Zbyněk Kubáček

MATEMATIKA

pre **3.** ročník gymnázia

a **7.** ročník gymnázia
s osemročným štúdiom

1. časť

SPN

SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO

SPN

Zbyněk KUBÁČEK

MATEMATIKA

pre **3.** ročník gymnázia

a **7.** ročník gymnázia
s osemročným štúdiom

1. časť

Autor © **doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, PhD.**, 2012

Foto © Pavel Čisárik, 2012

Lektori: Mgr. Tatiana Hiková
PaedDr. Iveta Kohanová, PhD.

Grafický dizajn © SPN – Mladé letá, s. r. o.

Obálka © akademický maliar Peter Galvánek

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod č. 2012-17114/49916:4-919 zo dňa 5. novembra 2012 ako učebnicu matematiky pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom, 1. časť. Schvaľovacia doložka má platnosť 5 rokov.

Prvé vydanie, 2012

ISBN 978-80-10-02288-5

OBSAH

ÚVOD

Používanie elektrospotrebičov bez toho, aby ste si prečítali návod na použitie, môže ohrozovať život. Niečo podobné platí aj pre používanie učebnice. Nie všetky práčky sa ovládajú úplne rovnako a nie všetky učebnice sú rovnako napísané.

MATEMATIKA MÁ UČIŤ MYSLIEŤ, PRECVIČOVACÍMI ÚLOHAMI TO VŠAK NEDOSIAHNEME

Táto učebnica chce prispieť k napĺňaniu hesla **matematika učí myslieť**. Ak totiž tento reklamný slogan myslíme vážne, malo by to byť vidno aj na vyučovaní. Osvedčeným prostriedkom na rozvoj myslenia je riešenie úloh. Musia to však byť úlohy, v ktorých **je o čom** rozmýšľať. Tento cieľ nedokážu splniť precvičovacie úlohy na opakovanie postupu, ktorý žiakom predtým niekto ukázal. Ak chceme rozmýšľať a objavovať, musíme to robiť na úlohách, ktoré sú pre žiaka nové. Jedna z možností, ako to dosiahnuť, je jednoduchá: namiesto toho, aby sme predviedli vzorové riešenie a od žiakov očakávali iba jeho zopakovanie, môžeme ich zapojiť hneď do riešenia „vzorovej“ úlohy. Preto v tejto učebnici odporúčame, aby sa žiaci sami pokúsili objaviť aj tie riešenia, ktoré sú uvedené v texte.

AHA-POCIT JE DÔLEŽITÁ MOTIVÁCIA

S rozmýšľaním a objavovaním súvisí **AHA-pocit** – radosť z toho, že som niečo pochopil, na niečo sám prišiel. Ten je oveľa trvalejší a inšpiratívnejší ako 100-násobné použitie nepochopeného návodu. Ak chceme tento pocit u žiakov navodiť, nevystačíme pri vyučovaní s postupom výklad-vzorové úlohy-precvičovacie úlohy, v ktorom sa žiak dostane k slovu až vtedy, keď už niet čo objavovať. Vyučovať takto matematiku je niečo podobné, ako prezradiť čitateľovi detektívky hneď na prvej strane, že vrah je záhradník. Pripravujeme žiakov o možnosť objavov, ktoré mohli urobiť sami. Navyše tak predstavujeme vznik matematických poznatkov v skreslenej podobe. Dospelo sa k nim totiž presne opačným postupom: najprv sa hľadalo riešenie konkrétnych úloh, od neho potom viedla cesta k formulácii pojmov a teórie.

V ŽIVOTE Z MATEMATIKY KAŽDÝ VYUŽIJE IBA NIEČO, TO OSTATNÉ BY SA VŠAK NEMAL UČIŤ ZBYTOČNE

Rozvoj myslenia nie je jediný dôvod na vyučovanie matematiky (keby to bolo tak, mohli by sme náplň školskej matematiky vybrať takmer ľubovoľne). Potrebujeme sa tiež oboznámiť s niektorými konkrétnymi matematickými nástrojmi. Vtip je v tom, že každý z nás z nich v živote využije iba niektoré – a nikto vopred nevie, ktoré to budú. To je ďalší dôvod na to, aby sme sa snažili všetko, čo v matematike učíme, využiť na **rozvoj žiakovho myslenia**. Inak by sa totiž žiak tú časť matematiky, s ktorou sa už v živote nestretne, učil vlastne zbytočne.

BEZ MATEMATIZÁCIE NIE JE VYUČOVANIE MATEMATIKY ÚPLNÉ

Používanie matematiky úzko súvisí s **matematizáciou** – problém, ktorý treba riešiť, preformulujeme na abstraktnú matematickú úlohu a na jej riešenie potom použijeme vhodné matematické nástroje. Tú istú abstraktnú formuláciu pritom môže mať problém z reálneho sveta aj vymyslená hádanka. V tejto učebnici sme sa snažili uprednostniť reálne problémy, lebo tie plnia ešte jednu dôležitú úlohu – ukazujú význam matematiky v svete okolo nás.
Matematizácia často zaberie viac času, ako vlastné riešenie abstraktnej matematickej úlohy. Mohlo by sa preto zdať, že pri vyučovaní matematiky by bolo rozumnejšie nezdržiavať sa matematizáciou a riešiť len úlohy sformulované už v abstraktnej podobe. To však nie je dobrý nápad. Ak sa obmedzíme na riešenie abstraktných úloh, je veľmi pravdepodobné, že naši žiaci budú mať neskôr problémy s používaním matematiky.

Podobné nebezpečenstvo ako čisto abstraktné formulácie príkladov v sebe skrývajú aj typové úlohy. Tie vznikajú z dobre mienenej (ale žiaľ scestnej) snahy niektorých učiteľov pomôcť žiakom. Preto vytvoria sériu typových úloh, ktorých riešenie sa žiaci naučia. Typický príklad sú úlohy o pohybe: dve autá vyrazia oproti sebe ..., však to poznáte. Iný častý – a smutný – prípad je riešenie úloh z kombinatoriky metódou *zamyslite sa, či sú to kombinácie, variácie alebo permutácie*. Vtip je v tom, že sa tým úloha ako *prostriedok* zamieňa za úlohu ako *cieľ*. Cieľom vyučovania matematiky totiž nie je naučiť sa riešenie vybranej skupiny úloh. Takto vyučovaní žiaci sú často schopní riešiť *iba* typové úlohy. Tie však väčšina z nich zažije v živote nanajvýš dvakrát: raz, keď sa ich sami učia v škole a znova o nejakých 30 rokov, keď sa ich – nedajbože – budú učiť ich deti. Na rozdiel od toho sa ukazuje, že žiak, ktorého sme viedli k tomu, aby pristupoval ku každému príkladu samostatne, dokáže riešiť pomerne veľké spektrum úloh (medzi nimi aj tie typové, o ktorých však netuší, že sú typové). A práve to by mal byť jeden z výstupov dobre vyučovanej matematiky: **schopnosť žiakov riešiť nové problémy** – teda také, s ktorými sa predtým nestretli. Preto chceme, aby žiaci k väčšine úloh v tejto učebnici pristupovali ako k samostatnému problému, nie ako k variáciám na riešenie z úvodu kapitoly.

Žiak odchovaný na typových úlohách často nevie iné úlohy vyriešiť

Všetky predchádzajúce úvahy ovplyvnili výslednú podobu tejto učebnice. Snažili sme sa ju spracovať tak, aby ju žiak mohol použiť ako samostatný **učebný zdroj** (teda bez spolupôsobenia učiteľa). Preto je možné, že niektoré vysvetlenia alebo komentáre bude učiteľ pokladať za dlhé či rozvláčne. Mal by si však uvedomiť, že nie sú určené jemu, ktorý túto látku už ovláda, ale žiakovi, ktorý by ju mal samostatne objaviť a pochopiť.

Učebnicu by mal byť schopný používať žiak aj bez pomoci učiteľa

Matematiku možno **vysvetľovať, učiť a učiť sa** mnohými spôsobmi. Učebnica, akokoľvek by bola napísaná, môže ponúknuť iba jeden z nich. Práve preto si nemyslíme, že učiteľ by mal pri vyučovaní postupovať vždy rovnako ako učebnica. Naopak – ak zvolí odlišný postup, môže tým zväčšiť pravdepodobnosť, že žiak – vďaka tomu, že bude mať viacero pohľadov na ten istý problém – vec pochopí. Preto je len na učiteľovi, ako, kedy a v akom rozsahu zapojí učebnicu do svojho vyučovania. Túto knihu teda chápeme ako jednu z možných alternatív, ktorá môže občas žiakovi poskytnúť pohľad odlišný od učiteľovho. Na druhej strane budeme radi, ak sa učiteľ s niektorými postupmi, ktoré sme v učebnici použili, stotožní a začlení ich do svojho vyučovania.

Záleží len na učiteľovi, ako učebnicu zapojí do vyučovania

Autor

Za pomoc a spoluprácu pri vzniku tejto učebnice sme zaviazaní mnohým ľuďom. Na tomto mieste môžeme poďakovať len niektorým z nich.
Lektorkám PaedDr. Ivete Kohanovej, PhD. a Mgr. Tatiane Hikovej patrí vďaka za starostlivo vypracované posudky, ktoré pomohli odstrániť viaceré nedostatky a slabé miesta pôvodného rukopisu.
Za povzbudenie a morálnu podporu sme zaviazaní PaedDr. Jánovi Žabkovi a Mgr. Jane Šmahovskej.

Autor

1 NIEKEDY JE ODPOVEĎOU SÚBOR ÚDAJOV

Ak chceme zistiť, ako vysokí sú žiaci v našej triede, nestačí poznať výšku iba jedného z nich. Každý môže byť inak vysoký, preto treba zmerať všetkých. Dostaneme tak súbor údajov, do ktorého každý žiak triedy prispeje jednou hodnotou – svojou výškou. V 25-člennej triede by sme mohli dostať napr. súbor

168, 155, 155, 197, 183, 179, 191, 185, 169, 172, 185, 177, 182,
191, 181, 176, 174, 169, 160, 187, 169, 171, 182, 184, 157.

Otázka: *Ako vysokí sú žiaci v našej triede?* je príkladom otázky, na zodpovedanie ktorej potrebujeme zozbierať nejaké údaje – v tomto prípade výšky žiakov triedy.

Údaje, ktoré zhromažďujeme, nemusia byť iba čísla. Napríklad odpoveďou na otázku *Akú farbu očí majú žiaci našej triedy?* bude súbor údajov, do ktorého každý zo žiakov prispeje jednou z možností *hnedá – modrá – zelená – iná*. Súbor môže vyzerať napr. takto:

hnedá, hnedá, iná, zelená, hnedá, modrá, hnedá, iná, modrá, ...

V tejto a nasledujúcich dvoch kapitolách sa sústredíme na takéto súbory údajov. Vždy to budú údaje o skupine objektov, ktoré majú nejakú spoločnú vlastnosť – v úvodných dvoch príkladoch touto vlastnosťou je *byť žiakom našej triedy*.

ÚLOHA

1. Uveďte ďalšie príklady otázok, ktoré vedú k takýmto súborom hodnôt.

Najprv ukážeme, ako zozbierané údaje usporiadať a prehľadne graficky znázorniť. V ďalších dvoch kapitolách opíšeme, ako možno súbor údajov stručne charakterizovať pomocou niekoľkých čísel – modu, mediánu, strednej hodnoty a rozptylu.

1.1 Štatistický súbor

- Základný súbor, štatistická jednotka, štatistický znak
- Výberový súbor

ZÁKLADNÝ SÚBOR, ŠTATISTICKÁ JEDNOTKA, ŠTATISTICKÝ ZNAK

V obidvoch príkladoch z úvodu tvorili súbor hodnôt údaje získané od *všetkých*, na ktorých sa vzťahovala naša otázka. Súbor všetkých objektov (v našich príkladoch žiakov), na ktoré sa položená otázka vzťahuje, sa nazýva **základný súbor**. Jednotlivé prvky tohto súboru (v našom prípade jednotliví žiaci) sú **štatistické jednotky**. Údaje, ktoré zhromažďujeme, sú hodnoty nejakého **štatistického znaku**, ktorý možno zistiť pre každú z týchto štatistických jednotiek – v prvom príklade bola znakom výška, v druhom farba očí.

VÝBEROVÝ SÚBOR

Zisťovať hodnoty skúmaného znaku pre *všetky* prvky základného súboru

- nie je vždy možné
  Dôvodom môže byť napr. príliš veľký rozsah základného súboru, alebo nemožnosť získať údaje zo všetkých jeho prvkov. Nedokážeme napr. zistiť výšku všetkých dubov letných rastúcich na území Slovenska v roku 2010 alebo rozpätie krídel všetkých jedincov husi divej, ktoré hniezdili na našom území v roku 2009.

Rovnako tak nemôžeme pre každý vyrobený radiátor zisťovať, aký najväčší vnútorný tlak znesie (pozri text pri obrázku), pretože sa pri tom radiátor zničí.

Pri skúške tlakovej odolnosti sa radiátor vystaví približne 1,7-násobne väčšiemu vnútornému tlaku, než je prevádzkový tlak, na ktorý je radiátor vyrábaný (ten je spravidla 1 MPa). Pri tejto skúške sa radiátor môže zdeformovať, ale nesmie sa roztrhnúť. Ak radiátor skúške vyhovie, pokračuje sa v jeho zaťažení zvyšujúcim sa tlakom až do jeho porušenia.

- a často to ani nie je potrebné
  V mnohých prípadoch stačí namiesto základného súboru skúmať iba nejakú jeho časť, o ktorej máme dôvod predpokladať, že sa správa podobne ako celý základný súbor. Typickým príkladom sú prieskumy verejnej mienky. Dôležitou otázkou (budeme sa jej venovať v nasledujúcom ročníku) je, nakoľko si môžeme byť istí, že informácie získané z tohto menšieho súboru možno zovšeobecniť na celý základný súbor.

Pri niektorých príkladoch, ktoré uvedieme v tejto kapitole (zisťovanie krvnej skupiny, farba vlasov obyvateľov USA, výsledky predškolákov v skoku do diaľky z miesta) nájdete aj krátku poznámku o tom, ako je to so zovšeobecnením získaných informácií na celý základný súbor.

Preto sa v praxi často namiesto celého základného súboru skúma iba jeho časť. Časti – matematicky *podmnožiny* – základného súboru sa nazývajú **výberové súbory**. Základný a výberové súbory sa označujú spoločným názvom **štatistické súbory.** Štatistický súbor sa teda skladá zo štatistických jednotiek – tie sú opísané nejakou spoločnou vlastnosťou, pričom súbor môže, ale nemusí obsahovať všetky prvky, ktoré majú túto spoločnú vlastnosť.

ÚLOHA

2. Opíšte základný súbor, štatistické jednotky a skúmaný štatistický znak pre otázky, ktoré ste navrhli v úlohe 1.

1.2 Početnosť, stĺpcový a kruhový diagram

Či už získavame údaje z celého základného súboru alebo iba z nejakej jeho časti, výsledkom bude vždy súbor údajov (hodnôt). Prvou úlohou po zozbieraní údajov je prehľadne ich spracovať, spravidla do podoby tabuliek alebo grafov. Ukážme si to na príklade. Bude ním výsledok prieskumu, pri ktorom sa zisťovalo zastúpenie farieb vlasov u obyvateľov USA narodených v rokoch 1957 – 1965. V tabuľke 1 uvádzame farbu vlasov 3 036 belochov z tohto prieskumu.

Informácia, že ide o belochov, nemá žiadny rasistický podtón. Zastúpenie farbieb vlasov u belochov sa totiž výrazne líši od ich zastúpenia napr. u černochov.

štatistický znak **absolútna početnosť** **relatívna početnosť**

hodnota štatistického znaku

farba vlasov	absolútna frekvencia (početnosť)	relatívna frekvencia (početnosť)
svetloplavá	36	1 %
plavá	465	15 %
svetlohnedá	446	15 %
hnedá	1 761	58 %
čierna	231	8 %
červená	97	3 %
CELKOM	3 036	100 %

rozdelenie absolútnej početnosti **rozsah súboru**

Tab. 1
Farba vlasov obyvateľov USA narodených v rokoch 1957 – 1965: muži – belosi. Relatívne početnosti sú zaokrúhlené na celé percentá.

Číslo 3 036 – počet štatistických jednotiek tvoriacich štatistický súbor, ktorý opisujeme – sa nazýva **rozsah súboru**. Počet výskytov danej hodnoty v súbore je jej **absolútna frekvencia (početnosť)**: napr. hodnota *svetloplavá* má v našom súbore absolútnu frekvenciu (početnosť) 36 – teda 36 belochov zo skúmaného súboru malo svetloplavé vlasy. **Relatívna frekvencia (početnosť)** tejto hodnoty je približne 1 % – hodnota *svetloplavá* tvorí približne 1 % zo všetkých 3 036 hodnôt súboru (alebo trochu inak: v skúmanom súbore bolo približne 1 % svetloplavých mužov – belochov).

ÚLOHA

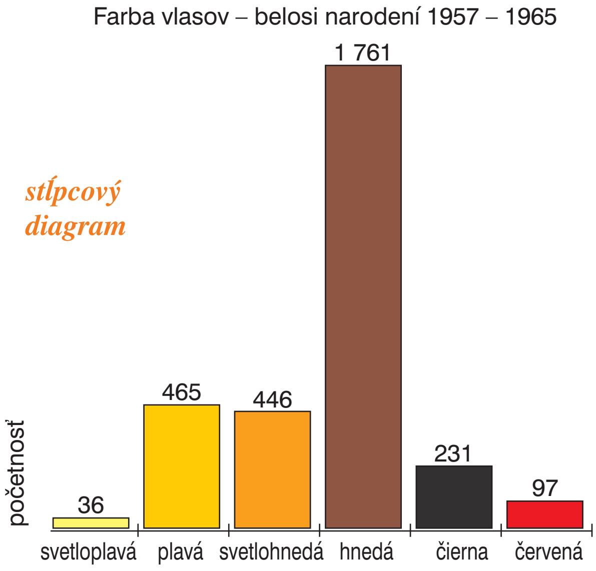
3. a) Ako sme vypočítali relatívnu početnosť 1 % pre hodnotu *svetloplavá*?
b) Napíšte vzorec, ako vypočítať relatívnu početnosť z absolútnej početnosti.

Súhrn údajov o absolútnej početnosti všetkých hodnôt znaku sa nazýva **rozdelenie absolútnej početnosti**.

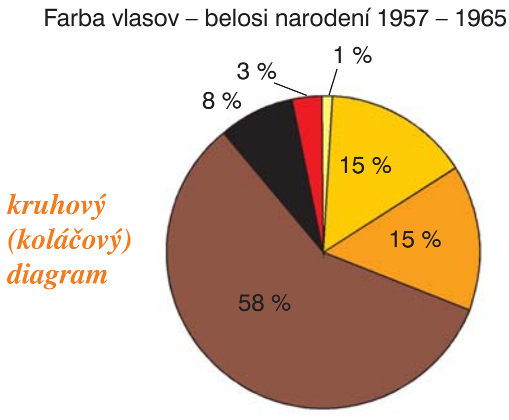
Z formálneho hľadiska je rozdelenie absolútnej početnosti funkcia, ktorá každej hodnote znaku priradí jej absolútnu početnosť (nezávislou premennou je teda hodnota znaku, závislou premennou absolútna početnosť tejto hodnoty).

Podobne používame aj názov **rozdelenie relatívnej početnosti**.
Graficky znázorňujeme rozdelenie početnosti – či už absolútnej alebo relatívnej – najčastejšie stĺpcovým alebo kruhovým diagramom (obr. 1 a 2).

Stĺpcový diagram má ovela širšie možnosti použitia ako kruhový. Možno ním znázorňovať luboVoľnú funkciu s konečným počtom hodnôt nezávislej premennej (rozdelenie početností je iba jedným špeciálnym prípadom takýchto funkcií).
Na rozdiel od toho kruhový diagram má velmi úzko vymedzené použitie: v prípade celku rozdeleného na niekolko častí ním znázorňujeme, akú časť celku tvoria jednotlivé časti. Na chyby pri používaní kruhových diagramov sa pozrieme v úlohe 15.



Obr. 1
Rozdelenie absolútnej početnosti farieb vlasov z tab. 1 vyjadrené stĺpcovým diagramom.



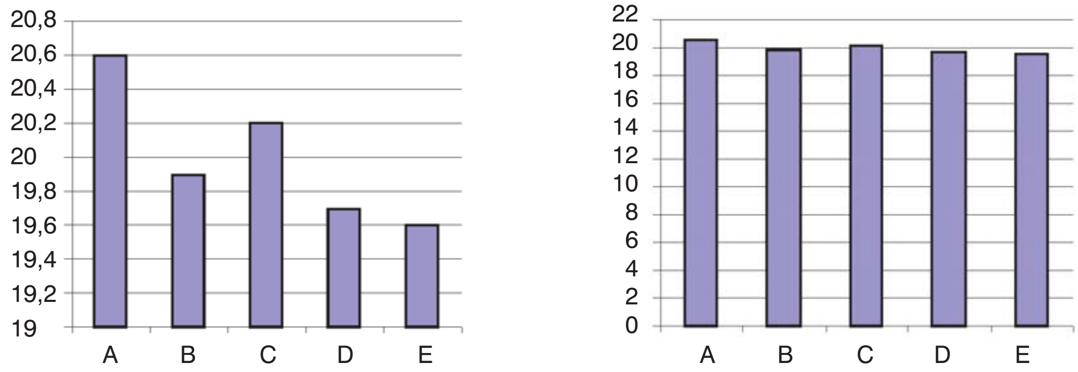
Obr. 2
Rozdelenie relatívnej početnosti farieb vlasov z tab. 1 vyjadrené kruhovým diagramom.

Ak bolo uvedených 3 036 mužov-belochov vhodne vybraných (napr. náhodným výberom z celého základného súboru belochov-obyvateľov USA narodených v rokoch 1957 – 1965), je tento počet dostatočný na to, aby sme mohli pokladať za skoro isté, že relatívna početnosť jednotlivých farieb vlasov zistená v tomto súbore sa len málo líši od ich relatívnej početnosti v celom základnom súbore. S veľkou pravdepodobnosťou teda platí, že napr. okolo 58 % belochov-obyvateľov USA narodených v rokoch 1957 – 1965 malo hnedé vlasy.

ÚLOHA

4. Doplňte nasledujúce vety: V stĺpcovom diagrame je výška stĺpca priamoúmerná .... V kruhovom diagrame je .... priamoúmerná relatívnej početnosti príslušnej hodnoty.

Pripomeňme problém, s ktorým sme sa stretli už v prvom ročníku: V stĺpcových diagramoch niekedy nie sú zobrazené celé stĺpce, ale iba ich horná časť, pozri obrázok vľavo. Robí sa to spravidla vtedy, keď medzi znázorňovanými hodnotami sú len malé rozdiely, ktoré by pri zobrazení celej výšky stĺpcov zanikli (porovnaj obrázok vľavo s obrázkom vpravo).



svetloplavá	50
plavá	577
svetlohnedá	686
hnedá	1 641
čierna	115
červená	119

Tab. 2
Farba vlasov obyvateľov USA narodených v rokoch 1957 – 1965: ženy – belošky.

V NASLEDUJÚCICH ÚLOHÁCH MÔŽETE NA ZOSTROJENIE DIAGRAMOV POUŽIŤ VHODNÝ SOFTVÉR. V ÚLOHE 5 VŠAK CHCEME, ABY STE OBIDVA DIAGRAMY ZOSTROJILI „VLASTNORUČNE“. CHCEME SA UISTIŤ, ČI VÁM JE JASNÝ VZŤAH MEDZI ZNÁZORŇOVANÝMI POČETNOSŤAMI A VÝŠKOU STĹPCOV, RESP. VEĽKOSŤOU STREDOVÝCH UHLOV.

V tabuľke 2 uvádzame farbu vlasov žien – belošiek z toho istého prieskumu.

ÚLOHY

5. Znázornite absolútnu početnosť farieb z tabuľky 2 stĺpcovým diagramom a ich relatívnu početnosť kruhovým diagramom.

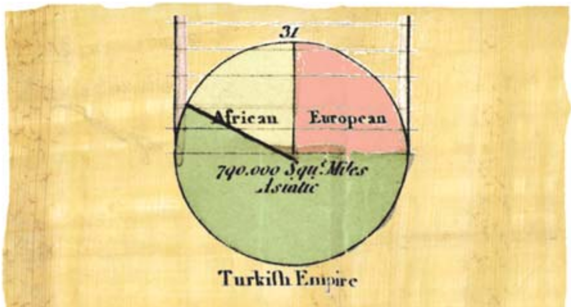
AK STE V ÚLOHE 5 RELATÍVNE POČETNOSTI A VEĽKOSTI STREDOVÝCH UHLOV ZAOKRÚHĽOVALI NA CELÉ ČÍSLA, MALI BY STE NARAZIŤ NA PROBLÉM, KTORÝ MÔŽE VZNIKNÚŤ PRI SČÍTANÍ ZAOKRÚHLENÝCH HODNÔT.

6. V riešení úlohy 5 skontrolujte, že
a) súčet relatívnych početností zaokrúhlených na celé percentá je 101 % (teda viac ako 100 %, ktoré predstavujú celok),
b) súčet veľkostí stredových uhlov zaokrúhlených na celé stupne je 359° (teda menej, ako 360°, ktoré predstavujú celý kruh).
c) V diskusii sa pokúste vysvetliť, prečo súčet zaokrúhlených hodnôt nemusí byť 100 %, resp. 360°.

AK TAKÁTO SITUÁCIA NASTANE, ZMENÍME NIEKTORÝ/NIEKTORÉ ZO SČÍTANCOV TAK, ABY SÚČET BOL 100 %, RESP. 360° (TO MÔŽEME DOSIAHNUŤ TAK, ŽE NIEKTORÚ HODNOTU NAMIESTO NADOL ZAOKRÚHLIME NAHOR ALEBO NAOPAK). SOFTVÉR NA KRESLENIE KRUHOVÝCH DIAGRAMOV SPRAVIDLA TAKÚTO ÚPRAVU UROBÍ AUTOMATICKY.

d) Použite na zostrojenie kruhového diagramu z úlohy 5 vhodný softvér. Skontrolujte, či a ako sú na zostrojenom diagrame upravené hodnoty relatívnych početností.

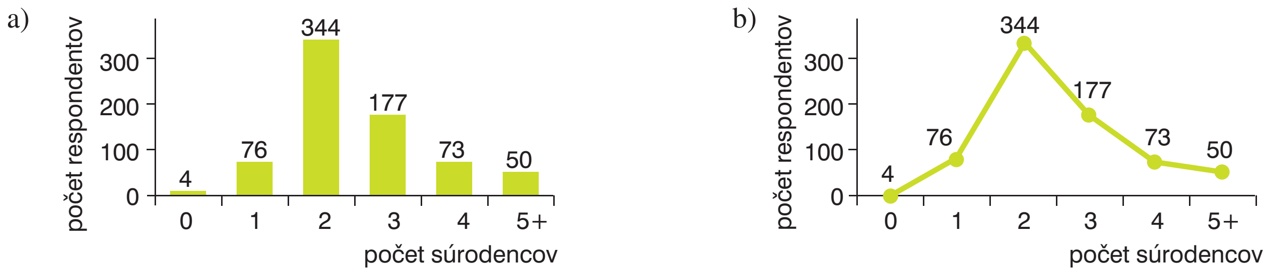
7. Opíšte rozdiely medzi výskytom jednotlivých farieb vlasov medzi mužmi – belochmi (tab. 1 na s. 10) a ženami – beloškami (tab. 2).



Historicky prvý kruhový diagram z Playfairovho spisu The Statistical Breviary (1801) znázorňuje pomer medzi rozlohou ázijskej, africkej a európskej časti vtedajšieho Turecka.

Stĺpcový aj kruhový (koláčový) diagram použil ako prvý William Playfair (1759 – 1823), škótsky vynálezca a publicista, v svojich štatistických atlasoch – stĺpcový v roku 1786, kruhový v roku 1801. Pre zaujímavosť poznamenajme, že Playfair bol účastníkom dobytia Bastily, ktoré bolo symbolickým začiatkom Francúzskej revolúcie v r. 1789.

Grafy a diagramy pokladá väčšina z nás za názornejšie ako tabuľku údajov. Nebolo to tak vždy. Približne od polovice 17. až do konca 18. storočia boli uprednostňované tabuľky – dokonca aj grafy skonštruované automatickými prístrojmi na meranie napr. teploty alebo tlaku sa z grafickej podoby prepisovali do tabuliek. Do vedeckých časopisov prenikli grafy až v 30. rokoch 19. storočia.



Obr. 3
Niekedy sa stĺpcový diagram (na obr. a)) nahrádza spojnicovým (obr. b)).

(Diagramy znázorňujú jeden z výsledkov prieskumu, ktorého sa zúčastnilo 724 žiakov 8. ročníkov základných škôl. Odpovedali na otázku: „Koľko máš súrodencov?“ Symbol 5+ označuje odpoveď „5 a viac“.)

1.3 Ako sprehľadniť súbor hodnôt

- Triedenie, triedny interval, absolútna a relatívna triedna početnosť
- Zjednodušenie pomáha objaviť štruktúru „skrytú v údajoch“
- Reprezentant triedy
- Čím sa odlišujú histogram a stĺpcový diagram

Ak má byť stĺpcový diagram prehľadný, nesmie obsahovať veľa stĺpcov. Napríklad diagram na obr. 1 na s. 11 sa skladá zo 6 stĺpcov. Je to vďaka tomu, že skúmaný štatistický znak – farba vlasov – mohol nadobúdať iba 6 rôznych hodnôt (pozri tab. 1). Existujú však štatistické znaky, ktoré môžu nadobúdať aj veľmi veľký počet hodnôt. Typickým príkladom je výška človeka alebo jeho hmotnosť.

ÚLOHA

8. Uveďte ďalšie príklady štatistických znakov, ktoré môžu nadobúdať veľký počet rôznych hodnôt.

Ukážeme si teraz štandardný postup, ako zjednodušiť a sprehľadniť súbor, ktorý obsahuje väčší počet rôznych hodnôt (za *väčší počet* sa v takomto prípade pokladá viac ako 10 – 15 rôznych hodnôt).

Skok do diaľky z miesta je jedno z cvičení, ktoré sa používajú na zistenie úrovne pohybových schopností detí.

JE VÁM JASNÉ ZNÁZORNENIE ÚDAJOV NA OBR. 4 ?

Z OBR. 6 SI MÔŽEME UROBIŤ PREDSTAVU AJ O TOM, AKO BY VYZERAL STĹPCOVÝ DIAGRAM ABSOLÚTNYCH POČETNOSTÍ TOHTO SÚBORU.

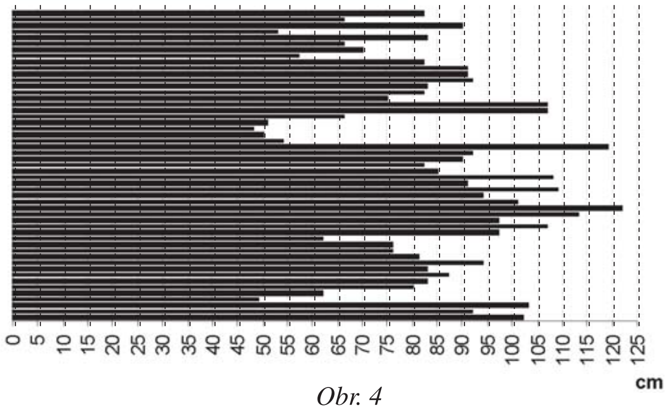
PRÍKLAD

Skok do diaľky z miesta

Študentka vysokej školy robí prieskum pohybových schopností detí. Zapojilo sa doňho 51 predškolákov vo veku 5 – 7 rokov z dvoch materských škôl. V skoku do diaľky z miesta dosiahli tieto deti nasledujúce výsledky (v cm, každému dieťaťu zodpovedá jedna dĺžka skoku):

102, 92, 103, 49, 62, 80, 83, 87, 83, 94, 81, 76, 76, 62, 97, 107, 97, 113, 122, 101, 94, 109, 91, 108, 85, 82, 90, 92, 119, 54, 50, 48, 51, 66, 107, 107, 75, 82, 83, 92, 91, 91, 82, 57, 70, 66, 83, 53, 90 , 66, 82.

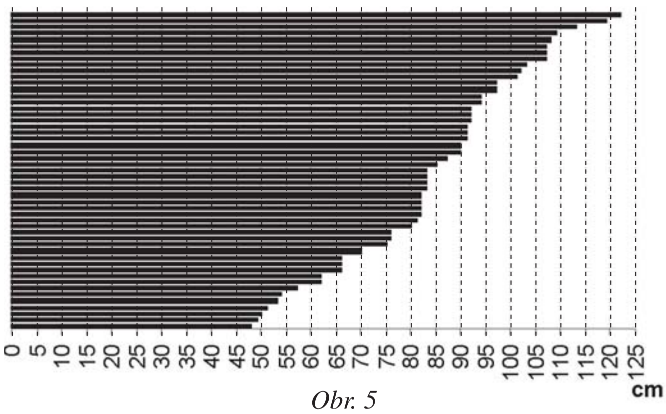
Na obr. 4 sú tieto údaje znázornené graficky (prvý údaj – 102 cm – predstavuje najnižšia vodorovná čiara, posledný údaj – 82 cm – najvyššia).



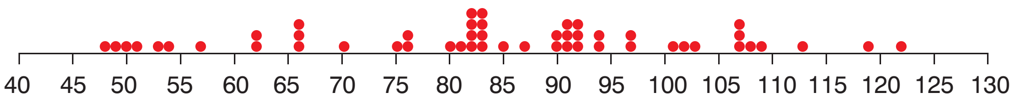
Obr. 4
Údaje o dĺžke skoku z miesta do diaľky (51 detí predškolského veku).

V tejto podobe – jedno, či číselnej alebo grafickej – je získaný súbor čísel neprehľadný. Prvá vec, ktorú môžeme spraviť, je zoradiť údaje podľa veľkosti (zoradený súbor z obr. 4 je na obr. 5):

48, 49, 50, 51, 53, 54, 57, 62, 62, 66, 66, 66, 70, 75, 76, 76, 80, 81, 82, 82, 82, 82, 83, 83, 83, 83, 85, 87, 90, 90, 91, 91, 91, 92, 92, 92, 94, 94, 97, 97, 101, 102, 103, 107, 107, 107, 108, 109, 113, 119, 122.



Obr. 5
Súbor údajov z obr. 4 zoradený podľa veľkosti.



Obr. 6
Ak údaje znázorníme na číselnú os, prirodzene ich tým zoradíme podľa veľkosti. Vidíme, že súbor obsahuje 32 rôznych hodnôt, z nich niektoré viackrát (skontrolujte to).

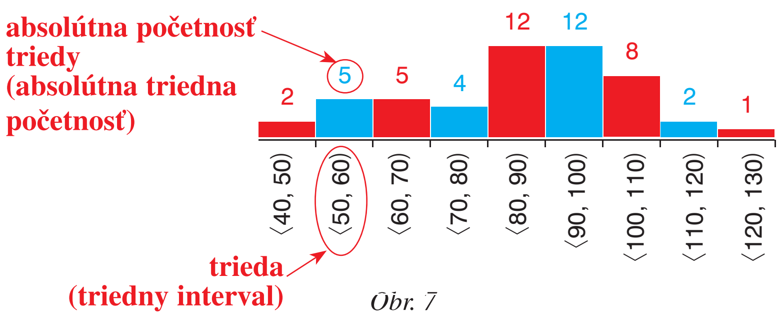
TRIEDENIE, TRIEDNY INTERVAL, ABSOLÚTNA A RELATÍVNA TRIEDNA POČETNOSŤ

Podstatné zjednodušenie dosiahneme, ak všetky údaje (v našom prípade 51 čísel) rozdelíme na menší počet skupín. V ľavom stĺpci tabuľky opisujeme tento postup – nazývaný **triedenie** – všeobecne, v pravom pre náš príklad.

Nájdeme interval, v ktorom ležia všetky hodnoty nášho súboru.	V našom prípade je takým intervalom napr. interval ⟨40, 130), pozri obr. 6.
Tento interval rozdelíme na konečný počet menších intervalov, ktoré nazývame **triedy** alebo **triedne intervaly**. Zatiaľ sa obmedzíme na prípad, že tieto intervaly majú rovnakú dĺžku. Aj v praxi sa tento prípad vyskytuje najčastejšie.	Interval ⟨40, 130) rozdelíme napr. na intervaly dĺžky 10: ⟨40, 50), ⟨40, 60), ..., ⟨110, 120), ⟨120, 130).
Zistíme, koľko prvkov nášho súboru leží v jednotlivých triedach. Toto číslo sa nazýva **(absolútna) početnosť triedy**. Okrem tohto čísla sa používa aj **relatívna početnosť triedy**, čo je podiel absolútnej početnosti a počtu všetkých prvkov súboru. Relatívna početnosť teda vyjadruje, aká časť súboru leží v danej triede.	V triede ⟨50, 60) leží 5 prvkov, preto táto trieda má absolútnu početnosť 5. Jej relatívna početnosť je $\frac{5}{51} = 0{,}098\,0...$, to je v percentách približne 9,8 %. To znamená, že trieda ⟨50, 60) obsahuje približne 9,8 % všetkých hodnôt.

Všimnite si, že intervaly neobsahujú pravý krajný bod. Je to kvôli tomu, aby každá hodnota zo súboru ležala iba v jednom intervale (teda, aby sme hodnotu ležiacu na kraji intervalu nezarátali do obidvoch susediacich intervalov). Vynechanie pravého krajného bodu intervalu je iba jedna z možností. Rovnako tak sme sa mohli rozhodnúť vynechať zo všetkých interalov ľavý krajný bod.

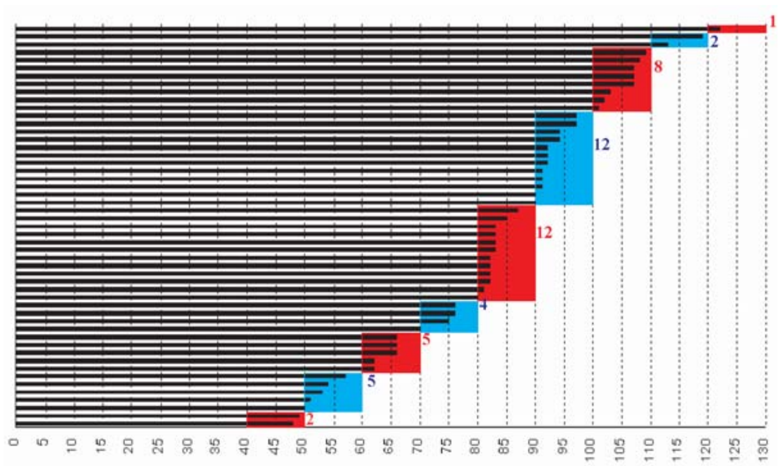
Zaradenie prvkov nášho súboru – 51 nameraných dĺžok skoku z miesta – do jednotlivých tried je v tab. 3. Početnosť jednotlivých tried – teda **triedne** (alebo **intervalové**) **rozdelenie početností** – graficky opisuje stĺpcový diagram na obr. 7.



Obr. 7
Stĺpcový diagram znázorňujúci absolútnu početnosť jednotlivých tried.

⟨40, 50)	⟨50, 60)	⟨60, 70)	⟨70, 80)	⟨80, 90)	⟨90, 100)	⟨100, 110)	⟨110, 120)	⟨120, 130)
48	50	62	70	80	90	101	113	122
49	51	62	75	81	90	102	119	
	53	66	76	82	91	103		
	54	66	76	82	91	107		
	57	66		82	91	107		
				82	92	107		
				83	92	108		
				83	92	109		
				83	94			
				83	94			
				85	97			
				87	97			

Tab. 3
Zaradenie prvkov súboru do tried
⟨40, 50), ⟨50, 60), ..., ⟨110, 120), ⟨120, 130).



Obr. 8
Zaradenie do tried a absolútna početnosť tried zakreslené do obr. 5.

ÚLOHY

9. Skôr, ako budete čítať ďalej, uistite sa v diskusii, či je vám zrejmý súvis medzi tabuľkou 3 a obrázkami 6, 7 a 8.

10. a) Prerobte stĺpcový diagram z obr. 7 na stĺpcový diagram *relatívnych* triednych početností (relatívne početnosti vyjadrujte na celý počet percent). Ovplyvní prechod od absolútnych k relatívnym početnostiam tvar diagramu?
b) Pri výpočte počtu percent v časti a) by ste mali naraziť na problém, o ktorom sme hovorili v úlohe 6 na s. 12. Diskutujte o jeho riešení.
c) Potom pomocou vhodného softvéru znázornite relatívne početnosti *kruhovým* diagramom. V súvislosti so spomínaným problémom skontrolujte, či a ako sú jednotlivé počty percent na zostrojenom kruhovom diagrame zmenené.

Súbor našich 51 údajov budeme teraz triediť niekoľkými rôznymi spôsobmi. V prvom z nich (úloha 11 a) namiesto intervalov bez pravého krajného bodu zvolíme za triedy intervaly bez ľavého krajného bodu, v ostatných zmeníme východiskový interval alebo dĺžku jednotlivých menších intervalov – tried. Odporúčame rozdeliť sa v triede na skupiny. Každá skupina nech zostrojí jeden stĺpcový diagram (ideálne by bolo zostrojiť ho použitím vhodného softvéru). K zostrojeným diagramom sa ešte vrátime v úlohe 12.

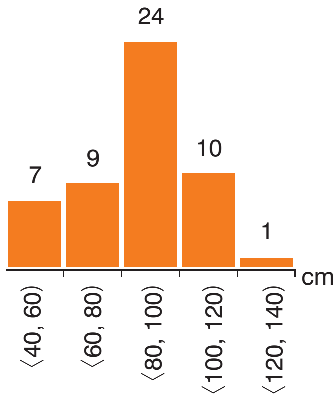
11. Pre súbor našich 51 údajov o dĺžke skoku z miesta zostrojte stĺpcový diagram absolútnych triednych početností, pričom
a) interval $(40, 130\rangle$ rozdelíte na triedy – intervaly dĺžky 10: $(40, 50\rangle, (50, 60\rangle, ..., (120, 130\rangle$,
b) interval $\langle 45, 125)$ rozdelíte na triedy – intervaly dĺžky 10: $\langle 45, 55), \langle 55, 65), ..., \langle 115, 130)$,
c) interval $\langle 40; 130)$ rozdelíte na triedy – intervaly dĺžky 15: $\langle 40, 55), \langle 55, 70), ..., \langle 115, 130)$,
d) interval $\langle 35, 125)$ rozdelíte na triedy – intervaly dĺžky 15: $\langle 35, 50), \langle 50, 65), ..., \langle 110, 125)$,
e) interval $\langle 45, 135)$ rozdelíte na triedy – intervaly dĺžky 15: $\langle 45, 60), \langle 60, 75), ..., \langle 120, 135)$.

Z porovnania diagramov z obr. 7 a z riešenia úlohy 11 a) vidno, že nevelká zmena tried spôsobila viditeľnú zmenu v tvare diagramu. V obidvoch prípadoch sú triedami prakticky tie isté intervaly, len raz sme ich zvolili bez pravého a raz bez ľavého krajného bodu. Podobnú situáciu zistíme aj pri porovnaní diagramov z riešenia úloh 11 c), d): pri zmene východiskového intervalu zo $\langle 40, 130)$ na $\langle 35, 125)$ – teda posunutí o 5 doľava – sa diagram výrazne zmenil (skontrolujte to).
Je to spôsobené tým, že súbor, s ktorým pracujeme (51 hodnôt) je pomerne malý. Keby sme namiesto 51 nameraných hodnôt mali napr. tisíc takýchto hodnôt, bol by výsledný diagram oveľa stabilnejší.

Ak by sme zo všetkých predškolákov náhodne vybrali približne tisícku a skúmali na tejto vzorke dĺžku skoku do diaľky z miesta, bola by štruktúra nameraných hodnôt už veľmi podobná štruktúre údajov získaných od všetkých predškolákov – teda z celého základného súboru. V prípade nášho 51-členného súboru (ktorý navyše nevznikol náhodným výberom) bude takáto podobnosť ovela menšia, získame teda iba hrubú predstavu o odpovedi na otázku
Ako ďaleko doskočí z miesta predškolák?

ZJEDNODUŠENIE POMÁHA OBJAVIŤ ŠTRUKTÚRU „SKRYTÚ V ÚDAJOCH“

Triedenie umožňuje objaviť *štruktúru* skrytú v našom súbore údajov. Istý náznak vidíme už na obr. 7 – údaje majú tendenciu sústredovať sa medzi 80 a 100 (vidíte to aj vy na obr. 7?). Aby sa táto tendencia zvýraznila, zjednodušme pôvodný súbor ešte viac a zvoľme za triedy intervaly s dĺžkou 20 (triedne početnosti v tomto prípade nájdeme jednoducho – stačí sčítať početnosti vždy dvoch susedných tried z obr. 7). Dostaneme tak stĺpcový diagram na obr. 9, ktorý má veľmi prehľadnú štruktúru: skoro polovica hodnôt je sústredená v intervale ⟨80, 100), od tohto intervalu na obidve strany sa počet hodnôt zmenšuje.



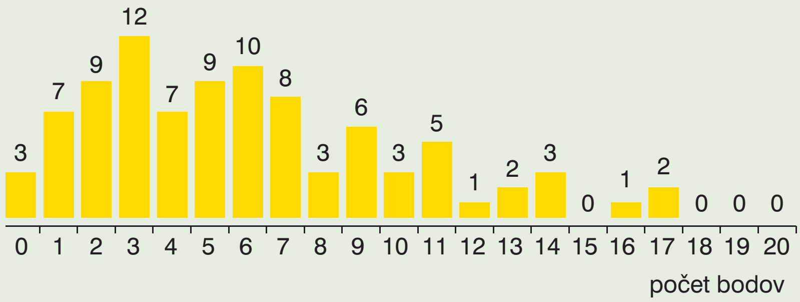
Obr. 9

Tvar tohto diagramu už pomerne dobre zodpovedá tomu, čo sme od výsledkov meraní očakávali. Dalo sa totiž predpokladať, že bude existovať niečo ako *normálna* či *štandardná* dĺžka skoku (pre súbor znázornený na obr. 9 je to niečo medzi 80 a 100 cm). Časť detí dokáže skočiť viac, časť naopak menej, jedných aj druhých bude však menej ako tých so štandardnou dĺžkou skoku. Rovnako sa dalo očakávať, že čím väčšia bude odchýlka od normálnej dĺžky skoku (či už smerom k dlhším alebo naopak ku kratším skokom), tým menší bude počet detí, ktoré dokážu skočiť tak veľa alebo naopak len tak málo.

ÚLOHY

12. Diskutujte o tom, ktorý z diagramov zostrojených v úlohách 11c, d, e (vo všetkých mali triedne intervaly dĺžku 15) najviac zodpovedá očakávanej štruktúre výsledkov, o ktorej hovoríme v texte pri obr. 9.

13. Stĺpcový diagram na obrázku znázorňuje počet bodov, ktoré na prijímacích skúškach získala skupina 91 uchádzačov. Zjednodušte tento súbor zoskupením do tried 0 – 2 *body,* 3 – 5 *bodov,* ..., 18 – 20 *bodov.* Zostrojte stĺpcový diagram triednej početnosti. Potom diskutujte o tom, či je tento zjednodušený diagram prehľadnejší a či umožňuje jednoduchšie charakterizovať výsledky, ktoré dosiahla uvedená skupina 91 uchádzačov.



REPREZENTANT TRIEDY

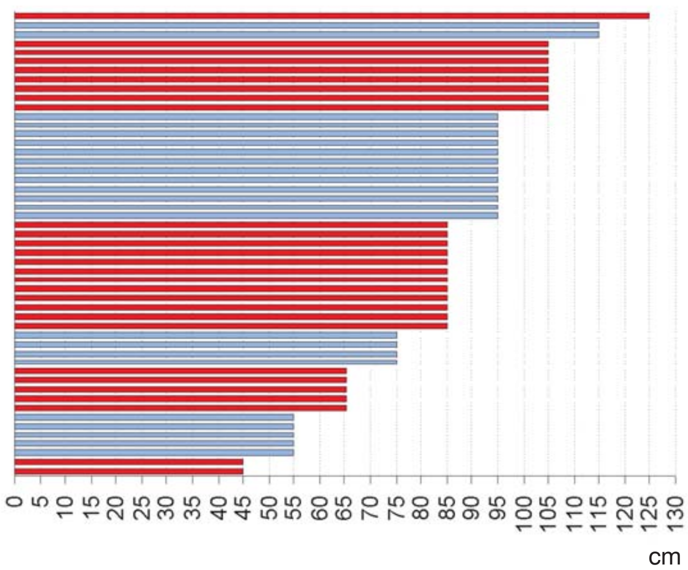
Triedením súbor sprehľadníme – veľký počet jednotlivých hodnôt nahradíme menším počtom tried. Cenou za prehľadnosť je strata časti informácie: hodnoty, ktoré padli do rovnakej triedy, už nevieme rozlíšiť.

Ak s takto zjednodušeným súborom zloženým z tried chceme narábať podobne ako so súbormi hodnôt – napríklad chceme vypočítať jeho aritmetický priemer – zvolíme v každej triede jednu hodnotu, ktorá bude reprezentovať celú triedu. Najčastejšie je reprezentantom stred triedneho intervalu.

TOTO PRAVIDLO NIE JE BEZ VÝNIMIEK. NAPRÍKLAD, AK BOLI VŠETKY HODNOTY PÔVODNÉHO SÚBORU CELÉ ČÍSLA, MÔŽEME CHCIEŤ, ABY AJ REPREZENTANT TRIEDY BOLO CELÉ ČÍSLO, A TO AJ V PRÍPADE, ŽE TOTO ČÍSLO NIE JE STRED INTERVALU.

Napríklad pre triedne rozdelenie početností zobrazené na obr. 7 na s. 15 môžeme za reprezentantov jednotlivých tried ⟨40, 50), ⟨50, 60), ..., ⟨110, 120), ⟨120, 130) zvoliť postupne hodnoty 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115 a 125. Môžeme to interpretovať tak, že všetky hodnoty patriace do jednej triedy sme nahradili jedným číslom – reprezentantom triedy. Graficky sme túto interpretáciu znázornili na obr. 10.

Zjednodušená verzia súboru z obr. 5: po triedení sme prvky ležiace v tej istej triede nahradili reprezentantom triedy.



Obr. 10

Postupnosť obrázkov obr. 4 – obr. 5 – obr. 8 – obr. 10 znázorňuje štandardný postup zjednodušovania súboru číselných údajov: pôvodný súbor – zoradenie podľa veľkosti – triedenie – voľba reprezentantov triedy.

K výpočtu aritmetického priemeru z triedneho rozdelenia početností sa vrátime v nasledujúcej kapitole.

ČÍM SA ODLIŠUJÚ HISTOGRAM A STĹPCOVÝ DIAGRAM

Jediný – a nepodstatný – rozdiel môže byť v šírke stĺpcov:

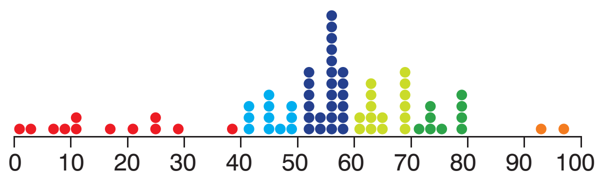
- v histograme platí šírka stĺpca = šírka triedneho intervalu (teda vedľajšie stĺpce sa dotýkajú),
- v stĺpcovom diagrame sú stĺpce rovnako široké, ale môžu byť užšie než triedny interval.

Okrem stĺpcového diagramu sa pri znázorňovaní triednych početností môžeme stretnúť ešte s ďalším typom grafu – histogramom. Ak majú všetky triedne intervaly rovnakú šírku, je histogram prakticky totožný so stĺpcovým diagramom.

V prevažnej väčšine prípadov budeme v tejto učebnici pracovať s rovnako dlhými triednymi intervalmi, preto príslušné grafy triednych početností budú mať nárok na obidve označenia – stĺpcový diagram aj histogram.
Podstatný rozdiel medzi stĺpcovým diagramom a histogramom sa prejaví až vtedy, keď pri triedení použijeme intervaly s rôznymi šírkami. Ukážeme to na príklade. V tab. 4 je triedne rozdelenie početností súboru, ktorý je znázornený na obr. 11.

triedny interval	početnosť	triedny interval	početnosť
⟨0, 40)	12	⟨60, 70)	15
⟨40, 50)	11	⟨70, 80)	9
⟨50, 60)	25	⟨80, 100)	2

Tab. 4

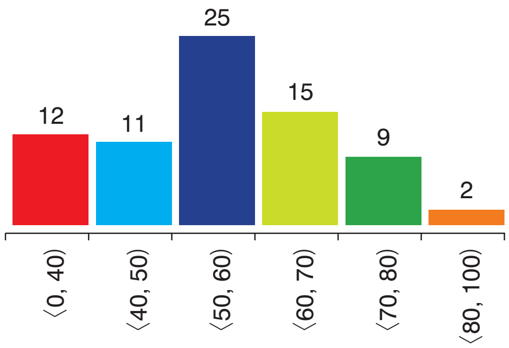


Obr. 11

Takouto voľbou triednych intervalov chceme zdôrazniť, že naša pozornosť sa sústreďuje na to, ako sú rozložené hodnoty medzi číslami 40 a 80. Preto všetky hodnoty menšie ako 40 zaraďujeme do jedného spoločného triedneho intervalu ⟨0, 40), podobne pre hodnoty väčšie ako 80 je určený jeden triedny interval ⟨80, 100).

Toto triedne rozdelenie početností sme znázornili

- na obr. 12 stĺpcovým diagramom
  V ňom sú všetky stĺpce rovnako široké a výška stĺpca znázorňuje početnosť triedneho intervalu.
- na obr. 13 histogramom
  V ňom triedne intervaly znázorňujeme na číselnú os, pričom šírka stĺpca je vždy rovnaká ako šírka príslušného triedneho intervalu. Výška stĺpca znázorňuje priemernú hustotu hodnôt v triednom intervale, teda číslo $\dfrac{\text{početnosť triedy}}{\text{dĺžka triedneho intervalu}}$.
  Často sa namiesto opisu pomocou priemernej hustoty hodnôt používa iný opis: kým v stĺpcovom diagrame je početnosť vyjadrená *výškou* stĺpca, v histograme je vyjadrená *obsahom* stĺpca. Ujasnite si v diskusii, že obidva opisy histogramu – pomocou priemernej hustoty aj pomocou obsahu stĺpca – vyjadrujú to isté.

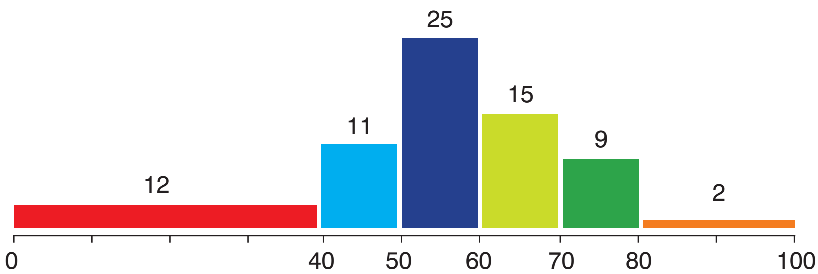


Obr. 12
Rozdelenie početností znázornené stĺpcovým diagramom.

STĹPCOVÝ DIAGRAM

všetky stĺpce majú rovnakú šírku

výška stĺpca zodpovedá početnosti triedy



HISTOGRAM

šírka stĺpca = šírka triedneho intervalu

výška stĺpca zodpovedá priemernej hustote hodnôt v triednom intervale

Obr. 13
To isté rozdelenie triednych početností ako na obr. 12 znázornené teraz histogramom.
Výška jednotlivých stĺpcov zľava doprava je: 3 dieliky, 11 dielikov, 25 dielikov, 15 dielikov, 9 dielikov, 1 dielik (1 dielik v tomto prípade predstavuje údaj „priemerne 1 hodnota na úsek dĺžky 10“).

1.4 Ďalšie úlohy

Rodí sa viac detí cez deň alebo v noci?

Belgičan Adolphe Quetelet (1796 – 1874) bol výraznou postavou štatistiky v polovici 19. storočia. V knihe *Sur l'homme, et le développement de ses facultés (O človeku a rozvoji jeho schopností)* zhromaždil veľké množstvo štatistických údajov o človeku – od pôrodnosti, cez výšku a hmotnosť, až po kriminalitu. Zaujímali ho aj detaily – napr. v ktorú dennú dobu sa rodí najviac detí. „Zvedavosť ma viedla k skúmaniu, či existuje nejaký vzťah medzi rôznymi dennými hodinami a okamihom narodenia,“ napísal. Quetelet použil záznamy bruselskej nemocnice z rokov 1811 – 1822 o počte pôrodov v 6-hodinových intervaloch dňa.

	počet narodených detí
po polnoci	798
pred poludním	614
po poludní	574
pred polnocou	694
celkom	2 680

ÚLOHY

14. a) Rodilo sa podľa týchto údajov viac detí cez deň alebo v noci?
b) Údaje z tabuľky chceme graficky znázorniť tak, aby z nich bola odpoveď na predchádzajúcu otázku jasne viditeľná. Aké znázornenie by ste zvolili? Svoje odpovede prediskutujte so spolužiakmi.

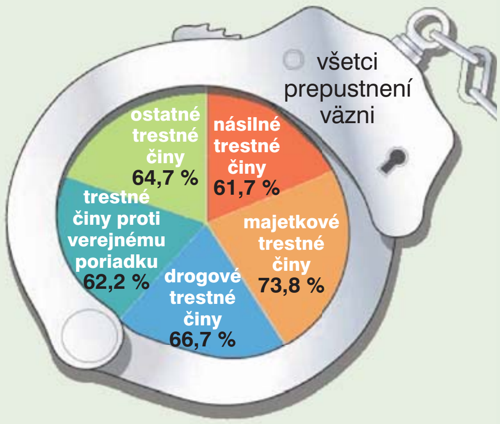
Kde je chyba?

15. Na internete existuje viacero stránok, ktoré komentujú nesprávne použitie grafov v médiách a odbornej literatúre. Našli sme tam aj nasledujúce tri koláčové diagramy. Diskutujte o tom, kvôli akým chybám sa tam dostali. Navrhnite tiež, ako tieto chyby napraviť – ak je náprava možná.

a) Graf znázorňuje percentuálne zastúpenie jednotlivých odpovedí na otázku: *Aké sú vaše očakávania v nasledujúcom roku v oblasti životnej úrovne?* položenú v rámci prieskumu verejnej mienky.

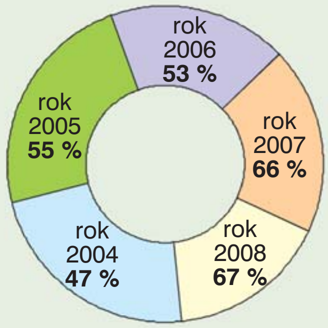
b) Graf znázorňuje výsledky štúdie, ktorá v 15 štátoch USA zisťovala podiel recidivistov medzi väzňami. Štúdia skúmala, koľko z 272 111 väzňov prepustených z väzenia v r. 1994 bolo do troch rokov znova odsúdených do väzenia za nové trestné činy. Počty percent sú uvádzané pre jednotlivé skupiny väzňov podľa trestného činu, za ktorý boli odsúdení.

Podiel recidivistov medzi väzňami prepustenými v r. 1994



Rozsah súboru:
272 111 väzňov v 15 štátoch USA

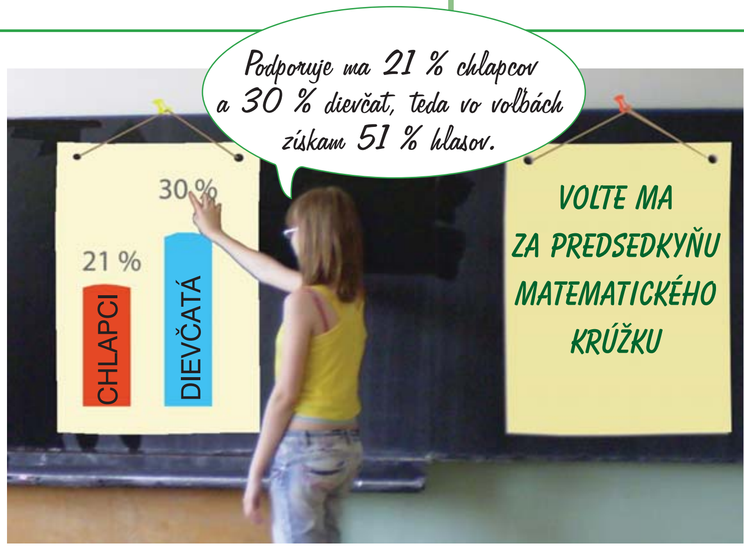
c) Graf znázorňuje počet percent obyvateľov Slovenska (zistený každoročným prieskumom verejnej mienky), ktorí v danom roku dôverovali EÚ.



Problém správnej interpretácie údajov z grafov a diagramov je veľmi dôležitá téma. V tejto učebnici sa obmedzíme len na dve zmienky, upozorňujúce úsmevnou formou na nebezpečenstvo nesprávnej interpretácie. Prvú sme prevzali z časopisu Teaching Statistics:

„Štatistiky ukazujú, že 10 % dopravných nehôd spôsobujú opití vodiči. Z toho vyplýva, že zvyšných 90 % spôsobujú triezvi vodiči. Nemalo by se teda triezvym vodičom zakázať šoférovať?“

Druhá zmienka má podobu žiackeho vtipu. ▶



ÚLOHY

16. Zistite obvod dlaní všetkých žiakov vašej triedy. Na meranie môžete použiť krajčírsky meter, šnúrku alebo prúžok papiera. Obvod merajte v milimetroch (odporúčame merať viackrát, pri meraní si navzájom pomôžte). Namerané hodnoty zaznamenajte.

Na základe nameraných údajov zostrojte pre vašu triedu diagram rozdelenia početností veľkosti rukavíc (v centimetroch).

17. Prepočítajte namerané obvody dlaní z milimetrov na francúzske palce s presnosťou na pol palca (najprv si v diskusii ujasnite, ako sa zaokrúhľuje „na pol palca“).

Potom zostrojte diagram rozdelenia početností pre veľkosť rukavíc vo francúzskych palcoch.

Veľkosť rukavíc

Ak chceme zistiť svoju veľkosť rukavíc, zmeriame si obvod mierne pokrčenej dlane bez palca okolo záprstných kĺbov (ukazovák sa dotýka palca). Tento obvod zaokrúhlený na celé centimetre určuje príslušnú veľkosť rukavice v centimetroch.

Metrická sústava sa používa pri určovaní veľkostí rukavíc od r. 1980. Predtým sa ich veľkosť namiesto v centimetroch udávala vo francúzskych palcoch (1 francúzsky palec = 27,07 mm). S týmto označením sa môžeme stretnúť aj dnes, veľkosti sú 6, 6 ½, 7, 7 ½, ..., 11 ½, 12.

Výrobcovia udávajú, že najviac predávané sú veľkosti 9 (pre pánske rukavice) a 7 (pre dámske rukavice). Platí to aj pre súbor hodnôt z vašej triedy?

Ku komplikáciám v označovaní veľkostí rukavíc v palcoch prispieva to, že časť výrobcov udáva veľkosti tradične vo francúzskych palcoch, kým iná časť používa namiesto francúzskeho angloamerický palec: 1 inch = 2,54 cm.

Nora tvrdí, že na zostrojenie diagramu z úlohy 17 netreba prepočítavať obvody dlaní všetkých žiakov triedy. Stačí prepočítať iba veľkosti rukavíc z centimetrov na francúzske palce. Napríklad pre veľkosť 18 cm dostaneme:

$$18 : 2{,}707 = 6{,}649\,427 \ldots, \quad \text{preto} \quad 18 \text{ cm} = 6{,}649\,427 \ldots \text{ francúzskeho palca,}$$

to je s presnosťou na pol palca 6,5 palca, teda veľkosti 18 cm zodpovedá veľkosť 6 ½. Preto každý, kto mal v diagrame z úlohy 16 veľkosť rukavíc 18 (cm), bude mať v diagrame z úlohy 17 veľkosť 6 ½. Na základe toho možno diagram z úlohy 16 prerobiť na diagram z úlohy 17.

Veríme, že v diskusii ste prišli na to, že Nora **nemá pravdu**. To znamená, že diagram, ktorý použitím jej postupu vznikne z diagramu v úlohe 16, nemusí byť totožný s diagramom z úlohy 17. Môže sa však stať, že – hoci Norin postup je nesprávny – dostaneme jeho použitím správny výsledok.

Zjednodušene povedané:

správny postup vedie vždy k správnemu výsledku.

To znamená: postup je nesprávny, ak nie vždy vedie k správnemu výsledku (druhé tvrdenie je negácia opisu z prvého tvrdenia). Nemusí to však znamenať, že takýto postup vždy vedie k nesprávnemu výsledku. Rozdiel medzi

__nie vždy__ vedie k správnemu výsledku

a __vždy__ vedie k nesprávnemu výsledku

si dobre rozmyslite a diskutujte o ňom.

ÚLOHY

18. a) Objasnite si najprv v diskusii podrobne Norin návrh. Opíšte postup, ako chce Nora prerobiť diagram z úlohy 16 na diagram z úlohy 17.
b) Má Nora pravdu? Diskutujte o tom v triede a svoje tvrdenia zdôvodnite.

19. Skontrolujte, ako dopadne použitie Norinho postupu na váš diagram z úlohy 16. Podľa toho, či ste Noriným postupom dostali, alebo nedostali diagram totožný s vaším diagramom z úlohy 17 – teda či ste dostali správny alebo nesprávny výsledok – riešte v prvom prípade úlohu a), v druhom úlohu b).

Zmeňte vo vašom súbore nameraných údajov niekoľko hodnôt (tým sa zmenia aj vaše diagramy z úloh 16 a 17) tak, aby ste použitím Norinho postupu dostali
a) nesprávny výsledok úlohy 17,
b) správny výsledok úlohy 17.
Skôr, ako úlohu začnete riešiť, diskutujte o tom, ktoré údaje a ako zmeniť.

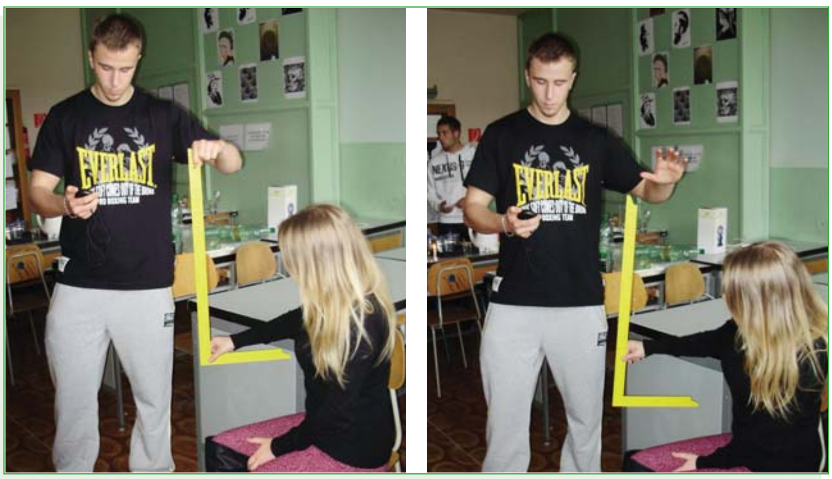
Reakčný čas

Reakčný čas je doba, ktorá uplynie medzi podnetom a reakciou naň (napr. doba medzi výstrelom zo štartérovej pištole a okamihom, kedy závodník odštartuje).

Reakčný čas na zvukové podnety je kratší ako na zrakové podnety, najkratší je pre dotykové podnety.

Na atletických súťažiach sa často používa zvláštne zariadenie na signalizáciu chybného štartu. Za chybný štart sa tu pokladá štartová reakcia kratšia ako 0,100 sekundy. Zo záznamov takýchto zariadení vidno, že reakčné časy najlepších šprintérov pri štarte sa pohybujú spravidla medzi 0,12 *s* a 0,16 *s*.

Jeden z bežných spôsobov merania reakčného času na zrakové podnety je „pravítková metóda“. Potrebujeme na ňu pomocníka a rovné – nie trojuholníkové – pravítko dlhé aspoň 30 cm. Postup merania znázorňuje obrázok. Pomocník drží pravítko zvislo tak, aby číslo 0 bolo medzi palcom a ukazovákom, ktoré má testovaná osoba rozovreté asi na šírku 1 cm. Potom pomocník neočakávane pravítko pustí a testovaná osoba sa ho snaží čo najrýchlejšie palcom a ukazovákom zachytiť. Na pravítku zistíme vzdialenosť od čísla 0, v akej sa podarilo pravítko zachytiť. Tú prepočítame na sekundy podľa tabuľky na s. 23.



dráha (cm)	čas (s)	dráha (cm)	čas (s)	dráha (cm)	čas (s)	dráha (cm)	čas (s)
5	0,10	11	0,15	18	0,19	25	0,23
6	0,11	12	0,16	19	0,20	26	0,23
7	0,12	13	0,16	20	0,20	27	0,23
8	0,13	14	0,17	21	0,21	28	0,24
9	0,14	15	0,17	22	0,21	29	0,24
10	0,14	16	0,18	23	0,22	30	0,25
		17	0,19	24	0,22		

Čas v sekundách v tabuľke sme vypočítali zo vzorca $s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t$ na výpočet dráhy telesa – v našom prípade pravítka – padajúceho voľným pádom (s je dráha v metroch, t je čas v sekundách, 9,81 je hodnota tiažového zrýchlenia g), odtiaľ $t = \sqrt{\frac{2\,s}{9{,}81}} \cdot 9{,}81 \cdot t$.

Pri dosadzovaní do tohto vzorca platí: pre $s \geq 0{,}05$ m je presnosť výsledku – teda času v sekundách – rádovo rovnaká ako presnosť hodnoty s, ktorú sme dosadili (zdôvodnenie tohto tvrdenia presahuje rámec stredoškolskej matematiky). Keďže pri našom pokuse vieme dĺžku s zmerať s presnosťou na centimetre – teda na stotiny metra – bude aj presnosť výsledkov rádovo na úrovni stotín. Preto sú v tabuľke všetky hodnoty času zaokrúhlené na stotiny sekundy.

ÚLOHA

20. a) Zmerajte „pravítkovou metódou“ reakčný čas všetkých žiakov triedy. Odporúčame meranie v dvojiciach. Najprv urobte niekoľko pokusov. Potom urobte 5 „ostrých“ meraní, z nich vypočítajte aritmetický priemer (výsledok zaokrúhlite na stotiny sekundy). Tieto aritmetické priemery vytvoria súbor hodnôt, s ktorým budeme pracovať v časti b) tejto úlohy.

b) Pre súbor hodnôt z časti a) zostrojte diagram početnosti. Zistite, či vhodným triedením dosiahnete sprehľadnenie tohto diagramu tak, aby bolo možné jednoducho opísať rozloženie reakčných časov vo vašej triede.

Porovnajte sa: V roku 2010 podobné testovanie absolvovalo 94 futbalistov z Národnej vysokoškolskej atletickej asociácie (NCAA) USA. Aritmetický priemer všetkých 94 reakčných časov bol 0,203 s. Porovnajte túto hodnotu s priemerným reakčným časom vo vašej triede.

NIEKEDY JE ODPOVEĎOU SÚBOR ÚDAJOV – VÝSLEDKY

1. Napríklad: *Ako dopadla písomka z matematiky?*
Ľudia akého veku žijú v našej obci?
Aký ročný príjem majú ľudia v našej obci?
K akému náboženskému vyznaniu sa hlásia obyvatelia nášho kraja?
Kde sa narodili rodičia žiakov našej triedy?
Aké najvyššie vzdelanie dosiahli rodičia žiakov našej školy?

3. a) $\frac{36}{3\,036} = 0{,}011\,857... \approx 0{,}01$, teda 36 je približne 1 % z 3 036.

b) relatívna početnosť (v %) = $\frac{\text{absolútna početnosť}}{\text{rozsah súboru}} \cdot 100$

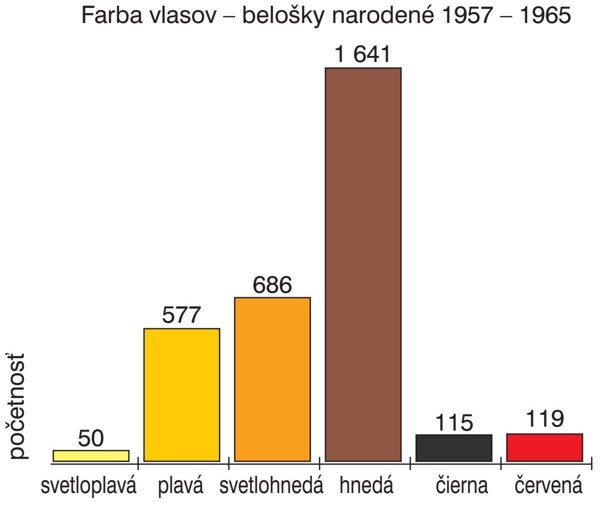
4. ... veľkosti príslušnej hodnoty (v tomto prípade absolútnej početnosti), ... veľkosť stredového uhla ... .

5. Pozri obr. 14 a 15. Ak v obr. 14 za jeden dielik výšky zvolíme hodnotu 50, tak stĺpce – zoradené v rovnakom poradí ako farby v tabuľke – budú mať výšky 1 dielik, $\frac{577}{50} \approx 12$ dielikov, $\frac{686}{50} \approx 14$ dielikov, $\frac{1\,641}{50} \approx 33$ dielikov, $\frac{115}{50} \approx 2$ dieliky a $\frac{119}{50} \approx 2$ dieliky.

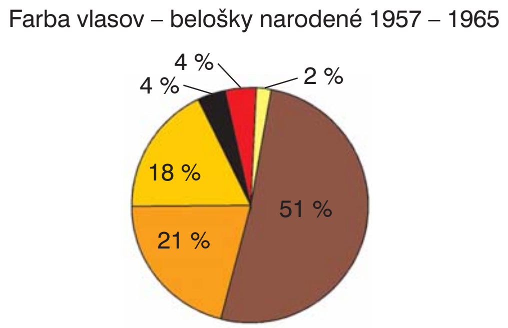
Výpočet relatívnych početností a zodpovedajúcich veľkostí stredových uhlov v kruhovom diagrame je v tab. 5. (Na kruhovom diagrame je vypočítaná hodnota relatívnej početnosti pre hodnotu *svetlohnedá* zmenená z 22 % na 21 %. Dôvodu tejto zmeny sa venujeme v úlohe 6.)

	absolútna početnosť	relatívna početnosť (v %)	veľkosť stredového uhla
		$= \frac{\text{absolútna početnosť}}{3\,188} \cdot 100$	$= \frac{\text{absolútna početnosť}}{3\,188} \cdot 360°$
svetloplavá	50	$\frac{50}{3\,188} \cdot 100 = 1{,}56... \approx 2$ %	$\frac{50}{3\,188} \cdot 360° = 5{,}64...° \approx 6°$
plavá	577	$\frac{577}{3\,188} \cdot 100 = 18{,}09... \approx 18$ %	$\frac{577}{3\,188} \cdot 360° = 65{,}15...° \approx 65°$
svetlohnedá	686	$\frac{686}{3\,188} \cdot 100 = 21{,}51... \approx 22$ %	$\frac{686}{3\,188} \cdot 360° = 77{,}46...° \approx 77°$
hnedá	1 641	$\frac{1\,641}{3\,188} \cdot 100 = 51{,}47... \approx 51$ %	$\frac{1\,641}{3\,188} \cdot 360° = 185{,}30...° \approx 185°$
čierna	115	$\frac{115}{3\,188} \cdot 100 = 3{,}60... \approx 4$ %	$\frac{115}{3\,188} \cdot 360° = 12{,}98...° \approx 13°$
červená	119	$\frac{119}{3\,188} \cdot 100 = 3{,}73... \approx 4$ %	$\frac{119}{3\,188} \cdot 360° = 13{,}43...° \approx 13°$
spolu (rozsah súboru)	3 188		

Tab. 5



Obr. 14

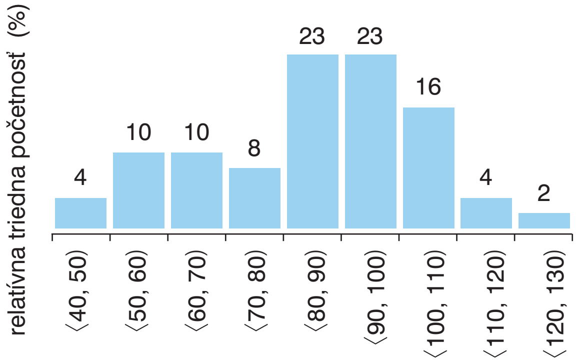


Obr. 15

6. a) b) Pozri posledné dva stĺpce v tab. 5. Veľkosť stredového uhla v poslednom stĺpci tab. 5 sme vypočítali z *presnej* hodnoty relatívnej početnosti, nie zo *zaokrúhleného* výsledku. Napríklad, pri výpočte uhla pre hodnotu *svetloplavá* sme vypočítali $\frac{50}{3\,188}$ z 360° (a nie 2 % z 360°, čo je $0{,}02 \cdot 360° = 7{,}2° \approx 7°$). Až tento výsledok sme zaokrúhlili na celé stupne (dostali sme tak hodnotu 6°). Veľkosť uhla vypočítaná zo zaokrúhlenej hodnoty relatívnej početnosti je totiž menej presná (pretože už vstupný údaj – relatívna početnosť – je zaťažený chybou, ktorú spôsobilo zaokrúhlenie; porovnajte napr. výsledky obidvoch postupov pre hodnotu *svetlohnedá*, tam je rozdiel zaokrúhlených hodnôt až 2°).

7. Najvhodnejším východiskom pre porovnávanie sú kruhové diagramy relatívnych početností.

10. Pozri obr. 16 a výpočty v tab. 6. Súčet zaokrúhlených počtov percent je 102 (posledný stĺpec tabuľky 6), v diagrame na obrázku sme zmenili počty percent pre triedy ⟨80, 90) a ⟨90, 100). Relatívne početnosti týchto dvoch tried majú totiž menšiu desatinnú časť (v tab. 6 vyznačená zelenou farbou) ako zvyšené relatívne početnosti.

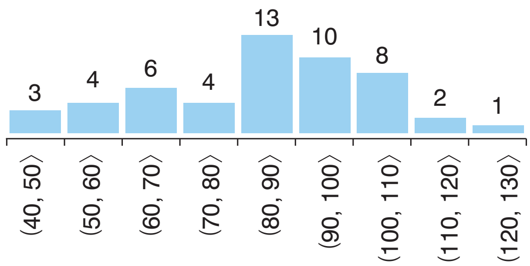


Obr. 16

trieda	absolútna početnosť	relatívna početnosť (%)	po zaokrúhlení
⟨40, 50)	2	3,921 568 6...	4
⟨50, 60)	5	9,803 921 5...	10
⟨60, 70)	5	9,803 921 5...	10
⟨70, 80)	4	7,843 137 2...	8
⟨80, 90)	12	23,529 411 7...	24
⟨90, 100)	12	23,529 411 7...	24
⟨100, 110)	8	15,686 274 5...	16
⟨110, 120)	2	3,921 568 6...	4
⟨120, 130)	1	1,960 784 3...	2
celkom	51	100	102

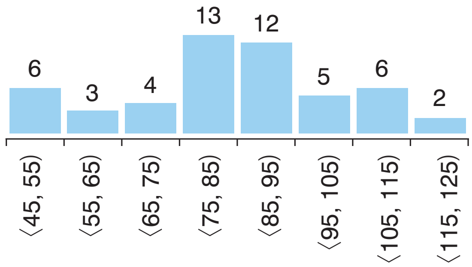
Tab. 6

11. a) Pozri obr. 17.



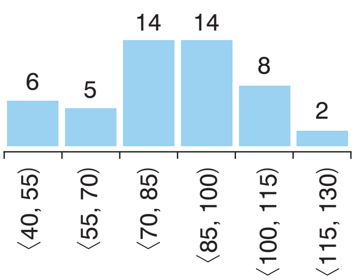
Obr. 17

b) Pozri obr. 18.

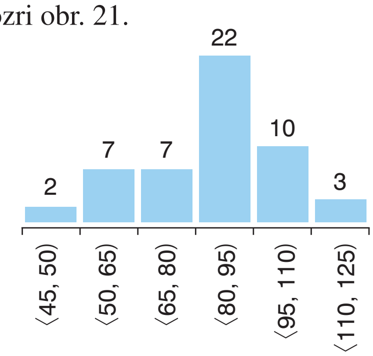


Obr. 18

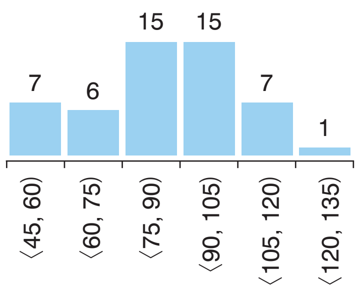
c) Pozri obr. 19. **d)** Pozri obr. 20. **e)** Pozri obr. 21.



Obr. 19

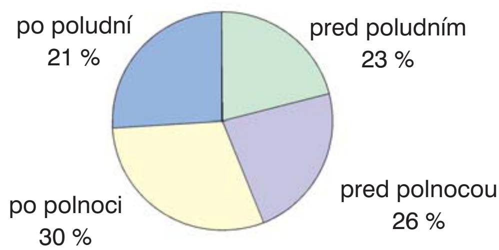


Obr. 20



Obr. 21

12. Je to diagram z úlohy 11d.
13. Pozri obr. 6 na s. 38.
14. a) V noci. Na obdobie pred polnocou (t. j. medzi 18:00 a 24:00) a po polnoci (t. j. medzi 0:00 a 6:00) pripadá približne 56 % zo všetkých 2 680 detí.
b) Najvhodnejší bude kruhový (koláčový) diagram, v ktorom ľahko vidno, ktorá z dvojíc *pred polnocou-po polnoci* a *predpoludním-po poludní* zaberá viac ako polovicu kruhu, pozri obr. 22.



Obr. 22

15. a) Súčet všetkých uvedených percent by mal byť 100 (koláčový graf znázorňuje rozdelenie celku na jednotlivé časti), je však iba 80. Len na základe tých informácií, ktoré máme (odpovede a uvádzaný počet percent) sa graf nedá opraviť.
b) Hoci znázorňované údaje sú počty percent, nie je v tomto prípade koláčový diagram vhodný na ich zobrazenie. Tento diagram používame, ak v celku rozdelenom na časti potrebujeme znázorniť, akú časť celku predstavujú jednotlivé časti. Teda, ak sa všetky percentá vzťahujú k tomuto celku ako základu na výpočet počtu percent. (Kruhový diagram by bol vhodný napr. v prípade, keby sme chceli znázorniť, aká časť zo všetkých sledovaných väzňov bola odsúdená za jednotlivé typy trestných činov.) Na diagrame zo zadania sa však každý z uvedených počtov percent vzťahuje k inému

základu. V tomto prípade ide o funkciu, ktorá každej z uvedených možností trestného činu priraďuje nejaké číslo – percentuálnu mieru recidivistov. Na znázornenie takejto funkcie – s malým počtom hodnôt nezávisle premennej, ktorou je tu typ trestného činu – je vhodný napr. stĺpcový diagram, pozri obr. 23 (na obr. a) sme znázornili celú výšku stĺpcov, na obr. b) iba hornú časť stĺpcov – porovnaj s poznámkou za úlohou 4 na s. 12).

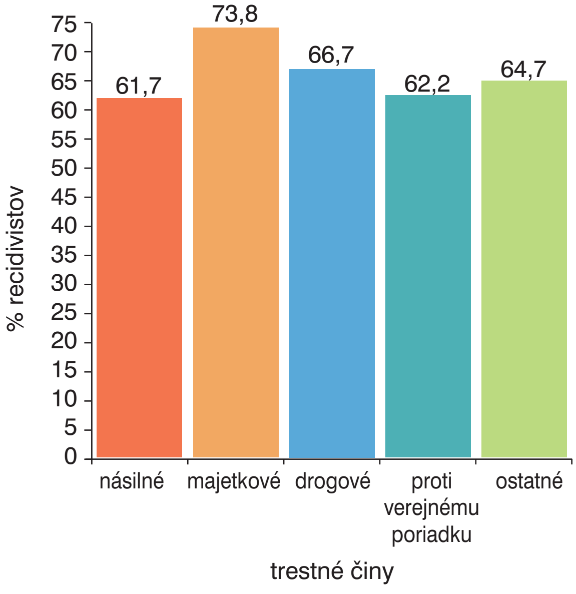
c) Dôvody, prečo nie je v tomto prípade vhodné použiť kruhový diagram, sú podobné ako v úlohe 15b. Aj v tomto prípade ide o funkciu, ktorá nezávisle premennej – roku priraďuje nejakú hodnotu – percento dôvery. Na znázornenie tejto funkcie je vhodný spojnicový graf (obr. 24), ktorý smerovaním spojníc zvýrazní aj jej rast alebo klesanie.

17. Zaokrúhľovanie „na pol palca“: Hľadáme to z čísel ... 5, 5 ½, 6, 6 ½ , ..., ktoré leží najbližšie k danej veľkosti v palcoch. V prípade veľkostí, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch z uvedených čísel (napr. hodnota 6,25 je rovnako vzdialená od 6 aj od 6 ½) volíme podobnú dohodu ako pri aritmetickom zaokrúhľovaní (pokúste sa sformulovať ju). Preto čísla z intervalu ⟨5,75; 6,25) zaokrúhlime na 6, čísla z intervalu ⟨6,25; 6,75) zaokrúhlime na 6 ½ atď.

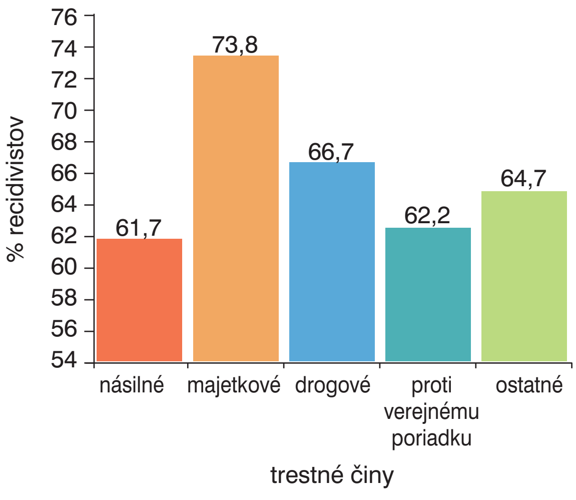
18. a) Každú z veľkostí 15 cm, 16 cm, ..., 32 cm, ktorá je zastúpená v diagrame z úlohy 16, prepočítame na francúzske palce a zaokrúhlime s presnosťou na pol palca. Výsledky napíšeme pod jednotlivé stĺpce diagramu z úlohy 16. Ak je pod dvoma stĺpcami napísaná rovnaká veľkosť vo francúzskych palcoch (nastane to pre dvojice veľkostí 17 a 18 cm, 21 a 22 cm, 24 a 25 cm, 28 a 29 cm, skontrolujte to), zlúčime tieto dva stĺpce do jedného – teda sčítame početnosti obidvoch stĺpcov.

b) Nora nemá pravdu. Nie každý, kto má obvod dlane po zaokrúhlení na centimetre 18 cm, má veľkosť rukavice 6 ½, pozri obr. 25. Veľkosť rukavice 18 cm majú tí, ktorých obvod ruky – odmeraný na milimetre – je od 175 mm po 184 mm (hodnotu 185 už zaokrúhľujeme na 19 cm). Veľkosť 6 ½ v palcoch majú tí, ktorých obvod dlane je v rozmedzí 6,25 až 6,75 francúzskeho palca, to je – ak uvažujeme iba obvody v celých milimetroch – od 170 po 182 mm (obvodu 169 mm zodpovedá veľkosť 6, obvodu 183 mm veľkosť 7, skontrolujte to). Preto prvky triedy **18 cm** z úlohy 16 môžu v diagrame z úlohy 17 ležať v dvoch rôznych triedach: **6 ½** a **7**, naopak do triedy **6 ½** môžu padnúť aj niektoré prvky z triedy **17 cm**. Podobná situácia nastane aj pre ostatné triedy diagramu z úlohy 16. Napriek tomu je možné, že v prípade hodnôt nameraných vo vašej triede povedie Norin postup – hoci vo všeobecnosti nesprávny – vedie k správnemu výsledku.

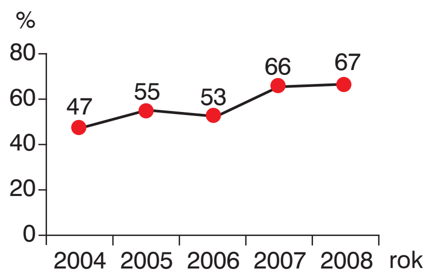
19. Pri riešení vám môže pomôcť obr. 25.



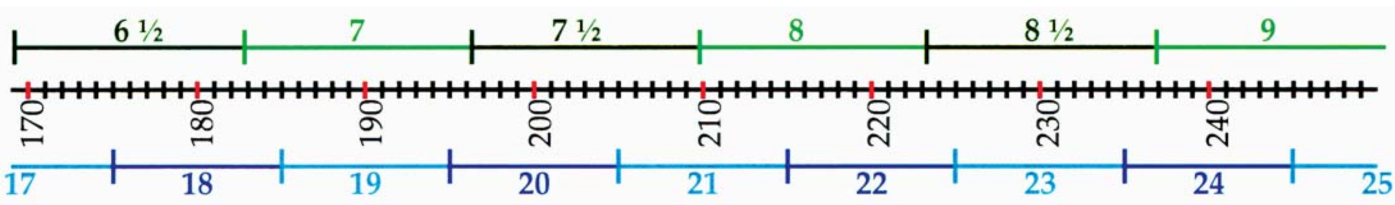
Obr. 23 a)



Obr. 23 b)



Obr. 24



Obr. 25

Na čiernej osi je obvod ruky v milimetroch, pod ňou sú veľkosti rukavíc v centimetroch, nad ňou vo francúzskych palcoch. Odporúčame, aby ste si tento obrázok (aj s ním súvisiace výpočty) urobili samostatne.

2 MODUS, MEDIÁN A ARITMETICKÝ PRIEMER

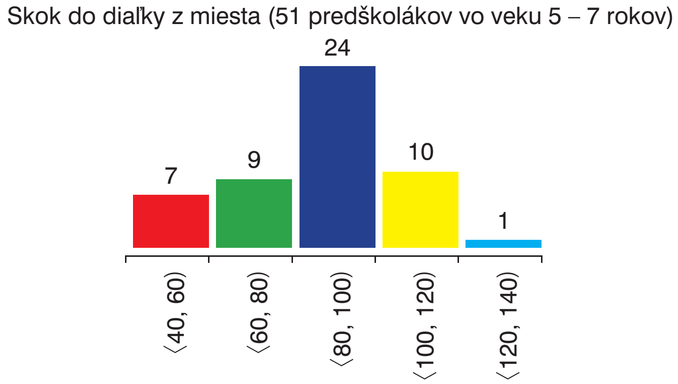
Vráťme sa k údajom o skoku z miesta (pozri text na s. 14). Ich triedením sme dostali stĺpcový diagram na obrázku. Keby sme chceli veľmi stručne zhrnúť, čo sme sa z neho dozvedeli o odpovedi na otázku:

Ako ďaleko doskočí predškolák z miesta do diaľky?

môžeme povedať, že

je to niečo okolo 90 cm.

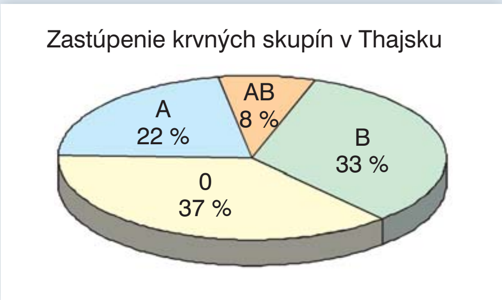
Diskutujte o tom, či je táto odpoveď zrejmá z diagramu aj vám.



Predškolák skočí z miesta do diaľky okolo 90 cm.

S podobnou situáciou – keď celý súbor údajov opíšeme jednou hodnotou – sa stretávame často. Touto jednou hodnotou môže byť modus, medián a aritmetický priemer.

MODUS – hodnota, ktorá sa v súbore vyskytuje najčastejšie (teda vyskytuje sa s najväčšou pravdepodobnosťou)



Najčastejšia krvná skupina v Thajsku je 0.

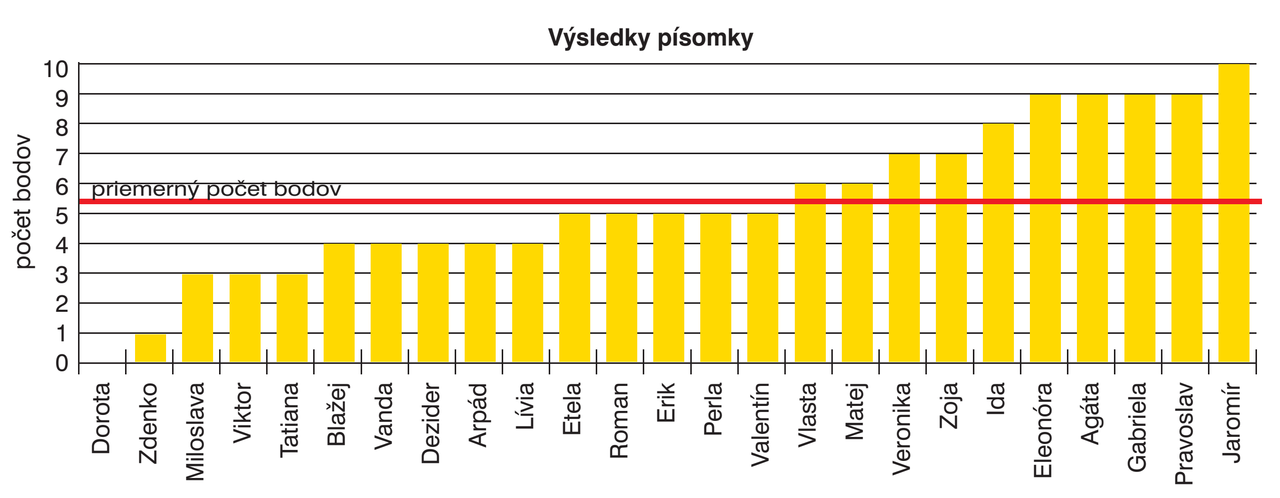
MEDIÁN – hodnota, ktorá súbor rozdelí na *lepšiu a horšiu polovicu*

Výsledková listina

1.	MATÚŠ Ján	00:37:37
2.	KOCIAN Konštantín	00:38:36
3.	ŠVEC Milan	00:38:43
⋮		
30.	ZUŠČÁK František	00:49:21
31.	SCHULZ Eric	00:49:24
⋮		
60.	FERREIRA Framlisco	01:02:44
61.	YILDIZ Deniz Can	01:05:40
62.	KUSTAN Orava	01:08:12

Na umiestenie v prvej polovici štartového poľa behu na 12 km bolo potrebné mať kvalifikačný čas lepší ako 49' 24''.

ARITMETICKÝ PRIEMER



Priemerný počet bodov z písomky bol 5,4.

Uvedené tri hodnoty sa súhrnne nazývajú *miery polohy*. Niektorými ich vlastnosťami sa budeme zaoberať v tejto kapitole.

2. 1 Modus a medián

MODUS je hodnota, ktorá sa v súbore vyskytuje najčastejšie.

Túto vlastnosť môže mať v súbore viacero hodnôt: napr. v súbore 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 8, 10 sa najčastejšie vyskytujú hodnoty 2 a 4 (každá štyrikrát), teda obidve majú právo na označenie modus. Ešte horšie je to so súborom 1, 2, 4, 6, 9, 13, 25, 48 – v ňom majú na označenie modus nárok všetky hodnoty. Z tohto príkladu vidno, že v súboroch s veľkým rozsahom nás bude modus zaujímať spravidla vtedy, keď bude iba jeden.

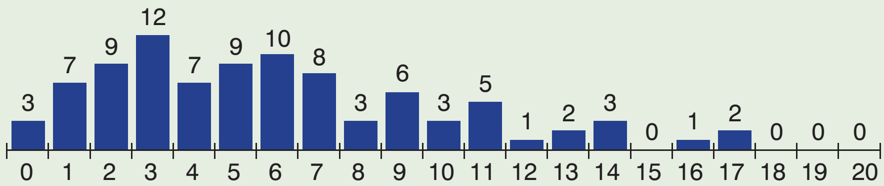
V ďalšom texte sa nenechajte zaskočiť skloňovaním slova modus, pri ktorom vypadávajú písmená „us“. Teda napr. 2. pád j. č. nie je modusu, ale modu.

Modus sa spravidla označuje strieškou nad písmenom, ktoré sme použili pri označení hodnôt súboru, napr. $\hat{x}$, čítaj „x so strieškou“. Iné používané označenia sú mod (x) alebo Mo.

V príkladoch vysvetľujúcich jednotlivé pojmy uvádzame súbory s veľmi malým počtom členov. Robíme to len kvôli jednoduchosti. Určovať medián alebo modus pre súbor s malým rozsahom má zmysel nanajvýš v školských úlohách kvôli precvičeniu pojmov. Praktický význam majú tieto hodnoty najmä pri práci s väčšími súbormi údajov.

ÚLOHA

1. Nájdite modus súboru z obr. 1.



Obr. 1
Histogram znázorňujúci počet bodov, ktoré dosiahlo z písomky 91 žiakov.

MEDIÁN je číslo, ktoré vystihuje hodnoty ležiace v strede súboru zoradeného podľa veľkosti od najmenšej po najväčšiu.

Ak má súbor
- *nepárny* počet hodnôt, je mediánom hodnota prostredného člena v súbore zoradenom podľa veľkosti – teda v 9-člennom súbore je to 5. hodnota v poradí veľkosti. Napríklad, medián súboru 1, 3, 4, 4, 8, 8, 9, 9, 9 je číslo 8.
- *párny* počet hodnôt, volí sa za medián aritmetický priemer dvoch prostredných hodnôt v súbore zoradenom podľa veľkosti – teda v zoradenom 12-člennom súbore priemer 6. a 7. hodnoty. Napríklad, medián súboru 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 7, 152 je $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$, medián súboru 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 5 je $\frac{1+1}{2} = 1$.

Slovné spojenie *počet hodnôt súboru* tu – v súlade so zaužívaným vyjadrovaním – chápeme tak, že každú hodnotu rátame toľkokrát, koľko je jej absolútna početnosť (teda *počet hodnôt súboru* je rovnaké číslo ako *rozsah súboru*). Napríklad súbor 1, 1, 3, 5, 5, 5, 9 má 7 hodnôt (hoci hodnoty sú iba 4 čísla: 1, 3, 5 a 9).

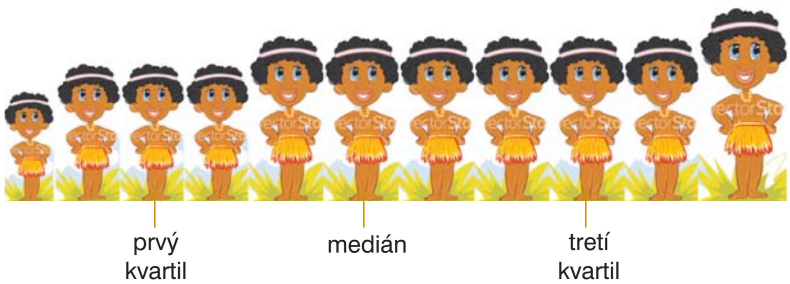
Medián súboru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa zvyčajne označuje vlnovkou nad písmenom, ktoré sme použili pri označovaní hodnôt súboru, v tomto prípade $\tilde{x}$, čítaj „x s vlnkou“. Iné používané označenia sú med(x) alebo Me.

ÚLOHY

2. Nájdite medián súboru z obr. 1.

Vzorec na výpočet mediánu

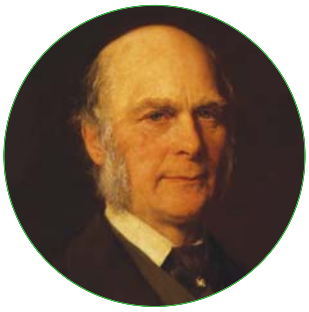
3. Súbor, ktorý sa skladá z n hodnôt, zoradíme vzostupne podľa veľkosti (t. j. od najmenšej po najväčšiu), zoradené hodnoty označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Napíšte vzorec na výpočet mediánu tohto súboru, ak
- n je nepárne číslo, teda $n = 2k - 1$,
- n je párne číslo, teda $n = 2k$.



Používanie mediánu zaviedol v poslednej štvrtine 19. storočia F. Galton, ktorého myšlienky významne ovplyvnili rozvoj matematickej štatistiky. Antropológom skúmajúcim kmene domorodcov odporúčal, aby nechali náčelníkom zoradiť svojich ľudí podľa výšky a zistili výšku v strede (medián), v prvej a tretej štvrtine (prvý a tretí kvartil).

Opis mediánu

Na opis mediánu sa často používa formulácia *polovica hodnôt je menšia ako medián, polovica hodnôt je väčšia ako medián*. Ako uvidíme v úlohách 4 až 6, toto vyjadrenie nie je úplne presné. Je však stručné, ľahko sa pamätá a v súboroch s veľkým rozsahom, v ktorých hodnotu rovnakú ako medián má iba málo členov, celkom dobre vystihuje skutočnosť. Poznamenajme ešte, že v bežnom živote sa uvedený opis často, ale neoprávnene spája s aritmetickým priemerom (pozri úlohu 8).



Francis Galton
(1822 – 1911)

ÚLOHA

4. Skontrolujte, že nasledujúce tvrdenia platia pre súbory s párnym aj pre súbory s nepárnym počtom hodnôt, v ktorých sa žiadna hodnota neopakuje:
- počet hodnôt, ktoré sú menšie ako medián, je rovnaký ako počet hodnôt väčších ako medián (tento počet je presne polovica hodnôt v súbore s párnym počtom členov a menej ako polovica hodnôt v súbore s nepárnym počtom členov),
- počet hodnôt, ktoré sú menšie alebo sa rovnajú mediánu, je rovnaký ako počet hodnôt, ktoré sú väčšie alebo sa rovnajú mediánu (tento počet je viac ako polovica hodnôt v súboroch s párnym aj v súboroch s nepárnym počtom členov).

ÚLOHY

5. Ukážte, že tvrdenia z úlohy 4 nemusia platiť pre súbory, v ktorých sa niektoré hodnoty vyskytujú viackrát. (Ak vám ani po 5 minútach rozmýšľania nenapadajú vlastné príklady, skúste použiť tie, ktoré sme uviedli pri opise mediánu pred úlohou 2.)

6. Diskutujte o tom, ktorá z nasledujúcich vlastností platí v každom konečnom súbore hodnôt (bez ohľadu na to, či sa v ňom niektoré hodnoty opakujú alebo nie).
- aspoň polovica hodnôt je menšia ako medián a aspoň polovica hodnôt je väčšia ako medián,
- aspoň polovica hodnôt je menšia alebo sa rovná mediánu a aspoň polovica hodnôt je väčšia alebo sa rovná mediánu,
- najviac polovica hodnôt je menšia ako medián a najviac polovica hodnôt je väčšia ako medián,
- najviac polovica hodnôt je menšia alebo sa rovná mediánu a najviac polovica hodnôt je väčšia alebo sa rovná mediánu.

Pre tie tvrdenia, ktoré neplatia pre ľubovoľný konečný súbor, uveďte vhodné jednoduché protipríklady.

POKÚSME SA TERAZ NÁJSŤ PODOBNÝ OPIS, KTORÝ BY VŠAK PLATIL AJ PRE SÚBORY S OPAKUJÚCIMI SA HODNOTAMI.

Z riešenia predchádzajúcich úloh vyplýva, že napr. formulácia *hodnotu menšiu ako medián nadobúda nanajvýš polovica súboru, takisto hodnotu väčšiu ako medián nadobúda nanajvýš polovica súboru* je presnejšia ako často používaný opis *polovica hodnôt je menšia ako medián, polovica hodnôt je väčšia ako medián*.

2.2 Aritmetický priemer

- VÝPOČET POMOCOU RELATÍVNYCH POČETNOSTÍ
- ARITMETICKÝ PRIEMER, ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI A STREDNÁ HODNOTA
- SÚČET ODCHÝLOK OD ARITMETICKÉHO PRIEMERU SA ROVNÁ 0

ARITMETICKÝ PRIEMER je súčet všetkých hodnôt vydelený počtom hodnôt. Symbolicky zapísané: aritmetický priemer súboru skladajúceho sa z n hodnôt, ktorými sú čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je číslo

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (*)$$

Vzorec (*) možno zostručniť použitím symbolu Σ označujúceho sčítanie (je to veľké grécke písmeno sigma, ktoré – ak označuje sčítanie – sa číta „suma“). Pomocou neho súčet v čitateli zlomku vo vzorci (*) zapíšeme $\sum_{j=1}^{n}$ (nad a pod znak Σ uvedieme, v akých medziach sa pohybuje index j použitý v zápise všeobecného sčítanca x_j, symbol $\sum_{j=1}^{n}$ čítame „suma $j = 1$ až n“). Takto možno (*) zapísať v tvare

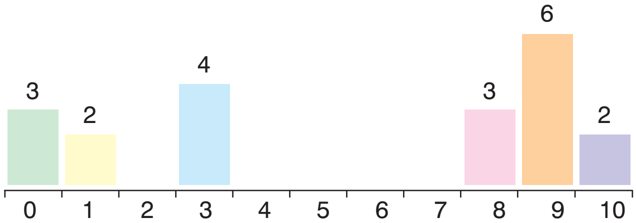
$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} \quad \text{alebo} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

ARITMETICKÝ PRIEMER SA SPRAVIDLA OZNAČUJE PRUHOM NAD PÍSMENOM, KTORÉ SME POUŽILI PRI OZNAČENÍ HODNÔT SÚBORU, VO VZORCI (*) SME PRETO POUŽILI OZNAČENIE $\bar{x}$ (ČÍTAJ „x S PRUHOM“).

Hodnotu, ktorá sa v súbore vyskytuje viackrát, započítame toľkokrát, koľkokrát sa v súbore vyskytla. Napríklad, aritmetický priemer 20-členného súboru hodnôt 0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9 , 10, 10 (na obr. 2 je zodpovedajúci histogram) je

$$\frac{\overbrace{0+0+0}^{3\cdot 0} + \overbrace{1+1}^{2\cdot 1} + \overbrace{3+3+3+3}^{4\cdot 3} + \overbrace{8+8+8}^{3\cdot 8} + \overbrace{9+9+9+9+9+9}^{6\cdot 9} + \overbrace{10+10}^{2\cdot 10}}{20} = \qquad (**)$$

$$= \frac{3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 3\cdot 8 + 6\cdot 9 + 2\cdot 10}{20} = 5{,}6$$



Obr. 2

Pripomeňme, že čísla 3, 2, 4, 3, 6 a 2 nad stĺpcami histogramu – ktoré využívame aj v druhom riadku výpočtu (**) – sú *absolútne početnosti (absolútne frekvencie)* jednotlivých hodnôt (určujú, koľkokrát sa daná hodnota vyskytuje v súbore).

ÚLOHA

7. Vypočítajte aritmetický priemer súboru z obr. 1 na s. 28.

Vo vzorci (*) má každý z n prvkov súboru svoje vlastné označenie – teda súbor je opísaný vymenovaním všetkých jeho prvkov, pričom niektoré z nich môžu mať rovnakú hodnotu. Takáto podoba vzorca nie je vhodná v prípade, keď je súbor opísaný pomocou navzájom rôznych hodnôt a ich početností (rozmyslite si, či je vám jasný rozdiel medzi týmito dvoma opismi). Vtedy je výhodnejšie použiť zápis v tvare

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot y_1 + n_2 \cdot y_2 + \ldots + n_k \cdot y_k}{n}$$

kde n_1 je početnosť hodnoty y_1, n_2 je početnosť hodnoty y_2 atď. (pritom platí $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, prečo?). Takúto podobu má druhý riadok výpočtu (**). Zápis pomocou symbolu Σ pre sčítanie:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot y_i}{n} \quad \text{alebo} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot y_i$$

Často sa možno stretnúť s nesprávnym názorom, že (približne) polovica hodnôt súboru je menšia a (približne) polovica väčšia ako jeho aritmetický priemer. Inak povedané, že (približne) polovica súboru je nadpriemerná, (približne) polovica podpriemerná. Z úloh 4 až 6 už vieme, že túto vlastnosť – rozdeliť súbor na dve približne rovnako početné časti – má medián. Z úlohy 8 zistíme, že pripisovať takúto vlastnosť aritmetickému priemeru je neoprávnené.

ÚLOHA

8. Uveďte príklad súboru, v ktorom viac ako $\frac{3}{4}$ hodnôt sú
a) menšie ako aritmetický priemer,
b) väčšie ako aritmetický priemer.

(približne) polovica hodnôt súboru je menšia ako ~~aritmetický priemer~~ medián

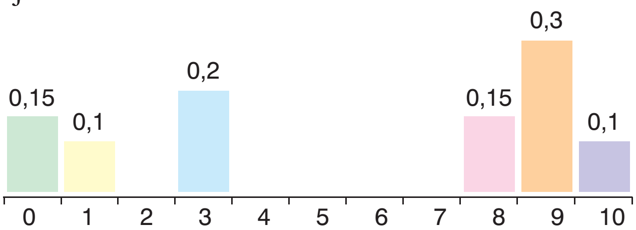
(približne) polovica hodnôt súboru je väčšia ako ~~aritmetický priemer~~ medián

VÝPOČET POMOCOU RELATÍVNYCH POČETNOSTÍ

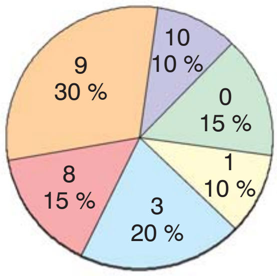
Vráťme sa k výpočtu (**) na s. 30. Jeho druhý riadok môžeme zapísať v tvare

$$\frac{3}{20}\cdot 0+\frac{2}{20}\cdot 1+\frac{4}{20}\cdot 3+\frac{3}{20}\cdot 8+\frac{6}{20}\cdot 9+\frac{2}{20}\cdot 10=5{,}6 \qquad (***)$$

Všimnite si, že čísla $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{6}{20}$ a $\frac{2}{20}$ v tomto zápise sú absolútne početnosti vydelené rozsahom súboru (celkovým počtom hodnôt). Sú to teda *relatívne početnosti (relatívne frekvencie)*, ktoré vyjadrujú, akú časť súboru tvoria jednotlivé hodnoty. Napríklad hodnota 0 s relatívnou početnosťou $\frac{3}{20}$ tvorí $\frac{3}{20}=0{,}15$, t. j. 15 % všetkých hodnôt. Relatívne početnosti sme znázornili na obr. 3, zodpovedajúci kruhový diagram je na obr. 4.



Obr. 3
Relatívne početnosti hodnôt súboru z obr. 2.

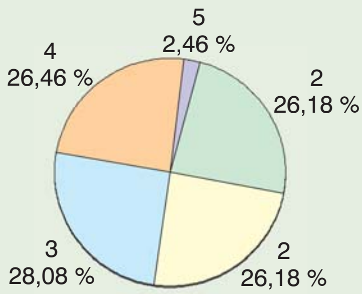


Obr. 4
Relatívne početnosti (v %) súboru z obr. 2 znázornené kruhovým diagramom.

Z výpočtu (***) vidno, že na výpočet aritmetického priemeru stačí poznať relatívne početnosti hodnôt súboru. To využijeme v nasledujúcej úlohe.

ÚLOHA

9. Kruhový diagram znázorňuje rozdelenie žiakov 9. ročníka ZŠ, ktorí sa zúčastnili Testovania 9 v roku 2011, podľa známky z matematiky na polročnom vysvedčení.
Vypočítajte z týchto údajov priemernú známku s presnosťou na dve desatinné miesta.



V ÚLOHE 9 SA STRETNEME S POMERNE ČASTOU SITUÁCIOU: RELATÍVNE FREKVENCIE BUDÚ VYJADRENÉ V PERCENTÁCH.

Ak vo vzorci na výpočet aritmetického priemeru $\bar{x}=\frac{n_1\cdot y_1+n_2\cdot y_2+\ldots+n_k\cdot y_k}{n}$ namiesto absolútnych početností n_1, n_2, ..., n_k použijeme relatívne početnosti $p_1=\frac{n_1}{n}$, $p_2=\frac{n_2}{n}$, ..., $p_k=\frac{n_k}{n}$, dostaneme zápis v tvare

$$\bar{x}=p_1\cdot y_1+p_2\cdot y_2+\ldots+p_k\cdot y_k$$

(pričom platí $p_1+p_2+p_k=1$, prečo?). Takúto podobu má výpočet (***). Zápis pomocou symbolu Σ pre sčítanie:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{k}p_i\cdot y_i\,.$$

ÚLOHA

10. Zistili sme, že na výpočet aritmetického priemeru stačí poznať relatívne frekvencie. Vysvetlite, prečo aj na zistenie modu a mediánu stačí informácia o relatívnych početnostiach. Nájdite modus a medián súboru z úlohy 9.

ARITMETICKÝ PRIEMER, ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI A STREDNÁ HODNOTA

S výpočtom aritmetického priemeru pomocou relatívnych početností súvisí aj jeden z dôležitých pojmov pravdepodobnosti – pojem *strednej* (alebo *očakávanej*) hodnoty. Vysvetlíme ho pomocou histogramu relatívnych početností na obr. 3.
Tento histogram môžeme opísať „v reči pravdepodobnosti“. Tvrdenie

relatívna početnosť hodnoty 0 je 0,15, teda 15 %

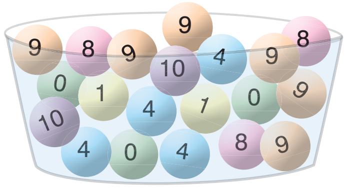
je to isté, ako tvrdenie

pravdepodobnosť výskytu hodnoty 0 v súbore je 0,15, t. j. 15 %

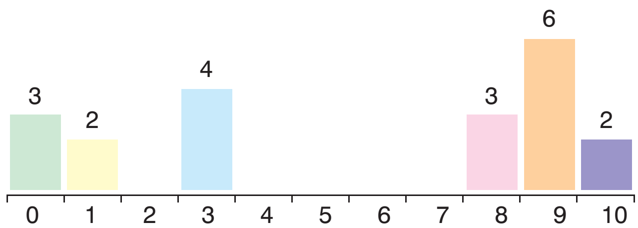
(nečítajte ďalej, kým vám to nebude jasné).

Preto jednotlivé relatívne početnosti môžeme chápať ako pravdepodobnosti, s akými sa v súbore vyskytujú hodnoty 0, 1, 3, 8, 9, 10. Na histogram z obr. 3 sa potom môžeme pozerať ako na opis náhodného pokusu. Tento pokus má 6 rôznych výsledkov: hodnoty 0, 1, 3, 8, 9, 10, každému výsledku je priradená jeho pravdepodobnosť.

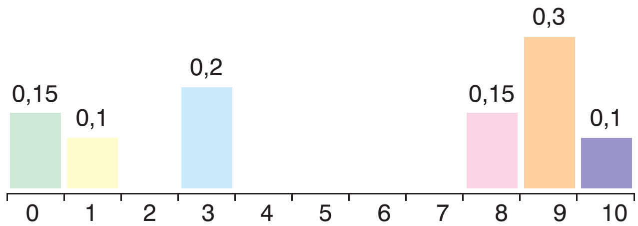
Názorná predstava tohto náhodného pokusu: máme misu, v ktorej je 20 očíslovaných loptičiek – 3 loptičky s číslom **0**, 2 loptičky s číslom **1**, 4 loptičky s číslom **3**, 3 loptičky s číslom **8**, 6 loptičiek s číslom **9**, 2 loptičky s číslom **10** (to zodpovedá histogramu na obr. 2).



Z urny náhodne vyberieme 1 loptičku. Potom histogram na obr. 3 znázorňuje, s akou pravdepodobnosťou vyberieme jednotlivé čísla.



(Obr. 2)



(Obr. 3)
Histogram z obr. 3 môžeme chápať ako opis náhodného pokusu: každému z možných výsledkov 0, 1, 3, 8, 9, 10 *je priradená jeho pravdepodobnosť.*

Takéto priradenie pravdepodobností k jednotlivým výsledkom náhodného pokusu sa nazýva *rozdelenie pravdepodobnosti*. Ak histogram z obr. 3 chápeme ako rozdelenie pravdepodobnosti, tak aritmetický priemer, teda číslo

$$0{,}15 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}15 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot 9 + 0{,}1 \cdot 10 = 5{,}6$$

sa nazýva *stredná* (niekedy aj *očakávaná*) *hodnota* tohto rozdelenia pravdepodobnosti.

TOTO JE IBA INAK ZAPÍSANÝ VÝPOČET (***) ZO S. 32 – ZLOMKY SME NAHRADILI DESATINNÝMI ČÍSLAMI.

S pojmom *očakávaná hodnota* sme sa už stretli v predchádzajúcom ročníku v kapitole o pravdepodobnosti. Pripomenieme si ho nasledujúcou úlohou, v ktorej ukážeme, na čo môže byť očakávaná hodnota dobrá.

Aritmetický priemer, očakávaná hodnota a hody kockami

Predstavte si, že sa zúčastníte nasledujúcej hry. Hádže sa dvoma hracími kockami, za každý hod kockami zaplatíte 2 centy. Ak hodíte 2 rovnaké čísla, vyhrávate 5 centov (teda váš zisk je 3 centy = 5 centov výhra – 2 centy poplatok za hod). Ak hodíte na jednej kocke šestku a na druhej iné číslo, vyhrávate 4 centy. V ostatných prípadoch nedostanete nič.

ÚLOHA

11. a) Aký výsledok (celkový zisk alebo celkovú stratu) možno na základe pravdepodobnosti jednotlivých možností očakávať po 180 kolách takejto hry?
b) Aký výsledok pripadá priemerne na 1 hru ?
c) Skontrolujte, že výsledok z časti b) sa nezmení, keď výpočet urobíme pre nejaký iný počet kôl než 180.

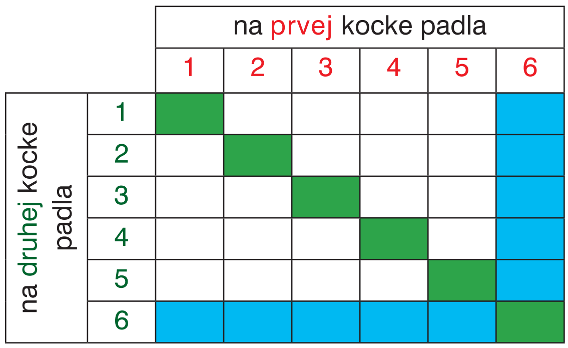
RIEŠENIE

a) Hod dvoma hracími kockami má celkom 36 možných výsledkov – 6 čísel na jednej kocke *krát* 6 čísel na druhej (pozri tabuľku), ktoré sú všetky rovnako pravdepodobné.

To, že všetky možnosti sú rovnako pravdepodobné, zdôrazňujeme preto, lebo na výpočet pravdepodobnosti chceme použiť Laplaceovu schému: ak všetky výsledky nejakého náhodného pokusu (t. j. náhodné javy) možno opísať pomocou možností, ktoré sú všetky rovnako pravdepodobné, tak

$$\text{pravdepodobnosť javu} = \frac{\text{počet priaznivých možností}}{\text{počet všetkých možností}}$$

Pre názornosť si môžeme predstaviť, že jedna kocka je červená a druhá zelená. Celkový počet rôznych možností, a tiež ich pravdepodobnosť však budú tie isté aj v prípade, že obidve kocky budú mať rovnakú farbu a budú nerozoznateľné (vyjasnite si to v diskusii).



Christiaan Huygens
(1629 – 1695)
Pojem očakávanej hodnoty použil v svojom diele *De Ratiociniis in Ludo Aleae (Uvažovanie v hazardných hrách)* z r. 1657.

výpočet pravdepodobnosti jednotlivých výsledkov	ideálny prípad	ideálny prípad pre 180 hodov
Rovnaké číslo padne na obidvoch kockách v 6 prípadoch (tmavozelené bunky v tabuľke) z celkového počtu 36 možností, preto pravdepodobnosť tejto udalosti je $\frac{6}{36}$.	Preto v ideálnom prípade pri veľkom počte hodov v $\frac{6}{36}$ všetkých hodov padne na obidvoch kockách rovnaké číslo. V týchto prípadoch bude náš zisk 3 centy (5 centov výhry mínus 2 centy poplatok za hod).	Napríklad pri 180 hodoch bude v ideálnom prípade v $\frac{6}{36} \cdot 180 = 30$ hodoch náš zisk 3 centy za hod, **30 · 3**

Šestka na jednej kocke a iné číslo na druhej kocke padne celkom v 10 prípadoch (modré bunky v tabuľke) z celkového počtu 36 možností, preto pravdepodobnosť tejto udalosti je $\frac{10}{36}$.	V ideálnom prípade v $\frac{10}{36}$ všetkých hodov bude náš zisk 2 centy.	v $\frac{10}{36} \cdot 180 = 50$ hodoch bude náš zisk 2 centy. **50 · 2**
V zvyšných 20 prípadoch nedostaneme nič, pravdepodobnosť tejto udalosti je teda $\frac{20}{36}$.	V zvyšných $\frac{20}{36}$ všetkých hodov budeme mať stratu 2 centy.	V $\frac{20}{36} \cdot 180 = 100$ hodoch budeme mať stratu 2 centy. **–100 · 2**

Číslo 180 v treťom stĺpci sme zvolili tak, aby pre jednotlivé počty hodov vychádzali pekné čísla.

Preto naša celková bilancia po 180 kolách hry bude v ideálnom prípade

$$30 \cdot 3 + 50 \cdot 2 - 100 \cdot 2 = -10 \text{ (centov)}, \qquad (1)$$

t. j. **strata 10 centov**.

b) Ak na 180 kôl pripadá celková strata 10 centov, tak priemerne na 1 kolo pripadá strata $\frac{10}{180} = \frac{1}{18}$ centu. Teda priemerná bilanca 1 kola je $-\frac{1}{18} \approx -0{,}056$ centov.

c) Skontrolujeme, že výsledok pripadajúci na 1 kolo – strata $\frac{1}{18}$ centu – nezávisí od počtu kôl (teda sa nezmení, ak v predchádzajúcich úvahách nahradíme 180 iným počtom kôl). Zapíšme výpočet hodnoty $-\frac{1}{18}$ tak, aby bolo zrejmé, kde sa v ňom vyskytoval počet kôl, teda číslo 180. V (1) zapíšeme čísla 30, 50 a 100 tak, ako sme ich vypočítali v treťom stĺpci tabuľky (pozri modro vyznačené výpočty):

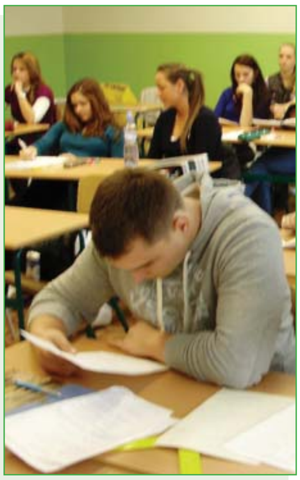
$$\underbrace{\frac{6}{36} \cdot 180}_{=30} \cdot 3 + \underbrace{\frac{10}{36} \cdot 180}_{=50} \cdot 2 - \underbrace{\frac{20}{36} \cdot 180}_{=100} \cdot 2 = -10\,.$$

Pri výpočte priemernej bilancie 1 kola delíme predchádzajúci výsledok číslom 180:

$$\frac{\frac{6}{36} \cdot 180 \cdot 3 + \frac{10}{36} \cdot 180 \cdot 2 - \frac{20}{36} \cdot 180 \cdot 2}{180} = \frac{\frac{6}{36} \cdot \cancel{180} \cdot 3}{\cancel{180}} + \frac{\frac{10}{36} \cdot \cancel{180} \cdot 2}{\cancel{180}} + \frac{\frac{20}{36} \cdot \cancel{180} \cdot 2}{\cancel{180}} =$$

$$= \frac{6}{36} \cdot 3 + \frac{10}{36} \cdot 2 - \frac{20}{36} \cdot 2 = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18} \qquad (2)$$

Ako vidno, pri tomto výpočte sa číslo 180 (počet kôl) vykráti. Keby sme číslo 180 nahradili iným počtom kôl (označme ho k), tak by sa pri výpočte rovnako vykrátila aj hodnota k. Výsledok $-\frac{1}{18}$ teda nezávisí od toho, o akom počte kôl uvažujeme.
Z druhého riadka v (2) vidno, že výsledok, číslo $-\frac{1}{18}$, možno zapísať len pomocou



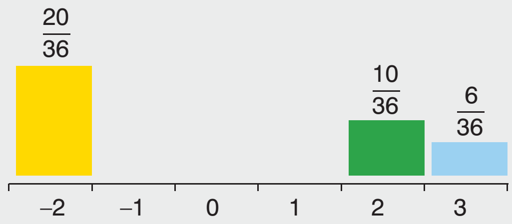
pravdepodobností jednotlivých výsledkov a príslušnej veľkosti zisku alebo straty:

$$\frac{6}{36} \cdot 3 + \frac{10}{36} \cdot 2 - \frac{20}{36} \cdot = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18} \qquad (3)$$

Ak – ako je zvykom – stratu chápeme ako záporný zisk, možno (3) zapísať v tvare:

$$\frac{6}{36} \cdot 3 + \frac{10}{36} \cdot 2 + \frac{20}{36} \cdot (-2) = -\frac{1}{18}.$$

Z tohto zápisu vidno, že $-\frac{1}{18}$ je aritmetický priemer súboru, v ktorom pravdepodobnosti výskytu hodnôt 3, 2 a –2 sú v tomto poradí $\frac{6}{36}$, $\frac{10}{36}$ a $\frac{20}{36}$, pozri obr. 5. Podľa našej dohody pred úlohou 11 je teda číslo $-\frac{1}{18}$ *stredná* (alebo *očakávaná) hodnota* rozdelenia pravdepodobnosti znázorneného na obr. 5.



Obr. 5

Histogram opisuje rozdelenie pravdepodobnosti pre náhodný pokus, ktorý má tri rôzne výsledky: –2, 2 a 3. Očakávaná (alebo stredná) hodnota tohto rozdelenia je

$$\frac{6}{36} \cdot 3 + \frac{10}{36} \cdot 2 + \frac{20}{36} \cdot (-2) = -\frac{1}{18}.$$

Slovne možno úvahy súvisiace s výpočtom (3) opísať takto:

Ak

zisk 3 centy očakávame s pravdepodobnosťou $\frac{6}{36}$, zisk 2 centy s pravdepodobnosťou $\frac{10}{36}$ a stratu 2 centy s pravdepodobnosťou $\frac{20}{36}$,

tak

očakávaná hodnota (teda predpokladaný výsledok) je strata približne 0,06 centu.

TENTO VÝPOČET JE JEDNODUCHÝM PRÍKLADOM VÝPOČTOV, S KTORÝMI SA MÔŽEME STRETNÚŤ NAPR. VO FINANČNEJ MATEMATIKE.

ARITMETICKÝ PRIEMER A MERANIE

Staroveká grécka matematika poznala iba priemer z dvoch čísel. Aritmetický priemer viacerých čísel sa objavil až koncom 16. storočia v súvislosti s meraním v astronómii.

O čo ide? Ak viackrát zmeriame tú istú veličinu – napr. nejakú dĺžku, dostaneme niekoľko rôznych výsledkov. Nedokážeme totiž merať absolútne presne, teda pri každom meraní sa dopustíme nejakej chyby. Výsledky našich meraní (označme výsledok prvého merania x_1, výsledok druhého merania x_2, ..., výsledok n-tého merania x_n) sú preto približné hodnoty, ktoré sa od skutočnej dĺžky (označme ju a) odlišujú:

nameraná hodnota = skutočná hodnota + chyba,

t. j.

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \varepsilon_1 \\ x_2 &= a + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a + \varepsilon_n \end{aligned} \qquad (*)$$

(chybu prvého merania sme označili ε_1, ..., chybu n-tého merania ε_n). Ak je nameraná hodnota menšia ako skutočná, bude chyba záporné číslo, v opačnom prípade to bude kladné číslo. Problém je v tom, že skutočnú hodnotu a nepoznáme, tú sa práve snažíme čo najlepšie odhadnúť z nameraných hodnôt x_1 až x_n.

Ak všetky namerané hodnoty v (*) sčítame, dostaneme

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n \cdot a + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)}{n} = a + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}$$

t. j. chybu hodnoty $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ vyjadruje zlomok $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}$. Je prirodzené predpokladať, že niektoré z chýb ε_1 až ε_n sú kladné, iné záporné, a teda pri sčítaní sa sčasti navzájom zrušia. To – spolu s číslom n v menovateli – prispieva k zmenšeniu hodnoty zlomku $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}$. Preto očakávame, že aritmetický priemer $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ bude lepším odhadom skutočnej hodnoty a než sú jednotlivé merania.

SÚČET ODCHÝLOK OD ARITMETICKÉHO PRIEMERU SA ROVNÁ 0

Vlastnosť uvedená v nadpise je typická pre aritmetický priemer (mohli by sme ju dokonca použiť ako jeho definíciu). Stretneme sa s ňou v tejto učebnici viackrát, preto ukážeme jej zdôvodnenie.

Predstavme si súbor obsahujúci n hodnôt – označíme ich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktorého aritmetický priemer je číslo $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (1)$$

V ľavom stĺpci sú úvahy pre tento všeobecný prípad, v pravom – kvôli väčšej názornosti – pre súbor obsahujúci 9 hodnôt 4, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 15, 18, ktorého aritmetický priemer je 10:

$$10 = \frac{4 + \overbrace{8 + 8 + 8}^{3 \cdot 8} + 9 + \overbrace{10 + 10}^{2 \cdot 10} + 15 + 18}{9} \qquad (1')$$

Ak rovnosť (1) vynásobíme číslom n, dostaneme $n \cdot \bar{x} = \underbrace{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}_{n \text{ sčítancov}}$	Ak rovnosť (1') vynásobíme číslom 9 (čo je počet členov súboru a menovateľ zlomku na pravej strane), dostaneme $9 \cdot 10 = \underbrace{4 + 8 + 8 + 8 + 9 + 10 + 10 + 15 + 18}_{9 \text{ sčítancov}}$

Táto rovnosť vyjadruje ďalšiu typickú vlastnosť aritmetického priemeru: ak aritmetický priemer deviatich čísel je číslo 10, tak súčet týchto deviatich čísel je rovnaký ako súčet deviatich desiatok – teda súčet sa nezmení, ak každého z deviatich sčítancov nahradíme aritmetickým priemerom.

Od obidvoch strán teraz odčítame číslo $n \cdot \bar{x}$. Na ľavej strane je n-krát číslo $\bar{x}$, na pravej n sčítancov. Odčítanie čísla $n \cdot \bar{x}$ od pravej strany rovnice si preto možno predstaviť tak, že od každého z n sčítancov odčítame jedno číslo $\bar{x}$: $0 = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) \quad (2)$	Od obidvoch strán odčítame číslo 9 · 10, t. j. **deväť** desiatok (teda číslo 9 · 10 „prevedieme“ z ľavej strany rovnosti na pravú). To si možno predstaviť tak, že od každého z 9 sčítancov na pravej strane odčítame jednu desiatku: $0 = (4 - 10) + (8 - 10) + (8 - 10) + (8 - 10) +$ $+ (9 - 10) + (10 - 10) + (10 - 10) +$ $+ (15 - 10) + (18 - 10) \quad (2')$

Posledná rovnosť je symbolický zápis vlastnosti, ktorú sme chceli dokázať: súčet odchýlok od aritmetického priemeru sa rovná 0. Inak povedané, súčet záporných odchýlok (v pravom stĺpci sú to červené zátvorky) musí byť rovnaký ako súčet kladných odchýlok (zelené zátvorky).

TYCHO DE BRAHE
(1546 – 1601)
TENTO DÁNSKY ASTRONÓM ZAČAL POUŽÍVAŤ OPAKOVANÉ MERANIA A ICH KOMBINOVANIE AKO PROSTRIEDOK NA DOSIAHNUTIE VYŠŠEJ PRESNOSTI VÝSLEDKOV MERANÍ.

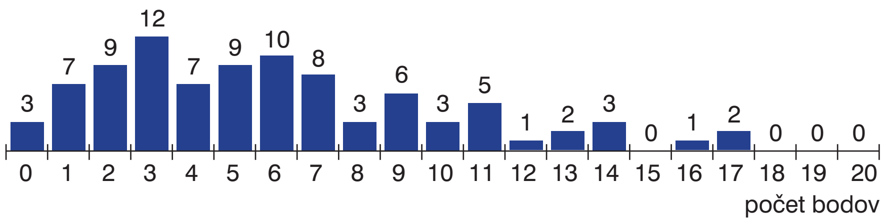
ÚLOHA

12. a) Ako by vyzeralo zdôvodnenie v vľavom stĺpci predchádzajúcej tabuľky, keby sme namiesto zo vzorca (1) vyšli zo vzťahu $\bar{x} = \dfrac{n_1 \cdot y_1 + n_2 \cdot y_2 + \ldots + n_k \cdot y_k}{n}$? (Pozri text za úlohou 7 na s. 31.) Ako bude v tomto prípade vyzerať zápis rovnosti (2)?

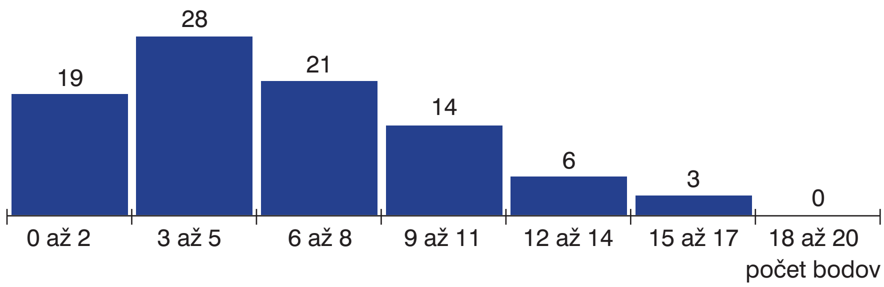
b) V časti a) tejto úlohy sme vzťah (2) zapísali pomocou absolútnych početností hodnôt $y_1, \ldots, y_k$. Zapíšte tento vzťah pomocou ich relatívnych početností.

2.3 Miery polohy pre intervalové rozdelenie početností

Doteraz sme modus, medián a aritmetický priemer počítali zo všetkých hodnôt súboru. Možno ich počítať aj pre zjednodušenú podobu súboru, opísanú intervalovým rozdelením početností (pozri napr. obr. 6, na ktorom je zjednodušená podoba súboru z obr. 1).



(Obr. 1) Histogram znázorňujúci počet bodov, ktoré dosiahlo z písomky 91 žiakov.



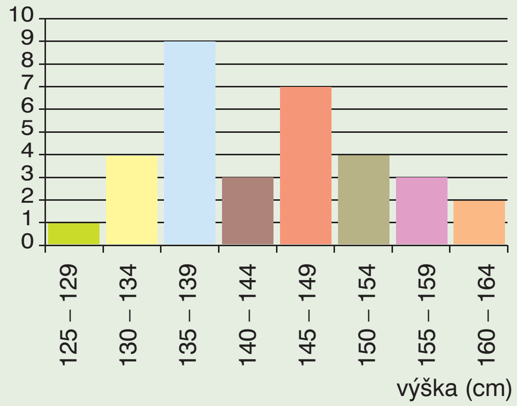
Obr. 6
Histogram, ktorý vznikol zoskupením predchádzajúcich údajov do tried 0 – 2 *body,* 3 – 5 *bodov, ...,* 18 – 20 *bodov.*

Dôvodov na použitie zjednodušeného súboru môže byť niekoľko, napr.

- niekedy poznáme iba intervalové rozdelenie početností (teda nepoznáme pôvodný súbor),
- niekedy – hoci poznáme aj pôvodný súbor – je výpočet pre intervalové rozdelenie jednoduchší alebo prehľadnejší,
- niekedy sa v pôvodnom súbore každá hodnota vyskytuje iba raz (alebo s malou absolútnou početnosťou) a až rozdelenie hodnôt do intervalov ukáže, ktorá skupina hodnôt je najpočetnejšia.

ÚLOHA

13. Navrhnite, ako vypočítať aritmetický priemer pre intervalové rozdelenie početností. Svoj návrh použite na výpočet aritmetického priemeru súboru znázorneného histogramom na obrázku.



Histogram znázorňujúci výšku 33 žiakov 6. ročníka.

V nasledujúcich úvahách sa obmedzíme na intervalové rozdelenia s rovnako dlhými intervalmi. V týchto rozdeleniach početností nie je ťažké určiť interval, obsahujúci najväčší počet hodnôt (tzv. *modálny interval*) a interval, v ktorom sa nachádzajú hodnoty určujúce medián súboru (*mediánový interval*).

Pripomeňme, že v súbore s nepárnym počtom hodnôt je medián určený jednou hodnotou súboru, v súbore s párnym počtom hodnôt potrebujeme na jeho určenie dve susedné hodnoty súboru zoradeného podľa veľkosti.

ÚLOHY

14. Nájdite modálny a mediánový interval súboru z úlohy 13.

15. Ako sa zmení odpoveď na predchádzajúcu otázku, ak z uvažovaného súboru vylúčime jeden údaj patriaci do intervalu 135 – 139 ?

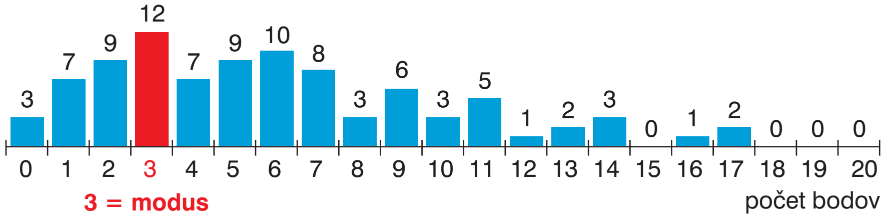
O triednom rozdelení početnosti sa často kvôli jednoduchosti predpokladá, že všetky prvky v jednej triede majú rovnakú hodnotu. Tou je číslo, ktoré sme zvolili za reprezentanta tejto triedy. Túto predstavu znázorňuje obr. 10 na s. 18. Pri takomto zjednodušení budeme napr. za modus pokladať reprezentanta modálneho intervalu (vysvetlite, ako táto veta vyplýva z predchádzajúceho textu).

ÚLOHA

16. Určte takýto hrubý odhad pre modus a medián
a) súboru z úlohy 13,
b) súboru z úlohy 13, z ktorého sme vylúčili jeden údaj patriaci do intervalu 135 – 139.

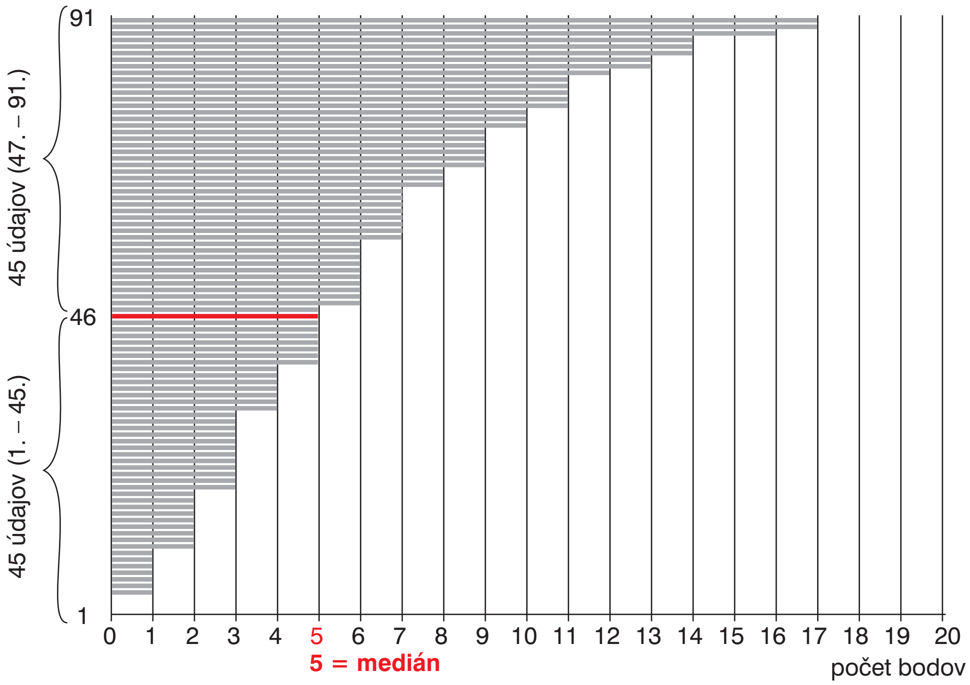
Pre histogramy z obr. 1 a 6 teraz porovnáme hodnoty modu, mediánu a aritmetického priemeru získané z pôvodného a zjednodušeného súboru. Modus, medián a aritmetický priemer súboru z obr. 1 – vypočítali ste ich v úlohách 1, 2 a 7 (strany 28, 29 a 31) – sme znázornili na nasledujúcich obrázkoch. Tie sú tiež stručným zhrnutím hlavných pojmov tejto kapitoly.

MODUS



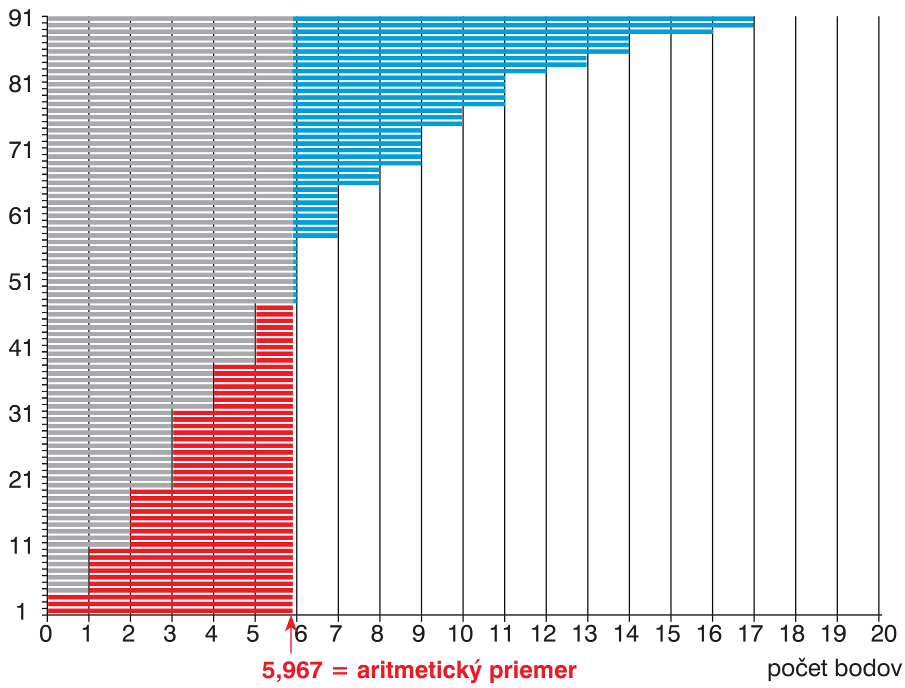
najčastejší výsledok z písomky bol 3 body
(to neznamená, že 3 body mala väčšina žiakov)

MEDIÁN



- kto získal viac ako 5 bodov, je iste v prvej (lepšej) polovici,
- kto získal menej ako 5 bodov, je iste v druhej (horšej) polovici
- najviac polovica žiakov má menej ako 5 bodov, najviac polovica má viac ako 5 bodov

ARITMETICKÝ PRIEMER



- nadpriemerný výsledok dosiahli tí, ktorí získali viac ako 543 : 91 = 5,967 ... bodu
- súčet odchýlok od priemeru smerom nadol (červené úsečky) je rovnaký ako súčet odchýlok od priemeru smerom nahor (modré úsečky)

ÚLOHA

17. Ak súbor znázornený na predchádzajúcich obrázkoch zjednodušíme zoskupením údajov do triednych intervalov, dostaneme histogram na obr. 6 na s. 38.

a) Vypočítajte aritmetický priemer a hrubý odhad pre modus a medián tohto zjednodušeného súboru.

NA SPRESNENIE POLOHY MEDIÁNU V MEDIÁNOVOM INTERVALE SA ČASTO VYUŽÍVA PREDPOKLAD, ŽE HODNOTY SÚ V TRIEDNOM INTERVALE ROZLOŽENÉ ROVNOMERNE. V NAŠOM PRÍPADE TO ZNAMENÁ PREDPOKLADAŤ, ŽE NA KAŽDÚ Z TROCH HODNÔT, KTORÉ SA V INTERVALE MÔŽU VYSKYTNÚŤ, PRIPADÁ ASI TRETINA PRVKOV LEŽIACICH V TOMTO TRIEDNOM INTERVALE.

b) Vysvetlite túto úvahu spolužiakom. Spresnite pomocou nej odhad mediánu zjednodušeného súboru.

2.4 Miery polohy a niektoré typické tvary histogramov

Teraz si precvičíme pojem mediánu, modu a aritmetického priemeru. Môžeme to urobiť na akomkoľvek súbore, hoci aj náhodne vybraných čísel. Rozumnejšie však bude, ak na precvičenie použijeme nejaké zmysluplné súbory, napr. také, ktoré opisujú výsledky náhodných dejov.
Pri skúmaní takýchto dejov (napr. výška 17-ročných chlapcov na Slovensku, vek, ktorého sa dožili ľudia narodení na Slovensku v roku 1900, počet „hláv“, ktoré padnú pri 100 hodoch mincou, mnohokrát opakované meranie tej istej veličiny) často zistíme, že v ich výsledkoch vidno nejakú zákonitosť. Tá sa prejaví aj na histograme, ktorým znázorňujeme početnosť jednotlivých výsledkov takéhoto náhodného deja.

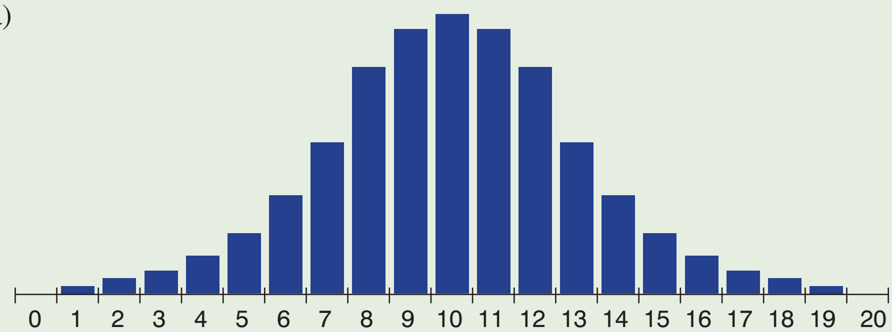
Preto v nasledujúcich úlohách uvedieme niekoľko typických tvarov histogramov. Bude nás zaujímať, ako tvar histogramu ovplyvní polohu modu, mediánu a strednej hodnoty.

ÚLOHA

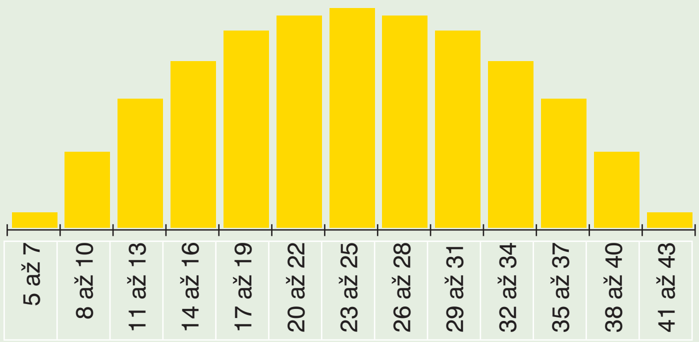
ZAČNEME PRÍKLADMI, V KTORÝCH MOŽNO MODUS, MEDIÁN AJ ARITMETICKÝ PRIEMER NÁJSŤ VEĽMI ĽAHKO.

18. Nájdite modus, medián a aritmetický priemer súborov, ktorých rozdelenie početnosti znázorňujú nasledujúce histogramy. Vysvetlite, prečo nájdenie týchto hodnôt nevyžaduje žiadne výpočty (preto v prvých dvoch histogramoch neuvádzame hodnoty, ktoré jednotlivé stĺpce predstavujú) a s akou vlastnosťou uvedených histogramov to súvisí.

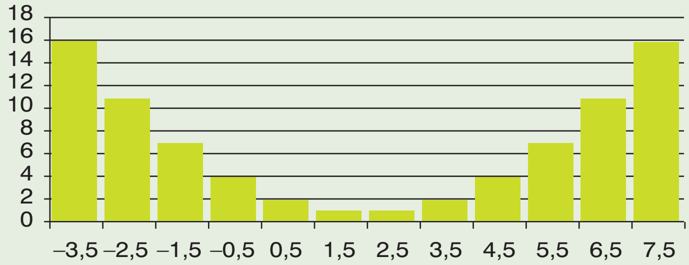
a)



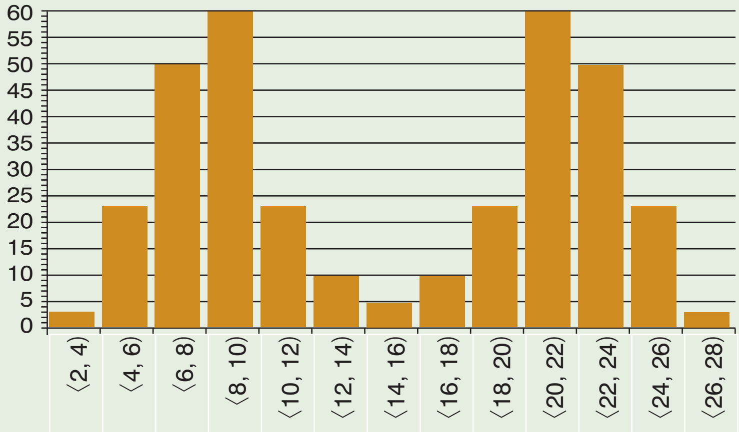
b)



c)



d)



Normálne rozdelenie

Pomerne časté sú histogramy v tvare „jedného kopca“: majú jeden najvyšší obdĺžnik (predstavujúci modus) a smerom od neho na obidve strany sa výšky obdĺžnikov histogramu zmenšujú (ktoré histogramy z úloh 18 a 21 majú takýto tvar?). Ak sú takéto histogramy navyše súmerné (podľa zvislej osi prechádzajúcej modom), tak v nich platí

modus = medián = aritmetický priemer. (*)

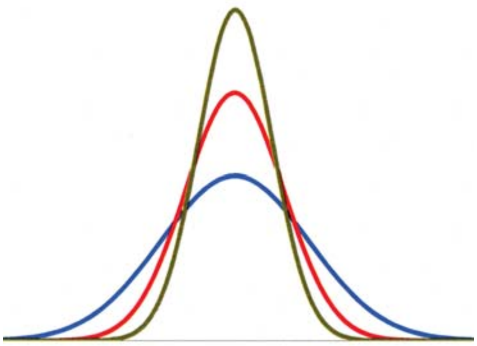
Táto situácia nastala v úlohách 18 a), b).

ÚLOHA

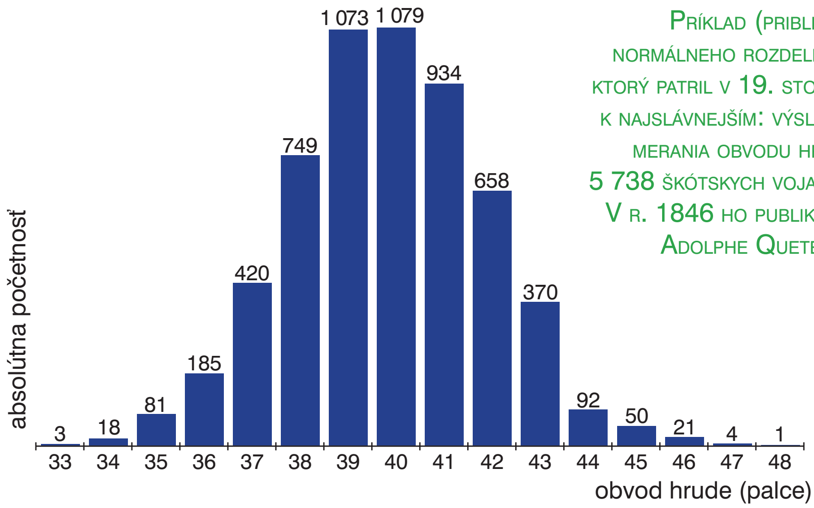
19. Zdôvodnite, ako zo súmernosti „jednokopcového“ histogramu vyplýva rovnosť (*).

Dôležitým príkladom tohto typu je histogram z úlohy 18 a). Dôležitý je kvôli tomu, že jeho tvar kopíruje podobu špeciálnej krivky, ktorá sa nazýva *krivka normálneho rozdelenia*. Aby sme boli presní, krivka normálneho rozdelenia nie je iba jedna – je to celá skupina kriviek, ktoré jedna z druhej vzniknú stlačením alebo roztiahnutím v smere zvislej alebo vodorovnej osi. (S tým, že jeden názov označuje celú skupinu kriviek, sme sa už stretli: napr. *parabola* je tiež názov celej skupiny kriviek).

krivky normálneho rozdelenia



Obr. 7
Charakteristický zvonovitý tvar kriviek normálneho rozdelenia.



Príklad (približne) normálneho rozdelenia, ktorý patril v 19. storočí k najslávnejším: výsledky merania obvodu hrude 5 738 škótskych vojakov. V r. 1846 ho publikoval Adolphe Quetelet.

Ak histogram znázorňujúci rozdelenie početností dostatočne presne kopíruje krivku normálneho rozdelenia, hovoríme, že toto rozdelenie je *približne normálne* (príslovka *približne* sa však často – najmä v rôznych populárno-vedeckých prácach – vynecháva). Ku krivkám normálneho rozdelenia sa ešte vrátime v nasledujúcom ročníku.

Treba však zdôrazniť, že nie každý histogram v tvare súmerného kopca musí kopírovať krivku normálneho rozdelenia. Príkladom je histogram z úlohy 18 b), ktorý má iný tvar.

Všetky histogramy z úlohy 18 sú súmerné podľa hodnoty mediánu, preto v nich platí

medián = aritmetický priemer (**)

(toto si rozmyslite). V prvých dvoch – v tvare súmerného kopca – platí dokonca rovnosť

modus = medián = aritmetický priemer

V úlohe 21 uvedieme príklady nesúmerných tvarov histogramov. Pre ne už rovnosť (**) nebude platiť. Skúsenosti však ukazujú, že ak je rozdelenie početností iba mierne nesúmerné, tak medián spravidla (ale nie vždy!) leží približne v tretine vzdialenosti od priemeru k modu, teda

$$\bar{x} - Mo \approx 3(\bar{x} - Me) \qquad (***)$$

Adolphe Quetelet

Tento belgický astronóm, matematik a sociológ bol priekopníkom použitia metód pravdepodobnosti a štatistiky v sociálnych vedách. Pri skúmaní rôznych súborov dát bol prekvapený, ako často v nich možno objaviť súvis s krivkou normálneho rozdelenia.

ÚLOHA

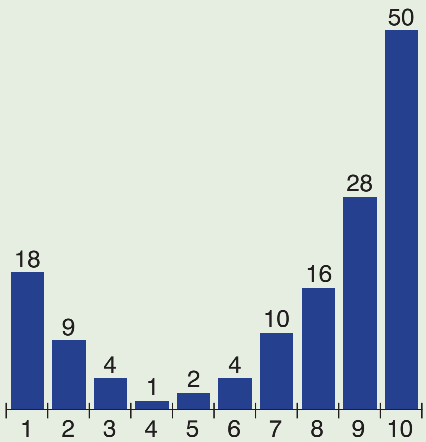
20. Skontrolujte, či rovnosť (***) skutočne vyjadruje opísaný vzťah medzi modom, mediánom a aritmetickým priemerom.

KARL PEARSON
(1857 – 1936)
JEDEN ZO ZAKLADATEĽOV MODERNEJ MATEMATICKEJ ŠTATISTIKY, PRIPISUJE SA MU FORMULÁCIA VZŤAHU (***) ZO S. 43.

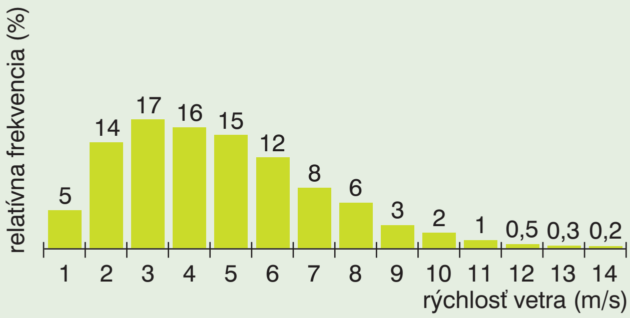
ÚLOHA

21. Z nasledujúcich histogramov vypočítajte modus, medián a aritmetický priemer príslušných súborov (diskutujte o tom, ako vám pri výpočte v úlohách b) a d) pomôže informácia, že histogram znázorňuje relatívne frekvencie). Potom zistite, pre ktoré z týchto histogramov platí približne rovnosť (***) zo s. 43.

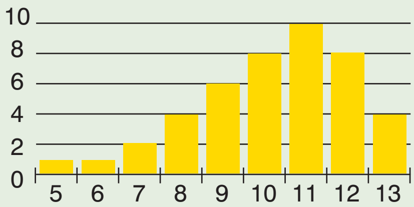
a)



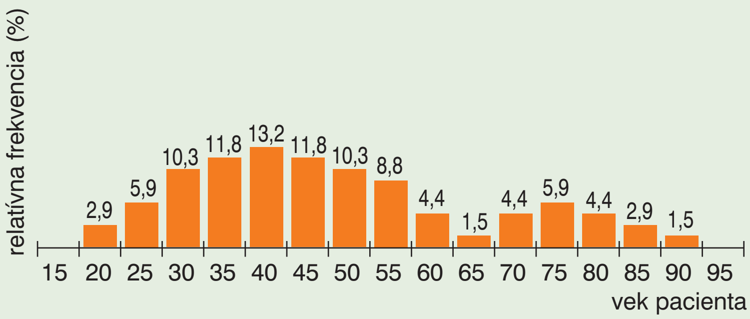
b)



c)



d)



2.5 Vážený aritmetický priemer

ÚLOHA

22. Písomka z matematiky, ktorú písalo všetkých 30 žiakov, dopadla veľmi prekvapujúco: všetky dievčatá dostali dvojku, všetci chlapci trojku.
a) Mohla byť priemerná známka z tejto písomky 2,7?
b) Kedy by priemerná známka z tejto písomky bola presne 2,5?
c) Ako súvisí priemerná známka z písomky s počtom dievčat v triede – napr. čo viete povedať o priemernej známke, keby
- väčšina žiakov boli dievčatá
- väčšina žiakov boli chlapci
- dievčat by bolo dvakrát viac ako chlapcov

DVE ÚLOHY O PÍSOMKE – NEREÁLNA A MIERNE REALISTICKÁ

HLAVNÝM CIEĽOM PREDCHÁDZAJÚCEJ ÚLOHY JE UVEDOMIŤ SI, ŽE VÝSLEDOK ZÁVISÍ OD POČTU DIEVČAT V TRIEDE (PRESNEJŠIE POVEDANÉ, OD POMERU MEDZI POČTOM DIEVČAT A POČTOM CHLAPCOV – ÚLOHA 22 a).
TERAZ SKÚSIME RIEŠIŤ PODOBNÝ, NO O ČOSI REALISTICKEJŠÍ PROBLÉM, AKO JE PROBLÉM V ÚLOHE 22. SKÔR, AKO ZAČNETE POČÍTAŤ: ČÍM SA LÍŠI INFORMÁCIA UVEDENÁ PRED OTÁZKOU a) V ÚLOHE 23 OD INFORMÁCIE PRED OTÁZKOU a) V ÚLOHE 22?

ÚLOHA

23. Všetkých 30 žiakov triedy písalo písomku z matematiky. Priemerná známka dievčat z tejto písomky bola presne 2, priemerná známka chlapcov presne 3.
a) Aká bola priemerná známka v triede, kde z 30 žiakov triedy je 9 dievčat?
b) Ako by sa zmenila odpoveď na otázku a), keby bolo v triede 12 dievčat?
c) Zapíšte vzťah – predpis funkcie, ktorý vyjadruje, ako závisí priemerná známka triedy od počtu dievčat v triede (stále predpokladáme, že v triede je 30 žiakov, chlapci majú priemernú známku 3, dievčatá 2). Nakreslite graf tejto funkcie, napr. pomocou tabuľkového kalkulátora.

NASLEDUJÚCOU OTÁZKOU SÍCE NA CHVÍĽU ODBOČÍME OD TÉMY TEJTO KAPITOLY, JE NÁM VŠAK ĽÚTO NEVYUŽIŤ PRÍLEŽITOSŤ, KTORÚ POSKYTUJE VZŤAH Z ÚLOHY c).

d) V riešení úlohy c) skontrolujte, že so zväčšovaním počtu dievčat sa priemerná známka triedy zmenšuje. Znamená to, že priemerná známka celej triedy je nepriamo úmerná počtu dievčat?

RIEŠENIE

Na výpočet priemernej známky v otázke a) potrebujeme poznať súčet všetkých známok (zdôrazňujeme: nepotrebujeme poznať jednotlivé známky, stačí nám ich súčet). Z informácií v zadaní vieme zistiť, aký bol
- súčet známok všetkých dievčat
  Aritmetický priemer známok dievčat sa rovná súčtu ich známok (označme ho S_d) vydelený ich počtom (9). Podľa zadania je priemerná známka dievčat 2, preto

$$\frac{S_d}{9} = 2, \text{ odtiaľ } S_d = 2 \cdot 9 = 18. \qquad \text{(A)}$$

- súčet známok všetkých chlapcov

  Podobne z rovnice $\frac{S_{ch}}{21} = 3$ (zo zadania vyplýva, že chlapcov je 21) zistíme, že súčet známok všetkých chlapcov je
$$S_{ch} = 21 \cdot 3 = 63. \qquad \text{(B)}$$

Súčet všetkých známok je potom $S_d + S_{ch} = 18 + 63 = 81$, preto priemerná známka celej triedy je
$$\frac{S_d + S_{ch}}{30} = \frac{81}{30} = 2{,}7. \qquad \text{(C)}$$

Ak je v triede priemerná výška dievčat 174 cm a priemerná výška chlapcov 182 cm, z toho ešte **nevyplýva**, že priemerná výška žiakov triedy musí byť $\frac{174 + 182}{2}$ cm.

Aby sme videli, ako v riešení úlohy 23 a) súvisí priemerná známka celej triedy s priemernými známkami chlapcov a dievčat, zapíšme v (C) počty S_d a S_{ch} tak, ako sme ich vypočítali v (A) a (B):
$$\text{priemerná známka} = \frac{S_d + S_{ch}}{30} = \frac{9 \cdot 2 + 21 \cdot 3}{30} = \frac{9}{30} \cdot 2 + \frac{21}{30} \cdot 3 = 2{,}7,$$
teda

priemerná známka =	$\frac{9}{30}$	·	2	+	$\frac{9}{30}$	·	3
	relatívna početnosť dievčat	×	ich priemerná známka	+	relatívna početnosť chlapcov	×	ich priemerná známka

Takto vypočítané číslo (v našom prípade 2,7) sa nazýva **vážený aritmetický priemer** čísel 2 a 3. Hodnoty $\frac{9}{30}$ a $\frac{21}{30}$ (t. j. 0,3 a 0,7) sa nazývajú *váhy* (môžeme povedať, že máme hodnotu 2 s váhou $\frac{9}{30}$ a hodnotu 3 s váhou $\frac{21}{30}$).

Všimnite si, že súčet váh je číslo 1.

So zápismi výpočtov v tvare
$$\text{hodnota}_1 \times v_1 + \text{hodnota}_2 \times v_2 + \ldots + \text{hodnota}_n \times v_n,$$
v ktorých váhy $v_1, v_1, \ldots, v_n$ sú nezáporné čísla a ich súčet je 1, sme sa už stretli. Takúto podobu mali napr.

- výpočet (*) aritmetického priemeru pred úlohou 7:
$$\frac{\overbrace{0+0+0}^{3\cdot 0} + \overbrace{1+1}^{2\cdot 1} + \overbrace{3+3+3+3}^{4\cdot 3} + \overbrace{8+8+8}^{3\cdot 8} + \overbrace{9+9+9+9+9+9}^{6\cdot 9} + \overbrace{10+10}^{2\cdot 10}}{20} =$$
$$= \frac{3}{20} \cdot 0 + \frac{2}{20} \cdot 1 + \frac{4}{20} \cdot 3 + \frac{3}{20} \cdot 8 + \frac{6}{20} \cdot 9 + \frac{2}{20} \cdot 10 = 5{,}6 \qquad (1)$$

  V tomto prípade hodnoty boli 0, 1, 3, 8, 9 a 10, váhy boli $\frac{3}{20}, \frac{2}{20}, \frac{4}{20}, \frac{3}{20}, \frac{6}{20}$ a $\frac{2}{20}$.

- výpočet aritmetického priemeru pre intervalové rozdelenie početností v riešení úlohy 13:
$$127 \cdot \frac{1}{33} + 132 \cdot \frac{4}{33} + 137 \cdot \frac{9}{33} + 142 \cdot \frac{3}{33} + 147 \cdot \frac{7}{33} + 152 \cdot \frac{4}{33} + 157 \cdot \frac{3}{33} + 162 \cdot \frac{2}{33} =$$
$$= \frac{4\,746}{33} = 143{,}8 \qquad (2)$$

(Opis hodnôt a ich váh v tejto aj nasledujúcej odrážke prenechávame vám.)

- výpočet očakávanej hodnoty – vzťah (2) v riešení úlohy 11c):

$$\frac{6}{36}\cdot 3+\frac{10}{36}\cdot 2-\frac{20}{36}\cdot 2=-\frac{2}{36}=-\frac{1}{18}. \qquad (3)$$

Výsledok každého z týchto výpočtov má nárok na označenie *vážený aritmetický priemer*.

ÚLOHA

24. Pre každý z výpočtov (1) až (3) si pripomeňte, čo vyjadrujú jednotlivé váhy podľa pôvodného zadania. Na základe toho vysvetlite, prečo sa súčet váh v týchto výpočtoch rovná 1.

Vážený aritmetický priemer čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s váhami $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je číslo

$$v_1\cdot x_1+v_2\cdot x_2+\ldots+v_n\cdot x_n \text{ (t. j. } \sum_{i=1}^{n} v_i\,.\,x_i\text{)},$$

váhy musia byť nezáporné a ich súčet sa musí rovnať 1.

2.6 Nie každý priemer je aritmetický

Pripomeňme si typickú vlastnosť aritmetického priemeru: ak v nejakom súbore hodnôt všetky hodnoty nahradíme ich aritmetickým priemerom, tak sa súčet hodnôt nezmení. Vyplýva to priamo z definície aritmetického priemeru:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \text{ je to isté ako } x_1+x_2+\ldots+x_n=n\cdot\bar{x}$$

(Je vám jasná táto vlastnosť aj jej zdôvodnenie?).

AK VÁM NIE JE JASNÁ TÁTO VLASTNOSŤ, VRÁŤTE SA K TEXTU SÚČET ODCHÝLOK... NA S. 37.

TAKTO SME VYUŽILI ARITMETICKÝ PRIEMER V RIEŠENÍ ÚLOHY 23:
POTREBOVALI SME NÁJSŤ SÚČET ZNÁMOK VŠETKÝCH DIEVČAT, PRETO NÁM STAČILA INFORMÁCIA O PRIEMERNEJ ZNÁMKE A POČTE DIEVČAT (NEPOTREBOVALI SME POZNAŤ ZNÁMKY JEDNOTLIVÝCH DIEVČAT).

Napríklad, ak do zbierky prispelo 625 darcov a jej celkový výťažok je 975 €, tak na jedného darcu pripadá priemerne $\frac{975}{625}$ = 1,56 €. Teda výťažok zbierky by bol rovnaký, keby každý zo 625 darcov prispel rovnakou sumou 1,56 €. Aritmetický priemer je v tomto prípade odpoveďou na otázku: akou hodnotou treba nahradiť príspevky jednotlivých darcov, ak chceme dosiahnuť rovnaký výsledok – teda celkovú vyzbieranú sumu? Táto hodnota je *priemerný* príspevok. Takto chápeme slovo *priemerný* aj v iných situáciách: cieľom je nahradiť rôzne hodnoty danej veličiny (v našom príklade touto veličinou bol príspevok) jediným číslom tak, aby sa výsledok nezmenil.

ÚLOHA

25. Diskutujte o tom, či možno podobne vysvetliť slovo *priemerný* napr. v pojme *priemerná rýchlosť*.

Priemerná hodnota: ak ňou nahradíme všetky hodnoty danej veličiny vystupujúce v zadaní, tak dosiahneme rovnaký výsledok (rovnaký stav).

Dve úlohy o vklade – rozprávková a realistická

V nasledujúcich úlohách uvidíme, že priemernou hodnotou nemusí byť vždy iba aritmetický priemer.

ÚLOHY

Čísla v našom prvom príbehu budú úplne nereálne. Sú však zvolené tak, aby sa nám ľahko počítalo a mohli sme sa sústrediť na podstatu problému.

26. Predstavme si, že náš vklad do banky sa po 1. roku zdvojnásobil a táto nová suma sa po ďalšom roku zväčšila 8-násobne.

a) Koľkonásobne sa zväčšil pôvodný vklad za 2 roky?

Zaujíma nás, priemerne koľkonásobne sa tento vklad zväčšil za jeden rok.

b) Diskutujte o tom, ako treba v tomto prípade chápať slovo *priemerne*.

c) Skontrolujte, že odpoveď „vklad sa priemerne za rok zväčšil 5-násobne" **nie je** správna.

Číslo 5 v predchádzajúcej otázke sme nezvolili náhodou: 5 je aritmetický priemer čísel 2 a 8 (udávajúcich zväčšenie vkladu po 1. a po 2. roku) zo zadania úlohy. Otázka c) teda upozorňuje, že v tomto prípade hľadanou priemernou hodnotou **nie je** aritmetický priemer.

d) Vypočítajte, priemerne koľkonásobne sa vklad zväčšil za jeden rok.

Výsledok otázky d) a údaje zo zadania teraz vyjadríme pomocou ročnej úrokovej miery.

e) Aká ročná úroková miera banky v 1. a 2. roku zodpovedá údajom zo zadania (o zdaňovaní vkladov neuvažujeme)?

f) Aká by bola priemerná ročná úroková miera nášho vkladu?

Náš druhý príbeh bude mať podobný dej a otázku, iba ročné úrokové miery budú o čosi realistickejšie.

27. Banka ponúka rastový vklad s 3-ročnou viazanosťou. Úrok je v prvom roku 2,5 % p.a., v druhom roku 5 % p.a., v treťom roku 7,5 % p.a. Aká je priemerná ročná úroková miera tohto vkladu (o zdaňovaní úrokov neuvažujeme)? Skontrolujte, že aj teraz sa výsledok odlišuje – hoci iba mierne – od aritmetického priemeru hodnôt 2,5 %, 5 % a 7,5 %.

Štyri úlohy o priemernej rýchlosti

Nasledujúce úlohy patria k evergreenom zbierok úloh z matematiky. Odporúčame pripomenúť si najprv diskusiu o slove priemerný z úlohy 25.

28. a) Prvé dve hodiny sme išli priemernou rýchlosťou 60 km/h, ďalšie dve hodiny priemernou rýchlosťou 80 km/h. Aká bola naša priemerná rýchlosť počas týchto 4 hodín?

b) Skontrolujte, že odpoveď na otázku a) sa nezmení, ak v zadaní dva dvojhodinové úseky nahradíme inými dvoma rovnako dlhými časovými úsekmi, napr. dvoma štvrťhodinami, dvoma 3-hodinovými úsekmi a pod.

29. Štvrtinu z celkového času cesty sme išli priemernou rýchlosťou 60 km/h, zvyšné tri štvrtiny priemernou rýchlosťou 80 km/h. Chceme zistiť priemernú rýchlosť počas celej cesty.

a) Skôr, ako začnete počítať, odhadnite, či výsledok bude bližšie k hodnote 60 km/h (teda niekde medzi 60 a 70 km/h), alebo bližšie k hodnote 80 km/h.

b) Vypočítajte priemernú rýchlosť počas celej cesty.

30. Prvú polovicu cesty sme prešli priemernou rýchlosťou 60 km/h, druhú polovicu priemernou rýchlosťou 80 km/h. Aká bola naša priemerná rýchlosť počas celej cesty? Pozor, odpoveď $\frac{60+80}{2} = 70$ km/h **nie je** správna.

31. Prvú tretinu cesty sme prešli priemernou rýchlosťou 60 km/h, zvyšné dve tretiny priemernou rýchlosťou 80 km/h. Aká bola naša priemerná rýchlosť počas celej cesty?
Skôr, ako začnete počítať, diskutujte o tom, či výsledok bude väčší alebo menší ako výsledok úlohy 30.

Ak sa vám všeobecné formulácie v zadaniach úloh 29 až 31 zdajú ťažké, zvolte najprv nejaké konkrétne hodnoty (teda v úlohe 29 zvoľte nejaký konkrétny čas, napr. 1 hodina a 3 hodiny, podobne v úlohách 29 a 30 nejakú konkrétnu vzdialenosť). Potom skontrolujte, že výsledok nezávisí od toho, akú konkrétnu hodnotu ste zvolili (teda bude rovnaký aj pre iné voľby).

RIEŠENIE ÚLOHY 30

Aby boli naše úvahy prehľadnejšie, najprv si úlohu zjednodušíme: budeme navyše predpokladať, že poznáme dĺžku cesty – nech je to napr. 100 km. Potom sa pozrieme, či postup riešenia tejto upravenej úlohy možno použiť aj pri riešení pôvodného zadania.

Najprv pre cestu dlhú 100 km

Priemerná rýchlosť je podiel

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\textit{celková prejdená dráha}}{\textit{čas, za ktorý sme túto dráhu prešli}},$$

na jej výpočet potrebujeme poznať celkovú dráhu (tú vieme, je to 100 km) a čas, za ktorý sme ju prešli – ten potrebujeme zistiť.

- Prvú polovicu cesty – teda $s = 50$ km – sme prešli priemernou rýchlosťou $v = 60$ km/h.

  Dosadením týchto hodnôt do vzorca $v = \frac{s}{t}$ na výpočet priemernej rýchlosti dostaneme

  $$60 = \frac{50}{t}, \text{ odtiaľ } t = \frac{50}{60} \text{ h} \qquad \text{(A)}$$

  (to je 50 minút)

- Pre druhú polovicu cesty platí

  $$80 = \frac{50}{t}, \text{ odtiaľ } t = \frac{50}{80} = 0{,}625 \text{ h} \qquad \text{(B)}$$

(to je $0{,}625 \cdot 60 = 37{,}5$ min).
Teda prvých 50 km sme prešli za $\frac{50}{60}$ hodiny, druhých 50 km za $\frac{50}{80}$ hodiny.

Aby sme videli, ako celkový výsledok súvisí s rýchlosťami 60 km/h a 80 km/h a s dráhou 100 km, nebudeme v ďalších výpočtoch zlomky $\frac{50}{60}$ a $\frac{50}{80}$ zjednodušovať ani vyčísľovať.

Celá 100-kilometrová cesta nám trvala $\frac{50}{60} + \frac{50}{80} = 50 \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{80}\right)$ hodiny, preto priemerná rýchlosť bola

$$v = \frac{\textit{celková dráha}}{\textit{celkový čas}} = \frac{100}{\frac{50}{60} + \frac{50}{80}} = \boxed{\frac{100}{50 \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{80}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{80}}} = 68{,}571\,4... \approx 69 \text{ km/h}. \qquad \text{(C)}$$

Ak nás zaujíma iba hodnota podielu $\frac{100}{\frac{50}{60} + \frac{50}{80}}$, nie sú zeleno vyznačené úpravy potrebné.

Uvádzame ich, aby bol zrejmý súvis výpočtu (C) pre konkrétnu dĺžku cesty s výpočtom (D) na s. 50 vo všeobecnom prípade.

TERAZ VŠEOBECNE

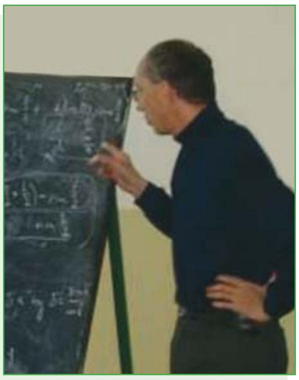
Skúsme teraz postup, ktorý sme našli pri riešení zjednodušenej úlohy, použiť pre všeobecný prípad. Pozrime sa, ako sa zmenia výpočty (A), (B) a (C), ak dva 50-kilometrové úseky z predchádzajúceho riešenia nahradíme dvoma úsekmi dĺžky S:

- čas, za ktorý prejdeme prvú polovicu cesty, bude $\frac{S}{60}$ (vo výpočte (A) namiesto dráhy 50 bude teraz dráha S),
- čas, za ktorý prejdeme druhú polovicu cesty bude $\frac{S}{80}$,
- teda celú cestu dĺžky $2 \cdot S$ prejdeme za čas $\frac{S}{60} + \frac{S}{60} = S \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{80}\right)$, preto priemerná rýchlosť bude

$$\frac{\textit{celková dráha}}{\textit{celkový čas}} = \frac{2 \cdot S}{\frac{S}{60} + \frac{S}{80}} = \frac{2 \cdot S}{S \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{80}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{80}} = 68{,}571\,4... \approx 69 \text{ km/h.} \qquad \text{(D)}$$

Všimnite si, že zo zeleno vyznačenej časti výpočtu (D) vidno, že výsledok nezávisí od dĺžky cesty: hodnota S sa pri úpravách vykrátila.

Odpoveď: priemerná rýchlosť bola $\frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{80}} \approx 69$ km/h (pričom tento výsledok nezávisí od dĺžky cesty).



Väčšina z priemerných hodnôt, ktoré sme vypočítali v úlohách 26 až 31, má v matematike svoje pomenovanie. S niektorými názvami sme sa už stretli (napr. výsledok úlohy 29 bol vážený aritmetický priemer čísel 60 a 80), ďalšie prezradíme – len ako zaujímavosť:

	všeobecná definícia
výsledok úlohy 26 d) je *geometrický priemer* čísel 2 a 8	*geometrický priemer* kladných čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ je číslo $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$
výsledok úlohy 30 je *harmonický priemer* čísel 60 a 80	*harmonický priemer* kladných čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ je číslo $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$

Svoj názov má aj výsledok úlohy 31: je to *vážený harmonický priemer* čísel 60 a 80. Už z tohto prehľadu je zrejmé, že rôznych priemerov je nepreberné množstvo. Zo zadania úlohy pritom často nie je hneď zrejmé, ktorý z množstva priemerov je ten pravý v danej situácii. Preto sa v prípade úloh na hľadanie priemernej hodnoty namiesto postupu *vyber vzorec, do ktorého treba dosadiť* oveľa viac osvedčuje postup, ktorý sme použili aj my pri riešení úloh 26 až 31: *opíš správne pojem* ***priemerná hodnota*** *pre danú situáciu a na základe toho toto číslo vypočítaj*.

2.7 Ďalšie úlohy

ÚLOHY

32. S ktorou charakteristikou polohy súvisí uvedená informácia: s modom, mediánom alebo strednou hodnotou?

ŽIVOTNOSŤ SVETELNÝCH ZDROJOV

V informácii o žiarivke sa uvádza:
Menovitá životnosť je doba vyjadrená v hodinách, počas ktorej je žiarovka alebo žiarivka prevádzkyschopná. Počas laboratórnych skúšok predstavuje dobu, kým sa z testovanej množiny vzoriek polovica vypáli a druhá polovica bude naďalej svietiť.

33. a) Čo viete povedať o mode, mediáne a aritmetickom priemere súboru, v ktorom viac ako polovica hodnôt je číslo 3?
b) Zmení sa odpoveď na predchádzajúcu otázku, ak viete, že prvky súboru sú známky z písomky z matematiky? (Otázka teraz je: Väčšina žiakov dostala z písomky známku 3. Čo viete povedať o mode, mediáne a aritmetickom priemere všetkých známok z písomky?)

34. Drvivá väčšina ľudí má nadpriemerný počet nôh.

35. Známe, že Škóti a Angličania sa navzájom podpichujú. Škóti vraj tvrdia, že ak sa hlúpy Škót presťahuje do Anglicka, tak sa zvýši úroveň inteligencie na obidvoch miestach.
a) Čo tým chceli Škóti povedať o priemernej inteligencii v Anglicku?
b) Ako asi podobné tvrdenie o sťahovaní Škóta do Anglicka formulujú Angličania?

Tieto dve úlohy sú z časopisu *Teaching Statistics*. Obidve sa snažia o úsmevný pohľad na vec a obsahujú tvrdenia, ktoré na prvý pohľad pôsobia paradoxne. V obidvoch sa pýtame: ako je to možné?

Hra so slepými kockami (XXIII. úloha z Bernoulliho Ars Conjectandi)

Slepými kockami v minulosti nazývali šesticu kociek, ktoré predvádzali jarmoční kaukliari. Boli to obyčajné kocky, ale na piatich z ich šiestich stien neboli žiadne čísla. Na šiestej stene mala prvá kocka číslo 1, druhá číslo 2, ..., šiesta číslo 6, takže súčet všetkých týchto čísel je 21. Podvodníci, ktorí chceli oklamať návštevníkov jarmoku, vyložili tieto kocky spolu s tabuľkou, na ktorej bola pre každé z čísel 1 až 21 uvedená výhra, ktorú mohli získať.

Číslo	Výhra	Číslo	Výhra	Číslo	Výhra
1	1 fenig	8	1 fenig	15	3 fenigy
2	1 fenig	9	2 fenigy	16	3 fenigy
3	1 fenig	10	2 fenigy	17	4 fenigy
4	1 fenig	11	2 fenigy	18	5 fenigov
5	1 fenig	12	2 fenigy	19	12 fenigov
6	1 fenig	13	2 fenigy	20	45 fenigov
7	1 fenig	14	3 fenigy	21	90 fenigov

Hieronymus Bosch (okolo 1450 – 1516): Kaukliar

Kto chcel skúsiť šťastie, zaplatil kaukliarovi 1 fenig a hodil týchto 6 kociek na hraciu dosku. Ak hodil určené číslo, získal vypísanú cenu plus svoj vklad. Ak sa ani na jednej kocke neobjavilo číslo, stratil svoj vklad. V ostatných prípadoch získal vklad späť.

ÚLOHA

36. Aká je v tejto hre očakávaná hodnota pre hráča, ktorý stavil na číslo
a) 21?
b) 4 ?
c) 14 ?

Pre koho je táto hra výhodná? Ako treba zmeniť hodnotu výhry v uvedených troch prípadoch, aby hra bola spravodlivá – teda rovnako výhodná pre hráča aj pre kaukliara?

Ars Conjectandi (Umenie usudzovať), dielo J. Bernoulliho sa v histórii matematiky pokladá za jednu zo základných prác o kombinatorike a teórii pravdepodobnosti.

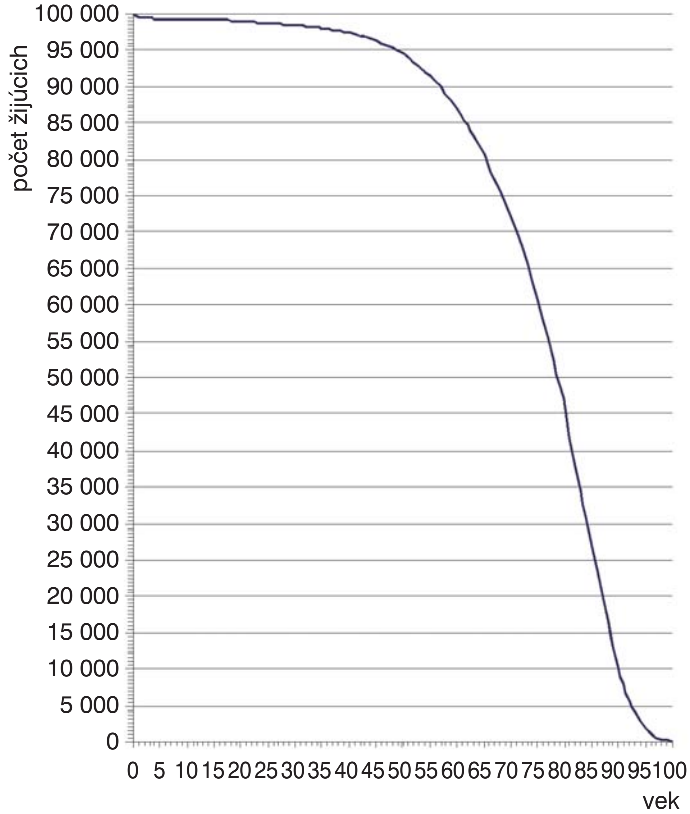
Jakob Bernoulli
(1654 – 1705)
švajčiarsky matematik

Stredná a pravdepodobná dĺžka života

S tabuľkami úmrtnosti (nazývanými aj tabuľky ďalej žijúcich) sme sa už stretli v predchádzajúcom ročníku. Na základe informácií o skutočnom počte žijúcich obyvateľov a o počte úmrtí za isté obdobie je v nich skonštruovaný ideálny priebeh života veľkej skupiny ľudí (spravidla 100 000) narodených v tom istom roku. V tabuľkách je uvedené, koľko ľudí z tejto skupiny bude žiť po 1 roku, po 2 rokoch atď.
Graf na obr. 8 znázorňuje údaje o počte žijúcich z tabuliek úmrtnosti (spoločných pre mužov a ženy, SR, 2010).
Údaje o počte žijúcich na konci 5-ročných intervalov sú v tabuľke 1.

VEK	POČET ŽIJÚCICH	VEK	POČET ŽIJÚCICH	VEK	POČET ŽIJÚCICH
0	100 000	35	98 025	70	72 183
5	99 316	40	97 366	75	60 786
10	99 236	45	96 293	80	45 408
15	99 147	50	94 465	85	27 029
20	98 975	55	91 379	90	10 385
25	98 701	60	87 025	95	1 720
30	98 421	65	80 580	100+	57

Tab. 1
Počet žijúcich na konci 5-ročných intervalov.
Zdroj: Štatistický úrad SR
(symbol 100+ označuje osoby vo veku 100 a viac rokov).



Obr. 8
Údaje o počte žijúcich po danom počte rokov.

ÚLOHY

37. Ktorý bod grafu na obr. 8 znázorňuje údaj uvedený v podfarbenej bunke tabuľky 1?

38. Na základe údajov z tabuľky zistite, koľko zo 100 000 novorodencov sa dožije a) aspoň 65 rokov, b) menej ako 75 rokov, c) aspoň 65 a menej ako 75 rokov. Potom opíšte, ako možno tieto údaje znázorniť v grafe na obr. 8.

Pripomeňme, že vek, ktorého sa človek dožije, je typický príklad náhodného javu. Pre konkrétneho človeka nevieme presne povedať, akého maximálneho veku sa dožije. Môžeme však uvažovať o pravdepodobnosti jednotlivých možností (napr. o pravdepodobnosti, že človek sa dožije aspoň 65 rokov alebo o pravdepodobnosti, že sa dožije aspoň 50 a najviac 65 rokov). Pomôckou na výpočet týchto pravdepodobností sú práve tabuľky úmrtnosti. Tie sa snažia čo najlepšie vystihnúť úmrtnosť skutočnej populácie, preto pravdepodobnosti vypočítané z týchto tabuliek možno pokladať za dobrý odhad pravdepodobností platných pre skutočnú populáciu. Treba si však uvedomiť, že podmienky úmrtnosti v populácii sa postupne menia. Preto sa tabuľky úmrtnosti každý rok aktualizujú.

39. Aká je podľa tabuliek úmrtnosti pravdepodobnosť, že novorodenec sa dožije a) aspoň 65 rokov, b) menej ako 75 rokov, c) aspoň 65 a menej ako 75 rokov?

40. Pomocou grafu na obr. 8 odhadnite, akého veku (v celých rokoch) sa novorodenec dožije s pravdepodobnosťou
a) 75 %, b) 50 %, c) 15 %.

Jasnejšiu predstavu o odpovedi na otázku *Ako dlho budeme žiť?* získame, ak zistíme, ako pravdepodobné sú jednotlivé možnosti. To urobíme v úlohe 41.

41. 100 000-členný súbor opísaný v tabuľke chceme roztriediť na skupiny podľa dĺžky života (teda maximálneho veku, ktorého sa členovia tohto súboru dožili). Zvolili sme triedy ⟨0 rokov, 10 rokov), ⟨10 rokov, 20 rokov), ..., ⟨80 rokov, 90 rokov), 90+ (= 90 a viac rokov).

Pripomeňme štandardnú štatistickú terminológiu: v tomto prípade 100 000 novorodencov predstavuje jednotky štatistického súboru, štatistickým znakom je maximálny vek, ktorého sa jednotliví novorodenci dožili (zaokrúhlený na celé roky nadol).

a) Zistite početnosť jednotlivých tried a znázornite ju stĺpcovým diagramom (na kreslenie diagramu odporúčame použiť tabuľkový kalkulátor). Potom opíšte, ako možno tieto početnosti znázorniť v grafe na obr. 8.
b) Aká je pravdepodobnosť, že dĺžka života novorodenca bude z intervalu ⟨50 rokov, 60 rokov)?
c) Doplňte vetu: Z vytvoreného stĺpcového diagramu vyplýva, že najviac pravdepodobná dĺžka života je ...

Dôležitý údaj, na výpočet ktorého sa používajú tabulky úmrtnosti, je predpokladaná dĺžka života novorodenca.
Pri hľadaní odpovede máme na výber z dvoch možností:
- *stredná dĺžka života pri narodení* (tiež nádej na dožitie) je priemerný počet rokov, ktoré prežije novorodenec,
- *pravdepodobná dĺžka života pri narodení* je vek, ktorého sa dožije práve polovica narodených.

42. a) Stredná aj pravdepodobná dĺžka života pri narodení sú vlastne miery polohy súboru hodnôt, ktorý sme znázorňovali v úlohe 41 (štatistické jednotky predstavovalo 100 000 novorodencov, štatistický znak bola dĺžka ich života). Ktoré miery polohy to sú?

Pripomeňme, že medzi miery polohy patria medián, modus a aritmetický priemer.

b) Z grafu na obr. 8 odhadnite pravdepodobnú dĺžku života pri narodení.
c) Na odhad strednej dĺžky života pri narodení použite stĺpcový diagram z úlohy 41.

Výsledok úlohy 42 c) sme získali zo zjednodušeného súboru (zjednodušením bolo rozdelenie do tried), preto sa nemusí presne zhodovať so strednou dĺžkou života pôvodného súboru. Možno však očakávať, že odchýlka nebude veľmi veľká.

d) Stredná a pravdepodobná dĺžka života sú dve z trojice štandardných mier polohy – modus, medián, stredná hodnota. V niektorej z predchádzajúcich úloh sme sa stretli aj z treťou z tejto trojice. V ktorej úlohe to bolo, ktorá miera polohy to bola a aká bola jej hodnota?
e) Skontrolujte, že nasledujúci text je opisom pravdepodobnej dĺžky života pri narodení: *je to vek, pre ktorý je pravdepodobnosť, že sa ho novorodenec dožije rovnaká ako pravdepodobnosť, že sa ho nedožije* (teda šanca dožiť sa ho je 1:1).

Stredná a pravdepodobná dĺžka života sú odpovede na otázku *Koľko rokov života má pred sebou novorodenec?* Podobne možno hľadať aj odpoveď na otázku *Koľko rokov života má pred sebou človek vo veku x rokov?* S ňou súvisia pojmy *stredná a pravdepodobná dĺžka života vo veku x rokov*.

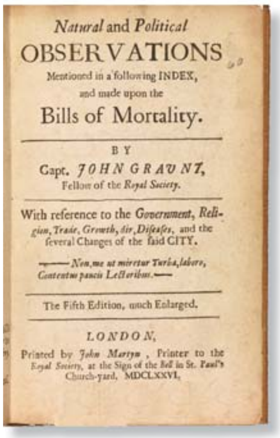
ÚLOHA

43. a) Navrhnite, ako definovať
- *strednú dĺžku života vo veku x rokov (nádej na dožitie vo veku x)*,
- *pravdepodobnú dĺžku života vo veku x rokov.*

b) Podobne ako strednú a pravdepodobnú dĺžku života pri narodení, aj strednú a pravdepodobnú dĺžku života vo veku x rokov počítame z tabuliek úmrtnosti. Obidve tieto čísla sú miery polohy štatistického súboru, ktorý súvisí so súborom z úlohy 41. Opíšte tento nový súbor a štatistický znak, ktorý v tomto prípade skúmame.

c) Odhadnite strednú a pravdepodobnú dĺžku života vo veku 50 rokov.

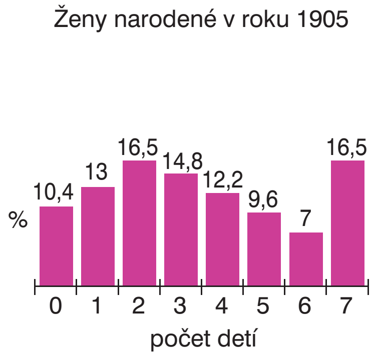
d) Zistite, či je pravdivé tvrdenie: *Strednú dĺžku života vo veku x rokov možno vypočítať tak, že najprv nájdeme priemernú dĺžku života všetkých ľudí, ktorí sa dožili veku x rokov, a potom od tohto čísla odčítame x.*
O zdôvodnení svojej odpovede diskutujte.

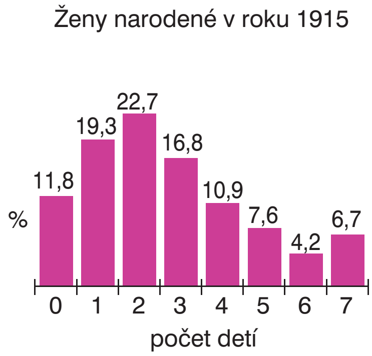

Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.
BY
Capt. JOHN GRAUNT,
Fellow of the Royal Society.
With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Air, Diseases, and the several Changes of the said CITY.
The Fifth Edition, much Enlarged.
LONDON,
Printed by John Martyn, Printer to the Royal Society, at the Sign of the Bell in St. Paul's Church-yard, MDCLXXVI.

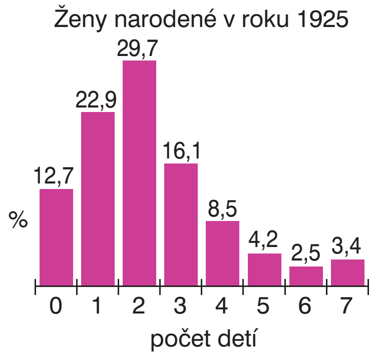
Stredná a pravdepodobná dĺžka života predstavujú dva rôzne prístupy k hľadaniu odpovede na otázku o predpokladanej dĺžke života. Zdá sa, že ako prvý si rozdiel medzi nimi (teda – vyjadrené dnešnou terminológiou – to, že aritmetický priemer a medián nie sú vo všeobecnosti to isté) uvedomil v r. 1669 Christiaan Huygens (od neho pochádza aj myšlienka opisu pravdepodobnej dĺžky života, ktorú sme použili v úlohe 42 e).
K úvahám o predpokladanej dĺžke života ho priviedla knižka Johna Graunta *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality* (*Prirodzené a politické pozorovania založené na zoznamoch zomretých*) z r. 1662. Tá má v histórii štatistiky a demografie významné miesto. Graunt v nej publikoval prvé novodobé tabuľky úmrtnosti (boli založené iba na približnom odhade, za prvé tabuľky zostavené použitím matematických metód sa pokladajú až tabuľky Edmunda Halleya z r. 1693, o ktorých sme hovorili v predchádzajúcom ročníku). Použitím priemerov sa Graunt snažil objaviť zákonitosti vo vývoji populácie.
Jeho knižka podnietila záujem viacerých matematikov, ktorí začali pri skúmaní podobných problémov používať metódy pravdepodobnosti.

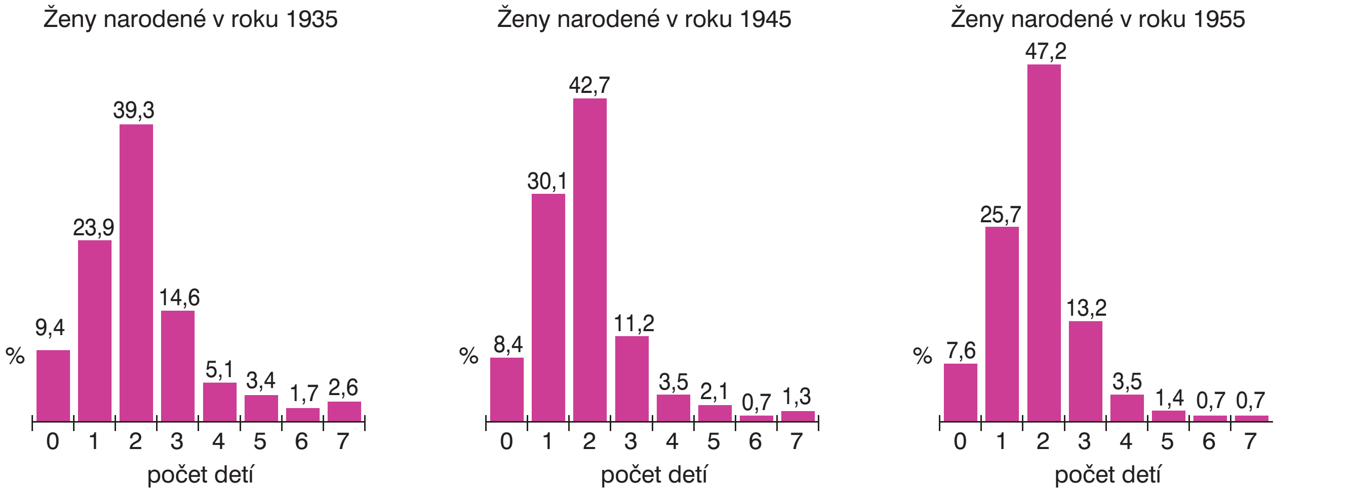
Zmeny pôrodnosti v priebehu 20. storočia

Nasledujúce histogramy sú z článku o zmenách pôrodnosti v Rusku. Znázorňujú, koľko detí mali do svojich 50 rokov ženy narodené v roku 1905 (prvý histogram), 1915, 1925, 1935, 1945 a 1955. Teda napr. zo žien narodených v r. 1905 malo 14,8 % tri deti (narodené do roku 1955).









ÚLOHA

44. a) Opíšte zmeny v počte detí, ktoré vyplývajú z týchto histogramov.

b) Pre každý histogram najprv zistite modus a pokúste sa odhadnúť polohu mediánu a aritmetického priemeru. Potom medián a aritmetický priemer vypočítajte.

c) Diskutujte o tom, ktoré z vypočítaných charakteristík polohy (prípadne ďalšie údaje) by ste použili, aby ste podporili opis z časti a) tejto úlohy.

V týchto histogramoch sú do triedy „7 detí“ zaradené aj všetky ženy, ktoré mali viac ako 7 detí (teda správnejšie označenie posledného stĺpca je „7 a viac detí“, často sa používa symbol 7+). Je to kvôli tomu, že počet týchto žien je (s výnimkou prvého histogramu) už veľmi malý a znázorňovať ich samostatnými stĺpcami by znamenalo len zbytočné zvýšenie počtu stĺpcov. Pri výpočtoch za reprezentanta triedy „7 a viac detí“ pokladáme číslo 7 (teda počítame tak, ako by všetky ženy zaradené do tejto triedy mali 7 detí). Vzhľadom na to, že žien, ktoré majú viac ako 7 detí je málo, to prakticky vôbec neovplyvní výsledky výpočtov (v našom prípade výpočet aritmetického priemeru).

d) Vyskúšajte si zber a spracovanie dát pri zisťovaní, ako to bolo v minulosti s počtom detí na Slovensku. Zistite od čo najväčšieho počtu žiakov vašej školy, z koľkých súrodencov boli ich rodičia, starí rodičia, prípadne prastarí rodičia a kedy – stačí desaťročie – sa narodila ich mama (pozor, treba si uvedomiť, že týmto spôsobom nezískate informácie o bezdetných rodinách). Získané údaje zobrazte graficky a diskutujte o nich.

Miera nezamestnanosti

vyjadruje v percentách, akú časť z ekonomicky aktívneho obyvateľstva v danej oblasti (napr. okrese, kraji, Slovensku) tvoria nezamestnaní:

$$\text{miera nezamestnanosti (v \%)} = \frac{\text{počet nezamestnaných osôb}}{\text{počet ekonomicky aktívneho obyvateľstva}} \cdot 100$$

Za ekonomicky aktívne obyvateľstvo sa pokladajú osoby vo veku od 15 rokov, ktoré patria medzi pracujúcich v civilnom sektore, nezamestnaných alebo príslušníkov ozbrojených zložiek.

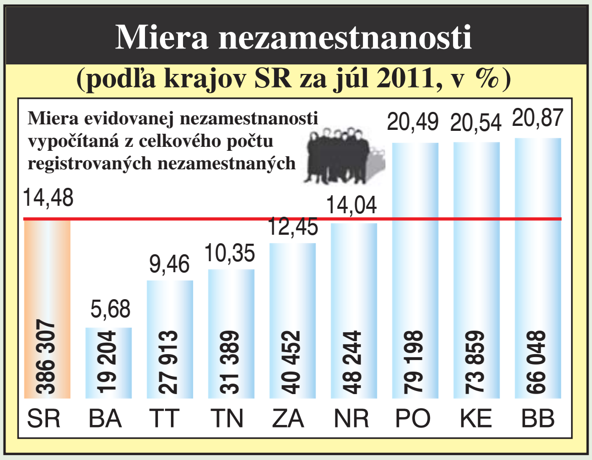
45. Graf na s. 56 uvádza miery nezamestnanosti za júl 2011 pre jednotlivé kraje SR aj pre celé Slovensko. Číslo v modrom stĺpci je počet nezamestnaných (t. j. uchádzačov o zamestnanie) v danej oblasti, z ktorého sa miera nezamestnanosti vypočítala.

a) Skontrolujte, že miera nezamestnanosti v SR **nie je** aritmetický priemer mier nezamestnanosti v jednotlivých krajoch.

b) Ako je možné, že v Banskobystrickom kraji je väčšia miera nezamestnanosti ako v Prešovskom, hoci počet nezamestanných v Prešovskom kraji je väčší ako v Banskobystrickom?

c) Ako súvisí počet nezamestnaných v SR s počtami nezamestnaných v jednotlivých krajoch?

d) Vysvetlite, ako súvisí miera nezamestnanosti v SR (14,18 %) s mierami nezamestnanosti v jednotlivých krajoch. Svoje vysvetlenie skontrolujte výpočtom.



Hustota obyvateľstva

Benelux je názov spoločenstva troch štátov – Belgicka, Holandska a Luxemburska. V tabulke sú uvedené rozlohy jednotlivých štátov a ich hustoty obyvatelstva (počet obyvatelov vydelený rozlohou v km^2, teda priemerný počet obyvatelov pripadajúci na 1 km^2).

	Rozloha (km^2)	Hustota (obyv/km^2)
Belgicko	30 528	355
Holandsko	41 528	401
Luxembursko	2 586	198

46. Na základe uvedených údajov vypočítajte hustotu obyvateľstva Beneluxu.

47. Výsledok úlohy 46 možno opísať ako vážený aritmetický priemer jednotlivých hustôt. Ktoré čísla sú váhami? Čo v tomto prípade vyjadrujú jednotlivé váhy?

MODUS, MEDIÁN A ARITMETICKÝ PRIEMER – VÝSLEDKY

1. $\hat{x} = 3$ **2.** 5 (46. hodnota v súbore usporiadanom podľa veľkosti).

3. a) $\tilde{x} = x_k$, t. j. $\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$. **b)** $\tilde{x} = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$, t. j. $\tilde{x} = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

6. V každom konečnom súbore platia tvrdenia b) a c). Protipríklad pre tvrdenie a) aj d): súbor 0, 1, 1, 2.

7. $\dfrac{543}{91} = 5{,}967...$

9. Relatívne početnosti známok 1, 2, 3, 4, 5 sú $\dfrac{16{,}83}{100} = 0{,}168\,3$, $\dfrac{26{,}18}{100} = 0{,}261\,8$, $\dfrac{28{,}08}{100} = 0{,}280\,8$, $\dfrac{26{,}45}{100} = 0{,}264\,5$ a $\dfrac{2{,}46}{100} = 0{,}024\,6$, preto aritmetický priemer je $\dfrac{16{,}83 \cdot 1 + 26{,}18 \cdot 2 + 28{,}08 \cdot 3 + 26{,}45 \cdot 4 + 2{,}46 \cdot 5}{100} \approx 2{,}72$.
Iný možný zápis výpočtu je $0{,}168\,3 \cdot 1 + 0{,}261\,8 \cdot 2 + 0{,}280\,8 \cdot 3 + 0{,}264\,5 \cdot 4 + 0{,}024\,6 \cdot 5 \approx 2{,}72$.

10. Modus aj medián je 3.

12. a) $0 = n_1 \cdot (y_1 - \bar{x}) + n_2 \cdot (y_2 - \bar{x}) + ... + n_k \cdot (y_k - \bar{x})$. **b)** Ak obidve strany rovnosti z riešenia úlohy 12 a) vydelíme číslom n (celkovým počtom prvkov súboru) a využijeme, že $\dfrac{n_1}{n} = p_1$ (n_1 je absolútna početnosť prvku y_1, p_1 je jeho relatívna početnosť) atď., tak dostaneme $0 = p_1 \cdot (y_1 - \bar{x}) + p_2 \cdot (y_2 - \bar{x}) + ... + p_k \cdot (y_k - \bar{x})$.

13. Reprezentanta intervalu (tým je spravidla stred intervalu, pripomeňte si však poznámku o reprezentantoch triednych intervalov na s. 17) vynásobíme počtom prvkov tohto intervalu, výsledky sčítame, súčet vydelíme celkovým počtom prvkov. Postupujeme teda tak, akoby všetky prvky v jednom triednom intervale nadobúdali tú istú hodnotu ako reprezentant tohto intervalu (takúto predstavu o súbore použijeme pri opise odhadu modu a mediánu pred úlohou 16).

Z opisu intervalov na histograme v zadaní vyplýva, že hodnoty pôvodného súboru boli celočíselné (výšky v celých centimetroch). V každom intervale môžu prvky nadobúdať celkom 5 rôznych celočíselných hodnôt, za reprezentanta je preto rozumné zvoliť strednú z týchto 5 hodnôt. Potom aritmetický priemer bude

$$\frac{127 \cdot 1 + 132 \cdot 4 + 137 \cdot 9 + 142 \cdot 3 + 147 \cdot 7 + 152 \cdot 4 + 157 \cdot 3 + 162 \cdot 2}{33} = \frac{4\,746}{33} = 143{,}\overline{81} \approx 143{,}8 \text{ cm.}$$

14. Modálny: 135 až 139, mediánový: 140 až 144.

15. Modálny interval sa nezmení, mediánové intervaly budú dva: 140 – 144 a 145 – 149 (medián je teraz priemer 16. a 17. hodnoty, z nich prvá leží v intervale 140 – 144 a druhá v intervale 145 – 149).

16. a) Modus 137 cm, medián 142 cm. **b)** Modus 137 cm, medián $\frac{142 + 147}{2} = 144{,}5$ cm (pozri riešenie úlohy 15).

17. a) Aritmetický priemer: $\frac{19 \cdot 1 + 28 \cdot 4 + 21 \cdot 7 + 14 \cdot 10 + 6 \cdot 13 + 3 \cdot 16}{91} = \frac{544}{91} = 5{,}978...$ bodu (v každej triede môžu prvky nadobúdať 3 rôzne celočíselné hodnoty, za reprezentanta sme zvolili strednú z týchto hodnôt). Hrubý odhad pre modus: 4 body, pre medián: 4 body. **b)** Medián je 27. z 28 hodnôt ležiacich v mediánovom intervale 3 až 5. Ak predpokladáme rovnomerné rozloženie hodnôt, tak približne prvých 9 prvkov patriacich do tohto intervalu nadobúda hodnotu 3, približne 9 hodnotu 4 a približne 9 hodnotu 5. Potom 27. prvok nadobúda hodnotu 5, toto číslo pokladáme za spresnený odhad mediánu.

18. a) Modus, medián aj aritmetický priemer je to isté číslo: 10. **b)** Modus, medián aj aritmetický priemer je to isté číslo: 24. **c)** Súbor má dva mody: –3,5 a 7,5, medián a aritmetický priemer je 2. **d)** Súbor má dva mody: 9 a 21 (obmedzili sme sa na odhad podľa našej dohody pred úlohou 16), medián a aritmetický priemer je 15.
Všetky histogramy v tejto úlohe sú súmerné podľa hodnoty mediánu. Preto aritmetický priemer má rovnakú hodnotu ako medián (zo súmernosti vyplýva, že súčet kladných odchýlok od mediánu je rovnaký ako súčet záporných odchýlok od mediánu, pritom aritmetický priemer je tá hodnota, pre ktorú sa súčet všetkých odchýlok rovná 0, pozri text na s. 37).

19. Pozri záver riešenia úlohy 18.

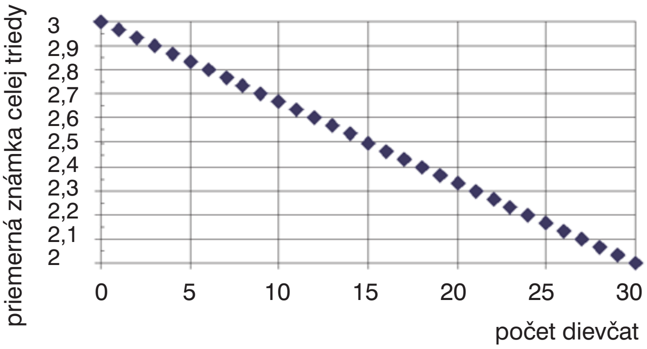
21. a) Modus: 10, medián: 9 (priemer 71. a 72. prvku v zoradenom súbore), aritmetický priemer: $\frac{1\,036}{142} = 7{,}295...$
b) Modus: 3, medián: 4, aritmetický priemer (stredná hodnota): 4,697 (z informácie, že histogram zobrazuje relatívnu frekvenciu v percentách, vieme, že súčet všetkých hodnôt je 100, to urýchli výpočet mediánu a aritmetického priemeru). **c)** Modus: 11, medián: 10,5, aritmetický priemer: $10{,}20\overline{45}$. **d)** Modus: 40, medián: 45, aritmetický priemer (stredná hodnota): 48,31.
Vzťah (***) približne platí v b), c).

22. a) Áno, ak je v triede 9 dievčat (a 21 chlapcov). Priemerná známka závisí od toho, koľko je v triede dievčat a koľko chlapcov. Ak počet dievčat označíme x, tak chlapcov bude $30 - x$ a priemerná známka bude

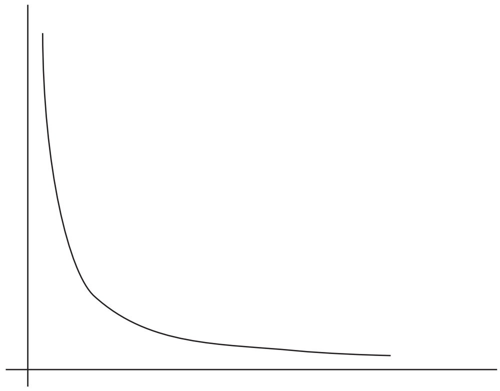
$$\frac{x \cdot 2 + (30 - x) \cdot 3}{30}. \qquad (*)$$

Ak má byť výsledok 2,7, tak musí platiť $\frac{x \cdot 2 + (30 - x) \cdot 3}{30} = 2{,}7$, odtiaľ $x = 9$.
b) Keby bol v triede rovnaký počet chlapcov a dievčat. **c)** Prvý prípad: priemerná známka by bola menšia ako 2,5; druhý prípad: priemerná známka by bola väčšia ako 2,5. Na nájdenie odpovede stačí „cit pre čísla“, je možné však argumentovať aj výpočtom: úpravou (*) dostaneme pre priemernú známku vzorec $p = 3 - \frac{x}{30}$, kde x je počet dievčat. So zväčšujúcim sa x sa p zmenšuje, pritom pre $x = 15$ sa $p = 2{,}5$. Preto pre $x > 15$ bude $p < 2{,}5$ (a naopak).
Tretí prípad: dievčat by bolo v našom prípade 20, chlapcov 10, priemerná známka by bola $\frac{20 \cdot 2 + 10 \cdot 3}{30} = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 2{,}\overline{3} \approx 2{,}33$. Všimnite si, že výsledok nezávisí od počtu žiakov v triede, ale iba od vzájomného pomeru ich počtov (dievčatá tvoria $\frac{2}{3}$ všetkých žiakov, chlapci $\frac{1}{3}$). S týmto poznatkom – že aritmetický priemer závisí iba od relatívnej početnosti – sme sa už stretli pred úlohou 9.

23. b) Priemerná známka celej triedy by bola 2,6. **c)** $z = \frac{d \cdot 2 + (30 - d) \cdot 3}{30} = \frac{90 - d}{30} = 3 - \frac{d}{30}$ (z je priemerná známka celej triedy, d je počet dievčat, preto d môže nadobúdať hodnoty 0, 1, ..., 30, týchto 30 čísel je teda definičný obor našej funkcie z). Graf (ktorý sa v tomto prípade skladá z 30 bodov) je na obr. 9 (pozor, priesečník súradnicových osí zodpovedá na zvislej osi hodnote 2). Dojem, že všetky body grafu ležia na jednej priamke, je správny – z predpisu $z = 3 - \frac{d}{30}$ vidno, že z je lineárna funkcia (teda jej predpis má tvar $z = A + Bd$, kde A, B sú konštanty – v našom prípade $A = 3$, $B = -\frac{1}{30}$) a grafom lineárnej funkcie je priamka.



Obr. 9



Obr. 10

d) Nie. Žiadna časť krivky, ktorá je grafom nepriamej úmernosti (jej typický tvar pre nepriamu úmernosť medzi dvoma kladnými veličinami je na obr. 10), nie je priamka. Z úlohy 23 c) ale vieme, že body znázorňujúce závislosť $z = 3 - \frac{d}{30}$ ležia na priamke. Preto táto závislosť nemôže byť nepriamou úmernosťou. Poznamenajme však, že v hovorovej reči sa ako nepriama úmernosť často označuje každá závislosť medzi dvoma kladnými veličinami, ktorá je klesajúcou funkciou (teda so zväčšovaním jednej premennej sa druhá premenná zmenšuje). Funkcia $z = 3 - \frac{d}{30}$ túto vlastnosť má (vidno to z obr. 9), opäť však zdôrazňujeme, že napriek tomu to nie je nepriama úmernosť.

24. V (1) a (2) sú váhami relatívne početnosti jednotlivých hodnôt, súčet všetkých relatívnych početností je 1. V (3) sú váhami pravdepodobnosti jednotlivých možných ziskov a strát. Žiadne z uvedených možností (zisk 3, zisk 2, strata 2) nemôžu nastať súčasne a iné možnosti už neexistujú, preto súčet pravdepodobností sa rovná 1.

25. Áno. Ak napr. 447-kilometrovú vzdialenosť Bratislava – Košice prejde rýchlik za 6 hodín 45 minút, tak počas jazdy sa jeho rýchlosť mení – niekedy je nulová (keď vlak stojí na stanici), niekedy je 100 km/h. Priemerná rýchlosť – ktorá je $\frac{447}{6{,}75} = 66{,}\overline{2} \approx 66$ km/h – je odpoveď na otázku *keby mal vlak prejsť túto vzdialenosť za rovnaký čas a po celú dobu by išiel tou istou rýchlosťou, aká by bola táto stála rýchlosť*?

26. a) 16-násobne. **b)** Keby mal vklad v priebehu 1. aj v priebehu 2. roku vzrásť *rovnako*, aký by musel byť tento rovnaký násobok, aby celkové zväčšenie vkladu po 2 rokoch bolo rovnaké ako v pôvodnom zadaní.
c) Keby sa vklad počas 1. aj 2. roku zväčšil 5-násobne, tak by sa celkovo zväčšil $5 \cdot 5 = 25$-násobne. Podľa a) sa však mal zväčšiť iba 16-násobne. **d)** 4-násobne. Ak hľadané priemerné ročné zväčšenie je a-násobné, tak po 2 rokoch sa vklad zväčší $a \cdot a = a^2$-násobne. Podľa odpovede na otázku a) má platiť $a^2 = 16$, odtiaľ $a = 4$ (koreň $a = -4$ nás zrejme nezaujíma). **e)** V prvom roku úroková miera 100 % p.a., v druhom roku 700 % p.a. **f)** 300 % p.a.

27. 4,98 % p.a. Za 3 roky vklad vzrastie $1{,}025 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}075 = 1{,}156\,968\,75$-násobne. Ak priemerný ročný rast je a-násobný, tak musí platiť $a^3 = 1{,}156\,968\,75$, odtiaľ $a = 1{,}049\,801... \approx 1{,}0498$. Ak vklad za rok vzrastie 1,0498-násobne, tak ročná úroková miera je 4,98 %.

28. a) Za prvé 2 hodiny sme prešli $60 \cdot 2$ km, za druhé 2 hodiny $80 \cdot 2$ km (súčiny nevyčísľujeme, aby sme videli, ako výsledok súvisí s rýchlosťami 60 km/h a 80 km/h). Za 4 hodiny sme tak prešli $60 \cdot 2 + 80 \cdot 2 = (60 + 80) \cdot 2$ km, preto naša priemerná rýchlosť počas týchto 4 hodín bola

$$\frac{\textit{celková dráha}}{\textit{celkový čas}} = \frac{(60+80)\cdot 2}{4} = \frac{60+80}{2} = 70 \text{ km.} \qquad (*)$$

b) Ak T je dĺžka časového úseku v hodinách (napr. pre štvrťhodinové úseky sa $T = 0{,}25$), tak v prvom časovom úseku prejdeme $60 \cdot T$ km a v druhom $80 \cdot T$ km. Za čas $2T$ tak prejdeme celkom $60 \cdot T + 80 \cdot T = (60 + 80)\cdot T$ km, preto naša priemerná rýchlosť je $\frac{(60+80)\cdot T}{2T} = \frac{60+80}{2} = 70$ km/h (hodnota T v čitateli a menovateli sa vykráti).
Všimnite si, že výpočet (*) je špeciálny prípad tohto výpočtu pre $T = 2$.

29. b) $\frac{1}{4} \cdot 60 + \frac{3}{4} \cdot 80 = 75$ km/h. Ak štvrtina času je T hodín, tak zvyšné tri štvrtiny sú $3 \cdot T$ hodín. Za prvú štvrtinu prejdeme $60 \cdot T$ km, za zvyšné tri štvrtiny $80 \cdot 3 \cdot T$ km, teda za čas $4 \cdot T$ hodín je to $60 \cdot T + 80 \cdot 3 \cdot T = (60 + 80 \cdot 3) \cdot T$ km.

Priemerná rýchlosť je potom $\dfrac{(60 + 80 \cdot 3) \cdot T}{4 \cdot T} = \dfrac{60 + 80 \cdot 3}{4}$ km/h.

31. $\dfrac{3 \cdot S}{\dfrac{S}{60} + \dfrac{2 \cdot S}{80}} = \dfrac{3 \cdot S}{\left(\dfrac{1}{60} + \dfrac{2}{80}\right) \cdot S} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{60} + \dfrac{2}{80}} = 72$ km/h.

32. S mediánom: keby sme každej žiarivke z testovanej vzorky priradili dobu, za ktorú sa vypáli, tak menovitá životnosť by bola (približne) medián tohto súboru hodnôt.

33. a) Medián aj modus je 3. O aritmetickom priemere nevieme vo všeobecnosti povedať nič (vymyslite príklady, z ktorých bude zrejmé, že aritmetický priemer môže byť v tomto prípade ľubovoľné číslo). **b)** Medián aj modus je 3. Aritmetický priemer bude ležať v otvorenom intervale (2, 4). Najmenšiu hodnotu by dosiahol, keby všetky zvyšné známky boli 1, touto hodnotou by bolo číslo $p \cdot 3 + (1 - p) \cdot 1 = 2p + 1$, kde p je relatívna frekvencia známky 3. Podľa zadania je $p > 0{,}5$, preto $2p + 1 > 2$. Podobne možno uvažovať o najväčšej možnej hodnote aritmetického priemeru.

35. a) Matematickou podstatou tohto urážlivého výroku o Angličanoch je tvrdenie: *ak k pôvodnému súboru hodnôt, ktorý mal aritmetický priemer p, pridáme hodnotu, ktorá sa rovná p (je väčšia ako p, je menšia ako p), tak aritmetický priemer nového súboru sa nezmení – teda je p (sa zväčší, sa zmenší).* Z tohto tvrdenia možno odvodiť aj tvrdenie, čo sa stane s aritmetickým priemerom, keď z pôvodného súboru nejaký prvok odoberieme. Odporúčame diskutovať o tomto odvodení aj o obidvoch tvrdeniach (pomôcť vám môže text na s. 37 aj interpretácia pomocou rovnováhy na páke na s. 69). **b)** Ak sa presťahuje nadpriemerne inteligentný Škót, tak sa úroveň inteligencie zníži nielen v Škótsku, ale aj v Anglicku.

36. Celkový počet možností je rovnaký ako pri obyčajných kockách $6^6 = 46\,656$. **a)** Počet možností, v ktorých padne súčet 0, je $5^6 = 15\,625$. Pri týchto možnostiach hráč stráca svoj vklad, pri 1 možnosti získa 90 fenigov, pri zvyšných $46\,656 - 15\,625 - 1 = 31\,030$ možnostiach je jeho bilancia 0. Preto očakávaná hodnota je

$$\frac{1}{46\,656} \cdot 90 + \frac{31\,030}{46\,656} \cdot 0 + \frac{15\,625}{46\,656} \cdot (-1) = -\frac{15\,535}{46\,656} \approx -0{,}333. \qquad \text{(A)}$$

b) Číslo 4 môžeme získať dvomi spôsobmi:

- na štvrtej kocke padne 4 a na zvyšných nič
  Táto možnosť nastane v $5^5 = 3\,125$ prípadoch (na každej zo zvyšných piatich kociek môže padnúť ktorákoľvek z 5 slepých stien).
- padnú čísla 1 (na prvej kocke) a 3 (na tretej kocke) a na zvyšných 4 kockách nič
  Táto možnosť nastane v $5^4 = 625$ prípadoch.

Celkový počet priaznivých možností je preto $3\,125 + 625 = 3\,750$. Očakávaná hodnota pre hráča je

$$\frac{3\,750}{46\,656} \cdot 1 + \frac{15\,625}{46\,656} \cdot (-1) = -\frac{11\,875}{46\,656} \approx -0{,}255. \qquad \text{(B)}$$

c) Číslo 14 môžeme získať štyrmi spôsobmi: 3 + 5 + 6 (táto možnosť nastane v $5^3 = 125$ prípadoch), 1 + 2 + 5 + 6 ($5^2 = 25$ prípadov), 1 + 3 + 4 + 6 (25 prípadov), 2 + 3 + 4 + 5 (25 prípadov), preto celkový počet priaznivých možností je 200. Hráčova očakávaná hodnota je

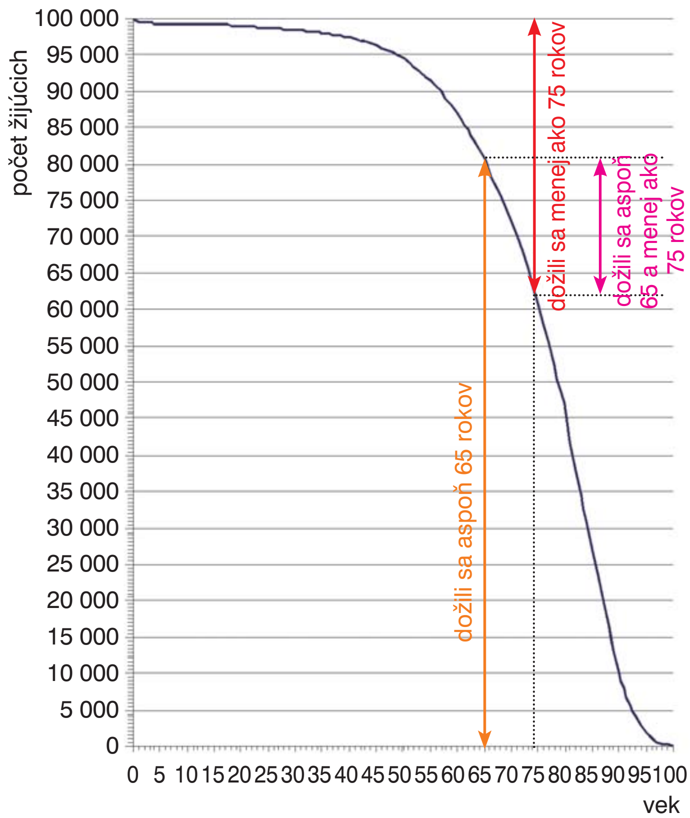
$$\frac{200}{46\,656} \cdot 3 + \frac{15\,625}{46\,656} \cdot (-1) = -\frac{15\,025}{46\,656} \approx -0{,}322. \qquad \text{(C)}$$

Vo všetkých prípadoch je hra výhodná pre kaukliara (pretože očakávaná hodnota pre hráča je vždy záporná). Ak má byť hra spravodlivá, musela by sa očakávaná hodnota rovnať 0. V prípade a) dostaneme riešením rovnice

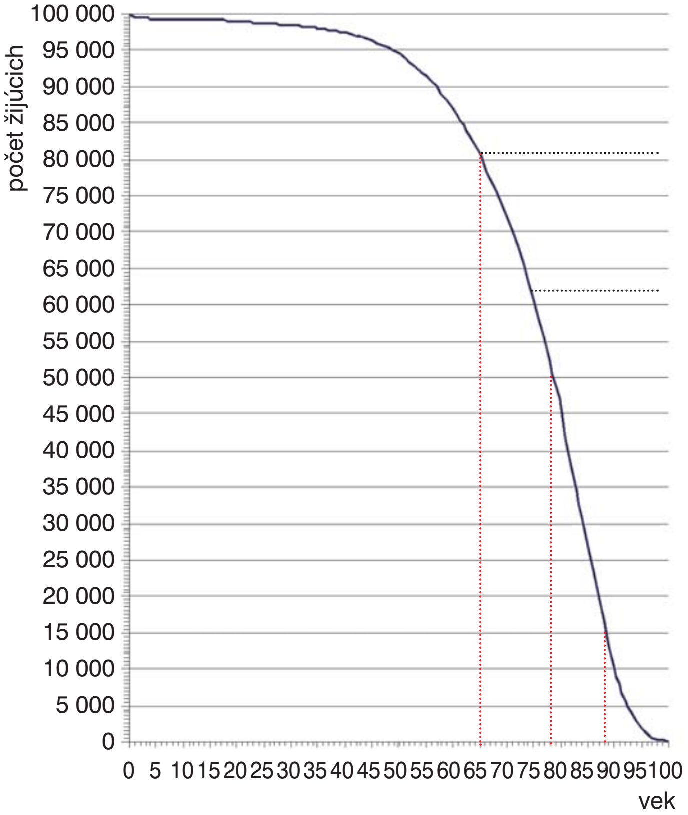
$$\frac{1}{46\,656} \cdot x + \frac{31\,030}{46\,656} \cdot 0 + \frac{15\,625}{46\,656} \cdot (-1) = 0.$$

(v (A) sme veľkosť výhry 90 nahradili neznámou x) výsledok $x = 15\,625$. Podobne v prípadoch b) a c) dostávame „spravodlivé výhry“ vo výške $x = \dfrac{15\,625}{3\,750} = 4{,}1\overline{6}$ a $x = \dfrac{15\,625}{200} = 78{,}125$.

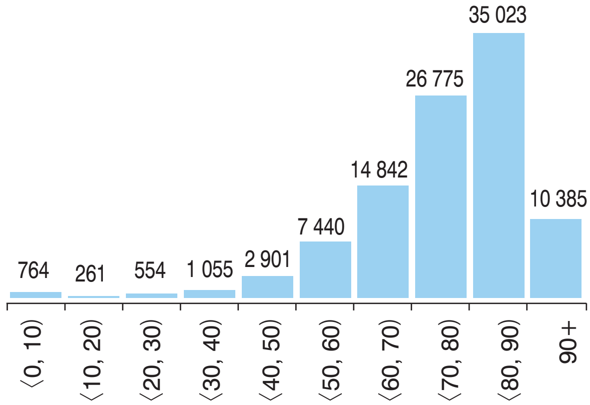
38. a) 80 580, **b)** 100 000 – 60 786 = 39 214, **c)** 80 580 – 60 786 = 19 794. Súvis týchto čísel s grafom z obr. 8 znázorňuje obr. 11.



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

39. Využijeme výsledky úlohy 38.

a) $\dfrac{80\,580}{100\,000} = 0{,}805\,8 \approx 0{,}81$, t. j. približne 81 %.

b) $\dfrac{39\,214}{100\,000} = 0{,}392\,14 \approx 0{,}39$, t. j. približne 39 %.

Všimnite si, že tento výpočet súvisí s doplnkovou pravdepodobnosťou: počet novorodencov, ktorí sa dožijú menej ako 75 rokov, je 100 000 – 60 786 (počet všetkých *mínus* počet tých, ktorí sa dožijú aspoň 75 rokov), preto hľadaná pravdepodobnosť je $\dfrac{100\,000 - 60\,786}{100\,000} = 1 - \dfrac{60\,786}{100\,000}$ t. j. 1 *mínus pravdepodobnosť, že sa novorodenec dožije aspoň 75 rokov*.

c) $\dfrac{19\,794}{100\,000} = 0{,}197\,94 \approx 0{,}20$, t. j. približne 20 %.

40. Pozri obr. 12. **a)** asi 68 rokov, **b)** asi 78 rokov, **c)** asi 88 rokov.

41. a) Pozri obr. 13.

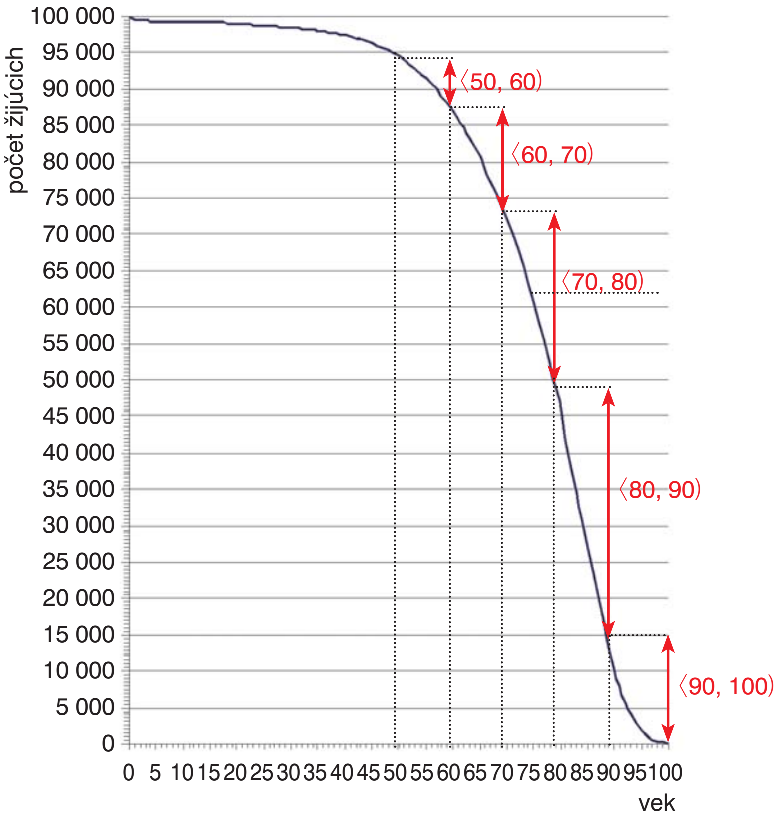
Na obr. 14 sme znázornili, ako s grafom z obr. 8 súvisia početnosti tried ⟨50, 60), ..., ⟨80, 90) a 90+ (znázornenie zvyšných tried by obrázok zneprehľadnilo).

b) $\dfrac{7\,440}{100\,000} = 0{,}074\,4 \approx 0{,}07$, t. j. približne 7 %.

c) ... z intervalu ⟨80 *rokov*, 90 *rokov*), pravdepodobnosť tejto možnosti je približne 35 %.

42. a) Stredná dĺžka života pri narodení je aritmetický priemer (t. j. stredná hodnota) tohto súboru, pravdepodobná dĺžka života pri narodení je jeho medián. *(Poznámka pre veľmi pozorného a náročného čitateľa:* je to medián, ak uvedenú definíciu pravdepodobnej dĺžky života chápeme na rovnakej úrovni presnosti vyjadrovania ako formuláciu: *polovica hodnôt je menšia ako medián, polovica hodnôt je väčšia ako medián,* o ktorej sme diskutovali v úlohách 4 až 6).

b) 78 rokov (na grafe treba nájsť vek, v ktorom je počet žijúcich 50 000, túto hodnotu sme hľadali už v úlohe 40 b), pozri obr. 12). **c)** 75,3464 ≈ 75 rokov



Obr. 14

(pri výpočte aritmetického priemeru súboru z obr. 13 sme za stredy intervalov volili čísla 5, 15, 25, ..., 85 a 95).
d) Treťou hodnotou z trojice je modus. V úlohe 41 c) sme našli modálny interval: ⟨80, 90⟩. Tento údaj súvisí s tzv. *normálnou dĺžkou života*, teda vekom, ktorého sa ľudia najčastejšie dožívajú.
43. a) Stredná dĺžka života vo veku x rokov je priemerný počet rokov, ktoré ešte prežije človek vo veku x rokov. Pravdepodobná dĺžka života vo veku x rokov je počet rokov, ktoré po dosiahnutí veku x ešte prežije práve polovica z tých ľudí, ktorí sa dožili x rokov. (Inú možnosť definície poskytuje časť b) tejto úlohy. Uvedené pojmy možno definovať ako strednú hodnotu a medián vhodného súboru hodnôt.) **b)** Štatistické jednotky sú tí ľudia z pôvodného 100 000-členného súboru, ktorí sa dožijú veku aspoň x rokov. Štatistický znak je počet rokov, ktoré jedinec z tohto súboru prežije od dosiahnutia veku x rokov. Stredná dĺžka života vo veku x rokov je aritmetický priemer hodnôt tohto súboru, pravdepodobná dĺžka života vo veku x rokov jeho medián. **c)** Stredná dĺžka života vo veku 50 rokov: približne 27 rokov (výsledok 27,759 858 15 sme zaokrúhlili na celé roky nadol). Pravdepodobná dĺžka života vo veku 50 rokov: približne 29 rokov (v grafe na obr. 8 treba odhadnúť, pre ktorý vek bude počet žijúcich 94 465 : 2 ≈ 47 233). **d)** Má pravdu. Pri zdôvodnení môže pomôcť vhodné označenie: Majme celkom n ľudí, ktorí sa dožili veku x rokov, označme

- d_k dĺžku života k-teho z nich,
- r_k počet rokov, ktoré tento človek prežije po dosiahnutí veku x rokov.

Potom pre každé k od 1 do n platí

$$d_k = x + r_k. \qquad (*)$$

Stredná dĺžka života vo veku x rokov je $S = \dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}$, priemerný vek týchto n ľudí je $P = \dfrac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}$.
Ak každé z čísel $d_1, \ldots, d_n$ zapíšeme pomocou (*), dostaneme

$$P = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} = \frac{\overbrace{(x + r_1) + (x + r_2) + \ldots + (x + r_n)}^{n \text{ zátvoriek, v každej je jedno } x}}{n} = \frac{nx + r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} = \underbrace{\frac{nx}{n}}_{= x} + \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} =$$

$$= x + \underbrace{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}}_{= S} = x + S$$

Platí $P = x + S$, odtiaľ $S = P - x$.
44. a) V pôvodnom článku sa uvádza: „... absolútna väčšina ruských rodín sa definitívne a nezvratne rozhodla pre malú rodinu s dvoma deťmi. Histogramy ukazujú, ako sa jednotlivé generácie posúvali k univerzálnemu modelu rodiny s dvoma deťmi: ruské ženy narodené po vojne sa zdráhali zostať bezdetné, alebo mať viac ako tri deti."
b) 1905: modus 2 a 7, medián 3, stredná hodnota 3,447,
1915: modus 2, medián 2, stredná hodnota 2,688,
1925: modus 2, medián 2, stredná hodnota 2,244,
1935: modus 2, medián 2, stredná hodnota 2,121,
1945: modus 2, medián 2, stredná hodnota 1,869,
1955: modus 2, medián 2, stredná hodnota 1,898.
c) Do úvahy pripadajú stredná hodnota, počet percent žien, ktoré majú 2 deti a počet percent žien, ktoré majú viac ako 2 deti (1905 – 60,1 %, 1915 – 46,2 %, 1925 – 34,7 %, 1935 – 27,4 %, 1945 – 18,8 %, 1955 – 19,5 %).
45. b) Miera nezamestnanosti nezávisí iba od počtu nezamestanných v danom kraji, ale aj od počtu ekonomicky aktívneho obyvateľstva. V Prešovskom kraji je väčší počet ekonomicky aktívneho obyvateľstva ako v Banskobystrickom, pritom nezamestananých z tohto počtu je menšia časť než v Banskobystrickom kraji. **c)** Je to súčet počtov nezamestnaných v jednotlivých krajoch. **d)** Na výpočet miery nezamestnanosti v SR potrebujeme poznať počet ekonomicky aktívneho obyvateľstva. Ten je súčtom počtov v jednotlivých krajoch. Možno ich vypočítať zo vzorca v zadaní úlohy:

$$\text{počet ekonomicky aktívneho obyvateľstva} = \frac{\text{počet nezamestnaných osôb}}{\text{miera nezamestnanosti (v \%)}} \cdot 100.$$

Pre jednotlivé kraje to budú čísla $\dfrac{19\,204 \cdot 100}{5{,}68}$, $\dfrac{27\,913 \cdot 100}{9{,}46}$, $\dfrac{31\,389 \cdot 100}{10{,}35}$, $\dfrac{40\,452 \cdot 100}{12{,}45}$, $\dfrac{48\,244 \cdot 100}{14{,}04}$, $\dfrac{79\,198 \cdot 100}{20{,}49}$, $\dfrac{73\,859 \cdot 100}{20{,}54}$, $\dfrac{66\,048 \cdot 100}{20{,}87}$. Poznamenajme, že výsledky týchto výpočtov *nebudú* presne tie počty ekonomicky aktívneho obyvateľstva, z ktorých sa miery nezamestnanosti pôvodne vypočítali. Je to kvôli tomu, že miery nezamestnanosti, ktoré vo výpočte používame, sú zaokrúhlené na 2 desatinné miesta – teda majú 3 alebo 4 platné cifry. Preto aj hodnoty uvedených podielov budú mať väčšinou iba 4 platné cifry (podľa pravidla *počet platných číslic podielu alebo súčinu určuje člen s najmenším počtom platných číslic*).

Mieru nezamestnanosti na Slovensku potom možno vypočítať takto (číslo v čitateli – 386 307 – sme napísali ako súčet počtu nezamestnaných v jednotlivých krajoch, pozri časť c) tejto úlohy):

$$\frac{\text{počet nezamestnaných osôb}}{\text{počet ekonomicky aktívneho obyvateľstva}} \cdot 100 =$$

$$= \frac{(19\,204 + 27\,913 + 31\,389 + 40\,452 + 48\,244 + 79\,198 + 73\,859 + 66\,048) \cdot 100}{\left(\frac{19\,204}{5{,}68} + \frac{27\,913}{9{,}46} + \frac{31\,389}{10{,}35} + \frac{40\,452}{12{,}45} + \frac{48\,244}{14{,}04} + \frac{79\,198}{20{,}49} + \frac{73\,859}{20{,}54} + \frac{66\,048}{20{,}87}\right) \cdot 100}.$$

Hodnota tohto výrazu zaokrúhlená na 2 desatinné miesta je 14,48 %, čo je v súlade s hodnotou uvedenou v grafe zo zadania.

46. $$\frac{30\,528 \cdot 355 + 41\,528 \cdot 401 + 2\,586 \cdot 198}{30\,528 + 41\,528 + 2\,586} = 375{,}15... \approx 375 \text{ obyv./km}^2 \qquad (*)$$

(údaje o hustote v zadaní majú 3 platné číslice, preto aj výsledok zaokrúhľujeme na tento počet platných číslic podľa pravidla: *počet platných číslic podielu alebo súčinu určuje člen s najmenším počtom platných číslic*). Hľadáme podiel celkového počtu obyvateľov a celkovej rozlohy – tá je 30 528 + 41 528 + 2 586 km^2. Počet obyvateľov jednotlivých krajín nájdeme z údajov v tabuľke: hustota (h) je podiel počtu obyvateľov (p) a rozlohy (r), preto počet obyvateľov je hustota × rozloha:

$$h = \frac{p}{r}, \text{ preto } p = h \cdot r.$$

Teda počet obyvateľov Belgicka je 30 528 · 355 = 10 837 440 ≈ 10 800 000, Holandska je 41 528 · 401 = 16 652 728 ≈ ≈ 16 700 000, Luxemburska je 2 586 · 198 = 512 028 ≈ 512 000 (výsledky sme zaokrúhlili na 3 platné cifry). Vo výpočte (*) sme nezaokrúhľovali jednotlivé sčítance v čitateli, zaokrúhlili sme až konečný výsledok 375,15... .

47. Váhami sú čísla $\frac{30\,528}{30\,528 + 41\,528 + 2\,586} = \frac{30\,528}{74\,642}$, $\frac{41\,528}{74\,642}$ a $\frac{2\,586}{74\,642}$ tie vyjadrujú, akú časť celkovej rozlohy Beneluxu predstavuje rozloha jednotlivých krajín.

3 ROZPTYL A ŠTANDARDNÁ ODCHÝLKA

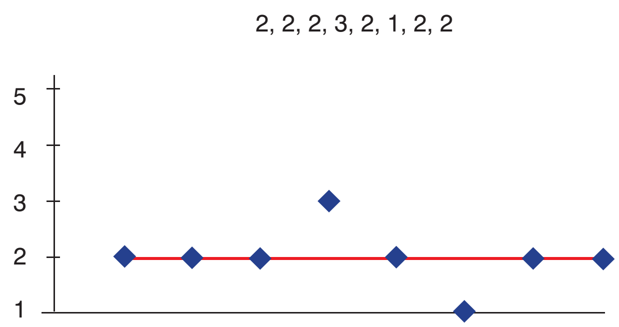
Medián a aritmetický priemer sú dve možné odpovede na otázku:

Kde leží stred daného súboru hodnôt?

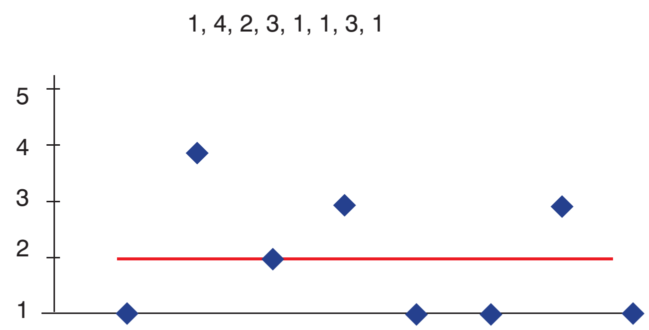
Každá z nich zodpovedá inému chápaniu slova *stred*: v prípade mediánu odpoveď spájame s *počtom* hodnôt v súbore, v prípade aritmetického priemeru s *veľkosťou* hodnôt. Z týchto dvoch možností sa teraz sústredíme na aritmetický priemer. Budeme hľadať spôsob, ako opísať veľkosť rozptýlenia hodnôt súboru okolo priemernej hodnoty.

3.1 Ako zmerať rozptýlenosť hodnôt súboru

Ak poznáme aritmetický priemer, tak (voľne povedané) vieme, okolo akého čísla sa pohybujú hodnoty súboru. Táto informácia o veľkosti hodnôt súboru je však pomerne hrubá, pretože rovnaký aritmetický priemer môžu mať dosť rozdielne súbory. Ukážme si to na typicky školskom príklade – na priemernej známke. Obidva nasledujúce 8-členné súbory známok majú aritmetický priemer 2:



Obr. 1 a)



Obr. 1 b)

V obidvoch súboroch sa známky pohybujú okolo dvojky (na obrázkoch znázorňuje priemernú známku červená čiara). V prvom súbore sú však známky menej rozkolísané okolo priemernej hodnoty než v druhom (vidíte ten rozdiel v rozptýlenosti aj vy?). Možno povedať, že prvá z týchto priemerných dvojok predstavuje v porovnaní s druhou ustálenejší výkon.

ÚLOHA

1. Dva histogramy na obrázku 2 znázorňujú výsledky tej istej písomky z matematiky v dvoch rôznych skupinách. Obidve skupiny mali rovnaký počet žiakov (40) a v obidvoch bol rovnaký priemerný počet bodov (5,65).

Diskutujte o tom, ktorá skupina podala vyrovnanejší výkon (o ktorej skupine možno povedať, že v nej boli menšie rozdiely medzi výkonmi jednotlivých žiakov, t. j. že známky v triede boli menej rozptýlené).

Obr. 2 a)

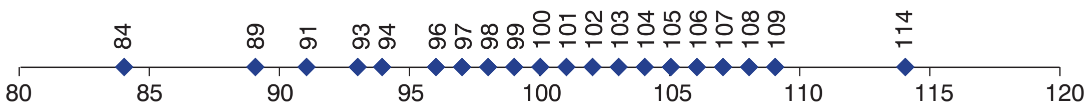
Obr. 2 b)

ÚLOHA

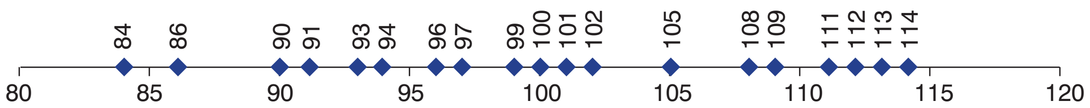
2. Na meranie 100-metrového úseku sme použili dve rôzne metódy merania. Prvý diagram (obr. 3 a) znázorňuje výsledok 20 meraní pomocou prvej metódy, druhý diagram (obr. 3 b) výsledok 20 meraní pomocou druhej metódy. Aritmetický priemer 20 nameraných hodnôt je v prvom aj druhom prípade rovnaký: 100.

a) Diskutujte o tom, ktorú z dvoch použitých metód možno na základe týchto výsledkov označiť za presnejšiu.

b) Navrhnite, ako vyjadriť nejakým vhodne zvoleným číslom presnosť merania (teda veľkosť kolísania nameraných hodnôt okolo aritmetického priemeru). O všetkých návrhoch diskutujte so spolužiakmi v triede.



Obr. 3 a)



Obr. 3 b)

V úlohách 3 až 6 uvádzame viaceré možnosti, ako odpovedať na otázku o presnosti merania – teda o rozptýlenosti nameraných hodnôt – z úlohy 2 b). Predpokladáme, že pri riešení tejto úlohy ste o niektorých z nich diskutovali aj vy. Riešenie nasledujúcich úloh by malo na túto diskusiu nadviazať.

Hľadáme číslo, ktoré by opísalo presnosť merania – teda veľkosť rozptýlenosti nameraných hodnôt okolo aritmetického priemeru.

ÚLOHY

3. Pri hľadaní odpovedí na otázku z úlohy 2 b) sa často ako prvé návrhy vyskytnú

- *súčet všetkých odchýlok od aritmetického priemeru*

Pre súbor z obr. 3 b) je to číslo

$$(84 - 100) + (86 - 100) + (90 - 100) + (91 - 100) + (93 - 100) + (94 - 100) +$$
$$+ (95 - 100) + (96 - 100) + (97 - 100) + (99 - 100) + (100 - 100) + (101 - 100) +$$
$$+ (102 - 100) + (105 - 100) + (108 - 100) + (109 - 100) + (111 - 100) +$$
$$+ (112 - 100) + (113 - 100) + (114 - 100)$$

- alebo *priemerná odchýlka od aritmetického priemeru*

Pre súbor z obr. 3 b) je to číslo z predchádzajúcej odrážky vydelené počtom členov súboru (teda číslom 20).

Ani jeden z týchto návrhov však nerieši pôvodnú otázku – vyjadriť veľkosť rozptýlenosti hodnôt. Vysvetlite, prečo.

4. Jednu z nevýhod *súčtu všetkých odchýlok od aritmetického priemeru* z úlohy 3 odstraňuje návrh *súčet všetkých absolútnych odchýlok od aritmetického priemeru* (ktorá nevýhoda to je?).
a) Vypočítajte túto hodnotu pre súbor z obr. 3 b).
b) Potom diskutujte, prečo sa ani tento návrh nepokladá za vhodné vyjadrenie presnosti merania.

JEDEN Z CIEĽOV ÚLOHY 4 JE ZISTIŤ, ČI DOKÁŽETE POUŽIŤ POSTUP VÝPOČTU, KTORÝ NIE JE OPÍSANÝ SYMBOLICKY – TEDA VZORCOM, ALE SLOVNE.

NEČÍTAJTE HNEĎ HLAVNÚ NÁMIETKU UVEDENÚ V NASLEDUJÚCOM TEXTE. SKÚSTE NA ŇU PRÍSŤ SAMOSTATNE V DISKUSII.

Hlavná námietka je: Takéto číslo nie je vhodné na porovnanie rozptýlenosti dvoch súborov hodnôt, ktoré majú rôzny počet prvkov. Ak by sme ním vyjadrovali presnosť merania, mohlo by sa stať, že z dvoch súborov meraní tej istej veličiny – z ktorých jeden bude veľmi rozptýlený, ale s malým počtom hodnôt, a druhý oveľa menej rozptýlený, ale s veľkým počtom hodnôt – by sme za presnejší vyhlásili rozptýlenejší súbor (vymyslite príklad dvoch súborov, pre ktoré nastane opísaná situácia).

5. Ak ste diskutovali o námietke z úlohy 4 b), pravdepodobne ste prišli na návrh *priemerná absolútna odchýlka od aritmetického priemeru*. Vypočítajte jej hodnotu pre súbor z obr. 3 b). Potom diskutujte o tom, ako tento návrh rieši námietku z úlohy 4 b).

JE VELMI PRAVDEPODOBNÉ, ŽE NÁVRHY Z ÚLOH 3 AŽ 5 SA VYSKYTLI AJ VO VAŠOM RIEŠENÍ ÚLOHY 2 b). PREDPOKLADÁME, ŽE AJ VY STE ZISTILI, ŽE Z NAŠICH DOTERAJŠÍCH NÁVRHOV VYHOVUJE IBA PRIEMERNÁ ABSOLÚTNA ODCHÝLKA OD ARITMETICKÉHO PRIEMERU.

POZNAMENAJME, ŽE POUŽITIE PRIEMERNEJ ABSOLÚTNEJ ODCHÝLKY NIE JE VIAZANÉ IBA NA ARITMETICKÝ PRIEMER – KEBY SME NAMIESTO ARITMETICKÉHO PRIEMERU POKLADALI ZA STRED SÚBORU NAPR. MEDIÁN A ZAUJÍMALO BY NÁS, AKO JE SÚBOR HODNÔT ROZPTÝLENÝ OKOLO TEJTO HODNOTY, MOHLI BY SME NA VYJADRENIE VELKOSTI ROZPTÝLENIA POUŽIŤ PRIEMERNÚ ABSOLÚTNU ODCHÝLKU OD MEDIÁNU.

V úlohe 6 doplníme ešte niektoré ďalšie možnosti, ktoré sa vo vašich úvahách nemuseli objaviť. Nie všetky súvisia s odchýlkami od aritmetického priemeru, všetky však súvisia s hľadaním odpovede na otázku *Ako vyjadriť premenlivosť hodnôt súboru*? Aj teraz teda hľadáme číslo, ktoré by vyjadrovalo veľkosť rozptýlenia hodnôt súboru. Čím menšie bude toto číslo, tým sústredenejšia okolo jedného bodu by mala byť podstatná časť súboru.

ÚLOHA

6. Diskutujte o tom, ktoré z nasledujúcich čísel sú vhodné na vyjadrenie tejto rozptýlenosti súboru:
a) rozdiel najväčšej a najmenšej hodnoty súboru (tzv. *variačné rozpätie*),
b) najväčšia absolútna odchýlka od aritmetického priemeru,
c) dĺžka intervalu, v ktorom leží „prostredných 50 %“ všetkých hodnôt (tzv. *kvartilové rozpätie*), v súboroch z obr. 3 a), b) je to „prostredných 10 hodnôt“, teda čísla, ktoré sú 6. až 15. v poradí.

ODPORÚČAME TESTOVAŤ VŠETKY TIETO NÁVRHY NA SÚBOROCH Z ÚLOH 1 A 2.

KVARTILOVÉ ROZPÄTIE (TEDA VZDIALENOSŤ MEDZI PRVÝM A TRETÍM KVARTILOM) JE ZNÁZORNENÉ AJ NA OBRÁZKU ZA ÚLOHOU 3 NA S. 29.

3.2 Rozptyl (stredná kvadratická odchýlka)

Z návrhov, ktoré sme uviedli v úlohách 3 až 6, sa na meranie rozptýlenosti súboru používajú *priemerná absolútna odchýlka* a *kvartilové rozpätie*. V praxi sa však častejšie stretneme s hodnotou, ktorá sa v našich doterajších úvahách nevyskytla: *priemerná kvadratická odchýlka od aritmetického priemeru*. Tá sa vypočíta podobne ako priemerná absolútna odchýlka, len namiesto absolútnych hodnôt sa v nej pracuje s druhými mocninami odchýlok. V štatistike sa toto číslo nazýva **stredná kvadratická odchýlka**, **rozptyl** alebo **variancia** a označuje sa znakom σ^2 (σ je malé grécke písmeno *sigma*).

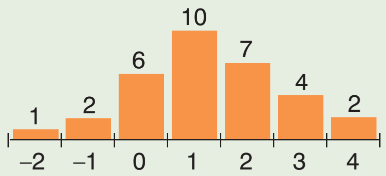
To, že rozptyl sa označuje ako druhá mocnina, má svoj dôvod. Písmenom σ sa totiž označuje tzv. štandardná odchýlka, ktorá je druhou odmocninou z rozptylu. Touto veličinou sa budeme zaoberať v nasledujúcom článku. V ňom tiež ukážeme niektoré vlastnosti rozptylu, ktoré zdôvodňujú jeho používanie.

Najprv skontrolujeme, či ste pochopili slovný opis rozptylu a či ho viete vypočítať pre súbory zadané rôznym spôsobom (vrátane súborov obsahujúcich záporné hodnoty).

Aby sme ušetrili aspoň trochu práce, pripomíname, že rozsahy aj aritmetické priemery súborov z úloh a) až c), ktoré potrebujete pri výpočtoch, nájdete v texte pri príslušných obrázkoch.

ÚLOHA

7. Vypočítajte priemernú kvadratickú odchýlku od aritmetického priemeru:
- a) pre súbory známok z obr. 1 a), b) na s. 63
  Rozmyslite si, ako sa dá výpočet zjednodušiť použitím absolútnych početností jednotlivých známok – ak sa napr. známka 1 v súbore vyskytne 4-krát, tak sa vo výpočte strednej kvadratickej odchýlky člen $(1-2)^2$ vyskytne tiež 4-krát.
- b) pre súbor z obr. 3 b) na s. 64
- c) pre súbor z obr. 2 b) na s. 64
  Tu sa bude hodiť zápis pomocou absolútnych početností, o ktorom sme sa zmienili v časti a) tejto úlohy.
- d) pre súbor 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 9
- e) pre súbor –3, –3, –2, –2, –2, –1, –1, –1, –1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2
- f) pre súbor znázornený histogramom na obr. 4.



Obr. 4

RIEŠENIE ÚLOHY 7 f)

Najprv nájdeme *aritmetický priemer* daného súboru, teda číslo

$$\bar{x} = \frac{\text{súčet všetkých hodnôt}}{\text{počet všetkých hodnôt}}$$

v našom prípade

$$\bar{x} = \frac{1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) + 6\cdot 0 + 10\cdot 1 + 7\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot 4}{1 + 2 + 6 + 10 + 7 + 4 + 2} \qquad (*)$$

(v menovateli je súčet početností jednotlivých hodnôt, teda čísel uvedených nad stĺpcami histogramu, sčítance v čitateli majú tvar *absolútna početnosť hodnoty* × *hodnota*, pozri tiež text za úlohou 7 na s. 31).

Ak chceme vypočítať rozptyl, tak

pre každú hodnotu súboru vypočítame jej odchýlku od aritmetického priemeru, teda číslo $x - 1{,}25$, kde x je hodnota súboru	napr. pre hodnotu –1 je táto odchýlka $-1 - 1{,}25 = -2{,}25$
vypočítanú odchýlku umocníme na druhú, teda vypočítame $(x - 1{,}25)^2$	pre hodnotu –1 dostaneme $(-1 - 1{,}25)^2$ t. j. $(-2{,}25)^2$
všetky tieto druhé mocniny sčítame	v súbore bola hodnota –1 dvakrát, preto aj v súčte druhých mocnín odchýlok sa číslo $(-1 - 1{,}25)^2$, t. j. $(-2{,}25)^2$ vyskytne dvakrát podobne hodnota 1 bola v súbore 10-krát, preto sa v súčte druhých mocnín odchýlok vyskytne výraz $(1 - 1{,}25)^2$ desaťkrát
výsledok vydelíme počtom členov súboru (ten – ako vieme z výpočtu aritmetického priemeru – je 32)	

Dostaneme tak

$$\sigma^2 = \frac{1}{32}[1 \cdot (-2 - 1{,}25)^2 + 2 \cdot (-1 - 1{,}25)^2 + 6 \cdot (0 - 1{,}25)^2 + 10 \cdot (1 - 1{,}25)^2 +$$
$$+ 7 \cdot (2 - 1{,}25)^2 + 4 \cdot (3 - 1{,}25)^2 + 2 \cdot (4 - 1{,}25)^2] =$$
$$= \frac{1}{32}[1 \cdot (-3{,}25)^2 + 2 \cdot (-2{,}25)^2 + 6 \cdot (-1{,}25)^2 + 10 \cdot (-0{,}25)^2 + 7 \cdot 0{,}75^2 +$$
$$+ 4 \cdot 1{,}75^2 + 2 \cdot 2{,}75)^2] = \frac{62}{32} = 1{,}937\ 5 \qquad (**)$$

Rozptyl (σ^2) je priemerná kvadratická odchýlka od aritmetického priemeru.

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že výpočet aritmetického priemeru možno zapísať pomocou relatívnych početností. Napríklad výpočet (*) na s. 66 možno zapísať v tvare

$$\bar{x} = \frac{1}{32} \cdot (-2) + \frac{2}{32} \cdot (-1) + \frac{6}{32} \cdot 0 + \frac{10}{32} \cdot 1 + \frac{7}{32} \cdot 2 + \frac{4}{32} \cdot 3 + \frac{2}{32} \cdot 4 = 1{,}25$$

kde čísla $\frac{1}{32}, \frac{2}{32}, \frac{6}{32}, \frac{10}{32}, \frac{7}{32}, \frac{4}{32}$ a $\frac{2}{32}$ sú relatívne početnosti hodnôt –2, –1, 0, 1, 2, 3 a 4 (skontrolujte, ako sme tento zápis dostali zo zápisu (*)).

Podobne možno pomocou týchto relatívnych početností zapísať aj výpočet rozptylu (**) (skontrolujte to)

$$\sigma^2 = \frac{1}{32} \cdot (-2 - 1{,}25)^2 + \frac{2}{32} \cdot (-1 - 1{,}25)^2 + \frac{6}{32} \cdot (0 - 1{,}25)^2 + \frac{10}{32} \cdot (1 - 1{,}25)^2 +$$
$$+ \frac{7}{32} \cdot (2 - 1{,}25)^2 + \frac{4}{32} \cdot (3 - 1{,}25)^2 + \frac{2}{32} \cdot (4 - 1{,}25)^2$$

Z toho vyplýva: na zistenie rozptylu súboru stačí poznať relatívne početnosti hodnôt súboru.

VZOREC NA VÝPOČET ROZPTYLU

Vzorec na výpočet rozptylu dostaneme, ak vo výpočte, ktorý sme použili v úlohe 7, nahradíme konkrétne hodnoty písmenami. Zapíšme postup výpočtu rozptylu pre súbor, ktorý obsahuje n hodnôt – označíme ich $x_1, x_2, ..., x_n$ – a jeho aritmetický priemer je číslo $\bar{x}$.

VZOREC NA VÝPOČET ROZPTYLU BUDE PRE NÁS NAJMÄ PRÍLEŽITOSŤOU NA PRECVIČENIE POUŽÍVANIA SYMBOLICKÝCH ZÁPISOV.

Napríklad v súbore z úlohy 7 f) sa $n = 32$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, ..., $x_{30} = 3$, $x_{31} = 4$, $x_{32} = 4$ a $\bar{x} = 1{,}25$.

Postup výpočtu	Zápis
pre každú hodnotu súboru vypočítame jej odchýlku od aritmetického priemeru	dostaneme tak odchýlky $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, $x_3 - \bar{x}$, ..., $x_n - \bar{x}$
vypočítané odchýlky umocníme na druhú	dostaneme čísla $(x_1 - \bar{x})^2$, $(x_2 - \bar{x})^2$, $(x_3 - \bar{x})^2$, ..., $(x_n - \bar{x})^2$
všetky tieto druhé mocniny sčítame	$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2$
výsledok vydelíme počtom členov súboru	$\dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

Výsledkom je

vzorec na výpočet rozptylu
$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \qquad (***)$$

Ak použijeme symbol Σ označujúci sčítanie (pozri text na s. 30), možno (***) zapísať v tvare

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2}{n} \quad \text{alebo} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$$

V PREDCHÁDZAJÚCEJ KAPITOLE SME UVIEDLI TRI PODOBY VZORCA NA VÝPOČET ARITMETICKÉHO PRIEMERU:
- JEDEN PRE PRÍPAD, ŽE KAŽDÝ Z n PRVKOV SÚBORU MÁ SVOJE VLASTNÉ OZNAČENIE,
- ĎALŠIE DVA PRE SÚBOR OPÍSANÝ POMOCOU NAVZÁJOM RÔZNYCH HODNÔT A ICH POČETNOSTÍ; V JEDNOM Z NICH SME POUŽILI ABSOLÚTNE A V DRUHOM RELATÍVNE FREKVENCIE (POZRI TEXTY ZA ÚLOHAMI 7 A 9 NA S. 31 A NA S. 32).

PODOBNE MOŽNO TAKTO TROMI SPÔSOBMI ZAPÍSAŤ AJ VZOREC NA VÝPOČET ROZPTYLU. TVAR (***) ZODPOVEDÁ PRVEJ Z OPÍSANÝCH SITUÁCIÍ (SÚBOR JE OPÍSANÝ VYMENOVANÍM VŠETKÝCH JEHO PRVKOV, PRIČOM NIEKTORÉ Z NICH MÔŽU MAŤ ROVNAKÚ HODNOTU).
V ÚLOHÁCH 8 A 9 NÁJDEME ZVYŠNÉ DVE PODOBY TOHTO VZORCA.

ÚLOHY

8. Napíšte vzorec na výpočet rozptylu pre súbor, v ktorom sa vyskytuje hodnota y_1 s početnosťou n_1, hodnota y_2 s početnosťou n_2, ..., hodnota y_k s početnosťou n_k. Aritmetický priemer hodnôt súboru označte $\bar{y}$.
Skontrolujte, že túto podobu vzorca sme použili aj pri výpočte rozptylu v (**) z úlohy 7 f).

9. Vzorec z predchádzajúcej úlohy zapíšte tak, že v ňom namiesto absolútnych početností $n_1, n_2, ..., n_k$ hodnôt $y_1, y_2, ..., y_k$ použijete ich relatívne početnosti – označte ich $p_1, p_2, ..., p_k$.

10. Napíšte obdobu vzorca (*) na s. 66 na výpočet priemernej absolútnej odchýlky od aritmetického priemeru. Pre priemernú absolútnu odchýlku použite označenie *MAD* (z anglického názvu *mean absolute deviation*).

11. Napíšte vzorec na výpočet priemernej absolútnej odchýlky od aritmetického priemeru pre súbor z úlohy 8.

12. Vzorec z úlohy 11 zapíšte pomocou relatívnych početností.

FYZIKÁLNA INTERPRETÁCIA: aritmetický priemer ako ťažisko, rozptyl ako moment zotrvačnosti

Rozptyl – hoci pôsobí na prvý pohľad menej prirodzene ako priemerná absolútna odchýlka – má prirodzenú fyzikálnu interpretáciu. Stručne ju naznačíme na príklade súboru 8, 8, 8, 8, 9, 13, 13, 13. Jeho aritmetický priemer je 10, hodnoty 8, 9 a 13 majú relatívne početnosti $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{8}$ a $\frac{3}{8}$. Každú relatívnu početnosť budeme chápať ako hmotnosť závažia umiestneného v príslušnom bode číselnej osi (teda napr. v bode 13 je umiestnené závažie s hmotnosťou $\frac{3}{8}$, pozri obr. 5). Vznikne tak sústava hmotných bodov na priamke. Potom

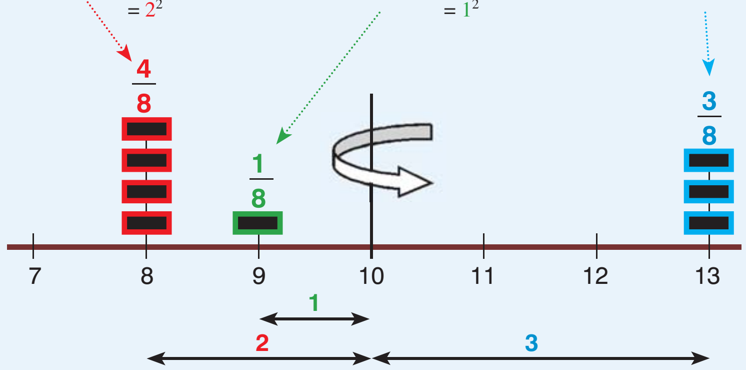
- aritmetický priemer – číslo 10 – možno interpretovať pomocou rovnováhy na páke. Ak číselnú os „podoprieme“ v bode 10, vznikne páka, ktorej obidve ramená – na jednom sú závažia $\frac{4}{8}$ a $\frac{1}{8}$, na druhom závažie $\frac{3}{8}$ – sú v rovnováhe. Platí totiž $\frac{4}{8}\cdot(10-8)+\frac{1}{8}\cdot(10-9)=\frac{3}{8}\cdot(13-10)$. Tento zápis rovnováhy na páke je iba upravený zápis základnej vlastnosti aritmetického priemeru: *súčet odchýlok od aritmetického priemeru sa rovná 0* (pozri rovnomenný text na s. 37 a úlohu 12 b) na s. 38). Bod 10 je teda ťažisko našej sústavy hmotných bodov;

- rozptyl zodpovedá námahe, ktorú treba vynaložiť, aby sme číselnú os s rozmiestnenými závažiami rozkrútili okolo osi, ktorá prechádza ťažiskom – číslom 10. Túto námahu vo fyzike vyjadruje veličina nazývaná *celkový moment zotrvačnosti*, ktorej výpočet je rovnaký ako výpočet rozptylu nášho súboru. Táto fyzikálna interpretácia potvrdzuje, že definícia rozptylu je správna voľba, ak chceme vyjadriť, ako sústredené alebo rozptýlené sú hodnoty súboru okolo jeho aritmetického priemeru. Iste aj vaše skúsenosti potvrdzujú, že čím ďalej od bodu 10 závažia rozmiestníme, tým väčšiu námahu na rozkrútenie číselnej osi budeme potrebovať.

moment zotrvačnosti = $\frac{4}{8}\cdot\underbrace{(8-10)^2}_{=2^2}$

moment zotrvačnosti = $\frac{1}{8}\cdot\underbrace{(9-10)^2}_{=1^2}$

moment zotrvačnosti = $\frac{3}{8}\cdot\underbrace{(13-12)^2}_{=3^2}$



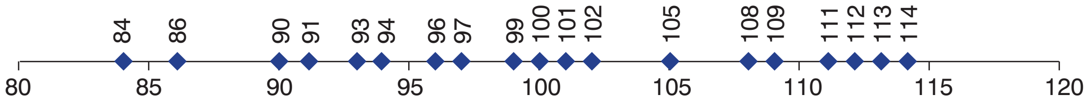
rozptyl = celkový moment zotrvačnosti = $\frac{4}{8}\cdot\underbrace{(8-10)^2}_{=2^2}+\frac{1}{8}\cdot\underbrace{(9-10)^2}_{=1^2}+\frac{3}{8}\cdot\underbrace{(13-12)^2}_{=3^2}$

$\frac{4}{8}$, $\frac{1}{8}$ a $\frac{3}{8}$ sú relatívne početnosti hodnôt 8, 9 a 13

Obr. 5
Rozptyl ako moment zotrvačnosti.

3.3 Štandardná odchýlka

Vráťme sa k súboru z obr. 3 b) (pripomeňme, že to bolo 20 meraní úseku dlhého 100 m, aritmetický priemer týchto meraní bol $\bar{x} = 100$ m) a vypočítajme preň priemernú absolútnu aj priemernú kvadratickú odchýlku od aritmetického priemeru.



Obr. 3 b)

- Priemerná *absolútna* odchýlka od aritmetického priemeru je

$$\frac{1}{20}\Big(\underbrace{|84-100|}_{16}+\underbrace{|86-100|}_{14}+\underbrace{|90-100|}_{10}+\underbrace{|91-100|}_{9}+\underbrace{|93-100|}_{7}+\underbrace{|94-100|}_{6}+$$
$$+\underbrace{|95-100|}_{5}+\underbrace{|96-100|}_{4}+\underbrace{|97-100|}_{3}+\underbrace{|99-100|}_{1}+\underbrace{|100-100|}_{0}+\underbrace{|101-100|}_{1}+$$
$$+\underbrace{|102-100|}_{2}+\underbrace{|105-100|}_{5}+\underbrace{|108-100|}_{8}+\underbrace{|109-100|}_{9}+\underbrace{|111-100|}_{11}+\underbrace{|112-100|}_{12}+$$
$$+\underbrace{|113-100|}_{13}+\underbrace{|114-100|}_{14}\Big)=\frac{150}{20}=7{,}5\text{ m}$$

- Priemerná *kvadratická* odchýlka od aritmetického priemeru – teda rozptyl – je

$$\sigma^2=\frac{1}{20}\Big(\underbrace{(84-100)^2}_{(-16)^2}+\underbrace{(86-100)^2}_{(-14)^2}+\underbrace{(90-100)^2}_{(-10)^2}+\underbrace{(91-100)^2}_{(-9)^2}+\underbrace{(93-100)^2}_{(-7)^2}+\underbrace{(94-100)^2}_{(-6)^2}+$$
$$+\underbrace{(95-100)^2}_{(-5)^2}+\underbrace{(96-100)^2}_{(-4)^2}+\underbrace{(97-100)^2}_{(-3)^2}+\underbrace{(99-100)^2}_{(-1)^2}+\underbrace{(100-100)^2}_{(0)^2}+\underbrace{(101-100)^2}_{(1)^2}+$$
$$+\underbrace{(102-100)^2}_{(2)^2}+\underbrace{(105-100)^2}_{(5)^2}+\underbrace{(108-100)^2}_{(8)^2}+\underbrace{(109-100)^2}_{(9)^2}+\underbrace{(111-100)^2}_{(11)^2}+$$
$$+\underbrace{(112-100)^2}_{12)^2}+\underbrace{(113-100)^2}_{(13)^2}+\underbrace{(114-100)^2}_{(14)^2}\Big)=\frac{1\,574}{20}=78{,}7\text{ m}^2$$

Všimnite si, že

- v prvom prípade je výsledok 7,5 m v rovnakých jednotkách ako prvky súboru (všetky namerané údaje na obr. 3 b) sú v metroch),
- kým výsledok druhého výpočtu – teda rozptyl 78,7 m^2 má iné jednotky.

Priemerná absolútna odchýlka je teda číslo *rovnakého typu* ako jednotlivé odchýlky, kým v prípade rozptylu je výsledok v iných jednotkách.
Problém s rozdielnymi jednotkami odstránime, ak vypočítame druhú odmocninu z rozptylu. Tá totiž bude *v rovnakých jednotkách* ako hodnoty súboru – bude to teda číslo rovnakého typu ako jednotlivé odchýlky. Druhá odmocnina z rozptylu sa nazýva **štandardná** (alebo **smerodajná**) **odchýlka** a označuje sa σ.

štandardná odchýlka (σ) = druhá odmocnina z rozptylu (σ^2)

ÚLOHA

13. Vypočítajte štandardnú odchýlku pre súbor z obr. 3 b).

Pojmy priemerná absolútna odchýlka, rozptyl a štandardná odchýlka vznikli v období, keď sa pozornosť štatistiky zamerala na štúdium chýb, ktoré vznikajú pri meraniach. Problémy súvisiace s meraniami, najmä v astronómii a zememeračstve, ovplyvňovali rozvoj pravdepodobnosti a štatistiky od polovice 18. storočia (dovtedy bola v centre záujmu predovšetkým problematika hazardných hier a demografie, spomeňme práce Pascala, Fermata či Bernoulliho a na Huygensove úvahy o tabuľkách úmrtí).

Každé astronomické pozorovanie, každé meranie je zaťažené nejakou chybou. Otázkou je: *Ako na základe viacerých meraní čo najlepšie odhadnúť skutočnú hodnotu meranej veličiny?* S ňou súvisí ďalšia otázka: *Na základe akých vlastností možno nejaké číslo vyhlásiť za dobrý odhad skutočnej hodnoty?*

Z prác matematikov tohto obdobia vyplýva niekoľko rôznych odpovedí na druhú z týchto otázok. Z nich nás budú zaujímať dve kritériá. Ak boli namerané hodnoty $x_1, x_2, ..., x_n$, tak za najlepší odhad skutočnej hodnoty sa pokladalo:

- číslo x, ktoré má najmenší možný súčet absolútnych odchýlok od nameraných hodnôt, teda hodnota $|x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_n|$ je najmenšia možná,
- číslo x, ktoré má najmenší možný súčet druhých mocnín odchýlok od nameraných hodnôt, teda hodnota $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2$ je najmenšia možná.

Pomerne jasné je, že priemerná absolútna odchýlka súvisí s prvým z týchto kritérií, rozptyl a štandardná odchýlka s druhým. Sú tiež odpoveďou na otázku, ktorú sme si v úlohe 2 na s. 64 položili aj my: ako vyjadriť presnosť merania, ktorého výsledkom sú hodnoty $x_1, x_2, ..., x_n$.

Poznamenajme ešte, že obidve uvedené kritériá prirodzene súvisia s mierami polohy. Dá sa totiž dokázať, že

- prvému z uvedených kritérií vyhovuje medián čísel $x_1, x_2, ..., x_n$ (t. j. medián má najmenší možný súčet absolútnych odchýlok od hodnôt $x_1, x_2, ..., x_n$),
- druhému kritériu vyhovuje aritmetický priemer čísel $x_1, x_2, ..., x_n$.

Fakt, že aritmetický priemer nameraných hodnôt – všeobecne pokladaný za dobrý odhad skutočnej hodnoty – súvisí so súčtom druhých mocnín odchýlok, možno pokladať za argument v prospech strednej kvadratickej odchýlky.

Poznamenajme ešte, že myšlienka hľadať *najmenšiu hodnotu súčtu druhých mocnín* (štvorcov), ktorá sa vyskytuje v druhom z uvedených kritérií, sa v štatistike ukázala ako veľmi prínosná. Je na nej založená aj jedna z najpopulárnejších štatistických metód – *metóda najmenších štvorcov*. Ako prvý tento postup publikoval v r. 1805 Adrien-Marie Legendre. Už 10 rokov predtým ho však poznal 18-ročný Carl Friedrich Gauss.

Ruggiero Giuseppe Boscovich (1711 – 1787)

V práci venovanej popisu tvaru Zeme ako prvý navrhol v r. 1757 prvé z uvedených kritérií.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

jeden z najvýznamnejších matematikov všetkých čias

To, že myšlienka opísať rozptýlenosť hodnôt súboru pomocou rozptylu a štandardnej odchýlky nie je až taká nerozumná, ako sa spočiatku mohlo zdať, dokazujú vlastnosti štandardnej odchýlky.

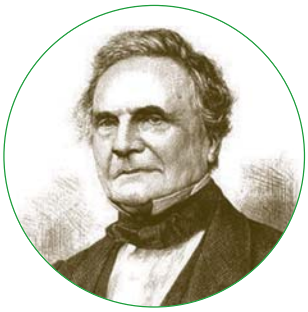
Z nich najznámejšia je:

Vo vzdialenosti menšej ako 3 štandardné odchýlky od aritmetického priemeru, teda v intervale $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$, leží aspoň $\frac{8}{9}$ (aspoň $88{,}\overline{8}$ %) z celkového počtu hodnôt súboru. (A)

(napr. v 180-člennom súbore aspoň 160 hodnôt leží bližšie než $3 \cdot \sigma$ k aritmetickému priemeru).

Čebyševova nerovnosť

Ďalšie argumenty v prospech rozptylu – jeho prirodzenú fyzikálnu interpretáciu a súvis s aritmetickým priemerom – sme uviedli v poznámkach za úlohami 12 a 13.



Irénée-Jules Bienaymé
(1796 – 1878)

Toto tvrdenie je špeciálnym prípadom všeobecnejšej formulácie:

Ak má súbor n prvkov, tak vo vzdialenosti menšej ako t štandardných odchýlok od aritmetického priemeru, teda v intervale

$$(\bar{x} - t \cdot \sigma, \bar{x} + t \cdot \sigma) \text{ leží aspoň } \frac{t^2 - 1}{t^2} \cdot n \text{ prvkov súboru.} \qquad \text{(B)}$$

Vyjadrené v percentách je to aspoň $100 \cdot \dfrac{t^2 - 1}{t^2}$ % z celkového počtu prvkov. To možno zapísať v tvare $100 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right)$% alebo $\left(100 - \dfrac{100}{t^2}\right)$%.

Je vám jasné, ako sme údaje o počte prvkov preformulovali na údaje o počte percent?

Inak povedané, mimo intervalu $(\bar{x} - t\sigma, \bar{x} + t\sigma)$ leží nanajvýš $\dfrac{1}{t^2} \cdot n$ prvkov (t. j. nanajvýš $\dfrac{100}{t^2}$ % celkového počtu prvkov).

Tento poznatok vyjadrujúci vlastnosti štandardnej odchýlky publikovali dvaja matematici (zhodou okolností aj priatelia): v r. 1853 Irénée-Jules Bienaymé a v r. 1867 Pafnutij Ľvovič Čebyšev. Dnes je tvrdenie (B) známe ako *Čebyševova alebo Bienaymého-Čebyševova nerovnosť*.

Pafnutij Ľvovič Čebyšev
(1821 – 1894),
nestor ruskej matematiky

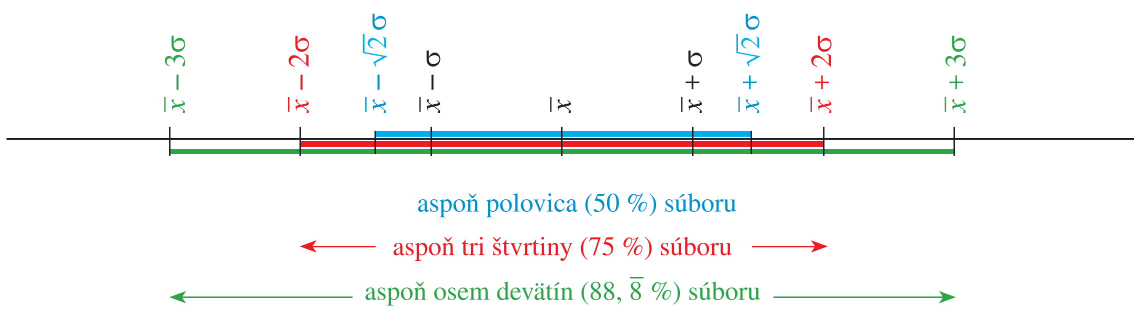
K zdôvodneniu Čebyševovej nerovnosti sa vrátime v úlohách 20 až 22.

ÚLOHY

14. Skontrolujte, že tvrdenie o $\frac{8}{9}$ súboru vo formulácii (A) vyplýva z tvrdenia (B).

15. Na základe tvrdenia (B) odhadnite:
a) aká časť súboru leží v intervale $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$,
b) aká časť súboru leží mimo intervalu $(\bar{x} - 2{,}5 \cdot \sigma, \bar{x} + 2{,}5 \cdot \sigma)$
c) ako treba zvoliť číslo d, aby v intervale $(\bar{x} - d, \bar{x} + d)$ ležalo aspoň 50 % súboru hodnôt.

V každom súbore hodnôt platí Čebyševova nerovnosť



Pripomeňme, že $\bar{x} = 100$ a hodnotu σ ste vypočítali v úlohe 13.

16. Pre súbor z obr. 3 b) vypočítajte, koľko percent jeho členov leží v intervale
- $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$,
- $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$,
- $(\bar{x} - \sqrt{2}\sigma, \bar{x} + \sqrt{2}\sigma)$.

Výsledky potom porovnajte s odhadmi, ktoré vyplývajú z Čebyševovej nerovnosti.

Z riešenia úlohy 16 vidno, že odhady, ktoré vyplývajú z Čebyševovej nerovnosti, môžu byť v konkrétnom prípade dosť podhodnotené: v úlohe 16 ležalo v intervale $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ všetkých 100 % prvkov súboru, kým Čebyševova nerovnosť zaručuje 75 %. Podobne v intervale $(\bar{x}-\sqrt{2}\sigma, \bar{x}+\sqrt{2}\sigma)$ ležalo 80 % prvkov súboru, kým Čebyševova nerovnosť zaručuje 50 %. Toto zistenie nie je až také prekvapujúce, ako by sa mohlo zdať. Hrubý odhad pomocou Čebyševovej nerovnosti je cenou za všeobecnosť. Táto nerovnosť totiž platí pre lubovolný súbor hodnôt – akokolvek zvolíme konečný počet čísel, vždy bude platiť, že aspoň 50 % z nich leží v intervale $(\bar{x}-\sqrt{2}\sigma, \bar{x}+\sqrt{2}\sigma)$, aspoň 75 % v intervale $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ atď.

Čebyševovu nerovnosť môžeme použiť, aj keď o súbore nemáme žiadne iné informácie, okrem jeho aritmetického priemeru a štandardnej odchýlky. Získané odhady nezávisia od toho, aký tvar má histogram rozdelenia početností daného súboru.

Čebyševova nerovnosť platí pre ľubovoľný súbor, preto poskytuje iba hrubý odhad

Odhady vyplývajúce z Čebyševovej nerovnosti možno zlepšiť, ak vieme, že histogram rozdelenia početností daného súboru má nejaký typický tvar. Túto podmienku spĺňajú napr. súbory, ktoré majú približne normálne rozdelenie početností.

Rozloženie hodnôt v súbore s približne normálnym rozdelením početností

Pripomeňme, že sú to tie súbory, ktorých histogram rozdelenia početností kopíruje dostatočne presne niektorú z kriviek normálneho rozdelenia (charakteristický zvonovitý tvar takejto krivky vidno na obrázku). Pre takéto súbory platí (pozri obrázok dole, $\bar{x}$ a σ označujú aritmetický priemer a štandardnú odchýlku daného súboru):

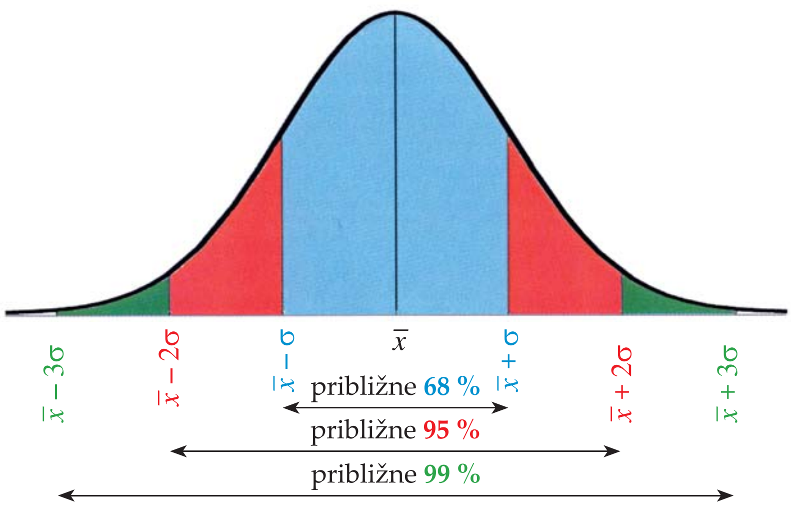
- približne 68 % všetkých hodnôt leží v intervale $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$,
- približne 95 % všetkých hodnôt leží v intervale $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$,
- približne 99 % všetkých hodnôt leží v intervale $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$.

Odporúčame vrátiť sa k textu o krivkách normálneho rozdelenia na s. 43.

Čím lepšie kopíruje histogram krivku normálneho rozdelenia, čím je počet jeho stĺpcov väčší a čím kratšie sú triedne intervaly, tým menej sa skutočný údaj o rozložení hodnôt súboru odlišuje od uvedených počtov percent.

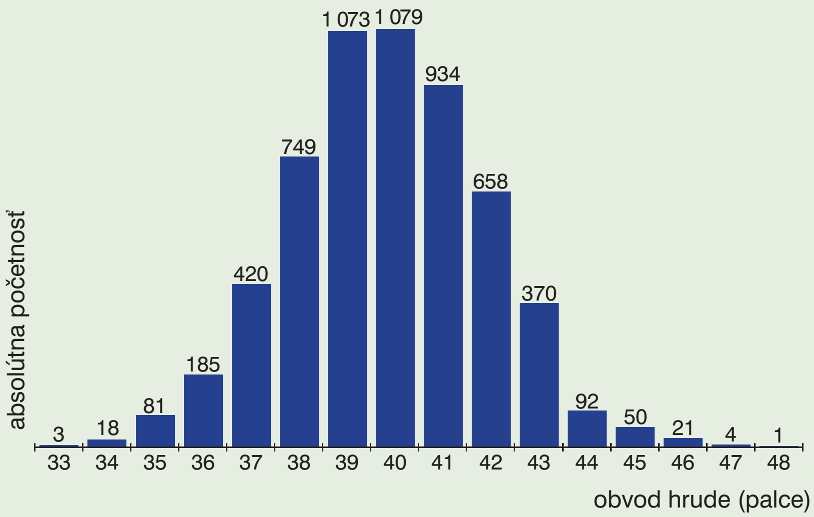
Hodnoty 68 %, 95 % a 99 % vznikli zaokrúhlením hodnôt 68,268 949 ... %, 95,449 973 ... % a 99,730 020 ... %, ktoré súvisia s vlastnosťami kriviek normálneho rozdelenia (ich výpočet výrazne presahuje úroveň stredoškolskej matematiky). Poslednú z uvedených hodnôt sme vedome zaokrúhlovali nadol. Chceli sme sa tým vyhnúť nedobre znejúcej formulácii *približne 100 % súboru leží v intervale* $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ a tiež zdôrazniť, že v tomto intervale vo všeobecnosti neleží celý súbor.

Rozloženie hodnôt v súboroch s približne normálnym rozdelením početností



ÚLOHA

17. V predchádzajúcej kapitole sme uviedli slávny príklad približne normálneho rozdelenia početností: obvod hrude 5 378 škótskych vojakov (pozri histogram na obrázku). Skontrolujte, ako presne v ňom platia informácie o rozložení hodnôt, ktoré sme uviedli v predchádzajúcom texte.



V odbornej literatúre alebo na internete môžeme okrem vzorca na výpočet rozptylu v tvare

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \qquad (1)$$

môžete nájsť aj veľmi podobný vzorec

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} \qquad (2)$$

ktorý má v menovateli namiesto čísla n číslo $n - 1$ (a symbol σ je spravidla nahradený písmenom s).

Každý z týchto vzorcov sa používa v inej situácii:

- Ak poznáme všetky hodnoty skúmaného súboru, použijeme na výpočet jeho rozptylu vzorec (1).
- V praxi však často namiesto všetkých hodnôt – teda hodnôt celého základného súboru – poznáme iba hodnoty niektorého výberového súboru. Napríklad pri hľadaní odpovede na otázku *Akú výšku majú dievčatá vo veku 14 rokov?* namiesto údajov o všetkých 14-ročných dievčatách zhromaždíme údaje iba o nejakej vhodne vybranej vzorke 14-ročných dievčat. Z nich sa snažíme zistiť informácie o základnom súbore. Na prvom mieste odhadneme jeho aritmetický priemer a rozptyl (to sú najzákladnejšie štatistické informácie o ľubovoľnom súbore). Ak máme navyše dôvod predpokladať, že súbor je približne normálne rozdelený, stačia tieto dve informácie na určenie príslušnej krivky normálneho rozdelenia. Ak chceme len na základe hodnôt výberového súboru odhadnúť, aký rozptyl má celý základný súbor, použijeme vzorec (2).

Všetky naše úvahy v tejto kapitole sa týkali prvej z uvedených možností, druhá už presahuje náplň stredoškolskej matematiky.

3.4 Ďalšie úlohy

ÚLOHY

18. Pomocou Čebyševovej nerovnosti odhadnite, v koľkých percentách všetkých skúmaných prípadov sa dĺžka tehotenstva
a) odlišovala aspoň 3 štandardné odchýlky od nájdeného priemeru (bola teda nanajvýš 251 dní alebo aspoň 314 dní),
b) odchyľovala menej ako 3 týždne od nájdeného priemeru, bola teda v rozmedzí .... (doplňte),
c) odchyľovala menej ako 2 týždne od nájdeného priemeru, bola teda v rozmedzí .... (doplňte).

DĹŽKA TEHOTENSTVA

NA URČENIE DĹŽKY TEHOTENSTVA SA POUŽÍVA PRAVIDLO, KTORÉ V R. 1812 SFORMULOVAL NEMECKÝ GYNEKOLÓG FRANZ KARL NAEGELE: ZA PREDPOKLADU, ŽE BUDÚCA MAMIČKA MALA PRAVIDELNÝ 28-DŇOVÝ CYKLUS, JE ŠTANDARDNÁ DĹŽKA TEHOTENSTVA 280 DNÍ. PRESNOSŤ TOHTO ODHADU PREVEROVALO VIACERO ŠTÚDIÍ. JEDNEJ Z NICH SA ZÚČASTNILO 865 MAMIČIEK SPĹŇAJÚCICH PREDPOKLAD 28-DŇOVÉHO CYKLU. PRIEMERNÁ DĹŽKA ICH TEHOTENSTVA BOLA 282,5 DŇA (ROZSAH HODNÔT BOL OD 237 DO 318 DNÍ), ŠTANDARDNÁ ODCHÝLKA BOLA 10,5 DŇA.

19. V správe o výsledkoch biologickej olympiády sa uvádza: *V kategórii A priemerný bodový zisk bol 24 bodov (štandardná odchýlka = ±8). Najvyšší (maximálne dosiahnuteľný) počet bodov 40 dosiahol z 23 účastníkov iba 1 súťažiaci.*
Použite Čebyševovu nerovnosť na odhad počtu účastníkov olympiády, ktorí získali nanajvýš 8 bodov.

Základná myšlienka...

DÔKAZ ČEBYŠEVOVEJ NEROVNOSTI

Základná myšlienka je jednoduchá: ak vieme, že napr. súčet 10 *nezáporných* čísel je 120, tak v ňom nemôže byť veľa sčítancov väčších alebo rovnajúcich sa 30. Zrejme môžu byť nanajvýš 4, pretože inak by súčet prevýšil hodnotu 120 (na čo v tejto úvahe potrebujeme informáciu, že sčítance sú nezáporné?).

ÚLOHY

20. Koľko sčítancov môže byť v uvedenom príklade väčších alebo rovnajúcich sa
a) 60 b) 40 c) 35 d) 49 ?

21. Súčet nezáporných sčítancov je 12 465,7.
Najviac koľko z týchto sčítancov môže byť väčších alebo rovnajúcich sa 314 ?

Postup, ktorým možno nájsť riešenie úloh 20 a 21, možno sformulovať takto:

Ak súčet nezáporných čísel je S, tak počet sčítancov, ktoré sú väčšie alebo rovnajúce sa kladnému číslu n, nemôže byť väčší ako číslo $\frac{S}{n}$. (*)

Ak napríklad $\frac{S}{n} = 39{,}699...$ (táto situácia nastala v úlohe 21), tak vieme, že hľadaný počet sčítancov je menší alebo sa rovná 39,699... (teda – keďže počet sčítancov musí byť celé číslo – je iste menší alebo sa rovná 39).

... a jej použitie

Predstavme si teraz súbor, ktorý obsahuje n hodnôt – označíme ich $x_1, x_2, ..., x_n$, ktorého aritmetický priemer je číslo $\bar{x}$ a štandardná odchýlka je kladné číslo σ (teda rozptyl je číslo σ^2).

V nasledujúcej tabuľke uvádzame v ľavom stĺpci úvahy pre tento všeobecný prípad, v pravom stĺpci – kvôli väčšej názornosti – pre súbor, ktorý obsahuje $n = 100$ prvkov, má aritmetický priemer $\bar{x} = 50$ a štandardnú odchýlku $\sigma = 2$.
Zaujíma nás, koľko prvkov súboru leží od jeho aritmetického priemeru $\bar{x}$ vo vzdialenosti aspoň 3-násobku štandardnej odchýlky σ.

Najprv vzorec na výpočet rozptylu tohto súboru:

$\sigma^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$	$4 = \dfrac{(x_1 - 50)^2 + (x_2 - 50)^2 + \ldots + (x_{100} - 50)^2}{100}$

zapíšeme v tvare:

$n \cdot \sigma^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$	$100 \cdot 4 = (x_1 - 50)^2 + (x_2 - 50)^2 + \ldots + (x_{100} - 50)^2$ (**)

(obidve strany sme vynásobili menovateľom zlomku na pravej strane).

Teraz sa môžeme vrátiť k otázke: koľko prvkov súboru leží od jeho aritmetického priemeru $\bar{x}$ vo vzdialenosti aspoň 3-násobku štandardnej odchýlky σ?

	V našom konkrétnom prípade: koľko prvkov leží od hodnoty $\bar{x} = 50$ vo vzdialenosti $3 \cdot 2 = 6$ a viac?

Ak x je taký prvok nášho súboru, tak preň platí:

$\lvert x - \bar{x}\rvert \geq 3 \cdot \sigma$, čo je to isté ako $(x_1 - \bar{x})^2 \geq 9 \cdot \sigma^2$	$\lvert x - 50\rvert \geq 3 \cdot 2$, čo je to isté ako $(x - 50)^2 \geq 9 \cdot 4$

Preto našu otázku môžeme preformulovať:

koľko sčítancov v súčte (**) je väčších alebo sa rovná $9 \cdot \sigma^2$?	koľko sčítancov v súčte (**) je väčších alebo sa rovná $9 \cdot 4$?

(toto si dobre rozmyslite, až potom čítajte ďalej).

Všetky sčítance v (**) sú nezáporné, preto môžeme použiť úvahu (*). Z nej vyplýva:

Počet sčítancov, ktoré sú väčšie alebo sa rovnajú $9 \cdot \sigma^2$, nie je väčší ako $\dfrac{n \cdot \sigma^2}{9 \cdot \sigma^2} = \dfrac{n}{9}$. Teda vzdialenosť väčšiu alebo rovnajúcu sa $3 \cdot \sigma$ od aritmetického priemeru $\bar{x}$ má nanajvýš $\dfrac{n}{9}$ členov súboru.	Počet sčítancov, ktoré sú väčšie alebo sa rovnajú $9 \cdot 4$, nie je väčší ako $\dfrac{100 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \dfrac{100}{9} = 11{,}11\ldots$. Teda vzdialenosť väčšiu alebo rovnajúcu sa $3 \cdot \sigma = 6$ od aritmetického priemeru $\bar{x}$ má nanajvýš 11 členov súboru.

Pre zvyšné prvky (tých je aspoň $n - \dfrac{n}{9} = \dfrac{8}{9}n$) platí, že ich vzdialenosť od $\bar{x}$ je menšia ako $3 \cdot \sigma$.

To, čo sme práve dokázali, je tvrdenie (A) z článku o Čebyševovej nerovnosti na s. 71 (skontrolujte to).

ÚLOHY

22. Zopakujte predchádzajúce úvahy namiesto hodnoty 3σ pre hodnoty 2σ a $\sqrt{2}\sigma$. Skontrolujte, že ste tak dokázali tvrdenie (B) pre prípad $t = 2$ a $t = \sqrt{2}$.

23. Diskutujte o tom, či možno použiť podobné úvahy aj v prípade, ak by sme namiesto rozptylu poznali priemernú absolútnu odchýlku od aritmetického priemeru.

ROZPTYL A ŠTANDARDNÁ ODCHÝLKA – VÝSLEDKY

1. Za vyrovnanejší možno pokladať výkon druhej skupiny (na prvom histograme sú v porovnaní s druhým výsledky rozložené rovnomernejšie, na druhom sú viac sústredené okolo priemernej hodnoty).
2. a) Za presnejšiu možno označiť prvú metódu.
3. V obidvoch prípadoch dostaneme hodnotu 0. Vyplýva to zo základnej vlastnosti aritmetického priemeru (súčet všetkých odchýlok od aritmetického priemeru sa rovná 0), pozri článok Súčet odchýlok od aritmetického priemeru sa rovná 0 na s. 37). Teda návrhy *súčet všetkých odchýlok od aritmetického priemeru* ani *priemerná odchýlka od aritmetického priemeru* nijak nesúvisia s veľkosťou rozptýlenia hodnôt okolo aritmetického priemeru.
4. V návrhoch z úlohy 3 sme dostali výsledok 0 vďaka tomu, že odchýlky sme uvažovali aj so znamienkom (teda nameraným hodnotám menším ako aritmetický priemer zodpovedali záporné odchýlky). Tento problém so znamienkami rieši nahradenie odchýlky absolútnou odchýlkou.
a) Súčet všetkých absolútnych odchýlok je číslo

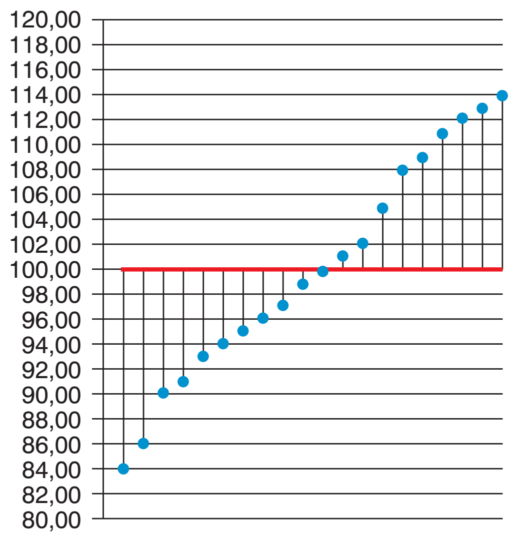
$$\underbrace{|84-100|}_{16} + \underbrace{|86-100|}_{14} + \underbrace{|90-100|}_{10} + \underbrace{|91-100|}_{9} + \underbrace{|93-100|}_{7} + \underbrace{|94-100|}_{6} + \underbrace{|95-100|}_{5} + \underbrace{|96-100|}_{4} + \underbrace{|97-100|}_{3} +$$

$$+ \underbrace{|99-100|}_{1} + \underbrace{|100-100|}_{0} + \underbrace{|101-100|}_{1} + \underbrace{|102-100|}_{2} + \underbrace{|105-100|}_{5} + \underbrace{|108-100|}_{8} + \underbrace{|109-100|}_{9} + \underbrace{|111-100|}_{11} +$$

$$+ \underbrace{|112-100|}_{12} + \underbrace{|113-100|}_{13} + \underbrace{|114-100|}_{14} = 150$$

Geometricky ho možno interpretovať ako súčet dĺžok úsečiek na obr. 6. Kvôli jednoduchosti vyjadrovania o úsečke hovoríme aj v prípade, keď sa aritmetický priemer a nameraná hodnota zhodujú (táto situácia nastala pre hodnotu 100), a teda krajné body úsečky splynú do jediného bodu.
b) Opísaná situácia nastane napr. pre súbory
95, 100, 105 a 98, 98, 99, 99, 100, 101, 101, 102, 102.
5. Je to číslo 150 : 20 = 7,5, teda priemerná dĺžka úsečky na obr. 6. Pripomeňme, že tu o úsečke hovoríme aj v prípade, keď aritmetický priemer a nameraná hodnota splynú do jedného bodu (to nastalo pre hodnotu 100), pri takomto chápaní slova úsečka je na obrázku 20 úsečiek (z toho jedna s dĺžkou 0).
6. Veríme, že aj vy ste v diskusii dospeli k záveru, že z uvedených troch možností je vhodné iba *kvartilové rozpätie*.
7. a) Súbor z obr. 1a):

$$\sigma^2 = \frac{0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



Obr. 6
Modré body znázorňujú jednotlivé namerané hodnoty z obr. 3 b), červená čiara znázorňuje ich aritmetický priemer. Krajné body čiernych úsečiek sú aritmetický priemer a nameraná hodnota.

Výpočet zapísaný pomocou absolútnych početností (známka 2 má početnosť 6, známky 1 a 3 početnosť 1):

$$\sigma^2 = \frac{1}{8}\left(1\cdot\overbrace{(1-2)^2}^{(-1)^2} + 6\cdot\overbrace{(2-2)^2}^{0^2} + 1\cdot\overbrace{(3-2)^2}^{1^2}\right).$$

početnosť hodnoty 1   početnosť hodnoty 2   početnosť hodnoty 3

Súbor z obr. 1 b): $\sigma^2 = \dfrac{(-1)^2+2^2+0^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2}{8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

Výpočet zapísaný pomocou absolútnych početností: $\sigma^2 = \dfrac{1}{8}\left(4\cdot\overbrace{(1-2)^2}^{(-1)^2} + 1\cdot\overbrace{(2-2)^2}^{0^2} + 2\cdot\overbrace{(3-2)^2}^{1^2} + 1\cdot\overbrace{(4-2)^2}^{2^2}\right)$

b) $\sigma^2 = \dfrac{1}{20}[(84-100)^2+(86-100)^2+(90-100)^2+(91-100)^2+(93-100)^2+(94-100)^2+(95-100)^2+(96-100)^2+(97-100)^2+$ $+(99-100)^2+(100-100)^2+(101-100)^2+(102-100)^2+(105-100)^2+(108-100)^2+(109-100)^2+(111-100)^2+$ $+(112-100)^2+(113-100)^2+(114-100)^2 = 1\,574 : 20 = 78{,}7$.

c) $\sigma^2 = \dfrac{1}{40}[1\cdot(0-5{,}65)^2 + 1\cdot(1-5{,}65)^2 + 2\cdot(2-5{,}65)^2 + 2\cdot(3-5{,}65)^2 + 5\cdot(4-5{,}65)^2 + 6\cdot(5-5{,}65)^2 + 8\cdot$ $\cdot(6-5{,}65)^2 + 7\cdot(7-5{,}65)^2 + 5\cdot(8-5{,}65)^2 + 2\cdot(9-5{,}65)^2 + 1\cdot(10-5{,}65)^2 = 193{,}1 : 40 = 4{,}827\,5$.

d) $\sigma^2 = 3{,}01$.

e) Aritmetický priemer je $\bar{x} = \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot(-2)+4\cdot(-1)+5\cdot 0+4\cdot 1+2\cdot 2}{20} = -0{,}4$.

Rozptyl je $\sigma^2 = \dfrac{1}{20}\cdot\big(2\cdot[-3-(-0{,}4)]^2 + 3\cdot[-2-(-0{,}4)]^2 + 4\cdot[-1-(-0{,}4)]^2 + 5\cdot[0-(-0{,}4)]^2 + 4\cdot[1-(-0{,}4)]^2 +$ $+ 2\cdot[2-(-0{,}4)]^2\big) = \dfrac{1}{20}\cdot\left[2\cdot(-2{,}6)^2 + 3\cdot(-1{,}6)^2 + 4\cdot(-0{,}6)^2 + 5\cdot 0{,}4^2 + 4\cdot 1{,}4^2 + 2\cdot 2{,}4^2\right] = \dfrac{42{,}8}{20} = 2{,}14$.

8. $\sigma^2 = \dfrac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}[n_1\cdot(y_1-\bar{y})^2 + n_2\cdot(y_2-\bar{y})^2 + \ldots + n_k\cdot(y_k-\bar{y})^2]$ alebo (ak označíme rozsah súboru – teda súčet $n_1+n_2+\ldots+n_k$ – písmenom n) $\sigma^2 = \dfrac{1}{n}[n_1\cdot(y_1-\bar{y})^2 + n_2\cdot(y_2-\bar{y})^2 + \ldots + n_k\cdot(y_k-\bar{y})^2]$. (*)

Zápis pomocou symbolu Σ: $\sigma^2 = \dfrac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\sum\limits_{j=1}^{k} n_j\cdot(y_j-\bar{y})^2$.

9. Ak v (*) vydelíme číslom n každý sčítanec v hranatej zátvorke, dostaneme

$$\sigma^2 = \frac{n_1}{n}\cdot(y_1-\bar{y})^2 + \frac{n_2}{n}\cdot(y_2-\bar{y})^2 + \ldots + \frac{n_k}{n}\cdot(y_k-\bar{y})^2. \qquad (**)$$

Čísla $\dfrac{n_1}{n}, \dfrac{n_2}{n}, \ldots, \dfrac{n_k}{n}$ sú relatívne početnosti hodnôt $y_1, y_2, \ldots, y_k$, teda čísla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ zo zadania, preto (**) môžeme zapísať v tvare $\sigma^2 = p_1\cdot(y_1-\bar{y})^2 + p_2\cdot(y_2-\bar{y})^2 + \ldots + p_k\cdot(y_k-\bar{y})^2$.

Zápis pomocou symbolu Σ: $\sigma^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j\cdot(y_j-\bar{y})^2$.

10. $MAD = \dfrac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + \ldots + |x_n-\bar{x}|}{n}$ alebo $MAD = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j-\bar{x}|$.

11. $MAD = \dfrac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\left[n_1\cdot|y_1-\bar{y}| + n_2\cdot|y_2-\bar{y}| + \ldots + n_k\cdot|y_k-\bar{y}|\right]$ alebo

$$MAD = \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\sum_{j=1}^{k} n_j\cdot|y_j-\bar{y}|.$$

12. $MAD = p_1\cdot|y_1-\bar{y}| + p_2\cdot|y_2-\bar{y}| + \ldots + p_k\cdot|y_k-\bar{y}|$ alebo $MAD = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j\cdot|y_j-\bar{y}|$.

13. $\sigma = \sqrt{78{,}7\ (\mathrm{m}^2)} = 8{,}871\,302\ \ldots\ (\mathrm{m})$.

15. a) Aspoň $\dfrac{3}{4}n$ prvkov, t. j. aspoň 75 % z rozsahu súboru (v tvrdení (B) stačí zvoliť $t = 2$).

b) Podľa (B) v intervale $(\bar{x} - 2{,}5 \cdot \sigma, \bar{x} + 2{,}5 \cdot \sigma)$ leží aspoň $100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2{,}5^2}\right) = 84$ % hodnôt súboru. Preto mimo tohto intervalu môže ležať nanajvýš 100 – 84 = 16 % všetkých prvkov súboru.
c) Nájdeme $t > 0$ tak, aby v $(\bar{x} - t \cdot \sigma, \bar{x} + t \cdot \sigma)$ ležalo aspoň 50 % hodnôt, alebo – čo je to isté – aby mimo $(\bar{x} - t \cdot \sigma, \bar{x} + t \cdot \sigma)$ ležalo najviac 50 % hodnôt. Podľa formulácie (B) a textu za ňou má takúto vlastnosť každé t, pre ktoré $\frac{100}{t^2} \leq 50$. Riešme najprv rovnicu $\frac{100}{t^2} = 50$. Postupnými úpravami dostávame $\frac{1}{t^2} = \frac{1}{2}$, $t = \sqrt{2}$ (pripomeňme, že hľadáme iba kladné hodnoty t). Preto riešením nerovnice $\frac{100}{t^2} \leq 50$ sú všetky čísla $t \geq \sqrt{2}$ (so zväčšovaním menovateľa t^2 sa hodnota zlomku $\frac{100}{t^2}$ zmenšuje; ak teda pre $t = \sqrt{2}$ platila rovnosť $\frac{100}{t^2} = 50$, tak nerovnosť $\frac{100}{t^2} < 50$ bude platiť pre väčšie hodnoty t). Preto za d možno zvoliť $d \geq \sqrt{2}\sigma$.
16. V tomto prípade:
- $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma) = (73{,}386\ ..., 126{,}613\ ...)$, tento interval obsahuje všetky prvky súboru (teda 100 %), podľa Čebyševovej nerovnosti ich musí obsahovať aspoň 88 %,
- $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (82{,}257\ ..., 117{,}742\ ...)$, aj tento interval obsahuje 100 % prvkov súboru, podľa Čebyševovej nerovnosti to musí byť aspoň 75 %,
- $(\bar{x} - \sqrt{2}\sigma, \bar{x} + \sqrt{2}\sigma) = (87{,}454\ ..., 112{,}545\ ...)$, tento interval obsahuje 16 z 20 hodnôt, teda 80 % prvkov súboru, podľa Čebyševovej nerovnosti to musí byť minimálne 50 %.

17. V tomto súbore platí: $\bar{x} = 39{,}831\ ...$, $\sigma^2 = 4{,}201\ ...$, $\sigma = 2{,}049\ ...$. V intervale:
- $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) = (37{,}78\ ..., 41{,}88\ ...)$ leží 3 835 hodnôt (749 + 1 073 + 1 079 + 934), čo je $\frac{3\,835}{5\,738} = 0{,}668\ ...$ celého súboru, t. j. približne 67 % všetkých hodnôt,
- $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma) = (35{,}73\ ..., 43{,}93\ ...)$ leží 5 468 hodnôt (súčet absolútnych početností pre obvody 36 až 43 palcov), čo je $\frac{5\,468}{5\,738} = 0{,}952\ ...$, t. j. približne 95 % všetkých hodnôt,
- $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma) = (33{,}68\ ..., 45{,}98\ ...)$ leží 5 709 hodnôt (súčet absolútnych početností pre obvody 34 až 45 palcov), čo je $\frac{5\,709}{5\,738} = 0{,}994\ ...$, t. j. približne 99 % všetkých hodnôt.

18. a) Podľa textu za tvrdením (B) na s. 72 je to nanajvýš $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ všetkých prvkov, t. j. približne 11 % všetkých prípadov (v uvedenom prípade $\frac{1}{9} \cdot 865 = 96{,}111\ ...$, teda nanajvýš 96 mamičiek). **b)** 3 týždne = 21 dní je 2-násobok štandardnej odchýlky, podľa tvrdenia (B) sa vo vzdialenosti menšej ako 2 štandardné odchýlky nachádza aspoň $\frac{2^2 - 1}{2^2} = \frac{3}{4}$, t. j. aspoň 75 % všetkých prípadov (t. j. – keďže $\frac{3}{4} \cdot 865 = 648{,}75$ – aspoň 649 mamičiek). **c)** 2 týždne = 14 dní je $\frac{14}{10{,}5} = 1{,}\bar{3} = \frac{4}{3}$-násobok štandardnej odchýlky. Podľa tvrdenia (B) sa vo vzdialenosti menšej ako $\frac{4}{3}$ štandardnej odchýlky nachádza aspoň $1 - \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{16}{9}} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, t. j. aspoň 43,75 % všetkých prípadov (t. j. – keďže $\frac{7}{16} \cdot 865 = 378{,}437\,5\ ...$, – aspoň 379 mamičiek).
19. Vzdialenosť čísla 8 od priemernej hodnoty 24 je 16, to je dvojnásobok štandardnej odchýlky. Podľa textu za tvrdením (B) vzdialenosť aspoň 2 štandardné odchýlky od priemeru má nanajvýš $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, t. j. nanajvýš 25 % hodnôt súboru. V našom prípade to znamená, že mimo intervalu (24 – 16, 24 + 16) = (8,40) leží – keďže $\frac{1}{4} \cdot 23 = 5{,}75$ – hodnotenie nanajvýš 5 účastníkov. Vieme, že hodnotenie 40 bodov dosiahol iba 1 účastník, preto 8 a menej bodov mohli získať nanajvýš 4 účastníci.
20. a) Najviac 2. **b)** Najviac 3. **c)** Najviac 3 (120 : 35 = 3,428 ..., preto 3 · 35 je ešte menej ako 120, ale 4 · 35 je už viac). **d)** Najviac 2 (120 : 49 = 2,448...).
21. Najviac 39 (12 465,7 : 314 = 39,699..., preto 39 · 314 je menej ako 12 465,7, ale 40 · 314 je už viac).
23. Áno, použitím podobných úvah – v ktorých namiesto (**) na s. 76 využijeme rovnosť $n \cdot MAD = |x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + ... + |x_n - \bar{x}|$ (označenie MAD pozri v úlohe 10) môžeme dokázať nasledujúce tvrdenie, ktoré je obdobou tvrdenia (B):
Ak súbor má n prvkov, tak vo vzdialenosti menšej ako t · MAD od aritmetického priemeru – teda v intervale

$$(\bar{x} - t \cdot MAD, \bar{x} + t \cdot MAD) \text{ – \textit{leží aspoň} } \frac{t-1}{t} \cdot n \text{ \textit{jeho prvkov.}} \qquad \text{(B')}$$

4 OD PRAVOUHLÉHO TROJUHOLNÍKA KU GONIOMETRICKÝM FUNKCIÁM

Bez goniometrických funkcií by sa nezaobišli astronómovia, elektrotechnici či zememerači. Okrem sínusu, kosínusu a tangensu, o ktorých sa v tejto kapitole zmienime, k nim patria ešte kotangens, sekans a kosekans, o ktorých sa naopak nezmienime. Pripomenieme definíciu týchto funkcií v pravouhlom trojuholníku a ukážeme, že sínus, kosínus a tangens možno využiť aj v iných trojuholníkoch ako pravouhlých. Úvahy o vzťahu medzi dvoma spôsobmi určovania polohy bodu v rovine – pomocou pravouhlých alebo polárnych súradníc – nás privedú k definícii sínusu a kosínusu pre uhly väčšie ako 90°. Presvedčíme sa, že vďaka tejto všeobecnejšej definícii sa zjednoduší zápis niektorých vzorcov. Ku koncu kapitoly sa pozrieme na grafy funkcií sínus a kosínus a využijeme ich na jednoduché úvahy o súmernostiach.
Sínus, kosínus a tangens sú dôležité nástroje v trigonometrii, ktorá sa zaoberá úlohou vypočítať zvyšné prvky trojuholníka (strany, uhly, výšky), ak sú dané veľkosti niektorých jeho prvkov. Hlavným podnetom pre vznik trigonometrie boli astronomické výpočty.

Grécka známka s obrázkom z Aristarchovho spisu *O veľkostiach a vzdialenostiach Slnka a Mesiaca*

Trigonometrické výpočty v astronómii

Najstaršie náznaky trigonometrických výpočtov v astronómii nájdeme v diele Aristarcha zo Samu (okolo 270 pred n. l.), ktorý sa pokúsil zistiť veľkosť Slnka a Mesiaca a ich vzdialenosť od Zeme.
Autorom prvých známych trigonometrických tabuliek je ďalší grécky astronóm Hipparchos (asi 190 – 120 pred n. l.).
V jeho tabuľkách sa uvádzala dĺžka tetivy kruhu v závislosti od veľkosti príslušného stredového uhla, táto dĺžka sa nazývala chorda.
Za prechod od chordy k dnešnému sínusu (ktorý je vlastne polovica chordy) vďačíme indickým matematikom okolo r. 510.

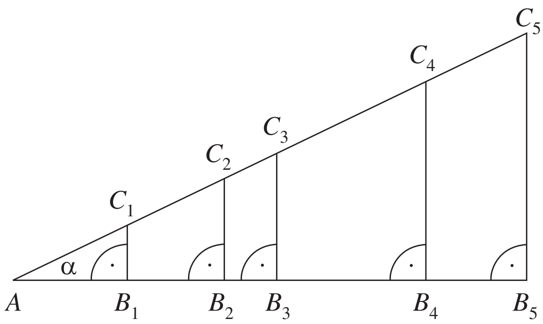
Johann Müller – Regiomontanus
(1436 – 1476)

Astronómovia znázorňujú pohyb nebeských telies na guli. Preto v „astronomickej fáze" rozvoja trigonometrie mala dôležitejšiu úlohu sférická trigonometria – trigonometria na povrchu gule – než rovinná, na ktorú sa obmedzíme v tejto učebnici.

Základom rozvoja trigonometrie ako samostatnej disciplíny (nezávislej od astronómie) sa v európskej matematike stalo dielo Johanna Müllera zvaného Regiomontanus (podľa polatinčeného názvu jeho rodného mesta Königsberg). V spise *De triangulis omnimodis libri quinque* (*Päť kníh o trojuholníkoch každého druhu*) systematicky (podľa vzoru Euklidových Základov) vysvetlil základy trigonometrie.
Regiomontanus v r. 1467 – 1471 pôsobil v Uhorsku, okrem iného ako profesor matematiky a astronómie na Academii Istropolitane, univerzite založenej v Bratislave kráľom Matejom Korvínom.

4.1 Sínus, kosínus a tangens v pravouhlom trojuholníku

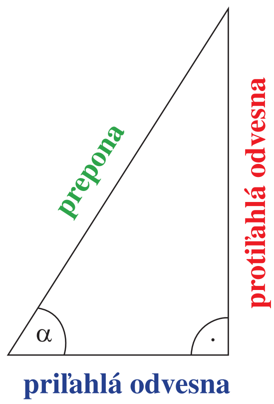
So symbolmi sin, cos, tan (sínus, kosínus a tangens) sme sa už stretli. Pripomeňme definíciu čísel sin α, cos α, tan α, kde α je ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku.
Všetky pravouhlé trojuholníky, v ktorých jeden z ostrých uhlov má veľkosť α, sú navzájom podobné (lebo sa zhodujú v dvoch uhloch, pozri obr. 1).



Obr. 1
Trojuholníky AB_1C_1 až AB_5C_5 sú všetky navzájom podobné.

Podobnosť zachováva pomer dĺžok, preto vo všetkých týchto trojuholníkoch je rovnaký

- *pomer dĺžky protiľahlej odvesny a prepony*
  Tento pomer sa nazýva **sínus uhla α**
  a označuje sa **sin α**.
- *pomer dĺžky priľahlej odvesny a prepony*
  Tento pomer sa nazýva **kosínus uhla α**
  a označuje sa **cos α**.
- *pomer dĺžky protiľahlej a priľahlej odvesny*
  Tento pomer sa nazýva **tangens uhla α**
  a označuje sa **tan α** alebo **tg α** (my ho budeme označovať tan).



$$\sin\alpha = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}}$$

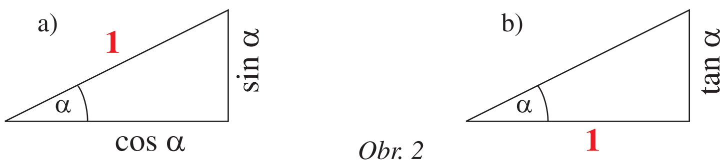
$$\cos\alpha = \frac{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}$$

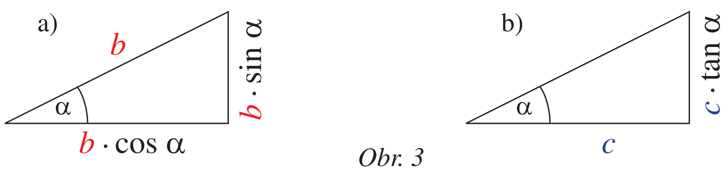
ÚLOHY

1. Vypočítajte sínus, kosínus a tangens najmenšieho vnútorného uhla v pravouhlom trojuholníku so stranami 3, 4, 5.
2. Pre hodnoty sin α, cos α platí vždy $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Vysvetlite, ako možno použiť obr. 2 pri zdôvodnení tejto rovnosti.
   (V matematike sa druhá mocnina čísla sin α zapisuje symbolom $\sin^2\alpha$, zápis uvedenej rovnosti má potom tvar $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
3. Nájdite modus súboru z obr. 1. Zdôvodnite platnosť rovnosti $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (môžu vám pomôcť trojuholníky na obr. 2).

Hoci sme čísla sin α, cos α a tan α definovali ako pomery, môžeme si ich predstaviť aj ako dĺžky. Ak bude mať prepona pravouhlého trojuholníka dĺžku 1, budú dĺžky jej odvesien sin α a cos α (obr. 2 a). Podobne si ako dĺžku možno predstaviť aj tangens (obr. 2 b).



Obr. 2
Sínus, kosínus a tangens si môžeme predstaviť aj ako dĺžky.

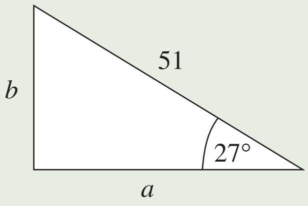


Obr. 3
Ak má prepona dĺžku b, budú všetky rozmery trojuholníka b-násobkom rozmerov trojuholníka z obr. 2 a). Rovnaká úvaha sa vzťahuje na obr. b).

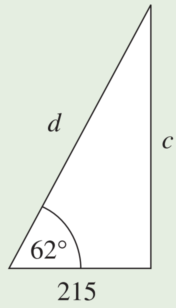
ÚLOHA

4. Vypočítajte dĺžky strán pravouhlých trojuholníkov. Výsledky zaokrúhlite na 2 platné číslice.

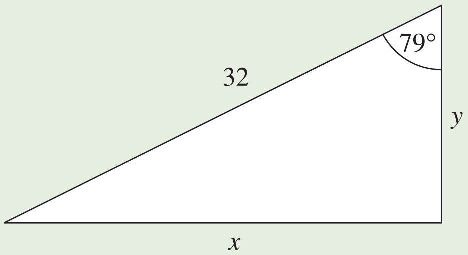
a)



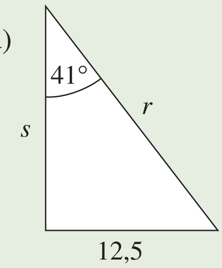
b)



c)



d)



RIEŠENIE ÚLOHY 4 b)

Dĺžku c nájdeme z rovnosti

$$\tan 62° = \frac{c}{215},$$

z ktorej dostávame

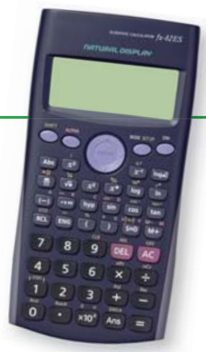
$$c = 215 \cdot \tan 62° = 404{,}3... \approx 400$$

(hodnotu tan 62° sme vypočítali na kalkulačke).
Dĺžku d vypočítame z rovnosti

$$\cos 62° = \frac{215}{d},$$

z nej vyplýva

$$d = \frac{215}{\cos 62°} = 457{,}9... \approx 460.$$

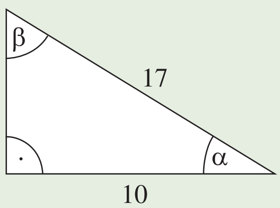


Kalkulačka spravidla umožňuje nielen výpočet hodnôt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\tan\alpha$ pre daný uhol α, ale aj opačný postup: nájsť veľkosť ostrého uhla, ak poznáme napr. jeho sínus. V matematike sa ostrý uhol, ktorého sínus je číslo x, označuje $\arcsin x$ (teda napr. $\arcsin 0{,}5$ je uhol, ktorého sínus je 0,5). Podobný význam majú označenia $\arccos x$, $\arctan x$.

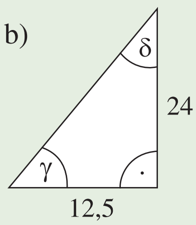
ÚLOHA

5. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov pravouhlých trojuholníkov. Výsledky zaokrúhlite na celé stupne.

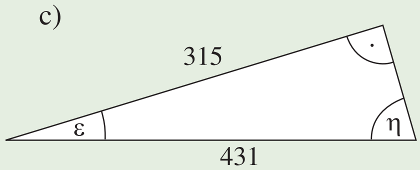
a)



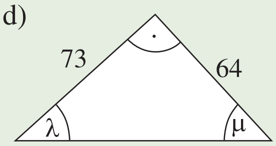
b)



c)



d)



Okrem goniometrických funkcií si v tejto úlohe pripomíname aj niektoré malé grécke písmená:
α (alfa), β (beta),
γ (gama), δ (delta),
ε (epsilon), η (eta),
λ (lambda), μ (mí),
ktorými označujeme uhly.

RIEŠENIE ÚLOHY 5 a)

Z údajov v zadaní vyplýva

$$\cos\alpha = \frac{10}{17},\ \sin\beta = \frac{10}{17}.$$

Uhol α je ostrý a jeho kosínus je číslo $\frac{10}{17}$, teda $\alpha = \arccos\frac{10}{17}$. Hodnotu $\arccos\frac{10}{17}$ vypočítame na kalkulačke

$$\alpha = \arccos\frac{10}{17} = 53{,}968...^\circ \approx 54^\circ.$$

Veľkosť β by sme mohli nájsť podobne ($\beta = \arcsin\frac{10}{17} = 36{,}031...^\circ \approx 36^\circ$), jednoduchšie však bude využiť poznatok, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°. Náš trojuholník je pravouhlý, preto $\alpha + \beta = 90^\circ$, a teda

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$$

V súvislosti s týmto výpočtom pripomeňme naše poznatky o počítaní so zaokrúhlenými číslami. Hodnota 90° bola presná, hodnota 54° zaokrúhlená na celé stupne, teda mala absolútnu chybu nanajvýš 0,5°. Absolútna chyba rozdielu nie je väčšia ako súčet absolútnych chýb, v tomto prípade teda nie je väčšia ako 0,5°. To znamená, že takto vypočítané číslo 36° je presná hodnota zaokrúhlená na celé stupne.

Po pripomenutí sínusu a kosínusu v pravouhlom trojuholníku bude naším cieľom rozšíriť definíciu sínusu a kosínusu na uhly väčšie ako 90°. Nasledujúci článok je motivačným úvodom k tomuto rozšíreniu – naznačuje jednu z možných odpovedí na otázku, aký zmysel má zavádzať sínus či kosínus pre uhly väčšie ako 90° či dokonca väčšie ako 180°. Čitateľ, ktorého takéto otázky netrápia, môže skoro celý článok 4.2 preskočiť: stačí mu chvíľu porozmýšľať o obrázku 11 na s. 87, ktorý ozrejmuje vzťah medzi sínusom, kosínusom a jednotkovou kružnicou, a potom hneď prejsť na obr. 15 na s. 90 a pokračovať úlohou 13. Aký-taký argument na zavedenie sínusu a kosínusu pre uhly väčšie ako 90° nájde v texte aj takýto „preskakujúci" čitateľ: vďaka rozšíreniu sínusu a kosínusu na uhly väčšie ako 90° sa zjednodušia zápisy niektorých dôležitých vzorcov, napr. kosínusovej vety, o ktorej budeme hovoriť v článku 4.4.

4.2 Sínus, kosínus a poloha bodu v rovine

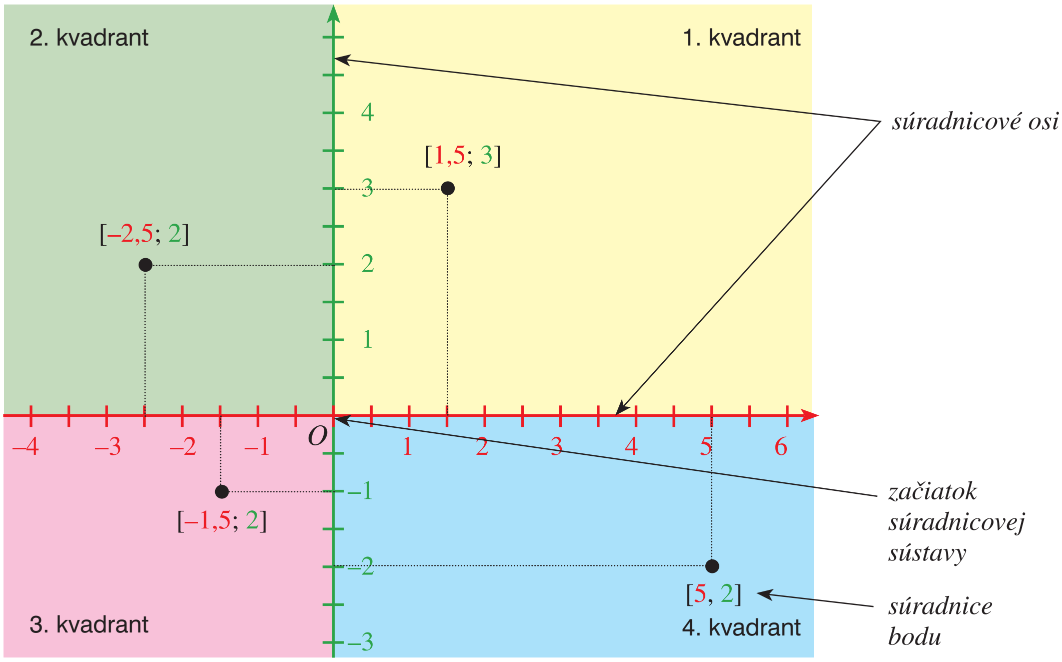
- Pravouhlé (karteziánske) súradnice
- Polárne súradnice
- Ako z polárnych súradníc bodu vypočítať jeho súradnice v pravouhlej súradnicovej sústave?
- Stačí sa obmedziť na jednotkovú kružnicu

Sú dva základné spôsoby, ako sa dá určiť poloha bodu v rovine: pomocou *pravouhlých* súradníc a pomocou *polárnych* súradníc.

PRAVOUHLÉ (KARTEZIÁNSKE) SÚRADNICE

V rovine zvolíme dve navzájom kolmé číselné osi s rovnakými jednotkami dĺžky. Ich priesečník určuje na každej z nich bod O. Tieto osi sa nazývajú **súradnicové osi** a spolu tvoria súradnicovú sústavu. Ich priesečník je **začiatok** (alebo **počiatok**) **súradnicovej sústavy**.
Polohu každého bodu roviny potom určuje dvojica čísel, ktorá sa nazýva jeho (pravouhlými alebo karteziánskymi) **súradnicami** (pozri obr. 4 na ďalšej strane). Ak má byť tento opis polohy jednoznačný, treba sa dohodnúť, ktorú súradnicovú os chápeme ako prvú a ktorú ako druhú. Súradnice bodu potom zapisujeme v tomto dohodnutom poradí. Spravidla sa v poradí ako prvá súradnicová os vyznačuje vodorovná (štandardné umiestnenie súradnicových osí je na obr. 4). Súradnicové osi rozdelia rovinu na štyri časti, ktoré sa nazývajú **kvadranty**.

pravouhlé (karteziánske) súradnice v rovine

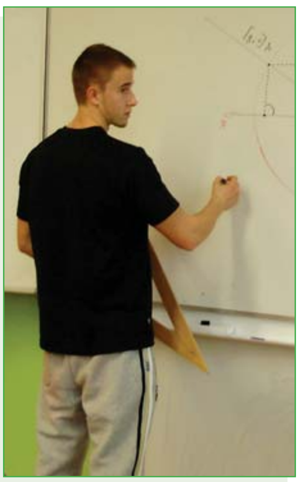


Obr. 4

Polohu bodu so súradnicami [1,5; 3] na obr. 4 môžeme voľne opísať takto:

[1,5; 3] = zo začiatku *O* najprv 1,5 doprava, potom 3 nahor

Pred ďalším možným opisom polohy bodu pomocou pravouhlých súradníc sa dohodnime, že prvú súradnicovú os označíme x a druhú y.
Súradnicovú sústavu so začiatkom O a súradnicovými osami x, y označíme Oxy.



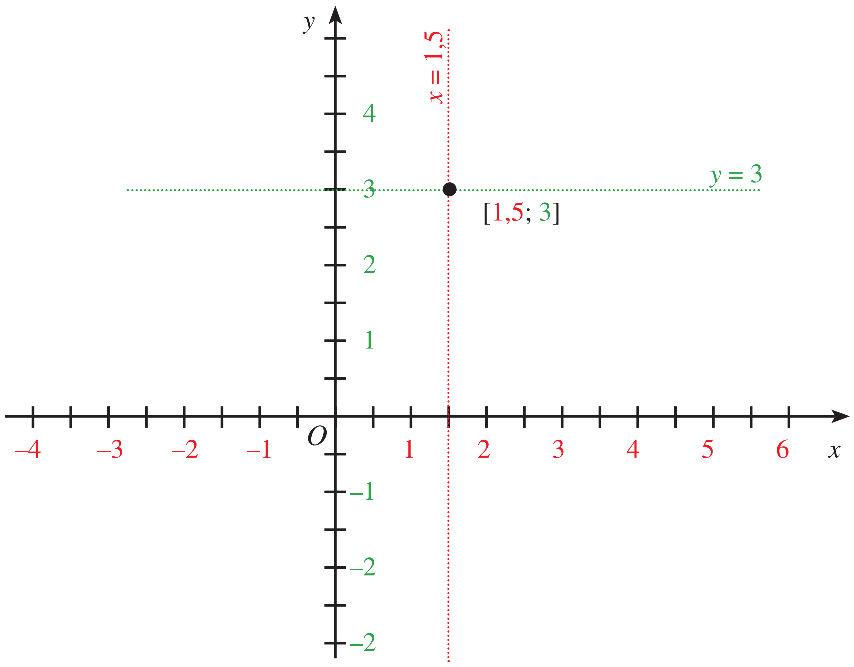
ÚLOHY

6. V súradnicovej sústave Oxy opíšte všetky body, ktorých prvá súradnica (x) je číslo 1,5.

7. V súradnicovej sústave Oxy opíšte všetky body, ktorých druhá súradnica (y) je číslo 3.

Pozrime sa teraz, ako „fungujú" pravouhlé súradnice. Bod so súradnicami [1,5; 3] nájdeme ako priesečník dvoch priamok (pozri obr. 5):

- Na prvej priamke ležia všetky body, ktorých prvá súradnica je 1,5. Táto priamka je rovnobežná s osou y a možno ju opísať podmienkou (rovnicou) $\boldsymbol{x = 1{,}5}$.
- Na druhej priamke ležia všetky body, ktorých druhá súradnica je 3. Táto priamka je rovnobežná s osou x a opisuje ju podmienka (rovnica) $\boldsymbol{y = 3}$.



Obr. 5
Bod s pravouhlými súradnicami [**1,5**; **3**] *nájdeme ako priesečník priamok* ***x* = 1,5** *a* ***y* = 3**.

POLÁRNE SÚRADNICE

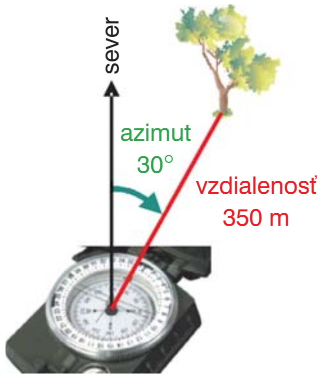
V rovine zvolíme polpriamku, ktorá sa nazýva **polárna os**, jej začiatočný bod *O* sa niekedy nazýva **pól**. Polohu každého bodu možno určiť vzdialenosťou od pólu a smerom (teda veľkosťou odklonu od polárnej osi). Napríklad polohu bodu *A* na obr. 6 na nasledujúcej strane by sme mohli opísať takto:

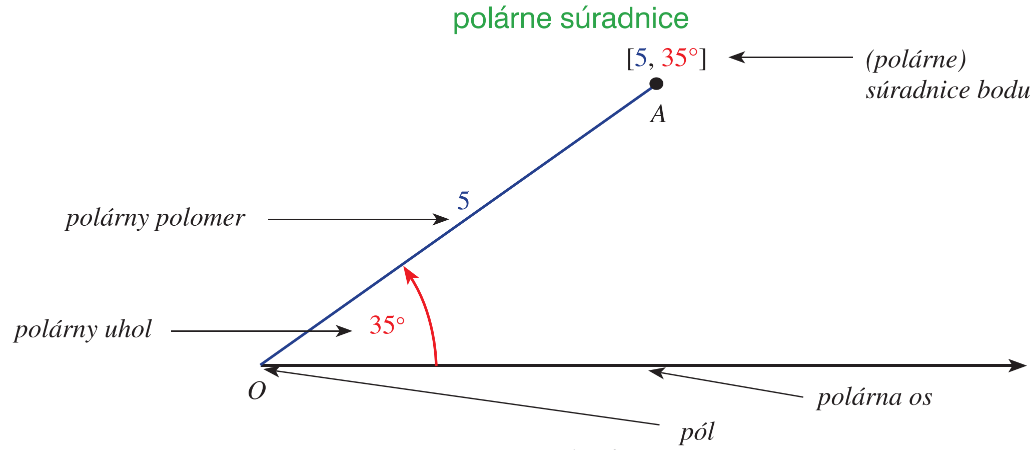
„z bodu *O* vidno bod *A* **35°** naľavo od osi vo vzdialenosti **5** od bodu *O*“ (*)

Vzdialenosť bodu *A* od pólu *O* sa nazýva **polárny polomer** bodu *A*. Veľkosť odklonu od polárnej osi sa nazýva **polárny uhol** bodu *A*. Je to uhol, o ktorý treba otočiť polárnu os proti smeru hodinových ručičiek okolo počiatku *O*, aby na nej ležal bod *A*. Dvojicu *polárny polomer bodu A – polárny uhol bodu A* nazývame **polárne súradnice** bodu *A*. Matematický zápis vety (*) je: bod *A* má polárne súradnice [5, 35°].

[5, 35°] = tento bod vidno z počiatku *O* 35° naľavo od polárnej osi vo vzdialenosti 5 od *O*

Na rovnakej myšlienke je založené určovanie polohy pomocou azimutu a vzdialenosti, s ktorým sa stretneme v turistike alebo v dnes populárnom geocachingu. Polárny uhol sa od azimutu odlišuje smerom merania uhla: azimut meriame v smere pohybu hodinových ručičiek, polárny uhol meriame v opačnom smere. Rozdiel je aj v polohe polárnej osi: smer na sever je na mapách spravidla zvislý, kým polárna os v matematike sa zväčša volí vodorovná.





Obr. 6

POLÁRNY POLOMER ZVYČAJNE OZNAČUJEME PÍSMENOM r, POLÁRNY UHOL PÍSMENOM φ (MALÉ GRÉCKE FÍ).

ÚLOHY

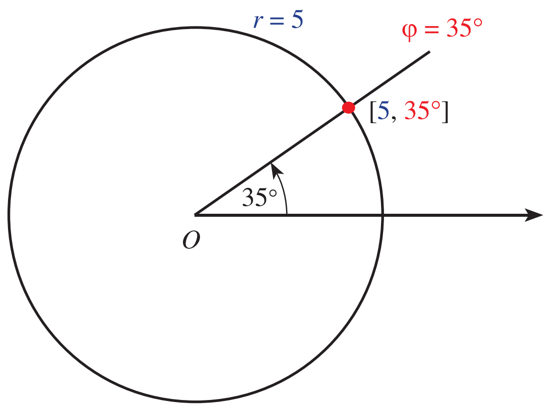
8. Opíšte všetky body, ktorých polárny polomer je 5.

9. Opíšte všetky body, ktorých polárny uhol je 35°.

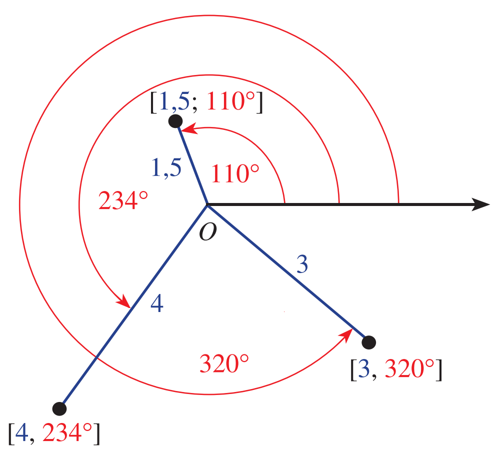
Polohu bodu pomocou pravouhlých súradníc sme opísali ako priesečník dvoch priamok (obr. 5). Podobne môžeme opísať polohu bodu pomocou polárnych súradníc. Ukážme si to na príklade bodu A z obr. 6.

- Všetky body, ktorých polárny polomer je 5, ležia na kružnici so stredom O a polomerom 5. Túto kružnicu opisuje v polárnych súradniciach podmienka (rovnica) $\boldsymbol{r = 5}$, pozri obr. 7.
- Všetky body, ktorých polárny uhol je 35°, ležia na polpriamke so začiatočným bodom O (dostaneme ju otočením polárnej osi okolo bodu O o 35° proti smeru hodinových ručičiek). Túto polpriamku opisuje v polárnych súradniciach podmienka (rovnica) $\boldsymbol{\varphi = 35°}$.

Bod s polárnymi súradnicami [**5**, **35**°] nájdeme ako priesečník kružnice $\boldsymbol{r = 5}$ a polpriamky $\boldsymbol{\varphi = 35°}$ (obr. 7).



Obr. 7
*Bod s polárnymi súradnicami [**5**, **35**°] nájdeme ako priesečník kružnice $\boldsymbol{r = 5}$ a polpriamky $\boldsymbol{\varphi = 35°}\varphi$.*

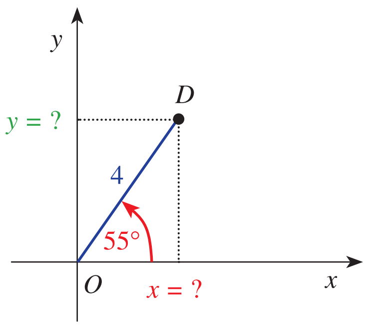


Obr. 8
Na tomto obrázku sme znázornili polárne súradnice ďalších troch bodov.

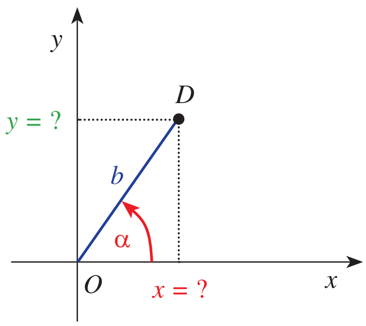
AKO Z POLÁRNYCH SÚRADNÍC BODU VYPOČÍTAŤ JEHO SÚRADNICE V PRAVOUHLEJ SÚRADNICOVEJ SÚSTAVE?

Ako uvidíme, vzťah medzi polárnymi a pravouhlými súradnicami súvisí so sínusom a kosínusom.

Pozrime sa na úlohu 10 všeobecnejšie. Chceme napísať vzorec na výpočet súradníc x, y bodu D, ktorý leží v prvom kvadrante (prvý kvadrant sme opísali na obr. 4 na s. 84) a poznáme jeho polárne súradnice $[b, \alpha]$, pozri obr. 10.
Z obr. 9 a 10 vidno, že za polárnu os volíme kladnú časť osi x.)



Obr. 9



Obr. 10

ÚLOHY

10. S presnosťou na dve desatinné miesta vypočítajte pravouhlé súradnice x, y bodu D na obr. 9.

11. Napíšte vzorec na výpočet pravouhlých súradníc $[x, y]$ bodu D na obr. 10.

RIEŠENIE

Odpoveď dáva trojuholník na obr. 3 a) na s. 81. Platí teda: ak bod D leží v prvom kvadrante a má polárne súradnice $[b, \alpha]$ (pozri obr. 10), tak jeho pravouhlé súradnice sú

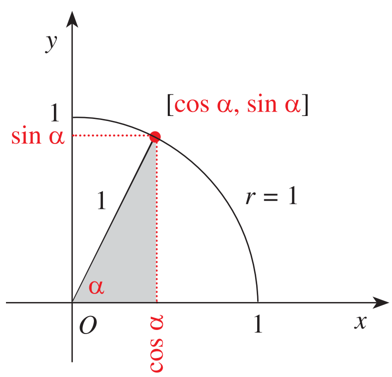
$$x = b \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha. \qquad (*)$$

Špeciálne, ak polárny polomer je $b = 1$ (teda D leží na kružnici s polomerom 1), tak pravouhlé súradnice bodu D sú

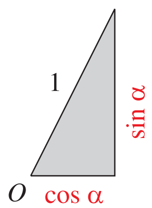
$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha \qquad (**)$$

pozri obr. 11 a). Na obr. 11 b) sme vyznačili dĺžky strán sivého trojuholníka.

a)



b)



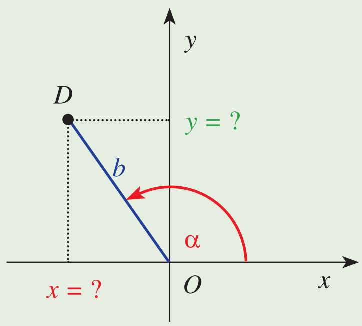
Obr. 11

Bod s polárnymi súradnicami $[1, \alpha]$ ležiaci v prvom kvadrante má pravouhlé súradnice $[\cos \alpha, \sin \alpha]$.

Riešme teraz rovnakú úlohu pre bod ležiaci v niektorom z ďalších troch kvadrantov (odporúčame rozdeliť sa v triede na tri skupiny, z ktorých každá bude riešiť úlohu v inom kvadrante). Hoci riešenie uvádzame v nasledujúcom texte, snažte sa vyriešiť úlohu najprv sami. Ak sa vám ťažko počíta všeobecne, skúste si za b a α najprv zvoliť nejaké konkrétne hodnoty (ako sme to urobili v úlohe 10), a až potom riešte so všeobecnými hodnotami b, α.

ÚLOHA

12. Napíšte vzorec na výpočet pravouhlých súradníc $[x, y]$ bodu D na obr. 12.



Obr. 12

RIEŠENIE

V ľavom stĺpci je riešenie pre všeobecný prípad, v pravom (pre väčšiu názornosť) pre konkrétne hodnoty $b = 6$, $\alpha = 130°$.
V sivom trojuholníku na obr. 13 poznáme dĺžku prepony b a veľkosť uhla β:

$\beta = 180° - \alpha$.	$\beta = 180° - 130° = 50°$.

Preto vieme vypočítať dĺžky odvesien:

- vodorovná odvesna má dĺžku

$b \cos \beta = b \cos (180° - \alpha)$	$6 \cdot \cos 50° = 3{,}856\,7...$

- zvislá odvesna má dĺžku

$b \sin \beta = b \sin (180° - \alpha)$	$6 \cdot \sin 50° = 4{,}596\,2...$

Vodorovná odvesna sivého trojuholníka určuje vzdialenosť x-ovej súradnice bodu D od začiatku súradnicovej sústavy Oxy. Podobne zvislá odvesna určuje vzdialenosť y-ovej súradnice bodu D od začiatku O. Bod D leží v druhom kvadrante, preto:

- jeho prvá súradnica x je záporné číslo, teda

$x = -b \cos (180° - \alpha)$,	$x = -3{,}856\,7...$

- jeho druhá súradnica y je kladné číslo, teda

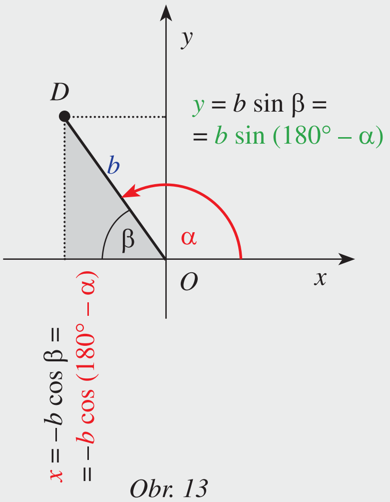
$y = b \sin (180° - \alpha)$	$y = 4{,}596\,2...$

Bod D má teda súradnice

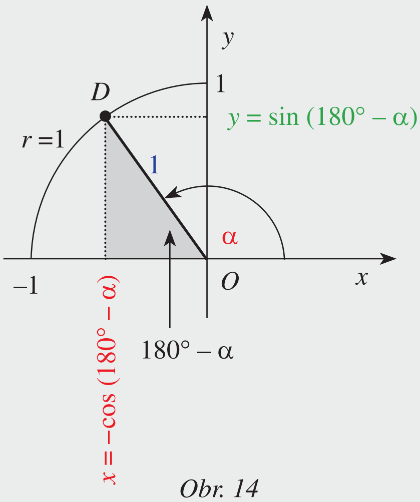
$$x = -b \cos (180° - \alpha),\ y = b \sin (180° - \alpha). \qquad \text{(A)}$$

Špeciálne, ak polárny polomer bodu D je $b = 1$ (teda bod D leží na kružnici s polomerom 1, obr. 14), tak bod D má súradnice

$$x = -\cos (180° - \alpha),\ \ y = \sin (180° - \alpha). \qquad \text{(B)}$$



Obr. 13



Obr. 14

STAČÍ SA OBMEDZIŤ NA JEDNOTKOVÚ KRUŽNICU

Z riešenia úloh 11 a 12 vidno, že vzorce na výpočet pravouhlých súradníc stačí nájsť pre tie body, ktorých polárny polomer je 1 (polárne súradnice týchto bodov majú teda tvar $[1, \alpha]$). Ak pravouhlé súradnice takéhoto bodu vynásobíme číslom b, dostaneme súradnice bodu, ktorý má rovnaký polárny uhol α a jeho polárny polomer je b.

Skontrolujte toto tvrdenie. V riešení úlohy 11 porovnajte zápisy (*) a (**) na s. 87, v riešení úlohy 12 porovnajte zápisy (A) a (B) na s. 88.

Matematicky vyjadrené: ak bod s polárnymi súradnicami $[1, \alpha]$ má pravouhlé súradnice $[x, y]$, tak bod s polárnymi súradnicami $[b, \alpha]$ má pravouhlé súradnice $[b \cdot x, b \cdot y]$. Preto sa v ďalších úvahách obmedzíme na body, ktorých polárny polomer je 1. Tieto body ležia na kružnici, ktorá sa nazýva **jednotková kružnica** (teda je to kružnica so stredom O a polomerom 1).

4.3 Sínus a kosínus pre uhly od 0° do 360°

V úlohách 11 a 12 sme zistili, že výpočet pravohlých súradníc bodu D v prvom aj v druhom kvadrante súvisí s hodnotami sínusu a kosínusu. Podobná situácia nastane aj v treťom a štvrtom kvadrante. Vzorce na výpočet súradníc bodu D, ktorý leží na jednotkovej kružnici, sú v nasledujúcej tabuľke.

Porovnajte vaše výsledky pre tretí a štvrtý kvadrant s tabuľkou 1.

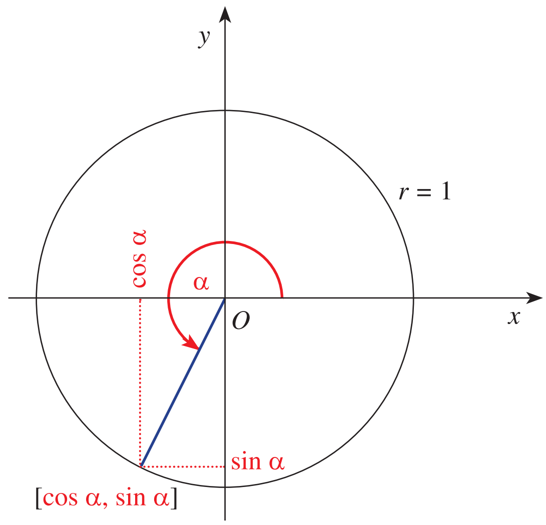
	bod D s polárnymi súradnicami $[1, \alpha]$ má pravouhlé súradnice	
prvý kvadrant, $\alpha \in (0°, 90°)$	$x = \cos \alpha$	$y = \sin \alpha$
druhý kvadrant, $\alpha \in (90°, 180°)$	$x = -\cos (180° - \alpha)$	$y = \sin (180° - \alpha)$
tretí kvadrant, $\alpha \in (180°, 270°)$	$x = -\cos (\alpha - 180°)$	$y = -\sin (\alpha - 180°)$
štvrtý kvadrant, $\alpha \in (270°, 360°)$	$x = \cos (360° - \alpha)$	$y = -\sin (360° - \alpha)$

Tabuľka 1

Prevod polárnych súradníc na pravouhlé pomocou tabuľky 1 má nevýhodu: treba vždy kontrolovať, v ktorom kvadrante leží bod D. Je to spôsobené tým, že hodnoty sínus a kosínus sú definované iba pre ostré uhly. Preto musíme v každom kvadrante vzorec zapísať tak, aby uhol, ktorého sínus a kosínus počítame, bol ostrý (skontrolujte, že v tabuľke skutočne používame iba sínusy a kosínusy uhlov od 0° do 90°).
Tento problém možno odstrániť, ak rozumne zavedieme hodnoty sínusu a kosínusu aj pre iné ako ostré uhly. Videli sme (obr. 11 na s. 87), že sínus a kosínus ostrého uhla možno opísať ako pravouhlé súradnice bodu ležiaceho na jednotkovej kružnici v prvom kvadrante. Nasledujúca definícia sínusu a kosínusu (obr. 15) je sformulovaná tak, aby táto vlastnosť platila aj v zvyšných troch kvadrantoch.

Rozšírená definícia sínusu a kosínusu

Najprv sa uistite, že rozumiete obrázku 11, až potom si prečítajte definíciu pod obr. 15.



Obr. 15
Definícia hodnôt sin α *a* cos α *pomocou jednotkovej kružnice.*

kosínus α (cos α) je x-ová súradnica bodu s polárnymi súradnicami [1, α],
sínus α (sin α) je jeho y-ová súradnica

Nasledujúcimi úlohami si precvičíme použitie rozšírenej definície sínusu a kosínusu.

ÚLOHY

13. Zistite, akú hodnotu majú podľa uvedenej definície:

a) sin 90° b) cos 90° c) sin 180° d) cos 180°
e) sin 270° f) cos 270° g) sin 0° h) cos 0°

14. Na výpočet nasledujúcich hodnôt použite rovnaké postupy ako v riešení úloh 10 až 12 (teda výpočet dĺžky odvesien vhodného pravouhlého trojuholníka):
a) sínus a kosínus 172°
b) sínus a kosínus 237°
c) sínus a kosínus 314°
Potom získané výsledky

- porovnajte s výsledkom, ktorý by ste dostali použitím vzorca z tabuľky 1,
- skontrolujte na vašej kalkulačke vypočítaním hodnôt sínusu a kosínusu uhlov 172°, 237° a 314°.

4.4 So sínusom a kosínusom zvládneme aj iné ako pravouhlé trojuholníky

- Sínus a vzorec na výpočet obsahu trojuholníka
- Kosínus a kosínusová veta

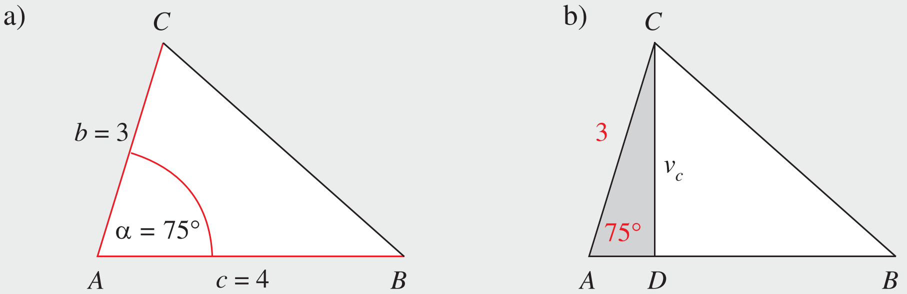
Hoci sme sínus aj kosínus pôvodne definovali pomocou pravouhlých trojuholníkov, pomôžu nám pri výpočtoch v ľubovoľnom trojuholníku. Ukážeme si to na dvoch dôležitých príkladoch: vzorci na výpočet obsahu trojuholníka a kosínusovej vete. V obidvoch prípadoch budeme predpokladať, že v trojuholníku poznáme dĺžky dvoch strán a veľkosť uhla, ktorý tieto strany zvierajú. Tieto vzorce budú tiež príležitosťou ukázať, ako sa vďaka rozšíreniu definície funkcií sínus a kosínus (pozri obr. 15) zjednodušia niektoré zápisy.

SÍNUS A VZOREC NA VÝPOČET OBSAHU TROJUHOLNÍKA

ÚLOHA

15. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, v ktorom $b = 3$, $c = 4$, $\alpha = 75°$.

RIEŠENIE



Obr. 16

Známe údaje sme vyznačili červenou farbou na obr. 16 a). Aby sme na výpočet obsahu P mohli použiť vzorec

$$P = \frac{1}{2} c \cdot v_c, \qquad (*)$$

potrebujeme vypočítať dĺžku výšky v_c (dĺžku c poznáme zo zadania). Vieme ju nájsť zo sivého pravouhlého trojuholníka ACD na obr. 16 b) (poznáme v ňom uhol $\alpha = 75°$ a dĺžku prepony $b = 3$).

V trojuholníku ACD platí

$$\sin 75° = \frac{v_c}{3},$$

preto

$$v_c = 3 \cdot \sin 75° = 3 \cdot 0{,}965\,9... = 2{,}897\,7...$$

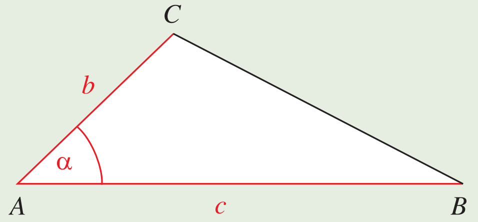
(hodnotu sin 75° sme vypočítali na kalkulačke).

Keď poznáme c a v_c, môžeme použiť vzorec (*):

$$P = \frac{1}{2} c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}897\,7... = 5{,}795\,5... \approx 5{,}80.$$

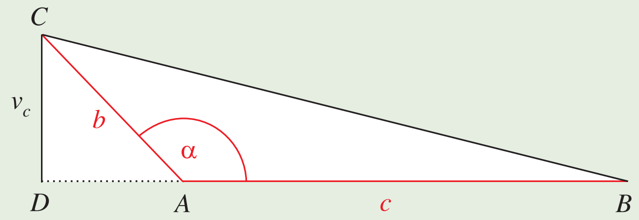
ÚLOHY

16. Napíšte vzorec na výpočet obsahu P trojuholníka, v ktorom poznáme dĺžky dvoch strán b, c a veľkosť ostrého uhla α, ktorý tieto dve strany zvierajú (známe veľkosti sú na obr. 17 zvýraznené červenou farbou).



Obr. 17

17. V predchádzajúcej úlohe sme predpokladali, že uhol α je ostrý. Pozrime sa teraz, aký vzorec dostaneme použitím podobného postupu v prípade, že uhol α bude tupý (pozri obr. 18).
Napíšte vzorec na výpočet obsahu P trojuholníka, v ktorom poznáme dĺžky dvoch strán b, c a veľkosť tupého uhla α, ktorý tieto dve strany zvierajú (pozri obr. 18).



Obr. 18

Ak ste pri riešení úloh 16 a 17 postupovali správne, dostali ste vzorce

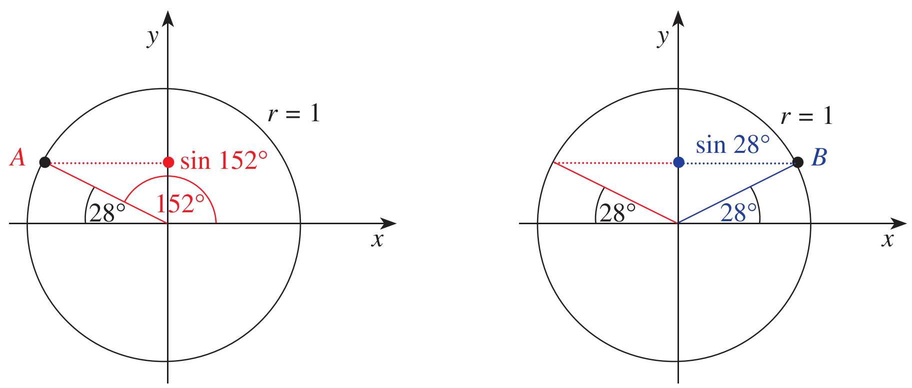
$$P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha, \quad P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin(180° - \alpha)\,,$$

prvý pre prípad ostrého uhla α, druhý pre prípad tupého uhla. Ukážeme teraz, že vďaka rozšírenej definícii sínusu z obr. 15 môžeme obidva tieto zápisy zlúčiť do jedného.
Z obr. 19 vidíme, že pre tupý uhol α platí

$$\sin \alpha = \sin(180° - \alpha)$$

(na obr. 19 a) sme túto rovnosť znázornili pre konkrétny uhol α = 152°).

Rovnosť $\sin \alpha = \sin(180° - \alpha)$ vyplýva z riešenia úlohy 12 (pozri obr. 14 na s. 89), tam sme však ešte uvažovali „v reči“ pravouhlých trojuholníkov. Preto ju zdôvodňujeme ešte raz, teraz už na základe rozšírenej definície sínusu z obr. 15. Dôkaz znázornený na obr. 19 je súčasne ukážkou štandardných úvah o sínuse a kosínuse využívajúcich jednotkovú kružnicu (znovu ich využijeme napr. pri riešení úlohy 21 alebo 25).

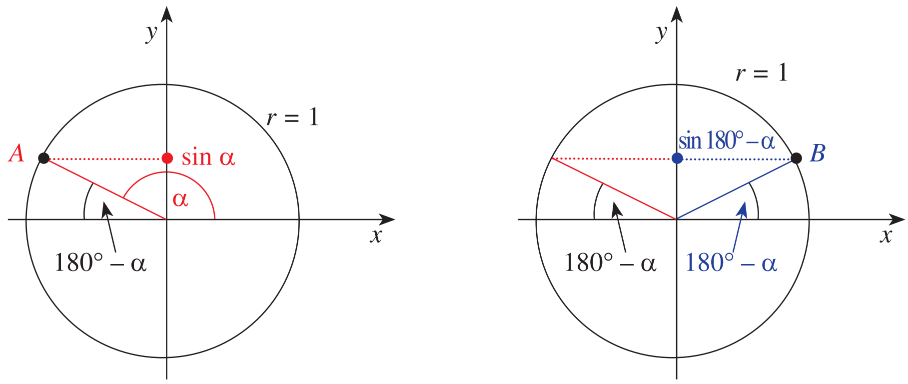


Obr. 19 a)

Podľa rozšírenej definície sínusu je sin 152° y-ová súradnica bodu A. Túto hodnotu sme na osi y vyznačili červenou farbou.

Hodnota sin 28° (číslo 28° sme dostali ako rozdiel 180° – 152°) je y-ová súradnica bodu B, na osi y sme ju vyznačili modrou farbou.

Body A a B majú rovnakú y-ovú súradnicu, preto sin 152° = sin 28°.



Obr. 19 b)
Rovnosť $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ *platí pre každý tupý uhol* α.
(Táto rovnosť platí aj pre iné ako tupé uhly, zatiaľ ju však potrebujeme len pre tie tupé.)

(pozri obr. 19 b))	napr. pre $\alpha = 152°$ (pozri obr. 19 a))
Preto vzorec $$P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin(180° - \alpha)$$ na výpočet obsahu trojuholníka, v ktorom strany b, c zvierajú tupý uhol α,	Vzorec $$P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin(180° - 152°) =$$ $$= \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin 28°$$
môžeme napísať aj takto $$P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha$$	môžeme napísať aj takto $$P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin 152°$$

Willebrord Snellius
(1580 – 1626)
holandský matematik

Vzorec pre obsah trojuholníka, v ktorom poznáme dve strany a uhol nimi zovretý, sformuloval v r. 1627 W. Snellius. Jeho náznaky však nájdeme už v prácach perzského matematika Džamšída Ghijátha ad-Dína al-Kášího a Regiomontana.

Obidva zápisy $\sin 28°$ aj $\sin 152°$ označujú to isté číslo 0,469 471 562 785... . Je teda jedno, ktorý z dvoch zápisov $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin 152°$ alebo $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin 28°$ použijeme pri výpočte. Výsledok bude stále rovnaký. Prirodzenejšie však je používať zápis $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin 152°$, pretože sa v ňom vyskytuje tá veľkosť uhla, ktorý strany b, c skutočne zvierajú.

Vzorec $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha$ má rovnakú podobu ako vzorec pre ostrý uhol α z úlohy 16. Je teda pravda, čo sme sľubovali: obidva vzorce na výpočet obsahu trojuholníka pomocou dĺžok dvoch strán b, c a veľkosti uhla α nimi zovretého môžeme zlúčiť do jedného zápisu

$$P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

V našich doterajších úvahách sme hovorili o ostrých a tupých uhloch. Ak si chceme byť istí, že vzorec $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha$ možno použiť na výpočet obsahu trojuholníka pre lubovolný uhol medzi 0° a 180°, mali by sme ešte skontrolovať jeho správnosť pre uhol $\alpha = 90°$.

ÚLOHA

18. Skontrolujte, či vzorec $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha$ platí aj v prípade $\alpha = 90°$.

Džamšíd Ghijáth ad-Dína al-Káší
(okolo 1380 – 1429)
perzský matematik

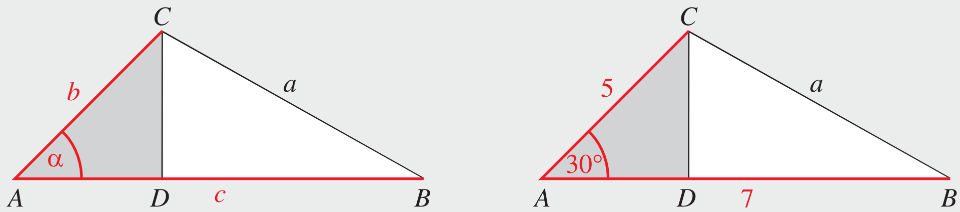
KOSÍNUS A KOSÍNUSOVÁ VETA

ÚLOHA

19. Vypočítajte dĺžku tretej strany a trojuholníka, v ktorom poznáme dĺžky dvoch strán b, c a veľkosť ostrého uhla α, ktorý tieto dve strany zvierajú.

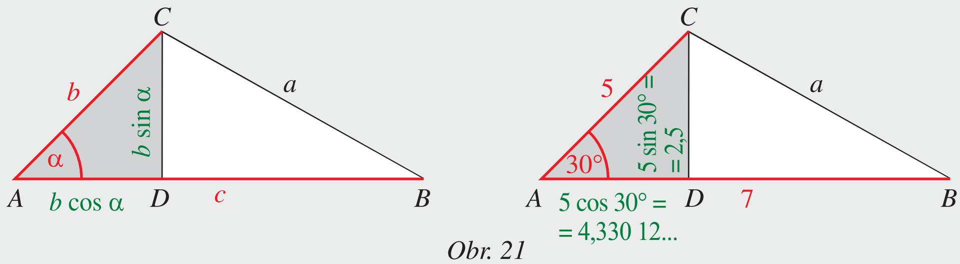
RIEŠENIE

Postup výpočtu je na obr. 20 – 22, na obrázkoch vľavo pre všeobecný prípad (teda s premennými b, c, α), na obrázkoch vpravo pre konkrétne hodnoty $b = 5$, $c = 7$, $\alpha = 30°$. Hodnoty, ktoré poznáme, sú na obr. 20 zvýraznené červenou farbou.



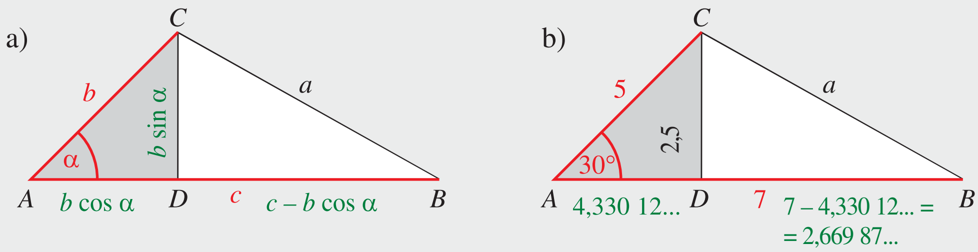
Obr. 20

V sivom pravouhlom trojuholníku ACD poznáme preponu b a uhol α, preto vieme vypočítať dĺžky obidvoch odvesien (obr. 21).



Obr. 21

Zo známej dĺžky AB a z dĺžky AD, ktorú sme práve vypočítali, vieme nájsť dĺžku BD: $|BD| = c - |AD|$ (obr. 22). V pravouhlom trojuholníku BCD (na obrázkoch je biely) teraz poznáme dĺžky obidvoch odvesien. Dĺžku prepony nájdeme použitím Pytagorovej vety:



$a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2$

$a^2 = 2{,}5^2 + 2{,}669\,87...^2 = 13{,}378\,22...$

odtiaľ $a = \sqrt{13{,}378\,22...} = 3{,}657...$

Obr. 22

Výsledok $a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2$, ktorý sme dostali na obr. 22 a), sa dá upraviť do jednoduchšej podoby. Pri úprave budeme potrebovať

- vzorec $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$,

  ktorý použijeme pri roznásobení výrazu $(c - b \cdot \cos\alpha)^2$:

  $$(c - b\cos\alpha)^2 = c^2 - 2\,c\,b\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$

  (pripomeňme, že symbol $\cos^2\alpha$ označuje číslo $(\cos\alpha)^2$),

- a rovnosť $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (zdôvodňovali sme ju v úlohe 2).
  Takto postupne dostaneme

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 = \boxed{b^2\sin^2\alpha} + c^2 - 2cb\cos\alpha + \boxed{b^2\cos^2\alpha} =$$
$$= \boxed{b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} + c^2 - 2cb\cos\alpha = \boxed{b^2} + c^2 - 2cb\cos\alpha$$

teda

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(Jednotlivé kroky predchádzajúcej úpravy si dobre premyslite.)
Rovnosť, ktorú sme dostali, sa nazýva **kosínusová veta**.

Rámikmi sme upozornili, že súčtom členov $b^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$ dostaneme výsledok b^2.

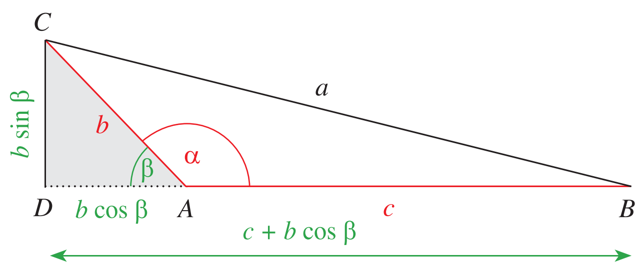
ÚLOHA

20. Podobne ako v úlohe 17, pozrime sa teraz na prípad, ak je uhol α tupý.
V trojuholníku, v ktorom poznáme dĺžky dvoch strán b, c a veľkosť tupého uhla α, ktorý tieto dve strany zvierajú, vypočítajte dĺžku tretej strany a.

Ak ste nikde nespravili chybu, dostali ste vzorec

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \alpha) \qquad (*)$$

(pozri obr. 23, pre uhol β platí $\beta = 180° - \alpha$).



Obr. 23

Podobne, ako pri výpočte obsahu trojuholníka v úlohách 16 a 17, dostali sme v úlohách 19 a 20 dva vzorce – dva tvary *kosínusovej vety*:

pre ostrý uhol α	pre tupý uhol α
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \alpha)$

Aj v tomto prípade môžeme, vďaka rozšíreniu definície kosínusu z ostrých uhlov na všetky uhly medzi 0° a 360°, obidva vzorce zlúčiť do jedného zápisu. Zdôvodnenie tejto spoločnej podoby kosínusovej vety už prenecháme vám.

ÚLOHY

21. Podobnými úvahami, aké sme použili pred úlohou 18 na s. 92 – 93 skontrolujte, že obidva uvedené zápisy možno zlúčiť do spoločnej podoby:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

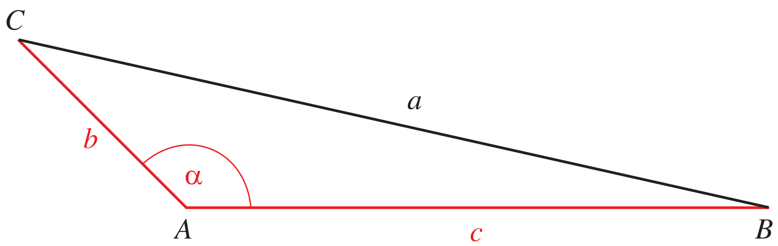
22. Skontrolujte, že rovnosť $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ platí aj pre $\alpha = 90°$.

François Viète
(1540 – 1603),
francúzsky matematik

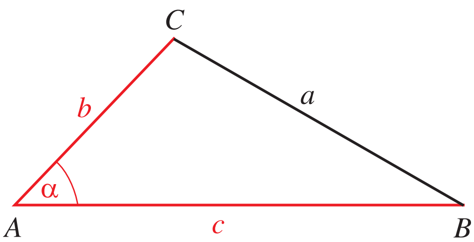
V druhej knihe Euklidových Základov nájdeme podobné tvrdenie sformulované však bez použitia goniometrických funkcií – tie v dobe vzniku Základov (okolo 300 pred n. l.) ešte neexistovali. Za prvého, kto sformuloval kosínusovú vetu, sa spravidla pokladá al-Káší. Dnešnú podobu jej dal až F. Viète.

obsah trojuholníka: $P = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$

kosínusová veta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$



Obr. 24 a)



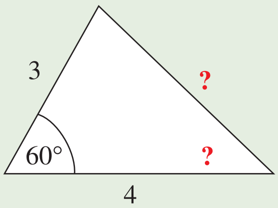
Obr. 24 b)

KEĎ SME UŽ KOSÍNUSOVÚ VETU DOKÁZALI, BOLA BY ŠKODA NEUKÁZAŤ JEJ POUŽITIE. PREDVEDIEME SI VÝPOČTY, V KTORÝCH SA VYSKYTNÚ AJ KOSÍNUSY INÝCH AKO OSTRÝCH UHLOV A UKÁŽEME, ČO VŠETKO SA DÁ ZÍSKAŤ Z JEDNÉHO VZORCA.

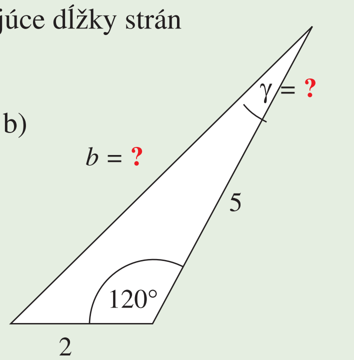
ÚLOHA

23. Pomocou kosínusovej vety vypočítajte chýbajúce dĺžky strán a veľkosti uhlov zobrazených trojuholníkov.

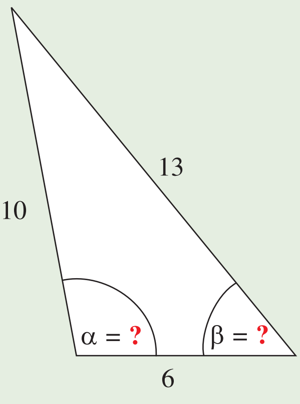
a)



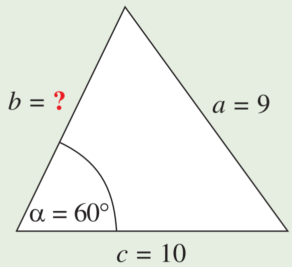
b)



c)



d)



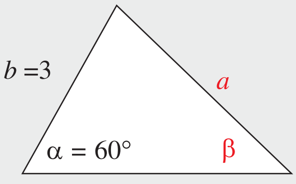
RIEŠENIE ÚLOHY 23 a)

Výpočet dĺžky strany

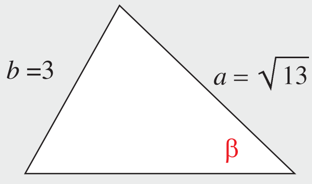
Na výpočet dĺžky strany a (označenie pozri na obr. 25) stačí dosadiť do kosínusovej vety

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60° = 25 - 24 \cdot 0{,}5 = 13.$$

Dostaneme $a^2 = 13$, odtiaľ $a = \sqrt{13} = 3{,}605\ 551... \approx 3{,}61$.



Obr. 25



Obr. 26

Rovnica $a^2 = 13$ má dve riešenia $a = \pm\sqrt{13}$. Keďže hľadaná dĺžka a je iste kladné číslo, nás zaujíma iba kladný výsledok $a = \sqrt{13}$.

Výpočet uhla

Kosínusová veta vyjadruje stranu trojuholníka pomocou zvyšných dvoch strán a uhla nimi zovretého. Dĺžku strany b (obr. 26) možno teda vyjadriť pomocou dĺžok strán a, c a veľkosti uhla β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cos \beta \qquad (*)$$

(dobre si túto rovnosť rozmyslite). Zo štyroch hodnôt (a, b, c, β), ktoré sú v tejto rovnosti, poznáme tri (a, b, c). Ak ich dosadíme do (*), dostaneme rovnosť

$$3^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4 \cos \beta, \quad \text{t. j.} \quad 9 = 29 - 8\sqrt{13} \cos \beta,$$

z ktorej vieme vypočítať kosínus uhla β

$$8\sqrt{13} \cos \beta = 20, \qquad \text{odtiaľ} \qquad \cos \beta = \frac{20}{8\sqrt{13}} = 0{,}693\ 375...$$

Uhol medzi 0° a 180°, ktorého kosínus je 0,693 375..., nájdeme na kalkulačke (zistite, ako sa tento uhol počíta na vašej kalkulačke a porovnajte váš výsledok s naším)

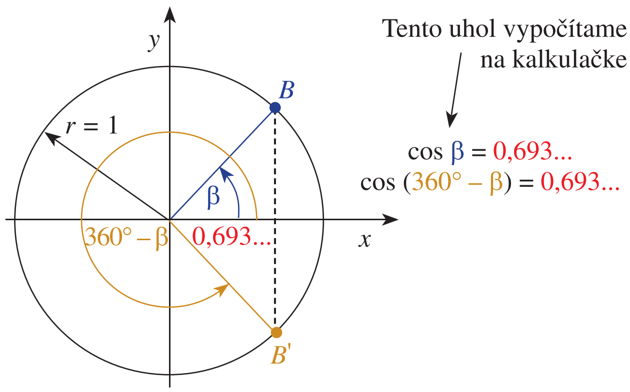
$$\beta = 46{,}102\ 113\ ...° \approx 46°.$$

Kalkulačka a hľadanie uhla, ktorého kosínus poznáme

Z obr. 27 vidno, že na jednotkovej kružnici sú dva body, ktorých prvá súradnica je číslo x = **0,693 375...** . Jednému (na obrázku bod B) *zodpovedá uhol* β, *ktorý sme vypočítali v riešení úlohy 23 a).* Druhý (na obrázku bod B') je s bodom B súmerný podľa osi x. Uhol prislúchajúci bodu B' je 360° – β (je vám jasný výpočet jeho veľkosti?).

Takáto situácia nastáva pre každú hodnotu a z intervalu (–1, 1): na jednotkovej kružnici existujú dva body, ktorých x-ová súradnica – predstavujúca kosínus – je daná hodnota a. Jeden bod leží nad osou x, druhý pod ňou (nakreslite si obrázok, skontrolujte tiež, že pre každú z hodnôt $a = 1$ a $a = -1$ existuje iba jeden taký bod). Kalkulačka k danej hodnote a – teda k hodnote kosínusu – vypočíta uhol, ktorý zodpovedá bodu ležiacemu nad osou x. Tento uhol je medzi 0° a 180° – je ostrý, ak číslo a bolo kladné, a tupý, ak bolo záporné (tvrdenie o ostrých a tupých uhloch si rozmyslite a overte ho niekoľkými výpočtami na vašej kalkulačke).

Uhly v trojuholníku majú veľkosti medzi 0° a 180°, preto nám v riešení úlohy 23 stačí ten uhol, ktorého veľkosť nájdeme na kalkulačke (ako uvidíme v úlohe 35, v prípade sínusu je situácia odlišná).



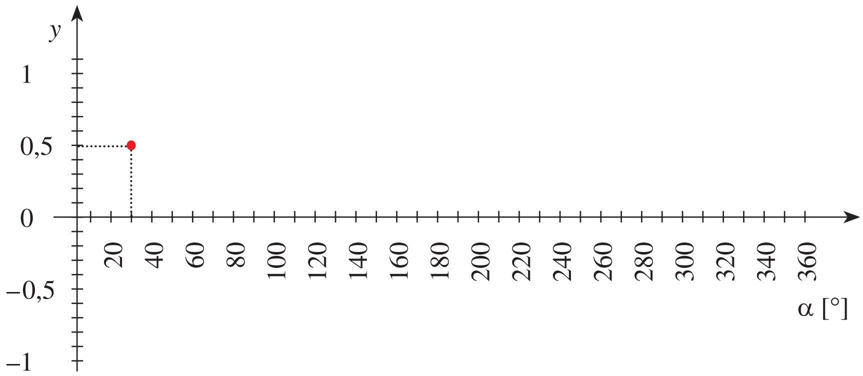
Obr. 27

Pre každú hodnotu a z intervalu (–1, 1) existujú na jednotkovej kružnici dva body, ktorých x-ová súradnica – predstavujúca kosínus – je a (na obrázku a = 0,693...). Výpočtom na kalkulačke nájdeme iba uhol β.

4.5 Grafy funkcií sínus a kosínus pre uhly od 0° do 360°

Podľa rozšírenej definície sínusu (obr. 15 na s. 90) môžeme každej veľkosti uhla α od 0° do 360° priradiť číslo $\sin \alpha$. Pripomeňme, že predpis, ktorý hodnotám premennej (v našom prípade je premennou veľkosť uhla α) priraďuje čísla (v našom prípade číslo $\sin \alpha$), sa v matematike nazýva funkcia. Preto o predpise, ktorý hodnote α priradí číslo $\sin \alpha$, budeme hovoriť ako o **funkcii sínus**. V tomto odseku nás bude zaujímať, ako vyzerá graf funkcie $y = \sin \alpha$.

Pripomeňme najprv, ako sa grafom funkcie znázorňujú jej hodnoty. Napríklad pre $\alpha = 30°$ sa $\sin \alpha = 0{,}5$. Túto informáciu znázorňuje červený bod na obr. 28. Číslo 0,5 sa nazýva *funkčná hodnota v bode 30*. Červený bod je jeden bod grafu funkcie sínus. Celý graf dostaneme, ak týmto spôsobom znázorníme hodnoty sínusu pre všetky uhly medzi 0° a 360°.



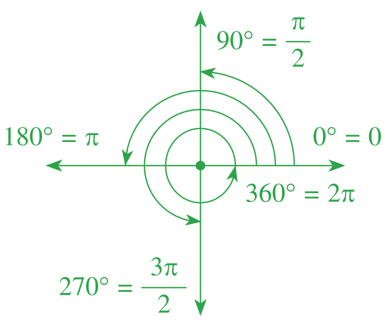
Obr. 28

ÚLOHA

24. Znázornite takto hodnoty $\sin 10°$, $\sin 50°$, $\sin 70°$ a $\sin 90°$.

Pri zobrazení ďalších bodov grafu si už pomôžeme tabuľkovým kalkulátorom alebo grafickou kalkulačkou.

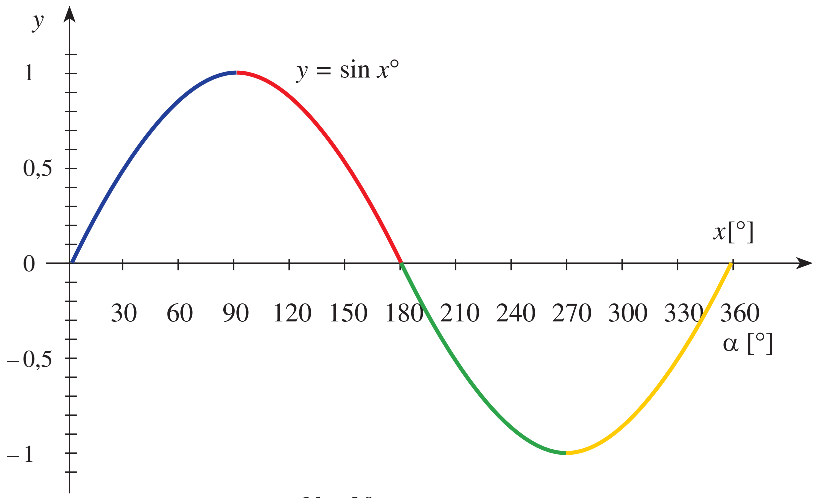
Radiány



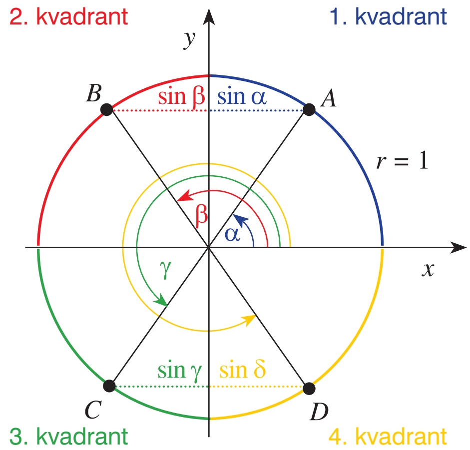
Vo vyššej matematike (za hranicami stredoškolskej matematiky) sa na vyjadrenie veľkosti uhla namiesto stupňov používajú radiány. Pri meraní v radiánoch vyjadrujeme veľkosť uhla dĺžkou príslušného oblúka jednotkovej kružnice. Teda napr. veľkosť uhla 360° v radiánoch vyjadruje číslo 2π (dĺžka kružnice s polomerom 1), pravý uhol má v radiánoch veľkosť $\frac{\pi}{2}$.

Prečo radiány? Pretože niektoré vzťahy medzi funkciami sínus a kosínus majú vtedy jednoduchšiu podobu. Preto aj označenie sin a cos sa vo vyššej matematike používa iba pre funkcie, v ktorých pracujeme s veľkosťou uhlov v radiánoch. Aby sme odlíšili tieto funkcie od funkcií používajúcich veľkosti uhlov v stupňoch, ktoré sú v tomto texte, budeme za znak premennej x písať označenie ° (stupeň).

Na obr. 29 je graf funkcie $y = \sin x°$ pre uhly od 0° do 360° nakreslený pomocou tabuľkového kalkulátora (zostrojte ho aj vy, vytlačený obrázok budete potrebovať v nasledujúcich úlohách). Tento graf sa nazýva *sínusoida*. Farebne sme odlíšili časti zodpovedajúce jednotlivým kvadrantom (označenie kvadrantov pripomíname na obr. 30).



Obr. 29



Obr. 30

Na obr. 29 vidno, že štyri farebne odlíšené časti majú rovnaký tvar, len sú rôzne otočené alebo preklopené. Nie je to náhoda, vyplýva to zo súmerností, ktoré súvisia s definíciou sínusu na jednotkovej kružnici. Jednu takú súmernosť sme znázornili už na obr. 19 b), ďalšie sú na obr. 30.

So súmernosťami znázornenými na obr. 30 sme sa už stretli pri riešení úloh z článku na s. 87 Ako z polárnych súradníc bodu vypočítať jeho súradnice v pravouhlej súradnicovej sústave? Výsledkom našich úvah boli vzťahy uvedené v tabuľke 1, ktoré sme vtedy – ešte pred rozšírením definície sínusu a kosínusu na uhly väčšie ako 90° – odvodzovali pomocou pravouhlých trojuholníkov. Z obrázka 30 vidno, ako sa takéto vzorce dajú odvodiť z definície sínusu a kosínusu pomocou jednotkovej kružnice. Napríklad, pre $\alpha \in (0°, 90°)$ vyplývajú zo vzťahov medzi súradnicami bodov *B* a *A* , *C* a *A*, *D* a *A* v tomto poradí rovnosti

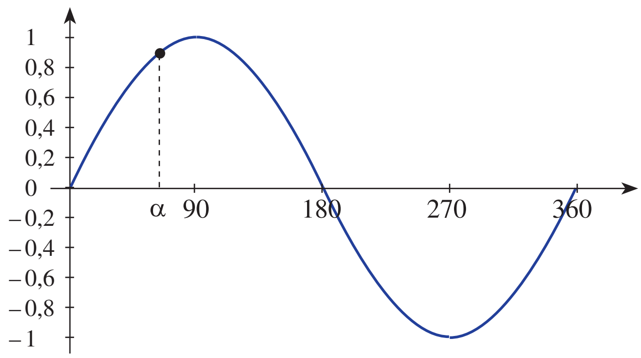
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$, $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Podobne napr. vzťah medzi súradnicami bodov *C* a *B* možno použiť pri zdôvodnení rovnosti

$\sin\gamma = -\sin(360° - \gamma)$ pre $\gamma \in (180°, 270°)$.

V úlohách 26 a 27 uvidíme, ako takéto vzťahy súvisia s grafom funkcie sínus.

Na obr. 30 sú znázornené sínusy štyroch uhlov (α, β, γ, δ). Bod *A* je súmerný s bodom *B* podľa osi *y*, takisto bod *C* s bodom *D*. Bod *A* je okrem toho súmerný s bodom *D* podľa osi *x*. Na nasledujúcom grafe sme vyznačili bod zodpovedajúci sínusu uhla α.



ÚLOHA

25. Vyznačte na grafe body zodpovedajúce sínusom zvyšných troch uhlov z obr. 30.

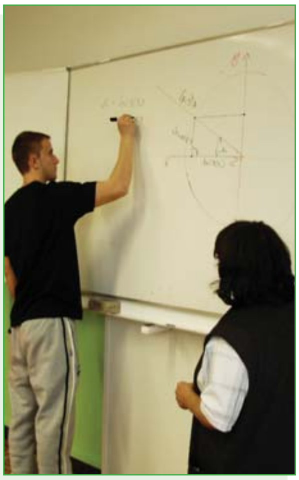
Ak vám úloha v tejto abstraktnej podobe pôsobí ťažkosti, riešte ju najprv pre konkrétnu veľkosť uhla $\alpha = 55°$ (teda vypočítajte veľkosti β, γ, δ a vyznačte príslušné hodnoty na grafe funkcie sínus).

ÚLOHY

26. Diskutujte o tom, aký je súvis medzi
a) • polohou hodnôt α a β na vodorovnej osi, • hodnotami sin β a sin α,
b) • polohou hodnôt γ a δ na vodorovnej osi, • hodnotami sin δ a sin γ,
c) • polohou hodnôt γ a β na vodorovnej osi, • hodnotami sin γ a sin β.
Svoje tvrdenia zdôvodnite.

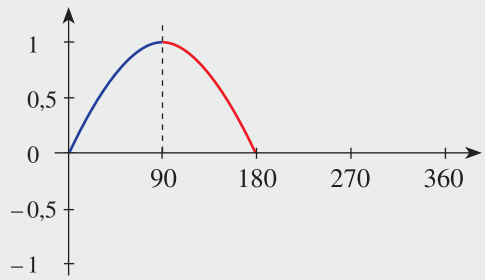
27. Na základe riešenia úlohy 26 opíšte vzťah medzi
- modrou a červenou časťou sínusoidy na obr. 29,
- zelenou a žltou časťou tohto grafu,
- červenou a zelenou časťou grafu.

O svojich tvrdeniach diskutujte so spolužiakmi.

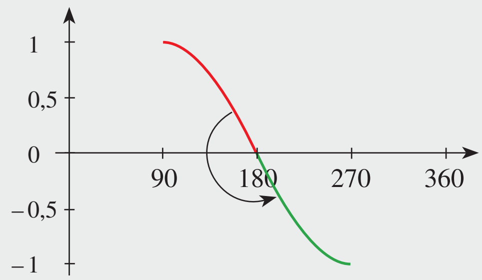


RIEŠENIE

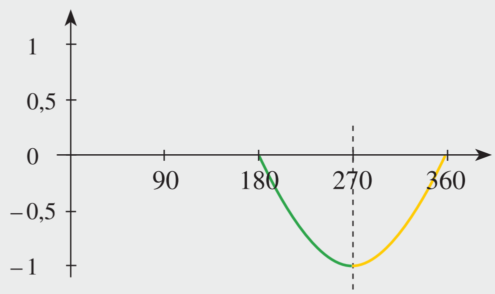
Ak ste diskusii o riešení úloh 25 a 26 venovali dostatočný čas, mali by ste zistiť, že
- modrá a červená časť sínusoidy sú súmerné podľa priamky, ktorá na osi x prechádza hodnotou 90 a je rovnobežná s osou y (obr. 31),
  Na osi súmernosti (na obr. 31 vyznačená čiarkovane) ležia všetky body, ktorých prvá súradnica je 90. Preto možno túto priamku opísať podmienkou (rovnicou) $x = 90$.
- podobne zelená a oranžová časť sínusoidy sú súmerné podľa priamky, ktorá na vodorovnej osi prechádza hodnotou 270 a je rovnobežná s osou y (obr. 33, os súmernosti možno opísať rovnicou $x = 270$),
- zelenú časť sínusoidy dostaneme, ak červenú časť otočíme o 180° okolo bodu, ktorý na osi x označuje hodnotu 180 (obr. 32).



Obr. 31

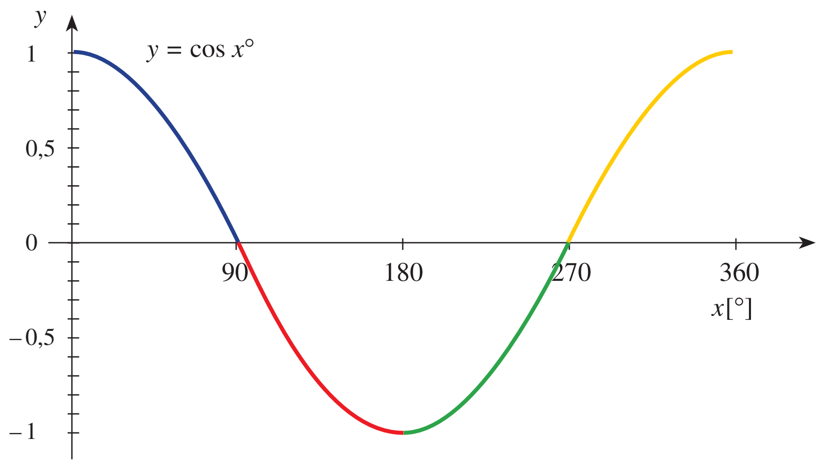


Obr. 32



Obr. 33

Na obr. 34 je graf funkcie $y = \cos x°$ (táto krivka sa nazýva *kosínusoida*) pre uhly medzi 0° a 360°. Rovnako ako na obr. 29 sme farebne vyznačili časti grafu zodpovedajúce jednotlivým kvadrantom.



Obr. 34

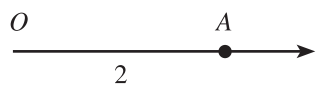
ÚLOHY

28. Podobne, ako v úlohách 25 až 27 opíšte a zdôvodnite vzťah medzi jednotlivými časťami grafu na obr. 34.

29. Modrá časť kosínusoidy na obr. 34 má rovnaký tvar ako červená časť sínusoidy na obr. 29. Pokúste sa nájsť zdôvodnenie tohto tvrdenia.

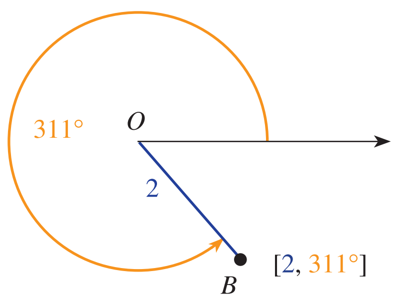
4.6 Uhly väčšie ako 360° a uhly so zápornou veľkosťou

Vráťme sa k definícii polárnych súradníc. Označme bod, ktorý na polárnej osi označuje hodnotu 2, písmenom A (obr. 35).

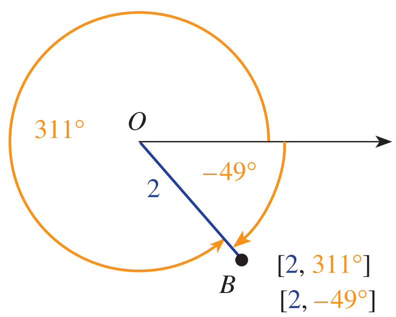


Obr. 35

Bod B s polárnymi súradnicami $r = 2$, $\varphi = 311°$ dostaneme, ak bod A otočíme okolo pólu O o 311° *proti smeru* hodinových ručičiek (obr. 36).



Obr. 36



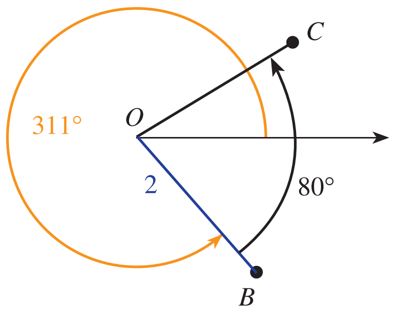
Obr. 37

Ten istý bod by sme dostali, keby sme bod A otočili okolo pólu O o 49° *v smere* hodinových ručičiek (obr. 37, číslo 49 je rozdiel 360 – 311).

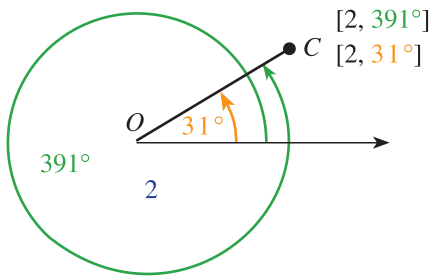
Polohu bodu B by sme teda mohli opísať aj údajmi $r = 2$, $\varphi = -49°$, kde znamienko *mínus* vo veľkosti uhla označuje *otáčanie opačným smerom*, teda *v smere* hodinových ručičiek.

Podobne možno zdôvodniť aj použitie uhlov väčších ako 360°. Ak bod B s polárnymi súradnicami $r = 2$, $\varphi = 311°$ otočíme okolo pólu O o 80° v smere hodinových ručičiek, dostaneme bod C (obr. 38). Jeho polohu môžeme opísať údajmi $r = 2$, $\varphi = 391°$ (číslo 391 je súčet 311 + 80). Tento bod je totožný s bodom, ktorý má polárne súradnice $r = 2$, $\varphi = 31°$ (obr. 39, číslo 31 je rozdiel 391 – 360).

Je rozdiel, či pri zaťahovaní skrutky urobíme pol otáčky alebo 1,5 otáčky. Prvej možnosti zodpovedá uhol 180°, druhej 180° + 360° = 540°.

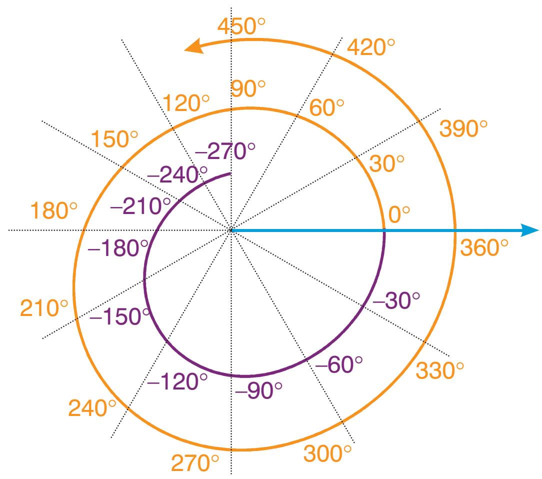


Obr. 38



Obr. 39

Definíciu sínusu a kosínusu pomocou jednotkovej kružnice (obr. 15 na s. 90) môžeme rozšíriť aj na záporné uhly a uhly väčšie ako 360°. Teda napr. sin (–210°) je y-ová súradnica bodu, ktorý má polárne súradnice $r = 1$, $\varphi = –210°$.
Tak dosiahneme, že hodnoty sin $x°$ a cos $x°$ budú definované pre ľubovoľné číslo x. Definičný obor funkcií sin a cos budú teda tvoriť všetky reálne čísla.

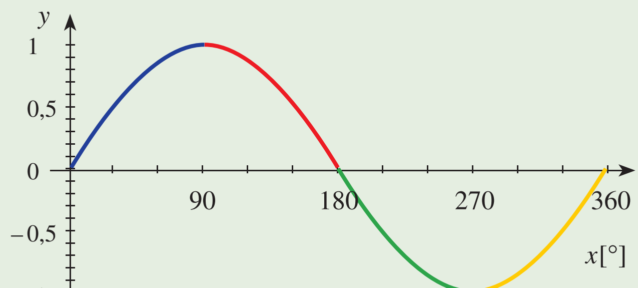


Obr. 40
Všimnite si, že zavedením záporných veľkostí uhla a uhlov väčších ako 360° sme dosiahli, že čísla určujúce veľkosť otočenia sa správajú ako čísla na číselnej osi.

Obr. 40 nám pomôže pri kreslení grafu sínusu pre uhly, ktorých veľkosti neležia medzi 0° a 360°.

ÚLOHA

30. V tabuľke doplňte farbu príslušnej časti sínusoidy z obr. 41.



Obr. 41

Pre uhly, ktorých veľkosť je			
od 360° do 450°	od –90° do 0°	od –270° do –180°	od 540° do 630°
bude mať graf sínusu rovnaký tvar ako			
modrá			
časť grafu na obr. 41.			

Svoje odpovede zdôvodnite.

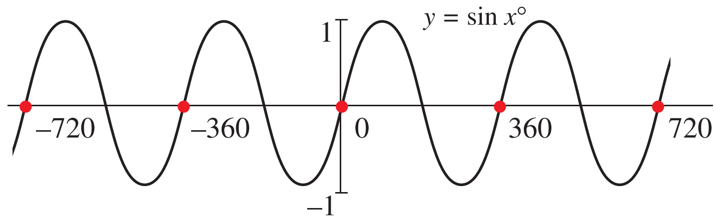
Ruské kolo v Melbourne

S pohybom po kružnici súvisí aj populárna interpretácia sínusoidy: ak sedíme na ruskom kolese, tak funkcia, znázorňujúca závislosť našej výšky (nad stredom kolesa) od uhla otočenia, má tvar sínusoidy. Rozmyslite si to, pomôcť vám môže aj Dürerov obrázok na tejto strane dole.

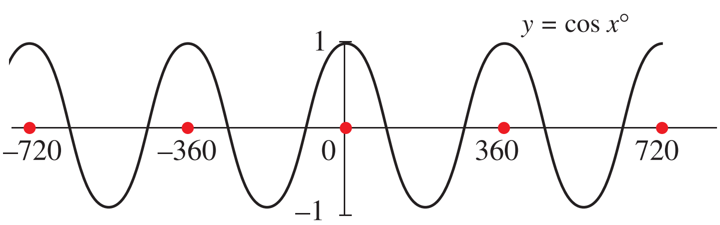
Podľa definície sínus nie je nič iné ako opis y-ovej súradnice bodu pohybujúceho sa po jednotkovej kružnici. Uhly od 0° do 360° zodpovedajú jednej otáčke tohto bodu.

Teda graf na obr. 41 znázorňuje y-ovú súradnicu bodu počas tejto prvej otáčky. Keď veľkosť uhla dosiahne 360°, bod dokončí prvý okruh a je opäť vo východiskovej polohe. Ak bude v svojom obiehaní po jednotkovej kružnici pokračovať, môžeme na opis jeho polohy pri druhej otáčke použiť uhly od 360° do 720°, pri tretej otáčke uhly od 720° do 1 080° atď.

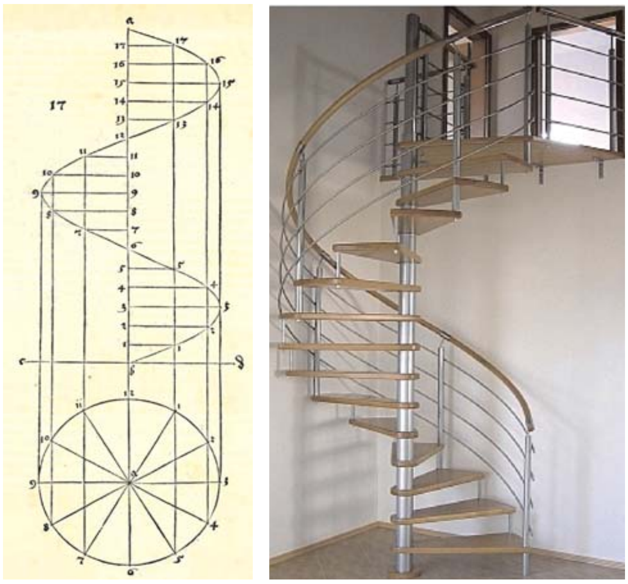
Z tejto úvahy vyplýva, že graf sínusu má pre uhly od 360° do 720° rovnaký tvar ako od 0° do 360°. To isté platí od 720° do 1 080° atď. (pozri obr. 42). Rovnaká úvaha sa vzťahuje aj na záporné uhly, aj na funkciu kosínus (obr. 43).



Obr. 42
Graf funkcie y = sin x° (sínusoida).



Obr. 43
Graf funkcie y = cos x° (kosínusoida).



Krivku tvaru sínusoidy dostaneme, ak nakreslíme pohlad zboku na točité schodisko. Takto vznikol aj obrázok vlavo, ktorý pochádza z knihy *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (1525), od Albrechta Dürera mladšieho.(Dürer samozrejme netušil, že raz sa táto krivka bude nazývať sínusoida). Odporúčame chvílu diskutovať o konštrukcii krivky, ktorú Dürer svojím obrázkom naznačuje.

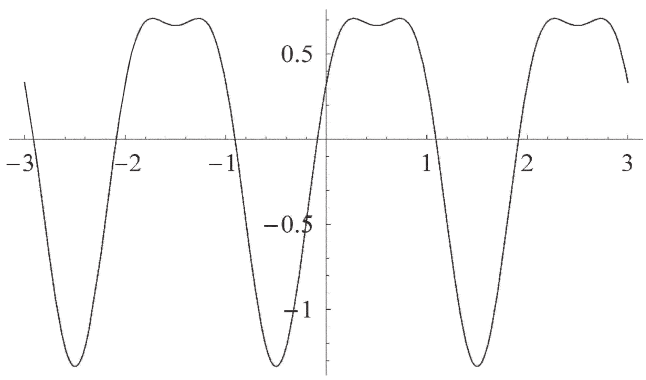
Periodické funkcie

Graf sínusu (a takisto graf kosínusu) teda vznikne pravidelným opakovaním jedného svojho úseku. Funkcie, ktorých grafy majú takúto vlastnosť, sa nazývajú **periodické**. Príklady ďalších periodických funkcií sú na obr. 44, 45 (funkcia na obr. 45 znázorňuje pravidelné striedanie medzi hodnotami – 1 a 3).

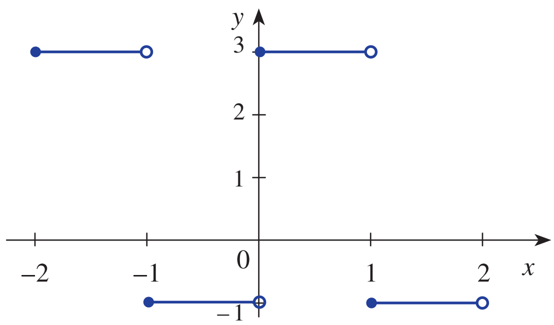
S periodickými funkciami sa môžeme stretnúť napr. v akustike. Ak hráme na hudobnom nástroji jeden tón, vznikajú pravidelné vibrácie, ktoré možno znázorniť ako periodickú funkciu. Tá má spravidla pomerne komplikovaný tvar. Vďaka Josephovi Fourierovi vieme, že každé takéto periodické kmitanie možno s ľubovoľnou presnosťou nahradiť (aproximovať) súčtom jednoduchých kmitaní, ktorých priebeh opisuje sínusoida. Tieto jednoduchšie kmitania sú v akustike známe ako základný tón a vyššie harmonické tóny.

Jean Baptist Joseph Fourier
(1768 –1830)
francúzsky matematik

Jedným z Fourierových učiteľov bol Gaspard Monge, zakladateľ deskriptívnej geometrie. Spolu s ním sa Fourier zúčastnil Napoleonovej vojenskej expedície do Egypta ako člen jej vedeckej časti. Obľúbená anekdota tvrdí, že počas bitky pri pyramídach Napoleon nechal pechotu sformovať do štvorcov a nariadil: „Učenci a osly do stredu!“



Obr. 44



Obr. 45

4.7 Ďalšie úlohy

Úlohy venované použitiu goniometrie sme zaradili do kapitoly o meraní v druhom diele tejto učebnice. Tu sa obmedzíme na odvodenie tvrdenia, ktoré nám – spolu s kosínusovou vetou – môže pomôcť pri ich riešení.

Vráťme sa k vzorcu $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (výpočet obsahu trojuholníka) a pripomeňme hlavnú myšlienku jeho odvodenia: výšku trojuholníka vyjadríme pomocou strany a uhla.

Pri odvodení vzorca na výpočet obsahu trojuholníka pomocou dĺžok strán b, c a veľkosti uhla α máme na výber z dvoch možností (skontrolujte správnosť nasledujúcich výpočtov výšky pre prípad ostrého, pravého aj tupého uhla α):

- pomocou b, α vypočítame $v_c = b \cdot \sin\alpha$, potom obsah je $P = \frac{1}{2} c \cdot v_c = \frac{1}{2} c \cdot \underbrace{b \cdot \sin\alpha}_{= v_c}$
- pomocou c, α vypočítame $v_b = c \cdot \sin\alpha$, potom je $P = \frac{1}{2} b \cdot v_b = P = \frac{1}{2} b \cdot \underbrace{c \cdot \sin\alpha}_{= v_c}$

Takéto vyjadrenie výšky pomôže aj pri odvodení ďalšieho dôležitého vzorca: sínusovej vety.

Sínusová veta

ÚLOHY

31. Výšku v trojuholníku možno vyjadriť pomocou strany a uhla dvoma spôsobmi – napr. výšku v_a možno vypočítať pomocou strany b a uhla γ alebo pomocou strany c a uhla β.
Skontrolujte, že z rovnosti týchto dvoch vyjadrení vyplýva rovnosť $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

32. Podobné rovnosti dostaneme aj pri vyjadrení výšok v_b a v_c. Zapíšte ich.

Každá z uvedených rovností sa nazýva *sínusová veta*. Zvyčajne sa všetky tri rovnosti zlúčia do jedného zápisu: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

sínusová veta: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Iné používané zápisy sú $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$ alebo $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Zdanlivo nelogické umiestnenie sínusov do menovateľa súvisí s ďalším poznatkom o trojuholníku ABC, ktorý v tejto učebnici nebudeme dokazovať: číslo $\frac{a}{\sin\alpha}$ je priemer kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Preto sa posledný zápis rozširuje na tvar

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Nasír ad-Dín at-Túsí
(1201 – 1274)

Sínusovú vetu ako prvý sformuloval Nasír ad-Dín at-Túsí v traktáte *Kitáb aš-šakl al-qitá (Kniha o útvare tvorenom sečnicami)*, ktorý zohral v islamskej matematike rovnakú úlohu ako o dve storočia neskôr v Európe Regiomontanových *Päť kníh o trojuholníkoch*.

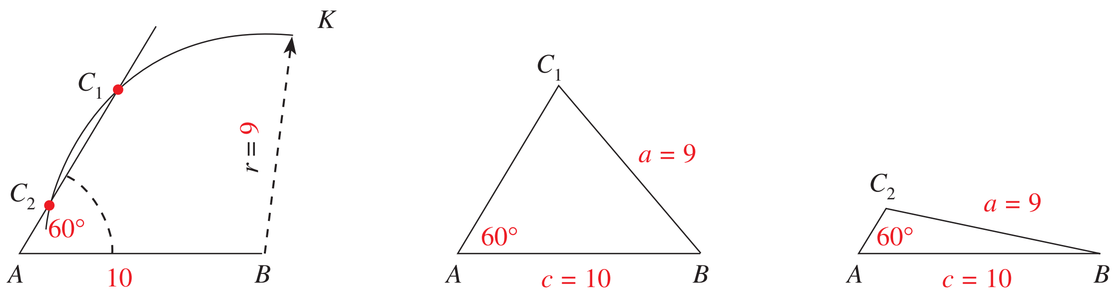
ÚLOHY

33. Vysvetlite, ako tieto zápisy vyplývajú z rovností, ktoré ste našli v úlohách 31 a 32.

V úlohe 23 na s. 96 sme videli príklady použitia kosínusovej vety: výpočet tretej strany trojuholníka (ak poznáme zvyšné dve strany a uhol nimi zovretý) alebo výpočet uhla (ak poznáme všetky tri strany trojuholníka). Podobne možno použiť aj sínusovú vetu.

34. Diskutujte o tom, pri akých výpočtoch v trojuholníku možno využiť sínusovú vetu. Každý typ výpočtu, na ktorý prídete v diskusii, vyskúšajte s nejakými konkrétnymi hodnotami.

Pri riešení úlohy 23 d) na s. 108 sme pripomenuli, že dve strany a uhol, ktorý nimi **nie je** zovretý, nemusia určovať trojuholník jednoznačne. Môže teda existovať niekoľko rôznych trojuholníkov, v ktorých majú tieto dve strany a uhol rovnaké veľkosti (pozri obr. 46).



Obr. 46
Dĺžkami strán a, c a veľkosťou uhla α nemusí byť trojuholník ABC určený jednoznačne: vľavo konštrukcia trojuholníka, v ktorom c = 10, a = 9, α = 60°, vpravo dva rôzne trojuholníky spĺňajúce podmienky zadania.

S takouto trojicou údajov – dve strany a uhol, ktorý nimi nie je zovretý – súvisí aj jedno z možných použití sínusovej vety (veríme, že ste naň v diskusii k úlohe 34 prišli aj vy): vypočítať uhol γ, ak poznáme strany a, c a uhol α. V úlohe 35 nás bude zaujímať, ako sa v tomto výpočte prejaví spomínaná nejednoznačnosť.

V úlohe 35 a) sme hodnoty a, c, α zvolili tak, aby nimi trojuholník ABC **nebol** určený jednoznačne (pozri obr. 46). Pripomeňme, že to nastane vtedy, keď daný uhol leží oproti kratšej z dvoch daných strán.

Naopak, v úlohe 35 b) hodnoty a, c, α určujú jediný trojuholník.

Diskutujte o tom, ako táto jednoznačnosť vyplýva z konštrukcie, ktorej myšlienku sme naznačili na obr. 46 (a podrobnejšie na obr. 55 až 57 v riešení úlohy 23 d) na s. 108.

ÚLOHY

35. Pomocou sínusovej vety vypočítajte veľkosť uhla γ v trojuholníku ABC, ak
a) $a = 9$, $c = 10$, $\alpha = 60°$,
b) $a = 10$, $c = 9$, $\alpha = 60°$.
Diskutujte o tom, kde v riešení úlohy 35 b) sa prejavilo, že hodnotami a, c a α je trojuholník ABC určený jednoznačne.

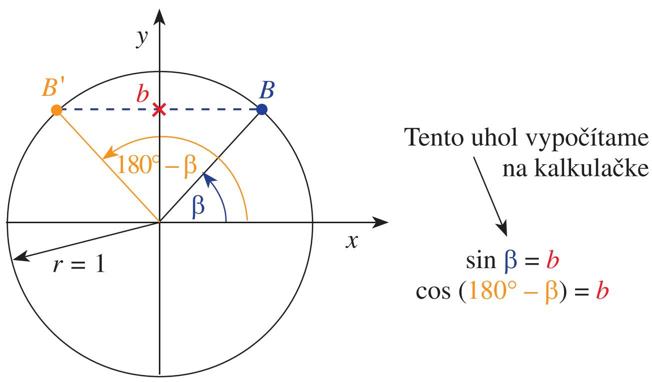
36. Nasledujúci text porovnajte s podobným textom o hľadaní uhlov s daným kosínusom za riešením úlohy 23 na s. 97.

Kalkulačka a hľadanie uhla, ktorého sínus poznáme.

Pre každé číslo b z intervalu $(-1, 1)$ existujú na jednotkovej kružnici dva body, ktorých y-ová súradnica – predstavujúca sínus – je toto číslo (na obr. 47 sú to body B a B', skontrolujte, že pre každú z hodnôt $b = 1$ a $b = -1$ existuje iba jeden taký bod). Tieto dva body sú súmerné podľa osi y. Ak uhol prislúchajúci bodu B – ležiacemu vpravo od osi y – označíme β, tak bodu B' prislúcha uhol $180° - \beta$ (je jasné, ako sme vypočítali jeho veľkosť?).

Na kalkulačke vypočítame k danej hodnote b – teda k hodnote sínusu – uhol, ktorý zodpovedá bodu ležiacem vpravo od osi y. Ak je číslo b kladné, je vypočítaný uhol ostrý, ak je záporné, má výsledok na kalkulačke tvar „mínus nejaký ostrý uhol“, napr. $-30°$ (skontrolujte to na svojej kalkulačke).

Ak používame sínus na výpočet uhlov v trojuholníku, musíme si uvedomiť, že tieto uhly môžu byť ostré aj tupé. Veľkosť ostrého uhla s daným sínusom vypočítame na kalkulačke. Veľkosť tupého uhla s daným sínusom priamo kalkulačkou nevypočítame, nájdeme ho ako 180° mínus uhol, ktorý sme vypočítali na kalkulačke (vysvetlite tento postup na základe obr. 47).



Obr. 47
Pre každú hodnotu b z intervalu (–1, 1) existujú na jednotkovej kružnici dva body, ktorých y-ová súradnica – predstavujúca sínus – je b.
Výpočtom na kalkulačke nájdeme iba uhol β.

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

4. V pravouhlom trojuholníku na obr. 2 a) použijeme Pytagorovu vetu.

a) $a = 51 \cdot \cos 27° = 45{,}44... \approx 45$ (alebo $a = 51 \cdot \sin(90° - 27°) = 51 \cdot \sin 63°$),
$b = 51 \cdot \sin 27° = 23{,}15... \approx 23$ (alebo $b = 51 \cdot \cos(90° - 27°) = 51 \cdot \cos 63°$)

c) $x = 32 \cdot \sin 79° = 31{,}43... \approx 31$, $y = 32 \cdot \cos 79° = 6{,}10... \approx 6$

d) $s = \dfrac{12{,}5}{\tan 41°} = 14{,}37... \approx 14$ (alebo $s = 12{,}51 \cdot \tan(90° - 41°) = 12{,}5 \cdot \tan 49°$), $r = \dfrac{12{,}5}{\sin 41°} = 19{,}05... \approx 19$.

Keď v pravouhlom trojuholníku poznáme dve strany, mohli by sme na výpočet dĺžky tretej strany použiť Pytagorovu vetu. Výpočet pomocou niektorej z hodnôt sin, cos, tan je však v tomto prípade rýchlejší.

5. Vo výsledkoch uvádzame výpočet obidvoch uhlov pomocou niektorej z hodnôt sin, cos, tan. Stačí však vypočítať týmto spôsobom iba jeden z dvoch uhlov, druhý nájdeme ako doplnok do 90°.

b) $\gamma = \operatorname{arctan}\dfrac{24}{12{,}5} = 62{,}48...° \approx 62°$, $\delta = \operatorname{arctan}\dfrac{12{,}5}{24} = 27{,}51...° \approx 28°$

c) $\varepsilon = \arccos\dfrac{315}{431} = 43{,}04...° \approx 43°$, $\eta = \arcsin\dfrac{315}{431} = 46{,}95...° \approx 47°$

d) $\lambda = \operatorname{arctan}\dfrac{64}{73} = 41{,}24...° \approx 41°$, $\mu = \operatorname{arctan}\dfrac{73}{64} = 48{,}75...° \approx 49°$

10. $x = 4 \cdot \cos 55° = 2{,}294\,3... \approx 2{,}29$, $y = 4 \cdot \sin 55° = 3{,}276\,6... \approx 3{,}28$ (pozri obr. 48).

16. Zopakujeme postup z riešenia úlohy 15. Z pravouhlého trojuholníka ACD (obr. 49) dostaneme $v_c = b \cdot \sin\alpha$, potom

$$P = \frac{1}{2}\, c \cdot v_c = \frac{1}{2}\, c \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

17. Dĺžku výšky v_c vieme vypočítať z pravouhlého trojuholníka ACD (obr. 50), v ktorom poznáme preponu b a veľkosť uhla pri vrchole A (tá je $180° - \alpha$). Platí $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{v_c}{b}$, odtiaľ $v_c = b \cdot \sin(180° - \alpha)$. Preto obsah P je

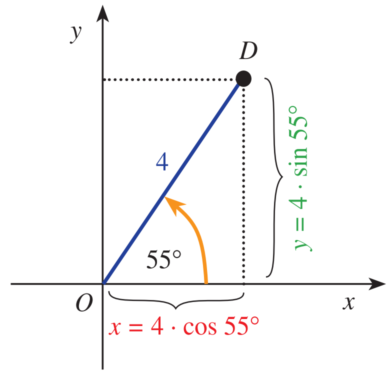
$$P = \frac{1}{2}\, c \cdot v_c = \frac{1}{2}\, c \cdot b \cdot \sin(180° - \alpha).$$

18. Platí. Ak $\alpha = 90°$, tak daný trojuholník je pravouhlý s odvesnami b, c a jeho obsah je $P = \frac{1}{2}bc$. Musíme skontrolovať, či rovnaký výsledok dostaneme dosadením do vzorca $P = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha$. Pre uhol $\alpha = 90°$ sa $\sin\alpha = 1$ (úloha 13 a)), preto $\frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin 90° = \frac{1}{2}\, b \cdot c$.

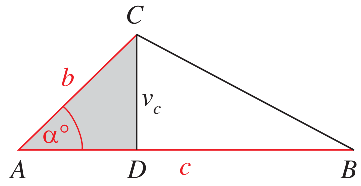
20. Pozri obr. 51. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku BCD dostaneme $a^2 = (b \sin\beta)^2 + (c + b\cos\beta)^2$, po úprave $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta$, pritom $\beta = 180° - \alpha$.

21. Z obr. 52 vidno, že pre tupý uhol α platí $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Preto vzorec $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \alpha)$ možno zapísať aj v tvare $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. (Pre tupý uhol α je $\cos\alpha$ *záporné číslo*, preto $-2bc\cos\alpha$ je *kladné číslo*).

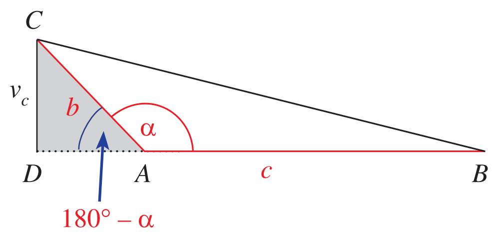
22. Pre $\alpha = 90°$ je trojuholník ABC pravouhlý s odvesnami b, c a preponou a.



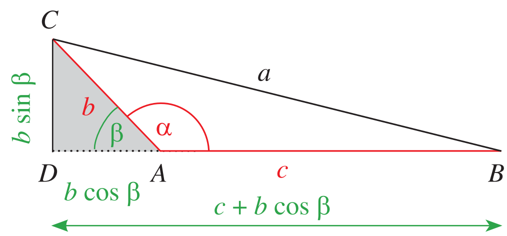
Obr. 48



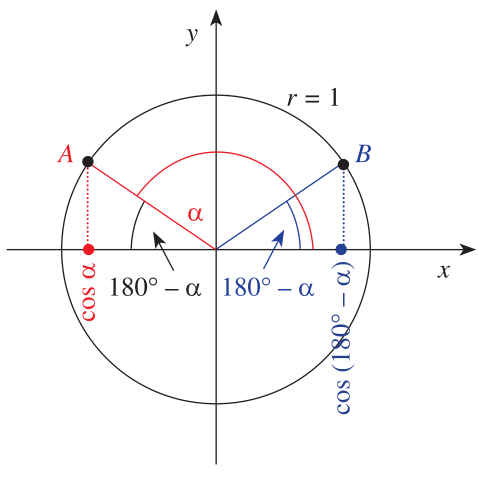
Obr. 49



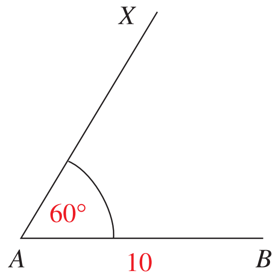
Obr. 50



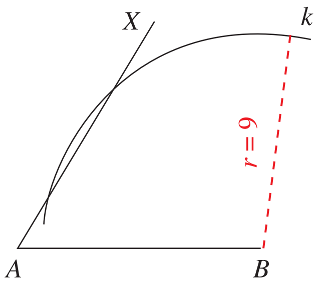
Obr. 51



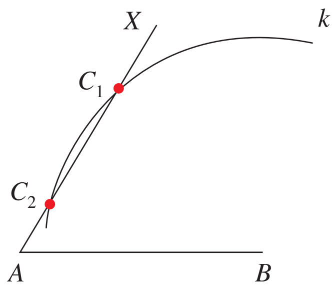
Obr. 52
Číslo cos α je x-ová súradnica bodu A, číslo cos (180°– α) je x-ová súradnica bodu B.



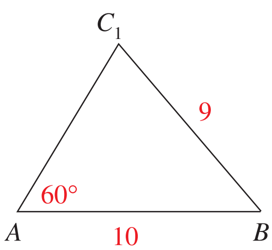
Obr. 53



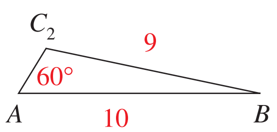
Obr. 54



Obr. 55



Obr. 56



Obr. 57

Podľa Pytagorovej vety sa $a^2 = b^2 + c^2$. Pretože cos 90° = 0 (úloha 13 b)), dostaneme použitím vzorca $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ rovnaký výsledok. Z tohto hľadiska je teda Pytagorova veta špeciálny prípad kosínusovej vety.

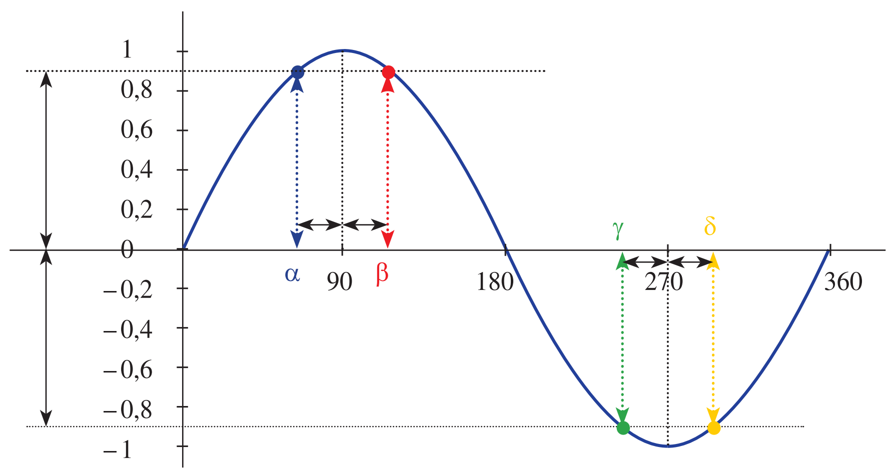
23. b) $b = \sqrt{5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos 120°} = \sqrt{29 - 20 \cdot (-0{,}5)} = \sqrt{39} =$ $= 6{,}244\,997... \approx 6{,}24$, $\cos \gamma = \dfrac{60}{10\sqrt{39}} = 0{,}960\,768...$, $\gamma = 16{,}102...°$

c) $\cos \alpha = -\dfrac{33}{120} = -0{,}275$, $\alpha = 105{,}962...°$, $\cos \beta = \dfrac{105}{156} = 0{,}673\,076...$, $\beta = 47{,}695...°$.

d) Kosínusovú vetu požijeme na vyjadrenie a pomocou b, c, α. Dostaneme tak pre b kvadratickú rovnicu $b^2 - 10b + 19 = 0$ s koreňmi $b = \dfrac{10 \pm \sqrt{24}}{2}$ (toto vyjadrenie možno upraviť na tvar $b = 5 \pm \sqrt{6}$). Obidva korene sú kladné ($5 + \sqrt{6} \approx 7{,}45$, $5 - \sqrt{6} \approx 2{,}55$). Existencia dvoch rôznych hodnôt b vedie prirodzene k otázke, či údaje zo zadania ($a = 9$, $c = 10$, $\alpha = 60°$) určujú iba jeden alebo viac trojuholníkov. Tú možno zodpovedať, ak si predstavíme, ako by sme konštruovali trojuholník určený týmito tromi hodnotami. Kroky konštrukcie sú na obr. 53 až 55. Vrchol C trojuholníka ABC nájdeme ako priesečník kružnice k (so stredom B a polomerom 9) a polpriamky AX (ktorá s AB zviera uhol 60°). Ako vidno, existujú dva rôzne priesečníky k s AX, a teda aj dva rôzne trojuholníky určené hodnotami zo zadania (z nich jeden je ostrouhlý a druhý tupouhlý, obr. 56 a 57). Z našich výpočtov vyplýva $|AC_1| = 5 + \sqrt{6}$, $|AC_2| = 5 - \sqrt{6}$. Čo uvedieme ako výsledok riešenia tejto úlohy, závisí od toho, ako chápeme zadanie:

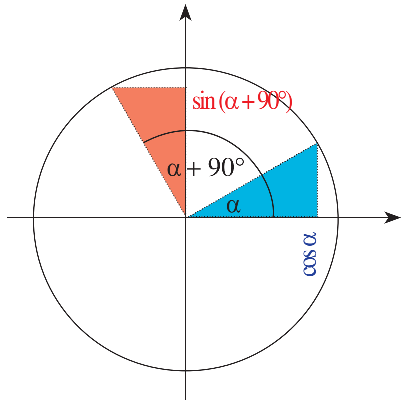
- ak zadanie interpretujeme tak, že sú dané iba hodnoty a, c a α, má úloha dve riešenia: $b = 5 + \sqrt{6}$ a $b = 5 - \sqrt{6}$,
- ak zadanie chápeme tak, že okrem hodnôt a, c a α je obrázkom v zadaní daný aj *tvar* trojuholníka (na obrázku je ostrouhlý trojuholník), tak úloha má iba jedno riešenie: $b = 5 + \sqrt{6}$.

25. Pozri obr. 58. Vzdialenosti vyznačené vodorovnými šípkami sú všetky rovnaké. Takisto sú rovnaké obidve vzdialenosti vyznačené zvislými šípkami.



Obr. 58

26. a) Číslo 90 je v strede medzi α, β, $\sin\alpha = \sin\beta$. Z toho vyplýva, že modrý a červený bod sú súmerné podľa priamky, ktorá je rovnobežná s osou y a prechádza na osi x hodnotou 90.
b) Číslo 270 je v strede medzi γ a δ, $\sin\gamma = \sin\delta$. Z toho vyplýva, že zelený a oranžový bod sú súmerné podľa priamky, ktorá je rovnobežná s osou y a prechádza na osi x hodnotou 270.
c) Číslo 180 je v strede medzi β a γ, $\sin\gamma = -\sin\beta$. Z toho vyplýva, že úsečka spájajúca na obr. 58 zelený a červený bod vždy prechádza na osi x cez hodnotu 180. To znamená, že zelený bod dostaneme, ak červený bod otočíme o 180° okolo bodu označujúceho na osi x hodnotu 180.



Obr. 59

29. Treba zdôvodniť rovnosť $\cos\alpha = \sin(\alpha + 90°)$, tá vyplýva zo zhodnosti modrého a červeného trojuholníka na obr. 59.
Iná možnosť: Z definície sínusu a kosínusu v pravouhlom trojuholníku vyplýva pre ostré uhly α rovnosť $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$. Z nej vyplýva, že modrá časť kosínusoidy je súmerná s modrou časťou sínusoidy podľa priamky, ktorá má rovnicu $x = 45$. Modrá časť sínusoidy je súmerná s jej červenou časťou podľa priamky, ktorá má rovnicu $x = 90$ (pozri riešenie úlohy 27). Pomocou týchto dvoch súmerností sa dá zdôvodniť naše tvrdenie.
30. Zľava doprava *oranžová, červená, zelená.*
31. V trojuholníku ABC platí $v_a = b \cdot \sin\gamma$ aj $v_a = c \cdot \sin\beta$. Úpravou rovnosti $\underbrace{b \cdot \sin\gamma}_{= v_a} = \underbrace{c \cdot \sin\beta}_{= v_a}$ dostaneme rovnosť uvedenú v zadaní.

32. $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{c}, \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}.$

34. Uvažujme o rovnosti $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$ (t. j. $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$). Ak poznáme tri zo štyroch hodnôt a, b, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, vieme vypočítať štvrtú z nich (rovnakú úvahu sme použili pri riešení úlohy 23). Preto:

- ak poznáme jednu stranu a dva uhly – napr. a, α, β, môžeme sínusovú vetu použiť na výpočet strany b,
- ak poznáme dve strany a uhol – napr. a, b, α, môžeme pomocou sínusovej vety vypočítať hodnotu $\sin\beta$ a pomocou nej určiť uhol β (v tomto prípade môžu byť riešením dve rôzne hodnoty β_1 a β_2, pretože uhly β a $180° - \beta$ majú rovnaký sínus, pozri obr. 19 b) na s. 93).

35. a) $\dfrac{\sin\gamma}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{a}$, t. j. $\dfrac{\sin\gamma}{10} = \dfrac{\sin 60°}{9}$, odtiaľ $\sin\gamma = \dfrac{10}{9}\sin 60° = 0{,}962\ 250\ldots$. Hľadáme tie uhly medzi 0° a 180°, ktorých sínus je 0,962 250 ... (jeden z nich je ostrý a druhý tupý, pozri obr. 47 na s. 106). Ostrý uhol s týmto sínusom nájdeme na kalkulačke: $\gamma_1 = 74{,}206\ldots°$. Tupý uhol s rovnakým sínusom nájdeme na základe obr. 47:
$\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180° - - 74{,}206\ldots° = 105{,}793\ldots°$. To, že sme našli dva rôzne uhly, zodpovedá našim očakávaniam, keďže hodnoty zo zadania určujú dva rôzne trojuholníky ABC.
b) $\dfrac{\sin\gamma}{9} = \dfrac{\sin 60°}{10}$, odtiaľ $\sin\gamma = \dfrac{9}{10}\sin 60° = 0{,}779\ 422\ldots$. Z uhlov medzi 0° a 180° majú túto hodnotu sínusu dva: $\gamma_1 = 51{,}207\ldots°$ (tento uhol sme našli pomocou kalkulačky) a $\gamma_2 = 180° - 51{,}207\ldots = 128{,}792\ldots°$ (tento uhol sme našli na základe obr. 47). Uhol γ_2 však nemôže byť hľadaným riešením, pretože $\alpha + \gamma_2 = 60° + 128{,}792\ldots° > 180°$.
K diskusii o jednoznačnosti: v úlohe 35 a) 35 b) existovali vždy dva uhly, ktoré mali danú hodnotu sínusu, v úlohe 35 b) však jeden z týchto uhlov (γ_2) bol väčší ako doplnok uhla α do 180°.

LITERATÚRA

[1] Bakker, A.: The Early History of Average Values and Implications for Education. Journal of Statistics Education Volume 11, Number 1 (2003), dostupné na *www.amstat.org/publications/jse/v11n1/bakker.html*

[2] Bernoulli, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Dritter und vierter Teil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel. W. Engelmann : Leipzig, 1899.

[3] von Braunmühl, A.: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Teubner : Leipzig, 1900.

[4] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.: Irenée-Jules Bienaymé. MacTutor History of Mathematics archive, University of St. Andrews, dostupné na *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bienayme.html*

[5] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.: Pafnuty Lvovich Chebyshev. MacTutor History of Mathematics archive, University of St. Andrews, dostupné na *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chebyshev.html*

[6] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.: Jean Baptiste Joseph Fourier. MacTutor History of Mathematics archive, University of St. Andrews, dostupné na *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier.html*

[7] Gorard, S.: Revisiting a 90-year-old debate: the advantages of the mean deviation. Paper presented at the British Educational Research Association Annual Conference, University of Manchester, 16 – 18 September 2004.

[8] Grattan-Guinness, I.: Convolutions in French mathematics, 1800 – 1840: from the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics. Birkhäuser, 1990. ISBN 3764322373, 9783764322373.

[9] Chatterjee, S. K.: Statistical thought: a perspective and history. Oxford University Press, 2003. ISBN 0198525311.

[10] Janko, J.: Jak vytváří statistika obrazy světa a života, I. díl. Jednota československých matematiků a fysiků : Praha, 1947.

[11] Juškevič, A. P.: Dějiny matematiky ve středověku*,* Academia : Praha, 1977.

[12] Kieler, H. – Axelsson, O. – Nilsson S. – Waldenström: The length of human pregnancy as calculated by ultrasonographic measurement of the fetal biparietal diameter. *Ultrasound Obstet. Gynecol. 6* (1995)*,* 353 – 357.

[13] Kourkoulos, M. – Tzanakis, C.: History, and students' understanding of variance in statistics, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, Volume 25 (2010), 168 – 178.

[14] Merriman, M.: On the History of the Method of Least Squares. The Analyst, Vol. 4, No. 2 (Mar., 1877), 33 – 36.

[15] Nievergelt, Y.: A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy. Journal of Computational and Applied Mathematics 121 (2000), 37 – 72.

[16] Plackett, R. L.: Studies in the History of Probability and Statistics: VII. The Principle of the Arithmetic Mean. Biometrika, Vol. 45, No. 1/2 (Jun., 1958), 130 – 135.

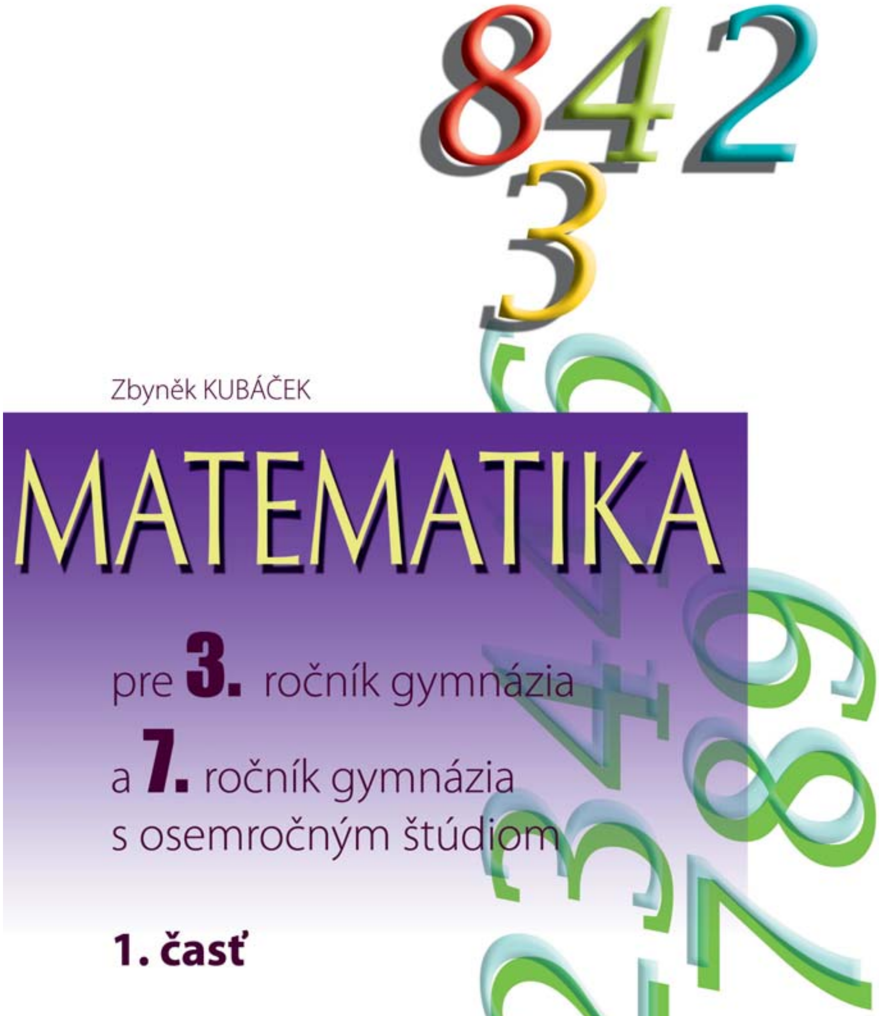
[17] Seneta, E. W.: „Francis Galton“ (version 5). StatProb: The Encyclopedia Sponsored by Statistics and Probability Societies, dostupné na *http://statprob.com/encyclopedia/FrancisGALTON.html*

[18] Stigler, S. M.: Gauss and the invention of least squares. *The annals of Statistics*, 1981, Vol. 9, No. 3, 465 – 474.

[19] Stigler, S. M.: The history of statistics: the measurement of uncertainty before 1900. Harvard University Press, 1986. ISBN 067440341X.

[20] Stigler, S. M.: Statistics on the table: the history of statistical concepts and methods. Harvard University Press, 2002. ISBN 0674009797.

[21] Zakharov, S. V. – Ivanova, E. I.: Fertility Decline and Recent Changes in Russia: On the Threshold of the Second Demographic Transition, dostupné na *http://www.rand.org/pubs/conf_proceedings/CF124/CF124.chap2.html*



Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Výtvarná redaktorka Mgr. Ľubica Suchalová
Technická redaktorka Ivana Bronišová

Vyšlo vo vydavateľstve
Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, s. r. o.,
Sasinkova 5, 811 08 Bratislava

Vytlačila Slovenská Grafia, a. s., Bratislava

ISBN 978-80-10-02288-5