kružnice so stredom L a polomerom LP od bodu P po priesečník s polpriamkou LD (bod R). Narysujeme oblúk kružnice so stredom D a polomerom DR od bodu R po bod B.

22 a) Ak $|CK| = 1$, tak $|LK| = |AB| = 6$, $|AC| = 2$,
$|LC| = \sqrt{|LK|^2 + |CK|^2} = \sqrt{37}$, $|LM| = |LC| + |AC| = \sqrt{37} + 2$,
$|KM| = |LM| - |LK| = \sqrt{37} - 4$. Preto $\frac{|KM|}{|AB|} = \frac{\sqrt{37}-4}{6} = 0{,}347... \approx 0{,}35$, teda výška oblúka je asi 35 % jeho rozpätia.

b) Zopakovaním postupu z časti a) pre $|LK| = 3$ dostaneme $|KM| = \left(\sqrt{10}+2\right) - 3$.
Preto $\frac{|KM|}{|AB|} = \frac{\sqrt{10}-1}{6} = 0{,}360... \approx 0{,}36$, teda výška oblúka je asi 36 % jeho rozpätia.

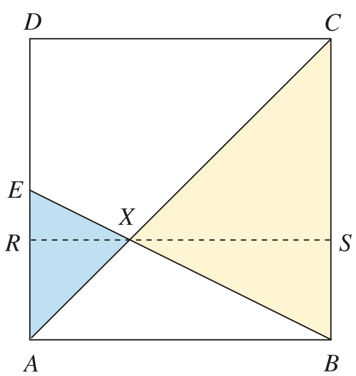
23. Funkcia má predpis $y = \sqrt{x^2+1} + 2 - x$ (x je dĺžka úsečky KL, y je výška KM oválneho oblúka).

24. a) Úsečky LP a LM sú polomery stredného oblúka, teda sú rovnako dlhé. Preto $|LC| = |LT|$.

b) Bod L leží na osi úsečky CT, súčasne leží aj na osi úsečky AB. Preto L je priesečník týchto dvoch osí. Polohu bodov A, B, C a T poznáme, preto osi úsečiek AB aj CT vieme narysovať. Keď poznáme polohu bodov A, C, L, vieme narysovať oválny oblúk (úloha 21).

25. a) $\sqrt{x^2+1} + 2 - x = 2{,}5$

b) Postupnými úpravami dostaneme $\sqrt{x^2+1} = x + 0{,}5$ ($-x$ a 2 sme previedli na pravú stranu), $x^2 + 1 = x^2 + x + 0{,}25$ (obidve strany sme umocnili na druhú, na pravej strane sme pritom použili vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), $x = 0{,}75$. Pretože sme použili neekvivalentnú úpravu (umocnenie na druhú), mali by sme urobiť skúšku správnosti. Môžeme sa jej vyhnúť touto úvahou: Z obr. 41 vieme, že naša rovnica má jediné riešenie. Úpravami rovnice (pri ktorých sa žiadne riešenie nestratí a riešenia môžu iba pribúdať) sme našli iba jedno riešenie. Preto nájdené riešenie je riešením pôvodnej rovnice. (Touto úvahou – na rozdiel od skúšky správnosti – však neskontrolujeme, či sme sa pri riešení rovnice náhodou nepomýlili.)



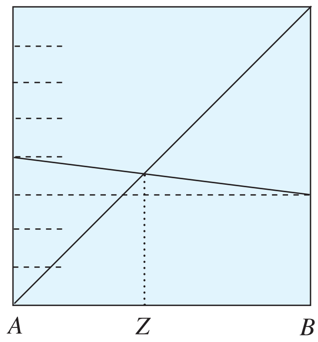
Obr. 41

Konštrukcia oválneho oblúka: Ak poznáme dĺžky úsečiek *AB, AC* a *KL*, vieme oválny oblúk skonštruovať postupom z riešenia úlohy 21.

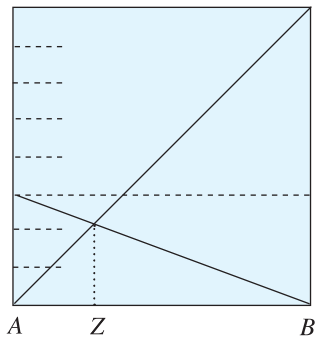
26. Trojuholníky *AXE* a *CXB* sú podobné, pretože sa zhodujú vo všetkých troch vnútorných uhloch (obr. 41, *AXE* a *CXB* je dvojica vrcholových uhlov, *XAE* a *XCB* je dvojica striedavých uhlov pri rovnobežkách *AD* a *BC*, podobne dvojica uhlov *XEA* a *XBC*). Pritom *EA* je polovica z *BC*, teda rozmery trojuholníka *AXE* sú polovičné v porovnaní so zodpovedajúcimi rozmermi trojuholníka *CXB*. Preto výška *XR* na stranu *AE* je polovica výšky *XS* na stranu *CB* (ak si pravdivosťou tohto tvrdenia nie ste istí, môžete ho zdôvodniť napr. podobnosťou trojuholníkov *AXR* a *CXS* a informáciou $|AX| = \dfrac{|CX|}{2}$, ktorú sme zistili z podobnosti trojuholníkov *AXE* a *CXB*). Bod *X* teda rozdeľuje úsečku *RS* v pomere 1 : 2, alebo – čo je to isté – *RX* je tretina dĺžky *RS*.

27. Obr. 30: jedna pätina (t. j. rozdelenie v pomere 1 : 4). Obr. 31: tri sedminy (rozdelenie v pomere 3 : 4). Z tohto rozdelenia by sme mohli dostať aj rozdelenie na sedminy, ak časť vodorovnej strany štvorca s dĺžkou štyri sedminy rozdelíme na štyri rovnako dlhé časti (zložením na polovicu a ešte raz na polovicu). Obr. 32: jedna sedmina (rozdelenie v pomere 1 : 6).

28. 4 : 5 – obr. 42, 3 : 8 – obr. 43. 1 : 8 – na obr. 42 rozdelíme úsečku *AZ* na 4 rovnaké časti (zložením na polovicu a ešte raz na polovicu), 1 : 10 – na obr. 43 rozdelíme *ZB* na 8 rovnako dlhých častí.



Obr. 42



Obr. 43

9 MERANIE

9.1 Pracujeme s približnými hodnotami
9.2 Na dĺžky sú najlepšie trojuholníky
9.3 Počítame obsahy
9.4 Ďalšie úlohy

Asi najčastejšie sa s meraním dĺžok, uhlov a výpočtom obsahov stretávajú zememerači. Nie je preto prekvapením, že v histórii zememeračstva možno nájsť všetky myšlienky, ktoré použijeme v úlohách tejto kapitoly. S niektorými z nich sa stretneme aj v súčasnosti – vychádza z nich napr. softvér, ktorý sa dnes používa na výpočet výmery pozemku.

9.1 Pracujeme s približnými hodnotami

- Približné čísla – pravidlá pre bežné výpočty (súčet, rozdiel, súčin, podiel)
- Presnosť sínusu a kosínusu

PRIBLIŽNÉ ČÍSLA – PRAVIDLÁ PRE BEŽNÉ VÝPOČTY (SÚČET, ROZDIEL, SÚČIN, PODIEL)

Merať vieme vždy len s určitou presnosťou. Tá závisí od použitého meradla: napr. školským pravítkom a uhlomerom odmeriame dĺžku s presnosťou na milimetre a uhol s presnosťou na celé stupne (na porovnanie: prístroje, ktoré dnes používajú zememerači, dosahujú pri meraní uhlov bežne presnosť 5 sekúnd).
Výsledkami meraní sú teda približné čísla. Tie často používame v ďalších výpočtoch (napr. pri výpočte obsahu obdĺžnika počítame súčin zmeranej šírky a dĺžky, teda súčin dvoch približných čísel). Preto je namieste pripomenúť si pravidlá pre bežné výpočty s približnými číslami.

- Presnosť súčtu alebo rozdielu určuje najmenej presný člen.

Ak napr. sčítame tri čísla, z ktorých jedno je zaokrúhlené na stovky (3 200), druhé na celé jednotky (524) a tretie na desatiny (167,8), tak výsledok zaokrúhlime na stovky:

$$3\,200 + 524 + 167{,}8 = 3\,891{,}8 \approx 3\,900$$

(platné číslice sme zvýraznili modro).

Toto pravidlo možno jednoducho znázorniť, ak sčítance zapíšeme pod seba. Za poslednou platnou cifrou najmenej presného sčítanca – teda za stovkami v prvom sčítanci 3 200 – urobíme zvislú čiaru (v príklade na s. 85 zelená prerušovaná). Platné miesta v súčte sú potom tie, ktoré ležia vľavo od čiary.

Z tohto zápisu tiež vidno myšlienku, z ktorej pravidlo o presnosti súčtu vychádza. V každom zo stĺpcov, ktoré ležia napravo od čiary, má niektorý zo sčítancov neplatné miesta – sú na nich neplatné nuly. V žiadnom z týchto stĺpcov nevieme určiť súčet všetkých cifier, pretože niektoré z nich – tie na neplatných miestach – nepoznáme. Všetky cifry, ktoré máme sčítať, poznáme iba v stĺpcoch ležiacich od zvislej čiary naľavo. Vo výsledku má zmysel za platné pokladať iba miesta zodpovedajúce „platným“ stĺpcom – teda tým, v ktorých poznáme všetky cifry, ktoré treba sčítať.

$$\begin{array}{rr|l}
3 & 2 & 0\,0,\,0 \\
 & 5 & 2\,4,\,0 \\
 & 1 & 6\,7,\,8 \\
\hline
3 & 8 & 9\,1,\,8 \quad \approx 3\,900
\end{array}$$

- Počet platných číslic súčinu alebo podielu určuje člen s najmenším počtom platných číslic.

Ak napr. násobíme dve čísla, z ktorých jedno má 3 platné číslice (23 400) a druhé 2 platné číslice (3 100), tak vo výsledku predpokladáme 2 platné číslice. Na tento počet platných číslic potom výsledok zaokrúhlime:

$$23\,400 \cdot 3\,100 = 72\,540\,000 \approx 73\,000\,000$$

(platné číslice sme zvýraznili modro).

Základná myšlienka tohto pravidla súvisí s predchádzajúcimi úvahami o „platných“ stĺpcoch pri výpočte súčtu. V nasledujúcom príklade sme – kvôli väčšej názornosti – doplnili na neplatné miesta konkrétne cifry (sú čierne na rozdiel od modrých platných), aby sme mohli ukázať, na ktorých miestach sa pri výpočte budú vyskytovať neplatné číslice. Pripomeňme, že v skutočnosti cifry na neplatných miestach nepoznáme (teda namiesto nami zvolených 1, 5 a 2, 4 by tam mohli byť úplne iné číslice).

Pri výpočte súčinu 23 415 · 3 124 násobíme číslo 23 415 postupne platnými číslicami 3, 1 a neplatnými 2 a 4. Pri tomto násobení má zmysel za platné pokladať iba tie cifry, ktoré vzniknú súčinom dvoch platných (teda modrých) číslic. Napr. v sivo podfarbenom súčine 23 415 · 3 = 70 245 prvé tri cifry 702 vznikli súčinom platnej číslice 3 s platnými číslicami 2, 3, 4. Číslice stojace na neplatných miestach v skutočnosti nepoznáme, teda nepoznáme ani skutočný súčin dvoch číslic, z ktorých aspoň jedna je neplatná – preto sú v sivo podfarbenom súčine cifry 4 a 5 označené ako neplatné.

$$\begin{array}{cccccccc}
2 & 3 & 4 & 1 & 5 & \cdot\ 3 & 1\ 2\ 4 & \\
\hline
7 & 0 & 2 & 4 & 5 & & & \\
 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & & \\
 & & 4 & 6 & 8 & 3 & 0 & \\
 & & & 9 & 3 & 6 & 6 & 0 \\
\hline
7 & 3 & 1 & 4 & 8 & 4 & 6 & 0
\end{array}$$

Výsledok násobenia 23 415 · 3 124 dostaneme, ak sčítame čísla v zeleno orámovanej časti. Vo výsledku má zmysel – podľa úvah o „platných“ stĺpcoch pri výpočte súčtu – za platné pokladať iba miesta zodpovedajúce „platným“ stĺpcom. To sú v tomto prípade prvé dva stĺpce; v treťom sa už objavuje neplatná cifra 4. Všimnite si, že počet platných stĺpcov súvisí s počtom platných cifier v činiteli 3 124 – teda v činiteli s menším počtom platných cifier.

Vysvetlite, ako počet platných cifier v činiteli 3 124 ovplyvňuje počet platných stĺpcov. Diskutujte o tom, ako by sa zmenil počet platných stĺpcov výsledku, keby sa zmenili počty platných číslic v činiteloch 23 415 a 3 124, napr. ako by to bolo v prípade súčinov 23 415 · 3 124 alebo 23 415 · 3 124.

Použitie týchto pravidiel precvičíme v úlohách 1 až 3. Súčasne v nich otestujeme, nakoľko možno dôverovať výsledkom takýchto výpočtov s približnými číslami.

Treba pripomenúť, že uvedené pravidlá sú iba orientačné: určujú, ktoré miesta výsledku má zmysel pokladať za platné. V žiadnom prípade však nezaručujú, že výsledky, ktoré ich použitím dostaneme, musia byť napr. totožné s hodnotou, ktorú by sme dostali zaokrúhlením skutočného – nám však neznámeho – výsledku. O oprávnenosti tejto poznámky by ste sa mali presvedčiť pri riešení úloh 1 až 3.

Aby sme mohli testovať, použijeme nasledujúci postup (v ktorom sa zahráme na bytosti s nadprirodzenými schopnosťami – budeme totiž prepokladať, že okrem nameraných – približných hodnôt poznáme aj skutočné – presné údaje).

	príklad				
(1) zvolíme čísla, ktoré budeme pokladať za presné hodnoty	123 562,473 + 781,934 + 1 523,801 = 125 868,208				
(2) ich zaokrúhlením vytvoríme približné čísla	**123 6**00	+ **78**0	+ **2** 000	= ?	
(3) pri výpočte použijeme pravidlá na počítanie s približnými číslami	**123 6**00	+ **78**0	+ **2** 000	= **126** 380	≈ **126** 000
(4) výsledok porovnáme s hodnotou, ktorú dostaneme zaokrúhlením presného výsledku na rovnaký počet miest					125 868,208 ≈ **126** 000

Ak by teda presné hodnoty (ktoré v skutočnosti nepoznáme) boli 123 562,473 a 781,934 a 1 523,801 (bod 1) a my by sme prvé z týchto čísel poznali s presnosťou na stovky, druhé na desiatky a tretie na tisícky (bod 2), tak súčtom týchto približných čísel by sme dospeli k výsledku 126 000 (bod 3). Ten je v tomto prípade rovnaký ako skutočná hodnota súčtu zaokrúhlená na tisícky (bod 4).

V úlohách 1 až 3 použite opísaný postup (pri výpočte s približnými číslami použite príslušné pravidlá, potom výsledok porovnajte s rovnako zaokrúhleným výsledkom presného výpočtu).

Odporúčame tiež vymyslieť si niekoľko ďalších podobných úloh s vlastnými presnými aj z nich odvodenými približnými číslami. Cielom týchto úloh je najmä získať cit pre výpočty s približnými číslami.

ÚLOHY

1. Približné čísla v tejto úlohe vznikli zo sčítancov v súčte

$$123\,562{,}473 + 781{,}934 + 1\,523{,}801 = 125\,868{,}208$$

(tento súčet sme použili aj v úvodnom príklade).

a) 124 000 + 780 + 2 000 b) 123 562,473 + 800 + 1 500
c) 123 560 + 782 + 1523,8 d) 123 562,5 + 782 + 1 520

2. Približné čísla v tejto úlohe sme vytvorili z činiteľov v súčine

$$5\,329{,}3 \cdot 3\,614{,}7 = 19\,263\,820{,}71$$

a) $5\,000 \cdot 4\,000$ b) $5\,300 \cdot 3\,600$
c) $5\,330 \cdot 3\,610$ d) $5\,329 \cdot 3\,615$
e) $5\,300 \cdot 4\,000$ f) $5\,000 \cdot 3\,610$
g) $5\,300 \cdot 3\,615$ h) $5\,329 \cdot 3\,610$

3. Približné čísla v tejto úlohe vznikli z delenca a deliteľa v podiele

$$\frac{6\,051}{92\,548} = 0{,}065\,382\,288\,109\,953\,753\,727\,795...$$

a) $\frac{6\,000}{90\,000}$ b) $\frac{6\,100}{93\,000}$ c) $\frac{6\,050}{92\,500}$ d) $\frac{6\,100}{90\,000}$

e) $\frac{6\,000}{93\,000}$ f) $\frac{6\,050}{93\,000}$ g) $\frac{6\,000}{92\,500}$ h) $\frac{6\,050}{90\,000}$

PRESNOSŤ SÍNUSU A KOSÍNUSU

Pri výpočtoch dĺžok a obsahov z nameraných údajov často potrebujeme sínus alebo kosínus nameraných uhlov (sínus napr. pri výpočte obsahu trojuholníka, ak zmeriame dve jeho strany a uhol nimi zovretý, kosínus napr. pri výpočte dĺžky tretej strany tohto trojuholníka).

Stretneme sa s tým napr. v riešení úlohy 11. obr. X na s. 94 – 95 alebo v úlohách 27 a 28 na s. 105.

Výsledky merania uhlov nie sú presné hodnoty, sú to len hodnoty zmerané s istou presnosťou – na celé stupne, na pol stupňa, na minúty a pod.
Ak by sme merali napr. s presnosťou na celé stupne a dostali výsledok 27°, je skutočná veľkosť meraného uhla niekde medzi 26,5° a 27,5° (prečo?). Presná hodnota sínusu je teda medzi sin 26,5° = 0,446 197... a sin 27,5° = 0,461 748..., kým hodnota, ktorú použijeme v našich výpočtoch, je sin 27° = 0,453 990... .
Ak vypočítame rozdiely

$$\sin 27° - \sin 26{,}5° = 0{,}007\,792\ldots,\quad \sin 27{,}5° - \sin 27° = 0{,}007\,758\ldots, \qquad (*)$$

vidíme, že neznáma presná hodnota sínusu sa od hodnoty sin 27° (ktorú použijeme vo výpočte) nebude líšiť viac ako o 0,007 792... (toto si rozmyslite). Pretože táto odchýlka je skoro 1 stotina, nemá v použitom čísle sin 27° = 0,453 990... zmysel pokladať za platné cifry ležiace vpravo od miesta stotín.

V týchto úvahách budeme v približnom čísle (v našom prípade v čísle sin 27°) pokladať číslicu na n-tom mieste za desatinnou čiarkou za platnú, ak
- je táto číslica alebo niektorá číslica stojaca pred ňou nenulová,
- približné číslo sa od presnej hodnoty líši menej ako o 10^{-n}.

Teda napr. číslicu na mieste stotín pokladáme za platnú, ak ona sama alebo niektorá číslica pred ňou je nenulová, pričom približné číslo sa od presnej hodnoty líši menej ako o 1 stotinu.

S hodnotou sin 27° preto budeme počítať tak, ako by v nej boli 2 platné cifry (na mieste desatín a stotín). Ukážme si to na príklade.

ÚLOHA

4. Vypočítajte obsah trojuholníka *ABC*, ak poznáte dĺžky jeho strán a = 1 264 m, b = 729 m (s presnosťou na celé metre) a veľkosť uhla γ = 27° (s presnosťou na celé stupne).

RIEŠENIE

Na výpočet obsahu použijeme vzorec $P_{ABC} = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin\gamma$. Dosadením hodnôt zo zadania dostaneme

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1\,264 \cdot 729 \cdot \sin 27° = \frac{1}{2} \cdot 1\,264 \cdot 729 \cdot 0{,}453\,990\ldots = 209\,166{,}\,134\,964\ldots$$

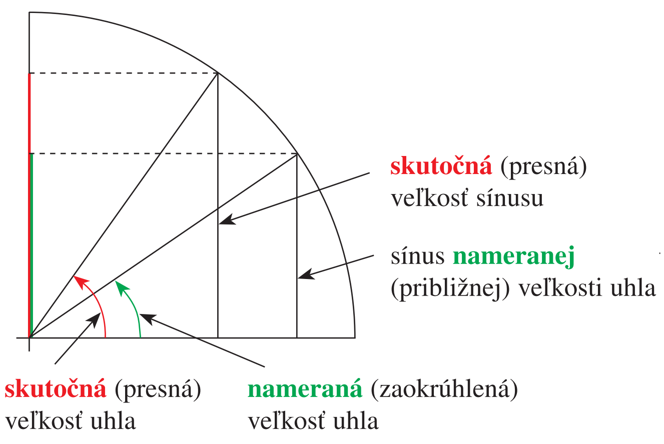
Pri určovaní počtu cifier, ktoré budeme vo výsledku pokladať za platné, použijeme spomínané pravidlá pre bežné výpočty:

- číslo $\frac{1}{2}$ je presné, preto počet jeho platných cifier je ľubovoľne veľký (o tomto tvrdení chvíľu porozmýšľajte),
- číslo 1 264 má štyri platné cifry, číslo 729 tri platné cifry, v čísle sin 27° pokladáme (podľa úvodného textu) za platné dve cifry,

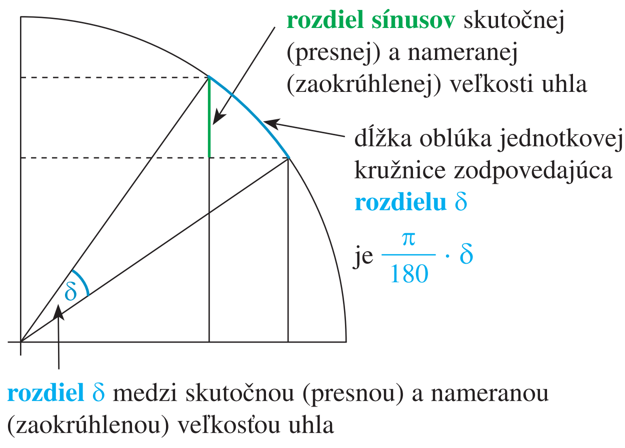
vo výsledku teda predpokladáme dve platné cifry. Preto vypočítanú hodnotu zaokrúhlime na dve platné cifry:

$$P_{ABC} \approx 210\,000\ \text{m}^2.$$

Keby sme pre každý konkrétny uhol mali zisťovať počet platných cifier jeho sínusu podobne ako pred úlohou 4, bol by takýto postup výpočtu zdĺhavý. Na obrázkoch 1 a 2 sme znázornili jednoduchú úvahu, ako odhadnúť, ktoré cifry v hodnote sínusu alebo kosínusu sú platné, ak poznáme presnosť, s akou sme zmerali uhol. Kružnica na obidvoch obrázkoch má polomer 1 (to nám umožňuje znázorniť sínus ako dĺžku úsečky).



Obr. 1



Obr. 2

Čo vyplýva z obrázkov: ak uhol α zmeriame s presnosťou δ (teda **skutočná** a **nameraná** veľkosť uhla α sa líšia nanajvýš o δ**,** obr. 2), tak rozdiel medzi sínusmi skutočnej a nameranej veľkosti uhla (teda dĺžka zelenej úsečky na obr. 2) nie je väčší ako $\frac{\pi}{180} \cdot \delta$.

ÚLOHA

5. Diskutujte o tomto tvrdení. Ako sme vypočítali dĺžku modrého oblúka? Aký vzťah je medzi dĺžkou zelenej úsečky (ktorej veľkosť chceme odhadnúť) a dĺžkou modrého oblúka na obr. 2?

Napríklad, ak uhol α zmeriame s presnosťou na celé stupne, tak $\delta \leq 0{,}5$ (prečo?), preto rozdiel medzi sínusmi skutočnej a nameranej veľkosti uhla nie je väčší ako $\frac{\pi}{180} \cdot 0{,}5 = 0{,}008\,726... < 0{,}01$. Preto v sínuse nameranej veľkosti uhla, ktorý používame v ďalších výpočtoch, môžeme za platné pokladať cifry po miesto stotín vrátane (lebo hodnota, ktorú použijeme vo výpočte, sa od skutočnej hodnoty líši menej ako o 1 stotinu, pozri poznámku pred úlohou 4 na s. 87).

ÚLOHY

6. Skontrolujte správnosť uvedenej úvahy o platných cifrách v sínuse uhla, ktorý sme zmerali s presnosťou na celé stupne.

7. Použite podobné úvahy ako pred úlohou 6 a odhadnite, ktoré cifry môžete pokladať za platné v hodnote sínusu, ak ste uhol zmerali s presnosťou
a) na minúty,
b) na sekundy,
c) na pol stupňa (pozri tiež obr. 4 na s. 95),
d) na desatiny stupňa.

ÚLOHA

8. Diskutujte o tom, či výsledky, ku ktorým ste dospeli v riešení úlohy 7, platia aj pre hodnoty kosínusov.

9.2 Na dĺžky sú najlepšie trojuholníky

Zistiť vzdialenosť dvoch bodov – teda dĺžku úsečky, ktorá ich spája – nie je myšlienkovo náročné, ak vieme odmerať priamo túto úsečku. Treba iba zvoliť vhodné meradlo – v našich úvahách sa obmedzíme na meranie dĺžok od úrovne milimetrov po úroveň metrov, vystačíme teda s meradlami ako pravítko, pásmo a pod.
Meranie vzdialeností začne byť zaujímavé v okamihu, keď úsečka spájajúca merané body nie je prístupná. Typickým príkladom je meranie výšky stromu. Opis niekoľkých možných postupov sme si požičali z blogu, v ktorom ich opisuje 13-ročná školáčka.

AKO SME MERALI STROM
DNES SOM SA ROZHODLA ZMERAŤ STROM. V KNIŽKE SOM NAŠLA NIEKOĽKO POSTUPOV, AKO TO UROBIŤ. VZALA SOM SI TEDA TYČ VYSOKÚ ASI METER A POL, CERUZKU, 5-METROVÉ PÁSMO, VLASTNORUČNE VYROBENÝ SKLONOMER (POVRÁZOK S MATICOU PRILEPENÝ IZOLEPOU NA UHLOMER), SESTRU A PSA.
DEŇ BOL KRÁSNY, BOLO VŠAK ZAMRAČENÉ, PRETO SME NEMOHLI POUŽIŤ *METÓDU POMOCOU TIEŇOV*. V SADE SME SI VYBRALI NAJVYŠŠIU JABLOŇ. ZAČALI SME PRVOU A ASI NAJJEDNODUCHŠOU METÓDOU – *ODHADOM*. TIPLI SME SI, ŽE JABLOŇ MÔŽE MAŤ TAK 9 – 10 METROV. NECHÁME SA PREKVAPIŤ.

PRVÉ MERANIE: Odkrokovala som 27 krokov a tam sestra zabodla tyč, potom som ešte prešla 3 kroky a ľahla som si na zem. Ležala som na nedávno posekanom poli, takže to nebolo nič príjemné. Teraz sestra pohybovala rukou po tyči a ja som povedala „Stop“, keď bola na mieste, kde som videla koniec stromu. Potom sme zmerali vzdialenosť od zeme k miestu, kde mala sestra prst a vynásobili sme to 10. To bola približná výška stromu. Vyšlo nám 0,7 m a po vynásobení 7 metrov. Uvidíme, ako vyjdú ďalšie pokusy.

DRUHÉ MERANIE je tzv. *ceruzková metóda*. Držala som ceruzku zvislo v natiahnutej ruke. Potom som išla tak ďaleko, pokiaľ spodok ceruzky nekryl začiatok stromu a vrch koniec koruny. Ďalej som obrátila ceruzku o 90° doľava, ale aby spodok bol stále na začiatku kmeňa. Sestra postupovala doľava tak dlho, až bola na špičke mojej ceruzky. Potom sme zmerali vzdialenosť od nej ku stromu a bola 7,1 metra. Ďalší podobný výsledok.

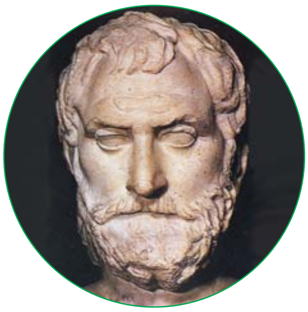
TRETIE MERANIE bola tzv. *dielcová metóda*. Sestra sa postavila ku stromu a ja som išla do vzdialenosti z druhého merania. V natiahnutej ruke som držala ceruzku, ktorá pokrývala strom. Na nej som si vyznačila „sestru“. Ona sa tam zmestila 4,5-krát. Vynásobila som jej výšku, teda 1,6 metra, s 4,5. To je 7,2 m.

POSLEDNÉ MERANIE, tzv. *uhlová metóda*, malo byť najzložitejšie, ale najpresnejšie. Použila som vyrobený sklonomer. Išla som od stromu tak ďaleko, až som videla v predĺženej strane vrch stromu a povrázok bol na uhle 45°. Vzdialenosť od stromu bola 5,4 a ja som mala prístroj asi v 1,5-metrovej výške. To sme sčítali a vyšlo 6,9 metra.

Všetky výsledky teda vyšli okolo 7 metrov. Náš odhad sa teda líšil približne o 2 – 3 metre. Potom sme si zabalili všetky veci a vrátili sme sa domov.

(Voľne podľa blogu Šárky Jarošovej z roku 2009.)

IDEÁLNE BY BOLO, KEBY STE OKREM DISKUSIE TIETO METÓDY VYSKÚŠALI AJ PRAKTICKY.



Táles z Milétu
(asi 640 – asi 546 pred n. l.)
prvý historicky známy matematik

ÚLOHY

9. a) Pripomeňte si v diskusii postup, ktorý je v texte označený ako *metóda pomocou tieňov*. Nakreslite vhodný obrázok a pomocou neho postup zdôvodnite.
b) Pri opise merania výšky stromu pomocou jeho tieňa spravidla predpokladáme, že strom stojí na vodorovnej rovine. Vtedy výpočet výšky stromu súvisí s tangensami. Vysvetlite, ako.

Tento postup použil už Táles na zistenie výšky Velkej pyramídy v Egypte. Táles bol grécky obchodník, ktorý sa počas svojich ciest oboznámil s matematickými poznatkami susedných krajín a priniesol ich do Grécka, kde ich on a jeho žiaci ďalej rozvíjali. Velký dojem na Tálesa urobilo používanie geometrie pri zememeračstve v Egypte.

10. Diskutujte v triede o jednotlivých postupoch uvedených v texte. Najprv si vyjasnite prípadné nejasnosti v ich opise. Potom sa pokúste každý postup zdôvodniť (pomôže vám, ak si načrtnete obrázky). Do diskusie zahrňte aj tieto otázky:
- neprekáža vám, že v prvom meraní sa používajú dve rôzne dĺžkové miery – kroky a metre?
- ako sa v štvrtej metóde zistí zo sklonomeru veľkosť uhla?

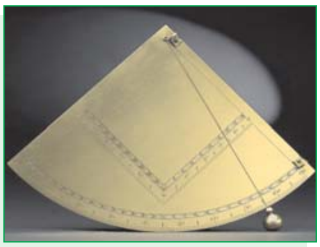
V predchádzajúcej úlohe ste na základe opisu kreslili obrázky. Teraz to bude naopak: vašou úlohou bude z obrázkov zistiť, ktorá dĺžka sa hľadá a aký je postup jej merania.

Hlavná myšlienka: nájsť vhodný trojuholník

Vopred prezradíme, že všetky zobrazené postupy majú spoločnú hlavnú myšlienku:
- meranú úsečku sa vždy snažíme určiť pomocou jedného alebo viacerých trojuholníkov... (často je meraná úsečka stranou alebo výškou nejakého vhodne zvoleného trojuholníka),
- ... o ktorých vieme meraním dĺžok, prípadne uhlov zistiť dostatočne veľa údajov. „Dostatočne veľa údajov o trojuholníku“ v tomto prípade znamená „také údaje, ktorými je trojuholník jednoznačne určený“. Inak povedané, sú to také údaje, ktoré by stačili na jeho zostrojenie. V našich úlohách sa stretneme s týmito možnosťami „dostatočného počtu“ údajov:
- nájdeme trojuholník, ktorý je nášmu trojuholníku podobný a vieme aj, koľkonásobne treba tento trojuholník zväčšiť, aby sme dostali náš trojuholník (teda poznáme koeficient podobnosti),
- v našom trojuholníku poznáme stranu a dva uhly alebo dve strany a uhol nimi zovretý.

Máme dve možnosti: rysovať alebo počítať

Ak trojuholník dokážeme na základe nejakých údajov skonštruovať, tak vieme vypočítať aj dĺžky jeho strán, výšok a veľkosti uhlov. Preto pri zisťovaní hľadanej dĺžky máme na výber z dvoch možností:
- *konštrukcia:* zostrojíme hľadanú úsečku vo vhodnej mierke (teda skonštruujeme trojuholníky, ktorými sme úsečku určili) a jej dĺžku zistíme meraním z obrázka,
- *výpočet:* hľadanú dĺžku vypočítame (pomocou podobnosti, goniometrických funkcií, sínusovej a kosínusovej vety).



Na obrázkoch sú niektoré dobové meracie nástroje: k štandardným patril v svojej dobe astroláb (hore – je na obr. II, III a VII) a kvadrant (dole – je na obr. XVII), ktorými sa dali merať zvislé uhly. Myšlienku merania uhlov kvadrantom kopíruje improvizovaný sklonomer, o ktorom sa hovorí v opise posledného merania na s. 89.

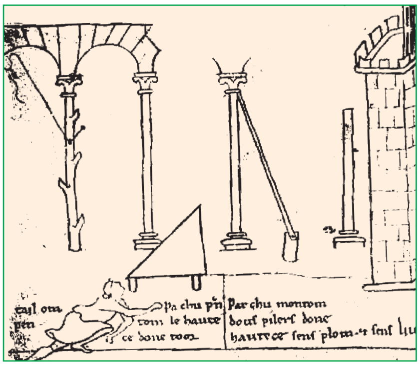
ÚLOHA

11. Na obrázkoch I až XVIII sú znázornené rôzne postupy merania.

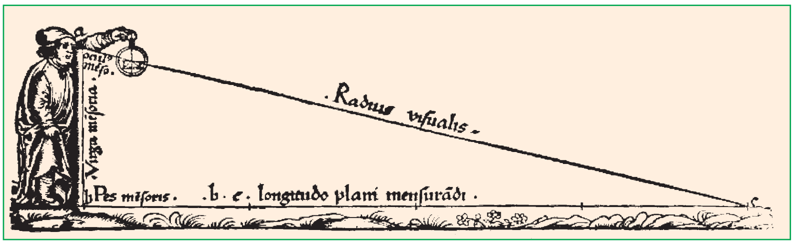
a) Pre každý obrázok zistite, ktorá dĺžka sa na ňom hľadá a aký je postup jej merania (teda ktoré dĺžky, prípadne uhly treba odmerať, aby ste pomocou nich hľadanú dĺžku dokázali nájsť).

PRI RIEŠENÍ BUDETE POTREBOVAŤ EŠTE TIETO INFORMÁCIE:

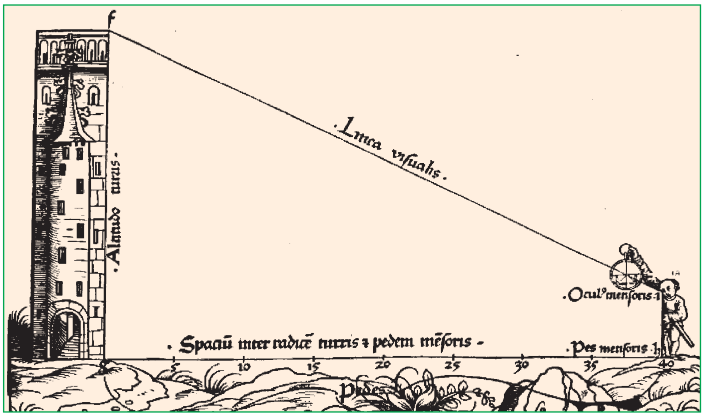
- TROJUHOLNÍK NA OBR. I JE PRAVOUHLÝ A ROVNORAMENNÝ,
- NA OBR. IX LEŽIA BODY F A G V POLOVICI ÚSEČIEK EA A EB.



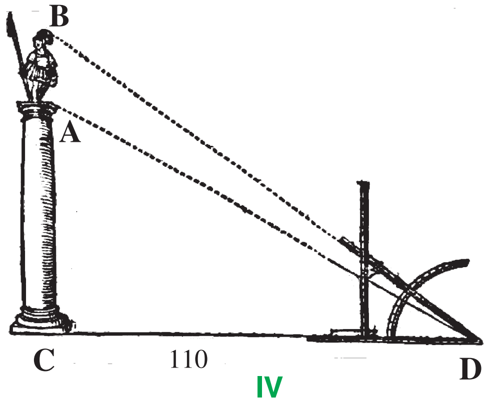
I



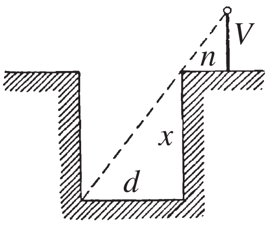
II



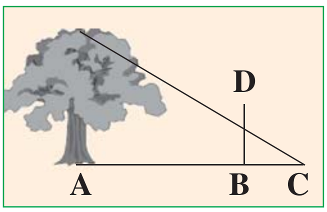
III



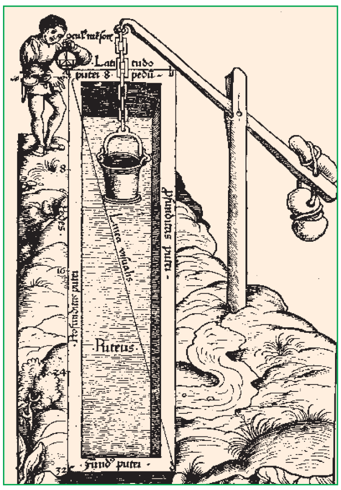
IV



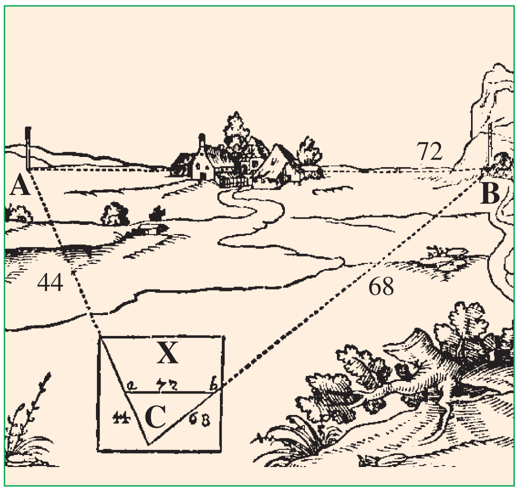
V



VI

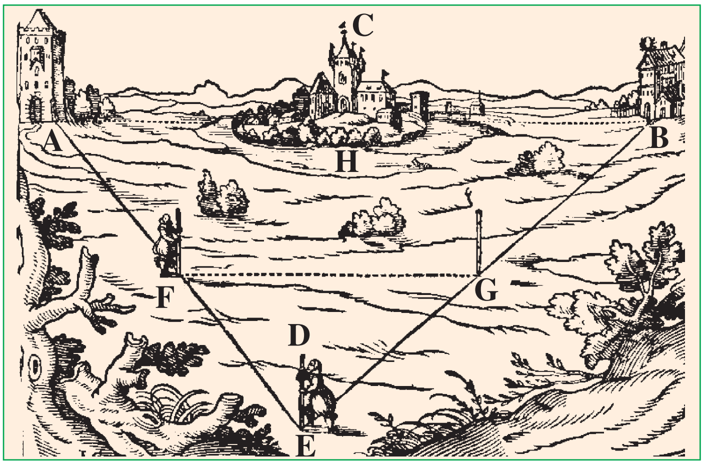


VII

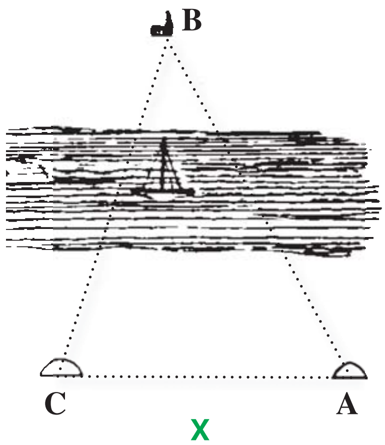


VIII

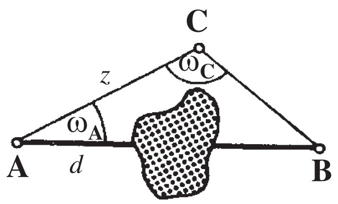
Obrázok I je zo skicára Villarda de Honnecourt z 13. storočia, obrázky II, III, VII a XVII sú zo 16. storočia, IV, VIII, IX, XIV, XV a XVIII zo 17. storočia, X a XIII z 18. storočia, XII a XVI z 19. storočia, V, VI a XI z 20. storočia.



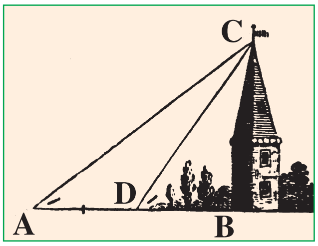
IX



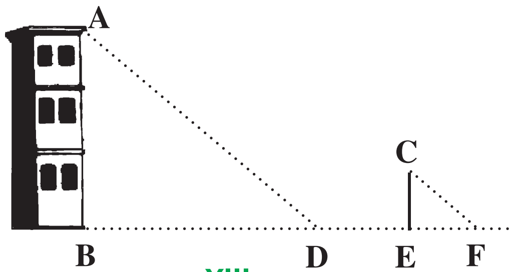
X



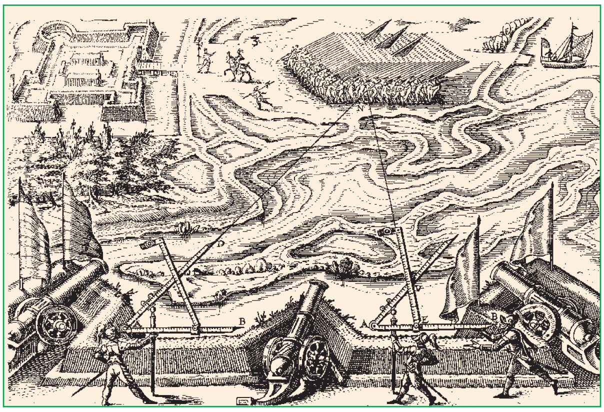
XI



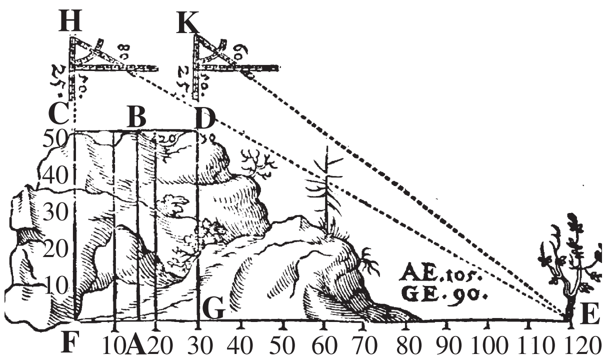
XII



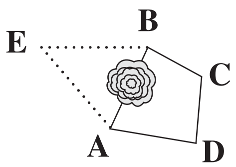
XIII



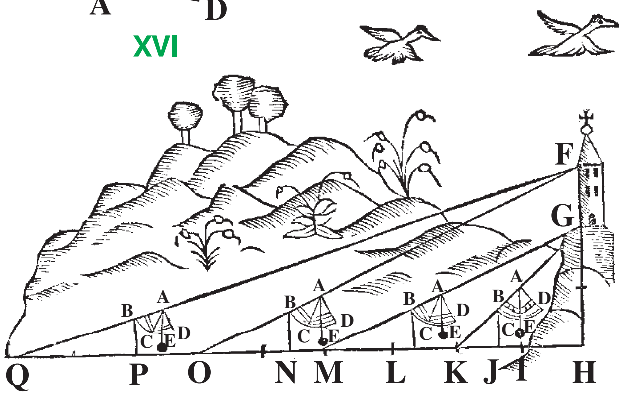
XIV



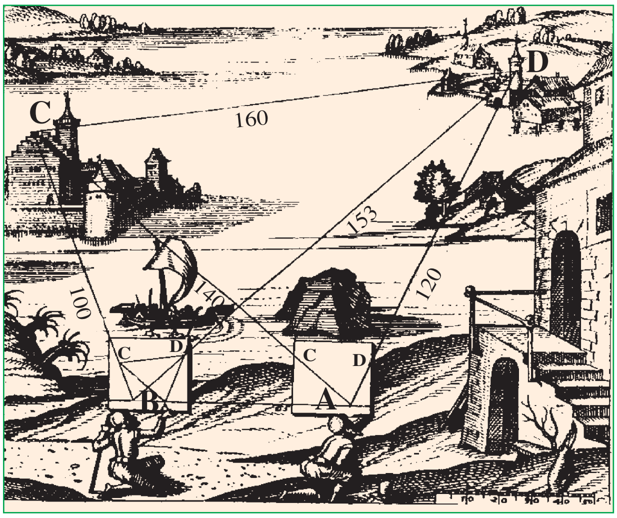
XV



XVI



XVII



XVIII

b) Zvoľte čísla, ktoré by mohli byť odmeranými hodnotami (teda dĺžkami a veľkosťami uhlov) a hľadanú dĺžku zistite rysovaním a/alebo výpočtom.

Ak použijete výpočet, budete vo viacerých príkladoch potrebovať tangens zvoleného uhla. Ak je zvolený uhol „pekný“ (napr. 20°), je jeho tangens spravidla „škaredé“ iracionálne číslo (teda nedá sa zapísať ako podiel dvoch celých čísel). Ak sa v zápisoch vyskytnú takéto „nepekné“ hodnoty, môže to zahmliť myšlienku výpočtu (ktorá býva jednoduchá). V takom prípade odporúčame najprv namiesto „pekných“ uhlov voliť „pekné“ tangensy (napr. namiesto uhla $\alpha = 20°$ s tangensom 0,363 970 234 266 202... zvoliť $\tan \alpha = 0{,}3$) a vypočítať úlohu s nimi. Až potom, keď je postup výpočtu jasný, počítajte aj s „nepeknými“ hodnotami.

Návrhy možných „pekných“ hodnôt pre obrázky IV, XII, XV a XVII uvádzame v tabuľke:

OBRÁZOK	
IV	$\lvert DC\rvert = 110$ *(stôp)*, $\tan(\sphericalangle ADC) = \frac{22}{40}$, $\tan(\sphericalangle BDC) = \frac{29}{40}$, *(teda trojuholník ADC je podobný pravouhlému trojuholníku so zvislou odvesnou 22 a vodorovnou odvesnou 40, podobne možno opísať hodnotu* $\tan(\sphericalangle BDC)$ *)*
XII	$\lvert AD\rvert = 20$ *(krokov)*, $\tan(\sphericalangle CAB) = \frac{3}{7}$, $\tan(\sphericalangle CDE) = \frac{3}{5}$
XV	$\lvert HK\rvert = 30$ *(krokov)*, $\tan(\sphericalangle EKG) = \frac{6}{5}$, $\tan(\sphericalangle EHF) = \frac{8}{5}$
XVII	$\lvert QO\rvert = 75$ *(krokov)*, $\tan(\sphericalangle FQH) = \frac{5}{13}$, $\tan(\sphericalangle FOH) = \frac{5}{8}$ $\lvert MK\rvert = 30$ *(krokov)*, $\tan(\sphericalangle GMH) = \frac{36}{50}$, $\tan(\sphericalangle GKH) = \frac{36}{32}$

c) K niektorým obrázkom máme ešte doplňujúce otázky:
- Z údajov, ktoré treba odmerať na obr. XIII, sa dá zistiť uhol, pod ktorým dopadajú slnečné lúče. Ako?
- Postup naznačený na obr. XVII sa dá zjednodušiť tak, aby namiesto dvoch dĺžok stačilo odmerať iba jednu. Opíšte tento zjednodušený postup.

Na obr. XVIII je znázornená myšlienka mapovania pomocou meračského stola. Na papier položený na vodorovnej doske vyznačíme dva body, ktorých polohu a vzdialenosť poznáme (na obr. XVIII sú to body A, B). Potom z týchto bodov narysujeme priamky smerom na body, ktorých polohu chceme zistiť (body C, D). Priesečníky týchto priamok sú hľadané obrazy bodov.

RIEŠENIE ÚLOHY 11.X

Problém ...

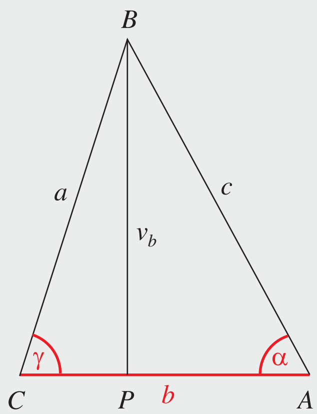
Stojíme na jednom brehu rieky, chceme zistiť vzdialenosť k nejakému bodu na neprístupnom druhom brehu (na obrázku je to kostol B). Môžeme použiť meranie vzdialeností (napr. krokovaním alebo pásmom) a uhlov (napr. buzolou alebo improvizovaným meračským stolom).

... a jeho riešenie

Zvolíme na našom brehu dva body C, A – tak vznikne trojuholník ABC.

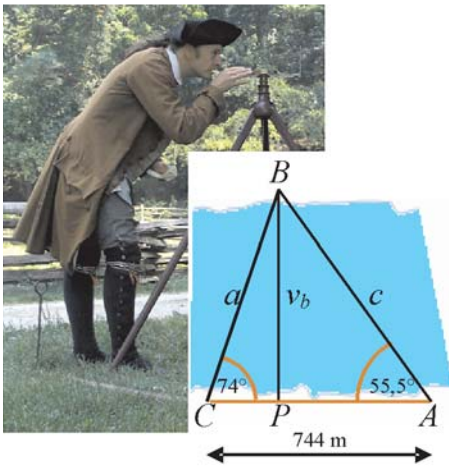
Zmeriame vzdialenosť $b = \lvert CA\rvert$ a veľkosti uhlov α, γ. Týmito údajmi (na obrázku sú zvýraznené červenou) je trojuholník ABC jednoznačne určený. Teraz máme na výber z dvoch možností:

1. *Rysovanie*: trojuholník narysujeme vo vhodnej mierke a hľadanú vzdialenosť odmeriame na obrázku (ak sme používali improvizovaný meračský stôl, máme už trojuholník narysovaný, stačí merať),
2. *Výpočet*: z nameraných údajov hľadanú vzdialenosť vypočítame (výpočet je opísaný v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky).

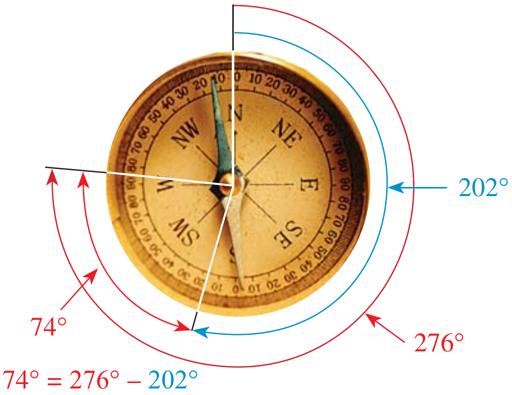


ÚDAJE CLARKOVHO MERANIA SME PRISPÔSOBILI ZÁPISOM A JEDNOTKÁM POUŽÍVANÝM V DNEŠNEJ DOBE.

Konkrétny príklad
Ukážme tento postup na príklade. Ide o meranie šírky rieky Columbia, ktoré počas expedície v rokoch 1804 – 1806 (tá skúmala nezmapované západné časti Severnej Ameriky), uskutočnil jeden z jej vodcov William Clark.



Obr. 3 a)



Obr. 3 b)
Ako našiel Clark uhol γ = 74°:
z bodu C zmeral buzolou azimuty na bod A – ten bol 276° – a na bod B – ten bol 202°.

Postup merania: Clark stál na jednom brehu rieky (bod *C*). Zvolil nejaký dobre viditeľný a rozoznateľný bod – osamelý strom, skalu a pod. – na náprotivnom brehu Columbie (bod *B*) a nejaký dobre rozoznateľný bod na rovnakom brehu, kde stál (bod *A*). Odmeral vzdialenosť *CA*, z bodu *C* zmeral uhol medzi bodmi *A* a *B* (uhol γ), z bodu *A* uhol medzi *C* a *B* (uhol α). Dostal hodnoty
$b = 744$ m, $\gamma = 74°$, $\alpha = 55{,}5°$.
(pozri obr. 3 a). Za hľadanú šírku rieky možno považovať výšku na stranu *b* v trojuholníku *ABC*.

Rysovanie trojuholníka *ABC* na základe týchto údajov a meranie šírky z narysovaného obrázka prenechávame na vás (presnosť svojho rysovania skontrolujte porovnaním s výsledkom, ktorý dostaneme výpočtom).

Ak poznáme sínusovú vetu, môžeme z nameraných údajov šírku rieky vypočítať. V ľavom stĺpci uvádzame všeobecný opis, v pravom výpočty s hodnotami, ktoré nameral Clark.

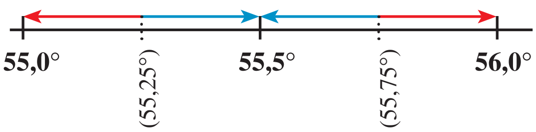
Výpočet má dva kroky:	*pre hodnoty* $b = 744$ m, $\gamma = 74°$, $\alpha = 55{,}5°$
• najprv nájdeme dĺžku jednej zo strán *a, c* (my budeme počítať *a*) Podľa sínusovej vety $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, odtiaľ $a = b \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (*)	veľkosť uhla β: $\beta = 180° - \alpha - \gamma =$ $= 180° - 55{,}5° - 74° = 50{,}5°$ $a \cdot \sin 50{,}5° = 744 \cdot \sin 55{,}5°$, odtiaľ $a = 744 \cdot \dfrac{\sin 55{,}5°}{\sin 50{,}5°} =$ $= 744 \cdot \dfrac{0{,}824\ldots}{0{,}771\ldots} = 794{,}6\ldots$.
KEBY NÁS ZAUJÍMALA IBA VZDIALENOSŤ BODOV *C* A *B*, TAK VÝPOČET MÔŽEME SKONČIŤ NA TOMTO MIESTE.	
• keď už poznáme *a*, tak výšku v_b vypočítame z pravouhlého trojuholníka *BPC* $\dfrac{v_b}{a} = \sin\gamma$, odtiaľ $v_b = a \cdot \sin\gamma$ Ak za *c* dosadíme hodnotu, ktorú sme vypočítali v (*), dostaneme vzorec na výpočet výšky v tvare $v_b = b \cdot \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$.	$\dfrac{v_b}{794{,}6\ldots} = \sin 74°$, odtiaľ $v_b = 794{,}6\ldots \cdot \sin 74° =$ $= 794{,}6\ldots \cdot 0{,}961\ldots =$ $= 763{,}8\ldots \approx 760$.

Počet platných číslic vo výsledku

Všimnime si ešte zaokrúhlenie výsledku na konci výpočtu v pravom stĺpci tabuľky. Z toho, ako sme zapísali namerané hodnoty b, γ a α, možno predpokladať, že

- vzdialenosť je meraná s presnosťou na celé metre, teda hodnota $b = 744$ m má tri platné cifry,
- uhly sú merané s presnosťou na pol stupňa (možno tak usúdiť podľa hodnoty $\alpha = 55{,}5°$), preto v ich sínusoch môžeme pokladať za platné cifry na mieste desatín a stotín, to sú v tomto prípade dve platné cifry (pozri riešenie úlohy 7 c) na s. 88).

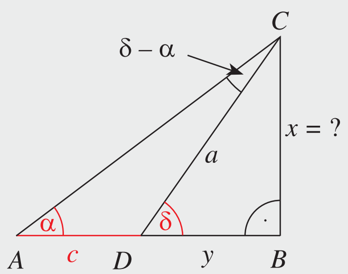
Podľa zjednodušených pravidiel na počítanie s približnými číslami („počet platných číslic súčinu alebo podielu určuje člen s najmenším počtom platných číslic“) treba výsledok zaokrúhliť na dve platné cifry.
Šírka rieky je teda približne 760 m.



Obr. 4
Meranie s presnosťou na pol stupňa si môžeme predstaviť takto: Susedné hodnoty na stupnici uhlomeru sa líšia o 0,5°.
Ak nameraná hodnota padne medzi dve hodnoty stupnice, tak ju zaokrúhlime na tú z nich, ku ktorej je bližšie. Chyba, ktorej sa takýmto zaokrúhlením dopustíme, nebude väčšia ako polovica vzdialenosti medzi dvoma susednými hodnotami stupnice, t. j. 0,25°.

RIEŠENIE ÚLOHY 11.XII

Hľadá sa výška BC veže (pozri obr. 5), pričom nemožno použiť postup z riešenia úlohy 11.III. Nedokážeme totiž odmerať vzdialenosť AB, pretože bod B je neprístupný. Zmeriame vzdialenosť $c = |AD|$ a veľkosti uhlov $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\delta = \sphericalangle CDB$. Hodnotami c, α, δ je trojuholník ADC jednoznačne určený, preto ho môžeme vo vhodnej mierke narysovať a meraním zistiť výšku CB na stranu c.



Obr. 5

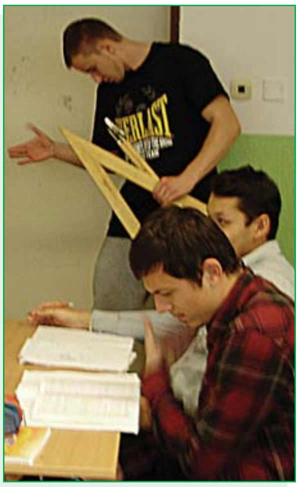
Ak chceme výšku BC vypočítať, môžeme postupovať rovnako ako v riešení úlohy 11.X: vypočítame veľkosť uhla ACD (tá je $\delta - \alpha$, prečo?), zo sínusovej vety nájdeme dĺžku a, z pravouhlého trojuholníka DBC potom vypočítame x

$$x = a \cdot \sin\delta = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\delta}{\sin(\delta - \alpha)}.$$

V tomto prípade existuje aj iná možnosť výpočtu (vľavo je všeobecný výpočet – červená farba označuje známe hodnoty, vpravo sme pre názornosť zvolili konkrétne – a jednoduché – hodnoty $c = 51$ m, $\tan\delta = 1{,}92$, $\tan\alpha = 0{,}83$):

v pravouhlom trojuholníku BCD platí $\tan\delta = \dfrac{x}{y}$, odtiaľ $x = y \cdot \tan\delta$ (1)	$x = 1{,}92 \cdot y$ (1)
v pravohlom trojuholníku ABC sa $\tan\alpha = \dfrac{x}{y + c}$, odtiaľ $x = (y + c)\tan\alpha = y \cdot \tan\alpha + c \cdot \tan\alpha$ (2)	$x = 0{,}83y + 51 \cdot 0{,}83$, t. j. $x = 0{,}83y + 42{,}33$ (2)

Dostali sme dve rovnice (1), (2) s dvoma neznámymi x, y. Z nich vieme vypočítať hodnotu x.



Aby sme sa „zbavili“ y, tak od rovnice (2) vynásobenej číslom $\tan\delta$ odčítame rovnicu (1) vynásobenú číslom $\tan\alpha$. Dostaneme $x\cdot(\tan\delta-\tan\alpha)=c\cdot\tan\alpha\cdot\tan\delta,$ odtiaľ $x = c\cdot\dfrac{\tan\alpha\cdot\tan\delta}{\tan\delta-\tan\alpha}.$	Aby sme našli x, tak od 1,92-násobku rovnice (2) odčítame 0,83-násobok rovnice (1). Dostaneme $(1{,}92-0{,}83)x = 1{,}92\cdot 42{,}33,$ t. j. $1{,}09x = 81{,}273\,6$ odtiaľ $x=\dfrac{81{,}273\,6}{1{,}09}=74{,}562... \approx 75\text{ m}$ (výsledok sme v súlade so zjednodušenými pravidlami na počítanie s približnými hodnotami zaokrúhlili na dve platné číslice – pretože dve zo vstupných hodnôt majú 2 platné cifry a jedna má 3 platné cifry).

Rovnaký postup by sme mohli použiť aj pri výpočte vzdialenosti AB, vtedy by sme

- v prvom výpočte v pravouhlom trojuholníku DBC namiesto x vypočítali y,
- v druhom výpočte (opísanom v tabuľke) z rovníc (1) a (2) nevyjadrovali x, ale y.

9.3 Počítame obsahy

- Meriame iba strany a výšky
- Počítame obsah nepravidelného útvaru
- V meraniach a výpočtoch sa objavujú aj iné uhly ako pravé

Všetky nasledujúce postupy majú spoločnú základnú myšlienku: daný útvar rozložiť na menšie útvary, ktorých obsah vieme vypočítať. Týmito menšími útvarmi sú spravidla trojuholníky, lichobežníky alebo obdĺžniky (s kruhom a jeho časťami sa v praxi nestretneme veľmi často).

MERIAME IBA STRANY A VÝŠKY

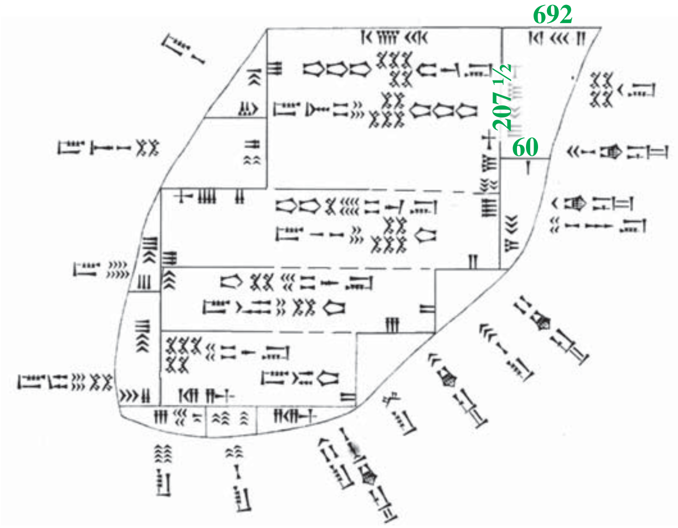
Najjednoduchší prípad – útvar rozdelený na obdĺžniky a pravouhlé trojuholníky alebo lichobežníky – znázorňujú obr. 6 a obr. 7. Na obr. 8 vidíme o niečo všeobecnejšiu situáciu – mierne krivé hranice útvaru nahradíme rovnými a vypočítame obsah „náhradného“ útvaru.

1 viedenská siaha = 1,896 484 m

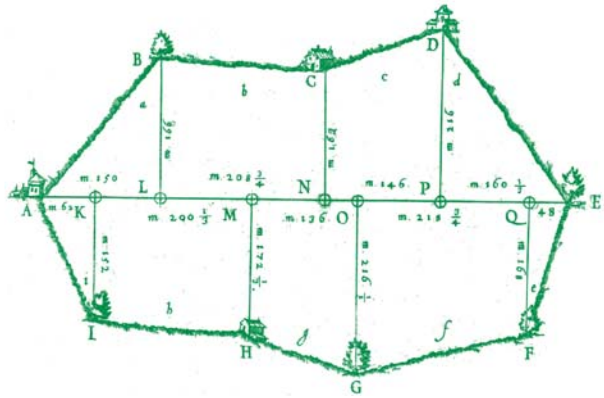
ÚLOHY

12. Odhadnite, akú rozlohu v hektároch má lichobežníková časť pozemku v pravom hornom rohu na obr. 6.

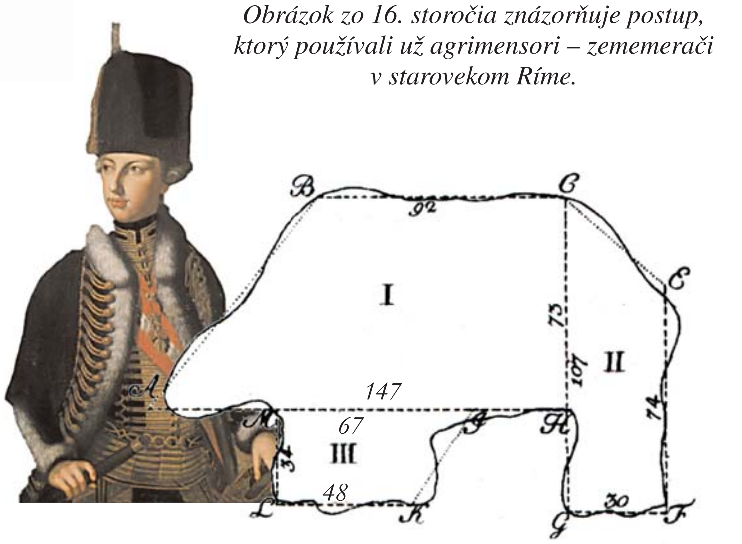
13. Dĺžky na obr. 8 sú vo viedenských siahach. Vypočítajte výmeru zobrazeného pozemku najprv v štvorcových siahach, potom v m^2. Diskutujte o tom, na koľko platných cifier treba zaokrúhliť výsledok vašich výpočtov.



Obr. 6
Plán objavený neďaleko trosiek babylonského mesta Lagaš pochádza asi z 21. st. pred n. l. Pozemok nepravidelného tvaru je rozdelený na časti – trojuholníky, lichobežníky a rovnobežníky, ktoré sú všetky približne pravouhlé. Na plániku sú zaznačené dĺžky a výmera jednotlivých častí. Na druhej strane hlinenej doštičky bola celková výmera pozemku a jej rozdelenie na ornú pôdu, zastavanú plochu a vyššie položený terén. Doplnené čísla sú prepis dĺžok z klinového písma (dĺžkovou jednotkou je 1 gar zodpovedajúci približne 6 metrom).



Obr. 7
Obrázok zo 16. storočia znázorňuje postup, ktorý používali už agrimensori – zememerači v starovekom Ríme.



Obr. 8
V roku 1785 nariadil cisár Jozef II. vymerať pre potreby pozemkovej dane všetky úrodné pozemky v monarchii (pritom sa okrem iného zistilo, že skutočný rozsah úrodnej pôdy bol skoro o polovicu väčší, než dovtedy uvádzali vrchnosti). Väčšie a nepravidelné pozemky vymeriavali geometri, menšie poddanské pozemky jednoduchých tvarov samotní sedliaci pod dozorom vrchnosti. Spôsob merania opisovala inštrukcia, z ktorej je náš obrázok. Vidno na ňom myšlienku vyrovnania mierne zakrivených hraníc pozemku – teda nahradenie zakrivenej hranice úsečkou tak, aby sa počítaná výmera pokiaľ možno nezmenila.

RIEŠENIE ÚLOHY 13

Výpočet obsahu v štvorcových siahach

Celkovú výmeru pozemku nájdeme ako súčet obsahov častí I, II a III.

Časť I daného pozemku má tvar pravouhlého lichobežníka so základňami $a = 147$ (siah), $c = 92$ (siah) a výškou $v = 73$ (siah). Ak tieto hodnoty dosadíme do vzorca $P = \frac{a + c}{2} \cdot v$, dostaneme

$$P = \frac{\overset{= 239}{147 + 92}}{2} \cdot 73 = \underset{= 119{,}5}{\frac{239}{2}} \cdot 73 = 119{,}5 \cdot 73 = 8\,723{,}5 \text{ (štvorcových siah).} \qquad (*)$$

Zaujíma nás, koľko platných číslic má získaný výsledok – číslo 8 723,5. Pomôžu nám zjednodušené pravidlá na počítanie s približnými hodnotami – použijeme ich postupne v rovnakom poradí, ako sme robili jednotlivé výpočty v (*).

$\underbrace{147 + 92}_{\text{sčítance poznáme s presnosťou na jednotky}} = \underbrace{239}_{\text{preto aj súčet uvádzame s presnosťou na jednotky}}$	Dĺžky $a = 147$, $c = 92$ sú zmerané s presnosťou na celé siahy. Obidva sčítance teda poznáme s presnosťou na jednotky, preto – podľa pravidla „presnosť súčtu určuje najmenej presný člen“ – môžeme predpokladať, že aj ich súčet 239 poznáme s presnosťou na jednotky. Za platné v čísle 239 preto pokladáme číslice na miestach jednotiek a vľavo od nich. V prípade čísla 239 sú to tri platné číslice.
$\underbrace{239}_{\text{toto číslo má 3 platné cifry}} : \underbrace{2{,}000\,000\ldots}_{\text{toto číslo je presné (ľubovoľný počet cifier je platný)}} = \underbrace{119}_{\text{výsledok má 3 platné cifry}}{,}5$	Číslo 239 má tri platné číslice, deliteľ 2 je presná hodnota, má teda ľubovoľný počet platných číslic (to sme vo vedľajšom stĺpci vyjadrili zápisom čísla 2 v tvare 2,000 000...). Z čísel 239 a 2 má menší počet platných číslic (tri) číslo 239, preto – podľa pravidla „počet platných číslic podielu určuje člen s najmenším počtom platných číslic“ – podiel má 3 platné číslice.
$\underbrace{119{,}5}_{\text{toto číslo má 3 platné cifry}} \cdot \underbrace{73}_{\text{toto číslo má 2 platné cifry}} = \underbrace{8\,723{,}5}_{\text{súčin má 2 platné cifry}}$	V súčine 119,5 · 73 má prvý činiteľ 3 platné cifry, druhý 2 platné cifry (výška $v = 73$ je zmeraná s presnosťou na celé siahy, v čísle 73 sú teda platné číslice na miestach jednotiek a vľavo od nich). Podľa pravidla „počet platných číslic súčinu určuje člen s najmenším počtom platných číslic“ má súčin 8 723,5 dve platné cifry.

Keby sme chceli vypočítať iba obsah časti I pozemku, zaokrúhlili by sme získaný výsledok na zistený počet platných cifier – v tomto prípade na 2 – a dostali by sme konečný výsledok 8 700 štvorcových siah. V tomto prípade však číslo 8 723,5 nie je konečný výsledok, ale iba medzivýsledok nášho výpočtu (budeme ho ešte používať v ďalších výpočtoch), preto ho nezaokrúhľujeme.

Rovnakým postupom dostaneme

- pri výpočte obsahu časti II výsledok

$$\frac{107 + 74}{2} \cdot 30 = \mathbf{2\,7}15 \text{ (štvorcových siah),}$$

  v ktorom sú 2 platné cifry,

- pri výpočte obsahu časti III výsledok

$$\frac{67 + 48}{2} \cdot 34 = \mathbf{1\,9}55 \text{ (štvorcových siah)}$$

  tiež s dvoma platnými ciframi.

Tieto tri čísla treba sčítať. Aby sme vedeli určiť presnosť súčtu, potrebujeme poznať presnosť sčítancov:

- Číslo **8 7**23,5 má dve platné cifry, tie zodpovedajú miestam tisícov a stoviek. To znamená, že toto číslo poznáme s presnosťou na stovky.
- Rovnako aj čísla **2 7**15 a **1 9**55 poznáme s presnosťou na stovky.

Podľa pravidla „presnosť súčtu určuje najmenej presný člen“ môžeme potom predpokladať, že aj súčet poznáme s presnosťou na stovky. Preto výsledok zaokrúhlime na stovky:

$$\mathbf{8\,7}23{,}5 + \mathbf{2\,7}15 + \mathbf{1\,9}55 = \mathbf{13\,3}93{,}5 \approx \mathbf{13\,4}00 \text{ (štvorcových siah)}$$

Pozemok na obr. 8 má výmeru približne 13 400 štvorcových siah.

Výpočet obsahu v m^2

Ak chceme výsledok uviesť v m^2, stačí štvorcové siahy previesť na m^2:
1 siaha = 1,896 484 m, preto

$$1 \text{ štvorcová siaha} = 1{,}896\,484 \text{ m} \times 1{,}896\,484 \text{ m} = 3{,}596\,651\,562\,256 \text{ m}^2 \qquad (*)$$

Vo výpočte (*) pracujeme s číslom 1,896 484 ako s približnou hodnotou (so 7 platnými ciframi), preto v čísle 3,596 651 562 256 pokladáme – podľa pravidla *počet platných číslic súčinu určuje člen s najmenším počtom platných číslic* – za platných prvých 7 číslic. Keby bola 1,896 484 presná hodnota, boli by v čísle 3,596 651 562 256 platné všetky cifry. Tento rozdiel – či je v čísle 3,596 651 562 256 platných 7 alebo všetkých 13 cifier – je v tomto prípade nepodstatný, pretože v ďalšom výpočte budeme toto číslo násobiť číslom 13 393,5, v ktorom je počet platných cifier (tri) menší ako 13 aj ako 7.

Potom výmera pozemku v m^2 bude

$$\underbrace{13\,393{,}5}_{\substack{\text{výmera}\\ \text{v štvorcových}\\ \text{siahach}}} \cdot \underbrace{3{,}596\,651\,562\,265}_{\substack{\text{1 štvorcová siaha}\\ \text{vyjadrená v m}^2}} = 48\,171{,}752\,699\,075\,736 \approx 48\,200 \ (\text{m}^2) \qquad (**)$$

(výsledok sme zaokrúhlili na 3 platné cifry, pretože prvý činiteľ má 3 a druhý 7 platných cifier a menšie z týchto dvoch čísel je číslo 3).

Poznámka:
Možno vám napadol odlišný spôsob výpočtu obsahu v m^2: najprv previesť všetky dĺžky zo siah na metre a potom počítať obsah pomocou dĺžok v metroch. V porovnaní s predchádzajúcim postupom tento výpočet vyžaduje viac násobení, vidno to z jeho zápisu (v riadkoch pod sebou sú postupne výpočty obsahu častí I, II a III, nepokračujte ďalej, kým si nebudete istí, že zapísanému výpočtu rozumiete):

$$\begin{aligned} &\frac{147 \cdot 1{,}896\,484 + 92 \cdot 1{,}896\,484}{2} \cdot 73 \cdot 1{,}896\,484 + \\ &+ \frac{107 \cdot 1{,}896\,484 + 74 \cdot 1{,}896\,484}{2} \cdot 30 \cdot 1{,}896\,484 + \qquad (***) \\ &+ \frac{67 \cdot 1{,}896\,484 + 48 \cdot 1{,}896\,484}{2} \cdot 34 \cdot 1{,}896\,484 \end{aligned}$$

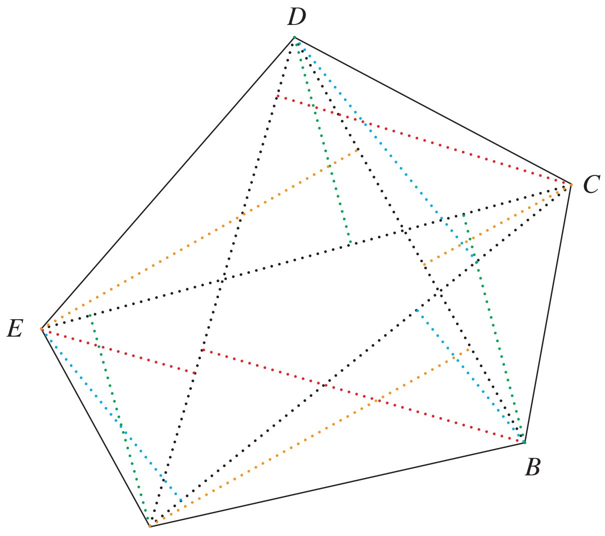
Tento zápis možno jednoducho upraviť tak, aby bolo vidno, že výsledky výpočtov (**) a (***) sú rovnaké. Stačí použiť opakované vynímanie čísla 1,896 484 *pred zátvorku:*

$$\frac{(147+92)\cdot 1{,}896\,484}{2} \cdot 73 \cdot 1{,}896\,484 + \frac{(107+74)\cdot 1{,}896\,484}{2} \cdot 30 \cdot 1{,}896\,484 + \frac{(67+48)\cdot 1{,}896\,484}{2} \cdot 34 \cdot 1{,}896\,484 =$$

$$= \frac{(147+92)}{2} \cdot 73 \cdot 1{,}896\,484 \cdot 1{,}896\,484 + \frac{(107+74)}{2} \cdot 30 \cdot 1{,}896\,484 \cdot 1{,}896\,484 + \frac{(67+48)}{2} \cdot 34 \cdot 1{,}896\,484 \cdot 1{,}896\,484 =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{(147+92)}{2} \cdot 73 + \frac{(107+74)}{2} \cdot 30 + \frac{(67+48)}{2} \cdot 34\right]}_{\text{výmera v štvorcových siahach}} \cdot \underbrace{1{,}896\,484 \cdot 1{,}896\,484}_{\substack{\text{1 štvorcová siaha}\\ \text{vyjadrená v m}^2}}$$

ÚLOHA



Obr. 9

14. a) Postup znázornený na obr. 7 na s. 97 použite na výpočet obsahu päťuholníka *ABCDE* na obr. 9 (v cm^2).

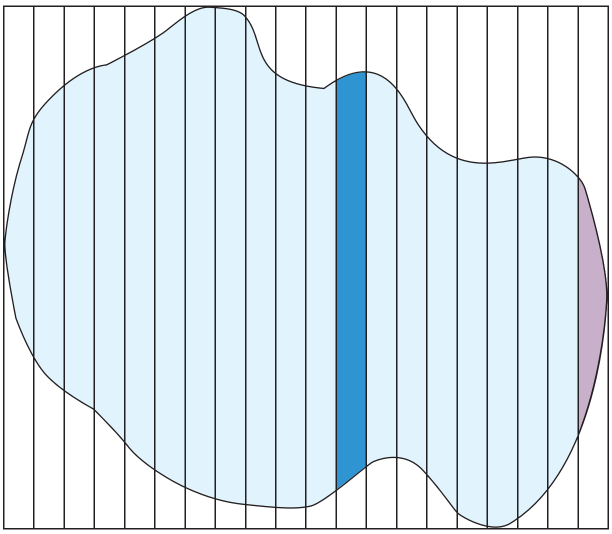
b) Diskutujte o tom, akú presnosť bude mať získaný výsledok.

c) Navrhnite (a realizujte) nejaký iný postup výpočtu obsahu tohto päťuholníka, pri ktorom možno využiť meranie niektorých dĺžok vyznačených na obrázku.

d) Akú výmeru v m^2 má pozemok, ak päťuholník z obr. 9 je jeho plánom v mierke

• 1 : 1 000 • 1 : 2 500 • 1 : 5 000 ?

Aby ste mohli merať priamo na obrázku v učebnici, vyznačili sme bodkovane štyri uhlopriečky a kolmice na ne. Ktoré dĺžky zmeriate a ako pomocou nich vypočítate obsah päťuholníka, je už iba na vás.


Obr. 10 a)

a) Pozemok nepravidelného tvaru rozdelíme na pláne na úzke pruhy rovnakej šírky, vzniknú tak „krivočiare lichobežníky“(ich základne sú úsečky, ramenami sú krivky). Jeden takýto lichobežník je na obrázku vyfarbený tmavomodro.

V našom prípade v dvoch krajných pruhoch vznikli „krivočiare trojuholníky“, jeden sme vyznačili fialovo. V nasledujúcich úvahách budeme trojuholník pokladať za špeciálny prípad lichobežníka, v ktorom jedna základňa má dĺžku 0 – namiesto úsečky ju tvorí iba jeden bod.

POČÍTAME OBSAH NEPRAVIDELNÉHO ÚTVARU

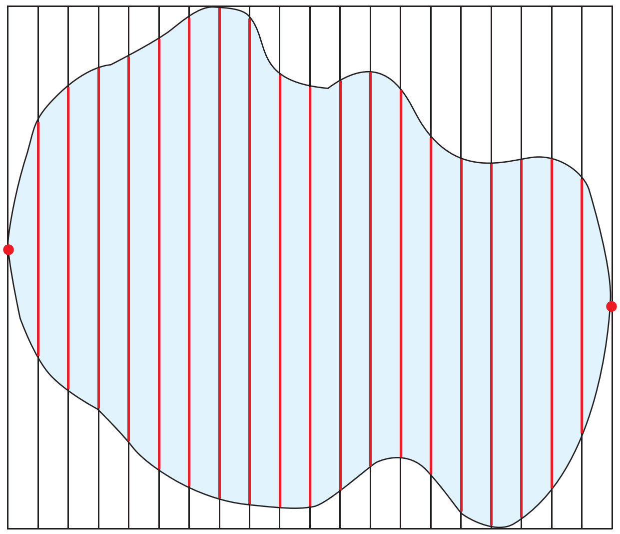
V nasledujúcich úlohách ukážeme, ako v 19. a 20. storočí zisťovali zememerači výmeru pozemkov nepravidelného tvaru. Z dvoch veľmi podobných postupov začneme tým menej používaným.

ÚLOHA

15. Skontrolujte, či je postup výpočtu opísaný na obr. 10 a), b) a c) jasný (napr. vašim spolužiakom).

Vzorec na výpočet obsahu pomocou tejto metódy odvodíme v úlohe 17. Predtým sa však uistíme, že vzorce na výpočet obsahu trojuholníka a lichobežníka sú v súlade s poznámkou pod obr. 10 a) – že na trojuholník možno pozerať ako na špeciálny prípad lichobežníka.

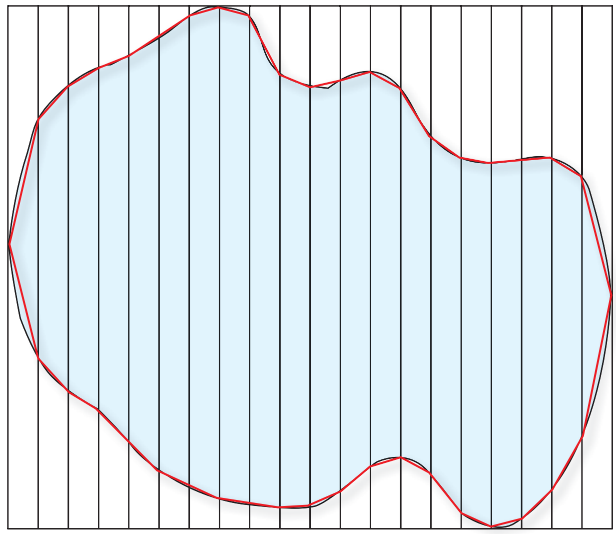
„Trojuholník ako špeciálny prípad lichobežníka“ je v súlade s geometrickou predstavou: ak v lichobežníku budeme dĺžku jednej zo základní skracovať k nule (pričom druhá základňa sa nebude meniť), bude sa lichobežník, ktorý tak dostaneme, stále viac podobať trojuholníku, ktorého jedna strana je neskracovaná základňa pôvodného lichobežníka a výška na túto stranu je rovnaká ako výška pôvodného lichobežníka (nakreslite si obrázok a diskutujte o tom).



Obr. 10 b)

b) Zmeriame dĺžky základní týchto krivočiarych lichobežníkov (červené úsečky na obrázku).

Dve z týchto základní – označené bodkou – majú v našom prípade dĺžku 0 – sú to základne tých špeciálnych lichobežníkov, ktoré sú krivočiarymi trojuholníkmi.



Obr. 10 c)

c) Obsah každého krivočiareho lichobežníka odhadneme tak, že vypočítame obsah skutočného lichobežníka, ktorý sa s tým krivočiarym zhoduje vo výške aj v dĺžke obidvoch základní. Tento skutočný lichobežník dostaneme, ak krivky tvoriace ramená krivočiareho lichobežníka nahradíme úsečkami (na obrázku sú tieto úsečky červené). Rozdiel medzi obsahom krivočiareho a skutočného lichobežníka je v našom prípade prakticky zanedbateľný.

ÚLOHA

16. Skontrolujte, že ak – v súlade s predstavou, že trojuholník je špeciálny prípad lichobežníka, v ktorom jedna základňa má dĺžku 0 – na výpočet obsahu trojuholníka použijeme vzorec na výpočet obsahu lichobežníka, dostaneme správny výsledok.

Z úlohy 16 vyplýva, že pri výpočte obsahov v opísanom postupe netreba rozlišovať, či pracujeme s trojuholníkmi alebo lichobežníkmi – v obidvoch prípadoch môžeme použiť vzorec na výpočet obsahu lichobežníka.

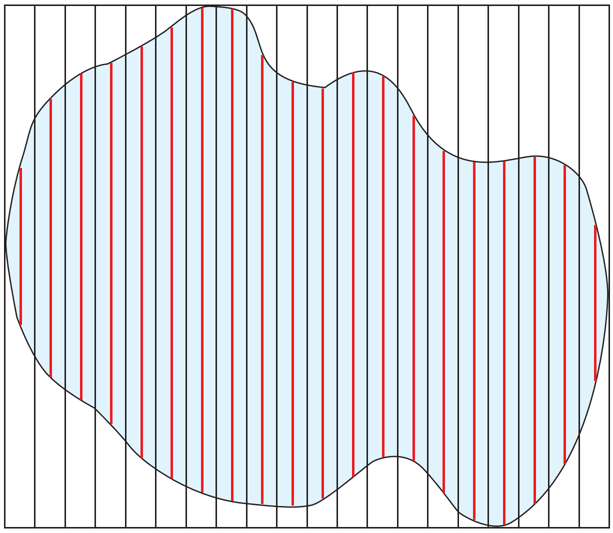
ÚLOHY

17. Ak meraný útvar rozdelíme na 20 pásov šírky h (tak, ako na obr. 10), dostaneme 21 dĺžok základní „krivočiarych lichobežníkov“, označme ich z_0, z_1, z_2, ..., z_{20}. Napíšte vzorec na výpočet obsahu nepravidelného útvaru, ktorý vyplýva z textu k obr. 10.

18. Vypočítajte uvedeným spôsobom obsah útvaru na obr. 10 a). Šírka pásu je v našom prípade $h = 4$ mm. Pri diskusii o presnosti získaného výsledku pokladajte šírku pásu za presnú hodnotu (v praxi bola jej veľkosť nastavená na meracom zariadení, pozri obr. 11).

Obr. 11

Na rozdelenie plochy pozemku na mape na úzke pruhy slúžila špeciálna pomôcka – nitkový planimeter. Je to rám, v ktorom boli v rovnakých rozostupoch napäté tenké vlákna. Rám sa položil na mapu a odpichovátkom (kružidlo s dvoma hrotmi) sa merali potrebné dĺžky – buď základne, alebo stredné priečky jednotlivých lichobežníkov.



Obr. 12
Zmeriame stredné priečky krivočiarych lichobežníkov (červené úsečky na obrázku, stredná priečka je rovnobežná so základňami a má od obidvoch rovnakú vzdialenosť, teda leží „v strede“ medzi nimi, jej krajné body ležia na krivkách, ktoré sú ramenami krivočiareho lichobežníka). Tieto dĺžky a známu šírku pruhu použijeme pri výpočte obsahu útvaru.

Pri druhom – častejšom – spôsobe výpočtu sa obsah krivočiareho lichobežníka odhadol inak: vypočítal sa obsah skutočného lichobežníka, ktorý sa s ním zhodoval dĺžkou strednej priečky a výškou, pozri obr. 12.

Vzorec na výpočet obsahu pomocou tejto metódy odvodíme v úlohe 21. Predtým sa v úlohách 19 a 20 pozrieme na vzorce na výpočet obsahu lichobežníka a trojuholníka.

ÚLOHY

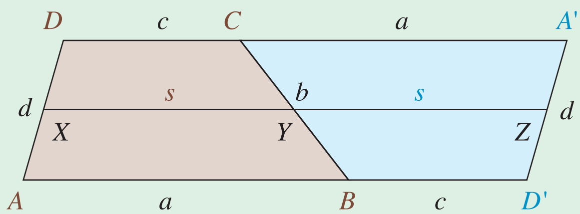
19. Skontrolujte, že vzorec na výpočet obsahu lichobežníka možno zapísať v tvare

$$\text{obsah} = \text{stredná priečka} \cdot \text{výška} \qquad (*)$$

Pripomeňme, že strednú priečku lichobežníka možno opísať dvoma rovnocennými spôsobmi:
- je to úsečka, ktorej krajnými bodmi sú stredy ramien lichobežníka,
- je to úsečka, ktorá je rovnobežná so základňami lichobežníka, má od obidvoch rovnakú vzdialenosť a jej krajné body ležia na ramenách lichobežníka.

Obidva tieto opisy sa nám budú hodiť pri riešení úlohy 19 (z druhého z nich vidno súvis medzi strednou priečkou krivočiareho a skutočného lichobežníka, pozri text k obr. 12).

Pri zdôvodňovaní si môžete pomôcť obrázkom 13.



Obr. 13
Hnedý a modrý lichobežník – v obidvoch je vyznačená stredná priečka – sú zhodné, modrý vznikol otočením hnedého o 180°.

20. a) Skontrolujte, že – podobne ako vzorec $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$ v úlohe 16 – aj vzorec (*) v úlohe 19 možno použiť na výpočet obsahu trojuholníka (ak trojuholník pokladáme za špeciálny prípad lichobežníka).
b) Rovnako ako v poznámke na s. 100 diskutujte o geometrickej interpretácii: ako súvisí stredná priečka lichobežníka, v ktorom skracujeme dĺžku jednej z jeho základní k 0, so strednou priečkou trojuholníka, ktorému sa tento lichobežník stále viac podobá? (Pripomeňme, že stredná priečka trojuholníka je spojnica stredov strán trojuholníka.)

21. Napíšte vzorec na výpočet obsahu nepravidelného útvaru, ktorý vyplýva z opisu k obr. 12.

Už na začiatku sme naznačili, že z dvoch opísaných postupov (prvý na obr. 10 b), druhý na obr. 12) zememerači uprednostňovali ten druhý.

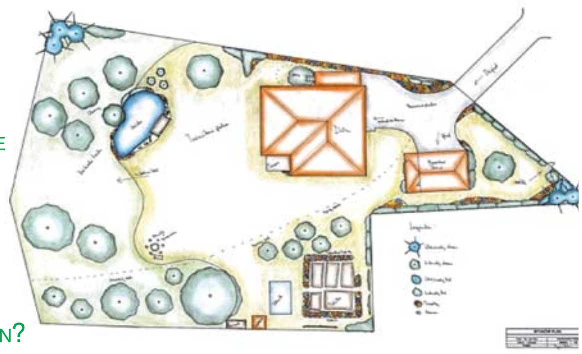
ÚLOHA

22. Porovnajte vzorce z úloh 17 a 21 a diskutujte o tom, prečo druhý z týchto postupov možno pokladať za jednoduchší z hľadiska „automatizácie výpočtu" (pripomeňme, že zememerači museli pri výpočte výmer pozemkov takýchto výpočtov robiť veľké množstvo).

V MERANIACH A VÝPOČTOCH SA OBJAVUJÚ AJ INÉ UHLY AKO PRAVÉ

S postupom „útvar narysujeme vo vhodnej mierke a potom na obrázku odmeriame potrebné údaje" sme sa stretli už v časti o meraní dĺžok (pripomeňte si túto myšlienku, potom čítajte ďalej). Ak chceme takto postupovať aj pri výpočte obsahov, musíme si rozmyslieť, ktoré údaje – dĺžky a uhly – potrebujeme poznať, aby sme vedeli daný útvar narysovať.

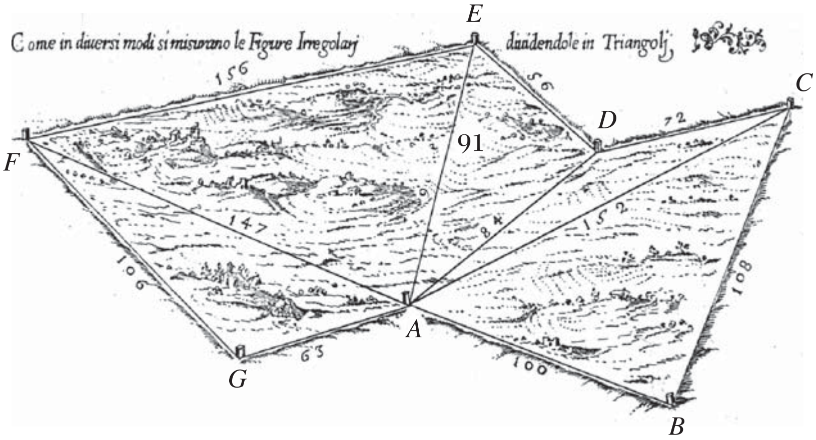
PRED RIEŠENÍM ÚLOHY 23 DISKUTUJTE O ODPOVEDI NA OTÁZKU: AK CHCEME NARYSOVAŤ PLÁNIK ZÁHRADY (NAPR. TAKEJ, AKO JE NA OBRÁZKU), STAČÍ ZMERAŤ IBA DĹŽKY VŠETKÝCH JEJ STRÁN?



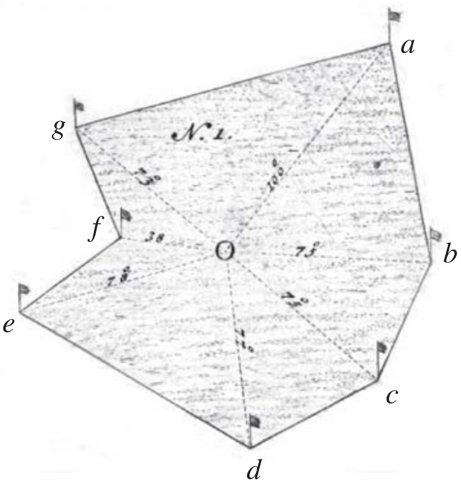
ÚLOHA

23. Päťuholník *ABCDE* z obr. 9 na s. 100 chceme prerysovať do zošita.
a) K dispozícii máme iba nástroje na meranie dĺžok (v našom prípade pravítko). Navrhnite, ktoré rozmery päťuholníka treba zmerať, aby ste ho na ich základe vedeli skonštruovať.
b) Môžeme merať dĺžky aj uhly (máme napr. pravítko a uhlomer). Opäť navrhnite, ktoré dĺžky a ktoré uhly treba odmerať, aby ste pomocou nich vedeli päťuholník skonštruovať.

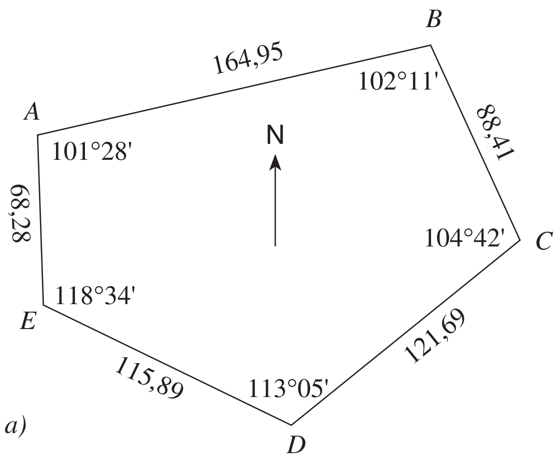
Odporúčame, aby ste svoje návrhy aj realizovali (teda na základe zmeraných údajov daný päťuholník narysovali) – je to najlepšia a najjednoduchšia kontrola správnosti navrhovaného postupu.



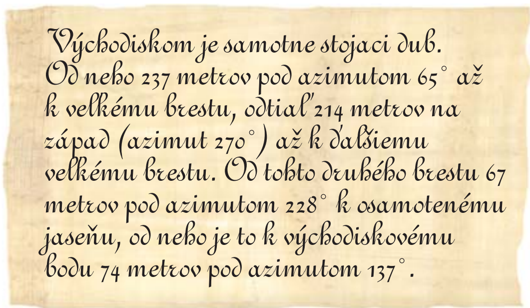
Obr. 14
Opis merania pozemku v knihe z konca 16. storočia.



Obr. 15
Obrázok z učebnice z polovice 18. storočia. Zaznamenané sú dĺžky strán a veľkosti uhlov pri bode O. Zmerané uhly a dĺžky majú tieto veľkosti: aOb – 56°, aOc – 95°, aOd – 136°, aOe – 145°, aOf – 119°, aOg – 85°, Oa – 100, Ob – 75, Oc – 75, Od – 77, Oe – 78, Of – 38, Og – 73.



a)


Východiskom je samotne stojaci dub. Od neho 237 metrov pod azimutom 65° až k veľkému brestu, odtiaľ 214 metrov na západ (azimut 270°) až k ďalšiemu veľkému brestu. Od tohto druhého brestu 67 metrov pod azimutom 228° k osamotenému jaseňu, od neho je to k východiskovému bodu 74 metrov pod azimutom 137°.

b)

Obr. 16
Opis mnohouholníka pomocou dĺžok jeho strán a veľkostí vnútorných uhlov. Podobný postup – nazývaný metes and bounds – sa používal pri opise pozemkov v Anglicku, odtiaľ ho prevzalo trinásť kolónií, z ktorých neskôr vznikli Spojené štáty americké. Na určenie vrcholov mnohouholníka slúžili orientačné body – napr. strom, ústie potoka a pod., namiesto vnútorných uhlov sa udával azimut od jedného vrchola k nasledujúcemu. Typický príklad takého opisu je na obr. 16 b).

Predpokladáme, že pri riešení úlohy 23 ste navrhli aj niektoré z postupov znázornených na obrázkoch 14 až 16. Rozdiel bol asi len v opise uhlov (ten závisí od toho, aké nástroje a aký postup používame na meranie uhlov).

V texte na obr. 16 b) sú namiesto veľkostí vnútorných uhlov uvedené veľkosti azimutov (na meranie uhlov sa použila buzola). Na obr. 15 nie sú veľkosti vnútorných uhlov pri vrchole O v jednotlivých trojuholníkoch, ale odklon polpriamok Ob až Og od polpriamky Oa.

V úlohe 24 sa presvedčíme, že z údajov o uhloch na obr. 15 vieme zistiť veľkosti vnútorných uhlov pri vrchole O v jednotlivých trojuholníkoch. Podobne v úlohe 25 nájdeme veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka opísaného na obr. 16 b).

ÚLOHY

24. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov pri vrchole O v jednotlivých trojuholníkoch na obr. 15.

25. a) Narysujte vo vhodnej mierke štvoruholník opísaný na obr. 16 b) (príklad opisu *metes and bounds*). Jeho vrcholy označte A (dub), B (prvý brest), C (druhý brest), D (jaseň).
b) Z údajov o azimutoch vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov v štvoruholníku $ABCD$. Správnosť výpočtu skontrolujte na narysovanom štvoruholníku.

Poznámka: Cieľom úlohy 25 b) nie je objaviť všeobecný vzorec prevádzajúci azimuty na veľkosti vnútorných uhlov, a potom ho použiť s konkrétnymi číslami pri vrcholoch A, B, C, D (ak však taký vzorec objavíte, budeme len radi). Ide len o prácu s konkrétnymi uhlami a rozmýšľanie o ich vzájomných vzťahoch.

OBRÁZOK NARYSUJTE ČO NAJVÄČŠÍ, VYUŽIJETE HO EŠTE V ÚLOHE 26.

Po krátkej odbočke o rôznych spôsoboch určenia uhlov sa môžeme vrátiť k výpočtu obsahov. Podobne ako pri meraní dĺžok (porovnaj s textom za úlohou 10 na s. 90), máme na výber z dvoch možností:
- daný útvar skonštruujeme vo vhodnej mierke a údaje potrebné na výpočet obsahu odmeriame na narysovanom obrázku,
- obsah vypočítame (pri výpočte pritom použijeme tie údaje, ktoré by sme v postupe z predchádzajúcej odrážky použili na konštrukciu daného útvaru).

Začneme prvou z uvedených možností.

ÚLOHA

26. Na základe merania na obrázku, ktorý ste rysovali v úlohe 25, vypočítajte obsah štvoruholníka opísaného na obr. 16 b).

V ÚLOHE 28 NÁJDEME OBSAH TOHTO ŠTVORUHOLNÍKA VÝPOČTOM.

Teraz sa sústredíme na druhý z uvedených postupov – výpočet. V úlohách 27 a 28 využijeme vzorec na výpočet obsahu trojuholníka, v ktorom poznáme dve strany a uhol nimi zovretý. Ak sú to napr. strany a, b a uhol γ, má vzorec tvar $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$ (pripomeňte si vzorec aj jeho odvodenie).

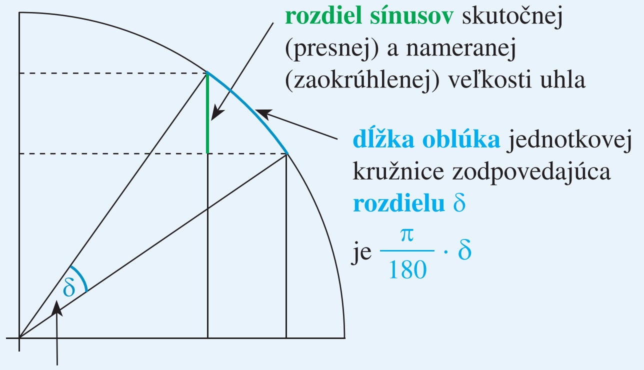
V NASLEDUJÚCICH ÚLOHÁCH SI PREVERÍTE, ČI DOKÁŽETE ZORGANIZOVAŤ VÝPOČET ZLOŽENÝ Z VÄČŠIEHO POČTU KROKOV A VIETE NAŇ EFEKTÍVNE POUŽIŤ KALKULAČKU ALEBO TABUĽKOVÝ KALKULÁTOR. PRI VÝPOČTOCH, KTORÉ VÁS ČAKAJÚ (TREBA SČÍTAVAŤ VÄČŠÍ POČET ČÍSEL, Z KTORÝCH KAŽDÉ JE SÚČIN, PRIČOM JEDEN Z ČINITELOV JE SÍNUS) JE ĽAHKÉ POMÝLIŤ SA. ODPORÚČAME PRETO DODRŽIAVAŤ ASPOŇ MINIMÁLNE ZÁSADY KONTROLY: KAŽDÝ VÝPOČET UROBIŤ DVAKRÁT. AK SA DRUHÝ VÝSLEDOK NEZHODUJE S PRVÝM, TREBA VÝPOČET ZOPAKOVAŤ.

ÚLOHY

27. Vypočítajte obsah sedemuholníka *abcdefg* na obr. 15.

28. a) Vypočítajte obsah štvoruholníka opísaného na obr. 16 b) (veľkosti jeho vnútorných uhlov ste našli v úlohe 25 b)). Porovnajte výsledok svojho výpočtu s výsledkom úlohy 26.
b) Diskutujte, s akou presnosťou by ste museli poznať dĺžky strán a veľkosti vnútor-

ných uhlov tohto štvoruholníka, ak by ste jeho obsah chceli vypočítať s presnosťou na celé m^2. (Pripomeňte si úvahy o počte platných cifier, ktoré sme robili napr. v riešení úlohy 13 na s. 98 a úvahy o počte platných číslic sínusu, ktoré pripomíname v texte k obr. 17, pozri tiež obr. 1 a 2 na s. 88.)



Obr. 17

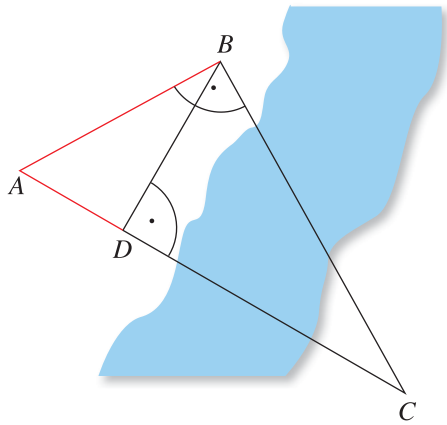
Pripomeňme, že pri meraní uhlov s presnosťou na

- *celé stupne (vtedy $\delta \leq 0{,}5$) sa skutočná a vypočítaná hodnota sínusu líšia nanajvýš o* $\frac{\pi}{180} \cdot 0{,}5 = 0{,}008\,7...$, *preto za platné cifry možno (zhruba) pokladať nenulové čísla po miesto stotín vrátane,*
- *na minúty (vtedy $\delta \leq 0{,}5 \cdot \frac{1}{60}$) je odchýlka nanajvýš* $\frac{\pi}{180} \cdot \left(0{,}5 \cdot \frac{1}{60}\right) = 0{,}000\,14...$, *preto za platné cifry možno pokladať nenulové čísla po miesto tisícin vrátane,*
- *na sekundy (vtedy $\delta \leq 0{,}5 \cdot \frac{1}{60 \cdot 60}$) je odchýlka nanajvýš* $\frac{\pi}{180} \cdot \left(0{,}5 \cdot \frac{1}{60 \cdot 60}\right) = 0{,}000\,002\,4\ ...$, *preto za platné cifry možno pokladať nenulové čísla po miesto stotisícin vrátane.*

9.4 Ďalšie úlohy

Meriame iba pomocou pravých uhlov

V úlohe 11.X na s. 93 – 95 sme opísali postup merania šírky rieky v prípade, že dokážeme merať vzdialenosti a uhly ľubovoľnej veľkosti. Situácia sa zmení, ak máme k dispozícii iba prístroj na vytyčovanie *pravých* uhlov (napr. optický hranol). Jeden z možných postupov merania v takom prípade je znázornený na obr. 18.



Obr. 18

Chceme zistiť dĺžku úsečky AC (z nej už vieme odhadnúť šírku rieky), pričom C je nejaký bod – napr. strom alebo skala – na neprístupnom brehu. Z bodu A ideme po priamke (ktorá sa „približuje“ k rieke) až do bodu B, v ktorom je uhol ABC pravý. Bod B označíme. Potom postupujeme z bodu A smerom k bodu C až do bodu D, v ktorom je uhol ADB pravý. Zmeriame vzdialenosti AB a AD, z nich vypočítame dĺžku AC.

Ak v trojuholníku na obr. 18 poznáme vzdialenosti *AD* a *AB*, vieme vypočítať dĺžku *AC* pomocou niektorej z Euklidových viet.

ÚLOHY

29. Vypočítajte $|AC|$, ak $|AB| = 21{,}4$ m, $|AD| = 14{,}7$ m.

30. Napíšte vzorec na výpočet vzdialenosti $|AC|$ pomocou dĺžok $|AB|$ a $|AD|$.

DVE MERANIA GALILEA GALILEIHO

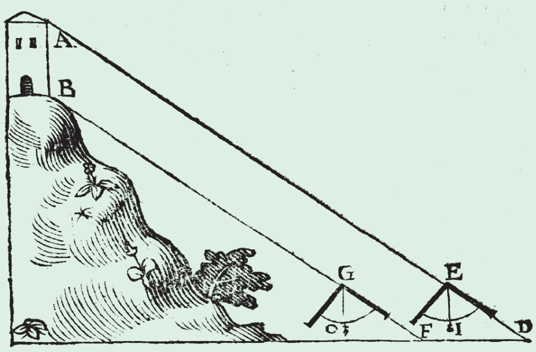
Galileovo „geometrické a vojenské kružidlo“

V roku 1606 vyšla Galileova kniha *La operazione del compasso geometrico, et militare* – návod na používanie jeho „geometrického a vojenského kružidla“, čo bola mechanická pomôcka umožňujúca okrem merania uhlov napríklad aj násobenie, výpočet druhej a tretej odmocniny, použitie trojčlenky, výpočet zloženého úroku či konštrukciu pravidelných mnohouholníkov. Z tejto knihy je obrázok znázorňujúci jeden z postupov merania výšky veže *AB*. Ako vždy v takýchto prípadoch, stačí zmerať niektoré dostupné vzdialenosti a uhly a z nich už možno výšku *AB* vypočítať.

GALILEO GALILEI
(1564 – 1642)

ÚLOHA

31. Vysvetlite postup merania výšky *AB* znázornený na obrázku (teda, ktoré uhly a ktoré vzdialenosti treba zmerať a ako sa z nich vypočíta hľadaná výška).

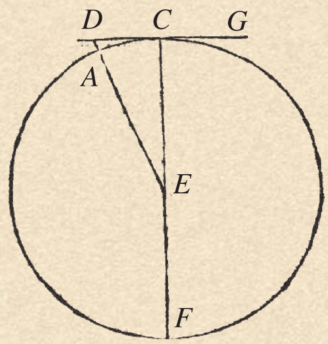


Galileo Galilei odhaduje výšku hôr na Mesiaci

V diele *Sidereus Nuncius* (Hviezdny posol) z roku 1610 zverejnil Galileo svoje pozorovania povrchu Mesiaca aj objav štyroch mesiacov planéty Jupiter. V nasledujúcom úryvku Galileo opisuje, ako odhadol výšku mesačných hôr.

HLAVNÁ KRUŽNICA NA POVRCHU GULE JE KRUŽNICA, KTOREJ STREDOM JE STRED GULE.

Často som pri rôznych polohách Mesiaca voči Slnku pozoroval, že niektoré vrcholky hôr vnútri tmavej časti Mesiaca sú osvetlené, hoci sú veľmi vzdialené od hranice svetla. Porovnal som ich vzdialenosť od tejto hranice s priemerom Mesiaca a zistil som, že niekedy presahuje dvadsatinu priemeru. Za tohto predpokladu si predstavme mesačnú guľu s hlavnou kružnicou CAF, stredom E a priemerom CF, ktorý je k priemeru Zeme v pomere 2 ku 7.
Keďže podľa najpresnejších pozorovaní je zemský priemer 7000 talianskych míľ, bude CF 2000 míľ, CE 1000 a dvadsatina z CF bude 100 míľ. Nech CF je priemer hlavnej kružnice, ktorá oddeľuje svietiacu a tmavú časť Mesiaca (vzhľadom na veľkú vzdialenosť Slnka od Mesiaca sa táto kružnica prakticky nelíši od hlavnej kružnice), nech A je vo vzdialenosti dvadsatiny tohto priemeru od C. Narysujme polomer EA, ktorého predĺženie pretne dotyčnicu GCD (predstavujúcu svetelný lúč) v bode D. Oblúk CA alebo úsečka CD je teda 100 častí z 1000, ktoré tvoria CE, a súčet štvorcov CD a CE je 1 010 000, čo je štvorec ED. Dĺžka ED je preto viac ako 1004, a AD viac ako 4 časti z 1000, ktoré tvoria CE. Teda výška AD na Mesiaci, ktorá predstavuje niektorý štít dosahujúci až k slnečnému lúču GCD a vzdialený od hranice C o vzdialenosť CD, je väčšia ako 4 talianske míle.



ÚLOHY

32. Skontrolujte Galileov údaj o pomere priemerov Mesiaca a Zeme.

V úlohách 33 a 34 budeme diskutovať o vete *„vzhľadom na veľkú vzdialenosť Slnka od Mesiaca sa táto kružnica* [oddeľujúca svietiacu a tmavú časť Mesiaca] *prakticky nelíši od hlavnej kružnice“*.

ÚLOHY

Najprv celú situáciu znázorníme v reze – v rovine, ktorá prechádza stredmi Slnka a Mesiaca.

33. a) Načrtnite dve kružnice predstavujúce Slnko a Mesiac (prvú s väčším polomerom). Vyznačte, ktorá časť Mesiaca bude osvetlená svetlom zo Slnka.

b) Na základe riešenia časti a) opíšte tú časť gule – Mesiaca, ktorá nie je osvetlená slnečným svetlom. Aká krivka tvorí hranicu medzi osvetlenou a neosvetlenou časťou gule?

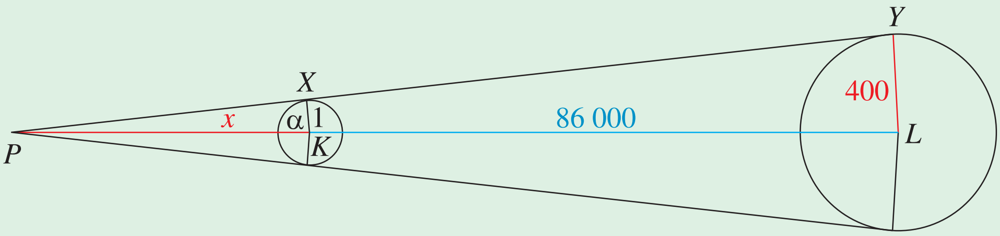
c) Ako sa bude meniť krivka oddeľujúca osvetlenú a neosvetlenú časť gule – Mesiaca, ak budeme zväčšovať vzdialenosť stredov obidvoch gúľ (teda vzdialenosť Slnko – Mesiac)?

Správnosť úvah z riešenia úlohy 33 c) môžeme overiť výpočtom.

34. a) Skontrolujte odhad veľkosti uhla α v texte pod obr. 19. (Odporúčame tiež skontrolovať správnosť vzdialeností uvedených na obrázku.)

Teraz nás bude zaujímať, ako by sa menila veľkosť uhla α, keby sme (hypoteticky) menili vzdialenosť Mesiac – Slnko.

b) Podobne ako v texte pod obr. 19 odhadnite veľkosť uhla α, keby vzdialenosť Mesiac – Slnko bola napr. 20 000 mesačných polomerov.



Obr. 19

Za jednotku dĺžky sme zvolili polomer Mesiaca. Všetky uvedené veľkosti sú iba približné, pre naše potreby však stačia. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov PXK a PYL vyplýva rovnosť $\frac{x}{1} = \frac{86\,000 + x}{400}$, *z nej* $x \approx 220$. *Potom* $\cos\alpha \approx \frac{1}{220}$, *odtiaľ* $\alpha \approx 89{,}7°$.

Predstavu o vzájomných pomeroch veľkostí si môžeme urobiť na modeli: ak polomer Mesiaca bude 1 mm, *tak Slnko bude guľa s polomerom* 40 cm *a vzdialenosť Slnko – Mesiac bude* 86 m.

c) Vo výpočte z úlohy b) nahraďte hodnotu 20 000 vzdialenosťou d a vyjadrite pomocou nej cos α. Potom diskutujte o tom, ako sa bude meniť hodnota cos α (a v závislosti od nej veľkosť uhla α), ak budeme vzdialenosť d zväčšovať.

Je tento výsledok v súlade s vaším riešením úlohy 33 c)?

35. Prečo Galileo pokladá dĺžky oblúka *CA* aj úsečky *CD* prakticky za rovnaké? Najprv si odpoveď ujasnite v diskusii. Potom vypočítajte:
a) dĺžku oblúka *CA* za predpokladu, že úsečka *CD* má dĺžku 50 (t. j. dvadsatina z 1 000),
b) dĺžku úsečky *CD* za predpokladu, že oblúk *CA* má dĺžku 50.

36. Skontrolujte a vysvetlite Galileov výpočet dĺžky *ED*.

Herónov a Mascheroniho vzorec

V úlohách 27 a 28 na s. 105 sme videli, že vzorec $P = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$ je „šitý na mieru“ meraniu z obr. 15 (mnohouholník rozdelíme na trojuholníky, v každom z nich poznáme dĺžku dvoch strán a uhla nimi zovretého). Podobne „na mieru šité“ vzorce existujú aj pre merania z obr. 14 a 16. Naším cieľom nebude ich odvodenie, ale – podobne ako v úlohe 27 – ich využitie pri riešení úloh vyžadujúcich organizáciu dlhšieho výpočtu a využitie kalkulačky.
Ak poznáme v trojuholníku dĺžky všetkých troch strán, môžeme na výpočet jeho obsahu použiť Herónov vzorec

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Herón z Alexandrie uvádza tento vzorec v knihe *Metrica* (okolo roku 60 n. l.). Toto dielo sa pokladalo dlho za stratené, až v r. 1894 sa podarilo nájsť úryvok z neho a v r. 1896 úplný text.

ÚLOHA

37. Použite Herónov vzorec na výpočet obsahu sedemuholníka na obr. 14 na s. 104. Výsledok zaokrúhlite na tri platné cifry.

Na výpočet obsahu mnohouholníka, v ktorom poznáme dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov, je ako stvorený Mascheroniho vzorec. Možno ho sformulovať ako návod:

V mnohouholníku vynecháme jednu stranu. Potom vytvoríme všetky možné kombinácie dvojíc strán. Každú kombináciu vynásobíme sínusom súčtu uhlov ležiacich medzi týmito stranami. Výrazom, ktoré obsahujú nepárny počet uhlov, priradíme kladné znamienko, ostatným výrazom záporné znamienko. Potom všetky výrazy sčítame. Výsledok je dvojnásobok plochy pozemku.

V prípade štvoruholníka *ABCD* má vzorec tvar

$$P = \frac{1}{2}(ab \sin\beta - ac \sin(\beta+\gamma) + bc \sin\gamma) \qquad (*)$$

Vzorec publikoval taliansky matematik Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) v r. 1787 v práci *Méthode pour la mesure des polygones plans.* Rovnaké tvrdenie – ale iným spôsobom – dokázal ženevský profesor matematiky Simon L'Huilier (1750 – 1840) v svojej knihe *Polygonométrie* z r. 1789. Pripomeňme, že s Mascheronim sme sa už v tomto ročníku stretli v kapitole o euklidovských konštrukciách.

ÚLOHY

38. Skontrolujte, či je vzorec (*) v súlade s uvedeným opisom.

39. Napíšte Mascheroniho vzorec na výpočet obsahu päťuholníka *ABCDE*.

40. Meraním dĺžok a uhlov v päťuholníku *ABCDE* sme našli tieto hodnoty: $a = 116$, $b = 85$, $c = 83$, $d = 113$, $e = 108$, $\alpha = 90°$, $\beta = 129°$, $\gamma = 97°$, $\delta = 125°$, $\varepsilon = 99°$. Vypočítajte obsah tohto päťuholníka pomocou Mascheroniho vzorca.

41. Vypočítajte obsah pozemku tvaru päťuholníka z obr. 16 a) na s. 104. (Nezabudnite, že pri výpočtoch na kalkulačke potrebujete veľkosti uhlov vyjadriť ako desatinné čísla.)

1. a)

```
  1 2 4 0 0 0
        7 8 0
      2 0 0 0
  -----------
  1 2 6 7 8 0   ≈ 127 000    125 868,208 ≈ 126 000
```

b)

```
  1 2 3 5 6 2 ,4 7 3
        8 0 0
      1 5 0 0
  ------------------
  1 2 5 8 6 2 ,4 7 3   ≈ 125 900    125 868,208 ≈ 125 900
```

c)

```
  1 2 3 5 6 0
        7 8 2
      1 5 2 3 ,8
  --------------
  1 2 5 8 6 5 ,8   ≈ 125 870    125 868,208 ≈ 125 870
```

d)

```
  1 2 3 5 6 2 ,5
        7 8 2
      1 5 2 0
  --------------
  1 2 5 8 6 4 ,5   ≈ 125 860    125 868,208 ≈ 125 870
```

2.

		19 263 820,71 ≈
a)	5 000 · 4 000 = 20 000 000	20 000 000
b)	5 300 · 3 600 = 19 080 000 ≈ 19 000 000	19 000 000
c)	5 330 · 3 610 = 19 241 300 ≈ 19 200 000	19 300 000
d)	5 329 · 3 615 = 19 264 335 ≈ 19 260 000	19 260 000
e)	5 300 · 4 000 = 21 200 000 ≈ 20 000 000	20 000 000
f)	5 000 · 3 610 = 18 050 000 ≈ 20 000 000	20 000 000
g)	5 300 · 3 615 = 19 159 500 ≈ 19 000 000	19 000 000
h)	5 329 · 3 610 = 19 237 690 ≈ 19 200 000	19 300 000

3.

		0,065 382 288 ... ≈
a)	$\frac{6\,000}{90\,000}$ = 0,066 666 666 666 ... ≈ 0,07	0,07
b)	$\frac{6\,100}{93\,000}$ = 0,065 591 397 849 ... ≈ 0,066	0,065
c)	$\frac{6\,050}{92\,500}$ = 0,065 405 405 405 ... ≈ 0,065 4	0,065 4
d)	$\frac{6\,100}{90\,000}$ = 0,067 777 777 777 ... ≈ 0,07	0,07
e)	$\frac{6\,000}{93\,000}$ = 0,064 516 129 032 ... ≈ 0,06	0,07
f)	$\frac{6\,050}{93\,000}$ = 0,065 053 763 440 ... ≈ 0,065	0,065
g)	$\frac{6\,000}{92\,500}$ = 0,064 864 864 864 ... ≈ 0,06	0,07
h)	$\frac{6\,050}{90\,000}$ = 0,067 222 222 222 ... ≈ 0,07	0,07

5. Dĺžku s modrého oblúka sme vypočítali podľa vzorca $S = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$, kde α je veľkosť stredového uhla oblúka, r je polomer kružnice (za hodnoty α, r sme dosadili δ a 1). Modrý oblúk je dlhší ako úsečka, ktorá spája jeho krajné body, táto úsečka je dlhšia ako zelená úsečka na obr. 2 (je to prepona pravouhlého trojuholníka, v ktorom je zelená úsečka odvesnou). Preto je dĺžka zelenej úsečky menšia ako dĺžka modrého oblúka, teda je menšia ako $\frac{\pi}{180} \cdot \delta$.

7. a), b) Pozri text k obr. 17 na s. 106.

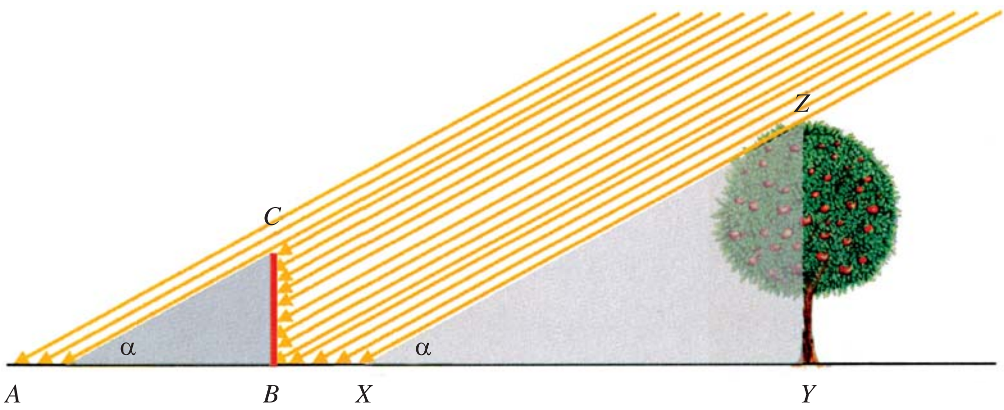
c) V tomto prípade $\delta \leq \frac{1}{4}$, teda $\frac{\pi}{180} \cdot \delta \leq \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}004\,363... < 0{,}01$, preto za platné možno pokladať cifry po miesto stotín vrátane,

d) $\delta \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$, teda $\frac{\pi}{180} \cdot \delta \leq \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{20} = 0{,}000\,872... < 0{,}001$, preto za platné možno pokladať cifry po miesto tisícin vrátane.

8. Áno, stačí v „krivočiarom pravouhlom trojuholníku“, ktorého dve strany na obr. 2 tvorí modrý oblúk a zelená úsečka, použiť rovnaké úvahy ako v riešení úlohy 5. Namiesto o dĺžke zelenej úsečky možno uvažovať o dĺžke druhej odvesny tohto trojuholníka (tá predstavuje rozdiel medzi kosínusom presnej a približnej veľkosti uhla).

9. a) (pozri obr. 20) V našom opise predpokladáme, že strom stojí na vodorovnej rovine (preto sú na obrázku uhly pri vrcholoch B a Y pravé, vzťahy (*) však platia aj v prípade, že strom je na svahu s nemenným sklonom, odporúčame nakresliť si obrázok aj pre tento prípad). Do zeme zapichneme zvislo palicu, ktorej výšku (BC) nad zemou poznáme. Potom zmeriame dĺžku tieňa palice (AB) a dĺžku tieňa stromu (XY). Trojuholníky ABC a XYZ sú podobné (pretože sa zhodujú v dvoch uhloch: obidva sú pravouhlé a zhodujú sa aj uhly pri vrcholoch A a X – tie zodpovedajú uhlu dopadajúcich slnečných lúčov). Preto: koľkonásobkom tieňa AB je dĺžka palice BC (tento násobok – teda hodnotu $\frac{|BC|}{|AB|}$ – vieme zistiť, pretože poznáme dĺžku palice aj jej tieňa), toľkonásobkom tieňa XY (ktorého dĺžku poznáme) je hľadaná výška stromu YZ. Symbolicky: z podobnosti $\Delta\, ABC \sim \Delta\, XYZ$ vyplýva

$$\frac{|YZ|}{|XY|} = \frac{|BC|}{|AB|}, \quad \text{odtiaľ} \quad |YZ| = |XY| \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \qquad (*)$$



Obr. 20

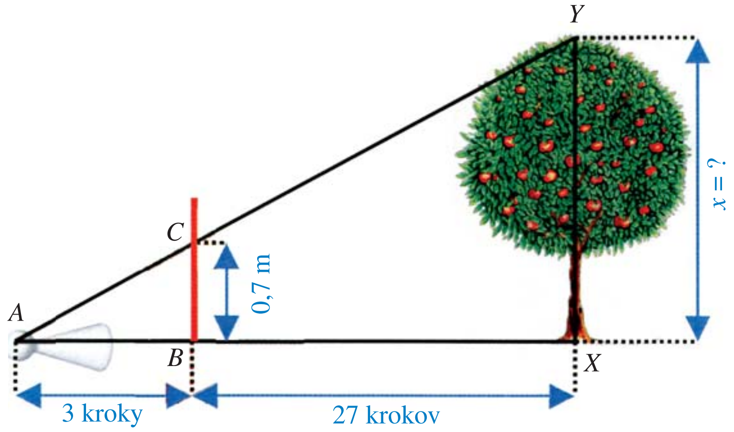
b) Ak strom stojí na vodorovnej rovine, sú trojuholníky ABC a XYZ pravouhlé. Vtedy podiel $\frac{|BC|}{|AB|}$ – a takisto podiel $\frac{|YZ|}{|XY|}$ – je tangens uhla α na obr. 20. Teda prvá rovnosť v (*) je rovnosťou dvoch rôznych vyjadrení tangensu uhla α, pričom hodnotu $\frac{|BC|}{|AB|}$ pravej strany poznáme. Druhú rovnosť v (*) možno zapísať

$$|YZ| = |XY| \cdot \tan\alpha$$

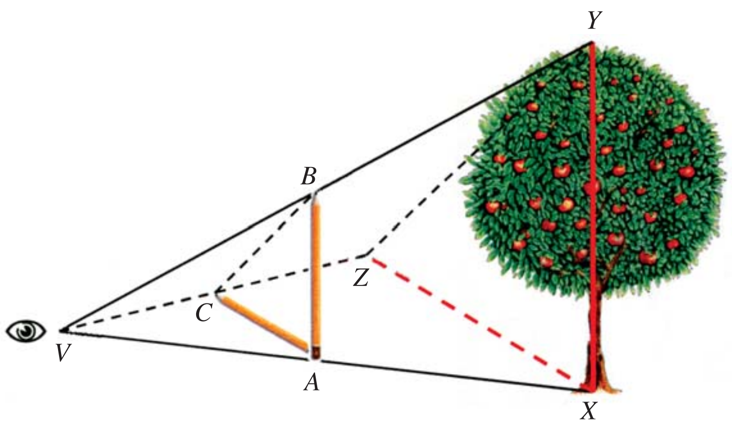
(pri takejto interpretácii je úlohou nájsť pomocou tyče a jej tieňa príslušnú hodnotu tan α).

10. Prvé meranie (obr. 21 na s. 112) V opise sa mlčky predpokladá, že tyč je zabodnutá zvislo (teda rovnobežne s výškou stromu, ktorej veľkosť zisťujeme). Postup je založený na podobnosti trojuholníkov ABC a AXY (sú podobné, pretože sa zhodujú v dvoch uhloch: obidva sú pravouhlé a majú rovnaký uhol pri vrchole A). Preto: koľkonásobkom vzdialenosti AB je vzdialenosť AX, toľkonásobkom výšky BC je hľadaná výška XY. Symbolicky

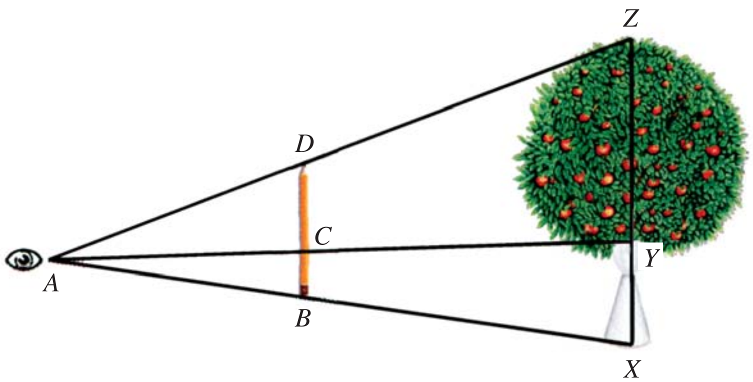
$$\frac{|XY|}{|BC|} = \frac{|AX|}{|AB|}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{x\ [\text{m}]}{0{,}7\ [\text{m}]} = \frac{30\ [\text{krokov}]}{3\ [\text{kroky}]} = 10, \quad \text{odtiaľ } x = 10 \cdot 0{,}7\ [\text{m}] \qquad (**)$$



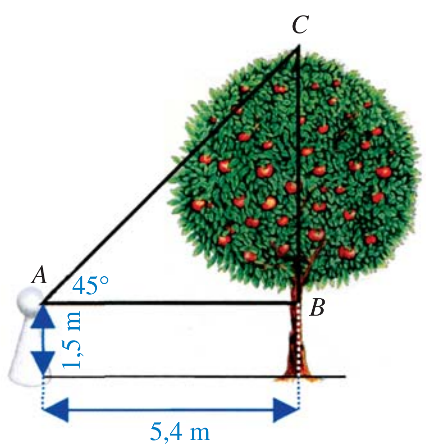
Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24

Ku krokom a metrom: nevadí to, v (**) nás zaujíma iba *podiel* dĺžok AB a AX a ten je stále rovnaký, akékoľvek jednotky použijeme (treba len, aby dvojica AB a AX bola vyjadrená v rovnakých dĺžkových jednotkách, tie ale nemusia byť totožné s jednotkami použitými pre dvojicu BC a XY). Ukážme si to pre prípad metrov (naše úvahy však platia pre ľubovoľné dĺžkové jednotky). Ak dĺžka 1 kroku je d metrov, tak $|AB|$ = 3 kroky = 3 d metrov, $|AX|$ = 30 krokov = 30 d metrov. Potom v druhej rovnosti v (**) bude mať podiel $\frac{|AX|}{|AB|}$ veľkosť $\frac{30\,d}{3\,d} = \frac{30}{3} = 10$. „Prevodová konštanta“ d sa vykráti, teda veľkosť podielu od nej nezávisí.

Druhé meranie (obr. 22, V je oko pozorovateľa) V opise nie je uvedené, že sestrina východisková poloha je pri strome, z nej potom postupuje doľava (po úsečke XZ). Základná myšlienka: zvislú vzdialenosť XY premeníme otočením ceruzky na rovnako veľkú vodorovnú vzdialenosť XZ, ktorú vieme zmerať. Formálnejšie zdôvodnenie je založené na tomto poznatku: *ak trojboký ihlan (podstava je trojuholník) pretneme rovinou rovnobežnou s podstavou, tak rezom je trojuholník podobný podstave*. Smery pohľadov VA, VB a VC (teda cez koniec a špičku ceruzky v zvislej a vodorovnej polohe) vytvárajú bočné hrany trojbokého ihlana s vrcholom V. Roviny ABC a XYZ sú rovnobežné (prečo?), preto trojuholníky ABC a XYZ sú podobné. O trojuholníku ABC vieme, že má rovnako dlhé strany AB a AC. Preto v podobnom trojuholníku XYZ musia mať strany XY a XZ rovnakú dĺžku.

Tretie meranie (obr. 23) Postup je založený na podobnosti trojuholníkov: dĺžky BC a BD musia byť v rovnakom pomere ako dĺžky XY a XZ. Symbolicky:
z podobnosti $\Delta\, AXZ \sim \Delta\, ABD$, $\Delta\, AXY \sim \Delta\, ABC$ vyplýva

$$\frac{|XZ|}{|BD|} = \frac{|AX|}{|AB|}, \quad \frac{|XY|}{|BC|} = \frac{|AX|}{|AB|}$$

preto (keďže pravé strany v obidvoch rovnostiach sú rovnaké)

$$\frac{|XZ|}{|BD|} = \frac{|XY|}{|BC|}$$

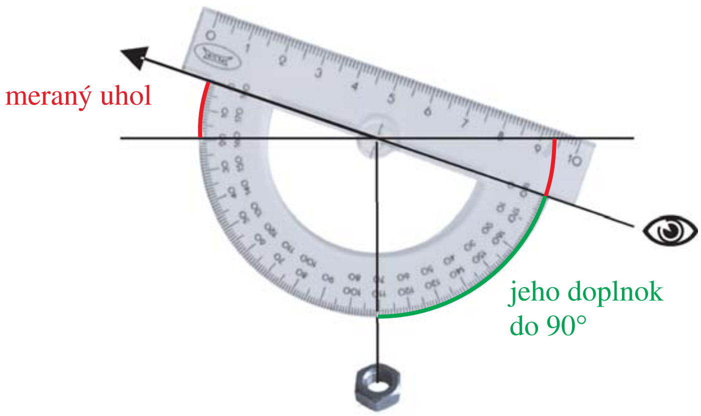
(táto rovnosť je len inak zapísané tvrdenie z úvodu riešenia). Odtiaľ

$$|XZ| = |BD| \cdot \frac{|XY|}{|BC|}, \text{ t. j. } |XZ| = \underbrace{\frac{|BD|}{|BC|}}_{= 4,5} \cdot \underbrace{|XY|}_{= 1,6},$$

Štvrté meranie (obr. 24) Trojuholník ABC je pravouhlý a uhol pri vrchole A má veľkosť 45°. Preto je ABC rovnoramenný trojuholník, teda $|AB| = |BC|$.

Meranie sklonomerom je znázornené na obr. 25 (červene vyznačené uhly sú vrcholové, preto majú rovnakú veľkosť). Platí

merný uhol = 90° – uhol, ktorý odčítame na sklonomere.

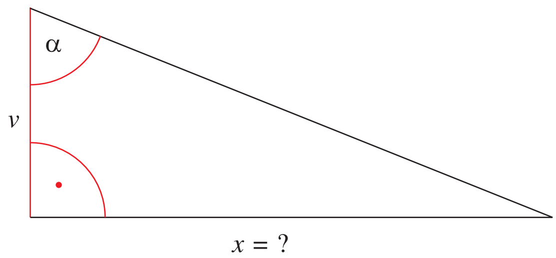


Obr. 25

11.a) I Hľadá sa výška veže. Pozorovateľ jej vrchol vidí pod uhlom 45° (trojuholník, ktorý používa pri pozorovaní, je pravouhlý a rovnoramenný), preto výška veže je rovnaká ako vzdialenosť pozorovateľa od nej (tú vie pozorovateľ odmerať). Rovnaká myšlienka je použitá na obr. 24 na s. 112.

II (obr. 26) Hľadáme vodorovnú vzdialenosť x, zmeriame v (výška oka pozorovateľa nad zemou) a uhol α (na obrázku ho pozorovateľ meria astrolábom). Z rovnosti

$\tan\alpha = \dfrac{x}{v}$ dostávame výsledok $x = v \cdot \tan\alpha$.



Obr. 26

III Hľadáme výšku veže (označme ju y), odmeriame výšku oka pozorovateľa nad zemou (h), jeho vzdialenosť od veže (v) a uhol, pod ktorým pozorovateľ vidí vežu (α, na obrázku ho pozorovateľ meria astrolábom). Výška je $y = h + x$, pričom x (výšku veže nad úrovňou oka pozorovateľa) nájdeme z pravouhlého trojuholníka, v ktorom poznáme odvesnu v a uhol α. Výpočet x je rovnaký ako v úlohe 11.II, výška veže je $y = h + v \cdot \tan\alpha$.

IV Zisťujeme výšku sochy, zmeriame uhly CDA a CDB a vzdialenosť CD. Z trojuholníka CDA zistíme výšku CA, z trojuholníka CDB výšku CB, hľadaná výška sochy je $|CB| - |CA|$. Pri výpočte s hodnotami uvedenými v tabuľke na s. 93 dostaneme výsledok

$$|AB| = 110 \cdot \frac{29}{40} - 110 \cdot \frac{22}{40} = 19{,}25 \approx 19 \text{ (stôp)}.$$

V Meranie rozmerov jamy, ktorej prierez je na obrázku na s. 91 (môže to byť napr. kruhová studňa alebo jama tvaru hranola). Postavíme sa k jame tak, aby sme cez jej horný okraj videli okraj dna na opačnej strane. Potom V je výška, v akej máme oči, n je vzdialenosť od okraja jamy. Z podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov na obrázku vyplýva rovnosť

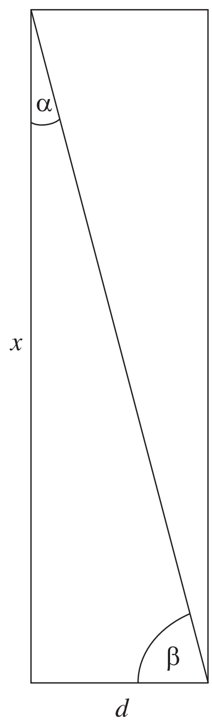
$$\frac{x}{d} = \frac{V}{n} \qquad (*)$$

Veľkosti V, n poznáme, preto z rovnosti (*) vieme vypočítať jednu z veľkostí x, d, ak poznáme druhú:

- ak dokážeme zmerať šírku jamy (priemer studne) d, tak z (*) pre jej hĺbku x dostaneme vzťah
$$x = d \cdot \frac{V}{n},$$
- ak dokážeme zmerať hĺbku jamy x, tak z (*) pre jej šírku d dostaneme $d = x \cdot \dfrac{n}{V}$.

VI Metóda opísaná v riešení úlohy 10 (prvé meranie, obr. 21).

VII (obr. 27) Meriame hĺbku studne x. Zmeriame jej priemer d a uhol α, pod ktorým vidíme šírku jej dna. Kvôli výpočtom bude však výhodnejšie namiesto uhla α pracovať s uhlom β (jeho veľkosť je $\beta = 90° - \alpha$).



Obr. 27

Z rovnosti $\frac{x}{d} = \tan\beta$ dostávame $x = d \cdot \tan\beta$ (keby sme pracovali s uhlom α, mal by tento vzťah tvar $x = \frac{d}{\tan\alpha}$, teda by sme museli deliť desatinným číslom, čo je najmä pri ručnom výpočte náročnejšie ako násobenie). Myšlienka je rovnaká ako v úlohe 11.V (prvá odrážka), v nej sme tangens uhla β našli z menšieho z dvoch podobných pravouhlých trojuholníkov ako pomer $\frac{V}{n}$ (s rovnakou súvislosťou medzi použitím tangensov a podobných pravouhlých trojuholníkov sme sa už stretli v riešení úlohy 9 b).

VIII Hľadáme vzdialenosť bodov A a B. Odmeriame vzdialenosti $a = |BC|$ a $b = |AC|$ a pomocou meračského stola narysujeme trojuholník ABC vo vhodnej mierke. Hľadanú dĺžku AB môžeme

- odmerať na narysovanom obrázku,
- alebo ju vypočítať: na obrázku odmeriame veľkosť uhla $\gamma = \sphericalangle ACB$ a použijeme kosínusovú vetu, podľa nej $|AB| = c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$.

Tento výpočet môžeme použiť aj vtedy, keď nepoužívame meračský stôl, ale vieme odmerať veľkosť uhla γ.

IX Rovnaká úloha ako 11.VIII, teraz ju však riešime len meraním vzdialeností (bez použitia uhlov). Zmeriame EA, EB a FG. Potom $|AB| = 2 \cdot |FG|$. Body F, G ležia v polovici úsečiek EA a EB, preto sú trojuholníky AEB a FEG podobné (toto si dobre rozmyslite), pričom rozmery trojuholníka AEB sú dvojnásobkom rozmerov trojuholníka FEG, ktoré vieme zmerať.

XI Rovnako ako v úlohách 11.VIII, 11.IX sa hľadá vzdialenosť $d = |AB|$. Zmeriame $z = |AC|$ a uhly ω_A a ω_C pri vrcholoch A a C (pritom predpokladáme, že prekážka medzi bodmi A a B umožňuje vidieť z A do B, takou prekážkou je napr. jazero). Trojuholník ABC

- buď narysujeme a dĺžku AB zistíme z obrázka,
- alebo ju vypočítame pomocou sínusovej vety: vypočítame veľkosť uhla pri vrchole B ($\omega_B = 180° - \omega_A - \omega_C$) a z rovnosti $z \cdot \sin\omega_C = d \cdot \sin\omega_B$ vyjadríme hľadanú veľkosť $d = z \cdot \frac{\sin\omega_C}{\sin\omega_B}$.

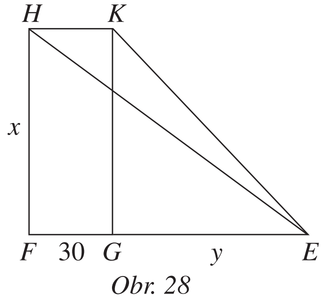
XIII Metóda merania pomocou dĺžky tieňa opísaná v riešení úlohy 9:

$$|AB| = |BD| \cdot \frac{|CE|}{|EF|}.$$

XIV Hľadá sa vzdialenosť pochodujúceho útvaru od pevnosti, teda zvislá výška trojuholníka na obrázku. Myšlienka je rovnaká ako v úlohe 11.X – zmerať AC a uhly α, γ, narysovať trojuholník a na obrázku odmerať hľadanú vzdialenosť. V tomto prípade meranie uhlov aj rysovanie obrazu trojuholníka ABC nahrádza prístroj na obrázku: z bodu A namierime jedno otočné rameno na bod B, na ten istý bod potom z C namierime druhé otočné rameno. Nastavením vzdialenosti medzi kĺbmi prvého a druhého otočného ramena volíme mierku obrazu trojuholníka.

XV Tá istá situácia ako v úlohe 11.XII, iba „hore nohami" (namiesto trojuholníka ADC máme teraz trojuholník HKE). Poznáme vzdialenosť HK, uhly HEF a KEF, hľadáme výšku kopca FC (tá je rozdiel $|FH| - |CH|$, pričom $|CH|$ – vzdialenosť očí pozorovateľa od zeme – poznáme). Rovnako ako v úlohe 11.XII, aj tu je možné hľadať vodorovnú vzdialenosť, napr. GE.

Výpočet s hodnotami uvedenými v tabuľke na s. 93 (pozri obr. 28): z trojuholníka GKE dostávame $\frac{y}{x} = \frac{6}{5}$, z trojuholníka FHE máme $\frac{y + 30}{x} = \frac{8}{5}$. Úpravou dostaneme sústavu $6x = 5y$, $8x = 150 + 5y$, odtiaľ $y = 75$.



Obr. 28

XVI Rovnaká úloha ako 11.VIII – hľadá sa vzdialenosť AB (na rozdiel od obrázka VIII – na ktorom je priamo naznačené použitie meračského stola – sa teraz o žiadnom konkrétnom meracom nástroji nehovorí). Odmeriame dĺžky EA, EB a veľkosť uhla AEB. Trojuholník AEB buď narysujeme vo vhodnej mierke a dĺžku AB zistíme z tohto obrázka, alebo ju vypočítame pomocou kosínusovej vety (pozri riešenie úlohy 11.VIII).

XVII Hľadáme výšku GF veže na kopci, tá je rozdiel $|HF| - |HG|$, na zistenie každej z dĺžok HF, HG použijeme postup z úlohy 11.XII: v trojuholníku QFO odmeriame QO a veľkosť uhlov FQH a FOH, v trojuholníku MGK dĺžku MK a veľkosti uhlov GMH a GKH. Pre hodnoty uvedené v tabuľke na s. 93 dostaneme výsledok $|GF| = 15$ (krokov).
XVIII Hľadáme vzdialenosť CD dvoch neprístupných bodov. V trojuholníku ABC poznáme AB a uhly pri vrcholoch A, B, v trojuholníku ABD poznáme AB a uhly pri vrcholoch A a B. Na základe týchto údajov vieme narysovať štvoruholník $ABCD$ vo vhodnej mierke a na obrázku zmerať dĺžku CD (tento postup naznačuje aj meračský stôl schematicky znázornený na obrázku).
Možný postup výpočtu (len pre dobrovoľníkov s veľkým záujmom o matematiku): pomocou sínusovej vety vypočítame v trojuholníku ABC dĺžku BC a v trojuholníku ABD dĺžku BD, potom pomocou kosínusovej vety nájdeme v trojuholníku BCD dĺžku CD.

11. c) XIII: Tangens uhla dopadajúcich slnečných lúčov je $\frac{|CE|}{|EF|}$. Ak poznáme toto číslo, na kalkulačke alebo v tabuľkách k nemu vieme nájsť veľkosť uhla (ktorá sa v matematike označuje symbolom arctan $\frac{|CE|}{|EF|}$).

XVII: Stačí z bodu M zmerať uhly FMH a GMH, v bode K uhly FKH a GKH a vzdialenosť MK.

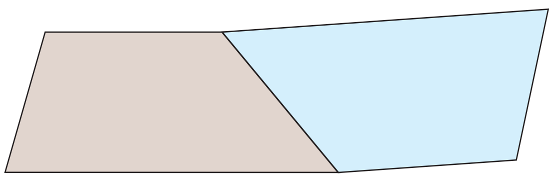
12. $$\underbrace{\frac{692+60}{2}}_{\text{obsah v gar}^2} \cdot 207{,}5 \cdot \underbrace{6 \cdot 6}_{1\text{ gar}^2 = 36\text{ m}^2} = 2\,808\,720\text{ m}^2 \approx 300\text{ ha}.$$

Výsledok sme zaokrúhlili na 1 platnú číslicu, pretože je výsledkom násobenia, pričom najmenší počet platných cifier (1 cifru) medzi násobenými číslami mal údaj 1 gar ≈ 6 m (uvedený v texte k obr. 6).
14. c) Napríklad: päťuholník rozdelíme na tri trojuholníky, v každom z nich zmeriame jednu stranu a výšku na ňu.
d) Obsah v cm^2 nájdený pri riešení úlohy 14 a) alebo 14 c) treba vynásobiť číslom • 100 • 625 • 2 500 (v prvom prípade 1 cm na mape znázorňuje 1 000 cm = 10 m v skutočnosti, preto plocha 1 cm^2 na mape zodpovedá 10 m × 10 m = 100 m^2 v skutočnosti). Výsledok bude mať rovnaký počet platných cifier ako výsledok úlohy 14 a (prečo?).

16. Ak do vzorca $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$ dosadíme $c = 0$, dostaneme $P = \frac{a}{2} \cdot v$, čo je vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka so základňou a a výškou v.

17. $$P = \frac{z_0+z_1}{2}\cdot h + \frac{z_1+z_2}{2}\cdot h + \frac{z_2+z_3}{2}\cdot h + \ldots + \frac{z_{18}+z_{19}}{2}\cdot h + \frac{z_{19}+z_{20}}{2}\cdot h = \left(\frac{z_0}{2} + z_1 + z_2 + \ldots + z_{18} + z_{19} + \frac{z_{20}}{2}\right)\cdot h$$

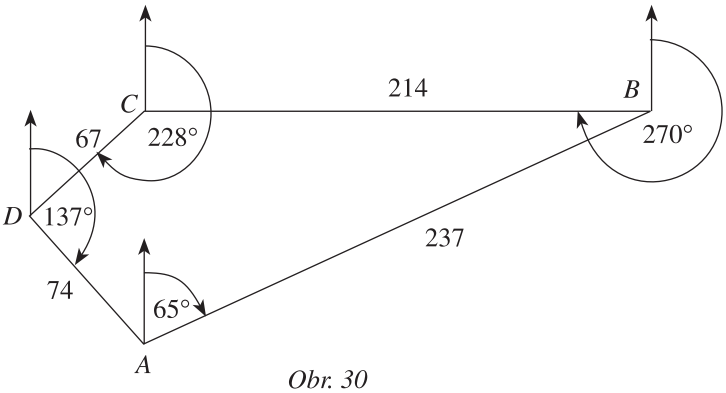
19. Ak vzorec $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$ na výpočet obsahu lichobežníka $ABCD$ pokladáme za známy (mimochodom, tento vzorec možno odvodiť z obr. 13), tak stačí dokázať, že pre dĺžku s strednej priečky lichobežníka so základňami a, c platí $s = \frac{a+c}{2}$ (prečo to stačí?). Zložením dvoch lichobežníkov na obr. 13 vznikne rovnobežník so stranami dĺžky $a + c$, d. Úsečka XZ vznikla spojením stredných priečok XY a YZ, preto $|XZ| = 2s$. Súčasne je XZ rovnobežná so stranou AD', preto $|XZ| = a + c$.
Ak si máme byť skutočne istí správnosťou týchto úvah, treba skontrolovať, či sme sa iba nenechali zviesť nesprávne nakresleným obrázkom. Treba teda overiť, že
- $AD'A'D$ na obr. 13 je skutočne rovnobežník, teda že nenastane situácia znázornená na obr. 29 (na to stačí overiť, že súčet vnútorných uhlov pri vrcholoch B a C v lichobežníku $ABCD$ je 180°),



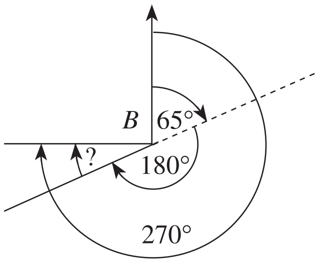
Obr. 29

- pravý krajný bod strednej priečky modrého lichobežníka je totožný s ľavým krajným bodom strednej priečky hnedého lichobežníka (teda že modrá a zelená úsečka na obr. 13 na seba nadviažu),
- čiara XYZ je skutočne úsečka (t. j. uhol XYZ má veľkosť 180°), ktorá je rovnobežná s AD'.

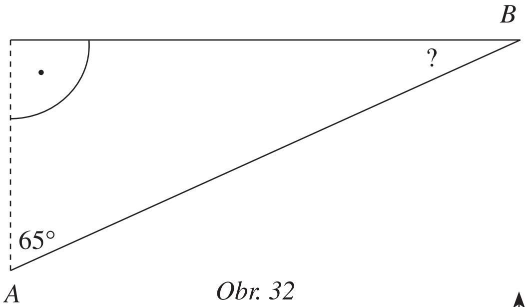
Pri overení tvrdení z posledných dvoch odrážok nám pomôžu opisy strednej priečky uvedené v poznámke v zadaní úlohy 19 (podľa jedného z nich krajný bod priečky leží v strede ramena, podľa druhého je priečka rovnobežná so základňami).



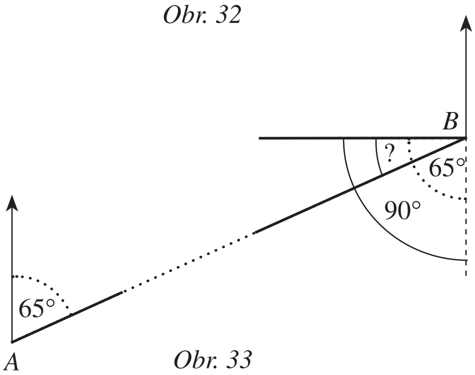
Obr. 30



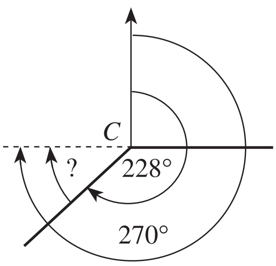
Obr. 31



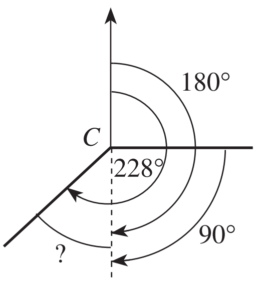
Obr. 32



Obr. 33



Obr. 34



Obr. 35

20. a) Pre obsah trojuholníka *ABC* platí $P = \frac{a}{2} \cdot v_a$, pritom číslo $\frac{a}{2}$ je dĺžka strednej priečky trojuholníka.

21. Ak dĺžky priečok označíme $s_1, s_2, ..., s_{20}$ a šírku pásu h, tak $P = (s_1 + s_2 + ... + s_{20}) \cdot h$.
Vo všeobecnosti – ak počet pásov je n – má vzorec tvar $P = (s_1 + s_2 + ... + s_n) \cdot h$.

23. Môžeme napr.

- päťuholník rozdeliť na tri trojuholníky, v ktorých zmeriame buď dĺžky všetkých strán (takýto postup je znázornený na obr. 14), alebo dĺžky dvoch strán a uhla nimi zovretého, inú možnosť rozdelenia na trojuholníky znázorňuje obr. 15,
- odmerať dĺžky strán a vnútorných uhlov päťuholníka (takýto postup je na obr. 16),

Pri meraní v teréne sa používa aj princíp pretínania napred (presnejší názov je pretínanie napred uhlami): zmeriame napr. dĺžku strany *AB* a veľkosti uhlov *BAC, BAD, BAE, ABC, ABD, ABE* (načtnite si obrázok a vyznačte na ňom odmerané veľkosti).
Ďalšia možnosť je zmerať napr. v každom z trojuholníkov *ABC, ABD, ABE* dĺžky všetkých troch strán.

24. $\sphericalangle\, aOb = 56°$, $\sphericalangle\, bOc = 95° - 56° = 39°$,
$\sphericalangle\, cOd = 136° - 95° = 41°$,
$\sphericalangle\, dOe = 360° - 136° - 145° = 79°$,
$\sphericalangle\, eOf = 145° - 119° = 26°$,
$\sphericalangle\, fOg = 119° - 85° = 34°$, $\sphericalangle\, gOa = 85°$.

25. a) Pozri obr. 30 (šípka znázorňuje smer na sever).

b) Vnútorný uhol β pri vrchole *B* má veľkosť $\beta = 25°$, možno to zistiť viacerými spôsobmi:
$\beta = ? = 270° - 65° - 180° = 25°$ (obr. 31) alebo
$\beta = ? = 90° - 65° = 25°$ (obr. 32 a obr. 33).
Prvý z týchto postupov je všeobecnejší, zvyšné dva využívajú skutočnosť, že v tomto prípade leží bod *C* presne na západ od bodu *B*, preto je spojnica *BC* kolmá na severný smer.
Vnútorný uhol γ pri vrchole *C* má veľkosť $\gamma = 138°$, uvádzame dva možné výpočty:

- (obr. 34) $? = 270° - 228° = 42°$,

potom $\gamma = 180° - ? = 138°$,

- (obr. 35) $? = 228° - 180° = 48°$,

potom $\gamma = 90° + ? = 138°$.
Vnútorný uhol δ pri vrchole *D* má veľkosť $\delta = 89°$, opäť uvádzame dva možné výpočty:

- (obr. 36) $? = 228° - 137° = 91°$, $\delta = 180° - ? = 89°$,
- (obr. 37) Azimut 228° pri vrchole *C* rozdelíme na súčet 180° + 48°. Potom veľkosť ďalších dvoch uhlov (vyznačených čiarkovaným oblúčikom) je tiež 48° (ide o striedavé, resp. vrcholové uhly). Azimut 137° pri vrchole *D* rozdelíme na súčet 90° + 47°.

Z rovnosti $90° = ? + 48°$ dostávame $? = 42°$.
Potom $\delta = 42° + 47° = 89°$.
Uhol α pri vrchole *A* má veľkosť $\alpha = 108°$.

Uvádzame dva možné výpočty:

- (obr. 38) ? = 90° – 47° = 43°(môžeme využiť buď pravouhlý trojuholník s uhlami veľkosti 47°, 90° a ? alebo skutočnosť, že uhly vyznačené bodkovaným oblúčikom sú striedavé a majú preto rovnakú veľkosť 47°). Potom α = ? + 65° = 108°.
- (obr. 39) ? = 137° – 65° = 72°.

Potom α = 180° – 72° = 108°.

27.

$$P_{abcdefg} = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 75\cdot \sin 56°}^{=P_{aOb}} + \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 75\cdot 75\cdot \sin 39°}^{=P_{bOc}} +$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 75\cdot 77\cdot \sin 41°}^{=P_{cOd}} + \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 77\cdot 78\cdot \sin 79°}^{=P_{dOe}} +$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 78\cdot 38\cdot \sin 26°}^{=P_{eOf}} + \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 38\cdot 73\cdot \sin 34°}^{=P_{fOg}} +$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 73\cdot 100\cdot \sin 85°}^{=P_{gOa}} = 14\,782,428\,619 \ldots \approx$$

$$\approx 15\,000$$

Výsledok sme zaokrúhlili na dve platné cifry, pretože

- počet platných cifier v dĺžkach je 2 (a iba v jednom prípade 3),
- uhly sú zmerané s presnosťou na celé stupne, preto vo vypočítaných sínusoch sú platné spravidla nanajvýš 2 cifry (sínusy by mali väčšiu presnosť len pre uhly blízke 90°, pozri tiež obr. 17 na s. 106, diskutujte o dĺžke zelenej úsečky na tomto obrázku v prípade, že obidva uhly sa málo líšia od 90°).

28. a) Napríklad

$$P_{ABCD} = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot d\cdot a\cdot \sin\alpha}^{=P_{DAB}} + \overbrace{\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\gamma}^{=P_{BCD}} =$$

$$= \frac{1}{2}(74\cdot 237\cdot \sin 108° + 214\cdot 67\cdot \sin 138°) =$$

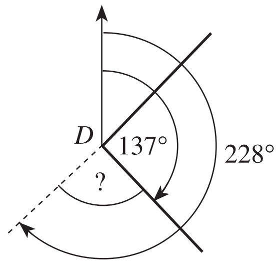
$$= 13\,136{,}811\ldots \approx 13\,000$$

b) Vo výsledku potrebujeme 5 platných cifier, preto všetky hodnoty použité vo výpočte potrebujeme s touto presnosťou, teda:

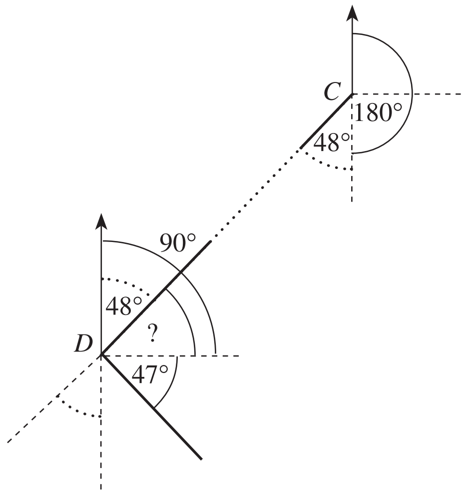
- strany c a d treba merať s presnosťou na milimetre, strany a, b by stačilo zmerať s presnosťou na centimetre,
- uhly treba merať s presnosťou na sekundy (pozri poznámku o počte platných cifier v hodnote sínusu v texte k obr. 17 na s. 106).

29. Podľa Euklidovej vety o odvesne sa
$|AB|^2 = |AD|\cdot|AC|$, teda v našom prípade
$21{,}4^2 = 14{,}7\cdot|AC|$,
odtiaľ $|AC| = \dfrac{21{,}4^2}{14{,}7} = 31{,}153\ldots \approx 31{,}2$ m.

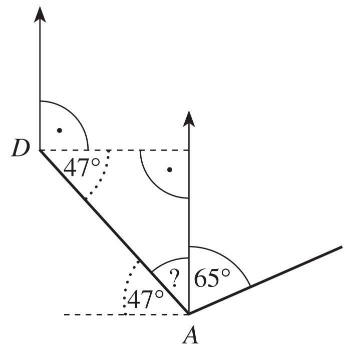
30. $|AC| = \dfrac{|AB|^2}{|AD|}$.



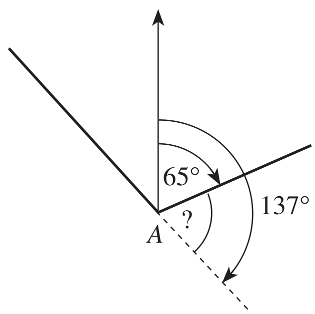
Obr. 36



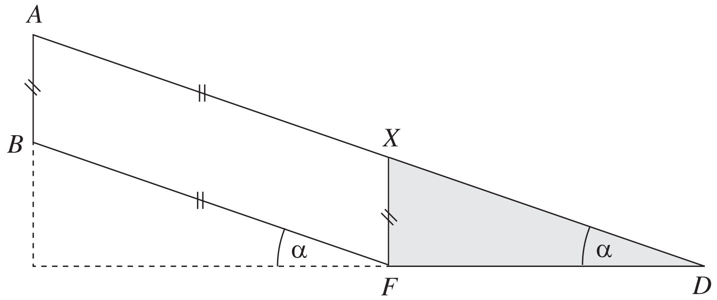
Obr. 37



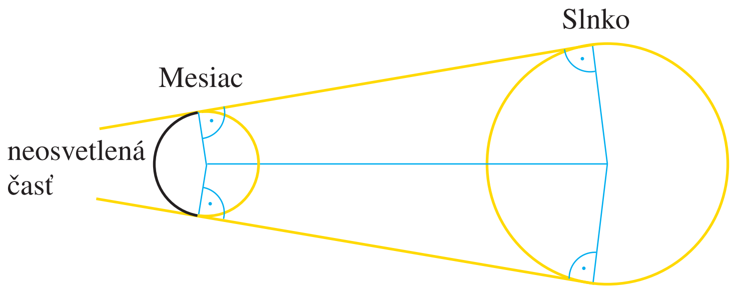
Obr. 38



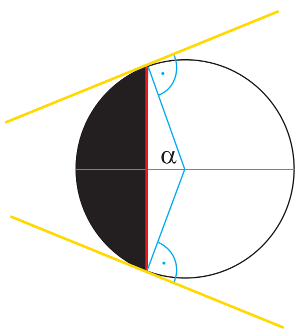
Obr. 39



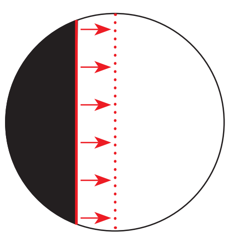
Obr. 40



Obr. 41



Obr. 42


Obr. 43

31. V bode D zistíme uhol, pod ktorým vidíme bod A (označme ho α). Potom sa približujeme k veži, až kým neprídeme na miesto F, z ktorého vidno bod B pod rovnakým uhlom α. Zistíme vzdialenosť DF. Z nej a z veľkosti uhla α vieme v trojuholníku DFX (pozri obr. 40) vypočítať dĺžku FX, ktorá je rovnaká ako $|AB|$, pretože $BAXF$ je rovnobežník:

$$|AB| = |XF| = |DF| \cdot \tan\alpha$$

33. a) Pozri obr. 41. Hranicu osvetlenej časti Mesiaca určujú body, v ktorých sa spoločné vonkajšie dotyčnice (žlté priamky na obrázku) kruhov predstavujúcich Slnko a Mesiac dotýkajú Mesiaca.

b) Otáčajme kruh – Mesiac z obr. 41 okolo spojnice stredov Mesiaca a Slnka. Otáčaním (rotáciou) kruhu vznikne guľa (predstavujúca Mesiac), otáčajúci sa čierno vyznačený kružnicový oblúk vytvorí guľový vrchlík – to je neosvetlená časť Mesiaca. Krajné body čierneho kružnicového oblúka opíšu pri tomto otáčaní kružnicu – tá predstavuje hranicu medzi osvetlenou a neosvetlenou časťou Mesiaca. Na obrázku 42 (pohľad zboku na guľu predstavujúcu Mesiac) je priemer hraničnej kružnice vyznačený červeno.

c) Ak budeme zväčšovať vzdialenosť obidvoch gúľ, bude sa uhol α na obr. 42 zväčšovať a hraničná kružnica sa bude približovať k hlavnej kružnici, ktorej priemer je na obr. 43 vyznačený bodkovane červeno.

34. b) V prvej rovnici pod obr. 19 stačí nahradiť číslo 86 000 hodnotou 20 000. Dostaneme $\dfrac{x}{1} = \dfrac{20\,000 + x}{400}$, odtiaľ postupne $400x = 20\,000 + x$, $399x = 20\,000$, $x = \dfrac{20\,000}{399} = 50{,}125... \approx 50$.

Potom $\cos\alpha \approx \dfrac{1}{50} = 0{,}02$ a $\alpha \approx 88{,}9°$.

c) Ak zopakujeme postup riešenia z úlohy 34 b) – v ktorom číslo 20 000 nahradíme hodnotou d – dostaneme $x = \dfrac{d}{399}$ a $\cos\alpha = \dfrac{1}{\frac{d}{399}}$. Čím väčšia bude hodnota d, tým väčší bude aj zlomok $\dfrac{d}{399}$ a tým menší bude podiel $\dfrac{1}{\frac{d}{399}}$. Pri veľmi veľkých hodnotách d sa číslo $\dfrac{1}{\frac{d}{399}}$ bude len málo líšiť od 0 (čím väčšie d, tým menšia bude táto odchýlka). Čím bližšie k 0 je hodnota $\cos\alpha$, tým menej sa uhol α líši od 90° (pri diskusii o tomto tvrdení odporúčame buď načrtnúť graf funkcie cosínus, alebo znázorniť kosínus na jednotkovej kružnici).

35. Dĺžky oblúka CA aj úsečky CD súvisia s veľkosťou uhla $\beta = \sphericalangle CED$, pretože $|CD| = |CE| \cdot \tan\beta = 1\,000 \cdot \tan\beta$ a $|\widehat{CA}| = \dfrac{\beta}{360} \cdot 2\pi r = \dfrac{\beta}{360} \cdot 2\pi \cdot r \cdot 1\,000$.

Obidva tieto vzťahy využijeme pri riešení úloh a) a b): v a) zo známej dĺžky úsečky CD vypočítame veľkosť uhla β a pomocou neho nájdeme dĺžku oblúka $|\widehat{CA}|$. V b) naopak z dĺžky $|\widehat{CA}|$ vypočítame veľkosť uhla β a pomocou nej nájdeme dĺžku CD.

a) Ak $|CD| = 50$, tak $\tan(\sphericalangle CED) = \dfrac{|CD|}{|CE|} = \dfrac{50}{1\,000} = 0{,}05$, odtiaľ $\beta = \sphericalangle CED = 2{,}862...°$.

Potom $|\widehat{CA}| = \dfrac{\beta}{360} \cdot 2\pi \cdot 1\,000 = 49{,}958...$.

b) Ak $|\widehat{CA}| = 50$, tak zo vzťahu $|\widehat{CA}| = \dfrac{\beta}{360} \cdot 2\pi \cdot 1\,000$, t. j. $50 = \dfrac{\beta}{360} \cdot 2\pi \cdot 1\,000$, dostaneme $\beta = \dfrac{50 \cdot 360}{2\pi \cdot 1\,000} = 2{,}864...°$. Potom $|CD| = |CE| \cdot \tan\beta = 1\,000 \cdot \tan 2{,}864... = 50{,}041...$.

36. V pravouhlom trojuholníku vypočítame pomocou Pytagorovej vety DE.
Výška hory je $|AD| = |DE| - |AE| = |DE| - 1\,000$.

37. $P_{ABCDEFG} = \overbrace{5\,387{,}98...}^{=P_{ABC}} + \overbrace{1\,329{,}63...}^{=P_{ACD}} + \overbrace{2\,302{,}96...}^{=P_{ADE}} + \overbrace{6\,542{,}78...}^{=P_{AEF}} + \overbrace{2\,930{,}13...}^{=P_{AFG}} \approx 18\,500$.

39. $P_{ABCDE} = \dfrac{1}{2}[ab \sin\beta - ac \sin(\beta + \gamma) + ad \sin(\beta + \gamma + \delta) + bc \sin\gamma - bd \sin(\gamma + \delta) + cd \sin\delta]\cdot$
(vynechali sme stranu $e = EA$)

40. $P_{ABCDE} = \dfrac{1}{2}[116 \cdot 85 \cdot \sin 129° - 116 \cdot 83 \cdot \sin 226° + 116 \cdot 113 \cdot \sin 351° + 85 \cdot 83 \cdot \sin 97° - 85 \cdot 113 \cdot \sin 222° + 83 \cdot 113 \cdot \sin 125°] = 16\,825{,}079\,7... \approx 17\,000$ (prečo sme výsledok zaokrúhlili na 2 platné cifry?).

41. $P_{ABCDE} = \dfrac{1}{2}[164{,}95 \cdot 88{,}41 \cdot \sin 102{,}183...° - 164{,}95 \cdot 121{,}69 \cdot \sin 206{,}883...° + 164{,}95 \cdot 115{,}89 \cdot \sin 319{,}966...° + 88{,}41 \cdot 121{,}69 \cdot \sin 104{,}7° - 88{,}41 \cdot 115{,}89 \cdot \sin 217{,}783...° + 121{,}69 \cdot 115{,}89 \cdot \sin 113{,}083...°] = 20\,346{,}242... \approx 20\,300$
(výsledok sme zaokrúhľovali na 3 platné cifry, pretože toľko platných cifier možno predpokladať vo vypočítaných hodnotách sínusov – pozri text k obr. 17 na s. 106).

Literatúra

[1] Anglin, W. S.: Mathematics: A Concise History and Philosophy. Springer Verlag : New York – Berlin – Heidelberg, 1994. ISBN 0-387-94280-7.

[2] Berggren, J. L.: Episodes in the mathematics of medieval Islam, Springer Verlag, 2003. ISBN0387406050, 9780387406053.

[3] Dhananjay, A. J.: Engineering Graphics. Tata McGraw-Hill : New Delhi, 2008. ISBN 0070669066, 9780070669062.

[4] Goetsch, D. L.: Technical drawing. Cengage Learning, 2004. ISBN 1401857604, 9781401857608.

[5] Heilbron, J. L.: Geometry civilized: history, culture, and technique. Oxford University Press, 2000. ISBN0198506902, 9780198506904.

[6] Herz-Fischler, R.: A mathematical history of division in extreme and mean ratio. Wilfrid Laurier Univ. Press, 1987, ISBN 0889201528, 9780889201521.

[7] Høyrup, J.: The rare traces of constructional procedures in "practical geometries". Preprints og reprints 2006 Nr. 2. Roskilde University, Section for philosophy and science studies.

[8] Huerta, S.: Oval Domes: History, Geometry and Mechanics. Nexus Network Journal 9 (2007), s. 211 – 248.

[9] Lang, R. J.: Origami and Geometric Constructions. In: Barry Cipra, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Tom Rodgers (editors): Tribute to a mathemagician. A K Peters, Ltd., 2005. ISBN1568812043, 9781568812045. Dostupné na *http://www.langorigami.com.*

[10] Martin, G. E.: Geometric constructions. Springer Verlag, 1998. ISBN 0387982760, 9780387982762.

[11] Middleton, G. A. T.: Modern Buildings, Their Planning, Construction And Equipment. Vol. V. The Caxton Publishing Company : London, 1905.

[12] Rosin, P. L.: On Serlio's constructions of ovals. The Mathematical Intelligencer Volume 23, Number 1, s. 58 – 69.

[13] Sandifer, E.: Van Schooten's Ruler Constructions. Dostupné na *http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=268&bodyId=153.*

[14] Sandifer, E.: How Euler did it: The Euler line. Dostupné na *http://www.maa.org/editorial/euler/HEDI%2063%20Euler%20line.pdf.*

[15] Sarhangi, R.: Geometric Constructions and their Arts in Historical Perspective. Dostupné na *http://pages.towson.edu/gsarhang/5.pdf.*

[16] Serlio, S: Tutte l'opere d'architettura di Sebastiano Serlio Bolognese (Buch 1 – 7), Venetia, 1584. Dostupné na *http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/serlio1584.*

[17] Smith, R. D. – Peterson, J. C.: Mathematics for Machine Technology. Cengage Learning, 2008. ISBN1428336567, 9781428336568.

[18] Snel, W.: Eratosthenes batavus, de terrae ambitus vera quantitate. Leiden, Jodocus Colster, 1617.

[19] Swetz, F. J.: Learning Activities from the History of Mathematics. Walch Publishing, 1994. ISBN 0825122643, 9780825122644.

[20] Wallach, P. R.: Fundamentals of Modern Drafting. Cengage Learning, 2002. ISBN1401809464, 9781401809461.