Pedagogická fakulta Univerzity Komenského Bratislava

Katarína Žilková

ŠKOLSKÁ MATEMATIKA V PROSTREDÍ IKT

(INFORMAČNÉ A KOMUNIKAČNÉ TECHNOLÓGIE)

2009
Univerzita Komenského Bratislava

S láskou a vďakou venujem svojim rodičom

Monografická publikácia bola vydaná ako súčasť grantového projektu s názvom
Školská matematika v prostredí IKT (MŠ SR KEGA 3/6021/08).

Recenzenti: prof. RNDr. Pavol Hanzel, CSc.
doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
doc. PhDr. Oliver Židek, CSc.

ISBN 978-80-223-2555-4

Obsah

Úvod

Vyučovanie matematiky spojené s aktívnym využívaním prostriedkov informačných a komunikačných technológií na našich školách (až na výnimky) zatiaľ stále nie je bežnou a prirodzenou skutočnosťou. Dôvodov je viacero, ale jedným z nich je aj nedostatok odbornej literatúry zaoberajúcej sa uvedenou problematikou. V súčasnosti existujú konferenčné príspevky, state a parciálne štúdie, ktoré akcentujú niektoré predpoklady využívania informačných a komunikačných technológií (IKT) v matematike, postupy integrácie, priebeh a mapujú niektoré dôsledky vyplývajúce z výučby matematiky v novom technologickom prostredí. Predložená publikácia má vyplniť medzeru v študijnej literatúre tohto zamerania a poskytnúť komplexnejší pohľad na uvedenú problematiku. Okrem tohto cieľa, sme sa snažili poskytnúť čitateľovi odpovede na širokú paletu otázok vzťahujúcich sa k téme integrácie prostriedkov IKT do vyučovania matematiky. Za základný okruh problematiky a vytýčený cieľ práce považujeme:

- načrtnúť teoretické východiská pre integráciu nových metód a foriem práce učiteľa matematiky,
- ilustrovať ukážky možností aktívneho využívania informačných technológií v riešení matematických úloh a problémov, poskytnúť vlastné didaktické materiály, resp. sprístupniť odkazy na zaujímavé a užitočné materiály z dielne iných autorov,
- predložiť súhrn požiadaviek na rozvoj nových učiteľských aj žiackych kompetencií vyplývajúcich z integrácie IKT do matematického vzdelávania,
- poskytnúť návody a metodické postupy na uplatňovanie prvkov interaktivity a dynamiky vo vyučovaní matematiky, vrátane riešenia ďalších problémov súvisiacich s načrtnutou problematikou,
- prispieť k propagácii a popularizácii modernizácie vyučovania matematiky.

Názov monografie, „Školská matematika v prostredí IKT“, zámerne pokrýva dva možné terminologické výklady, ktoré sa však vzájomne nevylučujú:

- Prostredie informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní sa všeobecne môže chápať a skúmať z aspektu nielen sociálno-psychologického, ale aj architektonického (celkové riešenie učebne, úroveň jej technického vybavenia), hygienického (v našom prípade hlavne otázky súvisiace s osvetlením), ergonomického (rozmiestnenie ovládacích a prezentačných prvkov učebne) a pod.
- Užší pohľad na termín „prostredie IKT“ vo vyučovaní matematiky špecifikuje a konkretizuje zvyčajne použité programové aplikácie, v ktorých sa realizuje

modelovanie matematických situácií. V uvedenom zmysle hovoríme napríklad o prostredí interaktívnej geometrie, prostredí tabuľkového kalkulátora a pod.

Obidva výklady korešpondujú aj s chápaním komplexu prostredia, do ktorého vstupujú prvky informačných a komunikačných technológií, ako faktora determinujúceho didaktické situácie vo vyučovacom procese. V zmysle vyššie uvedeného terminologického spresnenia možno konštatovať, že poznatky z vyučovania matematiky v prostredí informačných a komunikačných technológií sú teda inklúziou poznatkov z didaktiky matematiky, ale so svojimi vlastnými špecifikami.

Je potrebné uvedomiť si, že vyučovanie matematiky v IKT prostredí so sebou prináša nielen množstvo benefitov, ale je aj istým spôsobom limitované. K prednostiam, o ktorých je v publikácii podrobnejšia rozprava, patria možnosti vytvorenia interaktívneho prostredia, využívania dynamických aktivít, možnosti akcentovania dôležitosti vizualizácie a znázorňovania, aplikovanie prvkov kooperatívneho vyučovania, využívanie počítača a softvérových doplnkov na tvorbu modelov v matematike, zároveň možnosť simulácie matematických situácií, možnosť a ukážky tvorby animácií s matematickým obsahom, či internetových konštrukčných úloh. Vyučovanie matematiky z naznačeného pohľadu si však vyžaduje nielen dostatočné materiálno technické vybavenie, ale najmä podlieha zmene vzdelávacieho prístupu, novej komunikácii v matematike, zmene postavenia učiteľa matematiky i žiaka, a tiež organizačnej zmene vyučovacích hodín matematiky. Nutnou podmienkou pre uskutočnenie zmien v procese výučby je dostatočná informatická gramotnosť učiteľov matematiky, ich motivácia a ochota neustále sa vzdelávať v tejto oblasti. V tomto kontexte predkladáme publikáciu ako študijný materiál najmä pre učiteľov matematiky, študentov študijného odboru Učiteľstvo akademických predmetov v kombinácii s matematikou, študentov doktorandského štúdia v odbore Teória vyučovania matematiky, ale aj pre ďalších záujemcov z radov odbornej i ďalšej verejnosti, ktorým nie je ľahostajné matematické vzdelávanie na našich školách.

Všetkým čitateľom želáme, aby predložená publikácia „Školská matematika v prostredí IKT“ bola pre nich inšpiratívna a aby zažívali potešenie z matematiky a jej vyučovania. Taktiež vyjadrujeme želanie, aby hodiny matematiky realizované v prostredí informačných a komunikačných technológií boli plné pozitívnych zážitkov a radosti z objavov.

Práca vznikla v rámci riešenia rovnomenného grantového projektu s názvom „*Školská matematika v prostredí IKT*“, podporeného Kultúrnou a edukačnou grantovou agentúrou ministerstva školstva pod registračným číslom MŠ SR KEGA 3/6021/08.

Úprimné poďakovanie patrí recenzentom publikácie prof. RNDr. Pavlovi Hanzelovi, CSc., doc. PhDr. Bohumilovi Novákovi, CSc. a doc. PhDr. Oliverovi Židekovi, CSc. za cenné rady, poznámky a pripomienky, ktoré prispeli ku skvalitneniu predloženého textu.

Autorka

1

UČITEĽ MATEMATIKY V PROSTREDÍ IKT

Významný vplyv na výchovu a vzdelávanie má jednak prírodné, ale najmä sociálne prostredie, v ktorom sa výchovno-vzdelávací proces realizuje. Kľúčovým bodom celospoločenského diania sa stáva prijímanie informácií prostredníctvom nových dromokratických[1] systémov. Skutočnosť reálneho života v súčasnej dobe informačnej expanzie znamená prácu s množstvom údajov, s rôznymi druhmi informácií, s ich vyhľadávaním, triedením, analyzovaním a spracovávaním. Preto je absolútne prirodzené, že teória výchovy a vzdelávania predmetových disciplín sa čoraz častejšie zaoberá otázkami vplyvu prostriedkov informačných a komunikačných technológií (IKT) na samotný vzdelávací proces, ako aj na prácu učiteľa.

Nároky na prácu učiteľa gradujú predovšetkým v oblasti využívania informačných a komunikačných technológií, ako dôležitej súčasti novodobého vyučovania. Objektom skúmania a overovania sú spôsoby ich integrácie do matematických celkov tak, aby neboli záťažovým prvkom vo vzdelávacom procese, ale naopak, aby sa stali súčasťou a prostriedkom na celkovom formovaní logického myslenia žiakov a tým na formovaní ich celkovej osobnosti.

1.1 Platformy využitia prostriedkov IKT v práci učiteľa matematiky

Proces plánovania a prípravy výučby je mnohokrát pre učiteľa (matematiky) zdĺhavejší ako samotný vyučovací proces. Má svoje špecifiká a zahŕňa (okrem iného) zostavovanie študijných materiálov, pracovných listov a didaktických testov, umožňujúcich zdokonaľovať a vylepšovať proces učenia sa. Využitie IKT môže učiteľovi poskytnúť priestor pre činnosti nevyhnutne potrebné na uskutočňovanie kvalitného vzdelávania, akými napr. sú:

- Tvorba a spracovávanie matematických (a iných) dokumentov, prostredníctvom užívateľských nástrojov, programovacích prostredí, rôznych aplikácií, a informačných systémov, ktoré IKT umožňujú. K základným kompetenciám učiteľa matematiky v tomto kontexte patrí:

[1] Dromológia (z gr. dromos – preteky) – sa zaoberá rýchlosťou ako filozofickým pojmom. Medzi nové dromokratické systémy z konca 20. st. sa zaraďujú technické vynálezy, ktoré urýchľujú prijímanie informácií, napr. internet. (Žilková, 2004, s. 11).

a) tvorba matematických prezentácií, ako metódy predkladania nového učiva s možnosťou vizualizácie, konkretizácie a simulácie matematických objektov a vzťahov (obr. 1.1);
b) príprava metodických materiálov v otvorených i uzavretých prostrediach v konkrétnych matematických programových produktoch;
c) tvorba a sprístupňovanie elektronických materiálov a podkladov určených na výmenu a kolaboráciu v sieti.

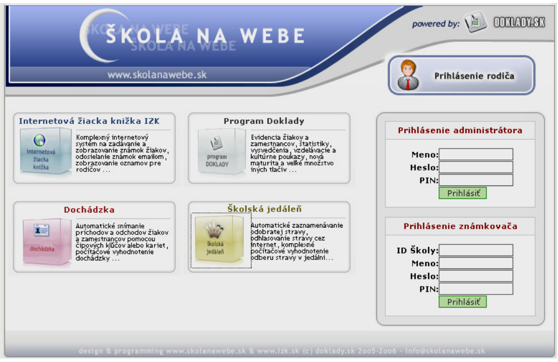
Obr. 1.1 *Prezentácia s matematickým obsahom.*
(Anuloid prebraný z http://mathworld.wolfram.com)

- Vyhľadávanie a získavanie aktuálnych informácií z webových stránok s matematickým zameraním (obr. 1.2), využívanie elektronických vzdelávacích kurzov, prípadne ďalších zdrojov.

Obr. 1.2 *Matematické webové stránky – užitočný zdroj informácií, učebných podkladov, námetov na hodiny, programov a podobne. (www.matika.sk)*

- Výmena informácií a skúseností medzi učiteľskou verejnosťou prostredníctvom interaktívnej (textové telefóny, videotelefóny, audio a videokonferencie) a neinteraktívnej komunikácie (elektronická pošta).

- Zabezpečenie plynulého a nerušeného priebehu vyučovacej jednotky aktívnym využívaním počítačových vstupno-výstupných zariadení (skener, kamera, fotoaparát, tlačiareň, atď.), interaktívnych tabúľ, projekčných prostriedkov a ďalších dostupných informačných a komunikačných prostriedkov.
- Tvorba matematických testov a preverovanie vedomostí v testovacích programoch, ktoré umožňujú kontrolu výsledkov výučby a poskytujú spätnú väzbu učiteľovi.
- Zaznamenávanie a vyhodnocovanie výsledkov výučby, hodnotenie didaktických testov, evidencia známok a klasifikácia, tvorba a spracovávanie administratívnej agendy s možnosťou zverejňovania relevantných údajov prostredníctvom webových aplikácií (obr. 1.3).



Obr. 1.3 *Škola na webe, internetová žiacka knižka, dochádzka, kompletná učiteľská agenda. (www.skolanawebe.sk)*

1.2 Nové kompetencie učiteľa matematiky v IKT prostredí

Úspešná integrácia IKT do vyučovania matematiky znamená pre učiteľa, že nové technológie má využívať primerane a produktívne. Teda vyučovanie vhodne vybraných tém s podporou počítača, prípadne iných technológií, by malo byť pre žiakov efektívnejšie, názornejšie, presvedčivejšie, multisenzorické. O vymedzenie potrebných poznatkov učiteľa na zvládnutie načrtnutej úlohy sa pokúsil I. Kalaš: „Aby učiteľ mohol úspešne integrovať IKT do svojho predmetu, musí:

- poznať efektívne metódy pre vyučovanie svojho predmetu s využitím IKT,
- vedieť, ako dosahovať ciele svojho predmetu s využitím IKT,
- sám efektívne používať IKT pre svoju prípravu, vyučovanie a administratívu,
- vedieť posúdiť úroveň informačnej gramotnosti svojich žiakov a študentov a vedieť ju ďalej rozvíjať“ (I. Kalaš, 2000).

Významnou podmienkou i súčasťou profesionálnej výbavy učiteľa matematiky na úspešné dosiahnutie vyššie uvedeného cieľa je indikovaná jeho informačná gramotnosť na primeranej úrovni. Minimom je:

- zvládanie prostriedkov IKT na užívateľskej úrovni,
- udržiavanie prehľadu o dostupných programových produktoch využiteľných vo vyučovaní matematiky, ktoré môžeme zaradiť do nasledujúcich kategórií:
  - profesionálne matematické systémy,
  - aplikačné programy zamerané na matematiku,
  - dynamické geometrické systémy,
  - výučbové programy a didaktické matematické hry.

V tomto zmysle sa alikvotne zvyšujú nároky na prípravu učiteľov matematiky. V jadre učiteľskej prípravy by mal byť etablovaný vzdelávací program zahŕňajúci:

- prehľad didaktických možností využitia informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní matematiky,
- informácie o rôznych funkciách a formách používania počítačov v rámci výchovno-vzdelávacieho procesu,
- typizáciu multimediálno-virtuálnych prístupov ku vzdelávaniu,
- metodické návody integrácie IKT do matematického vzdelávania,
- prehľad spôsobov použitia a vplyvov informačných a komunikačných technológií nielen v priamej vzdelávacej činnosti, ale aj v učiteľskej agende a komplexnej učiteľskej práci,
- výsledky dostupných analýz o vplyve použitia IKT vo vyučovaní matematiky na výkon žiakov z hľadiska kvality vzdelávacieho procesu,
- ukážky odborného didaktického využitia dostupných aplikačných matematických programov a ich integrovaných funkcií,
- pravidlá a postupy pri príprave a tvorbe vlastných metodických materiálov vybraných matematických celkov pomocou vhodných softvérových produktov,
- konkrétne výsledky vzdelávania prostredníctvom IKT získané a kvantifikované z didaktických pozorovaní, praktických overovaní a najnovšie výsledky vedeckých výskumov,
- sumarizáciu vplyvu počítačového prostredia vstupujúceho do didaktického procesu, ktorý zákonite podmieňuje zmeny v komunikácii v matematike.

Problematika využívania moderných technológií vo vyučovaní matematiky je rozsiahla, náročná a dynamická. Je potrebné permanentne skúmať a študovať vznikajúce programové trendy a produkty zamerané na matematiku, zistiť ich dostupnosť, možnosť uplatnenia v rôznych obsahových častiach učiva matematiky, vyhľadávať nenásilné metódy na ich úspešnú integráciu, sledovať ich vplyv na prácu a výkon žiakov, ale aj učiteľov.

Náročnosť témy vyplýva aj z tempa vývoja technických prostriedkov a programov, ktoré rýchlo strácajú na aktuálnosti. Preto je nutné neustále sebavzdelávanie a doškoľovanie v oblasti rozvíjajúcich sa informačných technológií vyplývajúce z dynamického rozvoja jednak technického, ale aj programového vybavenia „počítačového parku“. Nemenej dôležitá úloha učiteľa je anticipácia (predvídanie) trendov a postupná derogácia dosluhujúceho softvéru.

Sféra uplatnenia IKT vo vyučovaní matematiky svojou rozmanitosťou prispieva k aplikácii heuristických metód vo vyučovacom procese. Ich hlavnými výhodami sú podľa M. Zelinu: učenie sa systematickému postupu pri riešení problému, organizovanie myslenia, rozvoj tvorivého myslenia, učenie sa práci s informáciami, rozvoj hodnotiaceho a kritického myslenia, zvyšovanie motivácie pre učenie, najmä tým, že žiaci vidia zmysel a výsledok svojej práce, učia sa spolupracovať, pracovať v tímoch, pripravujú sa na riešenie problémov v živote profesionálnom aj súkromnom (M. Zelina, 2000, s.133). Integrácia netradičných hodín založených na osobnej skúsenosti žiakov s prostriedkami IKT umožňuje okrem informatistického prístupu a tvorivosti prepojiť aj kognitivistické aj humánno-personologické prvky vzdelávania.

1.3 Motivácia učiteľov a niektoré efekty integrácie IKT do vyučovania matematiky

Vyučovanie matematiky v prostredí informačných a komunikačných technológií je nutné skúmať z viacerých aspektov:

- **Kurikulárne hľadisko** – posudzovanie vplyvu na ciele a obsah učiva, ktoré sú determinované využívaním IKT vo vyučovaní matematiky. Príprava štandardného „scenára“ vyučovacej jednotky za pomoci počítača podlieha reštrukturalizácii učebnej látky, doplneniu o vizuálne, prípadne auditívne podnety, dynamizujúce a interaktívne aktivity. Ľahko prístupný svet reality (prostredníctvom Internetu) umožňuje matematizáciu reálnych situácií, interpretáciu matematických modelov v reálnom svete, globálnejší pohľad na vybranú časť učiva aplikáciou interdisciplinárnych vzťahov v informačnom prostredí. Umožňovanie objaviteľských postupov v riešení úloh, tvorby a overovania hypotéz, simulácie javov a vzťahov, experimentovania v IKT prostredí zákonite predurčujú a podmieňujú zmeny nielen v obsahu jednotlivých vyučovacích hodín matematiky, ale najmä v rekonštrukcii učebných osnov matematiky. Učiteľ by mal nielen reflektovať na nové podmienky a požiadavky, ale sa aj podieľať na inovačných procesoch z hľadiska obsahu a štruktúry učiva matematiky a možnosti monitorovania zmien vyplývajúcich zo zmien obsahových.
- **Pedagogicko-psychologické hľadisko** – skúma vplyv nových metód a organizačných foriem využívaných vo vyučovaní matematiky v IKT prostredí na žiaka (jednotlivca i skupinu) a učiteľa, na ich kognitívne a učebné štýly, vzájomnú komunikáciu a sociálnu klímu v triede, zmenu ich postavenia vo výchovno-vzdelávacom procese, možnosti individualizácie, ale i skupinovej kooperácie, motivácie, využívanie prvkov tvorivosti, algoritmických a heuristických postupov, zmeny v myslení a v riešení problémov atď.
- **Sociologické hľadisko** – monitoruje výsledné efekty výchovno-vzdelávacieho procesu v prostredí IKT s akcentom na aktívne využívanie informačných a komunikačných prostriedkov v praxi, bezproblémovú orientáciu v informáciách a ich spracovaní, čoho dôsledkom je zvyšovanie informačnej gramotnosti a personálnej bonity jednotlivcov, a tým aj ich jednoduchšej sociologizácie.

Špecializovaná ucelená metodika vyučovania matematiky v prostredí IKT sa zatiaľ nevyskytuje na našom bibliografickom trhu aj z dôvodu hľadania optimálnych vyučovacích stratégií, metód a obsahových celkov vhodných na spracovávanie a využívanie v matematickom vzdelávaní. Existuje však množstvo parciálnych elektronických materiálov šírených prostredníctvom Internetu, prípadne edukačných CD a naďalej pribúdajú nové, z ktorých mnohé možno výhodne využiť v pedagogickej praxi. Dôsledky vyučovania matematiky s využívaním všetkých prostriedkov informačných a komunikačných technológií vo všeobecnosti (pozri definícia v úvode) sa objavujú v konferenčných príspevkoch, v statiach, ale hlavne sú priebežne verifikované v rôznych výskumných a kvalifikačných prácach. Dá sa však konštatovať, že v súčasnosti je využívanie IKT vo vyučovaní matematiky založené na báze dobrovoľnosti a ochoty učiteľov vnášať do tradičných vzdelávacích foriem inovačné prvky.

K. Šeďová a J. Zounek (2007) hľadajú v rámci riešenia výskumného projektu „Informačné a komunikačné technológie v každodennej práci učiteľa“ odpovede na otázku: „Čím je motivované začleňovanie IKT do práce učiteľov a za akých okolností k nemu dochádza?“ Ukazuje sa, že existuje veľké množstvo rôznych **motivačných činiteľov**, ktoré sú v konečnom dôsledku dôvodom aktívneho využívania prostriedkov IKT vo vyučovaní. V zásade sa však dajú kategorizovať do dvoch základných skupín, ktoré autori výskumu nazývajú „*situáciou tlaku*“ a „*situáciou ťahu*“. Tlak na učiteľov je dvojaký, jednak zo strany vedenia školy (tlak zhora), a tiež zo strany žiakov (tlak zdola). Pod ťahom sa rozumie spôsob, ktorým sú inšpirovaní učitelia k činnosti, bez toho, že by bol na nich vyvíjaný akýkoľvek nátlak. K najčastejšie uvádzaným inšpiračným dôvodom pre prácu s informačnými technológiami je ich samotná existencia a vývoj, a tiež osoby z blízkeho okolia učiteľov s významným vplyvom na nich (manželia, priatelia).

Učiteľ formuje žiakov svojim priamym i nepriamym pôsobením, svojou kvalifikovanosťou, odbornosťou, pedagogickým majstrovstvom, a tiež osobným príkladom. Ak chceme vychovať mladých ľudí informačne zručných, kreatívnych, so schopnosťou riešiť problémy reálneho života samostatne, tak učiteľ (nielen matematiky) musí mať hodiny pre svojich „klientov“ pripravené kompetentne, tvorivo, zaujímavo, moderne. Záleží len na *tvorivosti a vynaliezavosti učiteľa*, aby vyučovanie matematiky bolo pre žiakov zaujímavé, motivujúce, moderné, lákavé a reagujúce na každodenné reálne životné situácie.

2

UČEBNICE VERSUS ELEKTRONICKÉ UČEBNICE MATEMATIKY

Práca s informáciami je jedným z dôležitých faktorov súčasného plnohodnotného života. Celý život človek prijíma a spracováva rôznorodé informácie každodenného sledu udalostí bez uvedomenia si tohto procesu, využívajúc všetky ľudské zmysly vizuálneho, sluchového, čuchového, chuťového, dotykového charakteru. Medzi bežné informačné zdroje patria masmediálne a komunikačné prostriedky, Internet, informačné systémy, knihy, učebnice, zvukové médiá a podobne. Podľa I. Kalaša sú informácie: „... fakty, skúsenosti, vedomosti, ktoré ľudstvo zbiera, zaznamenáva, spracúva a odovzdáva ďalej“ (I. Kalaš, 2001, s. 25). V širších súvislostiach informácie vnášajú do neporiadku a chaosu systém, určitosť a zákonitosť.

2.1 Didaktické funkcie učebníc a elektronických informačných zdrojov v matematickom vzdelávaní

V uvedenom kontexte sa učebnice matematiky môžu chápať ako prostriedky matematického vzdelávania, ktoré plnia prioritne informačnú funkciu v čo najširšom zmysle slova. Práve práca s informáciami je hlavnou náplňou vývoja prostriedkov IKT, pričom edukácia v rôznych oblastiach matematiky je v súčasnosti výrazne ovplyvňovaná najmodernejšími prístupmi prostredníctvom *širokej ponuky softvérových produktov*. Ich využívanie môže prispieť k rozvoju myšlienkových a tvorivých aktivít študentov. Integrácia špeciálnych matematických softvérov, štandardných aplikačných programov, dynamických geometrických systémov, výučbových programov a didaktických počítačových hier do vyučovania matematiky môže prispievať k napĺňaniu viacerých dôležitých didaktických funkcií. Uvedieme niektoré z predností využívania elektronických informačných zdrojov, dôležitých z hľadiska didaktickej funkcionality:

- využívanie *multisenzoricky spracovaných matematických informácií,*
- vplyv na *estetické cítenie* príjemcu,
- podpora *kreativity, sebarealizácie a sebadôvery* žiaka,
- zvyšovanie záujmu o nadobúdanie nových poznatkov a formovanie kladných postojov žiakov k preberanej problematike,
- možnosť (*auto-*) *diagnostiky a vyhodnocovania výsledkov* výučby a pod.

To znamená, že mnohé programové produkty informačných a komunikačných technológií spĺňajú náročné kritériá kladené na základné funkcie matematickej učebnice, medzi ktoré K. Križalkovič zaraďuje, okrem informačnej, funkciu motivačnú a stimulačnú, výchovnú, riadiacu, plánovaciu a kontrolnú (Gábor a kol., 1989, s. 112).

K dôležitým úlohám (matematického) vzdelávania patrí naučiť žiakov pracovať s učebnicou, ako s prvým odborným študijným textom. Žiaci sa učia orientovať sa v informáciách, selektovať dôležité prvky od marginálnych, zoznamujú sa s exaktným matematickým jazykom a jeho symbolikou. Aktívna práca s učebnicou, získavanie informácií nielen z primárneho učebnicového prameňa, ale aj vyhľadávanie a konfrontácia matematických poznatkov vo viacerých literárnych a informačných zdrojoch je charakteristická najmä pre mimoriadne nadaných žiakov a žiakov, ktorí majú nadanie na matematiku. Cielená manipulácia s knihou sa zaraďuje medzi metódy samostatnej práce, pričom má rozvíjať nielen myšlienkové procesy, ale má viesť k tvorivosti nielen učiteľov, ale najmä žiakov. Rozvoj špecifických schopností sa očakáva aj od aktívneho používania informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní matematiky. Tak, ako sa žiaci učia pracovať s učebnicou, je potrebné, aby postupne získavali správne návyky a zručnosti aj v oblasti používania prostriedkov IKT. Najmä v súčasnej ére, predimenzovanej množstvom informácií prístupných prostredníctvom komunikačných prostriedkov, ktoré môžu byť rôzneho druhu, charakteru, ale najmä rôznej kvality, *je potrebné naučiť žiakov základným pravidlám práce s nimi, aby efektivita času a námahy potrebnej na ich získavanie a spracovávanie boli rentabilné,* resp. aby zodpovedali splneniu stanoveného cieľa.

2.2 Úloha elektronických učebníc matematiky

Miera používania učebnice matematiky žiakmi a formovanie vzťahu k nim sú závislé od miery učiteľovej práce s učebnicou, resp. učiteľovho využívania rôznych matematických kníh. Analogická situácia je aj v oblasti využívania a práce s matematickými informáciami, resp. informáciami s matematikou súvisiacimi, prostredníctvom informačných a komunikačných technológií. Práca s IKT je špecifická a vyžaduje si istý stupeň informačnej gramotnosti. Aj preto je informačná gramotnosť učiteľa nevyhnutnou podmienkou pre účelné oboznamovanie sa a sprostredkovávanie matematických poznatkov, orientáciu sa v množstve matematických informácií šírených prostredníctvom sietí, znázorňovanie súvislostí a konkretizáciu pojmov prostredníctvom (nielen) matematických edukačných balíkov.

Súčasné moderné prístupy k matematickému vzdelávaniu zdôrazňujú, že učiteľ má svojou profesionalitou a odbornosťou žiakom vytvárať také pracovné prostredie a navodzovať také situácie, ktoré pozitívne ovplyvňujú ich motiváciu pre rozvoj individuálnych schopností. K tomuto cieľu je potrebná *pestrosť využívania rôznych metodických postupov, ich striedanie a diferencované prispôsobovanie jednotlivým individualitám.* Povahové vlastnosti každého žiaka, jeho osobitosť a jedinečnosť predurčujú jeho vzťah ku zvoleným metódam práce, a preto treba v konečnom dôsledku rešpektovať slobodnú vôľu žiaka pri výbere práce s učebnicou, resp. počítačom. Akýmsi premostením medzi tradičnou učebnicou matematiky a novodobými počítačovými trendmi vo vyučovaní matematiky sa stávajú aj na Slovensku **elektronické učebnice matematiky**. Ich cieľom je ponúknuť žiakom ďalšie aspekty využitia matematiky v reálnom i virtuálnom svete, redukovať obsahovú kvantitu matematického informačného aparátu, sústreďovať sa skôr na rozvoj tvorivej práce s matematickými informáciami, hľadať súvislosti interdisciplinárneho charakteru. Vladimír Jodas ako zdôvodnenie tvorby matematickej elektronickej čítanky uvádza, že je potrebné: „Prejsť od odovzdávania poznatkov ku konštruktívnemu spôsobu ich tvorby. Tu budú hrať IKT kľúčovú úlohu. Umožňujú vytvoriť žiakom tvorivé prostredie, v ktorom môžu vlastnou činnosťou, experimentovaním a pozorovaním nielen objavovať nové poznatky, ale najmä rozvíjať a pestovať potrebné kompetencie a schopnosti."

Elektronické učebnice matematiky budeme považovať za zmysluplné, ak ich obsahom nebudú len textové dokumenty v rôznych formátoch, ale mali by prinášať istú „pridanú hodnotu". Pridaná hodnota v elektronických učebniciach môže byť založená na tom, že sa budú využívať:

- **Hypermediálne prvky**, t. j. „viazanie" vzájomne súvisiacich tém, alebo prepájanie statických a dynamických formátov, napríklad vo forme hypertextových odkazov. (Lineárna štruktúra tradičnej učebnice matematiky sa v spracovanej forme v prostredí IKT dokáže ľahko nahradiť nelineárnou štruktúrou, ktorá umožňuje spájanie a zaraďovanie skúmaného javu do širších súvislostí.)
- **Multimediálne prvky**, t. j. zaraďovanie materiálov, v ktorých sa inkorporujú rôzne formáty dokumentov (využívanie dynamických obrazových materiálov, animovaných techník, zvukových záznamov a pod.).
- **Interaktívne a experimentálne prostredia**. V matematike ide hlavne o prístupnosť k interaktívnym appletom, matematickým animáciám a experimentálnym virtuálnym laboratóriám určeným na matematické vzdelávanie vybraných partií učiva.

Uvedené témy sú podrobnejšie rozpracované v ďalších kapitolách aj s konkrétnymi ukážkami tvorby a využívania vymenovaných prvkov v matematickom vzdelávaní. K ďalším výhodám elektronickej učebnice matematiky patrí:

- ľahšia aktualizácia a modifikácia obsahu,
- prístupnosť prostredníctvom Internetu, alebo elektronických záznamových nosičov,
- prispôsobenie sa (tempo a forma štúdia) individuálnym požiadavkám cieľovej skupiny (žiakom).

Z hľadiska tvorby elektronických matematických materiálov treba poznamenať, že ich príprava a zverejňovanie na webových stránkach si vyžaduje vysokú erudovanosť autora nielen v odborných oblastiach matematiky, didaktiky matematiky, ale aj výbornú orientáciu sa v oblasti IKT, špeciálne v matematických softvérových produktoch.

V súčasnosti je často pertraktovanou otázkou problematika získavania, využívania, šírenia informácií prostredníctvom IKT a ich vplyv na existenciu kníh vo všeobecnosti. Finančná náročnosť nákladov spojených so vznikom kníh (a teda i učebníc) a ich distribúciou, je vysoká. Vytvorenie virtuálnej učebnice a jej šírenie prostredníctvom celosvetovej siete je z tohto hľadiska efektívnejšie. Na druhej strane, aj napriek progresívnemu trendu budovania informačnej spoločnosti, vybavenosť kvalitnými prostriedkami IKT, resp. ich prístupnosť v školách a domácnostiach nie je u nás zatiaľ bežná a bezproblémová. Aj keď je veľa argumentov hovoriacich „pre“ a „proti“ obom prostriedkom umožňujúcim zvyšovanie vzdelanostnej úrovne spoločnosti, treba konštatovať, že uvedené dva informačné zdroje nie sú vo vzájomnej kontradikcii. Naopak, vhodným začleňovaním do vzdelávacieho procesu sa môžu veľmi účelne a efektívne dopĺňať.

3

PROSTRIEDKY IKT V POZÍCII ASISTENTA ZNÁZORŇOVANIA V MATEMATIKE

3.1 Predmety skúmania problematiky IKT v matematike

Vyhľadávanie nových foriem využívania prostriedkov informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní matematiky na všetkých stupňoch škôl, ale aj v rámci dištančného a e-learningového matematického vzdelávania patrí k prioritám súčasného smerovania a modernizácie vyučovania matematiky. Predmetom skúmania a vedeckého záujmu sú mnohé otázky vynárajúce sa v súvislosti s psychologickými aspektmi vplývajúcimi na výchovno-vzdelávací proces a kognitívnymi procesmi indukovanými počítačom podporovaným matematickým vzdelávaním (T. Marcinek, 2004). Obsiahlosť problematiky IKT vo vyučovaní matematiky je podmienená širokospektrálnosťou prostriedkov a tiež produktov informačných technológií, rýchlosťou ich vývoja a infiltráciou do každodenného života jednotlivcov, skupín a spoločností. Matematické vzdelávanie reflektuje na túto požiadavku doby tým, že sa odborníci zaoberajú otázkami rozmanitosti vplyvov vzdelávania pomocou IKT.

- Hľadajú sa možnosti a podmienky *používania IKT vo vyučovaní matematiky v jednotlivých vedných odboroch* matematiky,
- sledujú sa *zmeny komunikácie v matematike* v súvislosti so zmenou *didaktického prostredia*, vrátane ich vplyvu na sociálne správanie a klímu (nielen) v žiackej komunite,
- hľadajú sa *nové metódy a formy efektívneho vyučovania* matematiky s počítačovou podporou a súčasne sa vyhodnocujú aj oblasti a činnosti, v ktorých sa používanie IKT neodporúča,
- realizuje sa permanentné *mapovanie a vyhodnocovanie rôznych vplyvov* používania počítačov a ich softvérových produktov v matematike *na kvalitu a kvantitu* získaných poznatkov žiakov.

Vyústením modernizačného snaženia rôznych autorov je už spomínaná príprava elektronických metodických materiálov a elektronických učebníc, ktoré majú byť praktickým výsledkom teoretického skúmania integrácie IKT do vyučovania matematiky.

3.2 Interakcia prezentácií a prostriedkov IKT

Ak chápeme matematiku, okrem iného, aj ako prostriedok znázorňovania abstraktného, spredmetňovania nehmatateľných javov a súvislostí, potom je nutné zamýšľať sa nad formami a spôsobmi *efektívneho znázorňovania v matematike*. Problematika sa javí trochu inak, ak je jedným z prípustných prostriedkov znázorňovania matematických problémov počítač, alebo iné informačné a komunikačné technológie. Odhliadnuc od skutočnosti, že vznik a vývoj IKT je samotnou prezentáciou niektorých častí matematiky (J. Fulier konštatuje, že „matematika (...) vedecká disciplína stála pri zrode počítačov a počítačových technológií“), sám počítač sa nepochybne stal prezentačným prostriedkom pre jednotlivé oblasti matematiky. Na druhej strane, korektná činnosť počítača potrebuje podporu určitých foriem prezentácie vo forme rôznych programovacích jazykov. V konečnom dôsledku, počítač a jeho aplikácie, poskytujú grafické výstupy v rozličných podobách (nielen v statických, ale aj interaktívne – dynamických), ktoré majú v matematike *asistovať pri napĺňaní funkcie názornosti*.

3.3 Počítač – prostriedok, alebo pomôcka v znázorňovaní v matematike?

V každom, z vyššie spomínaných prezentačných hľadísk, vystupuje počítač v rôznej kategórii v rámci jeho didaktického zaradenia do vyučovacieho procesu. Všeobecne prostriedky IKT môžeme charakterizovať aj ako *didaktické prostriedky*, aj ako *učebné pomôcky*, ale aj ako *predmety vybavenia školy*. Dôležitá je správna kategorizácia v príslušnom kontexte používania počítača. Z Krátkeho slovníka slovenského jazyka vyberáme:

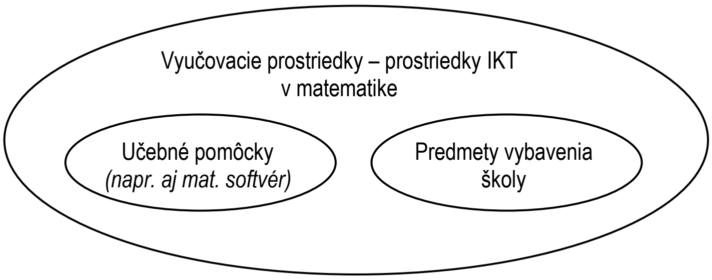
- pomôcka – vec slúžiaca na zvládnutie, uľahčenie niečoho (napríklad: učebné pomôcky, pracovná, technická pomôcka),
- prostriedok – (okrem iných významov) vec, pomôcka, nástroj, zariadenie, opatrenie a pod. na uskutočnenie niečoho (čistiace, pracie, ochranné, dopravné, výrobné jazykové).

Podľa D. Hapalu „sú vyučovacie prostriedky všetky materiálne predmety, ktoré sprostredkúvajú a umožňujú priebeh vyučovacieho procesu. Patria k nim napr. učebné pomôcky a predmety vybavenia školy“. Učebnú pomôcku definuje v materiálnom zmysle ako „predmet používaný na vyučovaní, ktorý určitým spôsobom reprezentuje vyučovaný jav, alebo činnosť“ (D. Hapala, 1965, s. 34-35). Z uvedeného vyplýva, že učebné pomôcky sú súčasťou (podmnožinou množiny) vyučovacích prostriedkov používaných vo vyučovaní matematiky. Špeciálne hovoriť o názorných pomôckach nemá zmysel, lebo všetky učebné pomôcky sa majú opierať o *princíp názornosti*.

Ako príklad uvedieme, že *zaradenie počítača do kategórie predmetov vybavenia školy* je vhodné, keď ho používame vo význame technického zariadenia na využívanie pomôcok, napr. na reprodukciu obrazu, zvuku a podobne, t. j. na prezentáciu (znázorňovanie) niektorých javov z matematiky. Pritom produkty, ktoré sa znázorňujú, sú pomôckou. Podobným príkladom je klasická popísaná tabuľa.

Počítač môže byť učebnou pomôckou, ak predmetom študijného záujmu je napríklad jeho zloženie a princíp fungovania (táto téma skôr patrí do informatiky). V matematike môže byť počítač pomôckou, ak ho používame ako prístroj (stroj) na počítanie. Významovo ide o uľahčenie náročnejších postupov využívaním počítača na rutinné výpočty, alebo na skúmanie a dôkazy matematických vlastností a zákonov (kalkulačka, symbolické a numerické výpočty). Pri tejto činnosti používame zvyčajne niektorý z programových produktov. Osobitnou kategóriou sú programové produkty, t. j. aplikácie určené na vyučovanie matematiky a jej hraničiacich disciplín, a tiež médiá ako napr. CD a DVD s matematickým obsahom. Tieto sú podkategóriou učebných pomôcok.

Avšak obe kategórie sú *komponentmi didaktických prostriedkov*, ktoré používame vo vyučovaní matematiky na dosiahnutie výchovno-vzdelávacích cieľov.



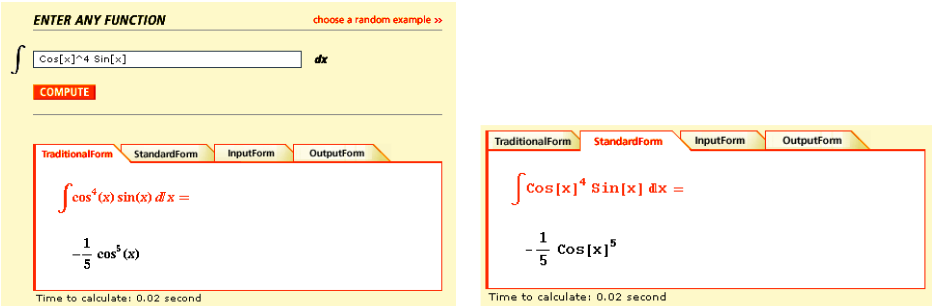
Obr. 3.1 *IKT v pozícii didaktického prostriedku v matematike*

3.4 Interpretácia foriem znázornenia v matematike

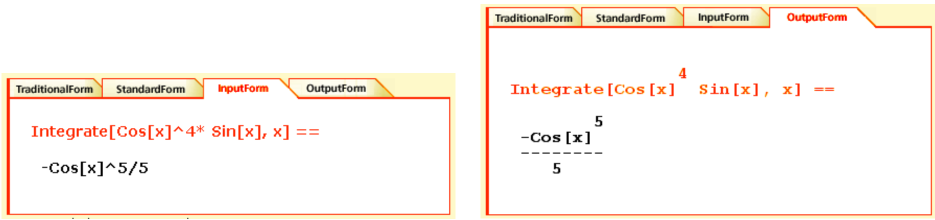
Tradičné formy znázorňovania v matematike majú svoju históriu a nepochybne prešli istým vývojom. Či už ide o najelementárnejšie spôsoby zápisu čísel, cez zavedenie premenných, t. j. formalizmus algebry, graf funkcie ako formy znázornenia skúmania funkcie, ďalej cez novšie symbolické zápisy integrálneho počtu, maticové schémy, až po pomerne mladé znázorňovanie grafov v štrukturálnych vzťahoch a oblasť teórie množín, ktorá je tiež druhom formy znázornenia v matematike. Nové formy znázornenia priniesla informatika, disciplína vyprofilovaná aj z matematiky, v tvare vývojových diagramov, štrukturogramov, topologických sietí a ďalších grafických znázornení a schém opisujúcich priebeh postupu riešenia matematického problému, prípadne štruktúru prvkov a ich vzájomný vzťah. Keďže interakcia odborov matematiky, informatiky a ďalších príbuzných disciplín reflektujúcich na informačné a komunikačné technológie je významná, je zrejmé, že matematika reaguje na nové modely znázorňovania a stávajú sa pre ňu prípustnými. Následkom tohto javu sú samozrejmé aj zmeny v jazyku matematiky, ktorý hrá rozhodujúcu úlohu nielen vo formulovaní problémov, ale aj pri interpretácii získaných výsledkov.

Aplikačné programy, určené pre matematiku, umožňujú hľadanie nových prístupov k učeniu a pochopeniu matematiky tým, že *spájajú numerické, algebraicko-symbolické a grafické* možnosti „znázorňovania matematiky“. Preto v súčasnosti už nikoho neprekvapia ukážky reprezentácie zápisov matematických problémov a ich výsledkov, ako formy znázornenia, napr. v programovom systéme Mathematica[2] (obr. 3.2, obr. 3.3).

[2] http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html



Obr. 3.2 *Rôzne spôsoby znázornenia symbolického výpočtu integrálu v tradičnej a štandardnej forme bežne používanej v matematike*

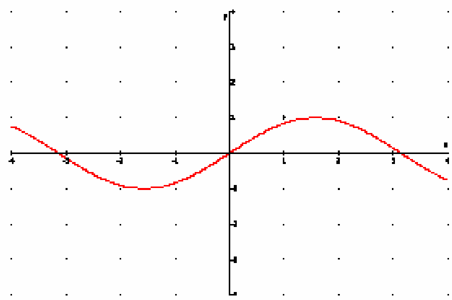


Obr. 3.3 *Rôzne spôsoby znázornenia symbolického výpočtu integrálu vo forme zápisu do výpočtového prostredia a vo forme znázornenia výstupu na obrazovku*

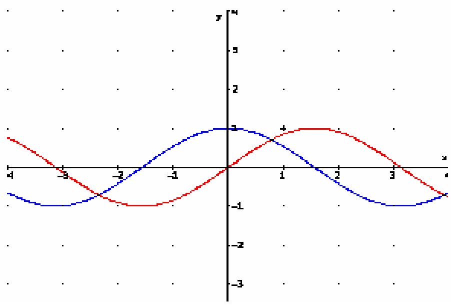
Podobnou matematickou aplikáciou zaraďujúcou sa k systémom CAS je Derive, ktorý je pre našich učiteľov a žiakov snáď prístupnejší nielen z finančného hľadiska, ale najmä tým, že je redukovanejším balíkom určeným na rôznorodé (nielen na graficko-zobrazovacie) matematické výpočty. Je postačujúcim prostriedkom na znázorňovanie matematiky na úrovni strednej školy a výborným pomocníkom v práci učiteľa. Priamo v systéme Derive možno pripraviť kompletný metodický list riešiaci vybranú úlohu komplexného charakteru.

Príklad. *Nakreslite grafy funkcií f(x)=sin(x) a g(x)=cos(x). Vypočítajte súradnice priesečníkov na intervale <0, 2π>. Vyšrafujte rovinný obrazec, ktorý funkcie vymedzujú. Vypočítajte jeho obsah.*

#1: SIN(X)



#2: COS(X)



#3: SOLVE(SIN(X) = COS(X), X) – *výpočet priesečníkov v hlavnom menu, v položke Simplify:*

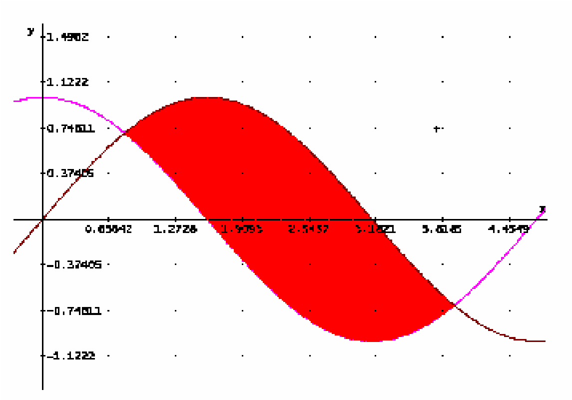
#4:

$$x = \frac{5\cdot\pi}{4} \vee x = -\frac{3\cdot\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{4}$$

Na intervale <0, 2π> sú dva spoločné priesečníky. Na znázornenie rovinného obrazca, ktorý funkcie vymedzujú použijeme zápis:

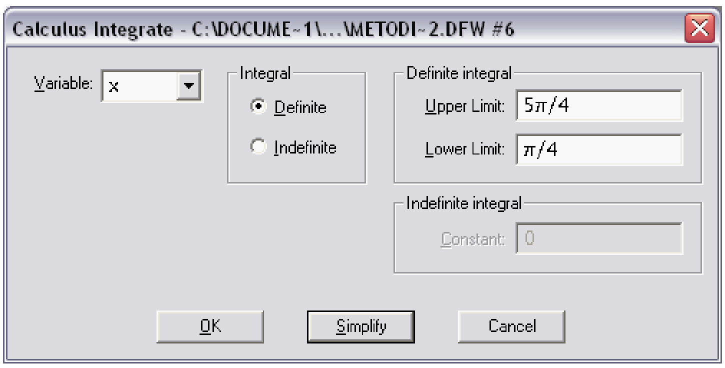
#5:

$$\text{AreaBetweenCurves}\left(\text{SIN}(x),\ \text{COS}(x),\ x,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{5\cdot\pi}{4},\ y\right)$$



Obsah znázornenej časti vypočítame pomocou určitého integrálu, ktorého zápis v Derive je tiež istou reprezentáciou jedného typu znázornenia matematiky:

#6: SIN(X) – COS(X) – *výpočet určitého integrálu v hlavnom menu, v položke Calculus-Integrate:*



#7:

$$\int_{\pi/4}^{5\cdot\pi/4} (\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{COS}(x))\, dx$$

#8:

$$2\cdot\sqrt{2}$$

Záver: *Obsah obrazca ohraničeného krivkami sin(x) a cos(x) na intervale určenom ich spoločnými priesečníkmi je* $2\sqrt{2}$ *(j^2).*

V uvedenom príklade sa vzájomne dopĺňali viaceré formy znázorňovania matematických pojmov, javov a vzťahov. Pri riešení matematického problému, pomocou akejkoľvek formy znázornenia, je dôležité nielen **navrhovanie vizuálneho znázornenia**, ale aj **interpretovanie** jednotlivých súvislostí a znázornených udalostí. Učiteľ by mal žiakov naučiť efektívne využiť všetky informácie, ktoré poskytuje istý druh znázornenia, ale zároveň by sa nemal žiak dostať do pasívnej polohy prijímania predkladaného. Kritickým myslením, konštruktivistickým prístupom a zároveň získanými skúsenosťami si má žiak postupne budovať **odhad** danej **matematickej situácie**. V opačnom prípade by sa mohlo stať chybou užívateľa (resp. autora) matematických programových produktov, že zobrazovaná situácia nie je z odborného hľadiska korektná, a teda neposkytuje hľadanú informáciu. Aby mohol byť učiteľ matematiky kompetentným facilitátorom pre uvedenú oblasť matematického vzdelávania, musí sám efektívne využívať prostriedky IKT a vymoženosti matematických programových produktov. Na kompetencie učiteľa matematiky súvisiace s aktívnym používaním IKT vo vyučovaní upozorňuje aj E. Partová (2005, s. 17-23). Napriek tomu, že v rámci učiteľského vysokoškolského štúdia získa absolvent základný prehľad o dostupných programových produktoch určených na podporu vyučovania matematiky a jej znázorňovania, treba akcentovať myšlienku permanentného celoživotného vzdelávania. Iba v tom prípade môžu byť prostriedky IKT efektívnym a žiadaným asistentom vo vyučovaní matematiky.

4

INTERAKTÍVNE PROSTREDIE V PERSPEKTÍVACH VZDELÁVANIA

4.1 Interaktívne prostredie v školskej klíme

Monitorovanie interakcie, ako vzájomného pôsobenia dvoch, prípadne viacerých činiteľov, je zo sociologického hľadiska dôležitým (nie novým) prvkom v každej sfére ľudského bytia. Z pohľadu výchovno-vzdelávacieho procesu sa tento pojem spája so štúdiom *školskej klímy*, ktorej súčasťou je *prostredie, aktéri, aktivity a komunikácia*. Aktérmi sú učiteľ a žiaci, sleduje sa ich postavenie, úloha a vzájomná interakcia. Ich komunikácia je sledovaná z verbálnej stránky (kto hovorí, kedy, s akým cieľom, v akom kontexte), ale aj v kontexte použitia neverbálnych prostriedkov a ich dôsledkov. Aktivity v sebe koncentrujú vybraný typ učenia, cieľ, koľko času zaberú, v akom priestore sa uskutočňujú a akými prostriedkami.

Existuje viacero prístupov ku skúmaniu klímy školskej triedy a interakcie učiteľ – žiaci, ktoré sa v zásade líšia výberom objektu štúdia a skúmanou premennou. V rámci špecifikovaného interakčného prístupu je objektom štúdia školská trieda a učiteľ, pričom skúmaným javom je interakcia medzi učiteľom a žiakmi v priebehu vyučovacej hodiny, vplyv priameho aj nepriameho pôsobenia učiteľa na výkonnosť triedy, jej jednotlivých žiakov, ich postojov a celkovo na efektivitu učiteľovej práce (J. Čáp – J. Mareš, 2001).

Vplyv zaradenia nových technologických postupov do vyučovania matematiky je významný z rôznych hľadísk, napr. z organizačno-sociologického, interakčného, pedagogicko-psychologického štúdia školskej atmosféry a už spomínanej interakcie medzi učiteľom a žiakom. V uvedených prístupoch sa (okrem iného) kladie dôraz na rozvoj tímovej práce na hodine, všíma sa zastúpenie kooperatívneho vyučovania v skupinách, využívanie technologických vyučovacích postupov, zastúpenie počítačových metód, pozoruje sa priestor pre komunikáciu učiteľa so žiakmi a medzi žiakmi navzájom (J. Čáp, J. Mareš, 2001, s. 565-579). V predchádzajúcich ukazovateľoch nastávajú zmeny, ktoré vyplývajú zo zaradenia IKT do vyučovacieho procesu.

4.2 Interaktivita v prostredí IKT

V rámci modernizačných snažení sa súčasťou výchovno-vzdelávacieho procesu stali informačné a komunikačné technológie, ktorých využívanie sa sleduje z mnohých hľadísk. Predmetom záujmu vyučovania v počítačovom prostredí je jeho významný vplyv na školskú klímu, na interakciu medzi žiakom a učiteľom a vyžaduje si v praxi nové didaktické metódy, formy a prístupy. Didaktika počítačom podporovaného vyučovania by mala používať nielen metodické postupy tradičného vyučovania, ale mala by rešpektovať najnovšie trendy z oblasti IKT a permanentne navrhovať nové postupy, formy a prostriedky na ich efektívnu integráciu do vyučovacieho procesu.

Informačné a komunikačné technológie sa, v rámci referenčného systému medzi spomínanými didaktickými subjektmi, stali vo vyučovaní prostredím, ktoré zásadným spôsobom ovplyvňuje ostatné činitele pôsobiace v triangulárnej schéme učiteľ – žiak – poznatok.

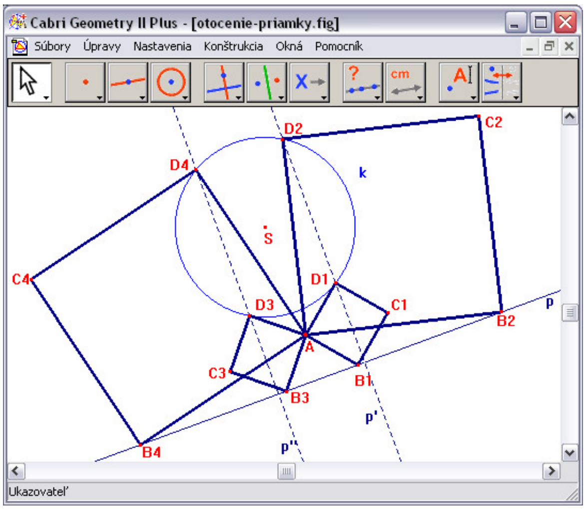
Rozvoj digitálnych technológií a prostriedkov IKT umožnil a zjednodušil komunikáciu v rámci celosvetovej siete. Podľa aplikovanej technológie možno v zásade hovoriť o dvoch úrovniach, a to o interaktívnej a neinteraktívnej komunikácii. Pod pojmom *interaktivita* sa vníma *možnosť okamžitej reakcie na podnet* (obojsmerná komunikácia).

Obr. 4.1 *Súčasti technológie eBeam. Zdroj: www.ebeam.sk*

Zmeny, ktoré vyplývajú priamo z eventuálnej integrácie prvkov IKT do vyučovania matematiky treba v tomto kontexte mapovať minimálne na dvoch úrovniach. Jednu úroveň tvoria softvérové aplikácie určené na podporu vyučovania vybraných disciplín, kde sa do popredia dostávajú interaktívne produkty, ktoré so sebou prinášajú istú dávku dynamiky. Sú to aplikácie, ktoré reagujú zmenou výsledku (numerického, symbolického, alebo grafického) na zmenu niektorej zo vstupných podmienok (impulzov). Druhá úroveň je založená na využívaní informačných a komunikačných a ďalších technických prostriedkov, ktoré umožňujú nielen efektívne uplatnenie prvej úrovne, ale tvoria interaktívne prostredie, pomocou ktorého sa matematika stáva neoddeliteľnou súčasťou reálneho sveta. Ide teda o technické zariadenia, ktoré interaktivitu zabezpečujú. Zvyčajne sú doplnené nutným softvérovým doplnkom, s cieľom sprostredkovania komunikačného rozhrania. Ide napríklad o špeciálne interaktívne tabule, prípadne zariadenia, ktoré sú schopné zmeniť obyčajnú tabuľu, alebo projekčnú plochu na interaktívne prostredie (napr. technológia eBeam, obr. 4.1).

4.3 Interaktívna tabuľa

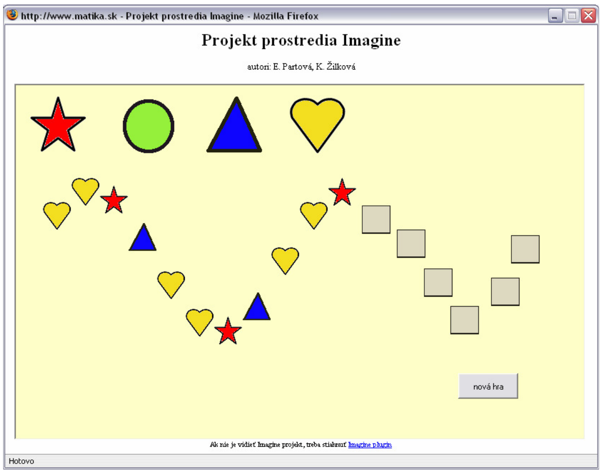
Interaktívna tabuľa je zariadenie umožňujúce transformáciu obyčajnej tabule (z bieleho plastu) na *dotykovú obrazovku*, prostredníctvom ktorej možno ovládať počítač a jeho aplikácie. Ďalšou vlastnosťou je možnosť zaznamenania a spracovania užívateľských poznámok zapísaných elektronickými perami do digitálnej podoby a ich prípadné *zdieľanie* v reálnom čase. Obidva varianty prispievajú k realizácii efektívnejšieho vzdelávania a možnosti využiť nové vzdelávacie techniky a metódy. Prijímatelia sa stávajú spolutvorcami scenáru vyučovacej jednotky, vytvárajú hypotézy a majú možnosť ich následnej verifikácie, či prípadnej korekcie, otvára sa priestor pre spoluprácu, tvorbu a realizáciu svojich návrhov myšlienok. *Učiteľ (autor) pripravuje podnetné prostredie a aktivizuje prijímateľov do konštrukcie poznatkového mechanizmu.* Využívaním prostriedkov informačných technológií sprostredkováva rôzne modely skúmaného javu, predkladá ich v súvislostiach a pôsobí na rôzne zmysly prijímateľa. Prečo hovoríme o *interaktívnej* tabuli? Aktéri vysielajú požiadavky dotykom elektronického pera na snímanú plochu a podľa zvolenej akcie dostávajú spätnú väzbu – odpoveď na ich požiadavku. Týmto spôsobom možno využívať rôzne multimediálne produkty, animované techniky, voľne sa pohybovať po Internete, získavať informácie a realizovať všetky tie aktivity, ktoré bežne ako užívatelia počítačov uskutočňujeme. Prednosť je v tom, že všetko sa odohráva priamo pred očami prijímateľov, a preto netreba vzdelávanie uskutočňovať v špeciálnych počítačových učebniach. Interaktívna tabuľa je teda prostriedkom na uskutočňovanie vzdelávacích cieľov a na využívanie ďalších softvérových aplikácií. Tým sa stávajú autorom aj prijímateľom prístupné všetky nástroje informačných a komunikačných technológií, medzi ktoré sa zaraďujú nástroje na prácu s textom, s obrázkami, s tabuľkami, nástroje určené na komunikáciu, vzdelávanie, na šírenie a prezentáciu informácií, počítačové hry a podobne. K nástrojom na vzdelávanie patria simulátory, virtuálne laboratóriá, mikrosvety, multimediálne encyklopédie a ďalšie aplikácie (I. Kalaš, 2001). Špeciálnu kategóriu softvérových produktov tvoria interaktívne programy.



Obr. 4.2 *Ukážka dynamického prostredia na tvorbu interaktívnych konštrukcií www.matika.indatex.sk*

4.4 Interaktívne programy

Interaktívne softvérové výučbové aplikácie sú prostredím, v ktorom je umožnená vzájomná komunikácia medzi užívateľom, resp. užívateľmi a programom, t. j. priamy vstup do činnosti programu. Príkladom z oblasti geometrie sú dynamické prostredia na tvorbu interaktívnych konštrukcií (napr. Cabri geometria, obr. 4.2). Druhou aplikáciou je ukážka so série úloh zameraných na dopĺňanie a pokračovanie predznačeného vzoru, vytvorených v programovacom prostredí Imagine (obr. 4.3).



Obr. 4.3 *Ukážka interaktívneho pedagogického softvéru na dopĺňanie a pokračovanie vzoru http://www.matika.sk/aplijav.htm#vzor4ftv*

Obidve ukážky majú spoločnú vlastnosť interaktivity, avšak je medzi nimi zásadný rozdiel v tom, že pokiaľ geometrický systém umožňuje tvorbu vlastných užívateľských modelov (užívateľ konštruuje a vytvára vlastné interaktívne aplikácie) – ide o *otvorené výučbové prostredie*, tak druhý systém má pevne stanovenú štruktúru a obsah – ide o *uzatvorené výučbové prostredie*.

Interaktívnych výučbových programov je na elektronickom trhu pomerne veľké množstvo, sú však rôznej kvality. Preto je dôležité vychovávať prijímateľov ku kritickému pohľadu na ich výber a následné použitie. Programy musia spĺňať prioritne odborné kritériá v rámci predmetového zamerania a cieľa, pre ktorý sme sa rozhodli softvér použiť. Hodnota softvéru by sa mala posudzovať z viacerých hľadísk. K základným patrí:

- vzdelávací aspekt (Hľadajú sa odpovede na otázky: Na čo program slúži? Komu je určený? Kde a ako sa bude používať? Zodpovedá odborným požiadavkám daného predmetu? a pod.);
- užívateľské hľadisko (Je obsluha softvéru jednoduchá a ľahko naučiteľná? Aký má vzhľad? Nie sú v ňom rušivé prvky? Má v sebe zabudované užívateľské pomôcky? atď.);

- technické parametre softvéru (Aké sú hardvérové požiadavky na bezchybný priebeh programu? Je program pamäťovo náročný? Je jeho inštalácia jednoduchá? …).

Okrem uvedených ukazovateľov je potrebné posudzovať aj ďalšie, nie menej dôležité atribúty, ktoré sú potrebné na pozitívne hodnotenie (interaktívneho) pedagogického softvéru. Z kontextu vyplýva, že pri tvorbe počítačového modelu určeného pre vybranú oblasť by mali participovať odborníci z viacerých oblastí. O tejto problematike sa čitateľ dozvie viac v kapitole s názvom Komunikačné rozhranie v procese tvorby počítačového modelu matematického problému.

4.5 Význam interaktívnych prostriedkov

Interaktivita vnáša do vzdelávacieho procesu prvky dynamiky. Mení statický prístup znázorňovacích techník na možnosť dynamických zmien v závislosti od vstupných podnetov. Tým sa otvárajú nové možnosti v technologických vzdelávacích prístupoch. Väčší priestor získavajú experimentálne postupy, „objaviteľské" techniky a konštruktivistický kognitívny prístup. Interaktívny počítačový model môže byť virtuálnym laboratóriom, v ktorom možno bez obáv a strachu manipulovať s jeho prvkami, skúmať a spoznávať zákonitosti reality.

Do systému súčasných didaktickým metód sa aj vďaka rozširovaniu interaktívnych produktov zaraďuje metóda *„zdieľania aplikácií, resp. súborov"* v reálnom čase, v rámci jednej miestnosti, budovy, prípadne na diaľku (prostredníctvom lokálnej siete, prípadne Internetu). Ide o možnosť používania toho istého súboru, v tom istom čase viacerými užívateľmi lokalizovanými po celom svete. Všetci zainteresovaní participanti zdieľania (v niektorej literatúre, hlavne zahraničnej, sa hovorí o *kolaborácii*) majú možnosť spolupracovať na jednom projekte (v rámci systému eBeam ide o *míting,* alebo *scrapbook*), ktorý je aktualizovaný vždy po zásahu a zmene ktorýmkoľvek účastníkom. K prednostiam spomínanej metódy patrí umožnenie a sprístupnenie práve preberaného učiva aj neprítomným žiakom (E. Partová, 2007) a možnosť ich zapojenia do spolupráce, „možnosť konzultácií v malých skupinách založených na doučovaní v pohodlí domova" (T. Marcinek, 2007, str. 57), rozvoj schopnosti pracovať v tíme, vzájomne sa dopĺňať a konfrontovať.

Interaktívne prostredie znamená aj možnosť uplatňovania *virtuálnych manipulačných metód* vo vyučovaní matematiky, i keď modely predmetnej manipulácie sú, na rozdiel od tradičných, virtuálne. Keďže „didaktické i technické možnosti využívania tradičných manipulačných aktivít sú obmedzené" (O. Židek, 2007), interaktívne programové produkty v interaktívnom IKT prostredí môžu v istých fázach nielen suplovať predmetnú manipuláciu, ale znamenajú aj potenciálny kvalitatívny posun vo vnímaní modelu v inom prostredí, resp. inom zobrazení.

Interaktivita je všeobecnou požiadavkou vo vyučovaní, zvlášť vo vyučovaní matematiky. Rozvoj prostriedkov IKT umožňuje efektívne využívanie interaktívnych zariadení a interaktívnych programových aplikácií v matematickom vzdelávaní na rôznych úrovniach, počnúc názornými demonštračnými ukážkami v interaktívnom prostredí, cez osobnú žiacku skúsenosť a manipuláciu s interaktívnymi produktmi, až po prípadný vlastný návrh, realizáciu, resp. spoluúčasť na tvorbe matematických interaktívnych výstupov. Autori P. Híc a M. Pokorný nepriamo prízvukujú dôležitosť vzájomnej interakcie subjektov vo vzdelávacom procese v konštatovaní o „prakticky nulovej možnosti získavania spätnej väzby o činnosti študentov“ v off-line verziách elearningových kurzov, čím sa strácajú užitočné informácie o priebehu kognitívneho procesu (P. Híc – M. Pokorný, 2005).

V počiatkoch integrácie počítačových predností do matematického vzdelávania bola možná ich aplikácia len v špecializovaných učebniach so separovanými pracovnými stanicami. Modernizácia vyučovania matematiky v tomto kontexte znamenala aj zmenu vo vyučovacích stratégiách, uprednostňované bolo skôr individualizované, prípadne skupinové vyučovanie, čoho nezanedbateľným dôsledkom bola zmena vo vzájomnej interakcii a komunikácii učiteľ – žiak. Využívanie interaktívnych prostriedkov umožňuje návrat k niektorým tradičným vzdelávacím prístupom, ale v novom, podnetnom prostredí, a zároveň poskytuje spektrum nových postupov a metód. K najdôležitejším prednostiam interaktívneho prostredia vo vyučovaní treba jednoznačne zaradiť *rozvoj interaktivity smerom k ľudskému faktoru*, podnecovanie vzájomnej komunikácie a tímovej spolupráce.

5

DYNAMIKA OBRAZOVEJ INFORMÁCIE V MATEMATIKE

5.1 Systém eBeam vo vyučovaní matematiky

Práca so systémom eBeam na prvý pohľad vyzerá jednoducho. Po viacnásobných skúsenostiach s využívaním uvedenej technológie vo vyučovaní matematiky v príprave budúcich učiteľov môžeme konštatovať, že učiteľ musí nadobudnúť istú dávku zručnosti práce so systémom, aby priebeh hodiny bol plynulý, kontinuálny a nerušený technickými problémami. Nutné kompetencie potrebné pri efektívnom využívaní eBeamu vo vyučovaní matematiky analyzuje E. Partová (2007). Interpretuje vplyv využitia digitálnej tabule na metodickú prípravu učiteľa, na organizáciu vyučovania a v konečnom dôsledku na technické zručnosti užívateľa.

Interaktívna technológia eBeam pozostáva:

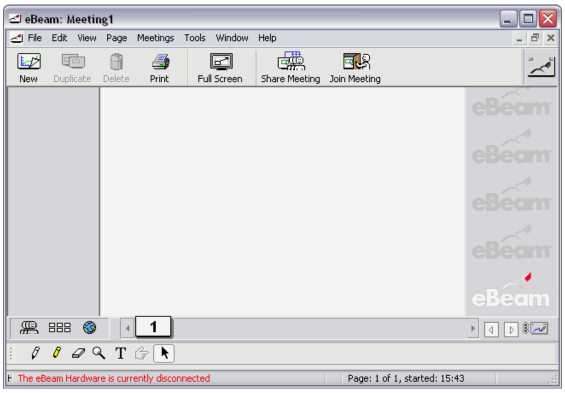
- zo *sondy* (obr. 5.1) umiestnenej v niektorom rohu obyčajnej bielej tabule,
- zo *softvéru* (obr. 5.2) umožňujúceho spracovávať zápisky z tabule (mítingy*)*
- a z ďalšieho príslušenstva vo forme elektronických pier a elektronickej stierky.

Obr. 5.1 *eBeam sonda, elektronické perá, www.ebeam.sk*

Súbor poznámok a anotácií združených v jednej, alebo vo viacerých stranách sa nazýva *míting* (meeting). Technológia eBeam umožňuje transformáciu bielej tabule na:

- digitálnu bielu tabuľu, s vlastnosťou zaznamenania a spracovania užívateľských poznámok zapísaných špeciálnymi elektronickými perami z bežnej tabule do digitálnej podoby a možnosťou ich zdieľania v reálnom čase;
- virtuálnu dotykovú obrazovku, ktorou sa môže ovládať počítač a jeho aplikácie priamo z tabule.

Systém eBeam pracuje v troch základných režimoch. Na digitalizáciu poznámok z bežnej tabule je určený režim bielej tabule (Whiteboard mode), na digitálne spracovanie zápiskov z papiera uchyteného na flipcharte sa používa režim Flipchart mode a na zobrazenie obsahu monitora pripojeného počítača s možnosťou jeho diaľkového ovládania slúži voľba projekčného režimu (Projection mode).



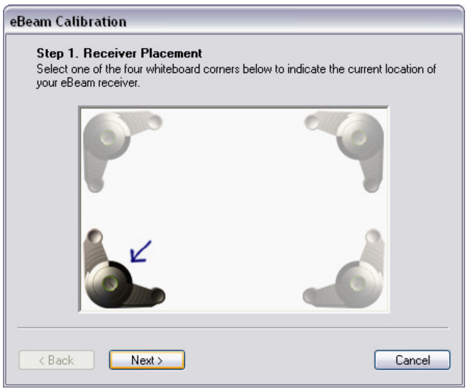
Obr. 5.2 *eBeam softvér, meeting1*

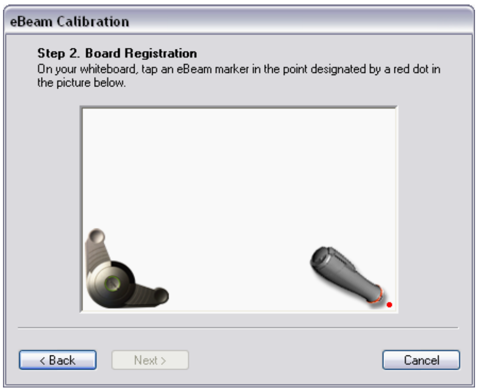
Záznam údajov z tabule a ich prenos do počítača v reálnom čase zabezpečuje režim bielej tabule. Poznámky sú zaznamenávané do vyššie spomínaného mítingového súboru, s ktorým môžeme pracovať ako s bežnou aplikáciou. To znamená, že môžeme editovať súbor, uložiť, vytlačiť, poslať elektronickou poštou a podobne.

Na prácu v projekčnom režime treba mať okrem eBeam hardvéru k dispozícii navyše dataprojektor pripojený k počítaču. Premietaný obraz z monitora počítača sa po úspešnej kalibrácii môže stať virtuálnou obrazovkou ovládanou pomocou *virtuálnej myši* zastúpenej vo forme *elektronického pera*.

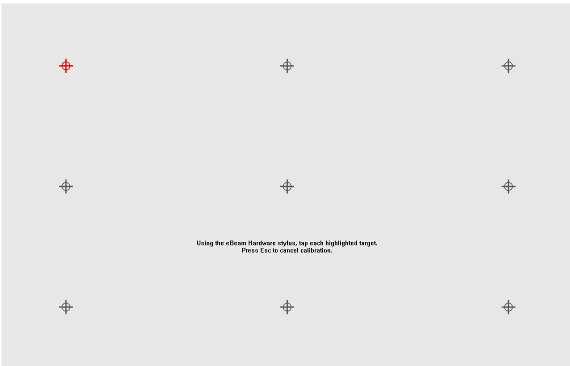
K výučbovým cieľom sa ukázalo výhodné premietať do mítingu importované obrázky a súbory slúžiace ako pozadie pre ďalšie vzdelávacie aktivity. Ide hlavne o prezentačné súbory, excelovské a wordovské súbory, obrázky, súbory typu „pdf“, ktoré možno importovať viacerými spôsobmi do eBeam aplikácie.

Pre úspešnú prácu so systémom eBeam treba najskôr uskutočniť prepojenie medzi hardvérovou sondou a eBeam-softvérom. Ďalší krok spočíva vo výbere režimu a následnej *kalibrácie* systému pre určený režim. *Kalibrácia je definovanie šírky a výšky zobrazovanej oblasti* na bielej tabuli, na ktorej bude zaznamenávaný pohyb elektronického pera. Pri kalibrácii v režime bielej tabule (obr. 5.3, obr. 5.4) treba postupovať podľa návodu pre kalibráciu záznamovej oblasti „Calibrate Capture Area“. Ak sa užívateľ rozhodne požívať eBeam v projekčnom režime, treba kalibrovať plochu určenú na premietanie podľa postupu „Calibrate Projection Area“.





Obr. 5.3, 5.4 *Postup kalibrácie záznamovej oblasti pre režim bielej tabule*



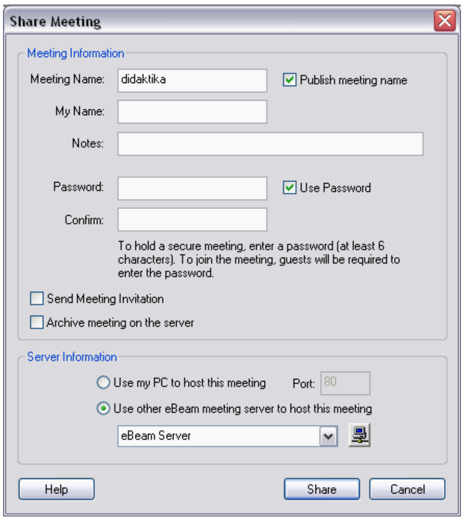
Obr. 5.5 *Kalibrácia systému eBeam v projekčnom režime*

Na základe skúseností z vyučovania matematiky s využitím systému eBeam možno konštatovať, že sa osvedčila *kombinácia oboch režimov*. Preto je výhodné realizovať obidve uvedené kalibrácie.

Súčasťou systému didaktických metód využívaných vo vyučovaní matematiky je kooperatívne vyučovanie. Podpora tímovej a skupinovej práce môže prebiehať využitím zdieľania eBeam mítingu v reálnom čase prostredníctvom intranetu a Internetu. Míting, ktorý chceme zdieľať s inými účastníkmi, je potrebné publikovať (obr. 5.6), s možnosťou voľby jeho archivácie, na *eBeam server*, ktorý zabezpečuje celý proces zdieľania. Mítingy sa môžu chrániť heslom prístupným len pre žiadaných účastníkov zdieľania. Naviazanie spojenia na existujúci míting prebieha tradičným spôsobom, a to buď:

- prostredníctvom eBeam softvéru (obr. 5.7) – zadaním názvu mítingu a hesla, alebo
- akceptáciou e-mailovej pozvánky na zdieľanie mítingu, pričom nie je potrebné mať nainštalovaný softvér.

Iniciátor zdieľania sa stáva *koordinátorom mítingu* a rozsah jeho kompetencií v rámci zdieľania je väčší ako u ostatných participantov mítingu. K jeho právomociam patrí editácia, vytváranie poznámok, vkladanie nových strán, vyradenie strán a v neposlednom rade ukončenie zdieľaného mítingu. Ostatní účastníci sú po uzatvorení zdieľaného mítingu okamžite odpojení a zdieľanie je ukončené.

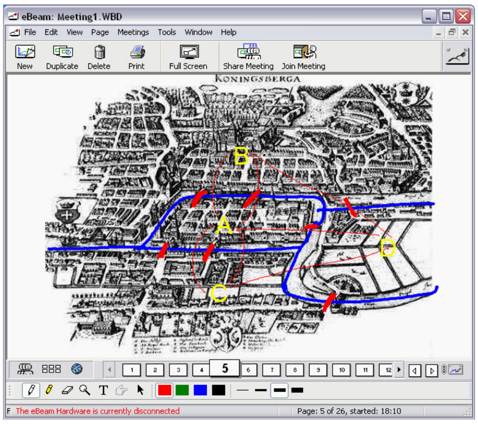


Obr. 5.6, 5.7 *Zdieľanie mítingu*

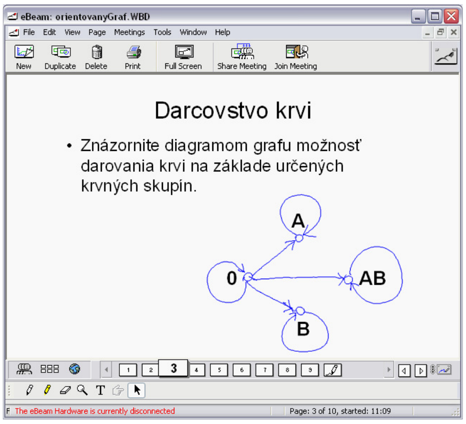
5.2 Dynamické aktivity v matematických obrazových podkladoch

Vo vzdelávaní budúcich učiteľov elementárnej matematiky sa eBeam v kombinovanom režime osvedčil napr. vo vyučovaní základov z teórie grafov. Pôvodne pripravené powerpointové prezentácie boli po importovaní do eBeam softvéru schopné absorpcie poznámok z tabule. Niektoré snímky slúžili ako teoretický podklad, iné mali charakter cvičení a úloh. Úvod kurzu je venovaný otázkam súvisiacim so vznikom teórie grafov, a teda zaradenie dobovej mapy mesta Königsberg (obr. 5.8) so siedmimi mostami cez rieku Pregel je opodstatnené.

Prostredníctvom eBeam mítingu sa môže sprostredkovanie skutočnosti o prepise reálnej situácie do diagramu grafu stať dynamickou aktivitou, pri ktorej sa postupným zaznačovaním určujúcich prvkov (brehy – vrcholy, hrany – existujúce mostné spojenia) situácia sprehľadní a zjednoduší. Po vytvorení viacerých kópií mapy v eBeam mítingu, môže nastúpiť ďalšia dynamika spočívajúca v riešení problému, či sa dá prejsť cez všetky mosty práve raz a vrátiť sa do východiskovej časti mesta. Pri prezentácii učiva o orientácii hrán a orientovaných grafoch môže byť interaktívna tabuľa prínosná z hľadiska konštruovania grafu v úlohe o darcovstve krvi (O. Žídek, 2001).

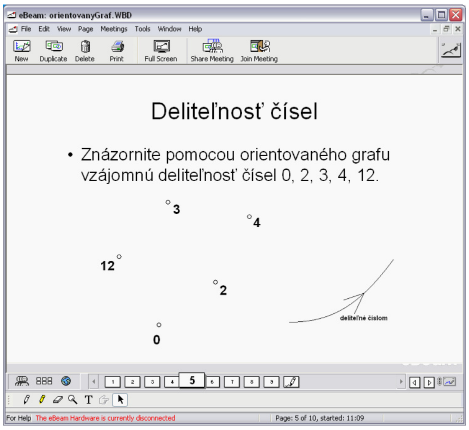


Obr. 5.8 Ukážka interaktívneho zásahu do prezentovanej snímky, úloha o mostoch v Kaliningrade

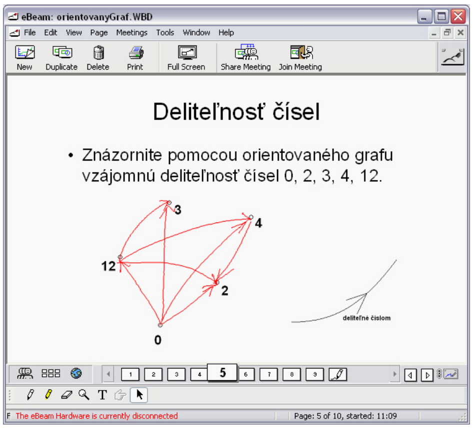


Obr. 5.9 Ukážka interaktívneho zásahu doprezentovanej snímky, úloha o možnom darcovstve krvi

V úlohe o znázornení vzájomnej deliteľnosti uvedených čísel pomocou orientovaného grafu (obr. 5.10, 5.11) bola taktiež možnosť priameho zásahu do premietajúcej sa snímky, pričom po uložení a následnom zverejnení na webovej stránke zostáva kompletný míting k dispozícii ako študijný materiál.

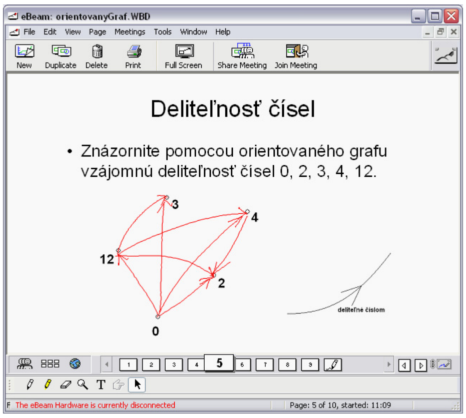


Obr. 5.10 Možnosť interaktívneho zásahu do prezentovanej snímky, tvorba orientovaného grafu v úlohe o deliteľnosti prirodzených čísel

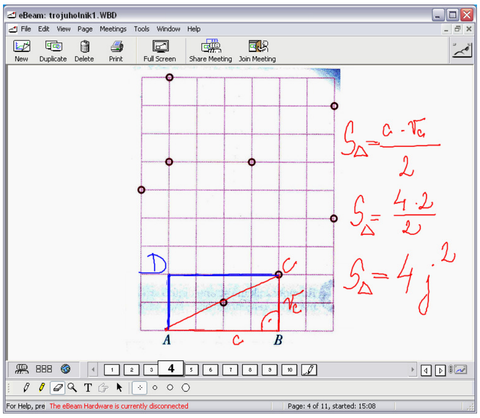


Obr. 5.11 Tvorba orientovaného grafu v úlohe o deliteľnosti prirodzených čísel

Ďalším príkladom využitia technológie eBeam je ukážka vo vyučovaní didaktiky matematiky. V učive o trojuholníkoch na základnej škole, na demonštráciu rôznych trojuholníkov a významných prvkov v trojuholníkoch vyskytujúcich sa v učive matematiky bol využitý podklad štvorcovej siete (obr. 5.12, 5.13). Pripravený materiál so štvorcovou sieťou, bodmi A, B a možnosťou voľby bodu C predurčoval variabilitu vo voľbe typu trojuholníka a v riešení úloh o obsahu, prípadne obvode. Za najväčší nedostatok možno považovať snáď len obtiažnosť práce s rysovacími potrebami (v tomto prípade s pravítkom). Ak by softvér umožňoval vytvorenie priamky, alebo úsečky elektronickým perom, problém by bol vyriešený. Túto možnosť však naša verzia eBeam softvéru neponúka.

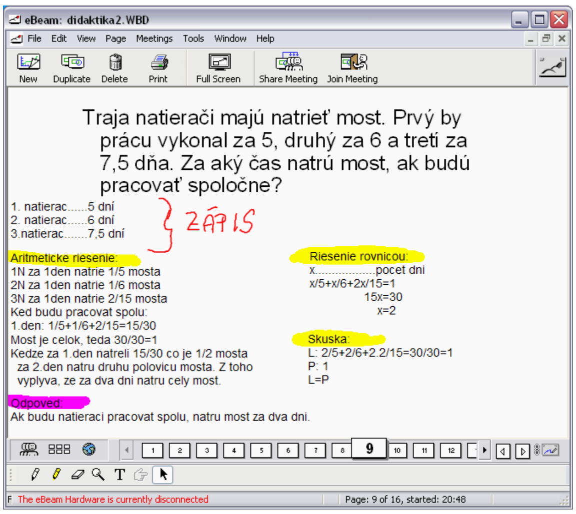


Obr. 5.12 *Učivo o trojuholníkoch v prostredí eBeam – podklad štvorcová sieť*



Obr. 5.13 *Učivo o trojuholníkoch v prostredí eBeam – postup zaznamenávania práce študentov*

Využívanie metódy zdieľania mítingu sa osvedčilo v skupinovej práci. Kolaborácie sa zúčastnili 4 skupiny, pričom na začiatku bola každá z nich oboznámená s úlohami a cvičeniami, ktoré má vypracovať. Zadania úloh sa vyskytovali pre každú skupinu na osobitnej strane jedného mítingu. Ďalšie strany obsahovali jednotlivé úlohy samostatne tak, aby sa zadanie nachádzalo v hornej tretine strany a pod ním bol priestor na vypracovávanie úloh realizované príslušnou skupinou študentov (obr. 5.14).



Obr. 5.14 *Ukážka práce so zdieľaným mítingom*

Priamo pri realizácii zdieľania sa vyskytli komplikácie takto organizovaného mítingu. Ako hlavné nedostatky sa ukázali:

- problém pri zapisovaní matematických symbolov priamo do strany mítingu,
- problém s vložením objektu editora rovníc z wordovskej aplikácie,
- nemožnosť vloženia obrázku z inej aplikácie (okrem obrázku vo forme pozadia),
- problém s diakritikou pri práci s textom,
- ťažkosti práce s myšou,
- nepohodlnosť práce s rysovacími potrebami.

Niektoré z uvedených problémov sú riešiteľné pomocou *tabletu*, ktorý nielen nahradí tradičnú myš, ale v istých momentoch aj supluje prácu s elektronickým perom.

Napriek vyššie špecifikovaným ťažkostiam pri práci s eBeamom možno konštatovať, že prináša do vyučovania matematiky množstvo pozitívnych prvkov. K najhlavnejším didaktickým prednostiam patrí, už spomínaná, interaktivita prostredia a možnosť použitia systému na rôznych aplikačných platformách. Pri konkrétnej práci vo vyučovaní matematiky sme vypozorovali zvýšený záujem o dianie na tabuli, zvýšenú súťaživosť pri práci v skupinách, ochotu mať osobnú skúsenosť s elektronickým perom a softvérom v rôznych režimoch, pričom bolo možné sledovať zvyšovanie gramotnosti v používaní prostriedkov výpočtovej a prezentačnej techniky.

5.3 Obrazový materiál v matematike

Obrazový materiál je súhrnné označenie pre širokú škálu materiálov, počínajúc tými, ktoré zobrazujú skutočnosť pomerne verne (napr. fotografie), až po zovšeobecňujúce a abstraktnejšie vyjadrenia reality (zjednodušené obrázky, schémy, diagramy, grafy a pod.). O učení sa z obrazového materiálu hovorí J. Mareš (2001, s. 493-503) a zároveň klasifikuje viacero psychodidaktických funkcií, ktoré môže plniť obrazový materiál zaradený do didaktického textu. Pre stručnosť sú uvedené len niektoré z nich: dekoratívna funkcia, reprezentujúca, organizujúca, interpretujúca, transformujúca, motivačná a kognitívno-regulačná funkcia.

Vo vyučovaní matematiky je dôležité vytvárať u žiakov adekvátne obrazové predstavy, v ktorých sú pojmy a vzťahy konkretizované, znázornené, usporiadané, zaradené do štruktúry doterajších poznatkov, a je tiež potrebné predchádzať vzniku chybných predstáv. Zaradenie systému eBeam do vyučovania matematiky znamená zväčša prácu s obrazovým materiálom rôzneho druhu, z čoho vyplýva aj riešenie otázok súvisiacich s učením sa z obrazového materiálu, spôsobom jeho spracovávania z psychologického hľadiska a vizuálnou gramotnosťou. *Vizuálna gramotnosť* zahŕňa schopnosť vedieť čítať a vytvárať obrazy, myslieť a učiť sa v termínoch obrazov a tiež schopnosť používať vizuálny obraz k zámernej komunikácii s inými ľuďmi (Mareš, 2001, s. 494).

Ak sa hovorí o vyučovaní matematiky pomocou obrazového materiálu, zvyčajne ide o *riešenie otázok názornosti v matematike*. Popri tom sa však predpokladá, že obrázok je dostatočne „názorný“, že je v ňom všetko zrejmé a že jasne ilustruje vysvetľovanú skutočnosť. Zabúda sa na nadobúdanie žiackych kompetencií súvisiacich s detailným rozborom obrázku. Je dôležité venovať pozornosť štruktúre obrázku, otázke ako je koncipovaný, čo všetko ilustruje, a tiež kontextu jeho zaradenia v práve preberanom učive.

Prednosť v používaní technológie eBeam spočíva nielen v možnosti práce so statickým obrazovým materiálom, ale je rozšírená aj o zaradenie dynamizujúcich aktivít. Využívanie interaktívnej tabule v projekčnom režime umožňuje prácu s hotovými dynamickými matematickými softvérovými produktmi, ktoré sú predkladané tiež v obrazovej forme. Preto treba mať na pamäti zrakovú hygienu žiakov, nepreťažovať ich len učením na báze obrazových informácií (zvlášť pri častom používaní dataprojektora), ale aktívne zapájať aj ďalšie zložky verbálneho a nonverbálneho charakteru odovzdávania informácií.

6

ŠPECIFIKÁ DIDAKTICKÝCH POSTUPOV PRI RIEŠENÍ MATEMATICKÝCH ÚLOH V IKT PROSTREDÍ

6.1 IKT – prostriedok na tvorbu modelov v matematike

Z dôvodu aplikácie zásady názornosti pri výučbe matematiky, spredmetňovania abstraktného, ale aj využívania ďalších didaktických prístupov a postupov sú dôležitými technologickými prvkami znázorňovanie a vizualizácia, ktorými sa ilustrujú konkrétne modely rôznych matematických problémov. Modely znázorňovania môžu mať rôznu podobu a môžu prispievať k napĺňaniu rôznych funkcií vo vyučovaní matematiky. Model má slúžiť na ilustráciu, objasňovanie, resp. objavenie riešenia, alebo vytvorenie vzťahov, ktoré sú v danej situácii riešené, pričom na znázornenie jednej situácie môže byť vytvorených a použitých viacero modelov. Podobne môže byť jeden model znázornením rozličných situácií, čím sa stáva univerzálnejším a umožňuje väčšiu flexibilitu v hľadaní riešení daného problému.

Prostredie informačných a komunikačných technológií ponúka vo vyučovaní matematiky nielen nové možnosti v tvorbe a využívaní rozličných modelov, ale umožňuje použiť aj variabilitu rôznych techník, metód a foriem pri získavaní matematických poznatkov. Táto skutočnosť determinuje (okrem iného) aj:

- zmenu organizácie vyučovacieho procesu v závislosti na aplikovaných vyučovacích prostriedkoch,
- modifikáciu cieľov vyučovania matematiky,
- organizáciu učebnej látky a pod.

Z hľadiska inovačného procesu vyučovania matematiky v prostredí IKT treba mať na zreteli nielen nové učiteľské kompetencie potrebné pri jeho výchovno-vzdelávacej činnosti, ale aj rozvoj kvalifikácií, ktoré má nadobudnúť žiak ovplyvnený pôsobením nových technologických prístupov učiteľa a informačno-komunikačného prostredia. Okrem odborných matematických a ďalších všeobecných kvalifikácií sa do popredia dostávajú sociálne kvalifikácie, ktorými sú schopnosť tímovej práce žiakov a rozvoj ich komunikačných a argumentačných schopností.

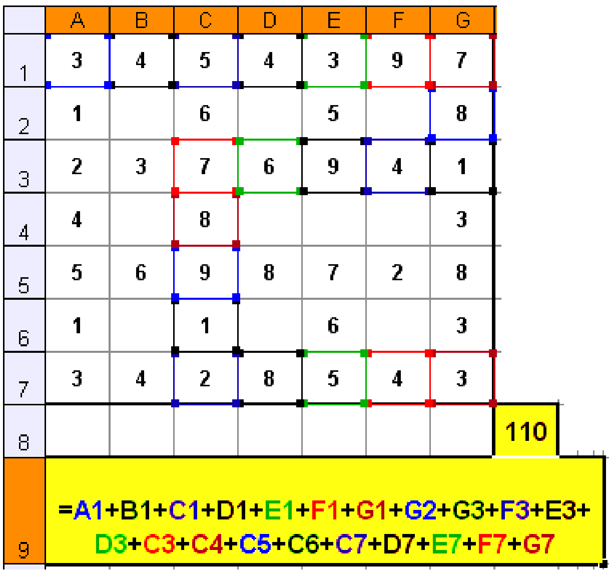
6.2 Kombinácia tabuľkového kalkulátora a interaktívnej tabule v matematike

Na manipuláciu s prirodzenými číslami a precvičovanie elementárnej numerácie a jednoduchých výpočtových operácií možno, napr. na druhom stupni základnej školy, použiť rôzne číselné hlavolamy, doplňovačky, magické štvorce, algebrogramy a podobne. Použitie počítača, projektora, interaktívnych zariadení, prípadne Internetu a softvérových produktov v úlohách uvedeného charakteru vytvára v rámci vyučovacej jednotky novú klímu, v ktorej možno využiť prvky interaktivity, dynamiky, súťaživosti, ale aj kooperácie. Špecifiká riešenia matematického problému v prostredí IKT sa pokúsime ilustrovať na nasledujúcej úlohe:

Nájdite „cestu“, ktorá vychádza z horného ľavého políčka štvorca a končí v jeho pravom dolnom políčku (obr. 6.1) tak, aby súčet čísel cesty bol 110.

3	4	5	4	3	9	7
1		6		5		8
2	3	7	6	9	4	1
4		8				3
5	6	9	8	7	2	8
1		1		6		3
3	4	2	8	5	4	3

Obr. 6.1 *Špecifikácia úlohy v MS Excel pripravená pre riešiteľov ako pozadie eBeam softvéru*



Obr. 6.2 *Pripravený model v MS Excel*

Divergentná úloha „hľadania cesty s fixovanou dĺžkou“ je náročná z hľadiska počtu možných ciest z východiskového bodu do cieľového, pričom v priebehu testovania každej cesty treba permanentne pripočítavať hodnotu ďalšieho políčka integrovaného do vybranej cesty.

Podľa cieľa zaradenia úlohy podobného typu do vyučovania matematiky je potrebné zvoliť jednak

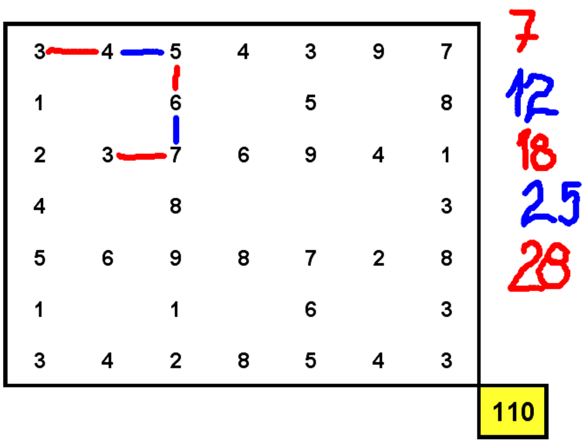
- organizačnú formu vyučovania, a tiež
- prostriedky, pomocou ktorých bude úloha riešená.

6.3 Výber technologických prostriedkov a softvérových produktov na riešenie matematickej úlohy

Ak učiteľovým cieľom nie je precvičovanie numerácie, ale sústredí sa na prehľadávanie priestoru kombinačných možností, ktorými sa dá dostať zo štartu do cieľa, možno efektívne využiť prednosť tabuľkového kalkulátora s postupným znázorňovaním príslušnej cesty a vypisovaním priebežných súčtov (obr. 6.2). Úlohu môžu riešiť žiaci individuálne, v skupinách, ale aj spoločne využitím projekčných prostriedkov.

Ak má byť úloha aj prostriedkom na precvičovanie operácie sčítania, tak ideálnou kombináciou je využitie tabuľkového kalkulátora MS Excel a interaktívnej technológie eBeam. Tabuľka pripravená v Exceli sa jednoduchým spôsobom transformuje na pozadie do prostredia softvéru eBeam (obr. 6.3), v ktorom možno:

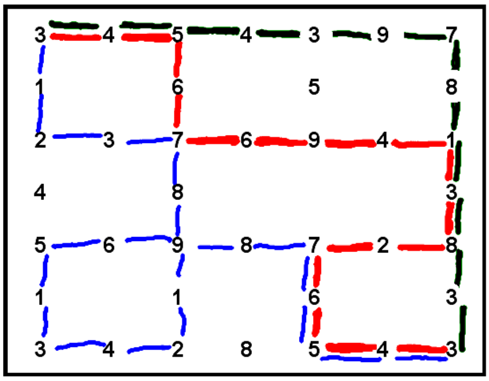
- vizualizovať cestu zaznamenávaním postupu riešenia elektronickými perami priamo na bielej tabuli, prípadne použitím tabletu;
- digitalizovať poznámky, ktoré vzniknú v priebehu riešenia;
- aplikovať prvky zdieľania súboru a efektívne ich využiť v rámci organizačnej formy vyučovacej jednotky.



Obr. 6.3 *Záznam postupu hľadania riešenia úlohy v prostredí bielej tabule*

V zásade sa teda použitie tabuľkového kalkulátora MS Excel, technológie eBeam a projekčných prostriedkov v riešení uvedenej úlohy zúži na dve alternatívy:

- riešenie úlohy priamo v Exceli s využitím všetkých dostupných prostriedkov, ktoré Excel ponúka, pričom technológia eBeam zmení obyčajnú tabuľu na virtuálnu dotykovú obrazovku, ktorou sa môže ovládať počítač, resp. jeho aplikácie (obr. 6.2);
- riešenie úlohy v prostredí eBeam-softvéru, prostredníctvom digitálnej bielej tabule, s vlastnosťou zaznamenania a spracovania poznámok zapísaných špeciálnymi elektronickými perami z bežnej tabule do digitálnej podoby a možnosťou ich zdieľania v reálnom čase (obr. 6.3, 6.4).



Obr. 6.4 *Vizualizácia viacerých možných ciest v prostredí bielej tabule*

6.4 Organizačná štruktúra hodiny matematiky v prostredí IKT

Z hľadiska organizačnej štruktúry vyučovacej jednotky možno pri riešení úloh v prostredí IKT aplikovať nasledujúce metódy a ich kombinácie:

- **Kolektívne, hromadné vyučovanie** – sa využitím prostriedkov IKT zväčša mení na demonštračné vyučovanie, avšak dôležité je uplatňovanie metód heuristickej besedy. Využíva sa názorné uvedenie problému, aplikovanie niektorého z modelov vhodného na znázornenie situácie, v našom prípade ide o model vytvorený v Exceli, prípadne v softvéri eBeam, ktorý umožňuje využiť vyššie uvedené benefity s prihliadnutím na uplatnenie prvkov dynamiky a interaktivity.
- **Skupinové vyučovanie**, pričom skupiny pracujú buď samostatne, alebo sa aplikujú prvky súťaže medzi skupinami navzájom. Pri tejto forme vyučovania je výhodné, aby mala každá skupina k dispozícii svoje strany eBeam mítingu (resp. hárky v Exceli) a aby vyučovanie prebiehalo prostredníctvom zdieľania jedného dokumentu, v ktorom je učiteľ koordinátorom a môže priebežne sledovať riešenia jednotlivých skupín. Na ich základe môže učiteľ vyhodnotiť súťaž. V rámci skupín je posilňovaná tímová práca a je nutná vzájomná kooperácia jednotlivých členov skupiny.

- **Diferencované, individualizované vyučovanie**, v rámci ktorého má každý žiak možnosť vyriešiť úlohu samostatne na svojej, učiteľom pridelenej, strane mítingu. Táto forma je náročná (nie nemožná) na technické vybavenie učebne a pri väčšom počte žiakov aj na prácu učiteľa z hľadiska sledovania priebehu riešenia úlohy.

6.5 Potenciálne dôsledky riešenia matematickej úlohy v prostredí IKT

Zaradenie prvkov informačných a komunikačných technológií do vyučovania matematiky má, okrem spomínaných vplyvov na výber vyučovacích metód a určenia organizačnej formy hodiny matematiky, vplyv na ďalšie atribúty matematického vzdelávania pre učiteľa, ale aj pre žiaka. K najväčším prednostiam možno zaradiť *inklúziu informatických zručností do riešenia matematickej úlohy*. V uvedenej úlohe o hľadaní systému na určenie správnej cesty sa spája viacero matematických kompetencií. V prostredí Excelu pribúda v procese riešenia diskrétna práca so súradnicami, optimalizácia výberu hodnoty políčka s danými súradnicami, možnosť vypisovania čiastočných súčtov definovaním vzorca v Exceli, pričom je použitá syntax a sématika „excelovského jazyka“. Vplyv prostredia IKT sa samozrejme prejavuje v zmenách vyplývajúcich zo vzájomnej komunikácie, čím sa vytvára nová pracovná klíma medzi učiteľom a žiakom, a tiež žiakmi navzájom.

7

TECHNOLÓGIA ZDIEĽANIA SÚBOROV V SIETI A JEJ APLIKÁCIE VO VYUČOVANÍ ELEMENTÁRNEJ MATEMATIKY

7.1 Zdieľanie súborov prostredníctvom sietí

Jednoduché zdieľanie aplikácií v reálnom čase, prostredníctvom sietí, je vymoženosť informačných technológií, ktorú prognostici informatici predpovedali už pred mnohými rokmi. Kolaborácia má významný dopad z globálneho hľadiska predovšetkým použitím siete sietí, t. j. Internetu. Predstava, že ten istý súbor v tom istom čase, používajú nielen dvaja, ale dokonca mnohí ďalší užívatelia lokalizovaní po celom svete, nadobudla v súčasnosti reálnu podobu. Je len otázkou času, kedy sa táto metóda hmatateľne premietne a stane súčasťou *systému súčasných didaktických metód* v matematickom vzdelávaní.

Najjednoduchší spôsob zdieľania súborov poskytuje samotný operačný systém počítača. Stačí, ak si počítače „komunikačne porozumejú“ a dokážu zdieľať obsah svojich médií s inými zariadeniami po lokálnej sieti. Ďalšie nadštandardné vlastnosti sú „zapúzdrené“ v inom softvéri, ktorý zdieľanie dokáže využiť. Treba poznamenať, že masová úprava a správa údajov je predovšetkým vymoženosť dátových serverov a k nim dedikovaných aplikácií, keďže ide o konkurenčný prístup k rovnakým dátam (problém tzv. „dead locku“). Napriek tomu existujú programy, ktoré dokážu zložité systémy nahradiť.

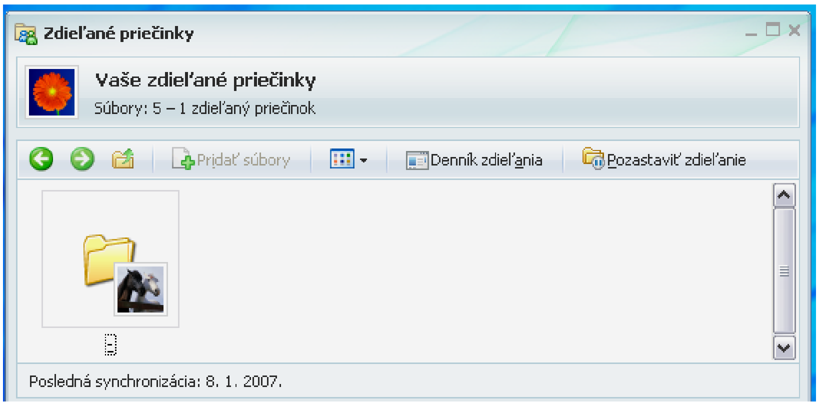
Primeranú kvalitu kooperácie na sieti ponúka napr. tabuľkový kalkulátor Excel. Očakávaná vlastnosť, že viacerí užívatelia pracujú s rovnakou tabuľkou vôbec nie je triviálna. Prednosťou tohto riešenia je predovšetkým skutočnosť, že pri kooperácii existuje prakticky jediná pracovná verzia dokumentu, s ktorou pracuje skupina ľudí. Ak by takáto možnosť spolupráce neexistovala, bolo by nevyhnutné prácu viacerých ľudí prácne skladať do výslednej tabuľky z viacerých zdrojov.

Vyššiu kvalitu predstavuje *zdieľanie dát na „veľké vzdialenosti*“. Je to moderná a efektívna cesta, ktorá však tiež vyžaduje komunikačný softvér. Aplikácií zabezpečujúcich spoločné zdieľanie súborov prostredníctvom Internetu, t. j. na WAN sieti, postupne pribúda. Niekoľko voľne prístupných nástrojov, vhodných na využitie vo vzdelávaní, prakticky demonštroval napríklad Marcinek (2007).

Na ilustráciu princípu fungovania aplikácie umožňujúcej zdieľanie súborov sa dá použiť program Windows Live™ Messenger. Softvér slúži na (textovú, hlasovú, a aj obrazovú) interaktívnu (online) i neinteraktívnu (offline) komunikáciu, ale najnovšie poskytuje aj možnosť okamžitého zdieľania a aktualizovania súborov s inými užívateľmi prostredníctvom *zdieľaných priečinkov*. Windows Live™ Messenger je softvér voľne dostupný a nemá pri svojej inštalácii špeciálne technické požiadavky (systém Windows XP a program Windows Live Messenger, verziu 8.0 alebo novšiu), je však potrebné zaregistrovať si vlastnú mailovú adresu. Na jeho funkčnosť je potrebné pripojenie na Internet s dostatočnou prenosovou kapacitou (užívatelia sú prihlásení na centrálny server). Prihlásenie do programu prebieha pomocou mailovej adresy a hesla nakonfigurovaných v priebehu inštalácie.

Čo sú zdieľané priečinky a čo umožňujú?

Zdieľané priečinky umožňujú *zdieľať tie isté súbory* s viacerými kontaktmi a *automaticky aktualizovať obsah*. Na sprevádzkovanie možnosti zdieľania dokumentov stačí v ponuke Messenger zobraziť „zdieľané priečinky" (obr. 7.1). Súbory, na ktorých chceme spolupracovať, treba jednoducho prekopírovať (alebo presunúť) buď na meno kontaktu, čím sa vytvoria zdieľané priečinky, alebo priamo do zdieľaných priečinkov. Od tohto okamžiku môže kontaktná osoba kedykoľvek pristupovať k súborom v tomto priečinku, a to aj vtedy, ak je jeden z užívateľov „offline". V praxi to znamená, že v počítačoch užívateľov, ktorí majú spoločný zdieľaný priečinok, sa vytvorí lokálna kópia zdieľaných dokumentov.



Obr. 7.1 *Zdieľané priečinky vo Windows Messenger*

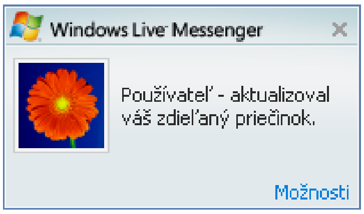
Synchronizácia a riešenie konfliktov

Synchronizovať znamená porovnať, zlúčiť a zladiť rozdiely medzi kópiami súboru uloženého v dvoch rôznych zariadeniach alebo adresároch. Synchronizácia sa môže uskutočniť len v prípade, ak sú obaja užívatelia naraz „online".

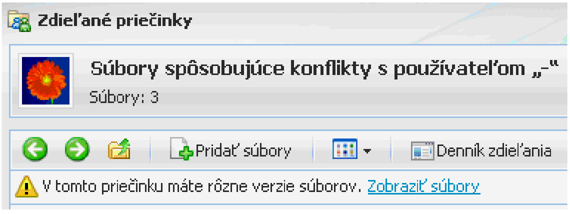
Pri akejkoľvek *zmene zdieľaného dokumentu* a jeho uložení zo strany niektorého užívateľa, nastáva „*konflikt*" medzi jednotlivými verziami súboru. Windows Messenger zabezpečí synchronizáciu zdieľaných priečinkov a nový súbor uloží (bez prepisu pôvodného dokumentu). Druhý užívateľ dostane správu

- *o aktualizácii zdieľaných priečinkov* (obr. 7.2) a
- *o súboroch spôsobujúcich konflikty* (obr. 7.3).

Po otvorení aktualizovaných dokumentov je možnosť rozhodnúť sa o prijatí, resp. neprijatí zmien. Užitočnou pomôckou pri tejto činnosti môže byť *denník zdieľania*, v ktorom sa zobrazuje história zmien od všetkých užívateľov, ktorí majú prístup k zdieľaným priečinkom. Ak jeden z užívateľov odstránil zdieľaný súbor, potom sa natrvalo odstráni len jeho lokálna kópia. To znamená, že ak je potrebné zachovanie súboru inému užívateľovi, treba dokument skopírovať do nezdieľaného priečinka.



Obr. 7.2 *Oznam o aktualizácii priečinku*

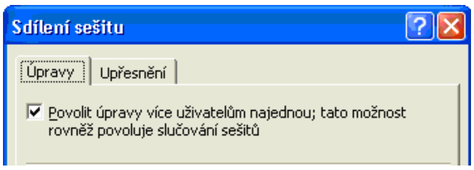


Obr. 7.3 *Oznam o súboroch spôsobujúcich konflikty*

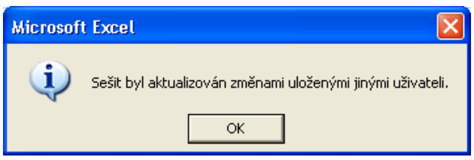
V prípade, keď užívateľ nie je „online“ s kontaktom zdieľaných priečinkov, môžu sa otvárať, odstraňovať a pridávať súbory, ale zmeny nebudú zdieľané, kým nebudú obaja používatelia „online“. Ak má užívateľ, alebo jeho kontakt, nastavený stav na možnosť „vzhľad offline“, taktiež nemožno používať funkciu zdieľaných priečinkov.

7.2 Zdieľanie v Exceli

Z bežných aplikačných programov Microsoft Office podporuje zdieľanie tabuľkový kalkulátor Excel. Aby sa prejavila plná sila fenoménu zdieľania, je potrebné mať excelovský súbor nastavený ako „zdieľaný“. Nastavenie zdieľania je v Exceli v hlavnej ponuke, v položke „Nástroje“ > „Zdieľanie zošitu“ (obr. 7.4). Následne treba povoliť úpravy viacerým užívateľom naraz. (Táto možnosť povoľuje aj zlučovanie zošitov.) Takto nastavený dokument, po uložení do zdieľaných priečinkov vo Windows Live™ Messenger-i, je pripravený na zdieľanie v reálnom čase.



Obr. 7.4 *Nastavenie zdieľaného zošitu v MS Excel*

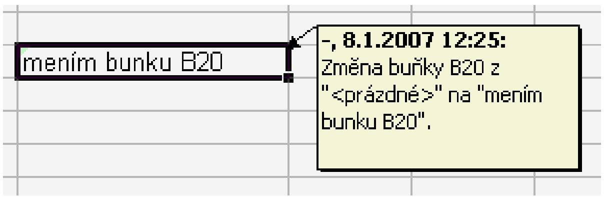


Obr. 7.5 *Správa o aktualizácii zošitu iným užívateľom*

Ak sú účastníci kolaborácie „online“, tak po každom uložení zošitu v Exceli nastáva synchronizácia, následne je zistený „konflikt“ a ďalšiemu účastníkovi sa objaví správa o aktualizácii dokumentu (obr. 7.5). Zároveň sú v dokumente zvýraznené zmeny, ktoré realizoval iný užívateľ (obr. 7.6). *Riešenie konfliktných zmien* závisí od definovaných nastavení zdieľaného dokumentu v Exceli (v položke „zdieľanie zošitu“). Do úvahy prichádzajú dve možnosti:

- prijať všetky ukladané zmeny automaticky, alebo
- spýtať sa, ktoré zmeny má aplikácia prijať.

Aktualizácia súboru nemusí nastať pri ukladaní súboru, ale dá sa nakonfigurovať automatické ukladanie v pravidelných časových intervaloch (dolná hranica je päť minút). Dôležité je tiež nastavenie, či sa má uchovávať história zmien a ako dlho.

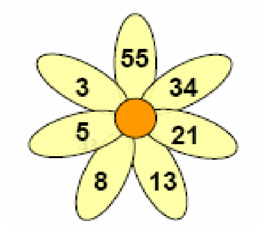


Obr. 7.6 *Zvýraznenie zmien v Exceli, ktoré uskutočnil iný užívateľ*

7.3 Didaktické využitie zdieľania súboru

Úloha č. 1[*]:

Maťovi sa na strelnici PIF veľmi zapáčilo auto na diaľkové ovládanie. Na jeho získanie bolo treba odstreliť z číselného kvetu (pozri obr. 7.7) štyri lístky s číslami, ktorých súčet je 73. *Lístky s akými číslami musí Maťo trafiť?*



Obr. 7.7 *Číselný kvet*

Komentár:

Na riešenie úlohy možno použiť rôzne prístupy. Najčastejšie sa vyskytujúci (žiacky) postup spočíva v experimentovaní s výberom číselných lupienkov, zisťovaní súčtu a porovnaní s podmienkami úlohy. Ak je cieľom učiteľa upriamiť pozornosť na *rozvoj kombinatorického myslenia*, alebo na *hľadanie systému* vo všetkých možnostiach výberu lupienkov, je možnosť využiť „*zdieľanie Excelovského listu*“ a umožniť žiakom formou hry, doplňovačky, prípadne súťaže, vypĺňať jednotlivé kombinácie číselných hodnôt uvedených na lístkoch kvietku do tabuľky s tým, že príslušné súčty sa vypočítavajú a zobrazujú automaticky (tab. 7.1). Uvedeným spôsobom môžu žiaci určiť jediné správne riešenie, spĺňajúce podmienku súčtu (73) na odstrelených štyroch číselných lístkoch.

[*] Prevzaté z úloh 13. ročníka súťaže MAKS4, Školský rok 2006/07 1. séria.

Tab. 7.1 *Ukážka vypĺňania tabuľky a hľadania systému v úlohe č. 1*

1. lístok	2. lístok	3. lístok	4. lístok	súčet
55	34			89
55	21			76
55	13	8		76
55	13	5		73
55	13	5	3	76
55	8	5	3	71
34	21	13	8	76
34	21	13	5	**73**
34	21	13	3	71
21	13	8	5	47

Úloha č. 2*:

Žabky Želka a Božka bývajú pri potoku naproti sebe a stretnú sa pri najväčšej skale na brehu potoka. Každá z nich má z domu po skalu päť skokov. Ani jedna nerobí skoky s rovnakou dĺžkou, ale každá ich predlžuje podľa vlastnej zákonitosti. Ich prvé štyri skoky vyzerali takto:

Želka	**Božka**
1. skok: 15 cm	1. skok: 6 cm
2. skok: 18 cm	2. skok: 12 cm
3. skok: 21 cm	3. skok: 24 cm
4. skok: 24 cm	4. skok: 48 cm

Ako ďaleko od seba žabky bývajú?

Komentár:

Súčasťou riešenia úlohy je zisťovanie dĺžky piateho skoku pre obe žabky. Kolaborácia na hľadaní riešenia môže prebiehať, podobne ako v predchádzajúcej úlohe, teda súťažnou formou a postupným dopĺňaním zistených hodnôt do tabuľky. Hľadanie posledného člena päťčlennej postupnosti, na základe kritéria determinovaného vypísaním predchádzajúcich členov postupnosti (dĺžky prvých štyroch skokov), využíva zisťovanie matematickej závislosti medzi dvomi susednými členmi. Jednoduchou úpravou tabuľky (tab. 7.2) má učiteľ možnosť rýchlej modifikácie úlohy s inými vstupnými údajmi (s inými postupnosťami), alebo s inou formuláciou úlohy. Aktivita môže byť zameraná na postupné dopĺňanie ďalších skokov (členov postupnosti) formou vzájomnej žiackej kolaborácie, alebo súťaže.

Matematika nie je len „veda o číslach" a jej vyučovanie by nemalo pozostávať len z úloh kvantitatívneho konvergentného charakteru. Rozvoj logického myslenia, vyvodzovanie všeobecných záverov je potrebné pestovať aj na úlohách súvisiacich so

* Prevzaté z úloh 13. ročníka súťaže MAKS4, Školský rok 2006/07 1. séria.

spracovávaním *heterogénnych údajov*. Hľadanie matematického modelu na riešenie úloh reálneho, žiakom blízkeho prostredia, môže mnohokrát viesť k *organizovaniu údajových záznamov* do prehľadných tabuliek a grafov a k ich spracovaniu. V tomto zmysle môže byť inšpirujúca úloha č. 3, ktorá z hľadiska využitia zdieľania excelovskej tabuľky vo vyučovacom procese umožňuje efektívne spracovávanie väčšieho množstva údajov a tým aktívne angažovanie každého žiaka v rámci získavania vstupných údajov.

Tab. 7.2 *Interpretácia úlohy č. 2 v MS Excel*

	1. skok	2. skok	3. skok	4. skok	5. skok	spolu	
Želka	15	18	21	24	27	105	cm
Božka	6	12	24	48	96	186	cm
						291	cm

Úloha č. 3:

Odhadni odpovede na nasledujúce otázky a zaznamenaj ich do tabuľky:

a) Akú máš výšku?
b) Koľko si prečítal kníh?
c) Aká je farba očí najvyššieho žiaka v triede?
d) Koľko schodov vedie do Tvojej triedy?
e) Koľko mesiacov uplynulo od Tvojho narodenia?

(Poznámka: tabuľku celej triedy s menami žiakov má učiteľ vopred pripravenú.)

Komentár:

Didaktický postup závisí na voľbe vyučovacej stratégie učiteľa. Záznamy od jednotlivých žiakov sa môžu vypĺňať spoločne, alebo sa v plnej miere využije *možnosť zdieľania*, a teda samostatného vypĺňania žiakmi (čím by sa z hľadiska časovej efektivity aktivita výrazne zrýchlila). To všetko je determinované nielen sledovaným cieľom, ale aj zrelosťou a informačnou gramotnosťou žiakov v skupine. Po spracovaní vstupných údajov môže nasledovať *matematická interpretácia* získaných výsledkov, ich *porovnanie s odhadmi*, odpovede na doplňujúce otázky podľa charakteru témy preberaného učiva, alebo systematizácia učiva prostredníctvom využitia zaznamenaných vstupných informácií. Všetky uvedené aktivity sa môžu realizovať rôznymi metódami, zvlášť užitočnou môže byť v prostredí zdieľaných súborov didaktická hra. Orientácia v tabuľkách, ich interpretovanie a vyvodzovanie správnych záverov je pre žiakov dôležitou skúsenosťou z hľadiska poznávania istej *formy matematického znázorňovania* v didaktickom prostredí, ktorého prvkami sú elektronické médiá. Zdieľanie navyše napomáha pri rozvoji schopností žiakov pracovať v teame, pri vzájomnej komunikácii, presnom vyjadrovaní, zdôvodňovaní a argumentácii.

Návrh efektívnej tabuľky s relevantnou výpovednou hodnotou, schopnosť triedenia údajov podľa daného kritéria, priradenie vhodnej kvantifikácie kvalitatívnym znakom pre jednoduchšie spracovanie, to všetko sú kompetencie, ktoré je potrebné rozvíjať u žiakov na 1. stupni ZŠ, a teda aj v príprave učiteľov prvého stupňa základnej školy. Treba poznamenať, že nejde o žiadny triviálny súhrn schopností a zručností, ale o *konjunkciu rôznorodých myšlienkových procesov* potrebných na realizáciu úloh podobného typu. Interaktívna komunikácia žiakov navzájom, resp. žiakov s učiteľom, pri činnostiach súvisiacich s naznačenou problematikou v rámci kolaborácie „nad" jedným dokumentom môže byť vhodnou metódou aplikovanou pri matematickom vzdelávaní podporovanom využitím elektronických médií.

Napriek všetkým zmieneným vynikajúcim vlastnostiam a výhodám využívania zdieľaných dokumentov v pedagogickej i nepedagogickej praxi, treba upozorniť na „*nebezpečenstvo* prílišného *otvorenia počítača do sveta*". Tým, že sa umožní iným užívateľom pracovať na tých istých súboroch a spoločne zdieľať priečinky, vystavujú sa všetci zainteresovaní vírusovým nástrahám a možným hackerským útokom prostredníctvom komunikačného softvéru.

8

KOMUNIKAČNÉ ROZHRANIE V PROCESE TVORBY POČÍTAČOVÉHO MODELU MATEMATICKÉHO PROBLÉMU

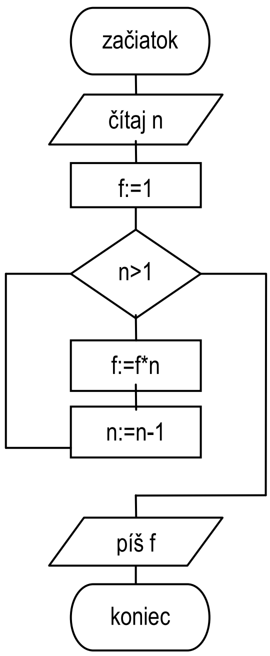
Úroveň ľudského poznávania je úzko spätá so vzťahom jednotlivca k formulovaniu otázok a ku hľadaniu odpovedí na otázky jeho bytia a postavenia v spoločnosti. K hlavným cieľom výchovno-vzdelávacieho procesu sa zaraďuje snaha o vzbudenie záujmu žiakov aktívne a zainteresovane riešiť nastolené otázky. Teóriou výchovy a vzdelávania sa zaoberajú didaktiky jednotlivých vedeckých disciplín, ktoré využívajú poznatky pedagogiky, psychológie a filozofie. Didaktiku matematiky definuje O. Kopanev ako teóriu, metodiku a prax výchovno-vzdelávacích procesov v školskej matematike, pričom má analyzovať obsah, prostriedky, metódy a formy vyučovania a štúdia matematiky (Kopanev, s. 14 – 36). Jedným z komunikačných prostriedkov pre vyššie uvedený cieľ je matematický jazyk, ktorého ovládanie je nutným predpokladom pre úspešné pedagogické pôsobenie každého učiteľa matematika. Každý jazyk však podlieha vplyvom vonkajšieho prostredia a je priamo, či nepriamo konfrontovaný nielen s inými odbornými terminológiami, ale aj s prirodzeným jazykom. Teória komunikácie v matematike je dôležitou súčasťou didaktiky matematiky, a teda aj neodmysliteľnou „výbavou“ každého študenta učiteľstva matematiky. Vplyvom čoraz častejšieho využívania informačných a komunikačných technológií vstupuje ako novodobý fenomén do vzťahu k didaktike (nielen matematiky) aj odbor informatiky a jej pridružených disciplín. Odborníci didaktických disciplín hľadajú možnosti, formy, stratégie efektívnej integrácie počítača do výchovno-vzdelávacieho procesu. Vplyv počítačového prostredia vstupujúceho do didaktického procesu zákonite podmieňuje zmeny v komunikácii v matematike.

8.1 Informatická interpretácia matematického obsahu

Počítač a jeho integrácia do vyučovacieho procesu, ako nového prostredia v didaktickom procese, so sebou priniesol obohatenie aj do komunikácie v matematike. Pedagogickú komunikáciu v matematike využívajúcej prostriedky IKT možno aplikovať podľa Fillippo Spagnolo a Jána Čižmára audiovizuálne, audiovizuálne interaktívne, ako programované vyučovanie, ako informatické prostredie simulácie, ako použitie expertných systémov, ako využitie mikrosvetov a ako vývoj oblasti poznania (F. Spagnolo, J. Čižmár, s. 127 – 128). Jednou z aktuálnych úloh učiteľa matematiky je naučiť sa orientovať vo všetkých ponúkaných kategóriách matematických programov a odhadnúť správnu mieru, miesto a spôsob jeho používania v pedagogickom procese.

Niektoré matematické programové produkty sú príliš náročné na získanie (vzhľadom na finančné možnosti škôl a učiteľov), náročné na ovládanie (pre ich zvládnutie je nutné naštudovať jednotlivé príkazy resp. zložitú syntax ich zápisu), iné sú náročné na prevádzku. Ďalšie sú svojím obsahom zamerané špeciálne na jednotlivé oblasti matematiky, iné sú všeobecné a snažia sa riešiť celú množinu matematických problémov. Vo výučbe matematiky sa môžu uplatniť rôzne typy informačných a komunikačných technológií, ktoré sú zdrojom modernizácie a netradičných metód vzdelávania.

Tab. 8.1 *Programy na výpočet čísla n! v programovacom jazyku Pascal, ukážka zápisu algoritmu v tvare vývojových diagramov*

<table>
<tr><td>Program n_faktorial;
var f, i, n: integer;
begin
  read(n);
  f:=1;
  for i:=1 to n do f:=f*i;
  write(f);
end.</td><td>Využitie cyklu so známym počtom opakovaní, pričom riadiaca premenná cyklu sa inkrementuje automaticky.</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Program n_faktorial;
var f, n: integer;
begin
  read(n);
  f:=1;
  while n>1 do begin
    f:=f*n;
    n:=n-1;
end;
write(f);
end.</td><td>Využitie cyklu s podmienkou na začiatku, pričom výpočet prebieha dekrementačne. (Vpravo ukážka zápisu algoritmu vývojovým diagramom.)</td></tr>
<tr><td>Program n_faktorial;
var k:integer;
  Function
fakt(n:integer):integer;
begin
  if (n=0) or (n=1) then fakt:=1
        else fakt:=n*fakt(n-1);
end;
begin
  read(k);
  write(fakt(k));
end.</td><td>Rekurzívny prístup na výpočet faktoriálu. Z hľadiska využitia programátorských techník najnáročnejší algoritmus na implementáciu.</td></tr>
</table>

Riešenie problémov z reálneho života (real world problem) pomocou dostupných softvérových technológií, resp. ich interpretačných možností, môže zdokonaliť proces učenia a prispieť k rozvoju myšlienkových a tvorivých aktivít študentov. Používanie algoritmických postupov pri riešení matematických úloh podporuje vývoj v oblasti poznania využívaním rozličných konceptuálnych oblastí. K tomuto cieľu prispieva aj tvorba jednoduchých efektívnych algoritmov, v zmysle postupu, resp. návodu (šablóny) na riešenie množiny úloh toho istého typu, ktorý spĺňa základné požiadavky elementárnosti, determinovanosti, konečnosti, rezultatívnosti (korektnosti) a hromadnosti. Formy zápisov algoritmov môžu byť rôzne (pozri tab. 8.1). Avšak z matematického hľadiska nie je dôležitý spôsob ich vyjadrenia[3], ale funkčnosť zodpovedajúca vyššie uvedeným algoritmickým kritériám a striktné dodržiavanie epistemologickej vernosti. V tomto zmysle je dôležité sledovanie prechodov medzi informatickou interpretáciou vedeckých poznatkov a následnou tvorbou matematických predstáv u žiakov. Ján Čižmár uvádza Balacheffov termín informatickej transpozície „ako termín adaptovaný z didaktickej transpozície do informatického prostredia" (s. 137). Zaznamenávanie interpretačných zmien na jednotlivých modelových úrovniach didaktickej transpozície (vnútorného univerza, rozhrania a vonkajšieho univerza) je a bude v najbližšom čase predmetom skúmania matematickej verejnosti vo vzájomnej interakcii s odborníkmi z informatického prostredia, pretože matematický obsah by mohol byť nevhodným aplikovaním informatickej transpozície v predstavách žiakov modifikovaný, čím by prišlo k narušeniu pojmotvorného procesu. Štúdium komunikácie v matematike v počítačovom prostredí je interdisciplinárneho charakteru a vyžaduje si znalosti nielen matematického aparátu, ale aj komunikačných informatických technológií.

8.2 Tvorba počítačového modelu

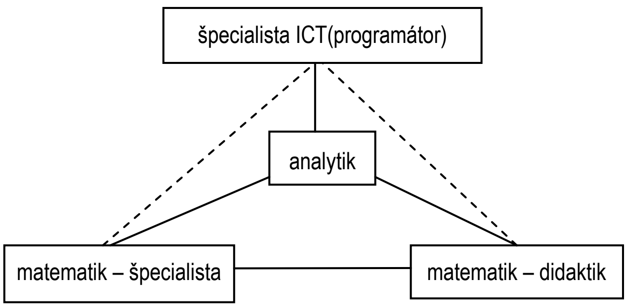
Pre vytvorenie hodnotného počítačového modelu interpretujúceho poznatky matematického charakteru je nevyhnutná súčinnosť a kooperácia viacerých elementov. Minimálne ide o interakciu troch základných odborov vstupujúcich do tohto procesu: matematika, didaktika a informatika.

Iniciátorom spracovania konkrétnej témy je didaktik matematiky, pre ktorého inicializačným impulzom sú *potreby praxe*. V spolupráci s odborovým matematikom sú zadávateľmi objednávky pre počítačové spracovanie. Tieto subjekty majú konkretizovaný tematický cieľ a tiež cieľovú skupinu, pre ktorú bude koncový produkt určený. Matematik špecialista dohliada na korektnosť matematicko-vedeckých poznatkov a ich interpretáciu, didaktik navrhuje realizáciu zodpovedajúcu pedagogicko-psychologickým požiadavkám cieľovej skupiny. Spojenie medzi teóriou a praxou, t. j. pretavenie matematického aspektu do aplikačnej roviny zabezpečuje matematicko-informatický analytik. Jeho úlohou je zabezpečiť formálny opis problému a navrhnúť čo najoptimálnejšiu transformáciu matematického obsahu a foriem do informatického prostredia.

[3] Programy uvedené v tabuľke využívajú rôzne programovacie techniky, ktoré sú dôležité a zaujímavé pre informatika. Pre koncového užívateľa – matematika sú absolútne bezpredmetné, dôležitá je korektnosť riešenia problému.

Tvorí „komunikačný interface“ medzi matematicko-didaktickým pohľadom na riešený problém a jeho konkrétnou aplikáciou funkčnou v počítačovom prostredí. Na základe podrobne vypracovanej a prekonzultovanej analýzy vstupuje do procesu špecialista ICT. Jeho úlohou je vytvoriť korektnú a funkčnú počítačovú verziu implementovanú vo vybranom programovacom jazyku. Možná je spätná, kontrolná väzba medzi prvkami: špecialista ICT – špecialista matematik a špecialista ICT – didaktik, na preverenie a zhodnotenie splnenia kritérií stanovených na začiatku celého procesu. V tomto štádiu je možné vykonanie malých korektúr, skôr formálneho a menej závažného charakteru. Ak bola pôvodná analýza vykonaná profesionálne a zodpovedne, nemusí vôbec prísť k priamemu vzájomnému kontaktu medzi programátorom a prvotnými zadávateľmi. Uvedená schéma je *zjednodušenou komunikačnou kostrou* postupu tvorby kvalitného matematického softvéru. V rozsiahlejších a náročnejších projektoch vstupujú do realizácie ďalšie dôležité prvky, napr. procesný dizajnér (vytvára vysokoúrovňový návrh funkčnosti projektu, koncepčný postup), aplikačný analytik (analyzuje úlohu z hľadiska aplikácie na najnižšej úrovni), aplikačný dizajnér, grafik a ďalší.

Chyba!



Obr. 8.*1 Komunikačná kostra postupu tvorby počítačového modelu a interakcie základných prvkov vstupujúcich do kreatívneho procesu tvorby počítačového modelu matematického problému*

9

VYBRANÉ PRVKY POTENCIÁLU SYSTÉMU DERIVE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

9.1 Derive v skratke

Počítačový program s názvom Derive patrí do skupiny univerzálnych matematických systémov, ktoré disponujú bohatou ponukou nástrojov určených hlavne na riešenie matematických problémov. Vyznačujú sa schopnosťou manipulácie so symbolickými výpočtami, veľkou presnosťou v numerických výpočtoch a výkonnou grafikou. Derive ponúka tri základné pracovné priestory („okná“) s názvami Algebra, 2D-plot a 3D-plot. Pre užívateľa programu je dôležitá znalosť základnej črty programu, a to, že *ponuka nástrojov je pre každý pracovný priestor odlišná*.

- **Algebra** – je základný pracovný priestor, v ktorom sa editujú všetky vstupné príkazy určené na matematické spracovanie. Obsahuje príkazy na prácu s číselnými a algebraickými výrazmi (zjednodušovanie, rozširovanie, rozklad na súčin), umožňuje riešenie rovníc, nerovníc a ich sústav, dokáže spracovávať operácie s komplexnými číslami, je vynikajúcim pomocníkom pri učive o funkciách a ich vlastnostiach (zvláda výpočty limít, derivácií, integrálov), podporuje narábanie s vektormi aj maticami.
- **2D-plot** – je pracovný priestor na tvorbu a spracovanie dvojrozmerných grafov. Toto grafické okno umožňuje nastavovanie vhodného súradnicového systému (približovanie, odďaľovanie, nastavovanie mierky), rozsahu zobrazovanej plochy, farby grafov, vytvorenie mriežky.
- **3D-plot** – je priestorovým grafickým oknom, určeným, podobne ako predchádzajúce okno, na prácu s grafickými zobrazeniami výpočtov realizovaných v okne Algebra. Je doplnený o možnosť výberu uhla pohľadu na zobrazený graf.

Výsledky z oboch grafických okien možno nielen vložiť do okna Algebry, čím sa ponúka možnosť tvorby kompletných pracovných listov, alebo metodických materiálov, ale podporuje aj export do najpoužívanejších grafických formátov.

Ovládanie programu je pomerne jednoduché, intuitívne, ale predsa len si vyžaduje istý stupeň zrelosti informačnej gramotnosti. Po pochopení základného princípu práce je prostredie systému Derive pre učiteľa, ale aj pre žiakov výučbovým laboratóriom, v ktorom môžu formulovať a overovať svoje hypotézy a uskutočňovať matematické experimenty. Čo sa týka uplatnenia systému na rôznych stupňoch škôl, cieľovou skupinou užívateľov v matematickom vzdelávaní by mali byť stredné a vysoké školy, avšak pri rozumnom postupe učiteľa a vhodnej integrácii do výučbového procesu môže Derive poslúžiť aj vo vyšších ročníkoch základnej školy. V nasledujúcich riadkoch sa pokúsime ilustrovať jeho využitie na gymnáziu a na základnej škole. Keďže ide o metodický materiál, môžeme do cieľovej skupiny zahrnúť aj študentov učiteľstva matematiky.

Využívanie špeciálnych softvérových produktov určených na matematické symbolické, numerické a grafické výpočty vo vyučovaní matematiky (vo všeobecnosti) má svoje špecifiká, ktoré sa týkajú nielen konkrétneho obsahového diapazónu možností, ktoré daný produkt ponúka, ale najmä voľby jeho metodického zaradenia v rámci stanovenej vyučovacej štruktúry a dosahovaného cieľa. V súvislosti s integráciou IKT prostriedkov do výučby matematiky sa, nepochybne oprávnene, často akcentuje aspekt názornosti a vizualizácie matematického problému. Popri týchto hľadiskách treba upozorniť aj na ďalšie benefity, ktoré môžu cieľavedome učitelia matematiky využiť, za podmienky výberu vhodného problému určeného na riešenie v počítačovom prostredí. V riešení nasledujúcej úlohy (cieľová skupina: žiaci 4. ročníka gymnázia) sa využíva syntéza elementárnych poznatkov z oblasti diferenciálneho a integrálneho počtu.

9.2 Návrh metodického postupu riešenia úlohy pomocou systému Derive

Úloha:

Určte hodnoty parametrov a, b z množiny reálnych čísel tak, aby funkcia y = a·sin(x) + b·cos(x) nadobúdala maximum pre x = $\frac{1}{4}\pi$ *a graf tejto funkcie spolu s osou x vymedzoval na intervale* $<0, \frac{\pi}{2}>$ *rovinný obrazec, ktorého obsah je 6.*

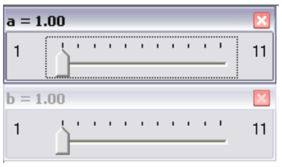
Najskôr v okne algebry zapíšeme výraz[4]

#1: a·SIN(x) + b·COS(x)

Ak by sme chceli v systéme Derive vykresliť graf vyššie definovanej funkcie (kliknutím na ikonu 2D-plot Window – okno pre grafické výstupy), Derive oznámi, že má príliš veľa neznámych. Pre parametre a, b treba zadefinovať posuvnú lištu, aby sme mohli priebežne meniť ich hodnoty a sledovať interaktívne zmeny na zodpovedajúcom grafe funkcie. V hlavnom menu grafického okna nájdeme *Insert – Slider Bar* (obr. 9.1, 9.2) a vyplníme príslušné údaje pre obidva parametre, ktorými sú názov parametra, jeho najmenšia a najväčšia nadobúdacia hodnota a počet častí delenia daného rozsahu.

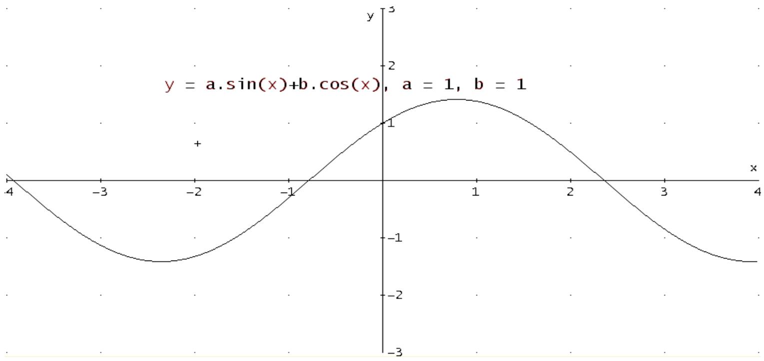
Na obrazovke sa ukážu posuvné lišty pre konkretizované premenné. Počiatočné hodnoty (obr. 9.2) sú nastavené na a = b = 1. Teraz možno vykresliť graf (obr. 9.3) kliknutím na ikonu Plot, alebo pravým tlačidlom na grafické okno a voľbou *Insert Plot*. Popis grafu získame podobne cez kontextové menu vložením anotácie.

[4] Riadky označené znakom # sa zapisujú do okna Algebry v systéme Derive.



Obr. 9.1 *Definovanie posuvnej lišty pre parameter b*

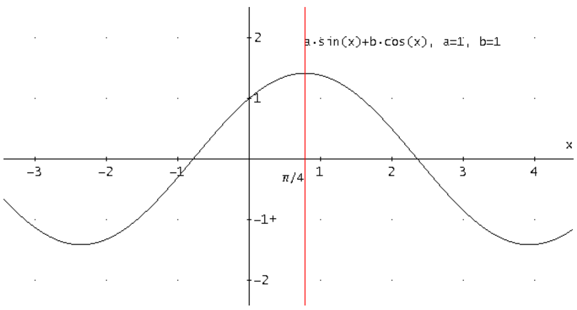
Obr. 9.2 *Posuvné lišty pre premenné a, b*



Obr. 9. 3 *Graf funkcie y = a·sin(x) + b·cos(x) pre hodnoty parametrov a = b = 1*

V bode x = $\frac{1}{4}\pi$ má funkcia y = a.sin(x) + b.cos(x) nadobúdať na intervale $<0, \frac{\pi}{2}>$ maximum. Do okna algebry definujeme x = $\frac{\pi}{4}$ a v grafickom okne znázorníme rovnosť analogicky ako v predchádzajúcom prípade (obr. 9.4).

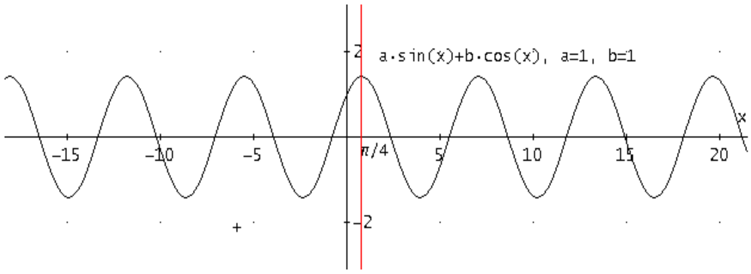
#2: $\quad x = \frac{\pi}{4}$



Obr. 9.4 *Graf funkcie so zvýraznením bodu, v ktorom má byť lokálne maximum*

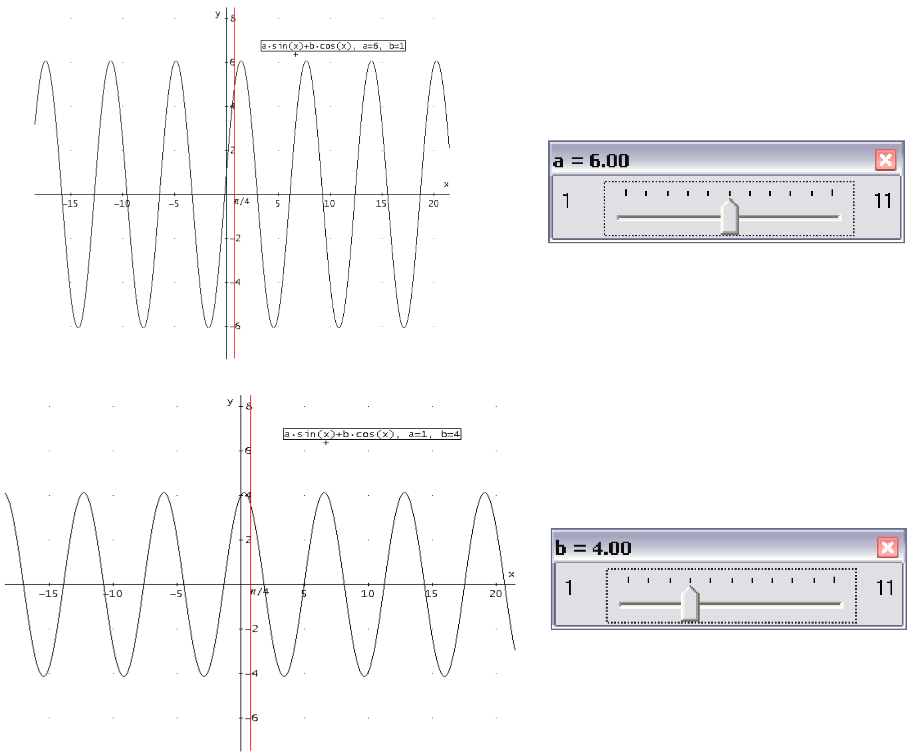
V nasledujúcom experimentovaní môžeme meniť mierku osí grafu, prípadne zobrazovanú časť grafu, pomocou ikon

v paneli nástrojov, ktorý je aktivovaný pre grafické okno 2D-plot.



Obr. 9.5 *Graf po zmene mierky*

Experimentovaním s hodnotami parametrov a, b sa možno pokúsiť o odhad hodnôt, aby boli splnené podmienky úlohy o maxime na uvedenom intervale.



Obr. 9.6 *Experimentovanie s hodnotami parametrov a, b*

Z vykonaných experimentov sa dá stanoviť hypotéza o rovnosti parametrov a = b. Na dôkaz použijeme prostriedky matematiky. Vypočítame prvú deriváciu danej funkcie v bode $\frac{1}{4}\pi$, ktorá sa (kvôli podmienke maxima) musí rovnať nule:

#3: $a \cdot SIN(x) + b \cdot COS(x)$

#4: $\frac{d}{dx} a \cdot SIN(x) + b \cdot COS(x)$

#5: $a \cdot COS(x) - b \cdot SIN(x)$

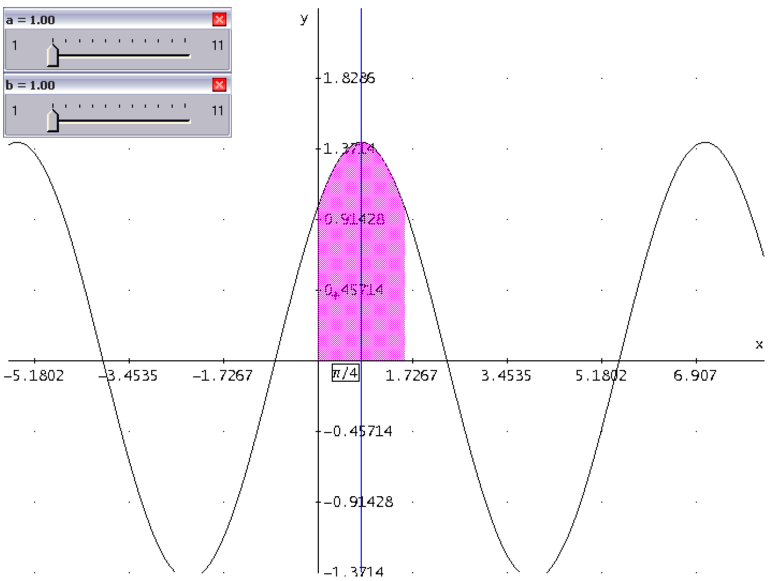
#6: $SOLVE\left(\left[a.COS(\frac{\pi}{4}) - b.SIN(\frac{\pi}{4}) = 0\right], [x]\right)$

#7: **[a – b = 0]**

Po derivácii a aplikácii podmienky o maxime je zrejmé, že a = b. V ďalšom postupe využijeme informáciu o obsahu oblasti ohraničenej danou funkciou a osou x. Na znázornenie obsahu rovinného obrazca v Derive použijeme nasledujúci príkaz:

#8: $PlotInt\left(a.SIN(x) + b.COS(x), x, 0, \frac{\pi}{2}\right)$

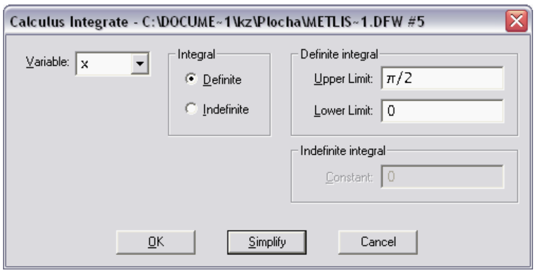
Poznámka: Ak by Derive nevyznačil oblasť, ktorej obsah má byť 6, treba najskôr v hlavnom menu nastaviť *Options-Simplify Before Plotting* a znovu sa pokúsiť o znázornenie.



Obr. 9.7 *Vyznačenie rovinného obrazca na určenom intervale*

Na vypočítanie presnej hodnoty obsahu použijeme symbolický výpočet určitého integrálu:

#9: a.SIN(x) + b.COS(x)



Obr. 9.8 *Postup výpočtu určitého integrálu*

#10: $\int_{0}^{\pi/2} (\mathrm{a.SIN(x)} + \mathrm{b{\cdot}COS(x)})\mathrm{dx}$

#11: **a + b**

Zhrnutie: Ak obsah vyznačenej časti je a + b = 6 (j^2) a zároveň sme zistili, že a = b, potom riešením úlohy je a = 3, b = 3.

Odpoveď: Aby funkcia y = $a{\cdot}\sin(x)$ + $b{\cdot}\cos(x)$ nadobúdala maximum pre x = $\frac{1}{4}\pi$ a graf tejto funkcie spolu s osou x vymedzoval na intervale <0, $\frac{\pi}{2}$> rovinný obrazec, ktorého obsah je 6, musia byť hodnoty parametrov a = b = 3.

9.3 Niektoré dôsledky pôsobenia systému Derive vo výučbe matematiky

Vstupnými predpokladmi pre úspešné riešenie uvedenej úlohy je zvládnutie učiva o vlastnostiach elementárnych funkcií, o lokálnych a globálnych extrémoch, potrebné sú poznatky zo základov diferenciálneho a integrálneho počtu, nutné je vedieť realizovať jednoduché symbolické derivácie a integrácie, zvládnuť výpočet určitého integrálu. V konečnom dôsledku je však úloha veľmi jednoduchá a zúži sa na realizáciu jednej jednoduchej derivácie a na výpočet jedného určitého integrálu. Zložitý je proces hľadania cesty k tomuto jednoduchému riešeniu. Treba syntetizovať všetky doterajšie poznatky, mať istú dávku nadhľadu, nezľaknúť sa parametrov vyskytujúcich sa vo funkčnom predpise a podobne. Navrhnutý metodický postup umožní študentovi znázorniť graf funkcie, definovaním posúvačov infiltruje prvky interaktivity a dynamiky do procesu skúmania priebehu funkcie v závislosti od meniacich sa hodnôt parametrov a, b a následne umožňuje aktivovať experimentálne metódy. Dôležitou súčasťou riešiteľského procesu je aj realizovanie odhadu a jeho prípadnej korekcie v nadväznosti na voľbu jednak ďalšieho riešiteľského postupu, alebo aspoň (nie menej dôležitej) intuitívnej kontroly výsledku. Derive možno použiť aj v závislosti od stanoveného cieľa buď na odbremenenie výpočtov vo fáze zdôrazňovania riešiteľskej stratégie, alebo aj ako „kontrolný kalkulátor“ umožňujúci spracovávať rôzne druhy vstupných údajov.

O ďalších konkrétnych dôsledkoch využívania systému Derive vo výučbe matematiky, a tiež o skutočnosti, že Derive možno s úspechom aplikovať vo vyučovaní školskej matematiky aj v nižších ročníkoch základného vzdelávania, svedčí ukážka grafického riešenia úlohy o predbiehajúcich sa vlakoch s podrobným vysvetlením analógií a odlišností.

Úloha (o predbiehajúcich sa vlakoch)[5]:

Na dvoch rovnobežných tratiach idú tým istým smerom dva vlaky, a to rýchlik a nákladný vlak. Rýchliková súprava má dĺžku 75 m a jej rýchlosť je 58 km/h a nákladná súprava má dĺžku 105 m a jej rýchlosť je 40 km/h. Aký čas uplynie od okamihu, keď rušeň rýchlika dostihne posledný vagón nákladného vlaku do okamihu, keď posledný vagón rýchlika predíde rušeň nákladného vlaku?

Riešenie úlohy v prostredí Derive môže byť realizované tradičnými matematickými metódami, z ktorých vyberáme algebraickú metódu a grafickú metódu. Pre porovnanie malých odlišností medzi tradičným grafickým riešením a riešením v prostredí programového produktu Derive uvádzame stručný algoritmický prehľad krokov, ktoré treba uskutočniť na korektné zobrazenie grafického riešenia úlohy.

Tradičné grafické riešenie úloh o rovnomernom pohybe :

- „určenie začiatočného pohybového stavu, t. j. určenie začiatku počítania času a merania dráhy,
- určenie druhého pohybového stavu,
- určenie jednotiek na súradnicových osiach,
- zostrojenie grafu,
- čítanie v grafe“ (Križalkovič, Cuninka, Šedivý, str. 96, 1971).

Grafické riešenie pomocou systému Derive*:*

- určenie začiatočného pohybového stavu,
- definícia funkčnej závislosti (dráha, čas),
- vizualizácia závislostí v grafickom okne,
- vyhľadanie riešenia v zobrazenom grafe (využitie trasovania grafu na aproximáciu riešenia).

Obidva uvedené postupy (tradičný, aj modernizačný) vyžadujú na začiatku riešenia úlohy dohodu o určení začiatočného pohybového stavu, teda začiatku počítania času a merania dráhy. Definujme bod zo súradnicami [0, 0] ako pohybový stav lokomotívy rýchlika a súčasne konca nákladného vlaku na začiatku predbiehania. Koniec rýchlika bude mať teda na začiatku predbiehania pohybový stav [0, –75] a lokomotíva

[5] Zdroj: Križalkovič, K. – Cuninka, A. – Šedivý, O.: 500 riešených slovných úloh z matematiky, 1971.

nákladného vlaku [0, 105]. Kým v tradičnom riešení treba ďalej zistiť druhý pohybový stav pomocou známych rýchlostí, v programovom prostredí treba zistiť lineárnu funkčnú závislosť (čas, dráha) pre obidva vlaky a zapísať ju do okna algebry (riadky #1 – #4). Derive po zápise príkazu AreaBetweenCurves farebne vyznačí oblasť medzi dvomi v zátvorke uvedenými funkciami na stanovenom intervale. Grafy pohybu rýchlika a nákladného vlaku sa nezobrazia automaticky v najideálnejšej mierke, preto treba aplikovať ďalšie nástroje v grafickom okne na nastavenie mierky, oddialenie, resp. priblíženie pohľadu na obrázok. Na záver obidve metódy vyžadujú od riešiteľa rozvinutú kompetenciu čítania z obrázku a vyhľadanie riešenia v zobrazenom grafe. V systéme Derive možno v tejto fáze s úspechom využiť z ponuky nástrojov „trasovanie grafu“ a pokúsiť sa o aproximáciu riešenia. V nasledujúcich riadkoch je uvedený postup implementácie príkazov do okna algebry v Derive a jeho grafický výstup, pričom posledný riadok s označením č. 7 slúži len na znázornenie času ukončenia predbiehania.

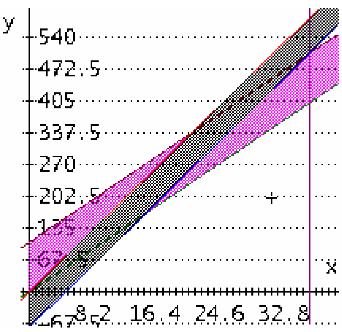
Rýchlosť rýchlika 58 km/h = 58000/3600 m/s

#1: $\frac{580}{36}\cdot x$

#2: $-75 + \frac{580}{36}\cdot x$

#3: $\frac{400}{36}\cdot x$

#4: $\frac{400}{36}\cdot x + 105$



#5: $\mathrm{AreaBetweenCurves}\left(\frac{580}{36}\cdot x, -75 + \frac{580}{36}\cdot x, x, 0, 600, y\right)$

#6: $\mathrm{AreaBetweenCurves}\left(\frac{400}{36}\cdot x, 105 + \frac{400}{36}\cdot x, x, 0, 600, y\right)$

#7: $x = 36$

Nedá sa predpokladať, že žiaci na základnej škole budú na riešenie úloh podobného typu využívať náročné príkazy systému Derive. Učiteľ môže priamo pred ich očami postupne znázorňovať jednotlivé závislosti, pričom žiaci aktívne spolupracujú z hľadiska formulácie a určovania jednotlivých pohybových stavov, definovania funkčných závislostí, odhadovania času predbiehania, narábania so zobrazeným grafom a podobne. Prostredníctvom interaktívnej tabule môžu robiť doplňujúce záznamy a výpočty.

Na potvrdenie, resp. spresnenie grafického riešenia možno vykonať algebraické riešenie úlohy. Uvádzame ho v tvare kódu v systéme Derive (#8 – #12).

Algebraické riešenie:

Rýchlik musí od začiatku predbiehania po jeho ukončenie prejsť o 75 + 105 = 180 metrov dlhšiu dráhu. Hľadaný čas označíme písmenom x, a teda platí rovnosť:

#8: $40 \cdot x + 0.18 = 58 \cdot x$

#9: SOLVE([$40 \cdot x + 0.18 = 58 \cdot x$], [x]) *{Príkaz na riešenie rovnice}*

#10: $x = \left[\frac{1}{100}\right]$ *{riešenie rovnice}*

#11: $\frac{1}{100} \cdot 3600$ *{príkaz na jednotkovú premenu}*

#12: 36 *{riešenie po jednotkovej premene}*

Odpoveď: Predbiehanie trvalo 36 sekúnd.

Poslanie výučby matematiky na školách s rôznym zameraním predpokladá aj preferenciu rôznych prístupov a didaktických postupov. Priorita rôznych prístupov k riešeniu prezentovaných, ale aj ďalších úloh, sa v uvedenom kontexte bude v školách s rôznym zameraním pravdepodobne značne líšiť. Cieľom ukážok nebolo prezentovať tvrdenie, že by riešenia využívajúce didaktický softvér mali mať v procese výučby substitučnú funkciu, ale iba alternatívnu a doplňujúcu. Je zrejmé, že študent matematiky ako vedného odboru, vrátane študenta učiteľstva matematiky by mal mať iné vzdelanie, než študent technického – aplikačného typu štúdia. V prvom prípade by mal byť dominantný akcent na širokú ponukovú paletu aplikácie, jednak v odbornej aplikačnej teórii, ale najmä v praxi, kde prvok racionalizácie (z hľadiska času a námahy) a zvolená miera presnosti výpočtu predurčujú jednoznačne využitie IKT v bežnej technickej praxi. V príprave budúcich učiteľov matematiky je zasa dominantné akcentovať rôznorodosť didaktických metód a prístupov v súčinnosti z možnosťami základnej ponuky konkrétnej programovej aplikácie a ich efektívnych spôsobov zaradenia do výučby matematiky v jednotlivých ročníkoch a na jednotlivých stupňoch škôl.

10

SYMBIÓZA MATEMATICKÝCH A ALGORITMICKÝCH POSTUPOV V TABUĽKOVÝCH KALKULÁTOROCH

10.1 Tabuľkový kalkulátor v matematike

Tabuľkové kalkulátory vo všeobecnosti slúžia na spracúvanie väčšieho množstva údajov, ktoré sú usporiadané do riadkov a stĺpcov (do tabuľky), pričom s týmito údajmi vieme vykonávať rôzne výpočty, analyzovať ich, spracovávať, triediť podľa rôznych kritérií, prípadne graficky znázorňovať. V súčasnosti najrozšírenejším a najviac používaným tabuľkovým kalkulátorom (nielen) v školskej praxi je MS Excel. Zvládnutie elementárnej obsluhy Excelu je súčasťou základného kurzu informatického vzdelávania na strednej škole, hoci nie je neobvyklé vidieť pracovať s týmto softvérom aj žiakov základnej školy. K najväčším výhodám používania tabuľkového kalkulátora na hodinách matematiky z hľadiska napĺňania didaktických cieľov pri dodržiavaní základných didaktických zásad patria nasledujúce:

- Tabuľky v Exceli sa automaticky aktualizujú po každej zmene ľubovoľnej vstupnej hodnoty, čím môžu vznikať *rôzne modifikácie úloh* a existuje možnosť *tvorby viacerých variačných úloh.*
- Prehľadná, vkusná a estetická úprava tabuliek, využitie rozmanitých grafov prispieva k *vyššej názornosti, zrozumiteľnosti* výkladu a je tiež dôležitým prvkom pre všestranný rozvoj žiakov.
- Zabudované matematické funkcie umožňujú získať okamžitý výsledok zo vstupných hodnôt, čo poskytuje učiteľovi *jednoduchú kontrolu správnosti výsledkov.*
- V istej fáze vzdelávacieho procesu nie je vždy dôležitý výsledok, prípadne výpočtový postup, ale sledujú sa iné ciele. Použitie kalkulátora poskytne odbremenenie žiakov od rutinnej práce a sústredenie ich pozornosti na matematizáciu problému a *hlbšie pochopenie vzťahov a súvislostí.*

K ďalšej prednosti možno jednoznačne zaradiť podporu funkcie zdieľania dokumentov v prostredí MS Excel. O didaktickom využití metódy zdieľania excelovských súborov sa zaoberáme v kapitole s názvom Technológia zdieľania súborov v sieti a jej aplikácie vo vyučovaní elementárnej matematiky.

Súčasnosť poskytuje veľa úloh reálneho života jednoducho spracovateľných prostredníctvom tabuľkového kalkulátora MS Excel. Patria k nim úlohy výpočtu rôznych leasingových a úverových splátok, stanovenia splátkových kalendárov, problémy týkajúce sa daňového zaťaženia produktov, vyúčtovanie nákladov za rôzne služby a tovary, úlohy z oblasti poistnej matematiky, obchodného plánovania a podobne. V uvedenom kontexte je dôležité skúmanie prechodu z tradičného odovzdávania vedomostí k osvojeniu si metód vyhľadávania a spracovania informácií, v súvislosti s ktorým J. Fulier konštatuje: „Je zrejmé, že pre fungovanie informačnej spoločnosti je rozhodujúce také vzdelanie, ktoré zabezpečí, aby sa ľudia vedeli orientovať v prívale informácií, rozumeli im, vedeli ich používať a najmä ich vytvárať.“

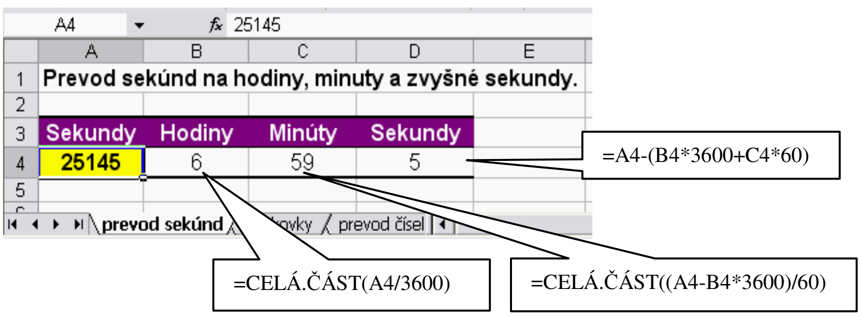
Reorganizácia relevantných vstupných údajov matematickej úlohy, návrh účelnej a ľahko spracovateľnej tabuľky patria k primárnym kompetenciám v práci s tabuľkovým kalkulátorom. Integrácia netradičných hodín založených na osobnej skúsenosti žiakov s tabuľkovým kalkulátorom (ako aj využitie ďalších prvkov IKT) umožňuje v rámci informatického prístupu k matematickému vzdelávaniu rozvoj schopnosti reorganizácie a reštrukturalizácie ich vedomostí ako dôležitej súčasti divergentného myslenia, ktoré je jednou zo základných metód rozvíjania tvorivosti. Existuje mnoho faktorov, ktoré majú zásadný vplyv na rozvoj tvorivého myslenia. Kľúčovým je prostredie bohaté na podnety, a preto je dôležitý rôznorodý výber spôsobov komplexného riešenia matematických problémov vrátane používania tabuľkových kalkulátorov.

10.2 Námety na riešenie matematických úloh v MS Excel

V MS Excel sa dajú riešiť úlohy od najelementárnejších až po úlohy s využitím najnáročnejších programovacích techník. Riešenia v „excelovských zošitoch“ sú vyvrcholením kombinácie matematického riešenia konkrétnej úlohy s abstraktnými algoritmickými postupmi spĺňajúcimi požiadavky hromadnosti, korektnosti, elementárnosti, determinovanosti a konečnosti. Na ilustráciu využitia tabuľkového kalkulátora v školskej praxi sú uvedené tzv. prevodové úlohy, úlohy z oblasti finančnej matematiky, ukážky metód spracovania štatistických údajov.

Úloha č. 1:

Vytvorte tabuľku v MS Excel, v ktorej sa daný počet sekúnd prepočíta na hodiny, minúty a zvyšné sekundy.



Obr. 10.1 *Ukážka implementácie jednoduchej matematickej úlohy*

Je zrejmé, že tento typ úlohy, čo sa týka náročnosti, nie je vhodný pre vyšší stupeň gymnázia. Napriek tomu, môže byť jeho počítačové spracovanie vytvorené priamo na hodine žiakmi pre nich prínosné, zábavné a inšpiratívne. Žiaci prevod sekúnd po matematickej stránke zvládnu, treba ich len upozorniť na syntaktický zápis vzorcov v Exceli.

Ich riešenie môže mať podobu ako na obr. 10.1. V bunke A4 sú dané sekundy, ktorých prevod chceme uskutočniť. Keďže hodina má 3600 sekúnd, vzorec v bunke B4 na výpočet hodín má tvar =CELÁ.ČÁST(A4/3600) –v českej verzii MS Excel. Počet minút získame =CELÁ.ČÁST((A4-B4*3600)/60) a zostávajúce sekundy =A4-(B4*3600+C4*60) sú uvedené v bunke D4. Ak máme implementované vzorce, môžeme skúsiť experimentovať a meniť hodnotu v bunke A4 (počet daných sekúnd) a kontrolovať správnosť prepočtu.

Úloha č. 2:

Uskutočnite prevod čísel z desiatkovej do dvojkovej sústavy.

V rámci elementárnej teórie čísel sa žiaci stretávajú s pozičnými číselnými sústavami. Jednou z klasických úloh riešených na hodinách matematiky pre 1. ročník sú prevody medzi číselnými sústavami. Skúsenejší žiaci, ktorí majú základné zručnosti programátorských techník, môžu spracovávať v MS Excel aj náročnejšie úlohy. Prevodová kalkulačka medzi desiatkovou a dvojkovou číselnou sústavou patrí medzi programátorsky náročnejšie úlohy. Je potrebná znalosť logickej funkcie, ktorej všeobecný tvar je „**IF**(podmienka; hodnota ak je podmienka splnená; hodnota ak nie je splnená)“ (IF – v českej verzii **KDYŽ(podmienka; áno; nie)**).

	A	B	C	D	E
1	**Prevod z desiatkovej číselnej sústavy do dvojkovej :**				
2					
3	číslo		zvyšky		
4	**1024**	512	0		
5	512	256	0		
6	256	128	0		
7	128	64	0		
8	64	32	0		
9	32	16	0		
10	16	8	0		
11	8	4	0		
12	4	2	0		
13	2	1	0		
14	1	0	1		
15	0	koniec			

Obr. 10.2 *Prevodová tabuľka z desiatkovej do dvojkovej číselnej sústavy*

V bunke A4 (obr. 10.2) je číslo v desiatkovej číselnej sústave, ktoré sa bude prepočítavať do dvojkovej sústavy. Podľa potreby ho môžeme aktualizovať. Algoritmus prevodu je založený na postupnom delení daného čísla dvomi, pričom čiastkové výsledky delenia sa ukladajú do stĺpca B. Dôležité sú zvyšky po delení, ktoré sa zapisujú do stĺpca C. Delenie sa uskutočňuje dovtedy, kým sa v stĺpci B neobjaví nula. Po matematizácii úlohy treba do buniek A5, B4 a C4 zapísať nasledujúce vzorce:

- A5: =KDYŽ(B4<>„koniec“;B4;“„)
- B4: =KDYŽ(A4<>0;CELÁ.ČÁST(A4/2);“koniec“)
- C4: =KDYŽ(B4<>„koniec“;MOD(A4;2);“„)

Po prekopírovaní uvedených vzorcov smerom dolu sa vyplnia stĺpce A, B, C, pričom výsledná hodnota v dvojkovej sústave je zapísaná v stĺpci „zvyšky“ a treba ju čítať smerom zdola nahor. V ilustračnom príklade na obr. 10.2 je výpočet čísla $(1024)_{10} = (10000000000)_2$.

Študenti tretieho ročníka vyššieho cyklu gymnázia (resp. septimy), ktorí prešli základným kurzom programovania, úlohu podobného typu zvládnu bez väčších problémov.

Z didaktického pozorovania vyplynulo, že žiaci obľubujú úlohy, prostredníctvom ktorých sa môžu „pohybovať“ po Internete. Pre väčšinu z nich je jednoduché vyhľadať napríklad hodnoty aktuálneho kurzového lístka.

Úloha č. 3:

Vytvorte aktuálnu menovú kalkulačku.

Riešenie spočíva nielen vo vyhľadaní aktuálnych kurzov, ale najmä vo vytvorení návrhu prevodovej tabuľky obsahujúcej základné údaje: mena, množstvo, kurz. Cenným prínosom je hlavne nájdenie matematických kauzalít medzi vstupnými údajmi a schopnosť ich syntaktického zápisu v (nematematickom) prostredí tabuľkového kalkulátora. Modifikačné alternatívne úlohy sa môžu týkať tvorby v súčasnosti aktuálnej tzv. *eurokalkulačky*, alebo rôznych *úverových kalkulačiek.*

V oblasti získavania a spracovávania informácií rôzneho charakteru (kvantitatívneho aj kvalitatívneho) umožňuje Excel nielen separované výpočty jednotlivých štatistík základného súboru prostredníctvom štandardných matematických vzorcov, alebo pomocou vstavaných funkcií, ale pre skúsenejšieho edukanta je určená komplexná štatistická analýza dát. Výber metódy spracovania záleží od stupňa informačnej gramotnosti učiteľa a žiakov, a tiež od výchovno-vzdelávacieho cieľa. Obe metódy sú dokumentované v nasledujúcej úlohe.

Úloha č. 4:

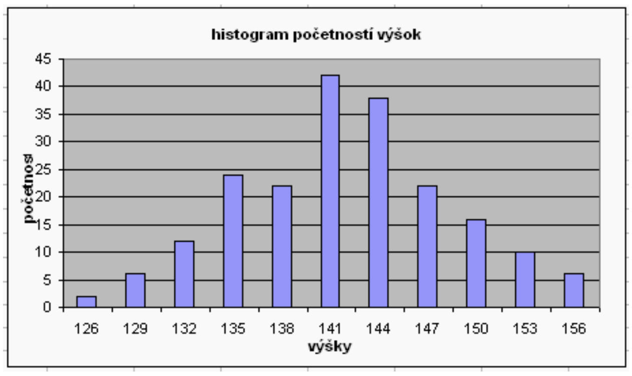
V tabuľke sú uvedené výsledky 200 meraní výšok chlapcov istej vekovej skupiny. Údaje spracujte a určite základné charakteristiky polohy a variability daného výberového štatistického súboru.

a) Metóda spracovania údajov použitím štandardných matematických vzorcov a vytvorením histogramu rozdelenia relatívnych početností pomocou nástroja na tvorbu grafu.

V štádiu automatizácie základných štatistických kalkulácií, po návrhu formálnej stránky tabuľky, sa výpočty v tabuľkovom procesore realizujú podobne, ako pri tradičnom riešení úlohy pomocou kalkulačky. Vypĺňanie tabuľky zväčša prebieha kopírovaním vzorcov, ktoré treba definovať v prvom riadku tabuľky (obr. 10.5). Najdôležitejším aspektom v uvedenom kontexte je venovať pozornosť **priorite operátorov** v syntaktickom zápise jednotlivých vzorcov. Didaktickou prednosťou tohto postupu je uvedomovanie si matematickej bázy nielen každého separovaného výpočtu, ale podstatou je získať *algoritmický nadhľad* v postupnosti parciálnych krokov až po zavŕšenie výpočtu. Zvládnutie riešenia úlohy v novom prostredí si vyžaduje od učiteľa i od žiakov priebežné nadobúdanie ďalších zručností v oblasti informatickej gramotnosti.

	A	B	C	D	E	F
1	interval	stred intervalu x	početnosť n	kum.počet	x*n	$(x_i\text{-}x_{priem})^{2*}n_i$
2	124,5-127,5	126	2	2	252	505,62
3	127,5-130,5	129	6	8	774	998,46
4	130,5-133,5	132	12	20	1584	1176,12
5	133,5-136,5	135	24	44	3240	1142,64
6	136,5-139,5	138	22	66	3036	334,62
7	139,5-142,5	141	42	108	5922	34,02
8	142,5-145,5	144	38	146	5472	167,58
9	145,5-148,5	147	22	168	3234	572,22
10	148,5-151,5	150	16	184	2400	1049,76
11	151,5-154,5	153	10	194	1530	1232,1
12	154,5-157,5	156	6	200	936	1192,86
13					141,9	42,03
14					priemer	rozptyl
15						
16					odchylka:	6,48

Obr. 10.5 *Intervalové triedenie výšok*



Obr. 10.6 *Histogram početností výšok*

b) Metóda spracovania údajov použitím nástrojov štatistickej analýzy dát (v ponuke „*Nástroje*“).

Všetky vstupné údaje budú uvedené v stĺpci A (bez uvedenia početností) tak, ako boli namerané (neutriedené), prípadne v tvare utriedenej postupnosti: 126, 126, 129, 129, 129, 129, 129, 129, 132, 132, 132, 132, …, 156. V ďalšom stĺpci treba stanoviť horné hranice intervalového rozdelenia (tab. 10.1 a). Po špecifikácii voľby „Analýza dát“ -> „popisná štatistika“ získame komplexný prehľad o základných štatistických charakteristikách polohy a variability (tab. 10.1 b). Po ďalšej špecifikácii voľby „Analýza dát“ -> „histogram“ získame intervalové rozdelenie s početnosťami (tab. 10.1 c) a histogram rozdelenia týchto početností (obr. 10.6).

Tab. 10.1 *Spracovanie údajov prostredníctvom analýzy dát*

hranice tried
127,50
130,50
133,50
136,50
139,50
142,50
145,50
148,50
151,50
154,50
157,50

a

Sloupec1	
Stř. hodnota	141,9
Chyba	0,45957157
Medián	141
Modus	141
Směr. odchylka	6,49932351
Rozptyl výběru	42,241206
Špičatost	-0,31097186
Šikmost	0,00898553
Rozdíl max-min	30
Minimum	126
Maximum	156
Součet	28380
Počet	200

b

Třídy	*Četnost*
127,5	2
130,5	6
133,5	12
136,5	24
139,5	22
142,5	42
145,5	38
148,5	22
151,5	16
154,5	10
157,5	6
Další	0

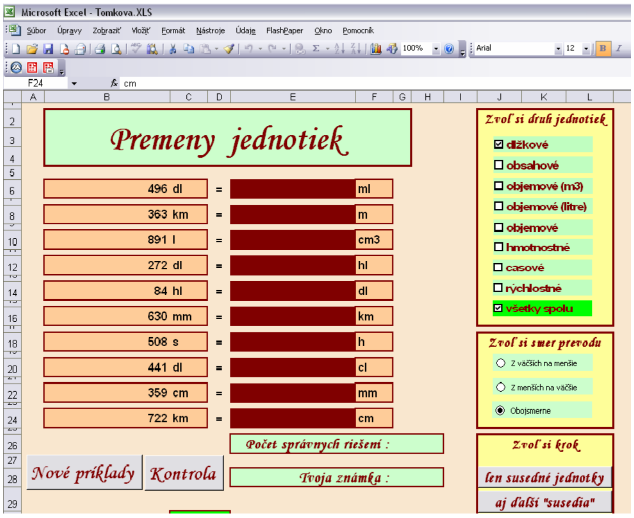
c

a) Špecifikácia hraníc tried intervalového rozdelenia
b) Výsledný prehľad charakteristík popisnej štatistiky v českej verzii MS Excel
c) Tabuľka rozdelenia početností intervalového triedenia v českej verzii MS Excel

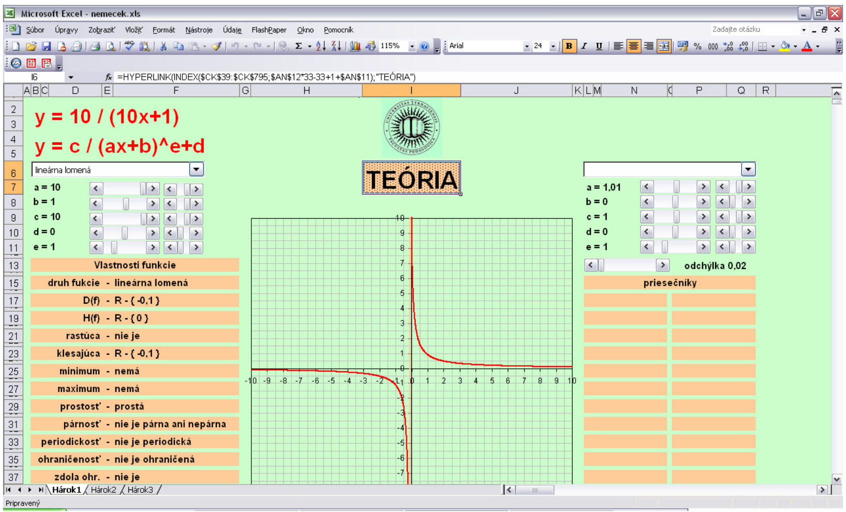
Metóda spracovania údajov použitím štatistickej analýzy dát je vhodná skôr pre erudovanejšieho edukanta. Nadobudnutie zručností z tejto oblasti je dôležité hlavne z dôvodu sledovania výskumných a interpretačných cieľov.

10.3 Pedagogický softvér vytvorený v tabuľkovom kalkulátore

Všetky predchádzajúce ukážky riešených matematických úloh predpokladali priamu, aktívnu prácu žiakov s tabuľkovým kalkulátorom. Uvedená činnosť si vyžaduje nielen matematizáciu riešenej úlohy, ale aj dôslednú implementáciu postupu riešenia do prostredia tabuľkového kalkulátora, pričom sa predpokladá aspoň minimálna znalosť základov obsluhy používaného kalkulátora. Avšak MS Excel je aj platformou, na ktorej základoch môžu vzniknúť užitočné aplikácie matematicko-didaktického charakteru. Ak spĺňajú tieto aplikácie kritériá a požiadavky pedagogického softvéru, môžu byť vhodným výučbovým prostredím pre uskutočňovanie cieľov matematického vzdelávania. Vznik a vývoj matematického pedagogického softvéru v prostredí tabuľkového kalkulátora je pomerne živelný, ale napriek tomu existujú zaujímavé a užitočné programy, ktorých autormi sú zväčša zanietení učitelia, prípadne absolventi vysokoškolského učiteľského štúdia matematiky a informatiky. Na ilustráciu sú uvedené dva programové produkty. Autorkou výučbového a zároveň testovacieho programu s názvom „Premeny jednotiek" je E. Tomková (2007). Z autorskej dielne Katedry matematiky a informatiky Trnavskej univerzity pochádza diplomová práca zameraná na vyšetrovanie vlastností elementárnych funkcií s názvom „Funkcie a ich vlastnosti" (P. Híc, M. Pokorný, 2007). Obe ukážky, po vhodnom začlenení do vzdelávacieho procesu, môžu byť prínosným a spestrujúcim činiteľom.



Obr. 10.7 Pedagogický softvér s názvom „Premeny jednotiek" (E. Tomková, 2007)



Obr. 10.8 Pedagogický softvér s názvom „Funkcie a ich vlastnosti"
(P. Híc, M. Pokorný, 2007, diplomová práca R. Nemeček)

11

SYSTÉMY DYNAMICKEJ GEOMETRIE V MATEMATICKOM VZDELÁVANÍ

V kapitole o interaktívnych prostrediach v matematickom vzdelávaní sme definovali pojem interaktivity a interaktívnych softvérových programov. Výučbové dynamické prostredia na tvorbu interaktívnych konštrukcií umožňujú učiteľovi i žiakom nielen vytvoriť geometrické riešenie úlohy, ale najmä skúmať interaktívne väzby medzi jednotlivými prvkami konštrukčnej úlohy. Príkladmi otvorených, interaktívnych výučbových programových produktov určených na riešenie geometrických úloh sú aplikácie s názvami *Cabri geometria* a *Compass and Ruler*.

11.1 Charakteristika Cabri geometrie a jej možnosti v školskej geometrii

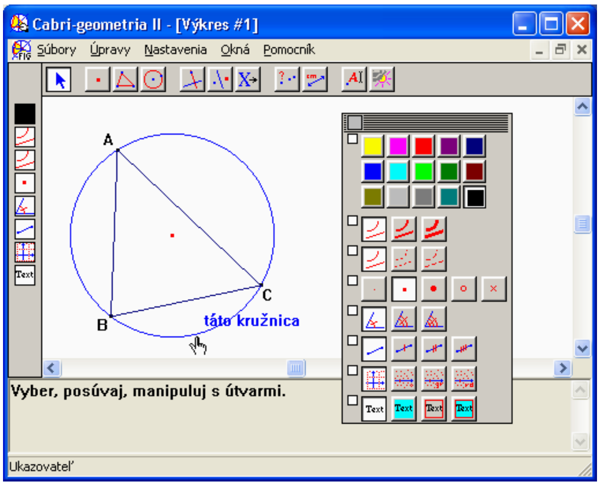
Cabri Geometria (www.cabri.com) je didaktický geometrický softvér, ktorý pracuje na princípoch analytickej geometrie euklidovskej roviny. Patrí do kategórie dynamických geometrických systémov, ktoré sa vyznačujú možnosťou interaktívne meniť niektoré vlastnosti základných geometrických útvarov, čo umožňuje skúmať množinu všetkých riešení daného geometrického problému. Svojim dizajnom pripomína jednoduchý grafický editor, avšak jeho silnou stránkou je konštrukcia geometrických prvkov na základe rôznych vzájomných a transformačných vzťahov. Má schopnosť zachovávať vlastnosti prvkov, na základe ktorých boli skonštruované a aktualizovať konštrukcie po zmene ich atribútov.

Cabri geometria je nástroj, prostredníctvom ktorého môže užívateľ demonštrovať a simulovať konštrukcie na výkres pomocou fiktívneho pravítka, kružidla a farebných ceruziek.

Základ pracovnej plochy tvorí výkres, na ktorý postupne umiestňujeme základné geometrické prvky (napr. body, úsečky, priamky, kružnice a mnohé iné) a určujeme im grafické vlastnosti. Silnou stránkou programu je vlastnosť, že útvary s ktorými pracujeme môžu byť vo dvoch stavoch:

- *Nezávislý útvar* – je útvar zostrojený použitím iba základných bodov. Takýto útvar môže byť posunutý (ťahaním), ale nie priamo modifikovaný. Posúvaním základných bodov, ktoré ho tvoria, ho však možno meniť nepriamo.
- *Závislý útvar* – je útvar zostrojený pomocou iného útvaru (či už závislého alebo nezávislého). Závislé útvary nemôžu byť posúvané, ani priamo modifikované. Meniť

alebo posúvať ich možno nepriamo posúvaním základných bodov alebo útvarov, ktoré sú zodpovedné za jeho existenciu. Napríklad priesečník dvoch priamok je závislý útvar, pretože jeho polohu možno meniť len zmenou polohy niektorej z priamok.



Obr. 11.1 *Užívateľské prostredie Cabri geometria II*

V metodickej príručke pre používanie Cabri geometrie V. Jodas a L. Koreňová uvádzajú až tri stavy pre body na výkrese: voľné, čiastočne viazané a viazané. „Voľné body je možné ľubovoľne premiestňovať, presun čiastočne viazaných bodov je obmedzený množinou, ktorej prináležia. Viazané body sú presne odvodené z existujúcich objektov nejakou konštrukciou a ich polohu nemožno priamo meniť. Konštrukcia vytvorená s použitím voľných a čiastočne viazaných bodov sa ich presunom automaticky mení so zachovaním všetkých vzťahov“(Jodas, Koreňová, 2002).

Závislosťou a nezávislosťou útvarov sa stáva program dynamickým a interaktívnym, čo poskytuje užívateľovi možnosti experimentovania, skúmania, objavovania nových vzťahov medzi geometrickými objektmi. Nezanedbateľnou výhodou je možnosť diskusie a následnej názornej ukážky vzhľadom na polohu daných geometrických útvarov. Ďalšou prednosťou programového produktu Cabri je jeho schopnosť rozlišovať také vlastnosti objektov, akými sú kolmica, rovnobežka, stred, kolmica prechádzajúca stredom, os uhla, súčet vektorov, kružnica s polomerom, a podobne. Cabri pracuje aj so základnými transformáciami počnúc osovou a stredovou súmernosťou, cez posunutie, otočenie a rovnoľahlosť až po inverziu. Ani práca s rôznymi metrickými atribútmi nie je problematická.

Všetky uvedené objekty a na nich definované vzťahy a vlastnosti neuveriteľným spôsobom zjednodušujú a urýchľujú prácu v Cabri. Keďže zmenou polohy základného geometrického útvaru sa súčasne mení aj poloha všetkých závislých útvarov, môžeme skúmať množinu všetkých riešení úlohy pri rôznych voľbách polohy útvarov, ktoré sú v zadaní úlohy dané. Uvedenú vlastnosť V. Jodas a L. Koreňová nazývajú *prácou s geometrickou premennou*: „Keď algebraik povie ‚Majme ľubovoľné prirodzené číslo ...' a napíše „n", je to iné, ako keď geometer povie ‚Majme ľubovoľný trojuholník ...' a nakreslí jeden konkrétny trojuholník"(Jodas, Koreňová, 2002).

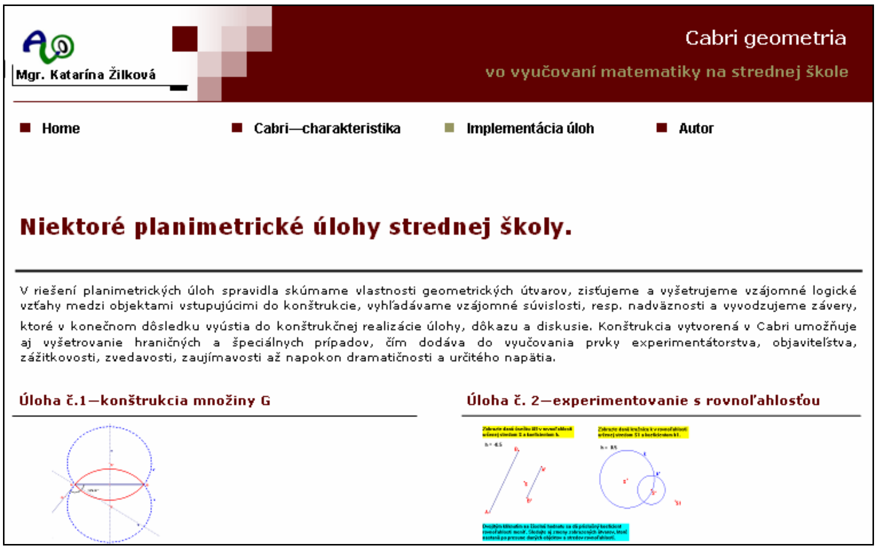
Modelovacie možnosti systému Cabri geometrie možno použiť na vyšetrovanie atribútov geometrických objektov, zovšeobecnenie riešení konštrukčných úloh, kombinovanie algebraicky zadaných mier s animáciami. Zavedenie súradnicovej sústavy umožňuje kvantifikáciu niektorých veličín, akými sú vzdialenosti, plochy, veľkosti uhlov atď. (Lukáč, 2001, s. 23).

Pri vyučovaní školskej geometrie podľa M. Hejného treba mať na zreteli tri hľadiská: obsahové, metodické a psychologické (Hejný, 1990, s. 324). Cabri geometria môže prispieť pri činnostiach z metodického hľadiska, akými sú experimentovanie, tvorba a preverovanie hypotéz. Z psychologického hľadiska podporuje predstavivosť, tvorivosť a nepriamo aj schopnosť argumentovať a abstrahovať. Na strednej škole pri riešení konštrukčných úloh musíme dbať nielen na intuíciou nájdenú konštrukciu, ale aj na zápis, dôkaz a diskusiu ako organickú súčasť riešenia, ktorá napomáha k spresneniu pojmov, myslenia a vyjadrovania. Dôležitosťou tradičných geometrických konštrukcií a ich potrebnosťou a prospešnosťou pre žiaka sa zaoberá M. Hejný a uvádza ako jeden z cieľov vyučovania planimetrie zručnosť v rysovaní a presnosť (Hejný, 1990, s. 327, s. 354). Na vyššom stupni rozvoja myslenia žiakov a pri napĺňaní ďalších cieľov, ktorými sú hlbšie pochopenie vzťahov a súvislostí základných rovinných geometrických útvarov, analýza obrázka, argumentácia, sledovanie transformácií, prípadne axiomatizácia, môže Cabri geometria odbúraním opakovaného manuálneho rysovania byť efektívnym prostriedkom a môže pozitívne ovplyvňovať schopnosť uceleného pohľadu na riešenie konštrukčných úloh.

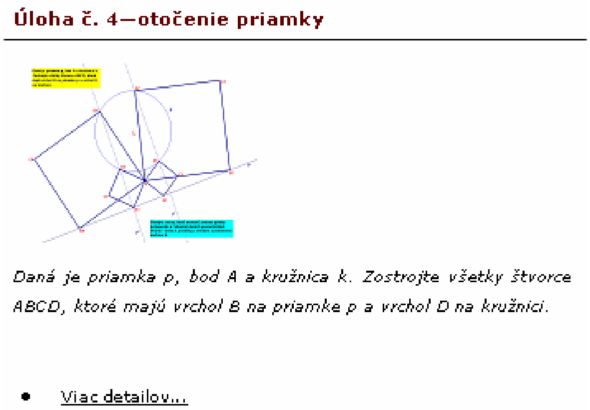
V práci učiteľa môže programový produkt Cabri pomôcť pri demonštrácii zložitejších, časovo náročnejších konštrukcií, ktorých cieľom nie je samotná konštrukcia, ale je prostriedkom k ďalším cieľom planimetrického vyučovania. Uvedená činnosť vyžaduje od učiteľa špeciálnu prípravu. Musí byť zručný pri práci s programom a konštrukcie musí mať vopred zhotovené. V správnom čase a slede môže odkrývať „prehrávaním konštrukcie" jednotlivé kroky a tým konkretizovať a vizualizovať myšlienkové postupy. Následným experimentovaním so zmenenými vstupnými parametrami, podrobným skúmaním obrázkov, ktoré vznikajú inou konfiguráciou určujúcich prvkov, prispieva Cabri k ucelenému pohľadu na riešenie konštrukčných úloh.

Časté neúspechy žiakov začínajú pri konštrukčných úlohách riešených pomocou množín bodov a pomocou transformačných zobrazení. Každý neznámy bod je charakterizovaný svojimi vlastnosťami (polohovými, metrickými), ktoré ho umožňujú zaradiť do množiny všetkých bodov s týmito vlastnosťami. Ak poznáme dve také vlastnosti, t. j. dve množiny bodov, potom po ich zostrojení ich prienik určuje hľadaný bod. Úlohy sú zaujímavé tým, že mnohokrát záleží na konkrétnej voľbe určujúcich (daných) prvkov úlohy. Preto sa stáva, že úloha riešená pri tabuli má iný počet riešení, ako tá istá úloha vo vypracovaní v žiackych zošitoch. To vedie k určitej nevôli a nespokojnosti u žiakov, pretože sú presvedčení, že sa dopúšťajú chýb a nepresností pri konštruovaní. Súčasťou úplného riešenia každej konštrukčnej úlohy sú dôkaz a diskusia o počte a rôznorodosti možných riešení. V takomto prípade dynamika a interaktivita Cabri geometrie môže byť výborným pomocníkom, pretože všetky situácie sa jednoduchým spôsobom dajú simulovať a názorne prezentovať.

Prostredníctvom aplikácií *CabriWeb* a *CabriJava* možno interaktívne konštrukcie vytvorené v Cabri geometrii umiestniť na webové stránky v podobe *appletu*. Týmto spôsobom môže prebiehať vzájomná výmena nielen jednotlivých konštrukcií, ale najmä skúseností, prípadne riešení problémov v rámci učiteľskej komunity. V súčasnosti existuje veľké množstvo webových portálov, ktorých obsahom sú Cabri applety z oblasti školskej geometrie voľne distribuované prostredníctvom internetovej siete (napr. obr. 11.2 a 11.3, www.matika.indatex.sk). Je potešiteľné, že ich autormi sú (okrem komerčných vývojových pracovníkov) zväčša učitelia matematiky, a teda vznik a vývoj týchto geometrických aplikácií si vyžiadala osobná pedagogická skúsenosť.



Obr. 11.2 *www.matika.indatex.sk – Cabri geometria vo vyučovaní matematiky na strednej škole*



Obr. 11.3 *www.matika.indatex.sk – ukážka spracovania jednej konštrukčnej úlohy*

11.2 Úskalia investigatívnej geometrie

V riešení planimetrických úloh spravidla skúmame vlastnosti geometrických útvarov, zisťujeme a vyšetrujeme vzájomné logické vzťahy medzi „objektmi“ vstupujúcimi do konštrukcie, vyhľadávame vzájomné súvislosti, resp. nadväznosti a vyvodzujeme závery, ktoré v konečnom dôsledku vyústia do konštrukčnej realizácie úlohy, dôkazu a diskusie. V tomto zmysle môžeme hovoriť o „investigatívnej“ geometrii (*z angl. investigate = preskúmať, vyšetrovať, vyhľadávať, zistiť, skúmať*), v ktorej sa snažíme riešiť úlohu čo najvšeobecnejšie, preskúmavať všetky konfiguračné rozloženia určujúcich útvarov vplývajúce na počet a polohu riešení úlohy. Cabri geometria spravidla dokáže okamžite reagovať na naše požiadavky a vždy aktualizovať výslednú konštrukciu zmenou závislých útvarov od vstupných určujúcich prvkov a ich atribútov. Konštrukcia vytvorená v Cabri umožňuje aj vyšetrovanie hraničných a špeciálnych prípadov, čím dodáva do vyučovania prvky experimentátorstva, objaviteľstva, zážitkovosti, zvedavosti, zaujímavosti, až napokon dramatickosti a určitého napätia. Napriek uvedeným výhodám sú v Cabri geometrii isté úskalia, ktorých neočakávaný výskyt môže spôsobiť užívateľovi nepríjemnosti.

Úloha a jej matematizácia

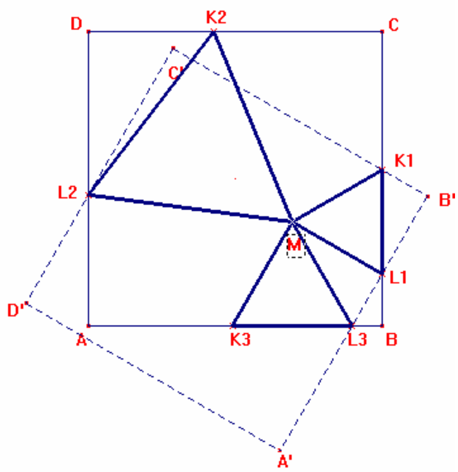
Daný je štvorec ABCD a jeho vnútorný bod M. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky KLM, ktoré majú vrcholy K, L na hranici štvorca.

Zadanie patrí k tradičným konštrukčným úlohám rovinnej geometrie a jej matematické riešenie je založené na otočení. Ide o transformáciu daného štvorca ABCD na štvorec A´B´C´D´ aplikáciou otočenia R(M, 60°) v kladnom aj zápornom zmysle. Hľadaný bod K, resp. L je lokalizovaný na priesečníkoch hraníc štvorcov ABCD a A´B´C´D´. Záverečné doplnenie na rovnostranný trojuholník KLM je triviálne.

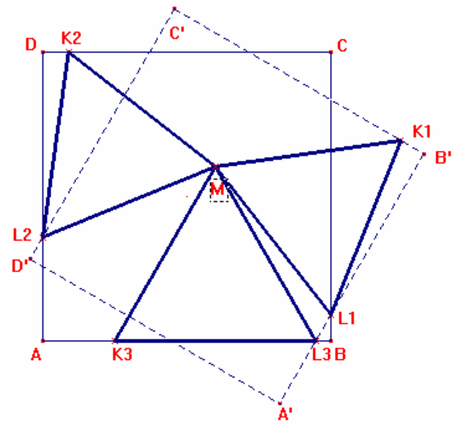
Realizácia v Cabri

Zostrojenie štvorca ABCD, bodu M a aplikácia transformačného zobrazenia R(M, 60°) na daný štvorec ABCD sú v Cabri pomerne jednoduché a ľahko zvládnuteľné. Pre prehľadnosť uskutočníme konštrukciu len v jednom smere (proti smeru chodu hodinových ručičiek). Skutočnosť, že štvorce ABCD a A´B´C´D´ môžu mať rôzny počet spoločných priesečníkov je pre realizáciu riešenia v geometrickom systéme Cabri zásadnou.

Ak začneme konštrukciu implementovať tak, ako sme zvyknutí na papieri, alebo na tabuli, t. j. konkrétne na fixovaných a stabilizovaných určujúcich útvaroch, tak pri zmene polohy týchto útvarov sa ďalšie riešenia nemusia ukázať, resp. aj tie ktoré boli pôvodne zostrojené môžu byť chybné. Neskúsený užívateľ môže vytvoriť konštrukciu (obr. 11.4), ktorá na prvý pohľad spĺňa všetky podmienky úlohy, avšak po zmene polohy daného bodu M (obr. 11.5) sa zdanlivo správne riešenia úplne rozpadnú. Niektoré trojuholníky KLM nevyhovujú stanoveným podmienkam úlohy (napr. K_1L_1M, obr. 11.5), prípadne niektoré sa vôbec nezobrazia, hoci evidentne existujú aj ďalšie priesečníky štvorcov ABCD a A´B´C´D´, a teda mali byť zobrazené aj ďalšie trojuholníky typu KLM. V tomto prípade sa nedá využiť interaktivita Cabri geometrie a úloha je vyriešená len pre jednu konkrétnu situáciu. To znamená, že sa potlačila zásadná prednosť Cabri geometrie a opísané riešenie sa ničím nelíši od tradičného riešenia na tabuli.



Obr. 11.4 *Nevhodná východisková poloha určujúcich útvarov pri realizácii konštrukcie v Cabri*



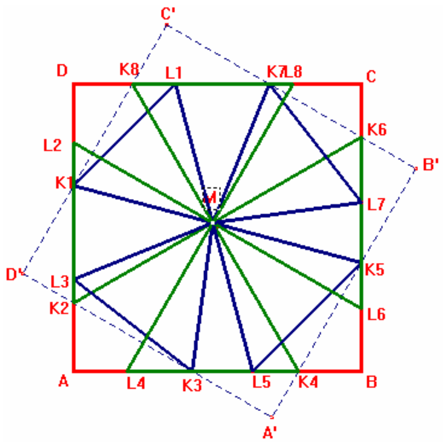
Obr. 11.5 *Výsledok po zmene polohy bodu M, ak je konštrukcia nesprávne implementovaná*

Každú konštrukčnú úlohu v Cabri treba riešiť čo najvšeobecnejšie. V našej úlohe môže mať štvorec ABCD s otočeným štvorcom A'B'C'D' najviac osem spoločných priesečníkov a teda treba nasimulovať túto situáciu a vyznačiť všetky vzniknuté riešenia (obr. 11.6). Následným pohybom bodu M sa riešenia aktualizujú (niektoré „vypadnú"), pretože sa stratia spoločné priesečníky (obr. 11.7). Takto môžeme konfrontovať všetky žiacke riešenia a uskutočniť diskusiu vzhľadom na rôzne polohy daných útvarov.

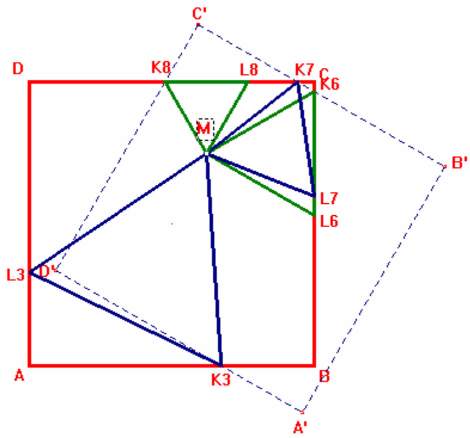
Je veľmi dôležité zvoliť si zadanie určujúcich prvkov vhodne. V uvedenom kontexte stačí malá chybička v realizácii konštrukcii v Cabri geometrii a môžeme byť svedkami nemilého prekvapenia pri zmene polohy niektorého z určujúcich prvkov úlohy.

Problém priesečníkov

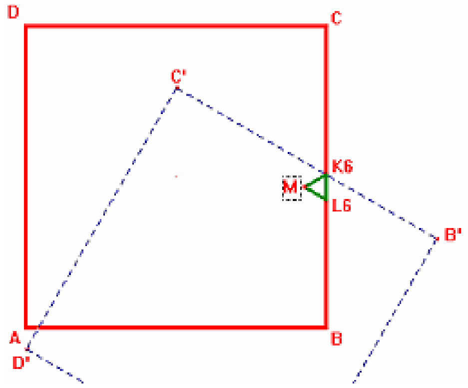
Pri používaní Cabri geometrie sa môžu objaviť aj nedostatky, ktoré nie sú spôsobené neskúsenosťou užívateľa. Napriek maximálnej snahe riešiť úlohu všeobecne sa po experimentovaní so základnými prvkami riešenej úlohy vyskytlo také rozloženie určujúcich prvkov, pri ktorom sa opäť nezobrazilo jedno riešenie (obr. 11.8). Viditeľne existujú dva priesečníky hraníc štvorcov ABCD a A´B´C´D´, pričom je zostrojený len jeden rovnostranný trojuholník K_6L_6M. Pri implementácii nášho riešenia sme definovali maximálny počet priesečníkov, ktoré môžu hranice štvorcov ABCD a A´B´C´D´ mať. *Ako je možné, že sa objavil priesečník, ktorý akoby nebol definovaný, nemá priradené pomenovanie K_i a nezobrazil sa príslušný rovnostranný trojuholník?*



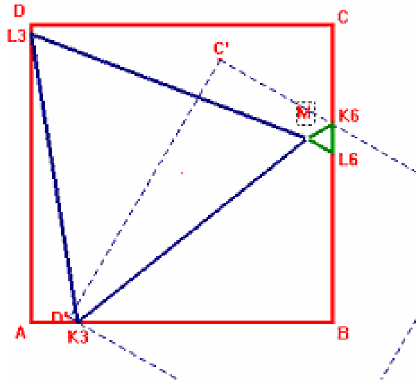
Obr. 11.6 *Správne realizovaná konštrukcia v Cabri*



Obr. 11.7 *Aj po zmene polohy bodu M dostávame správne riešenia*



Obr. 11.8 *Problém existencie priesečníka úsečiek AB a C´D´*



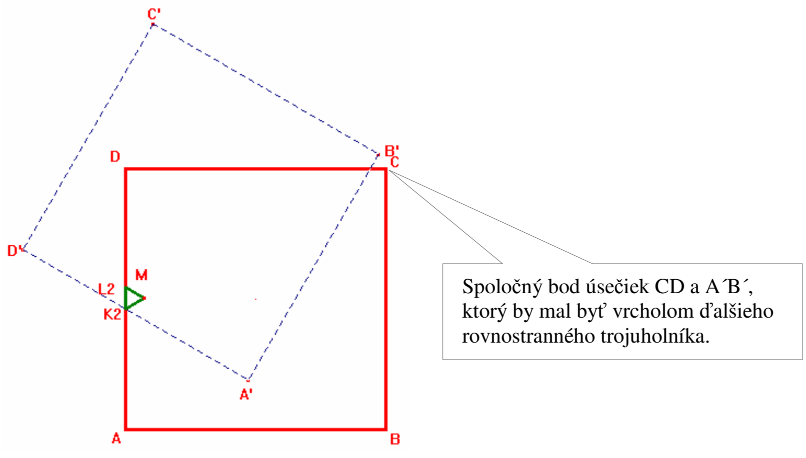
Obr. 11.9 *Bod K_3 je definovaným priesečníkom úsečiek AB a A´D´*

Pri hľadaní odpovede na položenú otázku sa vrátime k realizácii konštrukcie. Jednotlivé body K_i sú konštruované výberom atribútu „priesečník“, avšak Cabri geometria II neoboznamuje užívateľa o tom, či ide o priesečník hraníc štvorcov, alebo priesečník niektorých úsečiek[6]. Ak by dokázala Cabri geometria pracovať so štvorcom ABCD ako s celkom (v programátorskej terminológii s objektom), potom by vedela rozlíšiť a vyznačiť aj „stratený“ priesečník na (obr. 11.8). Systém zrejme vyznačuje priesečníky úsečiek. Napríklad bod K_3 je priesečníkom úsečky AB a A´D´, bod K_4 je spoločným bodom úsečiek AB a A´B´ (obr. 11.6). Iné priesečníky hraníc štvorcov ABCD a A´B´C´D´ v zobrazenom rozložení neexistujú. Po zmene polohy bodu M sa

6 Vyššia verzia, Cabri geometria II Plus, označí voľbu „priesečník tohto pravidelného mnohouholníka“ a informuje užívateľa o výbere prvkov, ktorých priesečník sa hľadá. Všetky priesečníky zostanú vyznačené aj po premiestnení. Zostáva však povinnosť pre realizátora konštrukcie definovať všetky možné riešenia v závislosti od typu priesečníka.

mení aj poloha priesečníkov K_3, K_4, (obr. 11.7), pričom môžu aj zaniknúť. V rozložení na (obr. 11.8) vznikol priesečník úsečiek AB a C´D´, ktorý nebol explicitne určený. Preto nie je ani pomenovaný a de facto pre Cabri neexistuje. Vo verzii Cabri II Plus si štvorce vlastnosť priesečníka síce udržia (sú vyznačené bodom), ale pri uvedenej situácii nie je program schopný udržať aj pomenovanie priesečníka, pretože ide o spoločný bod iných dvoch úsečiek. Po malej zmene polohy bodu M (obr. 11.9) sa aktualizuje priesečník K_3 úsečiek AB a A´D´. Situácie rovnakého druhu sa dajú nasimulovať na každej strane štvorca ABCD (napr. obr. 11.10). Problém možno riešiť dodatočným pomenovaním novovzniknutých priesečníkov K_i a doplnením kompletného riešenia K_iL_iM. Bežný užívateľ Cabri geometrie neočakáva výskyt problému tohto druhu, a tak môže byť sklamaný pri predvádzaní svojej konštrukcie a náhodnom zobrazení situácie, v ktorej sa niektoré riešenia neukážu.

Jadro problému zrejme spočíva v tom, že Cabri geometria vo svojej podstate pracuje na základe analytického vyjadrenia základných geometrických útvarov a vzťahov. Implementovaný štvorec nechápe ako samostatný celistvý objekt, ale rozkladá ho na štyri samostatné, analyticky jednoznačne určené úsečky.

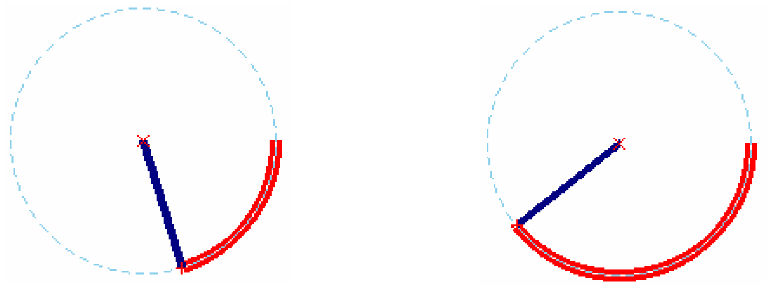


Obr. 11.10 *Chýbajúce riešenie*

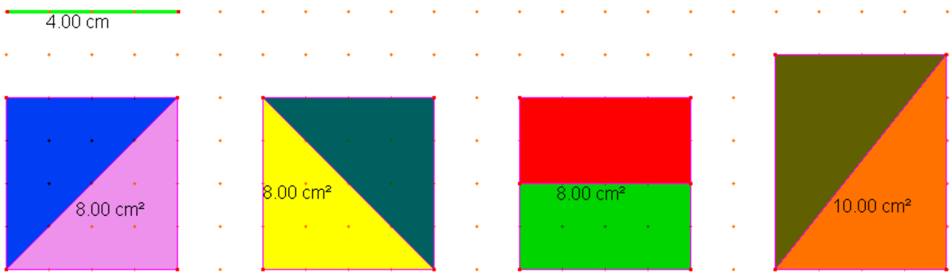
Cabri geometria svojou ponukou nástrojov umožňuje využívanie všetkých tradičných základných metód riešenia planimetrických a konštrukčných úloh, medzi ktoré (podľa Šedivý, 2001) zaraďujeme:

- metódu množín bodov daných vlastností,
- metódu geometrických zobrazení v rovine,
- algebraicko – geometrickú metódu,
- metódu analytickej geometrie.

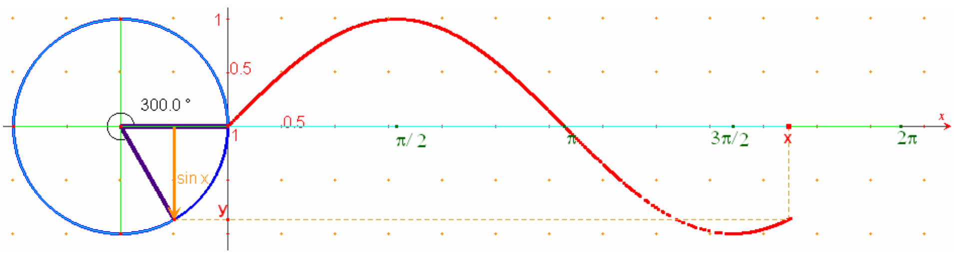
Metódu množín bodov daných vlastností môžeme v prostredí dynamických geometrických systémov vizualizovať prostredníctvom nástrojov určených na animáciu. Konkrétne v systéme Cabri geometrie možno využiť napríklad na znázorňovanie množiny bodov rovnako vzdialených od daného pevného bodu (konštrukcia kružnice) voľbu „množina bodov (útvarov) danej vlastnosti“, „stopu zapni“, „animácia“ (obr. 11.11, obr. 11.13), prípadne pri zložitejších skúmaniach viacerých útvarov pozdĺž viacerých ciest „paralelná animácia“.



Obr. 11.11 *Ukážka znázorňovania konštrukcie kružnice pomocou nástroja „zapni stopu bodu“*



Obr. 11.12 *Využitie metriky ako kontrolnej funkcie vo vyučovacej pomôcke určenej pre 1. stupeň ZŠ vytvorenej v Cabri geometrii*



Obr. 11.13 *Využitie nástrojov Cabri geometrie v zobrazovaní funkcie y=sin(x) pomocou jednotkovej kružnice*

Preddefinované makrá určené na zobrazovanie útvarov *metódou geometrických zobrazení* sú priamo implementované v hlavnej ponuke nástrojov (osová súmernosť, stredová súmernosť, posunutie, otočenie, rovnoľahlosť, inverzia) a ich použitie je elementárne. Vstupnými údajmi na ich aktívne využitie sú tradičné atribúty, ktorými sú jednotlivé zobrazenia jednoznačne určené.

Algebraicko-geometrické prvky riešenia geometrických úloh sú v Cabri geometrii podporované možnosťou práce s algebraickými výrazmi a niektorými metrickými možnosťami (určovanie vzdialeností, dĺžok, veľkostí).

Metódu analytickej geometrie možno s úspechom aplikovať zavedením súradnicového systému, analytickým vyjadrením priamok a ich smerníc, kružníc a kužeľosečiek.

Práca s Cabri geometriou, prípadne s iným dynamickým geometrickým systémom, je prácou s obrazovým materiálom, a teda odhliadnuc od už vyššie spomínaných predností a benefitov, napomáha pri rozvoji schopnosti analýzy obrázkov, selekcie podstatného od marginálneho a ďalších psychických funkcií (pozri kapitola s názvom Dynamika obrazovej informácie v matematike).

11.3 Spojenie manipulačnej geometrie s virtuálnou simuláciou v prostredí Cabri

Kombinácia tradičných vyučovacích metód a prístupov, v spojení s aktívnym využívaním prostriedkov informačných a komunikačných technológií na rôznych úrovniach, môže byť prínosnou vzdelávacou technikou, čím napomáha k vytváraniu podnetného vyučovacieho prostredia. Riešenie matematických úloh v súčinnosti s inovatívnymi vyučovacími prístupmi nezabezpečí len fiktívnu modernizáciu vyučovania, ale často môže elektronické prostredie podnietiť vznik nových matematických problémov, ktorých riešenie si vyžaduje hľadanie netypických kauzalít.

Pri rozvíjaní predstáv o geometrických útvaroch a ich vlastnostiach sa dá s výhodou využívať technológia „skladania papiera“. Uvedená manipulačná činnosť napomáha upresňovaniu poznatkov o útvaroch netradičným spôsobom, vyžaduje exaktné vyjadrovanie a formulovanie slovného opisu geometrickej konštrukcie. Zásadným podnetom pre riešenie nasledujúceho problému bola prednáška O. Žideka na 39. konferencii slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom (2007) s názvom „O využití intuície a názornosti pri získavaní poznatkov z geometrie“. Vo vystúpení bola prezentovaná užitočnosť manipulácií (a tiež techniky skladania papiera) najmä z hľadiska vplyvu na rozvoj priestorovej predstavivosti za pomoci intuície a evidentnej názornosti.

Na ukážke tvorby papierového modelu pravidelného päťuholníka a geometrickej konštrukcie simulujúcej postup skladania v prostredí dynamickej geometrie sa pokúsime ilustrovať užitočnosť spojenia jednak manipulačnej činnosti prekladania hárku kancelárskeho papiera, a tiež geometrického poznávania vo virtuálnom prostredí. Zámerom nie je len potvrdenie, prípadne vyvrátenie hypotézy o pravidelnosti zloženého päťuholníka, ale hlavným cieľom je uvedomovanie si istých geometrických vlastností. Zároveň treba upozorniť, že pri tejto kombinácii vzdelávacích metód vznikajú nové matematické úlohy a tiež, že riešenie úlohy v reálnom prostredí (manipulačnou činnosťou) má odlišný charakter od riešenia tej istej úlohy v prostredí dynamickej geometrie. Spomínaná skutočnosť umožňuje vhĺbenie sa do problematiky, a aj preto považujeme kombináciu oboch metód za prínosnú.

Úloha:

Zhotovte z hárku kancelárskeho papiera, podľa nasledujúceho slovného algoritmu, model pravidelného päťuholníka.

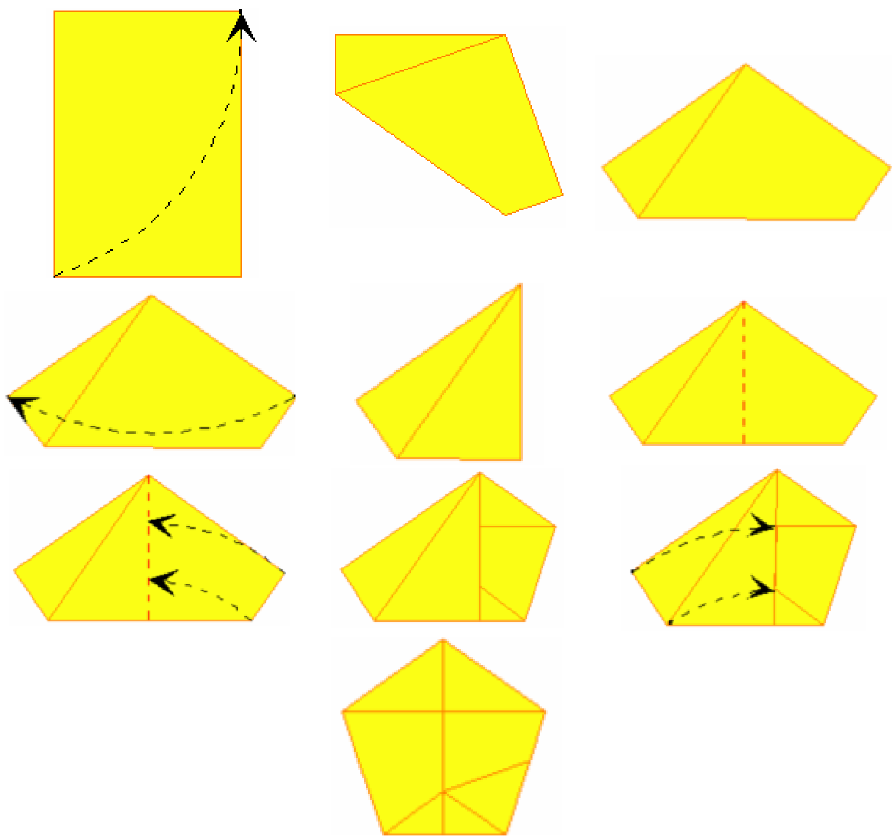
Slovný zápis postupu na zloženie päťuholníka:

1. Hárok kancelárskeho papiera (210 mm × 297 mm) zložte tak, aby jeho dva, (po uhlopriečke ležiace) protiľahlé vrcholy, splynuli.

2. Vyhľadajte os súmernosti vzniknutého nepravidelného päťuholníka, zložením papiera ju vyznačte a znovu papier roztvorte.

3. Zložte papier tak, aby sa dve najkratšie strany vzniknutého nepravidelného päťuholníka stotožnili so zostrojenou osou súmernosti.

Po úspešnej realizácii uvedeného postupu získame „takmer pravidelný" päťuholník. Aktivitu skladania papiera možno realizovať aj prostredníctvom algoritmu zaznamenaného v tvare obrazového materiálu, prípadne natočeného videa (obr. 11.14, obr. 11.15).



Obr. 11.14 *Postup prekladania papiera predpísaný obrazovým materiálom*
Námet: O. Židek, 2007. Obrazový materiál prevzatý z:
http://www.cyffredin.co.uk/Magic%20A%20PaPER/Folding%20the%20Pentagon.htm

Obr. 11.15 *Video – prostriedok matematického vzdelávania.*
Zdroj: www.webmatika.sk

Po zhotovení dvoch takýchto modelov päťuholníkov máme možnosť (vhodnou manipuláciou) zistiť, že sú takmer zhodné. Na istej úrovni vzdelávania, a pre určité špecifické potreby, možno skonštatovať, že päťuholníky sú zhodné, a teda predchádzajúci postup môžeme považovať za algoritmus na zhotovenie modelu pravidelného päťuholníka, pričom akceptujeme istú toleranciu odchýlky, ktorá môže byť spôsobená nepresnosťou skladania, či chyby, ktorá vzniká skladaním papiera. Avšak pre potreby vyššej edukácie je vhodné a z didaktického hľadiska užitočné vysloviť nasledujúce problémové otázky:

Ide skutočne o pravidelný päťuholník? (Je zachovaná rovnosť dĺžok všetkých jeho strán a rovnosť veľkostí všetkých jeho vnútorných uhlov?)

a) Ak áno, pokúsme sa zdôvodniť (dokázať) správnosť algoritmu.

b) Ak nie, v čom je chyba? Existuje taký obdĺžnik (papier), aby sme jeho skladaním získali model pravidelného päťuholníka? Aké rozmery by mal daný obdĺžnik mať?

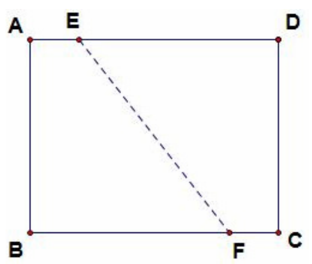
Zároveň je potrebná dohoda o tom, že pri akomkoľvek skladaní papiera vzniká istá fyzikálna chyba (aj rozmery papiera, napriek norme, nemusia byť konštantné), ktorú budeme ignorovať a zameriame sa na matematicko-geometrické riešenie problému, pretože vo fyzikálnom svete vždy narazíme na nejaké hranice.

Odpovede na predchádzajúce otázky sa pokúsime nájsť pomocou interaktívnej dynamickej Cabri geometrie. Tento spôsob nie je samoúčelný. Opodstatnenie vidíme v kombinácii manipulačnej činnosti a následnej geometrickej interpretácii problému. Pokúsime sa vytvoriť v Cabri geometrii geometrickú interpretáciu a simuláciu skladania papiera s cieľom získať päťuholníka. Neskôr bude nasledovať verifikácia jeho pravidelnosti. Postup implementácie algoritmu do prostredia Cabri geometrie možno zhrnúť do nasledujúcich bodov:

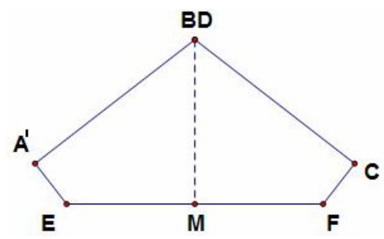
- Definujte číselné hodnoty reprezentujúce rozmery kancelárskeho papiera (210 mm; 297 mm).
- Zostrojte obdĺžnik reprezentujúci geometrický model papiera.
- Zostrojte úsečku (priamku), ktorá je modelom prvého zloženia papiera (obr. 11.16). V tomto bode vzniká nesmierne zaujímavý didaktický problém. Zdá sa byť v praxi veľmi jednoduché zložiť papier tak, aby splynuli dva protiľahlé (po uhlopriečke ležiace) vrcholy obdĺžnikového papiera, avšak uvedomiť si geometrickú podstatu konštrukcie je omnoho náročnejšie. Treba nájsť odpoveď na otázku, kde leží úsečka

(na obrázku EF), ktorá je reprezentantom prehybu papiera. Stačí si však uvedomiť, že protiľahlé vrcholy obdĺžnikového papiera, ktoré chceme, aby splynuli (boli totožné) sú vzorom a obrazom jednoznačne určenej osovej súmernosti. Os uvedenej súmernosti definuje miesto preloženia papiera.

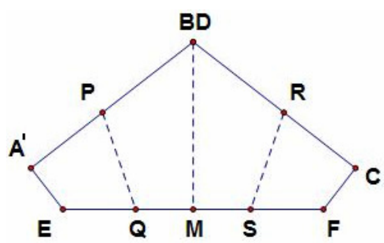
- Zostrojte nepravidelný päťuholník A´EFCB (obr. 11.17, obr. 11.19 a) pomocou obrazu bodu A v osovej súmernosti určenej osou EF.
- Nájdite miesto preloženia papiera podľa bodu 3 v slovnom zápise algoritmu skladania papiera, t. j. zostrojte úsečky PQ a RS (ilustračný obr. 11.18). Hľadanie úsečiek PQ a RS sú tiež didakticky mimoriadne zaujímavým momentom. Papier treba preložiť tak, aby úsečka A´E bola časťou úsečky MB a úsečka CF bola tiež časťou úsečky MB. Geometrická interpretácia je, že hľadáme obrazy úsečiek A´E a CF tak, aby ležali na úsečke MD. V praxi to teda znamená, že obrazy priamok A´E a CF ležia na priamke MB. Týmto sme definovali ďalšiu osovú súmernosť s osami súmernosti PQ a RS. Realizácia v Cabri geometrii je už teraz jednoduchá, stačí zostrojiť os uhla, ktorý zvierajú priamky A´E a MB, resp. CF a MB.
- Zostrojte hľadaný päťuholník PQSRB.



Obr. 11.16 *Úsečka EF – prvé preloženie papiera*

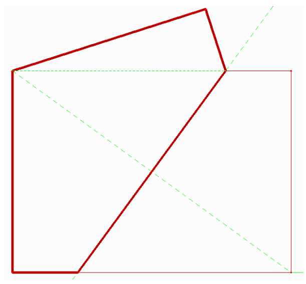


Obr. 11.17 *Úsečka DM – druhé preloženie papiera*

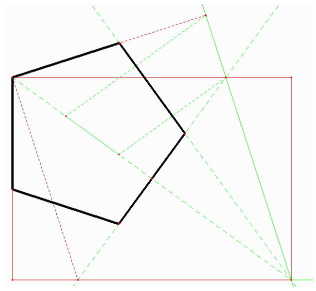


Obr. 11.18 *Úsečky PQ a RS – záverečné preloženia papiera.*
Zdroj pred úpravou:
http://www.lakesideschool.org/upperschool/departments/math/ballard/puz/PentaFold.htm

Implementovaná konštrukcia v Cabri geometrii je zobrazená na obr. 11.19 b. Keďže konštrukcia bola vytvorená v matematickom softvérovom prostredí na základe geometrických vlastností, odpadajú fyzikálne hranice a nepresnosť skladania, a teda môžeme pristúpiť k overovaniu pravidelnosti skonštruovaného päťuholníka.



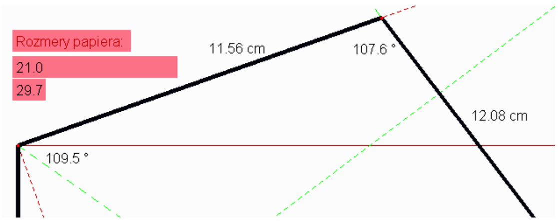
a



b

Obr. 11.19 *Implementácia konštrukcie päťuholníka v Cabri II Plus podľa postupu „skladania papiera“*

Na úvod, pre jednoduchosť verifikácie, je užitočné využiť nástroje Cabri geometrie „vzdialenosť alebo dĺžka“, „veľkosť uhla“ numerickým zobrazením jednotlivých dĺžok strán a veľkostí uhlov. Pri stanovenom pomere strán obdĺžnika (papiera) 21 cm × 29,7 cm Cabri vypíše dĺžky dvoch strán skonštruovaného päťuholníka 12,08 cm a zvyšné tri strany majú dĺžku 11,56 cm (obr. 11.20). Veľkosti vnútorných uhlov skonštruovaného päťuholníka sú pri jednom vrchole 109,5° a pri ďalších vrcholoch 107,6°. Uvedené odchýlky sú dostatočne veľké na to, aby sa dalo skonštatovať, že päťuholník skonštruovaný podľa vyššie stanoveného predpisu nie je pravidelný (môžeme hovoriť o „takmer pravidelnom“ päťuholníku).



Obr. 11.20 *„Takmer pravidelný“ päťuholník?*

Implementácia konštrukcie v prostredí Cabri geometrie umožňuje experimentovanie s dĺžkami strán obdĺžnika a hľadanie „vhodného“ pomeru strán obdĺžnika (papiera), tak aby „zložený päťuholník“ spĺňal kritériá pravidelnosti. Pri rozmeroch papiera 21 cm × 28,9 cm (t. j. pri zmenšení dlhšej strany papiera len o 8 milimetrov) zostrojený päťuholník je pravidelný, s presnosťou uvedenou v centimetroch na dve desatinné miesta. To je pre praktickú činnosť už fascinujúca presnosť. Po ďalšom experimentovaní s veľkosťou papiera a s nastavením zobrazovania veľkostí dĺžok strán a veľkostí uhlov na maximálnu možnú presnosť, ktorú Cabri geometria poskytuje, možno konštatovať, že sa ťažko nájde pomer strán obdĺžnika, z ktorého možno skonštruovať pravidelný päťuholník. Naviac, ak by sa aj podarilo priblížiť na určitú presnosť, treba počítať aj s výpočtovými nepresnosťami vyplývajúcimi zo zaokrúhľovania Cabri geometrie. *Z hľadiska exaktnosti matematiky sa javí tento spôsob verifikácie regularity (experimentovanie s veľkosťou papiera) ako nevyhovujúci.*

V ďalšom postupe zvolíme *stratégiu „cesta späť"*, pri ktorej vychádzame z koncovej situácie a vraciame sa späť k východiskovej situácii (J. Kopka, 2006). Pokúsime sa začať od skúmania overenej presnej konštrukcie pravidelného päťuholníka a postupne ho fiktívne „rozbaľovať" tak, aby sme získali obdĺžnikový papier. Pri implementácii v Cabri geometrii využijeme súmernosti analogicky ako v predchádzajúcej konštrukcii. Základná kostra postupu realizácie konštrukcie:

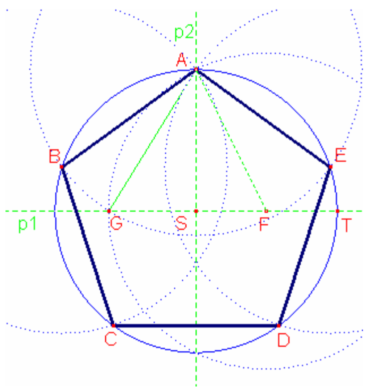
- Zostrojenie pravidelného päťuholníka ABCDE ľubovoľnou metódou. (Jedna z metód spolu s konštrukciou je uvedená na obr. 11.21.)
- Konštrukcia nepravidelného päťuholníka AKLMN (obr. 11.22 a) s využitím osovej súmernosti definovanej osami BC a ED.
- Konštrukcia obdĺžnika AKXY ako reprezentanta hárku kancelárskeho papiera s využitím osovej súmernosti definovanej osou CD.

Uvedený konštrukčný postup zabezpečí zmenu dĺžok strán obdĺžnika na základe zmeny polomeru kružnice k opísanej pravidelnému päťuholníku. Veľkosť polomeru kružnice k je jediným voliteľným parametrom, s ktorým možno experimentovať.

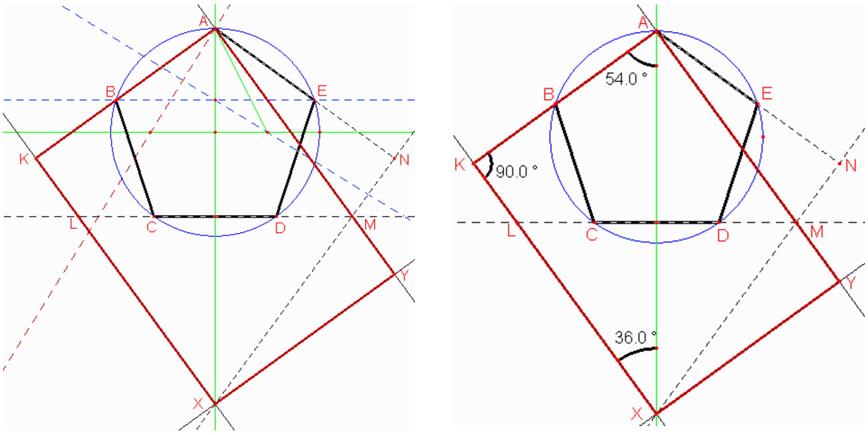
V ďalších úvahách, na základe predchádzajúceho postupu konštrukcie, môžeme vychádzať zo skutočnosti, že veľkosť každého z vnútorných uhlov v pravidelnom päťuholníku je $\frac{3\pi}{5}$, a teda platí $|\angle EAB| = \frac{3\pi}{5}$. Zo symetrie pravidelného päťuholníka ABCDE vyplýva, že $|\angle XAB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$. V pravouhlom trojuholníku AKX teda poznáme veľkosti všetkých jeho vnútorných uhlov. Na základe toho vieme určiť pomer dĺžok jeho strán pomocou goniometrických funkcií, t. j. $\frac{|AK|}{|KX|} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$. Keďže úsečky AK a KX sú stranami obdĺžnika, ktorý predstavuje východzí papier, získali sme hľadaný pomer dĺžok strán hárku papiera. *Hodnota pomeru* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ *sa nemení, je zachovaná nezávisle od veľkosti skonštruovaného (poskladaného) papiera, a je teda invariantom.*

1. $k; k(S; r)$
2. $p_1, p_2; p_1 \perp p_2 \wedge p_1 \cap p_2 = \{S\}$
3. $T, p_1 \cap k = \{T\}$
4. $A, p_2 \cap k = \{A\}$
5. $F; F - stred\ ST$
6. $k'; k'(F; |FA|)$
7. $G; k' \cap p_1 = \{G\}$
8. $|AG| = a_5$

a_5 – strana pravidelného päťuholníka



Obr. 11.21 *Konštrukcia pravidelného päťuholníka*



a *b*

Obr. 11.22 *Konštrukcia metódou „cesta späť“, hľadanie invariantu*

Možno sa na prvý pohľad zdá, že získaný pomer s približnou hodnotou $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5} =$ 0,726542528 nie je „pekné“ číslo. Treba si však uvedomiť, že ak v pravidelnom päťuholníku odvodíme vzťah pre dĺžku jeho strany v závislosti od polomeru opísanej kružnice získame $a_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Naviac je známy fascinujúci pomer zlatého rezu, ktorého zastúpenie v pravidelnom päťuholníku je viacnásobné:

- pomer dĺžky uhlopriečky a dĺžky strany sa rovná zlatému rezu
- dve uhlopriečky nevychádzajúce z jedného vrchola sa pretínajú v pomere zlatého rezu.

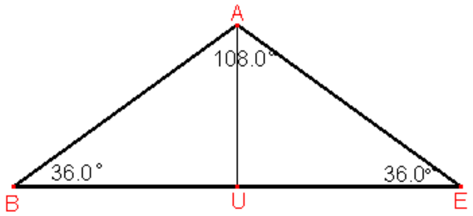
Hodnota zlatého rezu je $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$.

Preskúmajme rovnoramenný trojuholník ABE (obr. 11.23) v pravidelnom päťuholníku ABCDE, pričom dĺžky strán AB a AE budú jednotkové, a teda |BE| = ϕ .

Veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABE sú $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ a $\frac{\pi}{5}$.

Aplikovaním Pytagorovej vety vyjadríme výšku |AU| = $\sqrt{1-\left(\frac{\phi}{2}\right)^2}$.

Nakoniec môžeme vyjadriť $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\phi}{2}\right)^2}}{\frac{\phi}{2}}$, pričom po dosadení hodnoty zlatého rezu a úprave získame vzťah $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.



Obr. 11.23 *Rovnoramenný trojuholník ABE v pravidelnom päťuholníku ABCDE*

Prišli sme k záveru, že číslo $\sqrt{5}$ figuruje nielen vo vyjadrení zlatého pomeru, dĺžky strany pravidelného päťuholníka, ale aj v nájdenom pomere strán obdĺžnika, z ktorého sa dá teoreticky pravidelný päťuholník poskladať. Z uvedeného je zrejmé, že o absolútnej presnosti pri skladaní papiera so zámerom získania pravidelného päťuholníka hovoriť nemôžeme, avšak pre didaktické ciele vieme získaný pomer strán s úspechom využiť a výsledok skladania závisí už len od manipulačných zručností aktéra skladania. *Odpoveď na vyššie položenú otázku: „Aké rozmery by mal mať papier, aby sme po jeho zložení podľa uvedeného algoritmu získali pravidelný päťuholník?" je, že dĺžky strán (obdĺžnikového) papiera musia byť v pomere tg 36°, alebo* $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Z uvedeného vyplýva, že tradičné matematické postupy riešenia konštrukčných úloh môžu byť úplne zachované aj prostredí počítačovej dynamickej geometrie. Napriek tomu, že môžu nastať situácie, v ktorých sa prejavia niektoré nedostatky programových aplikácií rôzneho charakteru, treba akcentovať prednosti využívania a kombinovania inovačných metód s tradičnými postupmi. *Oba postupy by sa mali vzájomne a efektívne dopĺňať tak, aby matematické zážitky zo vzdelávacích činností vplývali na čo najviac zmyslov a zanechali tak v žiakoch emotívnu stopu z krásy matematiky.*

12

METÓDA PRIESTOROVEJ VIRTUÁLNEJ MANIPULÁCIE

O užitočnosti manipulačných aktivít vo vyučovaní matematiky píšu vo svojich prácach viacerí autori a o tejto téme bola zmienka už v predchádzajúcej kapitole. Najmä v oblasti rozvíjania predstáv o priestorových telesách sú cieľavedomé manipulácie s trojrozmernými objektmi dôležitou súčasťou optimalizácie didaktických postupov. Napriek skutočnosti, že o dôležitosti rozvoja geometrických poznatkov nikto nepochybuje, z výsledkov rôznych prieskumov vyplýva, že v uvedenej oblasti výučby sú značné rezervy a nedostatky. K základným cieľom vyučovania školskej stereometrie podľa viacerých autorov patrí schopnosť:

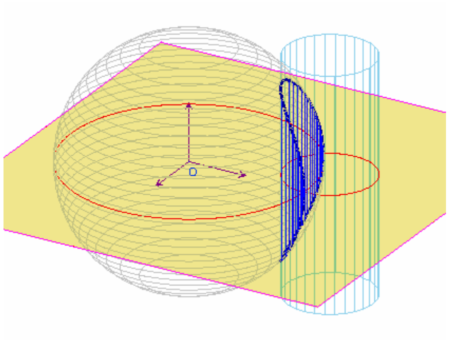
- zachytiť priestorovú situáciu v rovinnom obrázku,
- vidieť rovinný obrázok priestorovo,
- vedieť zobraziť základné typy telies, ich rovinné rezy a siete.

Dôležitou súčasťou stereometrického vzdelania je naučiť žiakov manipulovať s priestorovými objektmi v myšlienkach a predstavách. Podobne, ako keď sa dieťa učí základným manipuláciám s rôznymi detskými stavebnicami a prechádza pri tejto činnosti rôznymi stupňami poznania, je potrebné postupne budovať a rozvíjať aj základné poznatky o stereometrii v širšom zmysle slova. Na ceste od manipulácie s telesami až po korektnú abstraktnú predstavu o nich je potrebné postupne zaraďovať rôznorodé úlohy a cvičenia, aby skúseností s priestorovými javmi bolo čo najviac.

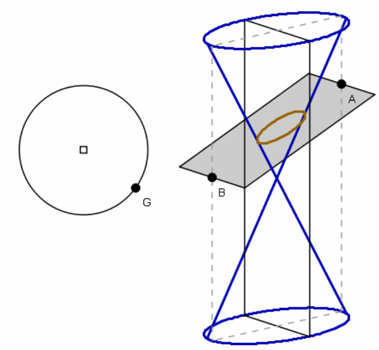
Jedna z didaktických metód, ktorá nadväzuje na manipuláciu s modelmi telies a účinne podporuje rozvoj priestorovej predstavivosti je „**virtuálna manipulácia**" s trojrozmernými objektmi v prostredí počítačových programových produktov. Poznávanie niektorých vlastností priestorových telies napr. na monitore počítača, prípadne na interaktívnej tabuli, je užitočné najmä z pohľadu častých problémov vyplývajúcich z nedostatočnej geometrickej gramotnosti žiaka v oblasti zobrazenia trojrozmerných objektov do rovinného obrazu. Schopnosť vidieť zobrazované telesá trojrozmerne je v špeciálnych elektronických výučbových prostrediach podporená vďaka vizualizačným možnostiam výpočtovej a zobrazovacej techniky.

V súčasnosti možno pri vyučovaní stereometrie využiť, okrem už spomínaných prostredí dynamickej geometrie Cabri II Plus (obr. 12.1) a Compass and Ruler (obr. 12.2, obr. 12.3), aj rôzne špecializované programy určené na výučbu niektorých častí stereometrického učiva. Z hľadiska načrtnutej problematiky sa javí ako výnimočne vhodný všeobecnejší dynamický softvér určený na riešenie úloh priestorovej geometrie s názvom Cabri 3D, prípadne užšie špecializovaný programový produkt s názvom

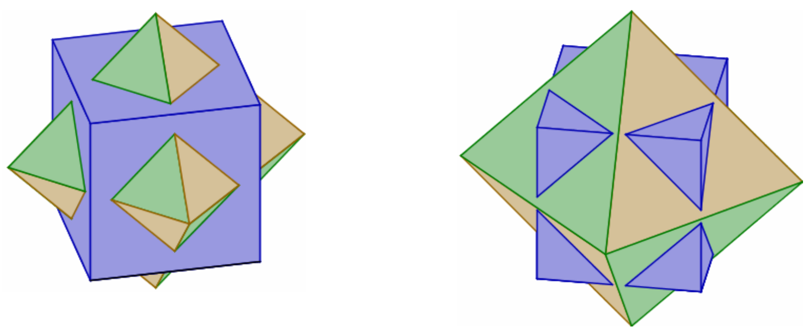
Poly Pro (obr. 12.4). Pre konkrétnejšiu predstavu o potenciáli spomínaných programov a o ich didaktickom využití sa pokúsime obidva produkty v krátkosti charakterizovať, najmä v kontexte ich využitia vo vyučovaní matematických tém o geometrických telesách.



Obr. 12.1 *Reprezentácia gule, valca a ich spoločného prieniku v Cabri II Plus*



Obr. 12.2 *3D konštrukcia rezu na rotačnej kužeľovej ploche v systéme C.a.R*
http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothman/java/zirkel/doc_en/Demos/index.html

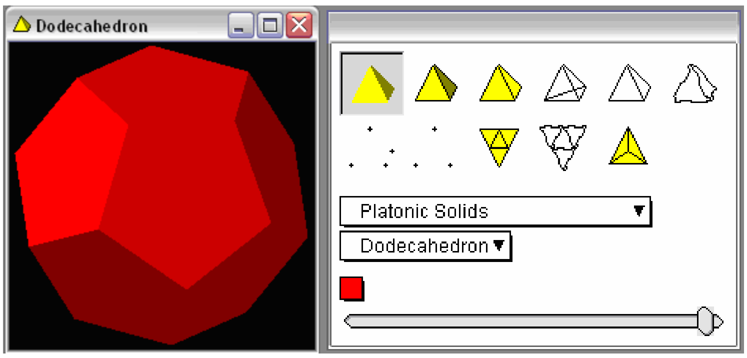


Obr. 12.3 *Trojrozmerná konštrukcia a jej animácia v C.a.R. Zdroj:*
http://mathsrv.kueichstaett.de/MGF/homes/grothman/java/zirkel/doc_en/Data/Applications/index.html

12.1 Poly Pro – virtuálne skúmanie mnohostenov a ich vlastností

Softvér s názvom *Poly Pro* (obr. 12.4) je príkladom špecializovaného, pomerne vydareného, programového produktu určeného na *skúmanie vlastností špeciálnych typov mnohostenov*. Je dostupný na www.peda.com a patrí do kategórie tzv. shareware, čo umožňuje bezplatné vyskúšanie, časovo a najmä rozsahovo obmedzené používanie. Softvér umožňuje užívateľovi sledovať rôzne pohľady na zvolené špeciálne telesá v názornom zobrazení. V ponuke programu sú zobrazenia týchto typov telies: Platónove telesá, Archimedove telesá, hranoly a antihranoly, Johnsonove telesá, deltaédry, Katalánske telesá, dipyramídy a geodetické guľovité kupoly. O možnostiach programu a jeho didaktickom využití vo vyučovaní matematiky podrobne informuje O. Židek (2007), ktorý hodnotí program z viacerých hľadísk. V stručnosti preberáme: „Telesá sa môžu skúmať z hľadiska konvexity, a taktiež z hľadiska počtu vrcholov, stien a hrán. Z hľadiska obsahovej didaktiky je program zaujímavý z pohľadu klasifikácie a triedenia telies. Napokon treba zdôrazniť, že vnímanie pohľadov na telesá prostredníctvom monitoru je, na rozdiel od vnímania konkrétnych modelov telies, ďalším stupňom rozvoja abstrakcie“ (O. Židek, str. 208, 2007). K výhodám prípravy úloh a zadaní v prostredí programu Poly Pro autor príspevku zaraďuje nasledujúce vlastnosti:

- *„animácia* zobrazení telies umožňuje flexibilitu v individuálnom zadaní ďalších úloh pre jednotlivých žiakov (napr. pri zobrazovaní duálnych telies k daným telesám);
- finálne grafické produkty sú spravidla veľmi *estetické*, čo riešiteľa vedomostne uspokojuje a povzbudzuje;
- riešenie vyžaduje *minimálnu znalosť teórie* z voľného rovnobežného premietania (využívajú sa invarianty: incidencia, rovnobežnosť a podielový pomer);
- dá sa pohodlne zoznámiť so *špeciálnymi skupinami telies*, ktoré sa v tradičnej školskej matematike nevyskytovali pre náročnosť ich zobrazení.“



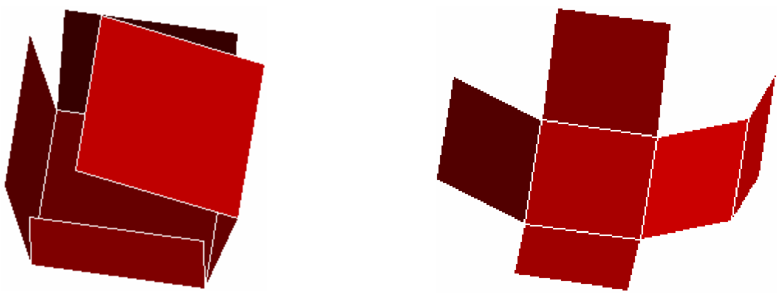
Obr. 12.4 *Poly Pro, verzia 1.11, dostupné na www.peda.com*

Bližšia zmienka o programe a jeho ponuke nie je potrebná, pretože je zrozumiteľný, ľahko ovládateľný, a aj ľahko dostupný. Cenné sú však informácie o skúsenostiach z využívania a námetoch aktivít, ktoré sa dajú využiť ako geometrické cvičenia:

1. „Rozhodni o viditeľnosti hrán jednotlivých telies (to program niekedy neurobí). Zvolenú viditeľnosť možno zvýrazniť vyfarbením stien.
2. Z predtlače vrcholov telesa zostroj zobrazenie jeho hrán (stien) vrátane zvolenej viditeľnosti.
3. V predtlači zobrazenia „viditeľných“ hrán telesa narysuj (čiarkovane) „neviditeľné“ hrany (steny).
4. V predtlači neúplného znázornenia vrcholov (hrán) narysuj ďalšie, s využitím poznatkov o rovnobežnom premietaní.
5. Rysuj do predtlače znázorneného telesa ďalšie objekty“ (O. Židek, str. 208-209, 2007).

Z ďalších didaktických benefitov vyberáme:

- „Prezentovať sa dá objavným spôsobom princíp duality medzi telesami (kocka – osemsten, dvanásťsten – dvadsaťsten, atď.). K riešeniu postačí schopnosť nájsť stred steny telesa a tento považovať za vrchol nového telesa. Zatiaľ čo cvičenie na kocke je z konštrukčného hľadiska jednoduché, cvičenie na ďalších telesách by bolo bez ponúkanej technológie veľmi náročné.
- Využiť sa dá princíp „obsekávania“ vrcholov na pravidelných mnohostenoch (Platónových telesách) čím sa dá, v modifikovanej podobe, získať aspoň časť poznatkov o polopravidelných mnohostenoch (Archimedovské telesá).
- Pomerne ľahko sa dajú kombinovaným spôsobom zobraziť niektoré hviezdicovité telesá (stella octangula) i ďalšie“ (O. Židek, str. 208-209, 2007).



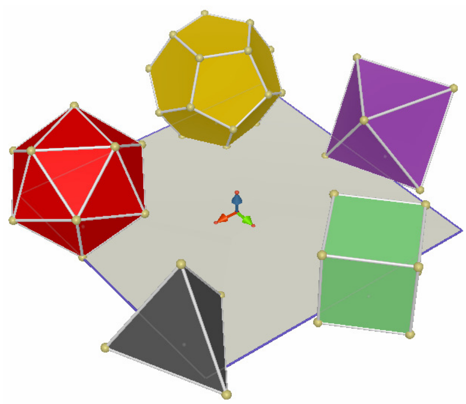
Obr. 12.5 *Vizualizácia tvorby siete kocky v programe Poly Pro, sledovanie prechodu z roviny do priestoru a naopak, príprava metodického materiálu*

12.2 Cabri 3D – platforma na riešenie stereometrických úloh

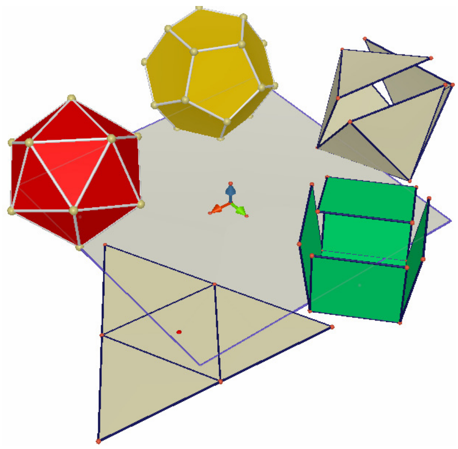
Všeobecnejším programom určeným na riešenie stereometrických úloh v Euklidovskom priestore E^3 je Cabri 3D vyvíjaná tímom Cabrilog. Podobne, ako program Cabri II Plus, možno charakterizovať aj jeho priestorový variant ako interaktívny geometrický dynamický systém, ktorý ponúka nástroje na riešenie geometrických úloh v priestore. O jeho základných vlastnostiach sa čitateľ môže dozvedieť z domovskej internetovej stránky (www.cabri.com), ďalej z vedeckých a recenzných prác J. Vaníčka (2005) a didaktické skúsenosti na Slovensku postupne zverejňuje D. Vallo

(2005, 2007). Avšak aj bez hlbšieho štúdia spomínaných prác možno konštatovať, že už prvé tri prívlastky uvedeného softvéru: interaktívny, geometrický a dynamický program konkretizujú a vypovedajú o jeho atribútoch. Prostredie programu Cabri 3D je intuitívne a ponuka konštrukčných nástrojov nie je veľká. Napriek tomu funkcionalita programu je dostatočná pre potreby školskej geometrie nielen z obsahovej stránky, ale najmä z hľadiska inovačných didaktických prístupov. Ak by sme chceli podrobiť ponuku a vlastnosti Cabri 3D náročným klasifikačným kritériám[7], ktoré majú charakterizovať celé stereometrické učivo z obsahovej stránky, treba konštatovať, že v programe nájdeme nástroje na:

- *rozvoj priestorovej predstavivosti*
  - jednoduché konštrukcie zobrazení telies (štvorsten, kváder, hranol, ihlan, konvexný mnohosten, vrátane platónskych telies – obr. 12.6)
  - tvorba sietí uvedených telies (obr. 12.7)
  - tvorba interaktívnych rezov telies
  - možnosť zobrazenia dynamickej manipulácie s telesami (skúmanie z rôznych zorných uhlov, odvaľovanie a rozbaľovanie telies, otáčanie),
- *využívanie kalkulatívnej stereometrie*
  - možnosť merania vzdialeností, dĺžok, obvodov, obsahov, objemov a povrchov, veľkostí uhlov, zavedenie súradnicového systému, využívanie rovníc pri riešení stereometrických úloh,
- *prehĺbenie vedomostí z teoretickej stereometrie*
  - nástroje na využívanie priestorových transformácií (stredová súmernosť, osová súmernosť, rovinová súmernosť, posunutie, otočenie, rovnoľahlosť, inverzia).



Obr. 12.6 *Platónske telesá v Cabri 3D*



Obr. 12.7 *Postupné „otváranie“ telies až do siete v Cabri 3D*

So zostrojenými priestorovými útvarmi v Cabri 3D možno manipulovať, prispôsobovať ich vzhľad, animovať ich a zanechávať stopu zvolených pohybujúcich sa objek-

[7] Klasifikácia problematiky stereometrie prevzatá z M. Hejný a kol., 1990.

tov. K tradičným nástrojom dynamických geometrií patrí možnosť prehrávania konštrukcie krok po kroku. K najdôležitejším prednostiam môžeme zaradiť jednoduchý webový export, čím sa otvárajú možnosti prípravy online výučbových materiálov a dynamických obrázkov využiteľných v rôznych elektronických didaktických dokumentoch.

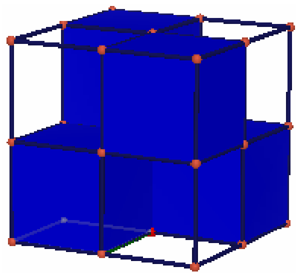
V priamej výučbe môže systém slúžiť ako:

- *nástroj virtuálneho rysovania* (virtuálny výkres, virtuálne pravítko a kružidlo),
- *nástroj na prezeranie hotových konštrukcií*, ich skúmanie, experimentovanie s nimi vrátane ďalších manipulácií,
- *demonštračný nástroj* (doplnok výkladu, zobrazovacia pomôcka napr. pre diskusiu),
- *nástroj na rozvíjanie priestorovej predstavivosti* a jej overovanie.

Jednu z alternatív didaktického využitia softvéru Cabri 3D uvedieme pri riešení nasledujúcej úlohy.

Úloha o nepriehľadnej kocke[8]:

Miško si z dovolenky priniesol špeciálnu kocku zlepenú z ôsmich kociek – štyri sú biele priehľadné a štyri čierne nepriehľadné. Kocky sú uložené tak, aby sa cez kocku nedalo vidieť ani zhora dole, ani spredu dozadu, ani zľava doprava (obr. 12.8). Fero si chce urobiť tiež takú nepriehľadnú kocku, ale väčšiu – z 27 kociek. V obchode zistil, že za jednu čiernu nepriehľadnú kocku zaplatí až 20 korún, zatiaľ čo za bielu priehľadnú len 8 korún. Najmenej koľko korún ho bude stáť veľká kocka, ak za lepidlo zaplatí 40 korún?



Obr. 12.8 *Ilustračný obrázok*

Autorské riešenie:

„Keďže Fero chce za veľkú kocku zaplatiť čo najmenej korún, musí kúpiť čo najmenej nepriehľadných čiernych kociek, lebo sú drahšie ako priehľadné biele. Najprv zistíme, najmenej koľko čiernych kociek musí kúpiť a ako ich musí umiestniť, aby celá veľká kocka bola nepriehľadná. Veľká kocka má byť z 27 kociek, preto bude mať rozmery 3×3×3. Aby nebolo vidieť spredu dozadu, musia byť na každom poschodí najmenej 3 kocky (v každom „predozadnom“ rade po jednej). Tieto by mali byť umiestnené tak, aby súčasne zabraňovali pohľadu zhora dole (teda aby v každom z deviatich stĺpcov bola jedna kocka) a súčasne aby zabraňovali pohľadu zľava doprava. Fero musí kúpiť 9 čiernych nepriehľadných kociek, za ktoré zaplatí 9.20 = 180 korún. Zvyšných 27-9=18 kociek bude bielych priehľadných a zaplatí za ne 18.8=144 korún. Spolu s lepidlom za 40 korún zaplatí Fero 180+144+40=364 korún. *Veľká kocka ho bude stáť najmenej 364 korún.*”

Komentár:

Otázka v uvedenej úlohe je formulovaná tak, že predznamenáva jednoduchý numerický výpočet, ktorý však netvorí jadro problému. Úloha sa charakterovo redukuje na stereometrickú, a len jej úspešné riešenie môže byť základom zdarného ukončenia

[8] Firma EXAM testing, súťaž MAKS6, šk. rok 2007/2008, 3. kolo, úloha 4.

riešenia úlohy. Hľadá sa odpoveď na otázku: *Zistite najmenej koľko čiernych – nepriehľadných kociek potrebujeme a ako ich rozmiestnime, aby celá veľká kocka bola nepriehľadná.*

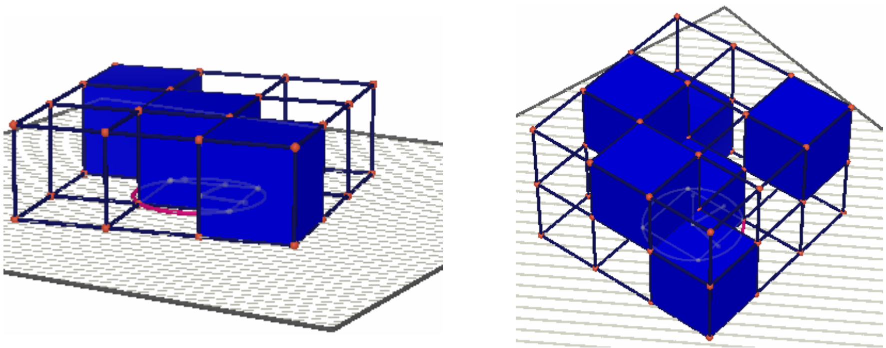
V zadaní úlohy je dieťaťu predložený ilustračný obrázok kocky, ktorú si priniesol z dovolenky Miško. Úloha je teda určená pre žiakov, u ktorých sa predpokladá schopnosť korektnej interpretácie ilustračného obrázka, prípadne textovej formulácie úlohy. Pre riešiteľa by nemal byť problém veľkú kocku s rozmermi 2×2×2 poskladať z poskytnutých kociek dvoch farieb. Je zrejmé, že poskladať kocku tak, aby sme overili jej priehľadnosť, či nepriehľadnosť z pohľadov zhora dole, spredu dozadu a aj zľava doprava je problematické vzhľadom na výber materiálu priehľadných kociek. Ak by sme priehľadné kocky ignorovali a skúsili použiť len čierne, stavba nie je kompaktná, a teda sa nedá poskladať. Takže už aj vo fáze interpretácie úlohy musí byť žiak schopný istej abstrakcie, či je to v práci s konkrétnym dvojfarebným modelom, alebo v myšlienkovej manipulácii s kockou s rozmermi 2×2×2. Po zväčšení kocky na 3×3×3 sa význam použitia konkrétnych kociek v dvoch farebných prevedeniach prinajmenšom znižuje, pretože predstava jednotlivých horizontálnych a vertikálnych vrstiev veľkej kocky z hľadiska ich priehľadnosti je náročná, nie však vylúčená. Pre žiakov, u ktorých abstrakčná úroveň ešte nedosiahla manipuláciu v myšlienkach, môže byť využitie vhodného softvéru prospešným nástrojom na spredmetnenie. Platforma Cabri 3D sa ponúka nielen v demonštračnej rovine (učiteľ pripraví modely v prostredí Cabri 3D a predvedie dynamické zmeny v závislosti od zmeny zorného uhľa pohľadu[9]), ale najmä v možnosti individuálneho skladania kocky samotným riešiteľom postupným pridávaním menších kociek.

Keďže dynamická geometria ponúka aj možnosť nastavenia istých vizuálnych vlastností, možno definovať kocky ako nepriehľadné. Žiak si môže zvoliť rôzne stratégie skladania virtuálnych kociek, a z didaktického hľadiska je užitočné všímať si zvolené postupy. Ak si odmyslíme náhodnosť v skladaní a nesystémovosť, v zásade sú možné tri riešiteľské stratégie. Prvý strategický postup spočíva v postupnom dopĺňaní pôvodnej Miškovej kocky typu 2×2×2 o ďalšie kocky až po rozmer 3×3×3, pričom každej pridanej kocke treba nastaviť atribút farebnosti, či priehľadnosti. Druhá stratégia je založená na postavení kocky 3×3×3 po jednotlivých poschodiach (prípadne vertikálnych rezoch) od úplne prvej kocky až po poslednú, taktiež s nastavením priehľadnej, alebo farebnej vlastnosti každej kocky (obr. 12.9, obr. 12.10, obr. 12.11). Tretia stratégia ja založená na metóde farbenia kocky, t. j. žiak môže mať pripravenú bezfarebnú stavbu 3×3×3 (alebo si ju sám zostrojí) a nastavovaním atribútu priehľadnosti pre každú malú kocku postupne stavbu „farbí“.

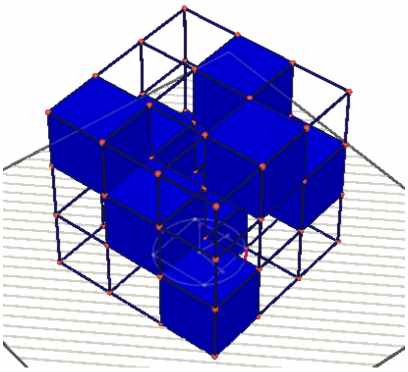
Vďaka možnosti „zmeny stanovišťa pozorovateľa“ v Cabri 3D je prikladanie kociek jednoduché a názorné. Pohľad na nákresňu možno zmeniť pridržaním pravého tlačidla myši a jej pohybom do požadovaného smeru. Táto prednosť umožňuje žiakovi po zostavení veľkej kocky overiť jej nepriehľadnosť a korigovať prípadné omyly vo svojich hypotézach. Taktiež sa jednoduchou zmenou pohľadu zistí celkový počet použitých nepriehľadných kociek, pričom konštrukciu netreba rušiť. Ak je riešiteľ v predstavách vyspelejší, vie otáčaním kocky zistiť počet použitých nepriehľadných

[9] Pripravený model a jeho animácia na www.webmatika.sk – úloha o nepriehľadnej kocke.

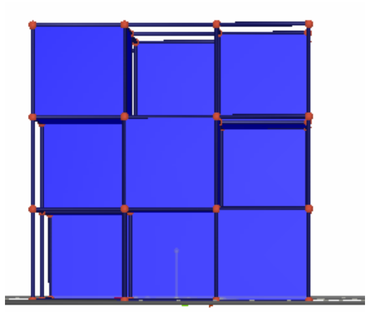
kociek. Na pomoc menej vyspelému riešiteľovi môže poslúžiť nástroj „prehrávanie konštrukcie“.



Obr. 12.9 *Skladanie veľkej kocky postupne po horizontálnych vrstvách s nastavovaním priehľadnosti*



Obr. 12.10 *Ukončená konštrukcia kocky*



Obr. 12.11 *Jeden z pohľadov na kocku – verifikácia priehľadnosti*

Pri riešení stereometrických úloh vo všeobecnosti závisí výber metódy riešenia úlohy od úrovne abstrakčného stupňa poznania jednotlivca. Kým na najnižšom stupni v abstraktno-gradačnej štruktúre treba počítať s tým, že pre dieťa je nutné teleso si ohmatať, pohrať sa s ním, u vyspelého riešiteľa (po abstrakčnom zdvihu) očakávame, že predstava o skladbe jednotlivých kociek bude prebiehať čisto myšlienkovou manipuláciou. Medzi uvedenými stupňami zrelosti riešiteľa stereometrických úloh je niekoľko úrovní, ktorých prekonanie je podmienkou úspešnosti. Domnievame sa, že **metóda virtuálnej priestorovej manipulácie** v špeciálnych programových prostrediach v kombinácii s ostatnými tradičnými a osvedčenými metódami môže poskytnúť dostatok skúseností a poznatkov potrebných na zvládnutie jednotlivých abstrakčných úrovní.

13

C.a.R. ZADANIA – METÓDA INTERNETOVÝCH KONŠTRUKČNÝCH ÚLOH (CVIČENÍ)

13.1 Krátka charakteristika systému C.a.R.

Systém Compass and Ruler (C.a.R.) patrí k počítačovým programom dynamickej geometrie. Podobne, ako u nás viac rozšírená Cabri geometria, poskytuje program C.a.R. nástroje na tvorbu interaktívnych geometrických výkresov. Simuluje tradičné euklidovské geometrické konštrukcie realizované prostredníctvom pravítka a kružidla, avšak s možnosťou dynamickej zmeny rezultátu konštrukcie podmienenej zmenou nezávislých vstupných prvkov riešenej úlohy. Autor programu, René Grothmann, na svojej domovskej webovej stránke[10] sumarizuje prednosti dynamickej geometrie C.a.R., ktoré sa dajú voľne zhrnúť a interpretovať v týchto heslách: *interaktivita* (zmena konštrukcie na základe balansovania hodnôt vstupných parametrov), *heuristika* (objavovanie a sledovanie množín bodov prostredníctvom znázorňovania stopy a animácie), *zjednodušenie a sprehľadnenie konštrukčného postupu* (využívanie makier[11]), *možnosť skúmania aj neeuklidovských geometrií* (hyperbolickú, eliptickú) a nezanedbateľná je aj možnosť grafickej úpravy výsledného výkresu jednak podľa zaužívaných zvyklostí a aj podľa estetického cítenia a vkusu užívateľa. C.a.R. je program napísaný v Jave, čo umožňuje jednoduché publikovanie konštrukcie prostredníctvom webových stránok vo forme Java appletov. Program sa zaraďuje do kategórie „open source“, a je teda voľne šíriteľný a modifikovateľný. Všetky aplikácie (komerčné aj nekomerčné) možno slobodne distribuovať s podmienkou uvedenia stránok so zdrojovým kódom. Inštalácia programu je intuitívna, pričom je možný alternatívny výber lokálnej inštalácie na počítači, alebo používanie najaktuálnejšej verzie „na diaľku“ prostredníctvom metódy Java Web Start. Podrobnejšie informácie sú na domovskej stránke, alebo slovenskej stránke[12].

Ponuka základných nástrojov a spôsob manipulácie s nimi je v otvorených geometrických prostrediach Cabri geometrie a Compass and Ruler porovnateľná. V základnej obsluhe sú odlišnosti vo funkcionalite ľavého a pravého tlačidla myši, čo je mätúce pre užívateľov oboch programov. Menšie rozdiely sú tiež v nástrojoch na sledovanie a kreslenie stopy vybraného útvaru pri jeho pohybe po inom útvare. V prospech Cabri geometrie hovorí spracovanie makier na realizáciu základných zobrazení zhodností

[10] http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en/index.html
[11] makro, makroinštrukcia – skupina nadväzujúcich inštrukcií, ktorú možno spustiť jediným príkazom.
[12] http://vk.upjs.sk/~tuleja/CaR/

(stredová súmernosť, osová súmernosť, posunutie, otočenie), v ktorých možno hľadať a vykresľovať obrazy nielen pre body, ale aj pre iné útvary (úsečky, kružnice, mnohouholníky a podobne), čo podstatne zjednodušuje prácu pri náročnejších konštrukciách. Vzhľadom na častú aktualizáciu produktu Compass and Ruler nie je vylúčené, že sa v dohľadnom čase užívateľ dočká vylepšenia aj v tejto oblasti. Špeciálnu pozornosť si však v systéme Compass and Ruler zaslúžia dva aspekty (okrem finančnej otázky), ktoré istým spôsobom zvýhodňujú toto prostredie pred Cabri geometriou. Je to jednak veľmi jednoduchá „publikovateľnosť" na webových stránkach, a tým druhým benefitom je možnosť tvorby tzv. „zadaní".

13.2 Čo je „zadanie"?

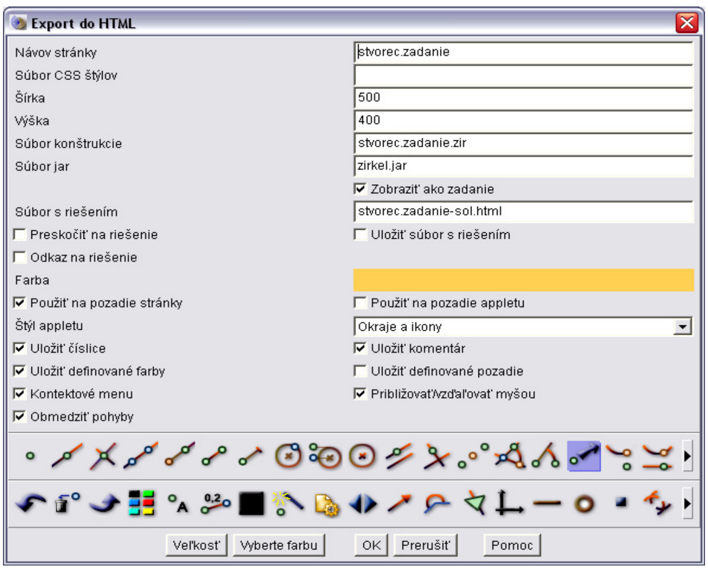
Autori prekladu systému C.a.R. definujú v hlavnej ponuke, v položke „špeciálne", možnosti (obr. 13.1): „definovať zadanie, nastaviť text zadania, odskúšať zadanie a uložiť ako zadanie". Po uložení konštrukcie „ako zadania" vytvorí programová aplikácia súbor s koncovkou **.job*. Podľa doslovného prekladu by súbor s uvedenou koncovkou znamenal zamestnanie, prácu, úlohu. Všetky pojmy sú pomerne výstižné a v rámci vyučovania matematiky aj bežne používané. Označenie „zadanie" je menej frekventované, ale podľa Krátkeho slovníka slovenského jazyka znamená **uloženie problému na vyriešenie**, a teda treba konštatovať, že najlepšie vystihuje podstatu. V ďalšom texte budeme uvedené označenia považovať za synonymá. Výraz „zadanie" však preferujeme z dôvodu jednotnosti so slovenským prekladom programu, a možno ho po spresnení a identifikácii prostredia definovať ako *terminus technicus: „C.a.R. zadanie"*.

Obr. 13.1 *Ponuka na tvorbu zadaní v systéme C.a.R.*

Geometrickú konštrukciu vytvorenú v systéme C.a.R. možno nielen prehrávať a skúmať z hľadiska jej interaktivity, ale po definovaní súboru ako „úlohy, zadania, (zamestnania)" možno vytvoriť pre žiakov a študentov problémové úlohy, po vyriešení ktorých sa zobrazí *oznam o jej úspešnom zvládnutí. Nejde teda o pasívne prehrávanie konštrukcie, prípadne postupu realizácie konštrukcie, ale o predloženie úlohy pre žiakov, ktorú treba aktívne vyriešiť.*

Postup pri tvorbe geometrického zadania v systéme C.a.R. nie je zložitý. Najskôr si zadávateľ úlohy musí uvedomiť, ako bude zobrazené zamestnanie pre študentov, t. j. ktoré geometrické prvky budú na úvodnej obrazovke znázornené. V tradičnom poňatí sa zvyčajne jedná o „dané prvky“. V implementovanej konštrukcii, po voľbe „*definovať zadanie*“ treba myšou označiť posledný z geometrických prvkov, ktorý bude v zadaní zobrazený (posledný z „daných“ elementárnych geometrických prvkov, alebo útvarov úlohy). Potom treba opäť myšou vyznačiť ten cieľový objekt, riešenie konštrukčnej úlohy (zvyčajne ide o naposledy skonštruovaný prvok v hotovej konštrukcii), ktorý očakávame od riešiteľov zadania. Ak je cieľových objektov viac, treba označiť všetky, ktoré sú z hľadiska konštrukčného postupu nevyhnutné. Z uvedeného postupu definície zadania je zrejmé, že overovanie správnosti konštrukcie neprebieha *vzhľadom na metódu riešenia úlohy, ale len na korektnosť naposledy skonštruovanho útvaru*. Nezáleží teda na výbere stratégie žiackeho riešenia, ale na správnosti hľadaného riešenia. Týmto je riešenie konštrukčnej úlohy zabezpečené vzhľadom na všeobecnosť.

Text zadania konštrukčnej úlohy sa jednoducho vloží prostredníctvom voľby „*nastaviť text zadania*“, uloží sa ako komentár konštrukcie a objaví sa vždy pri spustení zadania. *Odskúšať* takto definované *zadanie* znamená, že priamo v prostredí dynamickej geometrie sa úloha zobrazí len s danými prvkami a od užívateľa sa očakáva jej úplné riešenie. Ak je úloha korektne vyriešená, zobrazí sa oznam o úspešnosti. Ak pri definovaní zadania, konkrétne pri výbere cieľového objektu pridržíme kláves „Shift“, nebude sa overovať korektnosť riešenia. Ak je užívateľ spokojný a úloha je definovaná podľa jeho predstáv, treba ju „*uložiť ako zadanie*“. Vtedy bude súboru automaticky pridelená koncovka *.job* a je spustiteľný v prostredí C.a.R. Prirodzeným vyústením definovania zadania (problémovej úlohy) je možnosť jej zverejnenia na webovej stránke, vytvorenie appletu.



Obr. 13.2 *Export zadania do formátu html*

Export C.a.R. zadania na webové stránky

Konštrukcie a úlohy vytvorené v prostredí Compass and Ruler možno exportovať a uverejniť na Internete jednoduchým spôsobom. Geometrický systém dokáže vytvoriť tzv. „Java applet“, ktorý sa bežným spôsobom umiestni na webovú stránku. O tvorbe appletov v prostredí C.a.R. sa podrobnejšie môže čitateľ dozvedieť z prác autorskej dielne P. Hanzela a jeho spolupracovníkov (P. Hanzel, 2008, R. Majovská, 2006, L. Vojáčková, 2007).

Publikovanie vytvoreného zadania je založené na využití voľby „*vytvoriť HTML stránku*“, pričom po nastavení základných atribútov (názov súboru, šírka a výška appletu, farba pozadia stránky, farba pozadia appletu a ďalších) C.a.R. automaticky vytvorí súbor s koncovkou *.html. Zo širokej škály ponúknutých atribútov pri exporte zadania do formátu .html (obr. 13.2) treba zvlášť spomenúť:

- možnosť uloženia súboru spolu s riešením úlohy, vytvorenie odkazu na riešenie v applete a
- možnosť výberu konštrukčných nástrojov, ktoré bude možné pri riešení úlohy použiť.

Nemá zmysel, aby každá úloha mala v ponuke nástrojov na jej riešenie zobrazenú celú širokú škálu nástrojov dynamickej geometrie. Zadávateľ úlohy môže uskutočniť výber zobrazených nástrojov pri tvorbe webovej aplikácie, ktoré budú riešiteľovi k dispozícii pri realizácii konštrukcie.

13.3 Matematický a didaktický prínos tvorby a riešenia zadaní

Prednosti riešenia konštrukčných zadaní v prostredí appletu programového produktu Compass and Ruler sa pokúsime ilustrovať prostredníctvom nasledujúcej úlohy.

Úloha:

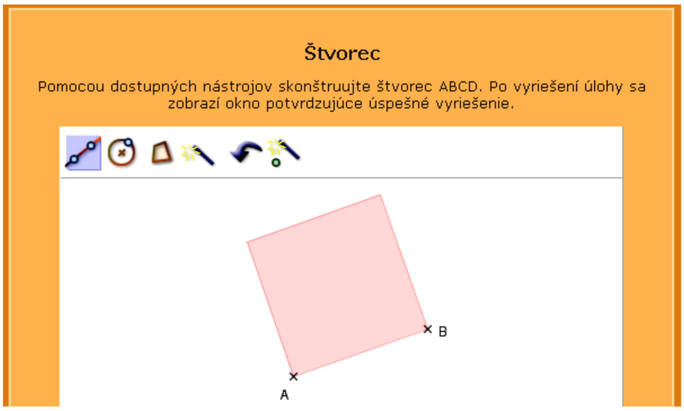
Zostrojte štvorec ABCD, ak sú dané dva rôzne body A a B.

Úloha je formulovaná ako polohová úloha s viacerými neznámymi bodmi, pričom stratégia riešenia je založená na metóde skúmania množín bodov s danou vlastnosťou.

Tvorba zadania na konštrukciu štvorca

Učiteľ pri tvorbe zadania nemusí postupovať podľa konštrukčného algoritmu, ktorý očakáva od riešiteľa úlohy. V našom prípade mu stačí v prostredí C.a.R. skonštruovať akýmkoľvek prípustným spôsobom ľubovoľný štvorec ABCD, pričom by mal začať so znázorňovaním prvkov, ktoré sú v texte úlohy špecifikované ako „dané“. Môže pri tom využiť všetky konštrukčné nástroje, ktoré systém umožňuje. Keďže je v texte určené, že body A a B sú dané, úloha musí byť riešiteľovi predložená tak, aby body A, B boli zobrazené na výkrese pri spustení appletu. Preto pri definovaní zadania treba určiť ako posledný viditeľný skonštruovaný bod B. Za cieľ zadania (posledný skonštruovaný útvar) treba exaktne stanoviť mnohouholník (konkrétne štvorec ABCD). Podľa cieľovej skupiny, ktorej je applet určený a podľa nastavenia latky náročnosti úlohy sa učiteľ pri exporte do webového tvaru rozhodne, ktoré konštrukčné nástroje riešiteľovi povolí používať. V zobrazenom prípade (obr. 13.3) je povolená konštrukcia

- priamky určenej dvomi rôznymi bodmi;
- kružnice s daným stredom a bodom, ktorý na nej leží;
- mnohouholníka, ktorý je určený svojimi vrcholmi a jeho konštrukcia je ukončená kliknutím na prvý skonštruovaný vrchol. Posledné tri zobrazené nástroje sú povolené kvôli ľahšej manipulácii a prehľadnosti. Ide o „krok späť“, „skryť objekty“ a „ukázať, alebo skryť skryté objekty“.

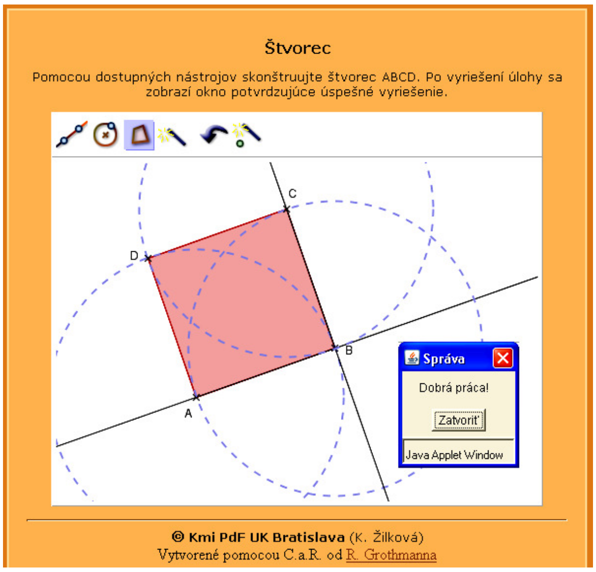


Obr. 13.3 *Zverejnené zadanie konštrukcie štvorca s danými bodmi A a B pomocou nástrojov na konštrukciu priamky, kružnice, mnohouholníka, bez možnosti použitia kolmice*
http://www.webmatika.sk

Po výbere konštrukčných nástrojov a špecifikovaní ďalších dobrovoľných atribútov zadania, treba súbor uložiť (automaticky by mala byť pridelená koncovka .html) a zadanie je pripravené na používanie.

Tradičné konštrukčné riešenie úlohy je zväčša realizované pomocou pravítka s ryskou (rysovanie kolmíc), ďalšieho pravítka (rysovanie rovnobežiek) a kružidla. Žiak prvého stupňa ZŠ vybavený pomôckami na rysovanie, hravo predloženú úlohu zvládne. **Stupeň náročnosti úlohy sa podstatne zvýši**, *ak zakážeme použitie pravítka s ryskou a povolíme len kružidlo a jedno rovné pravítko.* Takto upravené podmienky riešenia značne prevyšujú matematické kurikulum prvého stupňa. Preto pri tvorbe C.a.R. – zadania treba dôsledne zvážiť, ktoré nástroje budú v ponuke pre riešiteľa.

Z didaktického hľadiska má význam ponúknuť nielen tradičné nástroje, ale je dôležité tiež „znevýhodniť“ riešiteľa odobratím očakávaného nástroja (samozrejme v prípade, že aj bez použitia tohto nástroja je úloha riešiteľná) a tiež naopak, ponúknuť nástroje, ktoré sú úplne zbytočné. V našom prípade sme do ponuky nezahrnuli konštrukčný nástroj na rysovanie úsečiek a kolmíc. Okrem možnosti voľby konštrukčných nástrojov považujeme za didakticky prínosnú skutočnosť, že hľadané riešenie treba v realizácii konštrukcie explicitne vymedziť. Napríklad v konštrukcii stredu S danej úsečky AB, treba v závere konštrukcie jednoznačne určiť hľadaný stred S (čitateľ si môže konštrukciu vyskúšať[13, T. Marcinek, 2008). V prípade konštrukcie našej úlohy je nevyhnutné špecifikovať v závere riešenia štvorec ako mnohouholník ABCD (obr. 13.4), určením všetkých jeho strán (čitateľ si môže konštrukciu vyskúšať[14, K. Žilková, 2008). Skutočnosť povinnosti zreteľného vyjadrenia cieľového objektu, najmä v nižších ročníkoch, napomáha presnejšej a korektnejšej predstave o geometrických útvaroch a ich vlastnostiach.



Obr. 13.4 *Vyriešené zadanie konštrukcie štvorca s oznamom o úspešnom riešení*

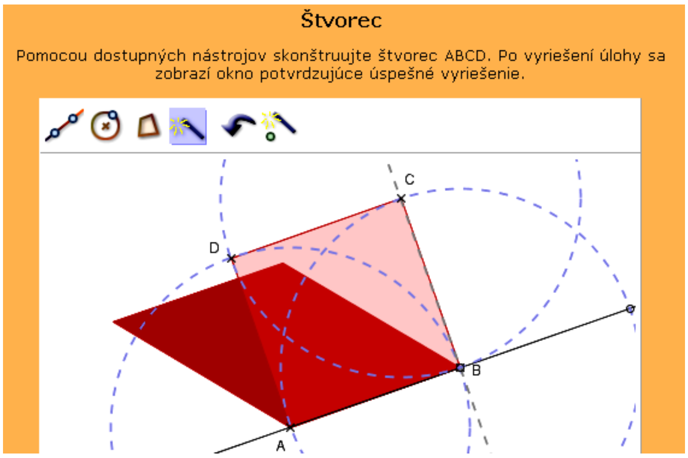
Záverečné konštatovanie

Zaradenie riešenia C.a.R. úloh do matematického vzdelávania môže byť užitočným prostriedkom k osvojovaniu rôznych matematických poznatkov. Praktická činnosť v podobe virtuálneho rysovania plní okrem vzdelávacej aj motivačnú funkciu, využiteľná je tiež pri kontrole a hodnotení vedomostí. V elektronickom vzdelávaní by mali C.a.R. zadania slúžiť hlavne na precvičovanie učiva. Aby bolo využívanie C.a.R. zadaní vo vyučovaní matematiky zmysluplné, je potrebné do dôsledkov premyslieť a naplánovať vyučovaciu jednotku, zvoliť metódu a prostriedky vyučovania. O rôznorodosti webových matematických materiálov, ich využívaní vo vyučovaní matematiky, výhodách, resp. nevýhodách a vplyvoch ich integrácie na prípravu hodiny matematiky predkladá krátku sumarizačnú štúdiu J. Robová. Okrem iného zdôrazňuje potrebu vytvárania nových kvalitných matematických webových aplikácií určených pre výučbové účely (J. Robová, str. 54, 2008). V uvedenom kontexte je vytváranie matematických C.a.R. zadaní, ich využívanie vo vyučovaní jednoduchou a dobrou alternatívou.

[13] http://www.marcinek.sk/cmich/java/midpoint.html
[14] http://www.webmatika.sk

Zadania vytvorené v systéme dynamickej geometrie C.a.R. patria medzi nové metódy na precvičovanie matematicko-geometrických vedomostí v prostredí IKT. Medzi prednosti uvedenej metódy, ktoré sú v tradičnom ponímaní a riešení konštrukčných úloh len ťažko realizovateľné, patria:

1. *možnosť výberu konštrukčných nástrojov na riešenie úlohy,*
2. *nutnosť explicitného vymedzenia riešenia úlohy a*
3. *hodnotiaci verdikt v prípade úspešnej realizácie konštrukcie.*



Obr. 13.5 *Vyriešené zadanie konštrukcie štvorca po zmene polohy priamky AB*

Zatiaľ jediným problémovým miestom zadaní sa ukazuje potlačenie vlastnosti interaktivity v súvislosti so zmenou polohy daných prvkov úlohy na začiatku a v procese realizácie konštrukcie. Po korektnom konštrukčnom postupe a ozname o úspešnosti (ak táto voľba nie je vypnutá) sa applet stáva *plne interaktívnym a správne implementovaná konštrukcia je tiež plne interaktívna aj s možnosťou dizajnových zmien.* Škoda len, že pôvodné riešenie zadania zostane na výkrese znázornené a deformuje sa (obr. 13.5). Po zmene polohy priamky AB si novoskonštruovaný štvorec ABCD svoje vlastnosti udrží a je korektný, ale pôvodne naznačený štvorec podlieha pri každej zmene polohy bodov, či dĺžky úsečiek deformáciám (na obrázku sa zdeformoval na tmavší kosodĺžnik). Toto obmedzenie sa netýka len zadaní v tvare webovej aplikácie, ale aj zadaní otvorených priamo v prostredí C.a.R. a zvolení voľby odskúšať zadanie.

Objektívne treba uviesť, že riešenie internetových zadaní prostredníctvom virtuálneho pravítka a kružidla supluje len isté fázy riešenia geometrickej úlohy. Ide hlavne o fázu grafickej konštrukcie a s úspechom môže tiež podporovať fázu diskusie o riešiteľnosti úlohy. K úplnosti chýba rozbor, formulácia konštrukčného predpisu a dôkaz správnosti konštrukcie. Na druhej strane zasa ponúka uvedený spôsob riešenia novú symboliku a možnosť osvojovania matematických pojmov v netradičnom (pútavom) prostredí.

14

ARTIKULÁCIA MATEMATICKÝCH PROBLÉMOV ANIMÁCIAMI

14.1 Vymedzenie pojmov hypermédium, multimédium, animácia

Podľa typológie elektronických dokumentov a pamäťových médií (M. Ressler, 2006) pod pojmom hypermédium rozumieme metódu organizácie údajov a informácií založenú na hypertexte, prostredníctvom ktorého sú prepojené texty, obrázky, zvuky, animácie a ďalšie formy informácií. Multimédium predstavuje digitálny systém integrujúci rôzne formáty dokumentov. Hypermédiá aj multimédiá sú charakteristické tým, že kombinujú statické (texty, obrázky) aj dynamické prvky (animácie, videá, zvuky), a možno práve preto sa oba pojmy často dostatočne kvalifikovane nerozlišujú. Vplyvom multimediálnych prostriedkov na efektivitu vo vzdelávaní a multimediálnou interakciou v pedagogike sa zaoberajú informačno-multimediálne teórie (M. Zelina, 2004, str. 201-210).

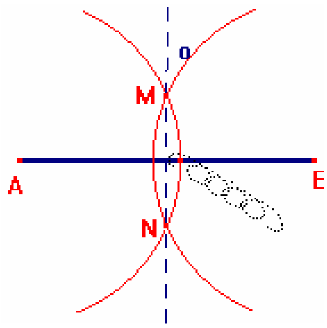
Súčasťou multimediálnych prostriedkov môžu byť animácie, videosekvencie a rôzne zvukové doplnky. Animácie, ktoré sú založené na rýchlom striedaní statických obrázkov, v počítačovom prostredí fungujú na princípe počítačom generovaných obrázkov. Ich rýchle premietanie pôsobí na ľudské vnemy ako spojitý pohyb, čím sa zachytáva dynamika pozorovaného deja v istej časovej a významovej nadväznosti.

Pri tvorbe multimediálnych učebných pomôcok treba mať na zreteli korektnú didaktickú transpozíciu obsahu tradične spracovaného učiva do formy elektronického materiálu. Spracovanie a tvorba počítačových animácií s matematickým obsahom môžu byť založené na rôznych platformách a môžu napĺňať rôzne funkcie v matematickom vzdelávaní.

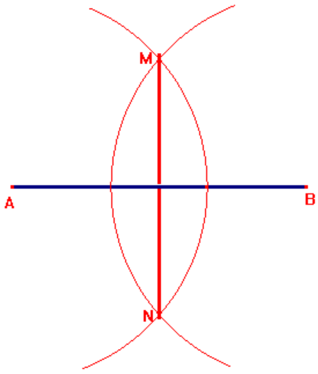
14.2 Animácie založené na platformách interaktívnych dynamických systémov

Riešenie väčšiny školských geometrických úloh je založené na objavovaní vlastností (polohových, metrických) geometrických útvarov a vzťahov medzi nimi. Prostriedkami na tvorbu interaktívnych konštrukčných výkresov sú dynamické geometrické systémy (Cabri 2Plus, Compass and Ruler, Cabri3D), ktoré majú významné miesto vo vyučovaní matematiky. Uvedené programové aplikácie disponujú možnosťami nastavenia niektorých atribútov, ktoré umožňujú jednoduché animácie:

- *Animácia bodov* (napr. v Cabri sa realizuje „natiahnutím pružiny", ktorá určuje smer a rýchlosť animácie vyznačených útvarov; systém C.a.R animuje jeden bod pozdĺž úsečiek, prípadne po kružnici).

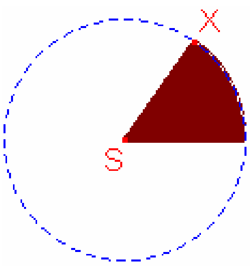


Obr. 14.1 *Pružina určujúca smer a rýchlosť animovania bodu, ktorý definuje polomer kružníc*

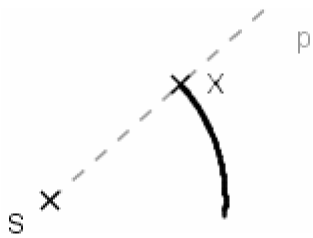


Obr. 14.2 *Zapnutie sledovania stopy bodov M,N. Vykresľovanie osi úsečky AB*

- *Sledovanie stopy bodov* (stopu zapni/vypni) – v Cabri geometrii ide o vykresľovanie stopy vyznačených útvarov po zmene ich polohy; v C.a.R. je možnosť manuálneho (vykresľovanie stopy pohybujúcich sa bodov alebo priamok) a automatického sledovania stopy (vykresľovanie stopy závislých bodov a priamok tým, že sa animuje pohyb jedného nezávislého bodu napr. po kružnici, alebo priamke).

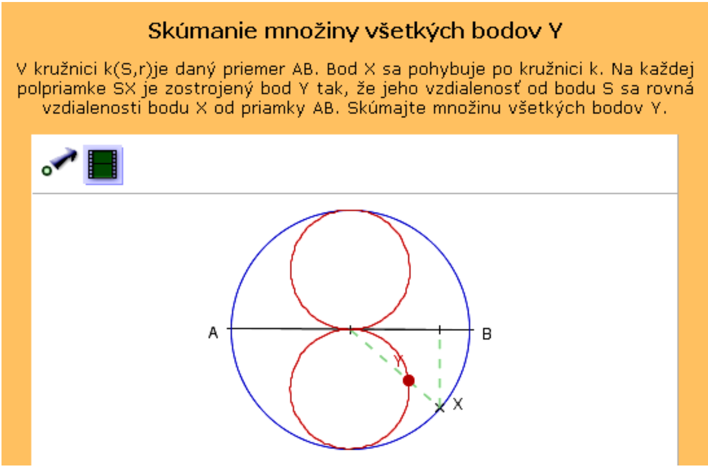


Obr. 14.3 *Sledovanie stopy úsečky SX, pri animovaní bodu X (Cabri geometria)*



Obr. 14.4 *Manuálne sledovanie stopy bodu X, pri zmene polohy polpriamky SX (C.a.R.)*

Ak sa zhotovený výkres vytvorený v systéme C.a.R. uloží v priebehu aktuálnej animácie, bude animácia uložená spolu so súborom. V kombinácii s uložením vo formáte *.html to znamená, že aplikácia bude po otvorení v prehliadači animovaná (obr. 14.5, zdroj: http://www.webmatika.sk). Ak užívateľovi animovanej aplikácie poskytneme a znázorníme ďalšie nástroje na experimentovanie s vlastnosťami prvkov konštrukcie, potom hovoríme o animácii s limitovanou interaktivitou.



Obr. 14.5 *Animácia pripravená v systéme C.a.R. a upravená pre potreby webovej publikácie*

Plne interaktívna je Cabri aplikácia publikovaná na webových stránkach a vykonávaná prostredníctvom Cabri Java, ktorá sa zobrazuje v štandardnom okne s možnosťou zapnutia a vypnutia stopy a definovania animácie. Tieto nastavenia si však musí užívateľ (učiteľ, či žiak) vytvoriť sám, a ak nie je sám autorom vytvoreného appletu a nevie, ktoré prvky konštrukcie sú závislé a ktoré nezávislé, nastavenie animácie môže robiť problém.

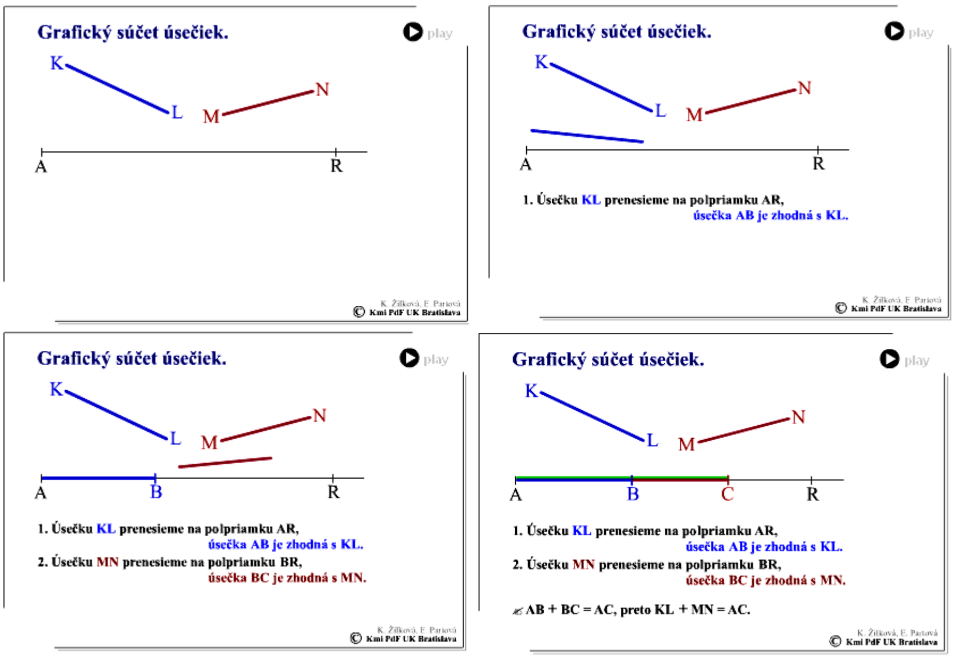
Účelnosť a význam uvedených nástrojov vo vyučovaní matematiky je zrejmá. Vizualizácia stopy bodov a animácia útvarov prispievajú vo vyučovaní k názornosti a k možnosti objavovania vzájomných kauzálnych súvislostí, a tým aj k možnosti zaraďovania sledovaného javu, prípadne novovzniknutých útvarov, do poznatkovej štruktúry matematických vedomostí.

14.3 Animácie založené na báze profesionálnych grafických systémov

Na vytváranie animácií založených na vektorovej grafike existuje množstvo typov profesionálnych nástrojov. K najznámejším, dlhoročne používaným, programovým produktom patrí Macromedia Flash.

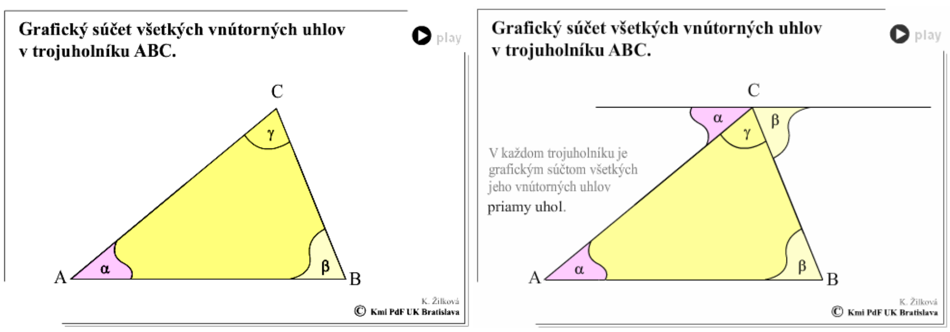
Možno použiť dve metódy na vytvorenie animovaných sekvencií. Jedna je založená na postupnom vytváraní všetkých snímok, ktoré sa budú animovať. Druhá metóda je pre používateľa pohodlnejšia, pretože stačí vytvoriť len tzv. „kľúčové snímky“ (začiatočný a koncový), medzi ktorými Flash vytvorí animovaný prechod automaticky.

Flashové aplikácie s matematickým obsahom sú veľmi ľahko aplikovateľné nielen v elektronických učebniciach, e-learningových kurzoch, najmä v dištančnom matematickom vzdelávaní, ale aj ako doplňujúci materiál v tradičnom vyučovaní matematiky obohatenom o aktívne využívanie prostriedkov informačných a komunikačných technológií. Veľký význam, z hľadiska didaktiky matematiky, vidíme hlavne vo vytvorení menších aplikácií obsahujúcich vysvetlenie základných a odvodených matematických pojmov, vrátane niektorých definícií, ako aj v objasňovaní rôznych algoritmických postupov.



Obr. 14.6 *Znázornenie algoritmu zisťovania grafického súčtu dvoch úsečiek*

K ďalším, nie menej významným, funkciám takto spracovaného matematického učiva patrí vizualizácia a geometrická interpretácia niektorých matematických vzťahov, ktorých objasnenia (niekedy aj dôkazy) nie sú momentálnym vyučovacím cieľom, ale na ich priblíženie a ľahšie zapamätanie je znázornenie pomocou animovanej techniky užitočné. Ako príklad uvádzame vizualizáciu matematickej vety o grafickom súčte všetkých vnútorných uhlov trojuholníka ABC.



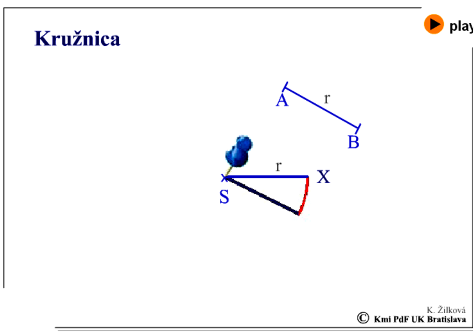
Obr. 14.7 *Grafický súčet všetkých vnútorných uhlov v danom trojuholníku*

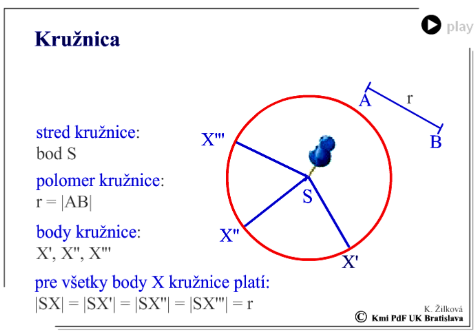
Uvedené príklady matematických animácií vytvorených v prostredí Macromedia Flash nie sú interaktívne, alebo ich interaktivita je obmedzená len na možnosť spustenia animácie, prípadne jej ukončenia. Zaraďujeme ich do skupiny *demonštračných animácií*. Cieľom a poslaním demonštračných animácií podľa V. Stoffovej je: „motivovať edukantov, upútať ich pozornosť, zvýšiť názornosť vyučovania, demonštrovať princípy činnosti a fungovania vecí, demonštrovať technologické postupy, znázorniť dynamické javy, procesy, zmeny (časové a priestorové, príp. časopriestorové), ...“ (V. Stoffová, 2007) a mnohé ďalšie funkcie, ktoré vyplývajú z predmetových, odborných a obsahových hľadísk.

14.4 Animácia kombinovaná s virtuálnym videom

Vyučovanie matematiky v prostredí IKT si často vyžaduje predvedenie niektorých užívateľských postupov v rôznych matematických edukačných programoch. Tieto demonštračné postupy sú dôležité nielen pre učiteľa na tvorbu didaktických materiálov na vyučovanie, ale aj pre žiakov ako návod k aktívnemu využívaniu matematických programových aplikácií. V tomto smere sú užitočným prostriedkom nástroje, ktoré umožňujú vytvoriť edukačné video materiály. Prehľad dostupných programov na tvorbu jednoduchých videosekvencií a návod na prípravu vizuálnych elektronických materiálov poskytuje D. Brigán (str. 14-18, 2007) a konštatuje, že krátke videosekvencie sprevádzané textom môžu v kľúčových momentoch napomôcť a zjednodušiť proces učenia sa.

Nahrávku diania na obrazovke zachytenú niektorým z dostupných softvérov nazývame *virtuálne video*. V príprave matematických edukačných materiálov sa môžu v tomto kontexte využiť ľubovoľné programy, či mikrosvety určené na podporu matematického vzdelávania, vrátane spomínaných interaktívnych geometrických systémov. Proces animácie v Cabri geometrii, alebo v systéme C.a.R. môžeme zaznamenať, pričom nahrávka je použiteľná samostatne, ale aj v kombinácii s ďalšími animáciami a doplnkovými textovými informáciami v prostredí Macromedia Flash.





Obr. 14.8 *Kombinácia animácie a virtuálneho videa*

14.5 Animácia kombinovaná s reálnym videom

Dôležitou súčasťou matematického vzdelávania sú rôzne manipulačné aktivity (práca so stavebnicami, skladačkami, strategické hry, „dôkazové“ techniky prostredníctvom prekladania papiera a pod.). Podľa O. Žideka „v didaktike matematiky chápeme manipulácie ako multisenzorické nástroje napomáhajúce učeniu žiakov prostredníctvom ich vlastných skúseností, získaných nielen zrakom, ale najmä hmatom“ (O. Židek, str. 83, 2003). Zároveň však autor citátu akcentuje význam kombinácie manipulačnej vyučovacej metódy s virtuálnym poznávaním (O. Židek, 2007). Keďže spomínané manipulačné aktivity sa ťažko formulujú a prezentujú v slovnej, alebo v písomnej podobe, je možnosť vytvoriť tzv. „reálne video“, t. j. zachytiť dianie v reálnom svete kamerou, prípadne digitálnym fotoaparátom. V kombinácii s ďalšími metódami uvedenými v tomto príspevku môže vzniknúť užitočný vzdelávací materiál.

Obr. 14.9 *Kombinácia animácie a reálneho videa*

Potrebu vizualizácie, ako najvhodnejšej a najúčinnejšej zmyslovej preferencii, ktorá „hrá veľkú úlohu pri objavovaní vzťahov a súvislostí medzi matematickými objektmi a v prenose a komunikácii v matematike“ zdôrazňuje D. Malá (str. 12, 2007), pričom upozorňuje na „dokázaný vzťah medzi preferenciou vizualizácie a úspešnosťou vo vyučovaní v matematike u žiakov druhého stupňa základnej školy“. Aj z tohto dôvodu k základným cieľom využívania animovaných prostriedkov v matematickom vzdelávaní zaraďujeme znázorňovanie a vizualizáciu matematických abstraktných pojmov a vzťahov v rámci zefektívňovania vyučovacieho procesu. Využívanie zvukových záznamov v priebehu animácie, prípadne slovný sprievod a komentár učiteľa v priebehu prehrávania animácie vo vyučovaní matematiky môže však osloviť aj auditívne typy žiakov.

15

DIDAKTICKÉ BENEFITY TVORBY ALGORITMOV V ROZVOJI MATEMATICKÝCH KOMPETENCIÍ UČITEĽOV

15.1 Etapy a ciele využívania algoritmických postupov v matematike

Osvojovanie si základných algoritmických postupov pri riešení matematických úloh je na prvom stupni základnej školy súčasťou matematického vzdelávania. Proces osvojovania si a aplikácie istých algoritmov spočíva nielen:

- *v nácviku vykonávania jednotlivých operácií* podľa vopred určeného postupu, ale najmä
- *v pochopení významu fungovania algoritmického mechanizmu.*

V čase informačnej explózie a prieniku informačných a komunikačných technológií do každodenného života sú deti konfrontované so schopnosťami a zručnosťami pri ich používaní, ktoré zvyčajne v počiatočnej fáze spočívajú v ovládaní algoritmu (v zmysle postupu) na dosiahnutie požadovaného výsledku. Dokonalejší stupeň zvládnutia spočíva v pochopení zmyslu uvedeného postupu, t. j. vedieť odpovedať na otázky o význame zaradenia jednotlivých krokov do algoritmu a vo všeobecnosti vedieť, v akej situácii je daný algoritmus užitočný, spoľahlivý a účinný. Na dosiahnutie uvedeného cieľa možno použiť zo strany učiteľa rôzne postupy a prostriedky. Budúci učiteľ matematiky na prvom stupni základnej školy by mal prejsť v priebehu svojej prípravy na budúce povolanie rôznorodými skúsenosťami v používaní algoritmických postupov. Jedným z prostriedkov slúžiacich k ucelenejšiemu pohľadu na algoritmické úlohy môže byť základný kurz programovania v niektorom z detských (prípadne aj iných) programovacích jazykov.

Cieľom získavania elementárnych programátorských zručností v príprave učiteľov prvého stupňa nemá byť výchova programátorov, ale:

- sprístupnenie nových skúseností na riešenie matematických úloh riešiteľných pomocou algoritmov a prostredníctvom počítača,
- poskytnutie ukážok používania programovania ako zdroja zábavy,
- ako nástroja na experimentovanie,
- ako pomocníka pri rozvoji kreativity s využitím fantázie a estetiky,
- uplatňovanie analyticko-syntetických a induktívno-deduktívnych matematických metód v programovacom prostredí,
- hľadanie matematického modelu situácie a jeho transpozície do informatického prostredia,

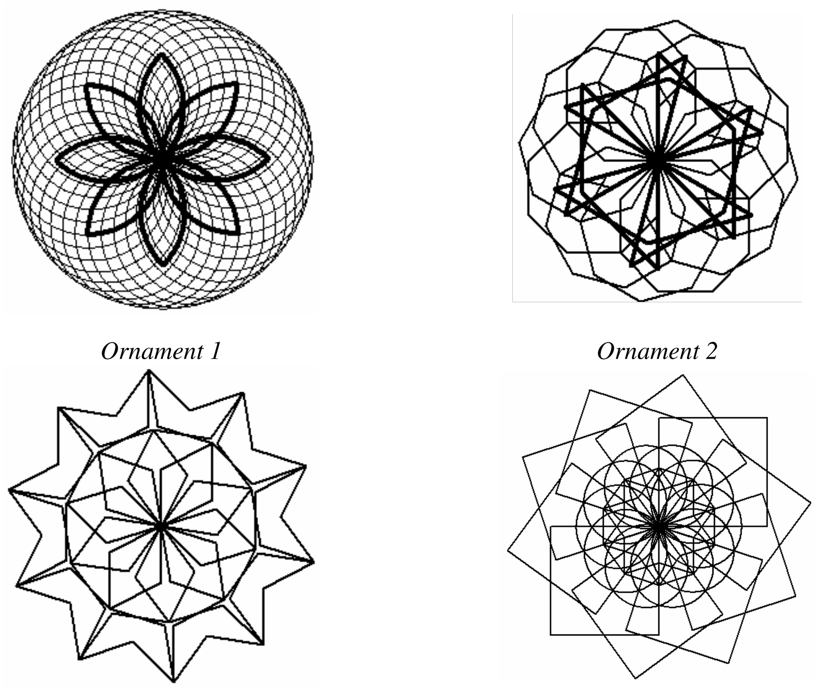
- správna interpretácia výsledkov počítačového zobrazenia a mnoho ďalších priamo aj nepriamo pôsobiacich prvkov vyplývajúcich z aplikácie matematiky v prostredí softvérových produktov.

15.2 Matematika, experiment a heuristika v „korytnačej geometrii“

Inšpiratívnou úlohou pre študentov učiteľstva prvého stupňa základnej školy môže byť návrh a naprogramovanie *„geometrického ornamentu“* (obr. 15.1) v detskom programovacom jazyku ComLogo. Riešenia úloh podobného typu kombinujú matematické a programátorské metódy, pričom sa pri ich implementácii do prostredia programovacieho jazyka a pri ich realizácii napĺňa väčšina vyššie uvedených cieľov.

Príklad

Navrhnite geometrický ornament, nájdite jeho matematický model a naprogramujte v programovacom prostredí ComLoga.

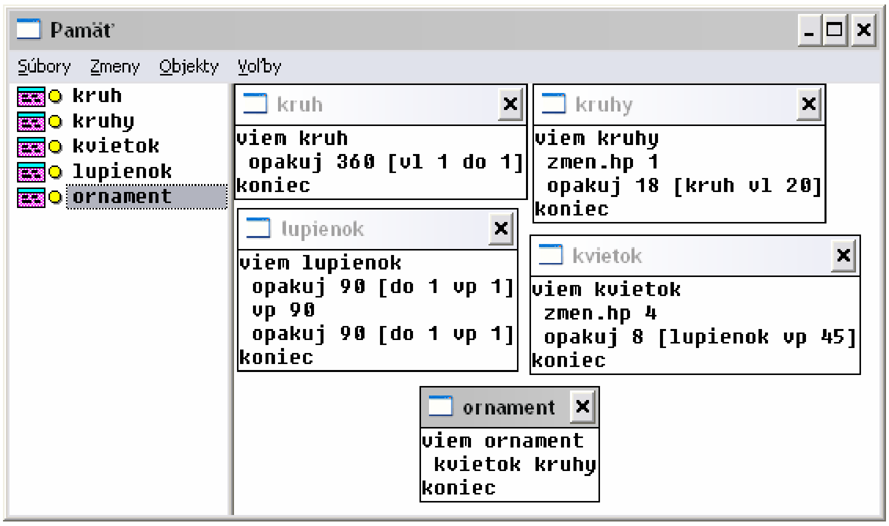


Ornament 1 *Ornament 2*

Ornament 3 *Ornament 4*

Obr. 15.1 *Študentské návrhy a realizácie ornamentov zložených z geometrických útvarov*

Ornament má byť zložený zo základných stavebných kameňov, ktorými sú pravidelné n-uholníky, kružnice, prípadne iné rovinné geometrické útvary. Najskôr je potrebné definovať v ComLogu *„vlastné príkazy“* na vykreslenie základných stavebných kameňov ornamentu. Stavebným kameňom ornamentu 1 je kružnica (o možnostiach jej naprogramovania píšeme v časti o znázorňovaní kružnice v informatickom prostredí ComLoga) a „lupienok“, ktorý je zložený z dvoch štvrťkružníc. Ornament 2 je zložený z pravidelných osemuholníkov a kosoštvorcov. Všetky obrazce vznikajú použitím elementárnych príkazov, pomocou ktorých sa pohybuje korytnačka po povrchu fiktívneho papiera a zanecháva za sebou čiaru. Pri vykresľovaní geometrických útvarov treba vypočítať veľkosti uhlov, o ktoré sa má korytnačka otočiť, aby bol znázornený pravidelný n-uholník, odhadnúť veľkosti strán, experimentovať s farbami a hrúbkami čiar, vypočítať rôzne parametre transformácií prvkov ornamentu, aby bol symetrický (symetrickosť nie je podmienkou). Popri týchto činnostiach získavajú študenti prehľad o jednoduchých i zložitejších programovacích technikách. Spoznávajú a využívajú rôznu škálu programovacích štruktúr, pričom pri tvorbe ornamentov si vystačia s *lineárno-sekvenčným programovaním* a *cyklickým programovaním*. Autentická ukážka programového kódu (obr. 15.2) študentky na vykreslenie ornamentu 1 naznačuje, že výsledný ornament vzniká ako skladačka, syntézou vopred naprogramovaných stavebných kameňov s názvami „kruh, kruhy, lupienok, kvietok, ornament“ a ich ďalšími transformáciami (väčšinou otočením). (Za zmienku stojí, nekorektnosť pomenovania príkazu študentkou na vykreslenie kružnice *kruhom* a systému kružníc kruhmi, čo nepochybne môže viesť k zmysluplnej diskusii o definícii kružnice a kruhu.)



Obr. 15.2 *Ukážka programového kódu na vykreslenie ornamentu 1*

Výslednú rozmanitosť ornamentov možno ovplyvniť experimentovaním s farbami a hrúbkou pera, s ktorými korytnačka kreslí. Uplatňovanie fantázie s vidinou dosiahnutia vytýčeného výsledku je *motivačným činiteľom* pre ďalšie zásahy do programového kódu a hľadanie čo najefektnejšieho ornamentu. Experimentovanie nastáva s počtom kružníc v systéme, čo si vyžaduje nájsť veľkosť uhla, o ktorý treba korytnačku otočiť, aby sa zachovala symetrickosť ornamentu. Nezanedbateľnou skutočnosťou je, že všetky tieto činnosti sa realizujú so znalosťou minimálneho počtu implementovaných príkazov v slovenskom jazyku. Dá sa vystačiť s príkazmi *dopredu, vľavo, vpravo, opakuj* a s jednoduchou základnou obsluhou prostredia Comenius Loga, prípadne novšieho (objektovo-orientovaného) Imagine.

Pri tvorbe elementárnych algoritmov nastáva uvedomovanie si základných vlastností, ktoré musí dobrý algoritmus mať, aby riešil celú triedu problémov rovnakého typu. Uplatňovanie *orientačno-analytických*, *strategicko-operačných* a tiež *synteticko-overovacích procesov* (K. Žilková, 2006, str. 301-305) je pri tvorbe algoritmov, ich implementácii a realizácii v konkrétnom programovacom prostredí, z hľadiska rozvoja matematických kompetencií prínosným prvkom.

15.3 Modelovanie kružnice v informatickom prostredí ComLoga

Grafické znázornenie kružnice v prostredí ComLoga sa nerealizuje aktivovaním už hotovej funkcie, ale treba naprogramovať postup jej vykreslenia. Táto skutočnosť umožňuje študentom sledovať a skúmať *vizuálnu reprezentáciu kružnice* z iného uhla pohľadu. Kružnica sa vykresľuje tým, že korytnačka, ktorú ovládame elementárnymi príkazmi (*dopredu, vľavo, vpravo*) „sa predchádza“ po *obvode kružnice* a zanecháva po sebe čiaru, t. j. nedefinujeme ju v jazyku ComLoga ako množinu všetkých bodov v rovine rovnako vzdialených od daného pevného bodu. Vykreslenie najlepšej a realite najkorektnejšej kružnice teda znamená, skúmať pravidelné mnohouholníky vpísané do kružnice. Obvod kružnice je limitou postupnosti obvodov takto vpísaných pravidelných n-uholníkov, pričom $n \to \infty$. Preto platí, že čím viac strán má pravidelný mnohouholník, tým viac sa javí ako kružnica. Práve toto je grafická interpretácia kružnice, ktorej implementácia v programovacom jazyku a jej realizácia spôsobí vykreslenie „objektu“ na obrazovku, ktorý považujeme za kružnicu.

Príklad

Navrhnite algoritmus na vykreslenie kružnice v programovacom jazyku ComLoga.

```
kruznica1
viem kruznica1
 opakuj 360 [do 1 vp 1]
koniec
```

Obr. 15.3 *Znázornenie kružnice ako 360-uholníka*

```
kruznica2
viem kruznica2
 opakuj 180 [do 2 vp 2]
koniec
```

Obr. 15.4 *Znázornenie kružnice ako 180-uholníka*

```
kruznica3
viem kruznica3
 opakuj 360 [do 3 vp 1]
koniec
```

Obr. 15.5 *Znázornenie kružnice s väčším polomerom ako 360-uholníka*

Algoritmus kružnica1 (obr. 15.3) interpretuje kružnicu ako 360-uholník, dĺžka strany je 1 jednotka (jeden „korytnačí krok“); algoritmus kružnica2 (obr. 15.4) zobrazuje kružnicu ako 180-uholník, v ktorom je dĺžka strany dve jednotky a uhol, o ktorý sa korytnačka otočí sú dva stupne. Oba algoritmy vykreslia na prvý pohľad identickú kružnicu. Algoritmus kružnica3 (obr. 15.5) je implementovaný ako 360-uholník (podobne ako kružnica1), ale dĺžka korytnačieho kroku je 3, čo zabezpečí znázornenie kružnice s väčším polomerom v porovnaní s predchádzajúcimi dvomi kružnicami.

Vo vyššie opísanej úvahe si uvedomujeme istú *nekorektnosť informatickej transpozície modelovania kružnice v programovacom jazyku*, avšak napriek neustálemu zdokonaľovaniu technických a zobrazovacích parametrov počítačov, znázorňovanie matematických objektov a ich vzťahov v počítačovom prostredí má vždy svoje limity. Je to však nová forma znázorňovania matematiky, ktorá môže užitočným spôsobom ovplyvniť nielen komunikáciu v matematike, ale prináša zo sebou uvedomovanie si základných matematických pojmov a vzťahov v iných významových súvislostiach, i keď niekedy za cenu zmanipulovania vedeckého poznatku (o kružnici). Táto disproporcia je determinovaná tromi stupňami, prostredníctvom ktorých je modelovanie informatickej transpozície realizované (F. Spagnolo, J. Čižmár, 2003, str. 127-144):

- vnútorné univerzum – tvorí ho algoritmus na vykreslenie kružnice v programovacom jazyku ComLoga (obr. 15.3 – 15.5),
- rozhranie – zobrazuje sa množina zobraziteľných bodov, pričom kvalita zobrazenia je limitovaná softvérom a hardvérom počítača,
- vonkajšie univerzum – výsledné zobrazenie kružnice, pri ktorom bude kružnica vnímaná ako kružnica vo všeobecnosti.

16

OSCILÁCIA MEDZI ABSTRAKCIOU A REALITOU

16.1 Symbióza algoritmických a heuristických stratégií

Skúmanie vplyvu informačných technológií na vedomosti a schopnosti žiakov 1. stupňa základnej školy je mimoriadne relevantnou požiadavkou doby a momentálne nevyčerpateľnou témou pre didaktikov matematiky, pretože vývoj počítačov a počítačových programových produktov v posledných desaťročiach poskytol nové možnosti pre štúdium poznávacích procesov žiakov takmer všetkých stupňov škôl.

V príspevku na načrtnutú tému napr. E. Partová konštatuje, že „efektívnosť informačných technológií vo vyučovaní spočíva v rozvíjaní abstraktného myslenia pomocou činností, ktoré tieto technológie predpokladajú: používanie symbolov, orientácia podľa návodu, práca podľa algoritmu, zapamätanie si algoritmu, triedenie pojmov podľa nadradenosti, hľadanie ciest“ (E. Partová, 2004). Uvedené činnosti patria k rozvoju *algoritmických stratégií* riešenia problémov, ktoré privedú žiaka od východiskového stavu k cieľovému. V príspevku je uvedená vlastná didaktická skúsenosť, ktorá vznikla pri výchove a v matematickom vzdelávaní mimoriadne nadaných žiakov. V procese výučby sa môžu účelne rozvíjať najmä tie *heuristické pravidlá*, ktoré stimulujú cieľavedomé myšlienkové postupy vedúce k riešeniu často veľmi náročnej úlohy. Nadpriemerne nadaným žiakom nestačí len mechanické používanie vytvorených programových produktov, ale prejavuje sa u nich vysoký stupeň aktivizácie a angažovanosti v možnosti vlastnej tvorby algoritmov, pričom prichádza k vzácnej symbióze využitia oboch hľadacích stratégií – jednak algoritmických, ale aj heuristických.

Detské programovacie jazyky môžu plniť úlohu nadštandardného, doplnkového prostriedku na rozvoj vyššej formy logického a abstraktného myslenia. Vo všeobecnej charakteristike programovacieho jazyka s názvom Baltík sa dozvieme, že ide o výučbový multimediálny programovací a kresliaci nástroj pre deti a mládež, v ktorom môžu žiaci vytvárať multimediálne prezentácie, výučbové programy a hry. Všetky príkazy sú namiesto textu zobrazené vo forme *grafických symbolov*, čím sa stal Baltík všeobecným medzinárodným programovacím jazykom. Uvedené atribúty detského programovacieho prostredia s názvom Baltík umožňujú v rámci projektu „Tvorivá informatika s Baltíkom“ organizovanie medzinárodných detských programátorských súťaží. Nasledujúca konkrétna ukážka riešenia čiastkového problému, ktorého sa zmocnila žiačka 4. ročníka základnej školy (zaradená do projektu alternatívnej starostlivosti o mimoriadne nadané deti), diskrétne rozoberá, *aký prínos môže mať programovanie v Baltíku pre rozvoj myslenia detí a aké fázy počas riešenia problému u nich* *prebiehajú*. Išlo o definovanie a riešenie ľubovoľnej projektovej úlohy, s cieľom zúčastniť sa medzinárodnej programátorskej súťaže s názvom „Baltík 2005“. Stredobodom záujmu riešiteľky sa stala spoločenská hra šach – mat. Svoj problém nazvala „Mat jedným ťahom“. Cieľom bolo simulovať rozloženie šachových figúrok na šachovnici do pozície, z ktorej hráč jednoznačne určí začiatočné a koncové súradnice pohybu figúrky, ktorá zavŕši šachovú partiu, t. j. dáva „MAT“.

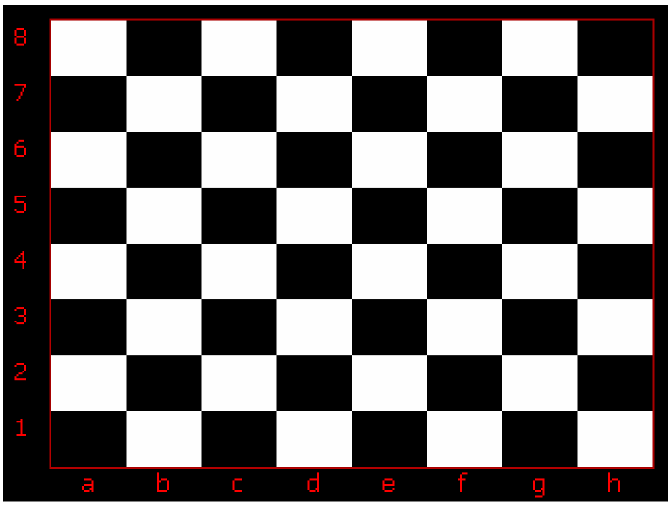
16.2 Etapy riešenia matematických problémov v prostredí programovacieho jazyka

Orientačno-analytická fáza

Uvedomenie si cieľa, ktorý chce riešiteľ dosiahnuť, je základnou požiadavkou na identifikáciu a definíciu problému. Analýza vstupných podmienok (počiatočných údajov), vytváranie si vnútorného modelu problému, špecifikácia čiastkových problémov (subproblémov) sú myšlienkové procesy orientačno-analytickej fázy (I. Ruisel, 2004, s. 86-97). Analýza problému spočíva tiež v *transformácii reálnej úlohy na matematický problém*. Stanovenie cieľa je komplexným problémom, na ktorého riešenie treba spolupôsobenie mnohých myšlienkových procesov a psychických aktivít.

Žiačka si sama stanovila svoj cieľ, ktorým bolo vytvoriť program na nájdenie správneho ťahu šachovej figúrky do matovej pozície. Z matematického hľadiska sa budeme zaujímať len o parciálnu časť daného cieľa. Počas riešenia úlohy sa dostavil čiastkový problém, ktorý sa dá zredukovať do nasledujúceho zadania:

Zisti, či šachové políčko, určené svojou pozíciou (napr. E5), má čierny, alebo biely podklad!



Čierne políčka:	Biele políčka:
a1: 8,1	b1: 8,2
c1: 8,3	d1: 8,4
e1: 8,5	f1: 8,6
g1: 8,7	h1: 8,8
b2: 7,2	a2: 7,1
d2: 7,4	c2: 7,3
f2: 7,6	e2: 7,5
h2: 7,8	g2: 7,7
a3: 6,1	b3: 6,2
c3: 6,3	d3: 6,4
e3: 6,5	f3: 6,6
g3: 6,7	h3: 6,8
5,2	5,1
5,4	5,3
5,6	5,5
5,8...	5,7...

Obr. 16.1 *Autentická ukážka šachovnice naprogramovanej a zobrazenej v programe Baltík*

Na prvý pohľad sa úloha javí jednoduchou. Žiačka vyhľadala na obrázku políčko so súradnicami E5 a vyhlásila, že políčko je čierne. Vzápätí sa však spýtala, ako to má povedať počítaču. Jej úvahy smerovali k tvrdeniam, že „každé druhé“ políčko je čierne a tie ostatné sú biele. Ako pomôcka jej bol poskytnutý návod, aby si zapísala do jedného stĺpca súradnice všetkých čiernych políčok a do druhého stĺpca súradnice všetkých bielych políčok.

Strategicko-operačná fáza

Po programátorských skúsenostiach, ktoré žiačka z iných aktivít mala, si hneď uvedomila, že by bolo lepšie a ľahšie, keby namiesto písmenkového označenia súradníc políčok (a, b, ..., h) boli použité čísla (1, 2, …, 8). V tomto momente bolo treba zistiť kľúč transformácie písmenného označenia na číselné. Keďže Baltík dokáže pracovať s reťazcovými premennými, uložením písmen (a, b, c, d, e, f, g, h) do reťazca a využitím funkcie, ktorá dokáže vyhľadať pozíciu podreťazca v reťazci je transformácia zabezpečená. Ďalší problém sa vynoril po uvedomení si disproporcie medzi vertikálnym číslovaním šachových políčok a skutočnými súradnicami políčok implementovanými v programe Baltík. Poloha každého objektu v Baltíkovi je explicitne určená internými súradnicami, ktoré sa vzťahujú na referenčný bod – ľavý horný roh objektu. Jeho súradnice sú obe nulové. V našom prípade má napríklad šachové políčko so súradnicami (A,8) „Baltíkove súradnice“ (1,1). V tomto okamžiku zasiahol prítomný dospelý, ktorému sa zdalo, že problém je pre riešiteľku príliš náročný. Ponúkol jej matematický návod na prepočet vertikálnych súradníc. Žiačka však jeho ponuku neakceptovala so slovami: „Načo by som to robila tak zložito!“ Okamžite predložila protinávrh takejto transformácie, a to obdobným spôsobom, ako riešila predchádzajúci problém. Definovala ďalšiu reťazcovú premennú, ktorá obsahovala všetky vertikálne súradnice zapísané v opačnom poradí (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1), a teda pri vyhľadávaní pozície podreťazca (napr. 8) v uvedenom reťazci získala skutočnú súradnicu (1) šachového políčka.

Obr. 16.2 *Symbol pre premennú, pre rozhodovanie („Ak”), pre zvyšok po celo číselnom delení (modulo)*

Obr. 16.3 *Spojenie symbolov do logickej štruktúry. (Ulož do premennej s názvom 26 zvyšok po celočíselnom delení dvomi súčtu horizontálnej a vertikálnej súradnice šachového políčka)*

Po vyriešení tohto podproblému a zápise čiernych a bielych políčok v tvare usporiadaných číselných dvojíc vyslovila tvrdenie, že každé čierne políčko má súradnicový súčet nepárny a biele políčko párny. Ďalší rozbor problému prebiehal nasledovne:

Otázka: „Ako zistíš, že číslo je párne, alebo nepárne?“

Odpoveď: „Párne sa dá deliť dvomi, a nepárne sa nedá.“

Otázka: „Čo to znamená, že nepárne sa nedá deliť dvomi?“

Odpoveď: „Keď ho budem deliť dvomi, zostane mi vždy zvyšok.“

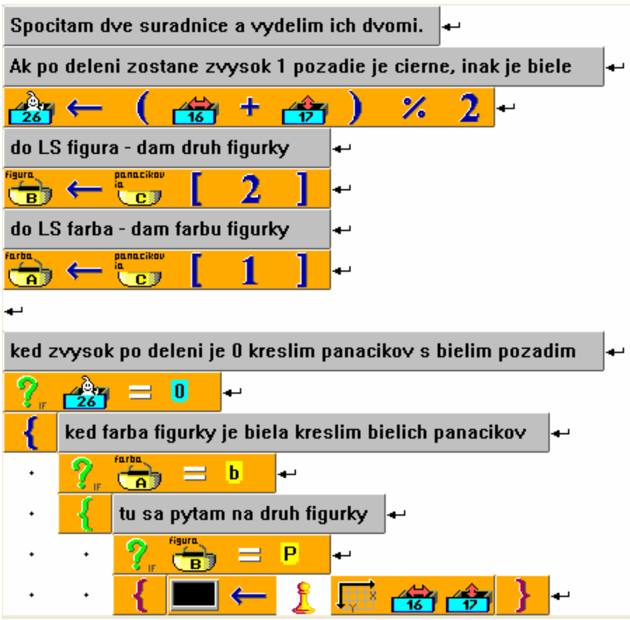
Otázka: „Aký zvyšok?“,

Odpoveď: „No, jednotka! Aha!!! Už viem, ako to urobím. Keď vydelím párne, zvyšok bude nula. To je jednoduché. Stačí mi sčítať tie súradnice, potom ich vydelím dvomi a zistím, aký je zvyšok. Podľa zvyšku zafarbím políčko."

V strategicko-operačnej fáze riešiteľ akumuluje poznatky o probléme, o pojmoch a operáciách. Na ich základe vytvára nové informácie označované ako alternatívy riešenia (Ruisel, 2004, s. 86-97). Tvorba a výber jednotlivých alternatív prebieha vo viacerých etapách, až kým sa nevytvorí konečný návrh riešenia. Keďže tento proces je výlučne heuristický, nie je zaručená správnosť konečného návrhu riešenia. Žiačka prešla cestou tvorby nových informácií, riešila čiastkové úlohy, a tiež v sprievode obrovskej radosti z objavu očarila náhlym odhalením nového smeru hľadania, t. j. vhľadom.

Synteticko-overovacia fáza

Overovanie vytvorených alternatív, ich hodnotenie podľa dostupných informácií, prijímanie, resp. ich odmietanie sú súčasťou synteticko-overovacej fázy. Dôležitým predpokladom úspešného zavŕšenia tejto etapy je uplatňovanie kritického a analytického myslenia. V našom prípade sú jednotlivé črty synteticko-overovacej fázy badateľné už v predchádzajúcom hľadaní alternatív riešenia subproblémov o transformácii súradníc a deliteľnosti. Úspešným riešením problému našej žiačky je však kompletná implementácia objaveného matematického riešenia v jazyku Baltíka a následné overenie správnosti riešenia. Z tohto pohľadu je záverečnou etapou informatická transpozícia.



Obr. 16.4 *Časť programu vykresľujúca bieleho pešiaka na bielom pozadí na políčko so súradnicami, ktoré sú uložené v „šuplíkoch" (premenných) s číslami 16 a 17 (žiacka ukážka je autentická, bez jazykovej korekcie poznámok)*

Fáza náhrady slovného jazykového vyjadrenia, resp. jeho prepis do programovacieho jazyka je samostatným problémom, ktorého postup riešenia znovu zodpovedá všetkým trom vyššie kategorizovaným fázam. Prvý krok spočíva v rozklade slovného riešenia problému na elementárne časti a ich priraďovanie symbolom Baltíka (obr. 16.2). V rámci jazykového vyjadrenia možno hovoriť o metóde poznania, alebo *selekcie slov* (I. Ruisel, 2004, s. 391). Spájanie (skladanie) symbolov do logických štruktúr zodpovedá *generovaniu vetnej štruktúry*, čo v jazyku programátorov znamená tvorbu štrukturovaných logických viet (obr. 16.3). Vety musia spĺňať gramatické pravidlá programovacieho jazyka, dodržiavať predpísanú syntax a sémantiku jazyka. Vety, ktoré riešia subproblémy sa zvyknú organizovať, vzhľadom na efektívnosť a prehľadnosť, do vyšších celkov – podprogramov (procedúr a funkcií). Na úrovni podprogramov je veľmi častá práca s formálnymi a skutočnými parametrami, s globálnymi a lokálnymi premennými. Všetky uvedené požiadavky na zápis programu musí mať riešiteľ problému na pamäti, pričom sa neustále vracia k pôvodnému cieľu. Náročnosť spočíva v neustálej *oscilácii medzi modelovacími prvkami informatickej transpozície*, t. j. medzi vnútorným a vonkajším univerzom (F. Spagnolo, J. Čižmár, 2003).

Nakoniec naša žiačka vyriešila informatickú transpozíciu svojho objavu (časť zisťujúca zvyšok po delení dvomi na obr. 16.3), ale to bola len malá čiastočka celkovej „skladačky“ riešeného problému. Položiť šachovú figúrku na políčko šachovnice znamená, zistiť o aký druh figúrky ide (pešiak, jazdec, veža, ...), akú má figúrka farbu (biela, čierna), na akú pozíciu ju chceme položiť (súradnice) a akú farbu má cieľové políčko. Všetky tieto atribúty treba exaktne určiť a až nakoniec sa uvedená figúrka môže na políčko vykresliť. Obrázok 16.4 ilustruje zložitosť vykreslenia bieleho pešiaka na bielom pozadí.

Výsledný žiačkin produkt je zavŕšením trojročného absolvovania nepovinného krúžku programovania v Baltíku, ktorý bol zaradený do projektu vzdelávania mimoriadne nadaných detí. Skúsenosti ukazujú, že možno súhlasiť s tvrdením: „Zaradenie symbolov rozvíja abstraktné myslenie detí, záleží len na vhodnej postupnosti v náročnosti“ (E. Partová, 2004). Pod „*vhodnou postupnosťou v náročnosti*“ rozumieme individuálne zváženie kompetencií žiaka, ktorými disponuje, v čo najširšom zmysle slova.

Matematický background – dôležitý predpoklad programovacej nadstavby

Len prostredie bohaté na podnety rôzneho druhu t. j. inšpiratívne prostredie, podnecuje rozvoj tvorivého myslenia. Vysoká úroveň tvorivosti je nutným predpokladom pre úspešné riešenia komplexných problémov. Tvorba algoritmov v detských programovacích jazykoch patrí k zložitejším problémom, pri ktorých sa aktivizuje mnoho myšlienkových procesov, spájajú sa heuristické a algoritmické techniky riešenia. Je to oblasť aplikácie získaného *matematického základu* v novom prostredí, v prostredí symbolov, v prostredí nového štruktúrovaného jazyka, v prostredí modernom, príťažlivom pre detského užívateľa. *Symbióza matematických, programovacích a tvorivostných techník* je prínosná pre rozvoj logického, abstraktného, kritického a tvorivého myslenia.

17

VYUŽITIE REKURZÍVNYCH TECHNÍK V RIEŠENÍ REKURENTNÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

Rekurentné predpisy v matematike sú založené na princípe určovania neznámej veličiny pomocou predchádzajúcich známych veličín a prostredníctvom pevne stanoveného pravidla. V učebnici pre gymnázium (J. Smida, 1988, s. 10) je pôvod slova definovaný z lat. „recurrere" – bežať späť. V Slovníku cudzích slov sa uvádza pojem rekurentný v zmysle „opakovaný, opakujúci sa, vracajúci sa, periodický", a pre oblasť matematiky je *rekurentný vzorec* definovaný ako „vyjadrujúci nasledujúci člen postupnosti vždy tým istým spôsobom pomocou niekoľkých predchádzajúcich členov". Používanie rekurentných predpisov patrí k silným nástrojom v matematických definíciách, pretože umožňujú *definovať nekonečnú množinu prvkov konečným zápisom*.

V algoritmizácii a v programovaní hovoríme, že „objekt je *rekurzívny*, ak sa čiastočne skladá, alebo je definovaný pomocou seba samého" (N. Wirth, 1975). Znamená to, že algoritmus je rekurzívny, ak obsahuje príkaz, ktorý ho opätovne aktivuje priamym alebo nepriamym volaním. Program (resp. podprogram) je *priamo rekurzívny*, ak je aktivačné volanie zabezpečené odkazom priamo na jeho názov. O *nepriamej rekurzii* podprogramu P hovoríme vtedy, ak je aktivácia samého seba zabezpečená volaním iného podprogramu, v ktorom je odkaz na pôvodný podprogram P. V informatike patrí rekurzia k dôležitým oblastiam práce s informáciami a zaraďuje sa k náročnejším programovacím technikám, pretože si vyžaduje vysokú mieru abstrakcie.

V učive matematiky sa žiaci môžu stretnúť s rekurentnosťou už na prvom stupni základnej školy prostredníctvom narábania s prirodzenými číslami a skúmaním vzťahov medzi nimi.

Úloha (3. ročník ZŠ):

Povedz a napíš čísla, ktoré nasledujú:

- 10, 20, 30, ...
- 95, 85, 75,...
- 16, 18, 20, 22, ...
- 5, 1, 7, 1, 9, 1, 11, ...

Exaktnejšie rekurentné predpisy sa nachádzajú v matematickom učive vyšších ročníkov, napríklad pri definícii prirodzených čísel pomocou nasledovníka, pri úpravách výrazov obsahujúcich faktoriál, pri určovaní rekurentného predpisu postupnosti, pri výpočte binomických koeficientov, pri prehľadávaní množiny riešení v kombinatorických úlohách, a pod. Väčšinu úloh riešia žiaci bez uvedomenia si skutočnosti, že ide o rekurentné predpisy, snáď len s výnimkou témy o postupnostiach, kde sa definuje termín rekurentnosti a uvádza sa priamo v zadaniach úloh, napríklad:

- Nájdite prvých päť členov (rekurentnej) postupnosti, v ktorej $a_1=10$, $a_{n+1}=3a_n-1$.
- Nájdite vzorec, ktorým vyjadríte n-tý člen postupnosti danej rekurentne takto: $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n$.
- Nájdite rekurentné určenie postupnosti $\{n(n+1)\}^{\infty}_{n=1}$.

17.1 Ukážky interpretácií rekurentného matematického predpisu v rekurzívnych algoritmických zápisoch

Výpočet čísla n! sa môže realizovať inkrementačnou (prírastkovou), alebo dekrementačnou (úbytkovou) metódou (pozri tab. 8.1 v kapitole „Komunikačné rozhranie v procese tvorby počítačového modelu matematického problému“). Z principiálneho hľadiska výber jednej z uvedených metód nemá zásadný vplyv na tvorbu algoritmu a jeho implementáciu do programovacieho prostredia. Z hľadiska informatickej metodológie je však dôležitý výber technologického prístupu, t. j. či daný problém bude riešený iteračnou metódou, alebo rekurzívnou metódou. Výber metódy závisí od riešeného problému a zhodnotení pamäťovej a časovej náročnosti.

Pri tvorbe hromadného algoritmu, resp. programu, na výpočet faktoriálu, je nutné uvedomenie si neustále *sa opakujúceho* násobenia prirodzeného čísla *n* a faktoriálu čísla o jednotku menšieho, až kým nie je pôvodné číslo dekrementované na jednotku. Tento postup môžeme zhrnúť do nasledujúceho matematicko-algoritmického predpisu, ktorý je ľahko implementovateľný v programovacích prostrediach (*Imagine, Pascal*):

$$n! = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{ak } n = 0, \text{alebo } n = 1 \\ n\,(n-1)!, & \text{pre } n > 1 \end{array} \right\}$$

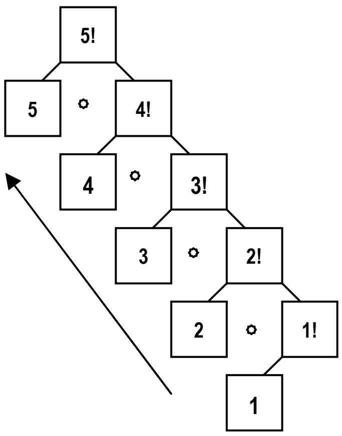
Zápis algoritmu na výpočet faktoriálu v programovacom jazyku Imagine:

```
viem faktorial :n
 ak2 alebo (:n=0) (:n=1)
   [vysledok 1]
   [vysledok :n*faktorial (:n-1)]
koniec
```

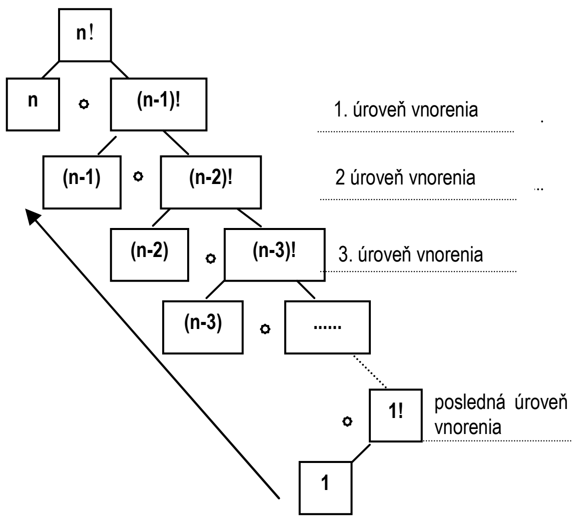
Zápis algoritmu na výpočet faktoriálu v programovacom jazyku Pascal:

```
Program n_faktorial;
var k:integer;
Function fakt(n:integer):integer;
begin
 if ra(n=0) or (n=1)
          then fakt:=1
          else fakt:=n*fakt(n-1);
end;
begin
 read(k);
 write(fakt(k));
end.
```

V obidvoch programoch je aplikovaná rekurzívna metóda využitím *časti vlastnej vnútornej štruktúry*, opakovaním priameho volania. Odkaz v programe na svoj vlastný názov zabezpečuje postupné vnáranie sa do nižších (hlbších) úrovní (obr. 17.1, obr. 17.2). Pre počítač, alebo pre akýkoľvek iný počítací stroj, je dôležité pamätať si všetky stavy, z ktorých sa algoritmus vnára až do najnižšej úrovne. Aby bola zaručená konečnosť vnárania rekurzívnych volaní, musí byť v každej rekurzívnej definícii, pri splnení stanovených podmienok, explicitne určená koncová hodnota. V našom prípade limit pre posledné vnorenie je číslo 1! (resp. 0!), pre ktoré je definovaná hodnota 1. Po nadobudnutí tejto hodnoty začne program aktivovať proces „vynárania“ sa (návratu) z rekurzívnych volaní.



Obr. 17.1 Grafické znázornenie algoritmu výpočtu čísla 5!



Obr. 17.2 Grafické znázornenie algoritmu výpočtu čísla n!

Informatickou transpozíciou (F. Spagnolo, J. Čižmár, 2003, s. 137), t. j. objasnením prechodov medzi programovacími jazykmi a matematickými objektmi, sa môže realizovať implementácia algoritmov do programovacieho prostredia na výpočet členov Fibonacciho postupnosti (prípadne ľubovoľného člena aritmetickej, či geometrickej postupnosti), výpočet členov n-tej mocniny čísla x, Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel, rekurzívny algoritmus výpočtu kombinačného čísla a pod.

Rekurentný predpis generovania Fibonacciho čísel:

$$\mathrm{FIB}(n)=\begin{cases} 0, \text{ ak } n = 0 \\ 1, \text{ ak } n = 1 \\ \mathrm{FIB}(n-1)+\mathrm{FIB}(n-2), \text{ ak } n > 1 \end{cases}$$

Rekurentný predpis na výpočet n-tej mocniny prirodzeného čísla x:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{ak } n > 0 \end{cases}$$

Rekurentný predpis výpočtu najväčšieho spoločného deliteľa(Euklidov algoritmus):

$$NSD(a,b) = \begin{cases} a, \text{ ak } a=b \\ NSD\ (a-b,\ b), \text{ ak } a>b \\ NSD\ (a,\ b-a), \text{ ak } b>a \end{cases}$$

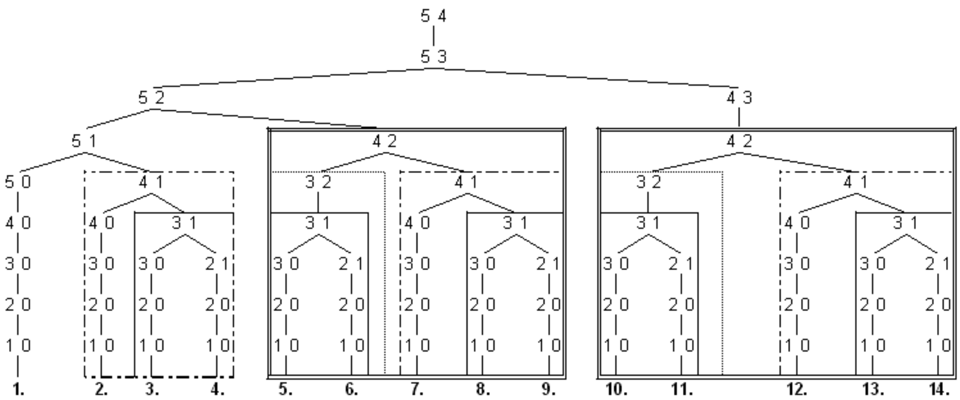
Rekurentný predpis na výpočet kombinačného čísla:

$$KOMB(n,k) = \begin{cases} 1, \text{ ak } n = k \text{ , alebo } k = 0 \\ KOMB(n-1,\ k) + KOMB(n-1,\ k-1) \end{cases}$$

Všetky uvedené algoritmy sa však dajú riešiť aj bez použitia rekurzie, „len“ pomocou iteračných metód (použitím rôznych druhov cyklov). Pri počítaní s malými číslami sú dokonca rekurzívne algoritmy, čo sa týka pamäťovej náročnosti, neefektívne. Na grafickom znázornení (obr. 17.3) nasledujúcej úlohy na zistenie počtu spôsobov vývoja futbalového zápasu je vyznačená neefektivita opakovania rekurzívnych volaní.

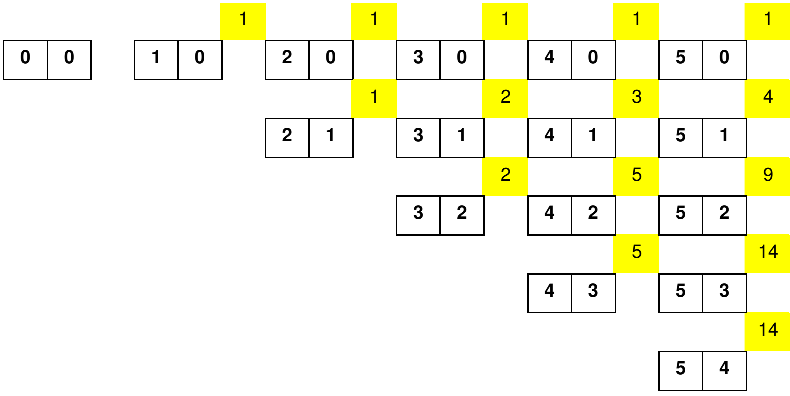
Úloha (Matematický klokan 2006, kategória K-S)**:**

Futbalový zápas sa skončil výsledkom 5:4 pre domáci tím. Vieme, že prvý gól dal domáci tím a počas celého zápasu viedol. Koľkými rôznymi spôsobmi sa mohlo vyvíjať skóre zápasu?



Obr. 17.3 *Grafické znázornenie úlohy o futbalovom zápase*

Elegantné znázornenie vývoja futbalového zápasu (obr. 17.4) s vyznačeným počtom ciest k jednotlivým priebežným stavom priebehu zápasu tiež v sebe zahŕňa rekurentný vzorec. Problém bol transformovaný na *grafový* a na zistenie počtu ciest je použitá technika gradovania (M. Hejný a kol., 1990, s. 476). K možným priebežným stavom zápasu sú pripísané hodnoty zodpovedajúce počtu možností, ako sa dá získať daný výsledok futbalového zápasu.



Obr. 17.4 *Zisťovanie počtu možností vývoja futbalového zápasu*

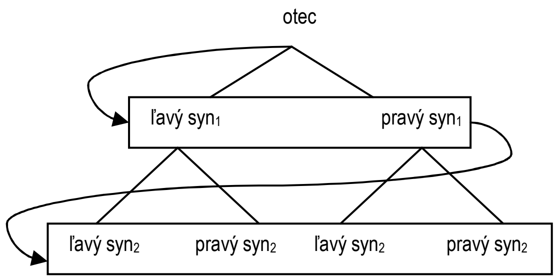
Bez ohľadu na pamäťovú, prípadne časovú náročnosť, napomáha cieľavedomá tvorba jednoduchých rekurzívnych algoritmov pri rozvoji myšlienkových procesov využívajúcich rozličné konceptuálne oblasti. Použitie konkrétneho programovacieho prostredia na vytvorenie jednoduchej aplikácie využívajúcej rekurzívnu techniku sa môže, z didakticko-psychologického pohľadu spolupodieľať na rozvoji divergentného a abstraktného myslenia. Pozornosť upriamime na zvládnutie základného princípu fungovania rekurzívnych algoritmov, pretože *rekurzívne techniky využívajú hľadanie v „priestore všetkých možností riešenia“ matematického problému.*

17.2 Metódy prehľadávania priestoru riešenia matematického problému v počítačovom prostredí

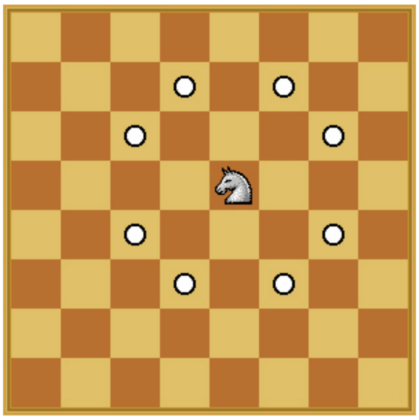
Prehľadávanie priestoru riešenia matematického problému môže v zásade prebiehať dvomi základnými stratégiami: prehľadávaním do šírky a prehľadávaním do hĺbky.

- **Prehľadávanie do šírky**
  Hľadanie riešenia problému, ktorý sa dá interpretovať binárne, začína „kmeňom“ stromu, ktorý nazveme „otec“. Otec má dvoch synov, ľavého a pravého. Po kontrole, či ľavý syn, alebo pravý syn nie sú riešením nášho problému, sa obaja stávajú otcami pre ďalšiu generáciu a prehľadávanie pokračuje súčasne pre oboch v horizontálnej rovine danej úrovne vnorenia (obr. 17.5). Obaja môžu mať opäť aj ľavého, aj pravého syna. Analogicky pokračujeme ďalej v prehľadávaní celej generácie, pokým buď nenájdeme hľadané riešenie (riešením môže byť aj prehľadanie celého

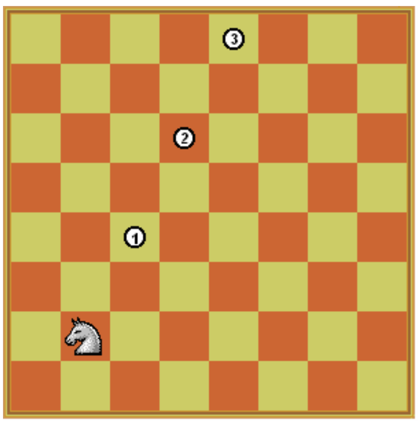
stromu), alebo kým nenarazíme na explicitne určenú podmienku (podmienkou môže byť stanovená úroveň vnárania, prípadne test na existenciu syna a pod.), ktorá zaručí ukončenie hľadania. Názorným príkladom je vyhľadávanie súradníc políčok na šachovnici, ktoré môže obsadzovať šachová figúrka jazdec. Pri hľadaní metódou do šírky najskôr označíme všetky tie políčka, ktoré sa nachádzajú v bezprostrednom okolí východiskovej pozície jazdca a spĺňajú kritérium skoku jazdca (obr. 17.6). Ďalší krok je založený na princípe, že z každej takto označenej pozície znovu označujeme všetky tie políčka, na ktoré by jazdec eventuálne mohol skočiť.



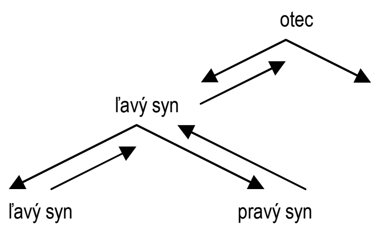
Obr. 17.5 Grafické znázornenie prehľadávania do šírky



Obr. 17.6 Ukážka zisťovania šachových pozícií jazdca metódou prehľadávania do šírky



Obr. 17.7 Grafické znázornenie prehľadávania do hĺbky



Obr. 17.8 Ukážka vyhľadávania šachových pozícií jazdca metódou prehľadávania do hĺbky

- **Prehľadávanie do hĺbky**
  Podobne, ako v predchádzajúcom postupe, začína prehľadávanie od „otca“ celej generácie. Hľadanie riešenia pokračuje po „ceste ľavých synov“. Kým má otec

ľavého syna, posúvame sa o generáciu nižšie. Ľavý syn sa stáva otcom a opäť hľadáme jeho ľavého syna (obr. 17.8). Prehľadávanie do najnižšej úrovne vo vertikálnom smere bude ukončené v prípade, ak nájdeme riešenie, alebo ak otec už nemá ľavého syna. Pokiaľ otec už nemá ľavého syna, vynoríme sa o úroveň vyššie a vyšetríme pravého syna. Ten môže byť tiež otcom, a preto prehľadávanie pokračuje rovnako. V najhoršom prípade algoritmus končí prehľadaním celého stromu všetkých možností riešenia. Na príklade pohybu jazdca po šachovnici by prehľadávanie do hĺbky prebiehalo najskôr jedným vybraným smerom (obr. 17.7), a až keď sa vyčerpajú všetky možnosti, jazdec sa vráti o jednu úroveň späť a vyberie si iný smer. Aj ten prehľadá podľa stanoveného pravidla až do konca. Takto sa pokračuje ďalej, až kým sa nevystriedajú všetky smery.

Uvedený postup rekurzívneho prehľadávania priestoru všetkých možností naznačuje nutnosť rozvoja divergentného myslenia. Pri zložitých problémoch môže prísť ku *kombinačnej explózii* v počte riešení. Aj z tohto dôvodu je nutné rekurzívne problémy zaradiť k zložitejším úlohám na jednotlivých stupňoch škôl. Aj na prvom stupni základnej školy sa môžeme s úlohami tohto typu stretnúť. V šk. roku 2005/2006 sa v korešpondenčnej súťaži Minimix určenej pre 1. stupeň ZŠ objavila úloha s nasledujúcim zadaním:

Úloha:

„Dosaďte za písmená číslice tak, aby platil naznačený súčet. Za rôzne písmená dosaďte rôzne číslice, za rovnaké písmená rovnaké číslice.“

			M
		M	I
	M	I	R
M	I	R	O
4	3	2	1

Akými znalosťami a kompetenciami musí žiak manipulovať, aby vedel riešiť úlohu podobného typu? Úloha je zameraná na manipuláciu s prirodzenými číslami, na znalosť operácie sčítania a jej vlastností, na prácu so symbolmi, na hľadanie relácie medzi písmenami a číslicami, a v neposlednom rade na prehľadávanie priestoru všetkých kombinačných možností správneho priradenia.

Napriek náročnosti rekurzívnej techniky, je dôležité, aby sa žiaci na jednotlivých stupňoch škôl stretávali na rôznych úrovniach a v rôznych tematických celkoch s úlohami, ktoré možno riešiť využitím myšlienky rekurzie. Spomínané úlohy sú zvyčajne riešiteľné aj inými metódami, ktoré sa líšia predovšetkým **organizačným princípom**. Medzi sebou sú princípy transformovateľné do inej podoby, napr. iným grafickým znázornením, alebo reorganizáciou vstupných údajov a pod.

17.3 Grafické znázorňovanie rekurzívneho vnárania

Vizualizáciu jednotlivých vnorení rekurzie a možnosť sledovania postupu vnárania umožňuje detský programovací jazyk Imagine (pokračovateľ produktu Commenius Logo). Na ilustráciu je uvedený rekurzívny algoritmus na vykreslenie stromu, ktorého každý konár vyzerá opäť ako strom, pričom je o polovicu menší a otočený o 45 (resp. -45) stupňov:

```
viem strom :dlzka :poschodie
  ak :poschodie>0 [do :dlzka
  vp 45
  strom :dlzka/2 :poschodie-1
  vl 90
  strom :dlzka/2 :poschodie-1
  vp 45
  vz :dlzka]
koniec
```

Veľa algoritmov tohto typu môže záujemca nájsť v oblasti rozvíjajúcej sa teórie grafov. Sú to úlohy zamerané na hľadanie cesty v stromoch, riešenie labyrintov, pohyb šachových figúrok po šachovnici, hľadanie víťaznej stratégie v teórii hier a podobne (O. Židek, 1997). Ďalšia ukážka krátkeho rekurzívneho algoritmu implementovaného do prostredia Imagine je generovanie fraktálovej krivky, ktorá vzniká z úsečky s danou dĺžkou:

```
viem vlocka :dlzka :uroven
 ak2 :uroven>0 [
   vlocka :dlzka/3 :uroven-1
   vl 60
   vlocka :dlzka/3 :uroven-1
   vp 120
   vlocka :dlzka/3 :uroven-1
   vl 60
   vlocka :dlzka/3 :uroven-1]
  [do :dlzka]
Koniec
```

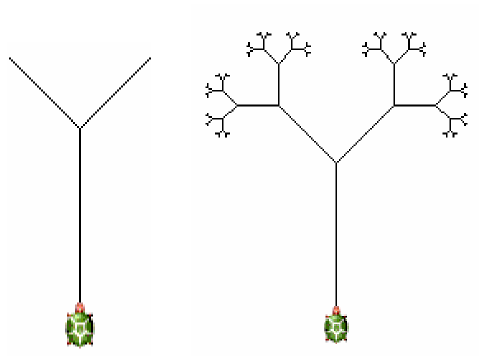
S fraktálmi sa stretávame hlavne vďaka rozvoju počítačov, počítačovej grafiky a v neposlednom rade schopnosti *matematického popisu reality pomocou rekurentných vzorcov*.

Množstvo kombinatorických úloh a problémov z teórie pravdepodobnosti si vyžaduje rekurzívny prístup. Grafické znázornenie geometrickej interpretácie nekonečného pravdepodobnostného priestoru, ktorý je modelom úlohy o hode mincou, je tiež reprezentáciou grafického znázornenia rekurzívneho vnárania (obr. 17.11).

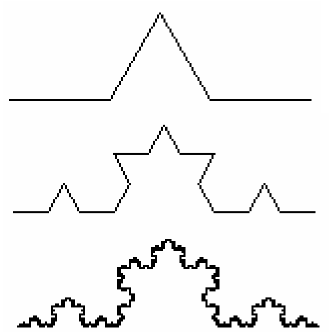
Zvládnutie jednoduchých rekurentných úloh na bazálnej úrovni, t. j. na úrovni najelementárnejších krokov, je nutným predpokladom pre *rekurentné grafické organizovanie jednotlivých pojmov a vlastností*, znázornenie väčšieho celku a neposlednom rade znázornenie vzťahov. Výsledný graf zobrazuje len tri typy vzťahov (obr. 17.1, 17.2, 17.3, 17.5, 17.8, 17.11):

- nadradenosť,
- podradenosť a
- rovnosť úrovne.

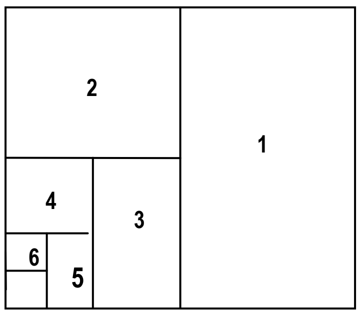
Pri zložitejšej úlohe je vhodnejšie vytvoriť niekoľko schém, resp. grafov, riešiacich čiastkové problémy, a potom rozhodnúť o *vzťahoch medzi nimi*. Táto metóda sa používa nielen v matematike, ale aj v oblasti školskej psychológie o štruktúrovaní učiva. Uvedený postup patrí k novším prístupom k štruktúrovaniu a organizovaniu učiva. Zaraďuje sa k *nelineárne abstraktnej reprezentácii štruktúry učiva*.



Obr. 17.9 *Ukážka výsledného počítačového znázornenia, pričom realizácia (spustenie) programu sa zabezpečila príkazmi:* **strom 100 2**, **strom 100 7**.



Obr. 17.10 *Ukážka výsledného počítačového znázornenia, pričom realizácia programu sa zabezpečila príkazmi:* **? vlocka 150 1**, **? vlocka 150 2** , **? vlocka 150 7**.



Obr. 17.11 *Grafické znázornenie geometrickej interpretácie nekonečného pravdepodobnostného priestoru, ktorý je tiež reprezentáciou grafického znázornenia rekurzívneho vnárania Dvaja hráči hádžu mincou. Ak pri hode padne rub, hra končí. Ak padne líc, pokračuje druhý hráč. Postup sa opakuje, kým nepadne rub.*

Rekurentnosť, rekurzívnosť a ich interakcia

Riešenia matematických úloh, ktoré možno vyjadriť *rekurentným vzorcom* sa vyznačujú rozmanitosťou výberu stratégií. *Rekurzívne postupy* nie sú jedinou možnou technikou ich riešenia, ale významnou mierou obohacujú metodológiu v mnohých oblastiach matematiky. Všetky aktivity súvisiace s využívaním rekurzívnych postupov pri riešení matematických úloh prispievajú v rámci didaktického procesu a rozvoja rôznych myšlienkových postupov k tvorivosti nielen zo strany žiaka, ale aj učiteľa. Schopnosť reagovať na riešenie matematickej úlohy a jej modifikácií z rôznych uhlov pohľadu (skúmanie rôznych matematických modelov) je dôležitou súčasťou rozvoja abstraktného myslenia. Rekurzívna technika zabezpečuje nachádzanie riešení v rôznych smeroch, logických alternáciách, čím sa zaraďuje k metódam podporujúcich rozvoj divergentných operácií (fluencie, flexibility, originality, redefinície, elaborácie a senzitivity). *V prostredí počítačov využívanie rekurzie nadobúda ďalšiu dimenziu, užitočnú* nielen *v oblastiach riešenia aplikačných úloh*, ale aj v schopnosti zvládnuť jednoznačný algoritmický popis (step by step) metodického postupu riešenia matematickej úlohy.

Záver

Vyučovanie matematiky, v závislosti od vývojových zmien spoločnosti, podlieha v jednotlivých historických etapách istým modernizačným trendom a reformám. Aktuálne, v období vzniku publikácie „Školská matematika v prostredí IKT“, sa uviedla do praxe školská reforma, ktorá (okrem iného) upravuje ciele výchovy a vzdelávania, stupne vzdelania, predkladá obsahové a organizačné zmeny. Zo štátneho vzdelávacieho programu[15] vyberáme:

- *Matematika* rozvíja u žiakov matematické myslenie, ktoré je potrebné pri riešení rôznych problémov v každodenných situáciách, keď sa musia používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).
- *Vyučovanie matematiky* musí byť vedené snahou umožniť študentom, aby získavali nové vedomosti prostredníctvom riešenia úloh s rôznorodým kontextom, tvorili jednoduché hypotézy a skúmali ich pravdivosť, vedeli používať rôzne spôsoby reprezentácie matematického obsahu (text, tabuľky, grafy, diagramy), rozvíjali svoju schopnosť orientácie v rovine a priestore. Má napomôcť rozvoju ich algoritmického myslenia, schopnosti pracovať s návodmi a tvoriť ich.
- *Výsledkom vyučovania matematiky* má byť správne používanie matematickej terminológie a symboliky a matematizácia reálnej situácie tvorbou matematických modelov.

Predložená publikácia si kládla za cieľ poskytnúť teoretické východiská a praktické ukážky realizácie matematického vzdelávania v prostredí informačných a komunikačných technológií. Téma zahŕňa oblasti integrácie nových vyučovacích metód, organizačných foriem, didaktických postupov a mapuje dopad na vyučovací proces a jeho zúčastnených aktérov. K najviac akcentovaným charakteristikám ovplyvňujúcim matematické vzdelávanie v prostredí IKT, ktoré považujeme z odborno-didaktického hľadiska za najdôležitejšie, patria:

- **Vizualizácia a znázorňovanie.** V práci prezentujeme statické aj dynamické formy znázorňovania v matematike v rôznych polohách a prostrediach. Predkladáme jednoduché návody na ich tvorbu s odporúčaním vhodných (dostupných) programových prostredí. Pozornosť sa venuje dôležitosti korektnej interpretácie obrazových materiálov a zavedeniu dynamických aktivít do vyučovania matematiky.

[15] http://www.statpedu.sk/buxus/docs//kurikularna_transformacia/isced3a_jun30.pdf

- **Interaktivita a dynamika.** Do interakcie žiakov a učiteľa vstupuje prostredie informačných a komunikačných technológií zásadným spôsobom nielen z hľadiska využívania hotových interaktívnych programových produktov, ale najmä z pohľadu možnosti práce vo virtuálnych interaktívnych a dynamických prostrediach, v ktorých sa zmeny uskutočňujú na základe vonkajších podnetov.
- **Tvorba a využívanie modelov, simulácia procesov.** Prostriedky informačných a komunikačných technológií poskytujú rôznorodé prostredia, v ktorých možno vytvoriť konkrétny matematický model (numerický, grafický) simulujúci reálny proces. Jednoduchšie modely môže pripraviť aj učiteľ matematiky zväčša v softvérových aplikáciách s matematicko – grafickým obsahom. Existuje však aj množstvo hotových (multimediálnych) produktov, ktoré možno s úspechom aplikovať vo vyučovaní matematiky.

Všetky vyššie uvedené atribúty sú v jednotlivých kapitolách konkretizované a upresňované. Čo sa týka pracovných vzdelávacích metód a postupov realizovaných v prostredí IKT, okrem tradičných, treba zvlášť spomenúť:

- **Experiment, tvorba hypotéz a ich overovanie.** Zvláštne postavenie získava experiment, ako metóda, najmä v softvérových interaktívnych laboratóriách, kde každá vonkajšia požiadavka užívateľa (zvyčajne zmena niektorých vstupných parametrov) je odmenená okamžitou reakciou. Na základe niekoľkých takýchto zmien možno formulovať hypotézy a pristúpiť k ich dokazovaniu. Na verifikáciu hypotéz možno použiť opäť prostriedky IKT, ale aj tradičné dôkazové postupy, prípadne ich vhodnú kombináciu.
- **Internetové (konštrukčné) zadania.** Vytváranie a využívanie webových zadaní je vhodné nielen na kontrolu a diagnostikovanie žiakov, ale prináša aj ďalšie pozitíva. K najdôležitejším z nich patria samostatnosť v riešení, možnosť beztrestnej korekcie riešiteľského postupu, spätná väzba, individualizácia úloh a tempa, netradičné prostredie a nezvyčajná symbolika.
- **Virtuálna manipulácia.** Pod pojmom manipulácie rozumieme multisenzorické nástroje napomáhajúce učeniu žiakov, pri ktorých sa okrem zraku používa v matematike aj hmat. Funkciu „poznávacích rúk“ v prostredí IKT môže alternovať počítačová myš (a tiež softvérové nástroje), pomocou ktorej v niektorých programoch dokážeme manipulovať s objektmi tak, ako keby sme ich držali v rukách. Tento spôsob poznávania sme nazvali všeobecne metódou virtuálnej manipulácie, konkrétnejšie pre manipuláciu s telesami a trojrozmernými objektmi – metóda priestorovej virtuálnej manipulácie.
- **Zdieľanie súborov.** Jedným zo stanovených cieľov matematického vzdelávania je aj výchova k spôsobilosti kooperácie a práce v tímoch. Jednou z metód, ktorými vytýčený cieľ možno dosahovať je metóda zdieľania súborov rôzneho typu po sieti. Záleží len na vhodnom výbere technologických prostriedkov, ktoré uvedenú metódu podporujú a dôkladne premyslenej štruktúre vyučovania, aby „kolaborácia“ úspešne prebehla.

Uvedené vybrané metódy a spôsob ich aplikovania vo vyučovaní matematiky je odlišný (ak nie úplne nerealizovateľný) od ich používania v tradičnom vyučovaní. V zásade sa však podstata vyučovacích metód v matematike nemení, nadobúda len špecifické kontúry determinované prostredím, v ktorom sa realizujú. Prostredie tiež podmieňuje spôsob komunikácie medzi učiteľom a žiakmi. Špecifická je čisto elektronická forma komunikácie v e-learningovom type štúdia, ale aj v rámci tradične organizovaného vzdelávania, vstupom nových elementov do vyučovacieho procesu nastávajú *komunikačné zmeny*.

Pri tvorbe ilustračných ukážok a riešení vybraných úloh sme použili softvérové produkty a ich nástroje rôzneho charakteru. K najčastejšie používaným patrili:

- geometrické interaktívne laboratóriá (Cabri II Plus, Cabri 3Dv2, Compass and Ruler),
- systémy počítačovej algebry (Derive, Mathematica),
- systém na vytvorenie interaktívneho prostredia (eBeam),
- produkty kancelárskeho charakteru (MS PowerPoint, MS Excel, MS FrontPage, MS Word),
- program na tvorbu webových animovaných a interaktívnych aplikácií (Macromedia Flash),
- program na skúmanie špeciálnych telies (Poly),
- detské programovacie jazyky(ComLogo, Imagine, Baltík),
- softvér na (textovú, hlasovú, a aj obrazovú) interaktívnu (online) i neinteraktívnu (offline) komunikáciu (Skype, Windows Live™ Messenger),
- program na záznam diania na obrazovke (CamStudio) a ďalšie.

Nemožno zosumarizovať a vymenovať v krátkosti všetky aspekty týkajúce sa vyučovania matematiky v prostredí informačných a komunikačných technológií, ktoré sú v práci načrtnuté. Hlavným cieľom práce bolo predložiť integrujúcu štúdiu **didaktiky matematiky v prostredí IKT** a poskytnúť základnú námetovú platformu na ďalšie skúmanie v uvedenej oblasti. Cieľovou skupinou, pre ktorú je prioritne publikácia určená, sú učitelia matematiky, študenti učiteľstva matematiky, prípadne ďalší nadšenci matematiky a nových technológií. Keďže modernizačné a inovačné snahy vo vyučovaní matematiky budú neustále aktuálne a uvedomujúc si tempo anticipačných trendov v informačných technológiách, je zrejmé, že zvolená problematika nemohla byť v predloženej práci spracovaná vyčerpávajúcim spôsobom.

Bibliografické odkazy

[1] BAIN, E.: *Manual of Cabri II Plus.* Texas Instruments, 2007. Dostupné na www.cabri.com.

[2] BAINVILL, E. – LABORDE. J.M.: *Cabri 3D v2.* Software. 2004-2007.

[3] BEROVÁ, Z. – BERO, P.: *Pomocník z matematiky pre 6. ročník ZŠ.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2006. 80 s. ISBN 80-7158-541-6.

[4] BRIGÁN, D.: Príprava vizuálnych elektronických materiálov použiteľných v elektronickom vzdelávaní. In: *MATEMATIKA V. Elektronické médiá vo vyučovaní matematiky.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. s. 14-18. ISBN 978-80-223-2367-3.

[5] BROUSSEAU, G.: *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Edited and translated by: Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., Warfield, V., 1997. 306 s. ISBN 0-7923-4526-6.

[6] BURJANOVÁ, Ľ. – VISKUPOVÁ, I.: *Matematika strednej školy v testoch.* 1. časť, Bratislava: Exam, 2003, 181 s. ISBN 80-968815-3-1.

[7] COTRET, S. – COTRET P. R.: *Cabri 3D v2 User Manual.* Anglický preklad: Horn, S. 2007. Dostupné na www.cabri.com.

[8] ČÁP, J. – MAREŠ, J.: *Psychologie pro učitele.* Praha: Portál, 2001. 656 s. ISBN 80-7178-463-X.

[9] FISCHER, R. – MALLE, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992. 336 s. ISBN 80-08-01309-5.

[10] FULIER, J.: Niektoré aspekty vzťahu histórie matematiky a didaktiky matematiky. In: *Žilinská didaktická konferencia 2004*. Žilina: EDIS, 2004. 66 s. ISBN 80-8070-270-5.

[11] FULIER, Jozef: Informačné a komunikačné technológie vo vzdelávaní v matematike. In: *IKT vo vyučovaní matematiky.* Nitra: FPV UKF, 2005. 212 s. ISBN 80-8050-925-5.

[12] GÁBOR, O. – KOPANEV, O. – KRIŽALKOVIČ, K.: *Teória vyučovania matematiky 1.* Bratislava: SPN, 1989. 328 s. ISBN 80-08-00285-9.

[13] HANZEL, P.: Dynamické prvky vo vyučovaní geometrie. In: *Mathematica – Acta Universitas Palackianae Olomucensis.* Olomouc: Univerzita Palackého, 2008. str. 101-109. ISBN 978-80-244-1963-3.

[14] HANZEL, P.: *Applety.* Dostupné na: http://www.pdf.umb.sk/~phanzel/

[15] HANZEL, P. – MAJOVSKÁ, R.: Nové přístupy ve vyučovaní matematiky na ekonomických fakultách. In: *ACTA MATMEMATICA 9*, Nitra: FPV UKF, 2006.str. 105-111. ISBN 80-8094-036-3.

[16] HANZEL, P. – VOÁČKOVÁ, L.: Applety v geometrii vytvárané programom C.a.R. In: *MATEMATIKA V. Elektronické médiá vo vyučovaní matematiky.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. str. 19-23. ISBN 978-80-223-2367-3.

[17] HAPALA, D.: *Učebné pomôcky. Systém a zásady ich používania.* Bratislava: SPN, 1965. 144 s.

[18] HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh.* Bratislava: SPN, 1992. 243 s. ISBN 80-08-00340-5.

[19] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.

[20] HÍC, P. – POKORNÝ, M.: E-learning vo vyučovaní matematiky. In: *ACTA MATHEMATICA 8.* NITRA: FPV UKF, 2005. ISBN 80-8050-896-8.

[21] HÍC, P. – POKORNÝ, M.: Využitie diplomových prác v počítačom podporovanom vyučovaní matematiky na PdF TU. In: *ACTA MATHEMATICA 10.* Nitra: FPV UKF, 2007. ISBN 978-80-8094-181-9.

[22] IVANOVÁ-ŠALINGOVÁ, M. – MANÍKOVÁ, Z.: *Slovník cudzích slov A/Z.* Bratislava: SPN, 1979. 944 s. ISBN 67-567-79.

[23] JODAS, V.: *Projekt elektronickej učebnice (prezentácia).* Dostupné na: http://www.infovek.sk/konferencia/2004/program.php?sekcia=all

[24] JODAS, V. – KOREŇOVÁ L.: *Metodická príručka Cabri geometrie II.* Bratislava: Metodické centrum, NEPA Slovakia, 2002. Dostupné na: http://www.mctba.sk/download/dokumenty/matematika/cd_cabri/index2.htm

[25] KALAŠ, I.: Čo ponúkajú informačné a komunikačné technológie iným predmetom 1. In: *Zborník príspevkov z 1. celoštátnej konferencie Infovek.* Račkova dolina: 2000.

[26] KALAŠ, I.: *Informatika pre stredné školy.* Bratislava: Media Trade – SPN, 2001. 112 s. ISBN 80-08-01518-7.

[27] KRAUS, J. a kol.: *Slovník cudzích slov (akademický).* Bratislava: SPN – Mladé letá, 2005. 1054 s. ISBN 80-10-00381-6.

[28] KRIŽALKOVIČ, K. – CUNINKA, A. – ŠEDIVÝ, O.: *500 riešených slovných úloh z matematiky.* Bratislava: Alfa, 1971. 364 s.

[29] KOPKA, J.: *Zkoumání ve školské matematice.* Ružomberok: PdF, Katolícka Univerzita v Ružomberku, 2006. 151 s. ISBN 80-8084-064-4.

[30] LABORDE, J. M. – BELLEMAIN, F.: *Cabri-Geometry II, software and manual.* Texas Instruments, 1994.

[31] KUTZLER, B. – KOKOL-VOLJC, V.: *Úvod do Derive 6. Matematika na počítači pre pokročilých.* Dallas: Texas Instruments. 2003.

[32] LOKŠOVÁ, I. – LOKŠA, J.: *Tvořivé vyučování.* Praha: Grada Publishing 2003. 208 s. ISBN 80-247-0374-2.

[33] LUKÁČ, S.: *Multimédiá a počítačom podporované učenie sa v matematike.* Košice: Prírodovedecká fakulta UPJŠ, 2001. 60 s. ISBN 80-7097-423-0.

[34] MAJOVSKÁ, R.: *Matematická analýza. Elektronický kurz.* Dostupné na http://www.pdf.umb.sk/~rmajovska/

[35] MALÁ, D.: *Psychologické aspekty humanizácie vyučovania matematiky.* Autoreferát dizertačnej práce. Nitra: FPV UKF, 2007. 18 s.

[36] MALÁČ, J. – KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ.* Praha: SPN, 1981. 304 s. ISBN 14-513-81.

[37] MARCINEK, T: Digitálne technológie na 1. stupni ZŠ – perspektíva, alebo slepá ulička? In: *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004. s. 161-164. ISBN 80-244-0818-X.

[38] MARCINEK, T.: Vyučovanie a kolaborácia na diaľku: praktická demonštrácia voľne dostupných nástrojov. In: *Matematika V.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. ISBN 978-80-223-2367-3.

[39] MARCINEK, T.: *Jednoduché konštrukcie v Jave.* Applety [cit. 18. 3. 2008] dostupné na http://www.marcinek.sk/cmich/java/midpoint.html

[40] NOVÁK, B. – NOVÁK, M.: Mathematics as an enviroment for developping pupils´/ students´ personality. Proceedings abstracts 8th International Conference „*Teaching matematics: retrospective and perspectives*". Riga, May 10-11, 2007.

[41] NOVÁK, M.: Interaktivní učební pomůcky z lineární algebry: pokus o přehled a náčrt možností. In: *Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách.* Zborník príspevkov. CD-ROM. Žilina: Fakulta prírodných vied Žilinskej univerzity v Žiline, 2008. s. 1 – 4. ISBN 978-80-8070-862-7.

[42] NOVÁK, M. Maple from the point of view of non-native speakers – students of technology. In *5. matematický workshop.* Sborník. CD-ROM. Brno: FAST VUT, 2006. s. 1-6. ISBN: 80-214-2382-9.

[43] PAPPASOVÁ, T.: *Potešenie z matematiky.* Bratislava: Nebojsa, 1997. 243 s. ISBN 80-967724-6-5.

[44] PARTOVÁ, E.: Informačné technológie a rozvoj kompetencií v elementárnej matematike. In: *IKT vo vyučovaní matematiky.* Nitra: FPV UKF, 2005. 212 s. ISBN 80-8050-925-5.

[45] PARTOVÁ E.: Vplyv digitálnej tabule na kompetencie učiteľov elementárnej matematiky. In: *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávaní – Srní 2007.* Plzeň: Západočeská Univerzita v Plzni, 2007, 247 s. ISBN 978-80-7043-548-9.

[46] PARTOVÁ, E.: Úloha interaktívnej tabule vo vyučovaní elementárnej matematiky. In: *Matematika V.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. ISBN 978-80-223-2367-3.

[47] PARTOVÁ, E. Metódy a formy využívania pedagogického softvéru vo vyučovaní elementárnej matematiky. In: *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy.* Olomouc: Univerzita Palackého, 2004.

[48] PETÁKOVÁ, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2000. 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

[49] PETLÁK, E.: *Pedagogicko-didaktická práca učiteľa.* Bratislava: IRIS, 2000. 118s. ISBN 80-89018-05-X.

[50] PLOCKI, A.: *Pravdepodobnosť okolo nás.* Ružomberok: PdF Katolícka univerzita, 2004. 266 s. ISBN 80-89039-51-0.

[51] PŘÍHONSKÁ, J.: Využití prezentačního software ve výuce matematiky. In: *Sborník z konference s mezinárodní účastí věnované počátečnímu vyučování matematiky*. Srní 2007. s. 134 – 138. ISBN 978-80-7043-548-9.

[52] PŘÍHONSKÁ, J.: Presentation software and it's use in teaching matmematics. In: *Matematyka XII, Prace naukowe.* Czestochowa: Akademia Im. Jana Dlugosza w Czestochowie, 2007. s. 359-367. ISBN 978-83-7455-013-0.

[53] RESSLER, M. (edit.): *Informační věda a knihovnictví : Výkladový slovník české terminologie z oblasti informační vědy a knihovnictví. Výběr z hesel v databázi TDKIV.* Praha: VŠCHT a Národní knihovna České republiky, 2006. ISBN 80-7080-599-4. Elektronická verzia dostupná na http://vydavatelstvi.vscht.cz/knihy/uid_es-005/hesla/hypermEdium.html [cit. 15. 4. 2008]

[54] ROBOVÁ, J.: Webové aplikace ve vyučování matematiky. In: *DIDZA 5 – zborník príspevkov z 5. žilinskej didaktickej konferencie.* Žilina: FPV ŽU, 2008. str. 47-55. ISBN 978-80-8070-862-7.

[55] RUISEL, I.: *Inteligencia a myslenie.* Bratislava: Ikar, 2004. 432 s. ISBN 80-551-0766-1.

[56] SIWEK, H.: *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej.* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spolka Akcyjna, 2005. 335 s. ISBN 83-02-09303-3.

[57] SMIDA, J. – ŠEDIVÝ, J. a kol.: *Matematika pre 1. ročník gymnázia.* Bratislava: SPN, 1990. 294 s. ISBN 80-08-00939-X.

[58] SMIDA, J.: *Postupnosti a rady pre gymnázium.* Bratislava: SPN, 1988. 72 s.

[59] SPAGNOLO, F. – ČIŽMÁR, J.: *Komunikácia v matematike.* Brno: Přírodovědecká fakulta MU, 2003. 190 s. ISBN 80-210-3193-X.

[60] STOFFOVÁ, V.: *Zbierka úloh z programovania I.* Nitra: FPV VŠPG, 1993. 157 s. ISBN 80-85183-79-X.

[61] STOFFOVÁ, V.: Animácia v elektronických učebniciach a v iných elektronických prezentáciách učebnej látky. Elektronická verzia monografie: *XX. DIDMATTECH 2007*. Olomouc: Votobia Olomouc, 2007. 375 s. ISBN: 80-7220-296-0.

[62] STOPENOVÁ, A. – NOVÁK, B.: Je možné změnit postoje žáků k matematickému vyučování? In: Coufalová, J. (ed.), *Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí „Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vydělávaní – Srní 2007"*. Plzeň: ZČU, 2007. s. 171-175. ISBN 978-80-7043-548-9.

[63] ŠEDIVÝ, O.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia.* Nitra: FPV UKF, 2001. 123. s. ISBN 80-8050-417-2.

[64] ŠEĎOVÁ, K. – ZOUNEK, J.: V tahu nebo pod tlakem? Motivy vedoucí k užívaní ICT v práci učitele. In: *Fórum o premenách školy v 21. storočí.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. s. 99-107. ISBN 978-80-969146-7-8.

[65] TOMKOVÁ, E.: *Premeny jednotiek v Exceli.* Dostupné na: http://konferencia.ematik.sk/sk/content/16 [cit. 13. 2. 2008]

[66] UHLÍŘOVÁ, M.: Akceptují učitelé počítač? In: *Cesty (k) poznávání v matematice primární školy.* Olomouc: Vydavatelství UP, 2004. s. 273-278.

[67] UHLÍŘOVÁ, M.: Classification of primary school teachers according to their attitudes to ICT educational implementation. In: *Matematika XII, Práce naukowe*. Czestochowa: Akademia IM. Jana Dlugosza w Czestochowie, 2007. ISBN 978-83-7455-013-0. ISSN 1896-0286.

[68] VALLO, D: Riešenie stereometrických úloh v programe Cabri 3D. In: *Konferencia „Matematika včera, dnes a zajtra"*. Ružomberok: Pedagogická fakulta KU, 2006. s. 280-283, ISBN 80-8084-066-0.

[69] VALLO, D: Možnosti Cabri 3D vo vyučovaní geometrie. In: *39. konferencia slovenských matematikov, Jasná pod Chopkom.* Žilina: Edis – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2007. s. 35. ISBN 978-80-8070-772-9.

[70] VANÍČEK, J.: Nasazení Cabri do výuky matematiky: formy a metody práce. Bratislava: *Konferencia e-matik*. Dostupné na http://konferencia.ematik.sk/sk/content/16/SID=70eb6c6018563e22ff597cb0e06f3a87 cit. 11. 2. 2008]

[71] VANÍČEK, J.: CABRI 3D – cesta do další dimenze?. In: *Konferencia „Užití počítačů ve výuce."* České Budějovice: 2005. Dostupné na: www.pf.jcu.cz/cabri/cabri3d/dalsi_dimenze.pdf

[72] WIRTH, N.: *Algorithms + Data Structures = Programs.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.

[73] ZELINA, M.: *Alternatívne školstvo.* Bratislava: IRIS, 2000. 260 s. ISBN 80-88778-98-0.

[74] ZELINA, M.: *Teórie výchovy alebo hľadanie dobra.* Bratislava: SPN – Mladé letá, 2004. 231 s. ISBN 80-10-00456-1.

[75] ŽIDEK, O.: Manipulačné a virtuálne štúdium niektorých vlastností špeciálnych mnohostenov. In: *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání.* Plzeň: Západočeská univerzita, 2007. s. 204-209. ISBN 978-80-7043-548-9.

[76] ŽIDEK, O: Manipulačná činnosť ako prostriedok pri budovaní geometrických predstáv a poznatkov. In: *Od činnosti k poznatku – Srní 2003.* Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2003. s. 84-86.

[77] ŽIDEK, O.: O využití intuície a názornosti pri získavaní poznatkov z geometrie. In: *39. konferencia slovenských matematikov, zborník abstraktov*. Žilina: EDIS, vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2007. s. 37-39. ISBN 978-80-8070-772-9.

[78] ŽIDEK, O.: *Teória grafov a jej aplikácie v školskej praxi.* Bratislava: PdF UK, 2001. 71 s. ISBN 80-88868-70-X.

[79] ŽILKOVÁ, K.: Komunikačné rozhranie v procese tvorby počítačového modelu matematického problému. In: *DIDZA 200 5- Didactic Conference in Žilina.* Žilina: FPV ŽU, 2005. ISBN 80-8070-430-9.

[80] ŽILKOVÁ, K.: *Heuristika v informatizácii výučby matematiky.* Bratislava: Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, 2006. 88 s. ISBN 80-8052-261-8.

[81] ŽILKOVÁ, K.: Oscilácia medzi abstrakciou a realitou. In: *Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy.* Olomouc: Pedagogická fakulta UPOL, 2006. s. 301-305. ISBN 80-244-1311-6.

[82] ŽILKOVÁ, K.: *Webmatika – školská matematika v prostredí IKT.* Elektronický materiál. Bratislava: 2008. Dostupné na www.webmatika.sk

[83] ŽILKOVÁ, M.: *Výhry a prehry mediálnej drámy.* Bratislava: Slovenský rozhlas, 2004. 216 s. ISBN 80-969240-7-9.

[84] http://di.ics.upjs.sk/palma

[85] http://integrals.wolfram.com/index.jsp

[86] http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en/index.html

[87] http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html

[88] http://physedu.science.upjs.sk/vmv/index.php

[89] http://vk.upjs.sk/~tuleja/CaR/

[90] http://www.e-beam.com/

[91] http://www.exam.sk

[92] http://www.live.com

[93] http://www.matika.sk/index1.htm

[94] http://www.matika.indatex.sk/

[95] http://www.matmix-web.sk

[96] http://www.peda.com/

[97] http://www.pf.jcu.cz/cabri

[98] http://www.skolanawebe.sk/

[99] http://www.sllk.gov.sk/iml12004/iml041s52.html

[100] http://www.webmatika.sk/

Katarína Žilková

ŠKOLSKÁ MATEMATIKA
V PROSTREDÍ IKT

(INFORMAČNÉ A KOMUNIKAČNÉ TECHNOLÓGIE)

Vydala Univerzita Komenského v Bratislave vo Vydavateľstve UK

Technická redaktorka: Darina Földešová
Grafický návrh obálky: Mgr. Art. Filip Vilhan
Korigovala autorka

Rozsah 138 strán, 9,33 AH, 9,72 VH, prvé vydanie,
vytlačilo Polygrafické stredisko UK v Bratislave

ISBN 978-80-223-2555-4