Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky

Milan Hejný, Jarmila Novotná

Naďa Stehlíková

(editoři)

1. díl

Praha 2004

Publikace obsahuje část výsledků výzkumů zpracovaných v rámci výzkumného záměru J13/98:114100004.

ISBN 80-7290-189-3 (1. sv.)

Obsah

Úvod

Cílem předložené publikace je prezentace části výsledků, které byly v uplynulých sedmi letech získány v didaktice matematiky na dvou pracovištích Karlovy univerzity – na Pedagogické fakultě v Praze a Lékařské fakultě v Hradci Králové. Některé z výzkumů se opírají o předchozí práce autorů, jiné byly zahájeny v rámci řešení výzkumného záměru J13/98:114100004.

Nejedná se tedy o dílo monotematické, které jednotnou metodikou systematicky zkoumá úžeji vymezenou oblast, ale o spektrum prací různého zaměření a různého typu (od výzkumné zprávy, přes esejistickou úvahu až po metodický návod), napsaných jedenácti autory. Autoři jednotlivých kapitol publikace formulují své dílčí problémy, které zkoumají vlastní metodikou práce. To, co je všem statím publikace společné, je didaktické a pedagogické přesvědčení autorů: Hlavní a dobře známý nedostatek matematického vzdělávání mládeže, který ustupuje jen velice pomalu, je zaměření výuky na faktografii, na nácviky řešitelských procesů standardních úloh a opomíjení rozvoje kognitivních a metakognitivních schopností žáka. Dominujícími činnostmi žáka jsou reprodukce a imitace. Jsme přesvědčeni, že školní předmět matematika může výrazněji přispívat k intelektuálnímu a osobnostnímu růstu mladé generace. Výsledky naší badatelské činnosti, jež jsou v souladu se značnou částí výsledků zahraničních výzkumů, naznačují cesty vedoucí k požadovaným změnám ve vyučování matematice. Jsme přesvědčeni, že klíčovou roli zde hraje učitel, jeho práce, jeho pedagogické přesvědčení, jeho víra ve vlastní schopnosti i schopnosti žáka. Proto naše hlavní úsilí směřuje k učiteli stávajícímu i budoucímu. Snažíme se inspirovat jej k práci na sobě, k experimentování, k tvořivému hledání nových cest, k víře, že tímto způsobem získá nejen kvalitnější výsledky u svých žáků, ale i větší radost z práce a vlastní uspokojení. Tato ústřední myšlenka celé publikace je podrobněji rozpracována v první kapitole publikace.

Knihu tvoří 25 kapitol, které jsou rozděleny do tří částí, jejichž názvy ukazují jejich hlavní zaměření. V první části, Některé obecné otázky, jsou příspěvky zkoumající obecné problémy didaktiky matematiky. Druhá část, Učitel a jeho příprava, je věnována klíčové osobnosti matematického vzdělávání mládeže. Konečně třetí část, Sedm námětů pro výuku, přináší sérii nabídek adresovaných učiteli jako podněty k jeho práci ve třídě.

Některé obecné otázky

První část knihy obsahuje osm kapitol, z nichž každá se dotýká širší oblasti didaktiky matematiky. I když v nich najde poučení nejen výzkumník, ale i učitel, jejich těžiště není v aplikaci, ale v základním výzkumu.

Vstupní kapitola, jak již bylo řečeno, podává základní pedagogická přesvědčení autorského kolektivu. Výklad je založen na polaritě konstruktivistického a transmisivního přístupu k vyučování matematice. Konstruktivistický přístup byl v konkrétní práci některých učitelů přítomen již ve starověku, ale jako deklarovaná iniciativa vstoupil do didaktiky matematiky teprve nedávno. Nicméně i ve své krátké historii se idea konstruktivizmu rozrostla do té míry, že autoři cítili potřebu osvětlit vlastní vnímání této celosvětové iniciativy. První kapitola formuluje základní principy konstruktivizmu tak, jak jej vnímají a ve své výzkumné práci uplatňují členové autorského kolektivu.

Druhá kapitola prezentuje jeden z hlavních teoretických výsledků autorského kolektivu: model poznávacího procesu (nejen) v matematice. Jádrem do několika úrovní rozloženého poznávacího mechanizmu jsou dva abstrakční zdvihy spojené v mentálním objektu (generický model poznatku), který je produktem prvního a východiskem druhého z těchto zdvihů. Pojem generického modelu je pro celou teorii ústřední.

Následující čtyři kapitoly zkoumají v různých kontextech oblast interakce učitel – třída, učitel – žák a žák – žák. *Třetí kapitola* charakterizuje dva základní typy přístupu učitele k žákům: postojový, založený na autoritě učitele, a dialogický, založený na spolupráci učitele se žákem. Ukazuje, jak při prvním i druhém typu učitel eviduje, zkoumá a hodnotí činnost žáka, jak rozhoduje o vlastní reakci a jak koná. Popsaný nástroj pozorování učitelovy reakce na činnost žáka lze použít nejen ve výzkumu, ale i v každodenní práci učitele. Zvláštní pozornost věnuje autor jevu „nálepkování“ žáků.

Jedním z klíčových jevů interakce nejen ve vyučování matematice je chyba. Chybě žáka i učitele, nebo přesněji vnímání chyby žákem, učitelem, třídou nebo společností je věnována *čtvrtá kapitola*. Metodou genetické paralely, tedy zkoumáním toho, jak chybu vnímají různé kultury, je vytvořen rámec pro analýzu chyby v školním prostředí. Tento nástroj je pak aplikován. Hlavním výsledkem analýz je zjištění, že u nás běžné vnímání chyby jako něčeho nežádoucího, něčeho, čeho je třeba se vyvarovat, je edukačně méně účinné než vnímání chyby jako zkušenosti, z níž je třeba se poučit. Studie uvádí sondu o tom, jak chybu vlastní i chybu žáka vnímají učitelé.

Kognitivní nedorozumění, k němuž dochází mezi učitelem a žákem, je zkoumáno v *páté kapitole* v klinických podmínkách experimentátor – žák. Jsou uvedeny fenomény, které lze použít jako nástroje při tomto zkoumání. Dále jsou popsány a analyzovány dva konkrétní případy nedorozumění. První případ se týká komunikace mezi učitelem a žákem 4. ročníku v oblasti geometrických pojmů, druhý se žákem 3. ročníku v oblasti kombinatoriky. Analýzy ukazují, jak je pro učitele obtížné zjistit, že v jeho rozmluvě se žákem došlo k nedorozumění. Jsou zde podány náměty, jak se může učitel ve schopnosti odhalovat přítomnost nedorozumění zdokonalovat.

Šestá kapitola zůstává ještě u problematiky interakce, ale je psaná v trochu jiném duchu než ostatní kapitoly. Jejím cílem není podat výsledky založené na vlastní experimentální činnosti, ale dát ucelený pohled na jedno z velice aktuálních témat soudobé didaktiky (nejen) matematiky: na vyhledávání pomoci žákem. Je provedena typologie vyhledávání pomoci žákem a podrobněji jsou rozebrány dva základní případy (pomoc přichází od učitele nebo od spolužáků). Teoretické poznání je pak projektováno do situace třídy, aby bylo použitelné pro práci učitele.

Poslední dvě kapitoly nemají přímé obsahové propojení na další kapitoly této části. *Sedmá kapitola* hledá didaktickou příbuznost a rozdílnost dvou hlavních sloupů školní matematiky – aritmetiky a geometrie. Zaměřuje pozornost na tři úrovně vztahu aritmetiky a geometrie: na objekty, které tyto disciplíny zkoumají, na nástroje, které k práci používají, a na edukační strategie, které se využívají k jejich prezentaci. Autoři ukazují nezastupitelnost každé z těchto oblastí, zejména pokud jako hlavní cíl matematického vzdělávání chápeme rozvoj kognitivních a metakognitivních schopností člověka.

Osmá kapitola se od všech ostatních kapitol této publikace liší především tématem. Přináší do českého didaktického povědomí nové, zde dosud nezkoumané důležité téma – sémiotiku. Kapitola nejprve podává základní informaci o sémiotice a v deseti bodech vymezuje, co rozumí sémiotickou analýzou experimentálního materiálu. Pak tento nástroj podrobně ilustruje na vlastním experimentálním materiálu. Z ilustrací je vidět, že sémiotika může být použita nejen jako nástroj výzkumu (například při zkoumání komunikace učitel – žák), ale i při práci učitele, při hledání vhodné koncepce výuky například těles. Cílem kapitoly je nejen poukázat na význam sémiotické analýzy žákova výstupu, ale též přilákat do této oblasti další mladé vědecké pracovníky.

Učitel a jeho příprava

Druhá část knihy obsahuje deset kapitol, z nichž každá je zaměřena na učitele nebo na budoucího učitele, posluchače pedagogické fakulty. Jestliže těžiště první části leželo spíše v problematice základního výzkumu, je v této části věnována stejná pozornost i aplikacím. Přitom podstatně více místa je věnováno učiteli a budoucímu učiteli 1. stupně (dílem i posluchači speciální pedagogiky) než učiteli a budoucímu učiteli 2. stupně základní a střední školy. Důraz na učitele primární pedagogiky je důsledkem skutečnosti, že je to právě on, kdo rozhodujícím způsobem formuje osobnost žáka, jeho názor na matematiku, na učení matematice, jeho matematické sebevědomí. Jestliže v prvních letech kontaktu s matematikou získá žák přesvědčení, že hlavním cílem této disciplíny je rychlé a bezchybné počítání, pak bude v budoucnu velice těžké tuto deformaci přesvědčení měnit. Naopak, když dítě již od první třídy vnímá matematiku jako prostředí pro tvořivost, spekulaci, objevování, diskutování a argumentování, tak bude jeho příští nejen matematický, ale i intelektuální růst založen na pevných základech.

Vstupní kapitolou druhé části je *devátá kapitola*, jež je věnována mapování názorů a postojů posluchačů primární pedagogiky k matematice jako takové i k matematice jako školnímu předmětu. Východiskem studie je přes 300 esejí, které v posledních třech letech napsali posluchači primární pedagogiky o svých zkušenostech s matematikou na základní a střední škole a o tom, jak reflektují matematiku, s níž se setkali na vysoké škole. Bohatý a velice různorodý materiál byl autorkou archivován, na základě didaktických a klimatických fenoménů tříděn a posléze vyhodnocován. Cílem bylo získat objektivní zpětnou vazbu o části výsledků práce katedry a získat podklady pro další hledání koncepce vyučování matematice primární pedagogiky na fakultě. Jedna z hlavních otázek, na kterou široké šetření mělo dát odpověď, se týká změn, které byly v koncepci vyučování matematice na fakultě udělány v posledních osmi letech. Šetření ukázalo, že snaha zdůraznit konstruktivistické přístupy k matematice a oslabit transmisivní přístupy je většinou posluchačů přijímána vesměs kladně. Výzkum dále pokračuje a bude vyhodnocovat i úspěšnost změn, které byly v koncepci výuky udělány právě na základě předložené studie.

Teoretický rámec koncepce vyučování matematice ve studiu primární pedagogiky hledá *desátá kapitola*. Po úvodních úvahách autor uvádí čtyři hlavní překážky, které snižují účinnost výuky: nízké matematické sebevědomí posluchačů, jejich nedostatečné zkušenosti s konstruktivistickým přístupem ke školní matematice, jejich zkreslený pohled na školní matematiku a konečně již osvojený styl učení se matematice založený na repetici a imitaci. Každá z překážek je analyzována a do středu didaktické koncepce je položena matematická úloha, která má mít podle autora tři vlastnosti: nestandardnost (nelze ji řešit běžným algoritmem), vstřícnost (řešitel vidí nadějné způsoby řešení), nastavitelnou obtížnost (řešitel si dle vlastní potřeby může úlohy upravit na náročnější, nebo na snazší). Rozsáhlejší ilustrace usnadňuje porozumění teoretickým úvahám. V závěru je podán fragment materiálu určený studentům v době zahájení nové koncepce výuky. Následující čtyři kapitoly přispívají k řešení problému uvedeného v desáté kapitole.

Jedenáctá kapitola konkretizuje nástroje, jimiž se autoři (a další pracovníci katedry podílející se na výuce v tomto studiu) snaží realizovat konstruktivistické přístupy ve výuce. Nástroje, které byly postupně vytvářeny, modifikovány, vylepšovány a aplikovány již od roku 1994, se podle uvedeného šetření ukazují jako účinné. V kapitole je popsáno, jak lze efektivně motivovat studenty ke studiu matematiky, zvyšovat jejich sebevědomí i úroveň matematických znalostí; jak lze i při poměrně malé časové dotaci rozvíjet schopnosti studentů potřebné pro budoucí vyučování matematice a, což považují autoři za nejdůležitější, dosahovat pozitivních změn v postojích studentů k matematice.

Dvanáctá kapitola ukazuje velkou didaktickou bohatost využití prostředí čtverečkovaného papíru. To skýtá zajímavé problémové situace s nastavitelnou náročností v širokém věkovém spektru. Po úvodních úvahách, v nichž se rekapitulují některé konstruktivistické myšlenky důležité pro tuto kapitolu, ilustruje autorka tři tematické celky a ukazuje, jak lze v prostředí čtverečkovaného papíru dělat propedeutiku tak náročných pojmů jako např. vektor, báze a kvadratická diofantovská rovnice. Důraz je kladen na objevitelský proces, kterým posluchači odhalují nejen vztahy, ale i pojmy jak geometrie, tak aritmetiky i algebry.

Třináctá kapitola je věnována případové studii. Nejdříve je podána informace o koncepci matematiky v přípravě posluchačů speciální pedagogiky a pak je rozveden případ jednoho posluchače, který v průběhu vysokoškolského studia značně zlepšil své matematické sebevědomí a změnil svůj názor na matematiku. Je ukázáno, jak k těmto změnám přispěla posluchačova práce na projektu zaměřeném na zkoumání matematické činnosti žáka.

Čtrnáctá kapitola popisuje, analyzuje a ilustruje jednu edukační technologii zaměřenou na pojmotvorný proces a jeho diagnostiku. Hra, v níž si hráč A myslí na jistý (v našem případě geometrický) objekt a hráč B se otázkami, na něž hráč A odpovídá jen ano – ne, snaží tento objekt uhodnout, dostala název Sova. Hra rozvíjí dvě kognitivní oblasti žáka: geometrické představy s příslušnou terminologií a kombinatoricko-logické schopnosti (efektivně organizovat posloupnost otázek, které hráč A klade). Hra je zevrubně analyzována, je ilustrováno její použití v 5. ročníku základní školy a v závěru je ukázána složitá sociální struktura, k níž může aplikace hry ve výzkumu vést.

Dominantní role učitele nespočívá v tom, že je nositelem poznání, ale v tom, že je tvůrcem pracovního klimatu a zřídlem motivace pro studenty. Osobnost učitele je neopakovatelná a originální. Proto i pedagogické dílo (tj. výuková hodina) dvou tvořivých učitelů nemůže být stejné. *Patnáctá kapitola* tuto tezi ilustruje. Obě autorky charakterizují svůj vlastní přístup k témuž tématu, Pickově formuli, a popisují, jak jej dosti odlišně realizovaly na semináři. Pak ve společné komparativní studii ukazují na společné a rozdílné momenty obou postupů.

Šestnáctá kapitola se od předchozích liší v adresátovi. Tím je budoucí učitel 2. stupně základní školy a střední školy. Obsahově je věnována náročnému geometrickému tématu, geometrickým transformacím. Ty od doby Erlangenského programu (1872), v němž F. Klein ukázal, že každou klasickou geometrii lze popsat její grupou transformací, získaly v geometrii velký význam a jsou již nejméně 50 let klíčovou součástí vysokoškolské přípravy budoucího učitele matematiky. Autorka naznačuje transmisivní přístupy k výkladu této partie a formuluje konstruktivistický přístup založený na aktivitě studenta, tedy na jeho tvůrčí práci a na úzkém provázání syntetického a analytického vnímání geometrických transformací. Ukazuje, jak lze vzájemně prolínat tři základní myšlenkové hladiny této partie: geometrické představy, analytické uchopení transformace a složitou grupovou a svazovou strukturu, kterou tento soubor objektů vytváří. Výzkum zaměřený na zkoumání účinnosti tohoto přístupu byl realizován pomocí propracované metodiky. Výsledky analýz ukazují jak silné, tak i slabé stránky nově zvoleného přístupu.

Sedmnáctá kapitola popisuje spolupráci autorky a učitelky na organizaci třídní dlouhodobé soutěže v řešení různých úloh. Cílem její autorky bylo využít spolupráce k ovlivňování tradičního pedagogického přesvědčení učitelky směrem ke konstruktivistickému přístupu. Studie jasně ukazuje, že takovou změnu navodit lze, ale že je to dlouhodobý proces, který vyžaduje značné úsilí experta, značný objem jeho času i energie. Ukazuje též klíčovou činnost, která k uvedené změně vede: společnou analýzu žákovských řešení. Při této práci učitelka začíná s tradičním polaritním posuzováním žákova řešení dobře – chybně. Expert učitelce postupně ukazuje, jak lze z řešení žáka získat cenné informace o způsobu jeho myšlení a jak lze tyto informace využít k účinnému působení na žáka.

Osmnáctá kapitola je věnována oblasti diagnostiky a hodnocení výsledků žáků v matematice. Pro úlohy, které představují kvalitní diagnostické nástroje, je charakteristické, že z nich získává informace o pokroku žáka nejen učitel, ale i žák sám. Autor, který je dlouhodobě aktivně zapojen do procesu tvorby diagnostických úloh pro matematiku hlavně na úrovni maturity, se v kapitole omezuje na tvorbu otázek a úloh pro maturitu z matematiky. Sám prošel různými stádii procesu tvorby úloh od intuitivního přístupu až po tvorbu úloh opírající se o teoretické výsledky z oblasti diagnostiky a hodnocení žáků. To mu umožnilo použít v kapitole formu sebereflexe. Srozumitelnost výkladu je podpořena zařazením konkrétních úloh a jejich kritickou analýzou.

Sedm námětů pro výuku

Příspěvky z třetí části spojuje to, že nabízejí čtenářům konkrétní prostředí vhodná k samostatné tvůrčí činnosti žáků, k objevování nových poznatků, ke konstrukci a rozvíjení pojmů, k budování matematické struktury. Snaží se inspirovat učitele, který usiluje o to, aby jeho vyučování matematice bylo poutavým a zároveň účinným. A to je jednotící myšlenka třetí části knihy.

Kapitoly v této části jsou přímo zaměřeny na některé téma školské matematiky nebo na některou výukovou strategii. Jejich zpracování se však liší. S výjimkou prvních dvou kapitol (kap. 19 a 20), které mají společný úvod, každá kapitola představuje samostatný celek a není třeba dodržovat určité pořadí čtení. V dalším textu uvedeme základní charakteristiky jednotlivých příspěvků s cílem usnadnit čtenáři orientaci v této části publikace.

Devatenáctá a *dvacátá kapitola* jsou věnovány přechodu z oboru přirozených čísel do oboru záporných čísel a zlomků. Prvními a na dlouhou dobu jedinými čísly, s nimiž se žáci ve škole setkávají, jsou čísla přirozená. Děti o nich získávají (bezděčně i cíleně) mnoho znalostí. Zavedení záporných čísel nebo zlomků a počítání s nimi představuje pro žáky novou kvalitu. V kapitolách věnovaných záporným číslům a zlomkům si autor klade otázku, jak pomoci žákům, kteří chtějí porozumět světu těchto čísel. Příčiny obtíží odhaluje jak analýzou poznávacího mechanizmu, tak hledáním paralel ve vývoji těchto pojmů v historii lidstva. Navrhuje a zdůvodňuje účinnější výukové postupy. Vychází přitom z mechanizmu pojmotvorného procesu podaného v kap. 2. V kapitole o záporných číslech je velká pozornost věnována různým typům modelů čísel, v kapitole o zlomcích je zařazena podrobná ukázka přípravy a realizace experimentálního vyučování.

V *dvacáté první kapitole* se autorka zabývá objevováním ve vyučování matematice, tj. zařazováním činností, při nichž žáci (pod vedením učitele nebo sami) objevují nové pojmy a zákonitosti nebo poznávají možnosti využití poznatků v souvislostech a v aplikacích. Aby objevování mohlo splnit jak výukové, tak i motivační a sociální cíle, je třeba, aby učitel porozuměl procesu objevování. Proto je cílem kapitoly prezentovat takový model procesu objevování, který bude pro učitele vodítkem při přípravě a realizaci výukových sekvencí. Příklad zařazený do kapitoly propojuje situaci přípravy učitelů matematiky se zařazením stejné aktivity na základní škole. Kapitola tak představuje propojení druhé a třetí části knihy.

Tématem *dvacáté druhé kapitoly* je zpracování informací při řešení slovních úloh. Zadání slovních úloh obvykle nepoukazuje přímo na řešitelský algoritmus, dokonce ani na výběr vhodného řešitelského postupu; jeho odhalení je jedním z úkolů řešitele. Cílem kapitoly je ukázat pozitivní vliv „volnější" organizace etapy zpracování informací ze zadání úlohy na úspěch žáka při konstrukci jejího vhodného matematického modelu. Jestliže si žák tvoří vlastní řešitelské strategie, modely a řešitelské algoritmy, mění se také pohled na chybu. Chyba se stává nutným krokem k porozumění. Odpovědí na chybu je analýza důvodů, proč se chyba stala. V této části souvisí kapitola s kap. 4.

Zařazení her do vyučování je široká problematika, na níž je možné se dívat z mnoha perspektiv. Jsou předmětem zkoumání již v kap. 14, kde je rozpracována jedna hra používaná v přípravě učitelů. Ve *dvacáté třetí kapitole* zaměřila autorka pozornost na vliv použití her ve vyučování matematice na motivaci žáků a na komunikační klima ve třídě. Ukazuje, jak u žáků postupně dochází k hlubšímu porozumění herním situacím, jak se z prvotních „vykonavatelů instrukcí" mění na „hledače zákonitostí", jak se dopracují ke schopnosti argumentačně své objevy podpořit.

Zatímco kap. 21 je věnována procesu objevování nezávisle na tematickém celku, jsou kap. 24 a 25 věnovány vždy jednomu úlohovému prostředí, které je rozpracováno jako prostředí motivující tvořivý a konstruktivistický přístup žáků ke zpracovávané problematice.

Dvacátá čtvrtá kapitola je příspěvkem k didaktickému zpracování úloh vycházejících z pravidelností. Autor zde představuje jedno aritmeticko-geometrické prostředí, které umožňuje vytvořit rozsáhlý soubor úloh s odstupňovanou obtížností a které je bohatou zásobárnou motivujících aktivit. Významnou motivační roli, zejména pro některé žáky, je vtipná a důmyslná vizualizace vybraných aritmetických situací. Autor ukazuje, jak je pomocí otázek „Co kdyby?" možné prostředí v podstatě libovolně rozšiřovat. Všechny úlohy obsahují řešení a náměty pro jejich zařazení do vyučování. Kapitola je doplněna komentovanými ukázkami konkrétních žákovských řešení některých z úloh.

Úlohovým prostředím pro *dvacátou pátou kapitolu* jsou tzv. triády. Představují strukturu, která vyžaduje minimální matematické znalosti, ale nabízí různé, někdy i překvapující strukturální situace. Jsou pro žáky novým „prostředím" a tato skutečnost je činí vhodným nástrojem pro zkoumání prvních etap procesu vytváření struktury. Kapitola je doplněna sbírkou úloh, které je možno použít při další práci s triádami a které ilustrují bohatost tohoto prostředí.

Děkujeme kolegyním a kolegům, kteří svými poznámkami a doporučeními přispěli ke zkvalitnění textu.

V Praze, prosinec 2004

Editoři

Část 1: Některé obecné otázky

Kapitola 1

Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice

Naďa Stehlíková

Zkušenost je učitelem všech věcí.
Caesar

1.1 Úvod a formulace problému

O konstruktivizmu a jeho přednostech pro vyučování se v didaktice matematiky mluví asi od 80. let minulého století, přesto jeho principy zůstávají spíše v rovině teoretické než praktické. Konstruktivizmus také dostává celou řadu přívlastků podle toho, jaké aspekty poznání a výuky akcentuje (radikální, sociální, didaktický apod.). V této kapitole není naším cílem podat vyčerpávající evidenci různých typů konstruktivizmu, ani se k jedné z nich jednoznačně přihlásit. Spíše se snažíme *zdůraznit ty jeho principy a aspekty, které prolínají celou touto publikací a k nimž se její autorský kolektiv ve své výzkumné i pedagogické práci hlásí*.

Téměř každá kapitola této publikace se tak či onak dotýká problematiky konstruktivistických přístupů k vyučování matematice a řeší či ilustruje některý jejich aspekt. Děje se tak jak v rovině teoretické, tak praktické. Proto se v dalším textu budeme na vhodném místě na jednotlivé kapitoly odkazovat.

V oddíle 1.2 podáme stručnou charakteristiku konstruktivizmu v pedagogice a psychologii. Hlavní náplní kapitoly bude charakteristika konstruktivistických přístupů k vyučování matematice (oddíl 1.3) nejdříve prostřednictvím tzv. desatera konstruktivizmu, které zformulovali M. Hejný a F. Kuřina, a poté si podrobněji všimneme těch aspektů, které považujeme za důležité: aktivita žáka či studenta (oddíl 1.3.1), role učitele a žáka, komunikace (oddíl 1.3.2), podnětné prostředí (oddíl 1.3.3), výsledek poznání (oddíl 1.3.4). Nakonec vymezíme transmisivní vyučování jako polaritní přístup k přístupu konstruktivistickému (oddíl 1.4).

1.2 Konstruktivizmus

> [Konstruktivizmus] v psychologických a sociálních vědách směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností.
>
> (Hartl; Hartlová 2000, s. 271)

Uvedený citát je ilustrací, že konstruktivizmus není jasně vymezenou teorií, ale že se skládá z mnoha proudů a neustále se vyvíjí.

Tak můžeme mluvit o tzv. *radikálním konstruktivizmu* (např. Glasersfeld 1995), který, stručně řečeno, zavrhuje vše, co je vně světa zkušeností jedince. Na rozdíl od behaviorizmu, který nebere v úvahu existenci mentálních konstruktů nepřístupných přímému pozorování a poznání považuje za objektivní a nezávislé na poznávajícím, považují zastánci radikálního konstruktivizmu pravdu za důsledek společenského konsensu a nepřipouštějí možnost „objektivní“ pravdy. To vede např. k tomu, že poznávající jedinec nemůže nikdy dosáhnout znalosti reálného světa.

Psychologové mluví o *kognitivním konstruktivizmu*, jehož základy lze vysledovat i v pracích klasiků (Piaget 1985, Dewey 1932). Poznávání se děje konstruováním tak, že si poznávající jedinec spojuje fragmenty informací z vnějšího prostředí do smysluplných struktur a provádí s nimi mentální operace, které odpovídají úrovni jeho kognitivního rozvoje (Průcha aj. 2001).

Práce L. Vygotského (např. Vygotskij 1970, 1976) jsou základem tzv. *sociálního konstruktivizmu*, který zdůrazňuje nezastupitelnou roli sociální interakce a kultury v konstrukci poznatků. Z. Kalhous aj. (2002, s. 55) zdůrazňují, že „učení ... je proces zároveň osobní i sociální, který nastává tehdy, když jedinci spolupracují na budování (konstrukci) sdílených, společných porozumění a významů.“ Výstižné srovnání kognitivního a sociálního konstruktivizmu lze nalézt v této knize na straně 52.

1.3 Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice

Myšlenka konstrukce vlastního poznání je stará více než dvě tisíciletí. Sokrates, který vedl své diskusní partnery k poznání tím, že jim kladl dobře promyšlené otázky, sám sebe přirovnával k porodní bábě. Podobně jako ona pomáhá na svět dítěti, on *pomáhá na svět myšlence* dřímající v hlubokém zákoutí vědomí jeho diskusního partnera. Fenomenologie mluví o *vynořování* nového poznání z poznání existujícího a nových podnětů. Popsaný přístup nazýváme *konstruktivistický* a mluvíme o *podnětném vyučování*.[1]

Za vstup do současné celosvětové konstruktivistické iniciativy didaktiků matematiky lze považovat práci (Davis; Mahler; Noddings 1990). Z dalších jmenujme např. (Noddings 1990, Glasersfeld 1990, 1995, Bertrand 1998, Ernest 1994, Ahtee; Pehkonen 1994). V české didaktice matematiky se tento proud projevil nejdřívě v práci F. Kuřiny.

Pro konstruktivistické přístupy k vyučování matematice je příznačné „aktivní vytváření části matematiky v mysli žáka. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé.“ (Kuřina 2002b). Zásadní roli hraje motivace, neboť bez motivace lze těžko očekávat od žáka či studenta aktivitu. Žák či student, „který nebude k učení motivován, si žádnou poznatkovou strukturu nevybuduje, ba on ji ani budovat nezačne, neboť k tomu je třeba jeho aktivita“ (Kuřina 2002b). Motivačně by měly působit i samy otázky a problémy, které jsou studentům předkládány, případně které navrhnou studenti sami.[2]

M. Hejný a F. Kuřina (1998, 2001) přetvářejí obecný konstruktivistický přístup k vyučování v tzv. *didaktický konstruktivizmus*, který bere v úvahu specifika vyučování matematice. Formulují přitom deset zásad, které popisují jejich pojetí k vyučování matematice (s. 160–161, zásady jsou zkráceny):

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.[3]
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání (viz kap. 2).

[1]Termín navrhla J. Cachová při překladu anglického termínu *investigative teaching*.

[2]Řadu příkladů je možno nalézt v následujících kapitolách, kde studenti sami navrhli směr dalšího zkoumání, který se často lišil od směru původně zamýšleného učitelem.

[3]Didaktický konstruktivizmus je svým důrazem na sociální interakci a komunikaci ve třídě podle našeho názoru blíže sociálnímu konstruktivizmu.

F. Kuřina dále mluví o tzv. *realistickém konstruktivizmu*, který lépe odpovídá reálným možnostem aplikace konstruktivistických přístupů ve výuce. Kromě výše uvedených zásad zdůrazňuje také možnost transmise určitých partií (všimněme si, že tak činí v intencích základního principu konstruktivizmu, tj. vytváření matematiky v mysli poznávajícího jedince):

> Při řešení . . . problému můžeme přirozeně sdělovat žáku všechny potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na poznatky v příručkách a encyklopediích, ale *vše ve službách rodící se matematiky v duševním světě žáka*. Konstruktivní vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh. (Kuřina 2002b, s. 6)[4]

Realistický konstruktivizmus sice zdůrazňuje nutnost řešení problémů a problémových situací pro poznávání jedince, nicméně mluví explicitně i o čerpání podnětů z okolního světa a zprostředkovaně z učebnic a další literatury, případně prostřednictvím výpočetní techniky a internetu. Vždyť ne všechno se dá vymyslet, k učení potřebujeme i informace.

> (například že procento označujeme %). Hlubší poznání jako „co je to procento" či „k čemu je procento užitečné" by však už mělo vznikat v žákově vědomí jeho vlastní konstrukcí. (Hejný; Stehlíková 1999, s. 33)

V následujícím textu rozvineme podrobněji ty aspekty konstruktivistické výuky, které považujeme za zásadní. Oddíl 1.3.1 se bude týkat zejména zásad 1, 2, 3 a 4, oddíl 1.3.2 zásad 6 a 8, oddíl 1.3.3 zásad 2 a 5 a konečně oddíl 1.3.4 zásad 7 a 9. I když tyto aspekty budeme prezentovat odděleně, ve skutečnosti tvoří složitou, vzájemně provázanou strukturu.

1.3.1 Aktivita žáka či studenta

> Learning mathematics requires construction, not passive reception, and to know mathematics requires constructive work with mathematical objects in a mathematical community.[5] (Davis; Maher; Noddings 1990, s. 2)

Všechny konstruktivistické koncepce vyučování mají jedno společné – tvrdí, že poznání jedince je založeno na jeho aktivitě (např. Tonucci 1991, Štech 1992, Spilková

[4]Kurzívou zdůraznila autorka kapitoly.

[5]Učit se matematice vyžaduje konstrukci, ne pasivní přijetí, a znát matematiku vyžaduje konstrukční práci s matematickými objekty v matematické komunitě. (Vlastní překlad.)

1997). Chápou učení jako aktivní proces, v němž si žáci konstruují své vědění, žák musí dostat příležitost s učivem pracovat (Kalhous aj. 2002).

Pro aktivitu žáka je ovšem nutná zejména *motivace* jako první předpoklad úspěšného poznávacího procesu. Zde zdůrazňujeme zejména vnitřní motivaci.[6] Dalším předpokladem aktivního přístupu žáka jsou podněty, které dostane a které by měly vést k jeho samostatné (či skupinové) matematické práci (viz oddíl 1.3.3). Zásadní roli hraje učitel, jeho schopnost předkládat problémy, řídit práci třídy, reagovat na žákovu práci, chyby a otázky (viz oddíl 1.3.2).

1.3.2 Role učitele a žáka, komunikace

Klíčová role bývá v konstruktivistickém vyučování přisuzována učiteli.[7] Y. Bertrand (1998) upozorňuje, že ústřední místo má sice vlastní činnost jedince, ale nemůže být ponechán jen sám sobě.

> V omezeném čase vyučování není prakticky žádná možnost, že žák zvládne [vše] sám, jestliže není uveden do záměrně připravených situací . . . , jestiže nemá k dispozici jisté množství signifikantních prvků (dokumenty, experimenty, argumenty) a jestliže nedostal jistý počet formálních postupů (symboliku, grafy, schémata či modely), které může při svém postupu používat. (Bertrand 1998, s. 75)

To však neznamená, že učitel pouze předává žákům hotové a utříděné poznatky. M. Hejný a N. Stehlíková (1999, s. 33) charakterizují jeho roli takto:

> Učitel, který je vedený snahou maximálně přispět k formování žákovy osobnosti, zejména k jeho *kognitivnímu* a *metakognitivnímu růstu*, nepředkládá žákovi hotové kusy poznání, ale ukazuje mu cesty, kterými se on sám k takovému poznání může dopracovat. Odkrývá žákovi svůj intimní vztah k matematice a předkládá mu problémy, při jejichž řešení může žák zažít krásné chvíle poznávání pravdy. Je ochotný vyslechnout si žákovo vyprávění o jeho cestě za hledáním řešení, umí mu být dobrým partnerem v diskusi, ale hlavně umí spolu s ním prožívat žákovu radost, která provází každý nový objev. Žákovi, který neumí s problémem pohnout, který při opakovaně neúspěšných pokusech propadá beznaději, umí nabídnout doplňující otázky i rady, umí mu dodat víru a sebedůvěru. Vede žáky k tomu, aby si každý z nich zkonstruoval svůj vlastní, autentický obraz matematického světa, vybudovaný na vlastních zkušenostech.

[6] Některá motivační prostředí jsou rozpracována ve třetí části této publikace.

[7] Podrobněji jsou role učitele i žáka charakterizovány též např. v (Cachová 2003). V kap. 3 je podána ilustrace role učitele.

Na učiteli záleží, zda bude úloha či problém předložen konstruktivisticky nebo ne (viz oddíl 1.3.3), on musí rozhodnout, který způsob prezentace je pro žáky v dané chvíli nejlepší. V konstruktivisticky vedené výuce vede učitel se žáky diskusi o předložených problémech a jejich řešení, monitoruje tuto diskusi a umožňuje třídě i jednotlivému žákovi ve třídě kognitivní rozvoj.[8]

Žák či student hraje v konstruktivisticky vedené výuce aktivnější roli než ve výuce transmisivní (viz oddíl 1.4). Je veden k samostatnému zkoumání, ke kladení vlastních otázek, k posuzování výsledků a názorů jiných. Mluvíme také o autoregulaci učení (Mareš 1998). Žák se také učí zvyšovat svou citlivost na přítomnost chyby v práci své i ostatních a s touto chybou pak pracovat, tj. poučit se z ní a provést sám korekci. Problematika žákovy i učitelovy chyby v konstruktivisticky vedeném vyučování je pojednána a bohatě ilustrována v kap. 4, proto se jí zde podrobněji zabývat nebudeme.

Konstruktivisticky vedená výuka je často realizována prostřednictvím kooperativního vyučování (Kasíková 1997) a práce ve skupinách. Do popředí se tak dostává problematika komunikace mezi žáky i mezi žákem a učitelem. Komunikace mezi žáky je chápána jako prostředek, kterým si žáci navzájem sdělují své poznání, jež si sami zkonstruovali (Jaworski 1994). To umožňuje společnou konstrukci poznatků, kdy jsou žáci schopni přijmout poznatek někoho jiného a použít jej aktivně k vlastní konstrukci.[9] „V diskusi ve třídě se [žák] dostává do kontaktu s ostatními spolužáky, kteří mají také své vlastní konstrukce. Porovnáním toho, co on sám ví, s tím, co se dozví od nich, pak přehodnocuje své zkušenosti a jeho poznání se mění.“ (Jaworski 1994.)

Právě aktivní přejímání poznatků od jiných je podle J. Cachové (2003) jedním z aspektů, které odlišují konstruktivisticky vedenou výuku od *problémového vyučování*, v níž „žák samostatným zkoumáním dané problémové situace, formulací a řešením úloh dospívá k pochopení a tvorbě matematických pojmů a postupů k řešení problémů“ (Kuřina 1976, s. 14).

Komunikace představuje jeden z klíčových aspektů konstruktivisticky vedeného vyučování a jako taková se dostává do popředí našeho zkoumání. V kap. 3 je prezentována teorie M. Hejného, která klade do protikladu konstruktivistickou a transmisivní interakční strategii učitele a zkoumá jejich praktický dopad na výuku.

1.3.3 Podnětné prostředí

Uvedli jsme, že podle konstruktivistického přesvědčení je k nabytí poznání nutná intelektuální aktivita žáka a že důležitou, dokonce rozhodující roli zde hraje vnitřní motivace

[8]Problematika diskuse ve vyučování matematice je pojednána zejména v kap. 5 a hlavní pozornost je věnována nedorozumění v komunikaci.

[9]Ilustrace společné konstrukce poznatků je podána např. v kap. 16, oddíl 16.5, konstrukce vztahu afinity a obsahu, a v kap. 12, oddíl 12.3, problémová situace měření úseček, oddíl 12.4, konstrukce pythagorejských trojic.

žáka. Úlohou učitele pak je tuto motivaci navozovat. Protože výuka se odehrává v kolektivu, jsou faktory, které zde působí, jak sociální, tak psychologické a jistě i kognitivní. Součinností všech faktorů je ve třídě vytvářeno jisté prostředí a cílem konstruktivisticky zaměřeného učitele je, aby toto prostředí bylo podnětné, aby povzbuzovalo zvídavost žáků, aby jim dopřálo pocit radosti z nového poznání i pocit sociální seberealizace. O sociálních a psychologických faktorech pojednává kap. 3. Pokud jde o faktory kognitivní, potřebné jsou takové podněty, které jim umožní propojovat nové poznatky s již existujícími zkušenostmi a poznatky a které současně vycházejí z jejich předchozích zkušeností se světem, který je obklopuje. Požadavek spojení podnětů v matematice s reálným životem často vede k, podle našeho názoru, nesprávnému názoru, že všechny úlohy mají být reálné. Domníváme se, že ona reálnost nevychází pouze ze světa, který nás obklopuje, ale týká se propojenosti na životní zkušenost daného jedince. Tak může být pro dítě reálný kontext, který je pro dospělé naprosto imaginární (např. „oblékání“ krychle v kap. 10), či který je čistě matematický (např. triády v kap. 25 a číselná dvojčata v kap. 24).

Domníváme se, že podněty a úlohy samé nelze považovat za buď konstruktivistické, nebo transmisivní. „Podněty tvoří spolu s konkrétní pedagogickou situací, ke které se váží, jeden celek, a tak je na ně také třeba nahlížet.“ (Cachová 2003.)

Konkrétněji lze říci, že uzavřená úloha se zpravidla[10] dá přeformulovat na otevřenou, která povede k samostatné práci žáka či studenta.[11] Naopak zajímavá úloha, která by potenciálně mohla vést k vlastní konstrukci poznatků, může být učitelem uchopena instruktivně, když např.

- dá dítěti řadu návodů, které ho vedou krůček ke krůčku k výsledku,
- předčasně mu prozradí výsledek,
- upozorní ho na chybu, aniž by jej nechal nejdříve chybu samostatně odhalit,
- vede dítě k použití strategie, o níž se domnívá, že je nejvhodnější (zpravidla ta, která je nejrychlejší a nejekonomičtější), aniž by jej nechalo rozvinout vlastní strategie, apod.

V této souvislosti mluví M. Trch a E. Zapotilová (kap. 11) o tzv. motivujících úlohách a provokujících otázkách a popisují požadavky na ně kladené, aby mohly být využity v práci s budoucími učiteli 1. stupně základní školy. Podobně se problematikou vhodných úloh zabývá kap. 10, kde jsou nazývány tvořivé. Např. oddíl 10.8 je věnován takovým úlohám, při jejichž řešení si řešitel sám „nastavuje“ rychlost zobecňování.

Vlivu učitele na průběh výuky stejného tematického celku je věnována kap. 15, v níž autorky analyzují příčiny odlišnosti výsledku výukového procesu, který byl založený na stejných matematických podnětech. Tyto odlišnosti stejně jako výše řečené ukazují, že je

[10] Ale ne vždy, viz např. nácvikové úlohy.

[11] Viz např. kap. 10, úloha 1, a kap. 16 a dvojí formulace úloh vedoucích k analytickému vyjádření rotace v oddíle 16.4.2.

obtížné zpracovat učebnici či partii učiva konstruktivisticky. To je jeden z důvodů, proč se v této publikaci snažíme konstruktivistické přístupy podrobně ilustrovat a popisovat různé aspekty předložené učební epizody, a to včetně reakcí žáků a studentů a činnosti učitele, a proč se neomezujeme na pouhou prezentaci matematických podnětů a úloh.

1.3.4 Výsledek poznání

V konstruktivisticky vedeném vyučování se zdůrazňuje role *prekonceptu* (předpojmu, spontánního konceptu) v poznávacím procesu. J. Jodelet (1984) jej charakterizuje jako „referenční systém, v jehož rámci probíhá transformace, integrace a osvojení nových či odlišných informací nebo reprezentací“. Prekoncepty nelze chápat jako mylné koncepty, ale spíše hrají roli prostředníka mezi matematickým poznatkem a myšlenkovými strukturami žáka či studenta. Učiteli dávají nahlédnout do jejich momentální úrovně znalostí. Prekoncepty nejsou „ani odrazové můstky, ani výsledky konstrukce poznání. Jsou samotnými nástroji této činnosti. Jsou neustále přebudovávány a nový poznatek musí být integrován do preexistujících struktur, které má žák k dispozici.“ (Bertrand 1998, s. 69.) Mluvíme pak o strukturaci poznatků.

Poznání založené na vlastní zkušenosti, na žákovských prekonceptech a na vlastní konstrukci poznatků vede v ideálním případě k poznatkům, které jsou kvalitnější než poznatky získané v transmisivním vyučování, a to z hlediska:

- Provázanosti na další, již existující poznatky. Tam, kde je kognitivní síť poznatků hustší, je poznání kvalitnější. Důsledkem pro vyučovací proces je větší důraz na souvislosti mezi pojmy spíše než na fakta.[12]

- Míry autonomie poznávacího procesu. V konstruktivistickém vyučování je jedinec veden k tomu, aby navrhoval způsob řešení problému předloženého učitelem a aby si postupně kladl nové otázky a problémy.[13]

- Trvanlivosti. Jedinec si spíše vybaví, popř. zrekonstruuje, poznatek, který si sám zkonstruoval, než který se naučil zpaměti.[14] Proces konstrukce je nutně interní. Pracuje s objekty, které již ve vědomí jedince existují, které jsou mu vlastní. Je tedy strukturotvorný a nové poznání je organickou součástí této struktury. Proto je trvanlivý.

[12]Např. v kap. 16, oddíl. 16.4.6, je uvedena projekce této zásady do hodnocení vysokoškolského studenta – studenti mají při písemné zkoušce k dispozici materiály podle svého výběru, což jim umožní soustředit se na pojmy a vztahy mezi nimi místo učení se zpaměti definic a algoritmů.

[13]Např. kap. 12, oddíl 12.4, a kap. 16, oddíl 16.5.

[14]Srovnej s reakcemi studentů v kap. 16, oddíl 16.6.

Konstruktivisticky vedené vyučování směřuje k rozvoji žákovy osobnosti, k rozvoji jeho kognitivních a metakognitivních schopností. Z hlediska matematiky jde o rozvoj matematických schopností. Řada z nich je podána v kap. 10, s. 190.

Pět navzájem spojených typů „umění“ formulovaných F. Kuřinou, které lze rozvíjet na všech úrovních matematických znalostí, lze též nahlížet jako výsledek poznání v konstruktivisticky vedené výuce.

> Východiskem ke konstruktivně pojatému vyučování matematice je studium matematiky samé, a to nikoliv z hlediska jejích forem obvykle uspořádaných v monografiích (axiomy, definice, věty, důkazy, algoritmy, modely, . . .), ale z hlediska cest, které k takovýmto výsledkům vedly (otázky, problémy, příklady, experimenty, hypotézy, chyby, . . .). Základní roli tedy hrají ony dovednosti, ona umění, která matematiku utvářela v historii a jejichž pěstováním lze matematiku přiblížit studentům. Nejdůležitější z těchto umění patrně jsou:
> – umění počítat,
> – umění vidět,
> – umění sestrojovat,
> – umění dokazovat,
> – umění abstrahovat. (Kuřina 2002b, s. 4)

1.4 Transmisivní vyučování

Učení bez myšlení je marné a zbytečné.
Konfucius

Představíme-li si konstruktivistické vyučování jako jeden pól spektra, na opačné straně budeme mluvit o *transmisivním vyučování*. Ve stručnosti jde o vyučování zaměřené na výkon žáka spíše než na rozvoj jeho osobnosti.[15] Učitel se v transmisivně vedené výuce snaží předat žákům a studentům již hotové znalosti v dobré víře, že toto je nejlehčí a nejrychlejší cesta k poznání. Žák je viděn v roli pasivního příjemce a ukladatele vědomostí do paměti, aniž by se kladl důraz na jejich vzájemné propojení.[16] Z. Kalhous aj. (2002, s. 49) zmiňují metaforu skladu: „V transmisivním pojetí jako by vyučování bylo podobné přidávání zboží (znalostí) do skladu (žákovy mysli), kde příliš nezáleží,

[15] A. Sierpinska (1994) nazývá podobné vyučování behavioristické (behaviouristic), J. Confrey (1990) mluví o přímém vyučování (direct).

[16] To však odporuje přirozenému procesu poznávání: „. . . dobrý učitel podvědomě tuší, že dítě od narození, na základě vlastní zkušenosti se světem, který je obklopuje, si pomalu buduje svůj vnitřní svět. Ten postupem času uzpůsobuje myšlenkovému světu společnosti, v níž žije, i celému kulturnímu prostředí.“ (Cachová 2003)

co už je v sousedních odděleních skladiště.“[17] Transmisivní způsob výkladu, který má charakter instrukce, nazýváme *instruktivní*.

Roli učitele v transmisivní výuce lze shrnout takto:

> Učitel v roli trenéra vede svěřence k podání maximálního výkonu u životně důležité zkoušky. Cvičí žáka v řešení typových úloh, které je možné na zkouškách očekávat, ukazuje mu triky, kterými může řešení zlehčit či urychlit. Častým opakováním vštěpuje do žákovy paměti přesné formulace definic, vět, někdy i důkazů. Ve snaze ulehčit žákovi učení hledá cesty, jak jednotlivé poznatky a poznatkové celky nahustit do dobře zapamatovatelných *instrukcí*, pouček, vzorců, grafů, tabulek, schémat, obrázků, přehledů, návodů a sloganů. Ví, že matematické vědomosti značně zatěžují žákovu paměť, a proto se snaží jejich skladným uzpůsobením žákovu paměť trochu odlehčit. (Hejný; Stehlíková 1999, s. 31)

Role žáka je v tomto typu vyučování omezená. Požaduje se od něj, aby se předkládaná fakta nejen naučil, ale aby si je i osvojil a utvrdil, tj. aby je uměl rychle a bezchybně aplikovat na standardní úlohy, anebo aby je uměl přesně odříkat, zejména tehdy, když to potřebuje. J. Mareš tuto roli charakterizuje takto:

> [U transmisivního vyučování][18] je žák v **závislém postavení**, učitel zastává roli **experta**, **direktivní autority**, **trenéra**. ... Zvýrazňují se nedostatky v žákově výkonu, počítá se s jeho nesamostatností, potlačuje se jeho odpor, odměňuje se úsilí, snaha přizpůsobit se, podřídit se. Centrem učitelova zájmu bývá učivo, nikoli žák a jeho rozvoj. (Mareš 1998, s. 165, podle G.O. Growa, 1991)

Dodejme, že transmisivní vyučování bývá zdrojem formálního poznání (viz kap. 2). Na druhé straně F. Kuřina upozorňuje, že transmisivní přístup může vyučovací proces vhodně doplňovat (viz citát F. Kuřiny, s. 14). Podobně Z. Kalhous aj. (2002) nestavějí nutně transmisi a konstrukci do opozice, ale považují transmisi za nutnou pro fakta, která přejímáme bez konstrukce.

Dodejme, že toto stanovisko je odpovědí na námitky proti radikálnímu konstruktivizmu, které mu vytýkají „příliš velký důraz na zábavu a opomínání procvičování a pamětního učení“ (Průcha aj. 2001).

Na závěr uvedeme přehlednou sumarizaci hlavních rozdílů konstruktivistického a transmisivního edukačního stylu (tab. 1.1). Tato sumarizace samozřejmě nemůže být úplná, obsahuje však to, co považujeme za nejdůležitější.

[17] O kumulativním modelu narůstání poznání píšeme v oddíle 2.3.

[18] Autor používá termín „tradiční vyučování“. Zvýraznění textu je autorovo.

1.5 Závěr

V této kapitole jsme vymezili dva polaritní přístupy k vyučování matematice, konstruktivistický a transmisivní. Přitom jsme se dopustili velkého zjednodušení, a to proto, aby vynikly rozdíly mezi oběma póly; realita vyučování je zpravidla někde mezi nimi a je úkolem učitele, aby odhadl, jaká míra „konstruktivnosti“ či „transmisivnosti“ je pro daný okamžik vhodná. Podrobněji jsme pojednali o konstruktivistickém přístupu a popsali jej pomocí základních charakteristik: důraz na aktivitu poznávajícího jedince, měnící se role učitele a žáka či studenta, důraz na komunikaci, nutnost použít podnětná prostředí, kvalita výsledného poznání. Záměrně jsme se vyhnuli podrobným ilustracím, které podávají následující kapitoly této publikace.

	polaritní dipól	**konstruktivistické vyučování**	**transmisivní vyučování**
1	hodnota poznání	kvalita	kvantita
2	motivace	vnitřní	vnější
3	trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
4	vztah učitel–žák	partnerský	submisivní
5	klima	důvěry	strachu
6	nositel aktivity	žák	učitel
7	činnost žáka	tvořivá	imitativní
8	poznatek žáka	produktivní	reproduktivní
9	nosná otázka	CO? a PROČ?	JAK?

Tab. 1.1 Srovnání transmisivního a konstruktivistického vyučování (Hejný; Stehlíková 1999, s. 33)

Kapitola 2

Mechanizmus poznávacího procesu

Milan Hejný

2.1 Cíl studie

Vážný nedostatek, kterým vlekle trpí vyučování matematice na všech stupních našich škol, spočívá v nízké kvalitě matematických znalostí a schopností studentů. Vyučování je zaměřeno na nácvik řešitelských procedur standardních úloh a paměťové učení se faktům, algoritmům, definicím, tvrzením, důkazům a vzorcům. Ve studijním stylu studenta převládá imitace a reprodukce nad spekulací a tvořivostí. Znalosti studentů jsou uchovány pamětí jako víceméně izolovaná fakta, jsou nedostatečně strukturovány a jejich aplikační síla je nízká. Takové znalosti nazýváme formální.

Nízkou kvalitou matematických poznatků trpí žáci ve všech zemích světa, i když v různé míře. Je proto pochopitelné, že didaktika matematiky v mnoha zemích věnuje této problematice zvýšenou pozornost. V posledních dvaceti letech je to zejména snaha porozumět poznávacímu procesu, tedy tomu, jak se dítěti otevírá svět matematiky a jak se jej postupně žák či student zmocňuje. V současnosti existuje více teorií popisujících poznávací mechanizmus. Teorie, kterou zde předkládáme, vznikala postupně. Nikoli jako teorie, ale jako soubor myšlenek zaměřených na zkvalitnění vyučovacího procesu. Některé další a daleko známější teorie stručně zmiňujeme na konci odstavce 2.4.

Autor začal v roce 1975 v 5. ročníku základní školy dlouhodobý experiment, jehož hlavním cílem bylo hledat možnosti takové výuky matematiky, která by podstatně oslabila formalizmus poznatků žáků. Vůdčí myšlenkou záměru bylo přesvědčení převzaté od jeho otce V. Hejného, že kvalitní poznání nemůže učitel žákovi předat, ale žák se k němu musí dobrat samostatně. Těžištěm vyučování tedy není výklad, ale vhodná série úloh. V současnosti je tento princip hlavní zásadou konstruktivizmu.

Již v průběhu prvních měsíců experimentu autor poznal, že myšlenkové pochody žáků jsou různé. Liší se nejen rychlostí a matematickou vyspělostí, ale i kognitivním uzpůsobením. Jedna věc však byla společná všem poznávacím procesům: bylo to náhlé uzření nové pravdy, nabytí vhledu do několika do té doby nepropojených žákových zkušeností. Toto zjištění se pak stalo východiskem mnohaletého výzkumu zaměřeného na řešení následujícího problému:

Jak se člověk zmocňuje matematického poznatku? Které faktory jsou pro zrod nového poznatku rozhodující? Které faktory naopak takovému procesu brání?

V průběhu několika let jsme pak dospěli k relativně konsistentnímu modelu mechanizmu poznávacího procesu, který se stal naším nástrojem jak při výzkumu (pomáhá při analýze žákovských myšlenkových procesů, pomáhá hledat další poznávací mechanizmy), tak ve výuce. Mechanizmus je účinný pomocník při konstrukci diagnostických nástrojů, při hledání příčin žákovských chyb, při konstruování reedukačních postupů a zejména při tvorbě takové výukové strategie, která snižuje nebezpečí vzniku formálních poznatků a má tedy, z hlediska nemoci formalizmu, preventivní charakter.

Konstrukce mechanizmu vycházela z experimentálního vyučování autora, ale výrazně využívala mnohaleté pedagogické zkušenosti i pedagogickou filosofii autorova otce, dále i některé myšlenky J. Piageta (1985) a L.P. Vygotského (1970, 1976), později, při hlubším rozpracovávání mechanizmu, byly využity i myšlenky dalších autorů. Z prací Piageta byla při konstruování mechanizmu využita především metoda popisu kognitivního vývoje pomocí (a) vývojových stádií (etap) a (b) změn, k nimž dochází při přechodu od etapy dřívější k etapě následující. Z prací L.P. Vygotského byly využity myšlenky pojmového učení, vnitřní řeči, i zákon vnitřní nervové činnosti (vyšší psychická funkce se tvoří z funkce interpsychické). Mechanizmus byl v průběhu následujících let dále rozpracováván a prezentován v různých článcích. Nejúplněji v knize (Hejný; Kuřina 2001, s. 98–118) a v článku (Hejný 2003a).

Cílem této studie je podat současný stav našeho poznání uvedeného mechanizmu, a to způsobem, který je určen odborníkům. Dříve než tak učiníme, uvedeme typologii matematických poznatků, ke které se mechanizmus vztahuje, a dvě strategie tvorby matematické struktury ve vědomí člověka.

2.2 Typologie matematických poznatků

Matematické poznání člověka má dvě rozsáhlé oblasti, které pokrývají většinu tohoto teritoria lidského intelektu: *obsah* a *schopnosti*. Naše znalost obsahu matematického poznání je dosti bohatá, abychom se mohli pokusit o jisté uspořádání této oblasti. Bohužel naše znalost souboru matematických schopností zatím na takové úrovni není. Překážkou pro vytvoření takové organizace je i skutečnost, že skoro všechny tyto schopnosti (např.

experimentování, analyzování situace, objevování, argumentace, hledání řešitelské strategie, formulování myšlenky,. . .) přesahují oblast matematiky a jsou součástí komplexní kognitivní a intelektuální výbavy člověka. Právě to ale dokazuje, že rozvoj schopností je závažnější než rozvoj znalostí. Proto, i když se o třídění matematických schopností nepokusíme, budou schopnosti vstupovat do našich úvah jako psychické potence primární důležitosti.

Na oblast obsahu matematického poznání se podíváme blíže. Soubor poznatků roztřídíme do čtyř skupin.

1. *objekty* jsou základní stavební kameny poznatkové struktury (kružnice, trojúhelník, kolmost, posunutí, číslo 5, celé číslo, zlomek, součet, dělitelnost, pořadí, rovnice, funkce, implikace, . . .),

2. *vztahy* vzájemně propojují dva nebo více objektů nebo vztahů. Budeme je dělit na *tvrzení* ($2+3=5$, $7\cdot 8=56$, Pythagorova věta, kritérium dělitelnosti číslem 3) a *vzorce* ($S=\frac{zv}{2}$ – vzorec pro obsah trojúhelníku, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$),

3. *postupy* představují širokou třídu poznatků; sem náleží *algoritmy* a *návody* zaměřené na realizaci procedury nebo řešitelského kroku (návod na písemné násobení, návod na sestrojení rovnostranného trojúhelníku, návod na krácení zlomku), *řešitelské strategie* zaměřené na nalezení řešení nestandardní matematické úlohy, *argumentace* zaměřené na hledání souvislostí jevů a vztahů atd.,

4. *schémata* jsou ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohonásobně opakované zkušenosti a jsou nositelem mnoha konkrétních poznatků, které člověk zná jen nepřímo, tj. dovede je ze schématu vyvodit (např. ze schématu svého bytu dovede vyvodit počet oken, které v bytě jsou, nebo ze schématu krychle počet tělesových úhlopříček tělesa).

Nutno upozornit, že nemluvíme o poznatcích jako takových, ale *poznatcích uložených ve vědomí konkrétního člověka*. Tedy mezi těmito poznatky mohou být i poznatky nepřesné nebo zcela chybné. Uvedené třídění je pouze orientační. Hranice mezi třídami jsou neostré a mnohdy je pouze věcí názoru pozorovatele, zda daný poznatek žáka zařadí mezi vztahy nebo postupy. Zařazení poznatku do té nebo oné třídy může záviset na kontextu, v němž se objeví. Například kritérium dělitelnosti číslem 3 je vnímáno jako tvrzení, jestliže jej má žák dokázat, ale jako návod, jestliže jej použije ke zjištění, zda je číslo 754 dělitelné 3.

Pro naši studii bude nejzávažnější kvalita daného poznatku, tedy míra jeho provázanosti na další poznatky a životní zkušenosti člověka. Provázanost matematických poznatků je spíše záležitostí celého souboru než jednotlivých prvků tohoto souboru. Proto je při zkoumání konkrétního poznatku nutné zkoumat jeho uložení v celé struktuře, zejména pak v té její části, do které náleží. Např. když vidíme, že žák napíše $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{3}{8}$, je jasné, že zde nestačí zaměřit reedukační zásah na porozumění pravidlu pro sčítání zlomků, ale je nutno prověřit kvalitu představy žáka o kmenovém zlomku a o zlomku obecném.

Potřeba zkoumat nejen jednotlivé poznatky, ale i celou matematickou strukturu nebo aspoň její části nás vede k formulování východiskové představy v této oblasti.

2.3 Charakter matematické struktury

Následující úvaha využívá metodu genetické paralely: na poznání fylogeneze nahlížíme jako na inspiraci pro zkoumání ontogeneze.

Popíšeme dva způsoby nahlížení na strukturu matematiky: kumulativní a genetický. Oba po projekci do ontogeneze přinášejí cenné poukazy.

Kumulativní model narůstání poznání předpokládá, že se jednotlivé poznatky do našeho vědomí ukládají jako izolovaná fakta, která se později, když je jich už dostatek, spojí do nového celku představujícího vyšší stupeň poznání. Po jistém čase se několik těchto celků spojí do ještě vyššího celku atd.

Kumulativní model byl vůdčím epistemologickým principem nahlížení na vědecký rozvoj až téměř do konce 19. století. Fylogenetická analýza kumulativizmu v práci V.S. Černjaka (1986, s. 21–32) ovlivnila naši práci na konstrukci poznávacího mechanizmu. Metodou paralely onto a fylogeneze jsme odhalili některé důležité skutečnosti. Například jsme si uvědomili, že nepřiměřený důraz na přesnost formulace bývá zdrojem deformace původně dobré žákovy představy.

V. S. Černjak charakterizuje kumulativní model rozvoje vědy v pěti bodech (Černjak 1986, s. 29–31):[1]

1. Historie vědy je proces hromadění pevně dokázaných pravd.
2. … ústředním problémem klasické epistemologie byl problém *обоснованя ... а не генезиса научного знания*
3. … *заблуждения должны быть напрочь выброшенны из истории науки как не имеющеиее к ней никакого отношеня*
4. Podstata vědy je těsně svázána s problémem demarkace (zejména důležitým pro pozitivizmus), tj. oddělení vědy od všech jiných nevědeckých forem poznání.
5. Nejdůležitější črtou kumulativizmu *является порожденный им образ неизменной и статической истории наук*

[1] 2. . . . založení základů navěky platných pravd, nikoli geneze vědeckého poznání; 3. . . . bloudění musí být z historie vědy vyloučeno jako něco, co k ní nemá žádný vztah; 5. . . . je vytvořený jím obraz neměnné a statické historie vědy. (Vlastní překlad.)

Kumulativní model do značné míry odpovídá transmisivně orientované výuce. Jednotlivé body uvedené výše se projektují do transmisivního edukačního stylu jako zásady, s nimiž se ztotožňuje nemálo učitelů:
1. do žáka je nutno vložit co nejvíce konkrétních poznatků,
2. a 3. musíme chránit žáka před nehotovými a chybnými představami; vše co si bude pamatovat, musí být přesné a bezchybné,
4. nesmíme připustit, aby poznatky, s nimiž žák pracuje, byly výsledkem jeho spekulací,
5. matematiku nutno žákovi prezentovat jako dokonalou a dobře založenou stavbu.

Genetický způsob narůstání kognitivní struktury předpokládá, že jednotlivé poznatky se tvoří jen postupně a v průběhu svého formování se navzájem propojují vazbami funkčnosti, časové následnosti, logické závislosti, důležitosti, ... a vytvářejí strukturu. Ta se neustále variuje, dotváří a upravuje. Neúspěšné cesty za poznáním jsou stejně důležité jako ty úspěšné, protože bez poznání, které přináší analýza chyby, nelze dojít k poznání pravdy. Zvláště důležité jsou situace, kdy v důsledku zásadně nového pohledu na určitou oblast poznatků v ní dochází k *restrukturaci*. Na tuto skutečnost poukázal T. Kuhn (1982). Jeho myšlenku dále rozpracoval L. Kvasz (1999), který popsal čtyři různé typy vědeckých revolucí.

Na následující ilustraci ukážeme, že myšlenku T. Kuhna lze projektovat do ontogeneze a získat tak cenný pohled na některé klíčové momenty restrukturace žákovských představ. Úloha $5-7+4=$ je pro žáka 2. třídy náročná, až neřešitelná, protože pro něj je výraz $5-7$ nesmyslný. Jakmile však pochopí ideu záporného čísla a restrukturuuje svoje dosavadní poznání pojmů „číslo“, stává se tato úloha srozumitelnou, později dokonce standardní (viz kap. 19). Zde nedochází jen k přidání nových poznatků k poznatkům již dříve existujícím (jak tvrdí kumulativní teorie), ale i k zásadní změně poznatků existujících. Změna se týká nejen pojmu číslo, ale i operací s číslem, tedy celé aritmetiky. Zastánci kumulativistického přístupu vůči naší ilustraci namítají, že pracuje s úlohou nelegitimní. Podle nich žák může dostat k řešení pouze úlohy, které nepřesahují již probrané učivo. Tím ale vědomě oddělují školské klima od reálného života, protože tam bude člověk postaven i před problémy, které „se ve škole neprobíraly“. Podle našeho názoru jsou restrukturace pro zdravý vývoj kognice nezbytné. Dokonce soudíme, že kvalitu matematického poznání žáka do značné míry určuje počet žákem uskutečněných restrukturací.

2.4 Mechanizmus nabývání (matematického) poznání

Proces zrození a budovaní matematického poznatku je možné rozložit do série hladin a dvou hladinových přechodů, zdvihů.

1. *Hladina motivace.* Motivace k poznávání pramení z rozporu mezi „nevím“ a „chtěl bych vědět“. Dítě je motivováno vším, co vnímá. Tříleté dítě za den položí tři sta

otázek typu „Proč má pes ocas?“. Žádá tím dospělého, aby mu o psovi povídal. Tato zvídavost po nástupu do školy rychle klesá.

Poznámka. Jestliže je žák k práci přinucen, nemluvíme o motivaci, ale o stimulaci. Terminologický rozdíl opíráme o latinské slova: moveo = hýbám, stimulo = bodám, píchám, popoháním. Jiná možnost interpretace obou slov spočívá ve zdůraznění časově dlouhodobé motivace a do okamžiku zhuštěné stimulace.

2. *Hladina separovaných modelů.* Jde o postupné nabývání zkušeností s konkrétními případy budoucího poznání. Čím víc takových různorodých modelů dítě pozná, tím pevnější bude jeho výsledné poznání. Mezi těmito separovanými modely hrají důležitou roli modely překvapivé, modely zdánlivé a ne-modely.

   Překvapivým nazýváme takový model objektu, který se tváří, že jím není, i takový, jehož existenci jsme vůbec nepředpokládali. Tak číslo $\frac{51}{17}$ se tváří jako zlomek, ale je to číslo tři, číslo $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$ se tváří jako iracionální, ale je to číslo dvě.

   Žáci 7. ročníku byli velice překvapeni, když zjistili, že existuje trojúhelník s obsahem 1 cm^2, jehož každá strana je delší než 100 cm, a matematici $18.$ století byli překvapeni objevem spojité funkce, která v žádném bodě nemá derivaci.

   Zdánlivým modelem rozumíme něco, co modelem daného objektu není, ale může se tak jevit. Například čtverec, jehož úhlopříčky jsou ve svislé a vodorovné poloze, se jeví mnoha žákům jako kosočtverec, desetinné číslo $4{,}6$ jako sudé a funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ se jeví studentům jako klesající.

   Pod *ne-modelem* rozumíme takový jev, který ilustruje komplement zkoumaného objektu. Například při zavádění pojmu konvexní útvar ukážeme i útvar, který není konvexní.

3. *Zobecnění.* Separované modely uložené ve vědomí člověka nejdříve odděleně na sebe začnou vzájemně poukazovat, různě se seskupovat a organizovat, až dojde k jejich strukturaci, k hlubšímu a operativnějšímu vhledu do dosavadního poznání. Často se jedná o krátký časový interval, v němž ve vědomí vznikne to, co nazveme generický model.

4. *Hladina generických modelů.* Generický model je prototypem buď všech, nebo jisté skupiny separovaných modelů. Může zastupovat kterýkoli ze separovaných modelů této skupiny a působí ve skupině jako její organizační agent. Generickým modelem pro počítání předmětů jsou zejména prsty a počítadlo. Pro poznávací proces, v jehož jisté etapě se objeví více generických modelů, je důležité jejich vzájemné uspořádání.

5. *Abstrakční zdvih* dává zrod *abstraktnímu poznání*. Soubor separovaných a generických modelů je restrukturován a nový vhled má abstraktnější charakter – je často provázen symbolickým záznamem, který novou strukturu reprezentuje.

6. *Hladina krystalizace*. Nové poznání se propojuje na předchozí vědomosti. Nejdříve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání. Obvykle jde o dlouhodobý proces.

Hladina *automatizace* do poznávacího procesu nenáleží, proto ji nečíslujeme. Je to nácvik již známého. Ve vyučování hraje důležitou, často však bohužel negativní roli.

Posloupnost hladin do jisté míry odpovídá časovému průběhu poznávacího procesu. Rozhodně ale není pravda, že až po ukončení hladiny předchozí začíná tvorba hladiny následující. Poznávací proces probíhá většinou tak, že se nová zkušenost otiskuje do několika hladin najednou. Jedině hladina motivace je aktivní v průběhu celého procesu, i když s měnící se intenzitou a orientací.

Poznámka. Koncem roku 2003 autor o mechanizmu poznávacího procesu diskutoval s A. Simpsonem (UK). Jeho přesné kritické připomínky a terminologické návrhy vedly k úpravám této kapitoly a změně dvou až do této doby používaných termínů. Původní termín „etapa“ byl změněn na „hladina“ a původní termín „univerzální model“ byl změněn na „generický model“. Anglické slovo „generic“ podle *Cambridge International Dictionary of English* (1995) značí: „. . . typical of or relating to a whole group of similar things, rather than to any particular thing.“[2]

Ilustrace 1. Adéla, posluchačka primární pedagogiky na PedF UK, udělala při počítání s odmocninami následující chybu: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Požádali jsme dívku, aby rovnost prověřila na číslech $a = 16$, $b = 9$. Adéla s překvapením zjistila, že rovnost neplatí. Pro jistotu ji ještě prověřila na kalkulačce a ještě na dalším příkladě ($a = 1$, $b = 2$). Chvíli jí trvalo, než se s tím smířila. Později o této své zkušenosti řekla, že ji nejvíce fascinovalo, jak je možné „to o těch písmenech kontrolovat pomocí čísel“.

Komentář 1. Zkušenost, kterou Adéla získala při prověřování vztahu $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, vstoupila do tvorby nejméně dvou poznatků: 1. uvedená úprava je chybná a 2. obecné identity lze prověřovat pomocí dosazení konkrétních čísel. Je jasné, že oba zmíněné poznatky jsou hodně různé. První je faktografický, druhý metodologický.

Popsaný mechanizmus je vhodné doplňovat dalšími nástroji výzkumu: teorií reifikace (Sfard 1991), teorií proceptu (Gray; Tall 1994), APOS-teorií (Dubinsky 1991) apod. Hlavní síla našeho mechanizmu spočívá v jeho schopnosti diagnostikovat formální poznatek a ukázat na možnost jeho reedukace.

V další analýze motivaci nezkoumáme, protože leží vně kognitivní oblasti, na kterou je naše studie zaměřena. Nicméně v ilustracích se motivace objeví. Například v ilustraci 2 uvidíme, jak motivace utlumila touhu poznávat, a v ilustraci 5, jak ji silně podepřela.

[2]Typický pro nebo vztahující se ke skupině podobných věcí, spíše než k nějaké konkrétní věci. Vlastní překlad.

2.5 Separované modely

Modely příštího poznatku přicházejí do vědomí postupně a po dlouhou dobu. Často i v době, kdy již probíhá krystalizace. Tuto dlouhou dobu rozložíme na pět podhladin:

1. První konkrétní zkušenost, první model, který je *zárodkem* (germem) příštího poznání.

2. Postupný příchod dalších a dalších separovaných modelů, které stojí zatím izolovaně.

3. Některé modely začnou na sebe navzájem poukazovat, shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká předtucha, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné“.

4. Hledá se podstata oné „stejnosti“ a objevuje se korespondence (morfizmus) mezi některými modely. Soubor separovaných modelů vytvoří komunitu.

5. Soubor separovaných modelů je dále obohacován, i když ve vědomí člověka je již model generický, nebo dokonce poznatek.

Ilustrace 2. Barborčina maminka často používala vyjádření „na sto procent“. Čtyřletá Barborka tento idiom převzala a používala jej správně na vyjádření naprosté jistoty. Asi o rok později převzala i vyjádření „tak asi na padesát procent“, které maminka používala řidčeji. Jednou na otázku babičky, zda již polévku dojedla, odvětila, že na padesát procent. Když bylo Barborce šest let, najednou se zeptala mámy, co to je na třicet procent. Jako žákyně 2. třídy pak sama začala používat výraz „na nula procent“. V té době jí autor na její otázku, zda půjdeme v neděli na výlet, odvětil, že na devadesát procent. Dívka dobře porozuměla této odpovědi, protože ji vysvětlila o dva roky mladšímu bratrovi slovy „neboj, půjdem“.

Komentář 2. Výraz „na sto procent“, byl pro Barborku zárodkem jejího příštího poznání procent. I když procenta mají charakter kvantity, byl tento model dívkou vnímán jako vyjádření jistoty, tedy kvality. Stejně tak i další separovaný model „na padesát procent“ pochopila jako vyjádření nejistoty. V předškolním věku, pokud je nám známo, znala jen tyto dva separované modely, které na sebe poukazovaly vazbou „na ... procent“. Když se dívce otevřel svět čísel a poznala, co je 100 i co je 50, propojila své dva separované modely s kontextem kvantity a sama vytvořila nový model, který je na rozhraní modelu kvalitativního a kvantitativního. Zřejmě již chápala kvantitativní charakter vazby „na ... procent“, protože sdělení okamžitě porozuměla. Uvedená vazba se stala Barborčiným generickým modelem pojmu procento. Je to model spíše kvalitativní než kvantitativní, protože zatím není opřen o proces, kterým by číslo v idiomu „na ... procent“, bylo přesně určeno. Nicméně tento kvalitativní model je velice dobře sémantizován a určitě přispěje dívce v budoucnu vyvarovat se chyby formálního chápání pojmu procento.

Ilustrace 3. S Cyrilem (na začátku experimentu mu bylo 5 let) jsme hrávali hru „Co k sobě patří“. Hoch dostal sadu 6–8 kartiček s obrázky a měl z nich vybrat dvojici nebo dvojice těch, co k sobě patří. Cyril seskupoval dvojice, někdy i trojice obrázků na základě nejrůznějších kritérií. Například auto a hrábě, protože u dědy v garáži jsou hrábě opřeny o auto, nebo sluníčko a sukýnku, protože jsou obě žluté apod. Jedna ze sad obrázků byla zaměřena na počítání. Byla složena z těchto osmi kartiček: 1. červená tramvaj, 2. různobarevný domeček, 3. různobarevní babička a dědeček, 4. dvě černé kočičky, 5. tři větší červené míče, 6. tři hnědí pejskové, 7. čtyři modro-červené děti, 8. pět žlutých tenisových míčků. Tuto sadu dostal Cyril řešit třikrát, pokaždé s odstupem asi dvou měsíců. U prvních dvou her si počtu vůbec nevšímal. Poprvé pároval 3–7, 4–6 a 5–8. Podruhé pároval 7–8, 3–2 a 1–6 s vysvětlením, že tito pejskové jsou bez náhubku, a proto do tramvaje nesmí. Když sadu pároval potřetí, bylo jeho počínání zcela řízeno počtem: 3–4, 5–6, 1–2; a po chvíli váhání dal k sobě 7–8 a řekl „těch je víc“. Bylo to v době, kdy měl zvýšený zájem o počítání a všechno stále počítal.

Modifikaci této hry jsme o několik let později hráli s několika šestiletými dětmi, které uměly bezpečně počítat do osmi. Jednalo se o klinický experiment, kde experimentátor s dítětem nejprve vyřešil čtyři přípravné úlohy využívající sémantická kritéria. Pak dítě dostalo postupně čtyři obrázky: A. jedno jablko a tři jablka, B. tři židle a dvě židle, C. jedna židle a tři židle, D. tři jablka a dvě jablka. Když dítě úlohy správně vyřešilo, požádal jej experimentátor, aby čtyři obrázky A, B, C a D rozhozené na stole, rozdělilo na dvě dvojice, jak jsme to dělali již dříve. Většina dětí použila sémantické kritérium (A–D a B–C), jen asi třetina dětí použila kritérium mnohostní (A–C, B–D). Jedna dívenka dala všechny lístečky na jednu hromadu s tím, že „všade sú tri“. Jeden hoch nad tím dlouho bádal a pak se zeptal „To akože koľko ich je?“.

<u>Komentář 3.</u> Experiment ukazuje, že zkušenosti jsou ve vědomí seskupovány podle měnících se kritérií. Jedním z kritérií je počet. Když toto kritérium začne působit, začnou se seskupovat modely poukazující na sebe počtem. Dodejme, že experimenty ukázaly, že děti předškolního věku při tomto seskupování dříve shlukují situace, v nichž je výsledek stejný, a až později shlukují ty, kde i struktura součtu je stejná. Experimenty o narůstání vlivu kritéria „počet“ by bylo třeba opakovat. Jednak je možné, že současné děti budou reagovat trochu odlišně, jednak námi uskutečněné experimenty pocházejí z let 1977–1985 a neměly ještě současnou úroveň profesionality.

2.6 Zobecnění a generický model

Jakmile komunita separovaných modelů vytvoří strukturu, pak její strukturotvorný princip nazveme generickým modelem. Je to poznatek, který

1. dává *vhled* do této komunity a vyjadřuje podstatu morfizmů mezi jednotlivými modely,
2. často je *prototypem* části nebo všech separovaných modelů.

Proces objevování a objevení generického modelu je zobecněním. Objev chápeme jako náhlé uzření nové – obecnější nebo abstraktně vyšší – skutečnosti. Je to akt mentální konstrukce. Je to nejdůležitější akt procesu poznávání vůbec, protože přináší do vědomí něco podstatně nového a navíc sytí hladinu motivace novou energií. Žák, který poznal radost z objevu, se bude snažit tento požitek opakovat. Podle B. Russella se teoretický matematický objev jako lidská potence zrodil v 6. století před Kristem v pythagorejské škole, pro niž byl matematický objev extatickým zjevením absolutní pravdy. Na rozdíl od přírodního filosofa, který byl podle Pythagora otrokem hmoty, je hudebník a matematik svobodný tvůrce svého vlastního světa uspořádané krásy.

> To those who have reluctantly learnt a little mathematics in school this may seem strange; but to those who have experienced the intoxicating delight of sudden understanding that mathematics gives, from time to time, to those who love it, the Pythagorean view will seem completely natural even if untrue.[3]
>
> (Russell 1965, s. 52)

Bližší seznámení se s ideou zobecňovaní a generického modelu umožní další ilustrace.

Ilustrace 4. (Viz Hejný; Kuřina 2001, s. 93.) Pětiletá Dana loudí na babičce, se kterou jde na nákup, nanuka. Babička souhlasí: „Dobrá, ale koupíme nanuky pro všechny. Kolik nanuků máme koupit?“ Dana: „Já, Emil, máma, děda, babička a táta.“ Na prstech počítá a řekne: „Šest.“ V obchodě bere Dana nanuky z mrazničky, ale jejich počet neurčí počítáním. Přiřazuje nanuky členům rodiny: „Já, Emil, máma, děda, babička a táta.“ Na babiččin dotaz, kolik nanuků dala do košíku, řekne „šest“, ale pak je hlasitě přepočítá.

O měsíc později pomáhá Dana péct matce vánoční cukroví. Na prvním plechu, který se chladí na balkóně, je pět rohlíčků, které udělala a spočítala Dana. Matka vkládá do trouby druhý plech se sedmi Daninými rohlíčky a ptá se, na kterém plechu má Dana více rohlíčků. Ta po chvilce váhání odpoví: „Řeknu ti to, až se upečou.“

Komentář 4. Dana používá prstů jako nástroje k evidenci počtu. Je jisté, že tento generický model neobjevila, ale převzala od dospělých. Zatím prstů nepoužívá k modelování operací s objekty. Při úloze o porovnání dvou počtů se ani nepokusí prsty použít. Příběh ukazuje, jak se v průběhu vývoje dvě hladiny modelů vzájemně prolínají. Proces zobecňování probíhá v krocích. Je rozložen do několika menších objevů: prsty jsou nástrojem evidence počtu, porovnávání, sčítání, odčítání a modelování různých situací. Typickým příkladem použití prstů k modelování je určení počtu dnů, které uplynuly například od 7. ledna do 13. ledna.

[3] Těm, kteří se z donucení naučili ve škole kousek matematiky, se to může jevit podivné; ale těm, kteří zakusili toxickou rozkoš náhlého pochopení, kterou matematika z času na čas dává těm, kteří ji milují, se pythagorejský pohled jeví jako zcela přirozený, i když nepravdivý. (Vlastní překlad.)

Náročnější úloha vhodná k diagnostikování schopnosti modelovat reálnou situaci pomocí prstů je tato:[4]

Úloha 1. Bydlím ve třetím patře. Počítáno odshora, je to čtvrté patro. Kolik pater má náš dům?

Ilustrace 5. Dva zedníci pokládali podlahu z přesně nařezaných a různě širokých desek. Délka desek odpovídala délce místnosti. Protože jejich celková šíře přesahovala šíři místnosti, nedaly se na podlahu položit. Tovaryš je začal přeskupovat v naději, že se mu tím podaří rovně je uložit. Mistr mu na dvou obdélníkových kouscích dřeva ukázal, že jejich přestavením se celková šíře, kterou pokryjí, nemění. Tovaryš řekl, že „pro dvě desky jo, ale zde je jich přes dvacet“. Mistr mu řekl, že je hlupák.

Komentář 5. Tovaryš ví, že přestavením dvou desek se celková šíře jimi pokryté podlahy nezmění, ale neví, že z toho plyne, že stejná komutativita platí pro libovolnou (konečnou) skupinu desek. Poznatek o přestavování desek má na hladině separovaného modelu, zatímco mistr jej má na hladině generického modelu, který se vztahuje na libovolný počet desek. Mistrova poslední věta napovídá, že neví, jak má svému tovaryšovi pomoci. Přitom pomoc je snadná: poručit mu, aby experimentoval nejdříve se třemi deskami, pak se čtyřmi atd., až generický model objeví. Je pravděpodobné, že tovaryš si právě získanou zkušenost uloží do paměti a bude vědět, že přestavováním desek se obsah jimi pokryté podlahy nemění, ale bude to pro něj poznatek formální. Neví, proč to tak je, ale věří tomu, protože to tvrdí mistr.

Ilustrace 6. Eva a Emil (6. ročník) jsou v matematických znalostech výrazně před třídou. Proto jim učitelka někdy dává individuální úlohy, aby se na hodině nenudili. Jednou dostali tuto úlohu:

Úloha 2. Kolika cestami se na čtverečkovaném obdélníku o rozměrech 4×3 můžeme dostat z levého dolního čtverečku (označen Z = začátek) do horního pravého čtverečku (označen K = konec)? Povoleno je chodit jen vpravo a nahoru (obr. 2.1).

			K
Z			

Obr. 2.1

Emilovi se úloha nelíbila a po chvíli se vrátil k jedné dřívější, zatím nedořešené.

Evu naopak úloha zaujala. Pečlivě nakreslila všechny cesty a zjistila, že jich je deset. Řešila ještě další podobné úlohy a její zápis cest se stával úspornější. Protože dívka žádala od učitelky další úlohy, dala jí učitelka tento domácí úkol: napsat do každého čtverečku čtverce 6 x 6 počet cest, které sem vedou z levého dolního čtverečku. Dívka úlohu řešila pod lavicí v průběhu dalších dvou vyučovacích hodin a u oběda vyhledala učitelku, aby jí s velikou radostí ukázala svoje řešení (obr. 2.2). Později vypravovala, že nejprve do levého sloupce a dolního řádku napsala jedničky a rychle zaplnila i sousední sloupec a řádek, protože „v nich jdou čísla po sobě“. Pak začala dopisovat čísla do dalšího řádku

[4] Více diagnostických úloh je uvedeno v (Hejný 2003b).

a viděla, že se přičítá nejprve dvě, pak tři, pak čtyři, pak pět a pak šest. U dalšího řádku též hledala podobnou pravidelnost. Hledala, jak čísla narůstají. Ve chvíli, kdy dopsala 20 (její tabulka měla tvar znázorněný na obr. 2.2, zmíněná dvacítka je tištěna tučně), uviděla, že 20 je součet $10 + 10$, předchozí číslo 10 bylo součtem $6 + 4$, ale ono je $21 = 15 + 6$ a též $15 = 10 + 5$, a „všude je to tak. Teď je to jednoduché, přičítá se pokaždé to dolní číslo. Umím vyplnit libovolně veliký obdélník nebo čtverec“, uzavřela s radostí a hrdostí svoji řeč.

1	6	21			
1	5	15			
1	4	10	**20**		
1	3	6	10	15	21
1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1

Obr. 2.2

Komentář 6. Předně je nutné poukázat na rozhodující roli motivace. Emila úloha nezaujala a věnoval se jinému problému. Eva naopak úlohu řešila i na jiných hodinách. Nadšení, s nímž u oběda svůj objev ukazovala učitelce, má pro dívčino další matematické směřování klíčový význam: bude ji motivovat k činnosti, která jí může přinést stejně „nakažlivou radost“, jakou právě teď zažila.

Každá ze šesti úloh, kterou dívka v hodině matematiky řešila, byla separovaným modelem příštího poznání. Když začala vyplňovat tabulku, věděla již, že je souměrná podle diagonály, a zvolila strategii po řádcích/sloupcích. Úloha se tím rozdělila na posloupnost dílčích úloh. První dva řádky vyřešila dívka rychle, protože pravidelnost čísel v nich je zřejmá. Až u třetího řádku bylo nutné pravidelnost hledat. Eva ji objevila v posloupnosti rozdílů, která je napsána v nižším řádku. Tento objev jí dal vhled do struktury vyplňované tabulky a byl generickým modelem Pascalova trojúhelníku, který pak bude pro Evu abstraktním poznatkem.

Strategie gradace, kterou Eva k řešení úlohy použila, patří k účinným strategiím mnoha úloh. Je založena na rozkladu úlohy na dílčí úlohy, z nichž každá je vyřešena nějakým generickým modelem, a soubor těchto generických modelů nižší úrovně se stává souborem separovaných modelů pro původní úlohu. Zobecňování zde probíhá ve dvou nebo i více etapách. Úlohy 3 až 7 patří k těm, které lze úspěšně řešit strategií gradace.

Úloha 3. (a) Kolik sirek je třeba k vytvoření obdélníku o rozměrech $m \times n$? (b) Kolik sirek je třeba na „zamřížování“ tohoto obdélníku?

Úloha 4. Na hromádce je n kamenů. Z hromádky střídavě berou dva hráči A a B. Začíná hráč A. Hráč, který je na tahu, bere nejméně jeden, nejvíce k kamenů. Hráč, který bere poslední kámen, vyhrává. Najděte strategii pro tuto hru.

Úloha 5. Najděte souřadnice průsečíku úseček AB a CD, když $A[0; 0]$, $B[b; 1]$, $C[c; 1]$, $D[d; 0]$, přičemž b, c, d jsou přirozená čísla. (Řešitel ještě nezná analytickou geometrii, neví, co je rovnice přímky.)

Úloha 6. Jaký obsah má mřížový trojúhelník ABC, jestliže na jeho hranici je h mřížových bodů a uvnitř je v mřížových bodů? (Viz kap. 12.)

Úloha 7. Najděte součet $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Ilustrace 7. Závěrečný příklad je z historie matematiky. V učebnici o řešení rovnic islámského matematika M. al-Chvárizmího napsané v 9. století jsou řešeny tři kvadratické rovnice:

$$x^2 + 10x = 39, \quad x^2 + 21 = 10x, \quad x^2 = 3x + 4 \tag{2.1}$$

V té době nebyla záporná čísla objevena, a proto rovnice $x^2 + px + q = 0$ pro $p, q > 0$ neměla ani jeden kořen. Řešit tuto kvadratickou rovnici mělo smysl, jen když aspoň jedno z čísel p, q bylo záporné. Takové případy jsou tři. Jsou reprezentovány rovnicemi (2.1).

Komentář 7. Způsob řešení každé z rovnic (2.1) je pro danou třídu rovnic prototypem, a tedy i jejím generickým modelem. Matematik, který se naučil řešit rovnice (2.1), uměl vyřešit jakoukoli kvadratickou rovnici. Postupoval na základě analogie. Dodejme, že stejnou metodologii řešení problémů pomocí prototypových postupů, z nichž každý je návodem, jak řešit jistou třídu rovnic, nacházíme i v matematice starověkého Egypta a Babylónu. Konečně stejnou řešitelskou strategií používají i mnozí žáci, například když řeší kombinatorické úlohy.

2.7 Abstrakce a abstraktní poznání

Podstata rozdílu mezi generickým modelem a abstraktním poznáním spočívá v tom, že generický model má stejnou úroveň abstrakce, jako mají modely separované, zatímco abstraktní poznání takové ukotvení nemá a je opřeno o jazyk a symboliku. Například prsty jsou generický model pro práci s malými počty. Prsty, stejně jako autíčka, jablka nebo židle mají předmětný charakter. Jestliže ale dítě rozumí slovu „tři“ nebo znaku „3“ bez dalšího poukazu, pak jeho znalost tohoto objektu je i abstraktní.

Podobně v geometrii slovo „čtverec“ je na abstraktní úrovni. Objekt čtvercového tvaru nebo obrázek čtverce je separovaným nebo generickým modelem.

Proces abstrakce je často provázen změnou jazyka. Z hlediska fylogeneze tuto hladinu podrobně zkoumá L. Kvasz (1999). Impulsem k didaktickému (tedy ontogenetickému) pohledu na zlomové změny jazyka matematiky je článek (Kvasz, v tisku), v němž se o genezi symboliky píše:[5]

[5] Vlastní překlad citátu na následující stránce: ... nové objekty jsou popsány symboly a tyto symboly umožňují vytvoření procesu na vyšší úrovni abstrakce, procesu manipulace s těmito symboly ... přechod od prvního k druhému procesu trval v historii několik dekád či dokonce staletí a není jasné, zda může být pozorován i v ontogenetickém vývoji.

> ... the new objects are expressed by symbols, and these symbols enable the emergence of a process on a higher level of abstraction, a process of manipulation with these symbols ... the turn from the first to the second process took in history several decades, or even centuries, and it is not clear whether it could be observed also in the ontogenetic development.

Domníváme se, že na Kvaszovu otázku lze ve většině případů odpovědět kladně. Průkazně to dokumentujeme na pojmu zlomek (viz kap. 20).

Abstraktní poznatek, který byl konstruován jako výsledek poznávacího procesu, se může později stát generickým nebo separovaným poznatkem jiného poznávacího procesu. Tak například série poznatků $2+3=3+2$, $1+4=4+1$, $5+3=3+5$ tvoří soubor separovaných modelů poznatku komutativity sčítání. Generickým modelem zde není žádný z uvedených separovaných modelů, ale *poznání v činnosti* (knowledge in action), že při sčítání mohu čísla přestavovat. Například žák, který součet $2+5+8+5$ řeší tak, že si uvědomí, že $2+8=10$ a $5+5=10$ a pak obě desítky sčítá jako 20, zná komutativitu na úrovni generického modelu. Žák, který navíc dovede poznatek formulovat slovně nebo dokonce symbolicky jako $a+b=b+a$, má již tento poznatek na úrovni abstraktní. Nicméně žák, který tuto symbolickou znalost má, ale při počítání ji nevyužívá, má danou znalost pouze formální. O ní nelze mluvit jako o znalosti na abstraktní hladině. Je to pamětí uchovávaná informace. Ta možná bude v budoucnu zživotněna, ale zatím je jen znalostí formální.

V ilustraci 5 jsme viděli poznatek o komutativitě operace sčítání v předmětném kontextu pokládání různě širokých desek. Mistrův poznatek byl na úrovni generického modelu, tovaryšův nejprve na úrovni separovaného modelu, ale později na úrovni generického poznatku (avšak formálního). Tovaryš věděl, že je to tak, ale nevěděl proč.

<u>Ilustrace 8</u>. Následující příběh je zmíněn v (Hejný aj. 1989, s. 339–340) a týká se poznatku

$$\text{součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je } 180^\circ. \qquad (2.2)$$

Autor v roli učitele 5. třídy chtěl, aby žáci experimentováním sami tento poznatek objevili. Vyzval žáky, aby si každý nakreslil nějaký trojúhelník a úhloměrem změřil všechny tři jeho úhly. Pak měl každý žák naměřené úhly sčítat.

Výsledky měření se pohybovaly kolem 180°, čímž se ve vědomí většiny žáků vytvořila série zkušeností, z nichž některé jsou separované modely poznatku (2.2). Navzdory očekávání učitele, poznatek (2.2) nebyl žádným žákem formulován ani jako hypotéza. Naopak, žáci spontánně začali soutěžit o největší výsledek. Bylo slyšet hypotézy, že součet úhlů bude veliký, když i trojúhelník bude hodně veliký, nebo když bude protáhlý nebo vysoký apod. Motivační impuls soutěže tak způsobil, že se soubor výsledků netřídil na trojúhelníky se součtem 180° a „ostatní“, jak si to přál učitel, ale na velké (s výsledkem větším než 182°) a ty ostatní. Teprve doma, když se žáci marně snažili přesně narýsovat trojúhelník s velikým výsledkem, začali někteří z nich tušit vztah (2.2). Následující den

Franta vyslovil domněnku, že součet úhlů je pokaždé 180°. Důvěryhodnost této hypotézy nebyla vysoká; žádný žák se nechtěl s učitelem vsadit o čokoládu, že to tak určitě je.

Komentář 8. Učitelovo očekávání, že měřením se žáci rychle doberou faktu (2.2), se nenaplnilo. Mylně předpokládal, že žáci budou hledat v množství separovaných modelů něco společného, co modely spojuje. Vlastní objevitelskou strategii tak *podsouval*[6] žákům. Když viděl, že jeho scénář ztroskotal, měl značné nutkání na fakt (2.2) žáky upozornit. Naštěstí pokušení odolal, a tak mohl být tento poznatek objeven žáky později. Navzdory neúspěchu objevování žáci hodně rýsovali, a tak se soubor jejich separovaných modelů značně obohatil. Soutěživost žáků tlumila jejich touhu poznat zákonitost; motivace k soutěži vytěsnila motivaci k poznávání. Nutno doložit, že žáci v dané době již měli zkušenosti s měřením délek úseček a věděli, že měření je zřídka přesné.

Ilustrace 8a (pokračování). Po několika dnech stejní žáci řešili úlohu, jak bez úhloměru přesně narýsovat úhel 45°. Na tabuli se objevil čtverec rozdělený úhlopříčkou na dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Filip upozornil, že součet úhlů takového trojúhelníku je $90° + 45° + 45° = 180°$. Po dvou dnech Filip spolu s Ferdou přinesli důležitý objev: každý pravoúhlý trojúhelník lze doplnit na obdélník a z obrázku je vidět, že dva menší úhly se doplní na 90°. Hoši rozstřihli obdélníkový list papíru podél úhlopříčky a různou manipulací s oběma trojúhelníky dokazovali, že součet dvou menších úhlů takového trojúhelníku je 90°. Do této činnosti vstoupilo více žáků. Františka u obou trojúhelníků obarvila nejmenší úhel červeně a střední úhel modře a řekla, že červený s modrým jsou 90°. Tento argument byl ze všech, co zazněly, nejpřesvědčivější. Všichni žáci teď souhlasili s tím, že pro pravoúhlé trojúhelníky platí (2.2), a více než polovina třídy již byla přesvědčena, že toto tvrzení platí pro všechny trojúhelníky.

Komentář 8a. Objev, který hoši udělali, vydělil ze souboru všech trojúhelníků skupinu pravoúhlých. Pro některé žáky se obrázek úhlopříčkou rozpůleného obdélníku doplněný o vybarvení, které ukázala Františka, stal generickým modelem tvrzení (2.2); pro jiné generickým modelem jen pro pravoúhlé trojúhelníky. Filip a Ferda po několika dnech objevili, že vztah (2.2) platí i pro rovnoramenný trojúhelník – i ten lze rozřezat na dva pravoúhlé trojúhelníky a složit z nich obdélník.

Hoši v obou generických modelech pracovali s konkrétním trojúhelníkem, ale v jejich vědomí to byl prototyp všech pravoúhlých, resp. rovnoramenných trojúhelníků. *Schopnost vidět v konkrétním objektu reprezentanta celé třídy objektů je podstatou generického modelu.* Tuto schopnost lidského mozku popisuje P. Vopěnka: „Geometr má před sebou list papíru pokreslený čarami,. . . Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohled však pronikl skrze obrázek ven z reálného světa do světa geometrického.“ (Vopěnka 1989, s. 16.)

[6] Situace, kdy osoba A očekává jisté chování osoby B nebo si její chování vysvětluje na základě vlastních zkušeností, nazýváme *podsouvání* vlastní zkušenosti pod činnosti druhého člověka. V ilustraci 5 mistr podsouval svoje zkušenosti pod tovaryšovo, pro něj nepochopitelné, uvažování. Proto tovaryše nazval hloupým.

Ilustrace 8b (pokračování). V následujícím školním roce Františka předvedla třídě experiment: velký papírový trojúhelník rozstřihla na tři kusy a ty položila na tabuli tak, že tři úhly původního trojúhelníku tvořily přímý úhel. Experiment přesvědčil všechny žáky o pravdivosti tvrzení (2.2). Tento předmětný model se stal generickým modelem tvrzení pro téměř všechny žáky třídy. Filip a Ferda v té době již objevili, že tvrzení (2.2) platí pro každý trojúhelník. K objevu došli zobecněním svého důkazu pro rovnoramenný trojúhelník. Libovolný trojúhelník lze totiž rozřezat na dva pravoúhlé trojúhelníky. Součet úhlů v každém je 180°. Když je pak slepíme tak, aby vznikl původní trojúhelník, sečtou se oba pravé úhly na přímý úhel 180° a ten pak vlastně zanikne. K tomuto poznání dospělo ještě asi 5–6 dalších žáků, kteří asi důkaz převzali od kamarádů. Učitel se objevitelů zeptal, který důkaz považují za lepší – ten se stříháním trojúhelníku nebo ten jejich. Ferda připouštěl, že důkaz Františky je stručnější a přesvědčivější. Filip jednoznačně trval na tom, že jejich způsob je lepší než Františčin. Řekl: „Františkino strihanie je také krajčírske, ja mu neverím."

Komentář 8b. Rozdílnost pohledů Filipa a Ferdy vyplývá z toho, že každý z nich je na jiném stupni vývoje abstraktního myšlení. Pro Ferdu je obrázek trojúhelníku a trojúhelník totéž. Když použijeme jazyk citátu P. Vopěnky, můžeme říci, že Ferda ještě ve svém vědomí neoddělil svět reálný od světa geometrického. U Filipa již k tomuto oddělování začíná docházet. Označením důkazu Františky za „krejčovinu" Filip vyjadřuje nesouhlas s používáním objektů reálného světa k důkazům v geometrii. V tomto směru měl náš příběh další pokračování.

Ilustrace 8c (pokračování). Na konci 7. ročníku měli žáci za domácí úkol najít trojúhelník, jehož každá strana je delší než 10 cm a jehož obsah je 1 cm^2. Většina žáků přinesla narýsovaný rovnoramenný trojúhelník se základnou 20 cm a výškou 0,5 mm. Žáci považovali úlohu za náročnou, protože „ten trojuholník je trochu napuchnutá úsečka", jak řekla jedna dívka. Filip provokativně řekl, že on najde (to slovo zdůraznil) i trojúhelník, jehož každá strana bude větší než 1 km a obsah bude 1 cm^2. Konstrukci takového trojúhelníku hned popsal. Několik spolužáků protestovalo, že to se nedá sestrojit. Filip řekl: „Prečítaj si úlohu. Ty nemáš taký trojúhelník zostrojiť, ale nájsť. Ja som ho našiel."

Komentář 8c. Filip vnímá geometrické objekty jinak než jeho spolužáci. Již si jasně uvědomuje, že reálný svět pouze přibližně vypovídá o světě geometrickém, který existuje pouze ve vědomí lidí, ale který, právě díky své absolutní dokonalosti, je tím „skutečným geometrickým světem". Je mu jasné, že tvrzení (2.2) platí pouze ve světě geometrickém, protože ve světě reálném je prověřování součtu úhlů konkrétního trojúhelníku věcí přesnosti rýsovacích nástrojů a rýsování. Pokud jde o geometrii, odpovídá základní abstrakční zdvih změně vnímání geometrických objektů. Abstraktní vnímání je charakterizováno v citátu P. Vopěnky. Na rozdíl od předmětného a abstraktního chápání geometrie poukázal P.M. van Hiele již v roce 1958. Jeho teorie různých úrovní geometrického porozumění (Hiele 1986) patří k nejcitovanějším pracím v didaktice matematiky.

Výše popsaný zdvih je nejzávažnější abstrakční zdvih v rozvoji geometrického myšlení žáka základní školy. To on zvedá vnímání geometrického objektu z úrovně generického modelu na úroveň abstraktního modelu, otevírá přesné vymezovaní objektů a přesné dokazování vztahů a později nastoluje potřebu axiomatické stavby geometrie. Další abstrakční zdvihy pak přicházejí s objevy objektů, o nichž nás naše smysly nemohou vůbec informovat (např. čtyřdimenzionální prostor).

2.8 Aplikace

Již v úvodu jsme řekli, že teorie separovaných a generických modelů byla konstruována jako nástroj na porozumění formálnímu poznání. V závěrečné části ukážeme, jak lze tento nástroj použít na

(a) porozumění příčinám vzniku formálního poznání,
(b) diagnostikování formálního poznatku,
(c) reedukaci formálního poznatku,
(d) předcházení tvorbě fixovaných formálních poznatků,

Každý z bodů (a) až (d) rozvedeme.

2.8.1 Proč dochází ke vzniku formálního poznatku?

Odpověď je nasnadě: protože poznatek se do vědomí žáka dostává transmisí jako informace, nikoli jako generický model konstruovaný žákem na základě jeho zkušenosti.

Je jasné, že značný počet poznatků nelze do vědomí dostat jinak než transmisí. Například to, že Praha je hlavní město Čech, že číslo pět se píše znakem „5“, že tento útvar se nazývá čtverec – to všechno jsou informace, které nám musel někdo říct, jinak bychom je neznali. Ale poznatek $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ může být v naší mysli uložen jako pouhý paměťový záznam, jako něco, co jsme se naučili, protože v učebnici to bylo napsáno v rámečku a nad ním byla rada ZAPAMATUJ SI, nebo jako stručný záznam obr. 2.3, nebo jako výsledek vlastního objevu, který popisuje následující ilustrace.

ab	b^2
a^2	ab

Obr. 2.3

<u>Ilustrace 9</u>. Na konci 6. ročníku žáci již dobře rozuměli operaci umocňování. V té době hrávali hry na Rychlopočtáře. Dal se jistý obecný návod, jak se z čísla x najde číslo y nebo jak se ze dvou čísel a, b najde číslo c a pak žáci soutěžili, kdo dovede rychleji tento návod aplikovat na daná konkrétní čísla. Pokaždé bylo možné návod výrazně zkrátit a žák, který tento trik objevil, soutěž vyhrál. Jeden z návodů, který jsme používali, zněl: *Vezmi číslo, přidej k němu* 1, *výsledek umocni, pak původní číslo umocni a nakonec najdi rozdíl obou mocnin.* V symbolickém jazyce: Je dáno číslo x, najdi $(x + 1)^2 - x^2$.

Žáci v domácí přípravě na soutěž pomocí několika příkladů zjistili, že výsledek je $2x + 1$, a při soutěži nic nepočítali, ale hned napsali výsledek. Mezi návody, které jsme používali v této hře i v 7. a 8. ročníku, byly dva, jejichž symbolický zápis zní: Jsou dána čísla a, b, najdi $(a+b)^2 - a^2 - b^2$, a jsou dána čísla a, b, najdi $a^2 + 2ab + b^2$. Ti žáci, kteří se experimentováním dobrali „trikového" výsledku ($2ab$ v prvním případě a $(a + b)^2$ ve druhém), objevili vztah $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ jako abstraktní poznatek vyvozený ze série separovaných modelů.

2.8.2 Jak lze diagnostikovat formální poznatek?

V podstatě velice snadno. Formalizmus se často projeví sám. Stačí, aby si jeho existence učitel povšimnul. Avšak často tomu tak není. Uvedeme jednu epizodu. Autor byl přísedícím na zkoušce z analýzy u třetího opravného termínu na jisté vysoké škole. Student měl dokázat divergenci harmonické řady. Dokonale důkaz odříkal. Autor se studenta zeptal, zda by řada zůstala divergentní, kdybychom z ní vypustili prvních tisíc členů. Student žádnou odpověď nedal. Po zkoušce, která nakonec dopadla pro studenta úspěšně, kolega examinátor autorovi vyčítal záludnost otázky. Na autorovu otázku, zda ukazoval studentům, že když z divergentní řady vypustíme konečný počet členů, řada zůstane divergentní, odpověděl „ano, ale v jiné souvislosti". Zjevně nezjišťoval, jak student vidí do problematiky, ale jak se naučil to, co je ve skriptech.

Někdy se vyskytne situace, že učitel chce diagnostikovat kvalitu poznatků svých žáků. Například když dostane novou třídu. V takovém případě hledá úlohy, pomocí nichž by odhalil formální poznatky. Je nutno hledat úlohy, které prověřují bohatost separovaných modelů daného poznatku. Zde je několik námětů na tvorbu takových úloh:

1. Objasnit paradox. Např. platí $7 : 2 = 3$ (zbytek 1) i $10 : 3 = 3$ (zbytek 1). Tedy i $7 : 2 = 10 : 3$.

2. Najít náhradní řešení, když standardní řešení selže. Např. je dán obrázek čtverce $ABCD$, jehož vrchol C leží mimo papír. Je třeba sestrojit přímku AC.

3. Přenést známou argumentaci do nového kontextu. Např. zjistěte, zda je číslo $\sqrt{1{,}4}$ (nebo číslo $\sqrt{\frac{7}{5}}$, nebo číslo $\log_2 3$, nebo číslo $\sin 20°$) iracionální.

4. Rozhodnout o platnosti neznámé věty. Např. je dán rovnoramenný trojúhelník ABC a na jeho základně AB body U, V tak, že $|AU| = |UV| = |VB|$. Pak jsou úhly ACU a UCV shodné. Je to pravda?

5. Vytvořit objekt požadovaných vlastností. Např. najděte trojúhelník, který lze rozřezat na dva trojúhelníky, z nichž je jeden rovnostranný a druhý rovnoramenný. Nebo z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 sestavte co největší číslo dělitelné 11; každou číslici musíte použít právě jednou.

6. Dát nestandardní definici známého objektu. Např. definujte pojem kružnice bez pojmů vzdálenost, délka nebo shodnost.

7. Vyřešit úlohu vyžadující propojení několika dílčích poznatků. Např. zjistěte objem koule, která je opsaná krychli s povrchem 72 cm^2.

2.8.3 Jak lze fixovaný formální poznatek reedukovat?

Dosud jsme o formálních poznatcích neřekli nic pozitivního. Teď to napravíme. Začneme s operací písemného sčítání, zejména s krokem „jedna nám zůstala", který umožňuje přenášet číslo z nižšího do vyššího řádu. Mnoho druháků tomu nerozumí a i mezi středoškoláky se najdou někteří, kteří neví, proč se to tak dělá. Ještě více je těch, kteří nerozumí algoritmu písemného násobení. Je to špatně? Domníváme se, že většinou ne. Tento formální poznatek má své opodstatnění. Tím, že se žák učí takový algoritmus, učí se synchronizovat některé kognitivní funkce (vkládání, uchovávání a vybírání údaje z krátkodobé paměti, práci s dlouhodobou pamětí, operace nižší aritmetické úrovně, strategie řízení algoritmu) a tento nácvik je pro jeho intelektuální (a zdaleka nejen matematický) růst důležitý.

Jestliže ale žák, který se pomocí imitace naučil na 1. stupni základní školy početní písemné algoritmy, chce jít studovat disciplínu vyžadující matematické vzdělání, pak je žádoucí, aby tento formalizmus ze svých poznatků odstranil, aby každou „mrtvou informaci", kterou nazveme *fixovaný formální poznatek*, zbavil formálního sevření, aby ji *zživotnil*. Asi nejúčinnější způsob, jak toho lze dosáhnout, je dát mu zkoumat danou problematiku v jiném kontextu. Například, když jsme v 6. ročníku poznali Bilandské počítání (metaforické označení pro dvojkovou soustavu), dostali žáci za úkol vymyslet algoritmy písemného sčítání, odčítání, násobení i dělení v Bilandu. Několik žáků s překvapením zjistilo, že je to zcela stejné jako v naší desítkové soustavě, jen místo $1+1=2$ (to platí v Čechách) v Bilandu je $1+1=10$. Žáci objevili nové algoritmy, ale zejména zživotnili algoritmy, které do té doby znali jen imitačně. Jiný rozsáhlý příklad zživotnění formálního poznatku je uveden v (Stehlíková 2004).

Zživotňování formálního poznatku bývá úspěšné tam, kde žák o to sám usiluje. Problematické, ba téměř nemožné, je zživotnění tam, kde žák o ně nestojí nebo je přímo odmítá. Většinou je příčinou nízké intelektuální sebevědomí žáka, který nevěří, že dokáže pochopit podstatu věci. Proto se spokojí s tím, že si umí osvojit pravidla a postupy na řešení úloh z dané oblasti. Příkladem takového žáka je Dana z oddílu 3.7.

2.8.4 Jak lze tvorbě fixovaných formálních poznatků předcházet?

Odpověď je opět jednoduchá. Nepředkládat žákům hotové myšlenkové produkty ve formě definic, tvrzení, návodů, důkazů, ale nechat je objevovat samostatně: Nejprve jim umožnit získat dostatečný počet separovaných modelů, pak je vést k objevu generického modelu a dále k abstraktnímu poznatku. Popsaný postup objevování nelze dělat důsledně u všech pojmů, vztahů a postupů. Není na to čas a asi by to bylo nevhodné i z hlediska kognitivního vývoje žáků. Mnohé je žákům třeba ukázat, dát jim to jako informaci. Ale zkušenost ukazuje, že stačí, když se genetický postup realizuje u několika poznatků. Žák si na základě několik zkušeností s přechody od separovaných modelů až k abstraktnímu poznatku vybuduje metakognitivní schopnost dohledat si samostatně k dané informaci příslušný soubor separovaných a generických modelů a tím daný, původně formální poznatek, zživotnit.

Autor si živě vzpomíná, jak byl v 1. ročníku vysoké školy zaražen vlastní neschopností porozumět, o co v těch $\epsilon - \delta$ hrátkách vlastně jde, a jaká radost jej zachvátila, když při řešení úloh na průběh funkce najednou do této temnoty nahlédl. Domníváme se, že danou schopnost má silně vyvinutu každý profesionální matematik, a proto bývá pro něj nesrozumitelné počínání člověka, často žáka, který tuto schopnost nemá.

2.9 Závěr

Přípravná část studie uvádí dva výsledky: typologii matematických poznatků (oddíl 2.2) a porovnání kumulativního a genetického způsobu nabývání poznání (oddíl 2.3). Hlavním výsledkem studie je rozpracování autorovy teorie poznávacího procesu ve třech bodech (oddíl 2.4), hladina separovaných modelů byla rozložena do pěti podhladin (oddíl 2.5), teorie byla argumentačně obohacena (nové analýzy ilustrací, oddíly 2.6 a 2.7), byly sumarizovány možné aplikace mechanizmu vztahující se k formálnímu poznání: porozumění příčin vzniku, diagnostikování, reedukace a prevence (oddíl 2.8).

Kapitola 3

Komunikační a interakční strategie učitele v hodinách matematiky

Milan Hejný

Poznámka. Ve shodě s monografií (Mareš; Křivohlavý 1995) chápeme *komunikaci* jako dorozumívání, sdělování a *interakci* jako vzájemné působení lidí. Přitom téměř každá komunikace je i interakcí.[1] Proto v dalším mluvíme často stručně jen o interakci. Mluvíme-li jen o komunikaci, chceme tím zdůraznit, že naše pozornost je zaměřena spíše na jevy kognitivní než sociální nebo emotivní.

3.1 Formulace problému

Transmisivní způsob výuky se od konstruktivistického způsobu odlišuje nejen v pojetí matematiky, volbě cílů a metod, ale i v oblasti komunikace a interakce, k níž dochází v průběhu vyučování mezi učitelem a žáky. Cílem této studie je analyzovat uvedenou oblast z hlediska polarity transmisivního a konstruktivistického vyučování. Zejména jde o hlubší poznání interakční strategie učitele a o faktory, které strategii ovlivňují. První problém, který se pokusíme ve studii řešit, tedy zní:

> *Jaké jsou hlavní charakteristiky učitelovy interakční strategie při (a) konstruktivisticky, (b) transmisivně vedené výuce?*

Závěry, k nimž dospějeme, ukáží, že interakční strategie vlastní konstruktivistickému přístupu je pro učitele náročná a učitel svými zkušenostmi není na tento typ interakce

[1] Viz také (Bartoncová 2003).

připraven. Jeho předchozí školní zkušenosti (jak ty, v nichž byl v roli žáka, tak ty, v nichž byl v roli učitele) měly vesměs transmisivní charakter. Proto má učitel, který se pokouší o konstruktivistický přístup k výuce, v oblasti komunikace nelehkou situaci. Výzkum v oblasti didaktiky matematiky zde má příležitost pokusit se učiteli jeho práci usnadnit. Sem směřuje druhá část naší studie. V ní půjde o řešení otázky:

Jaké poznání v oblasti interakčních kompetencí můžeme nabídnout učiteli, který se snaží o konstruktivistický přístup k výuce?

Při řešení první otázky půjde především o popis učitelovy interakční strategie, ve druhé pak o prezentaci autorových zkušeností s konstruktivistickými přístupy a pokus o takové zobecnění závěrů analýzy, které může být inspirativní pro učitele.

3.2 Metody výzkumu a současný stav

Do problematiky interakční strategie učitele uvedl autora v sedmdesátých letech minulého století V. Hejný. On naznačil směr bádání i metody výzkumu. V té době dominantní myšlenka bádání nesměřovala do kognitivní, ale do sociální oblasti. Šlo o to, do jaké míry může učitel ve své práci podporovat rozvoj demokratických hodnot a odhalovat slabiny autoritářských forem organizace kolektivu. „Matematika, ve které je autorita pravdy silnější než autorita moci, má ze všech předmětů nejlepší předpoklady rozvíjet u žáků demokratické hodnoty.“ (V. Hejný 1974–1977.)

Tehdejší výzkum, na kterém se autor podílel jen jako asistent, měl kasuistický charakter. Byly popisovány a analyzovány interakční situace různých učitelů, byly hledány fenomény, jimiž lze jednotlivé komunikační a interakční situace popisovat, a byly konstruovány mechanizmy interakční a komunikační strategie učitele. Hlavní výsledek tohoto období je prezentován v tab. 3.1, s. 46.

V osmdesátých letech se naše pozornost zaměřila na možnosti aplikace. Ukázalo se, že problém je nadmíru složitý. Jeho řešení věnujeme v současnosti, společně s kolegyněmi D. Jirotkovou, J. Kratochvílovou, M. Kubínovou a N. Stehlíkovou, dost úsilí.

Ke koncepci interakční strategie V. Hejného se autor vrátil o dvacet let později, již v nových společenských podmínkách, aby původní myšlenky adaptoval na novou situaci a případně obohatil o myšlenky převzaté z odborné literatury.

Pokud jde o novou politickou situaci, pominul ideologický tlak na školství jako společenský subsystém. Učitelská obec však do nového prostoru vstupovala a vstupuje výrazně pomaleji než, řekněme, sféra soukromého podnikání. To není nedostatek této obce, to je imanentní vlastnost školského systému. Je známo, že patří k nejstabilnějším společenským subsystémům s vysokou setrvačností.

Pokud jde o obohacení původní koncepce interakční strategie učitele o novější myšlenky, neexistuje, pokud je nám známo, žádná česká studie zaměřená na matematiku.

Zahraniční prameny věnované této problematice jsou většinou zaměřeny na zkoumání socio-kulturních vlivů, na práci se žáky s omezenou znalostí vyučovacího jazyka (děti nových přistěhovalců), na vyučovací formy (např. na soutěže či skupinové vyučování), na přesnost vyjadřování, tedy vesměs na oblasti, které neleží ve středu našeho zkoumání. Děje se tak zřejmě proto, že problém direktivního vedení hodiny není v západních zemích tak naléhavý jako u nás.

Přínosnější jsou pro nás domácí studie přicházející z pedagogiky a pedagogické psychologie. Již v roce 1990 Z. Helus přesně označil prostor, který byl novou společenskou situací otevřen, a vyzýval k budování nového interakčního prostředí školy:

> Základem nového modelu je důvěra k potencialitám rozvoje žákovy osobnosti, vytváření kooperativního vztahu mezi učiteli a žáky, posilování samostatnosti, zodpovědnosti a autoregulace žáků. (Helus 1990)

Teze je v plném souladu s pedagogickou koncepcí V. Hejného, a tedy i autora této studie. Helusovy myšlenky nevedly k žádným korekturám původního modelu. Obohatily model o některé akcenty (například o klasifikaci vyučovacích metod nebo o poznávání rodinného prostředí žáků) a též terminologicky (kompenzační postup, poznávací výbava, interakční spirála, typizování žáků apod.).

Z dalších autorů, jejichž výsledky ovlivnily druhou fázi našeho výzkumu, zmíníme již citovanou fundamentální práci J. Mareše a J. Křivohlavého (1995) a výzkumy P. Gavory, ve kterých mapoval různé edukační styly učitelů. Na základě rozsáhlého pozorování P. Gavora (2000) charakterizuje výlučné mocenské postavení učitele ve třídě vyjmenováním šesti učitelových práv. Podle nich má učitel ve třídě právo 1. kdykoli si vzít slovo, přerušit žáka; 2. mluvit s kým chce (s jednotlivcem, skupinkou, nebo celou třídou); 3. mluvit o čem chce; 4. mluvit jak dlouho chce (někdy nerespektuje ani zvonění); 5. mluvit v rámci učebny, kde chce; 6. mluvit v pozici, kterou považuje za vhodnou.

Dodejme, že tato práva dává učiteli školní systém a tradice, ale je na učiteli, do jaké míry je zneužívá ve prospěch zdůrazňování své vlastní osoby a do jaké míry je využívá k vytvoření příznivého a pohodového pracovního klimatu ve třídě.

3.3 Dva typy interakční strategie učitele

Stručně připomeneme hlavní myšlenku naší koncepce. Použijeme způsob, kterým myšlenku v jedné své přednášce v roce 1976 prezentoval V. Hejný. Nejprve nás uvedl do problému a ukázal metodologii práce, pak nás vyzval ke spolupráci a nakonec formuloval závěry, takže jsme měli dojem, že vlastně celou strukturu jsme objevili víceméně my. To samozřejmě nebyla pravda. V. Hejný uvedl příběh:

> Mám hlad. Otevřu ledničku a zkoumám, co bych si vzal. Vidím polévku, párky, máslo, játrovou paštiku, mléko, sýr. Prohledám útroby ledničky, najdu uzenáče.

Čichnu k němu, protože zde již několik dní leží. Zvažuji: 1. Polévka a párek se musí ohřát, a to znamená zatopit v kamnech – zamítám. 2. Chleba s máslem a paštikou mají moc cholesterolu. 3. Uzenáče nutno dojíst. Volím možnost třetí.

V popsané situaci z běžného života vidíme pět etap rozhodovacího procesu, pět druhů činností: evidování toho, co lednička nabízí, zkoumání jednotlivých nabídek, jejich zvažování a hodnocení, dále rozhodnutí pro jednu ‚optimální' možnost a konečně konání. Popsaná pětice aktivit provází každý rozhodovací akt. Použijeme ji ke zkoumání volby komunikační strategie učitele.

Po tomto vstupu nás V. Hejný, vyzval, abychom uvedli několik vlastních zkušeností s interakčními situacemi. Různé příběhy ukázaly široké spektrum typů učitelovy interakční strategie. Když bylo uvedeno asi 6–8 příběhů, vzal V. Hejný dva krajní typy tohoto spektra jako modelové. Nazval je *strategie postojová* a *strategie dialogická*. Dále zevrubně popsal odlišnost obou těchto strategií v každé z dříve identifikovaných pěti etap: *evidence, zkoumání, hodnocení, rozhodnutí* a *konání*. Později byly tyto charakteristiky stručně označeny jedním nebo dvěma slovy, které pak bylo možné používat jako termíny. Výsledek tehdejší společné úvahy byl později upravován, doplňován a jeho soudobá podoba je uvedena v přehledné tabulce (tab. 3.1).[2]

Přístupová strategie učitele	**Postojová**	**Dialogická**
Evidování toho, co se seběhlo	Předpojaté	Průzkumné
Zkoumání příčin žákova činu	Povrchové nebo schází	Empatické a odosobněné
Hodnocení žáka i situace	Tezovité	Komplexní
Rozhodnutí učitele o reakci	Definitivní	Podmíněné
Konání – učitelova reakce	Mocenské	Dialogické

Tab. 3.1

Tato tabulka je nástrojem na zkoumání interakční strategie učitele zejména v případě, když učitel reaguje na chybné nebo mravně či kázeňsky narušené konání žáka. Tabulka zdaleka nepokrývá plné spektrum možných typů interakce. Ukazuje ale na pět etap učitelovy reakce a charakterizuje krajní polohy spektra, uvnitř kterého se nachází značná většina všech učitelských edukačních zásahů.

Obě strategie dostaly jméno podle svého hlavního rysu. V prvním případě je jím pevný postoj, který učitel při řešení edukační situace zaujme. Konání žáka přijímá tak, jak je při prvním kontaktu eviduje, a snaží se reagovat rychle, jednoznačně a často

[2] Poprvé byla tato polarita publikována ve skriptu (Hejný, V.; Hejný, M. 1977). Její rozvedenou a bohatěji ilustrovanou podobu lze najít v knize (Hejný; Kuřina 2001, s. 142–147).

i objektivně.[3] Ve druhém případě se naopak učitel snaží dobrat příčin, které žáka vedly k danému nežádoucímu konání. Aby příčiny zjistil, vstupuje do dialogu se žákem.

Podívejme se jednotlivě na každou etapu učitelovy interakční strategie. První etapa – evidování toho, co se seběhlo – je u první strategie charakterizována slovem „předpojaté“. Rozumíme tím hlavně nálepkování žáků, o němž píšeme v dalším textu. Druhá strategie je charakterizována slovem „průzkumná“, protože učitel dříve, než na podnět žáka zareaguje, zkoumá okolnosti, které žáka k dané akci vedly.

Druhá etapa – zkoumání příčin žákova činu – u první strategie buď vůbec schází, nebo je pouze povrchová. Tím rozumíme nezájem učitele o hledání příčin žákova počínání. Učitele například nezajímá, že žák má v rodině složité podmínky na učení nebo je pod psychickým tlakem. Nezřídka učitel dokonce svůj nezájem deklaruje („Hele, nevymlouvej se, nic nechci slyšet, neumíš, běž si sednout, máš pětku!“).

Někdy učitel místo pátrání po skutečných příčinách žákova chování použije jen protetické podsouvání, o němž píšeme v kap. 2, komentář 8, s. 37. Například když slabý žák nečekaně dobře napíše písemku, prohlásí ji učitel za opsanou, protože on, učitel, v době když byl žákem, nečekaně dobrý výsledek při písemce dosáhl jen tehdy, když se mu ji povedlo opsat. U dialogické strategie je druhá etapa zaměřena na co nejúplnější prozkoumání příčin, které vedly žáka k danému jednání. Při hledání příčin žákova konání jsou důležité dvě věci: empatie (snaha podívat se na danou situaci očima žáka) a odosobněnost (nevztahovat k vlastní osobě případné agresivní, podvodné nebo jinak narušené chování žáka). Snaha o empatii někdy dovede učitele k poznání, že není schopen vžít se do cítění a myšlení žáka, protože mu schází příslušné zkušenosti. Pak je na místě konzultace s někým, kdo takové zkušenosti má. Například autor byl jednou zcela bezradný při hodnocení počínání žačky, která jednala velice nepřiměřeně, ale mohlo to být způsobeno osobními problémy.

Třetí etapa – hodnocení žáka i situace – je u první strategie tezovité. Tím rozumíme, že učitel má soubor tezí, pomocí nichž většinu situací řeší okamžitě. Ke každému běžnému žákovu selhání má učitel přiřazeno jisté kárné opatření. Například, jestliže žák při písemce opisuje, dostane nedostatečnou, když si zapomene domácí úlohu, dostane na další den dvojnásobnou porci domácích úloh, když vyrušuje, je přesazen, když mluví, aniž by byl vyvolán, je napomenut, . . .

U dialogické strategie je třetí etapa zaměřena na zvážení všech získaných informací ve světle učitelova, ale i žákova hodnotového systému. Někdy je situace tak složitá, že učitel nedokáže situaci vyhodnotit okamžitě a reagovat bezprostředně. Pak je možné, zejména jedná-li se o něco důležitého, rozhodnutí odložit a třídě toto předběžné rozhodnutí oznámit („S podobnou situací jsem se ještě nesetkal, nevím, co na to říct; budu si to muset promyslit a pak vám řeknu, k čemu jsem dospěl.“). Dodejme, že takové rozhodnutí je někdy výchovně účinnější než okamžitý zásah učitele. Nejen „hříšník“, ale i další žáci

[3] Postojovou přístupovou strategii učitele by bylo možno nazývat též „autoritativní“. Toto adjektivum je ale součástí termínu „autoritativní výchova“, a proto považujeme za vhodnější volit zde jiné adjektivum.

budou o situaci uvažovat, rozmlouvat mezi sebou i v rodině a třída bude lépe připravena pochopit konečné učitelovo rozhodnutí. Dokonce se někdy stane, že žáci sami najdou a navrhnou velice přesné řešení vzniklé situace. To považujeme za nejlepší řešení vůbec.

Čtvrtá etapa – rozhodnutí učitele o reakci na žákův přestupek – je u postojové strategie definitivní („Už jsem řekl a nebudeme o tom debatovat!“). Mnohdy je bohužel zkratové a dítěti ublíží. Například trest, který dostane žák za to, že neměl domácí úkol: žák na učitelovu výzvu, proč opět nemá sešit, neodpovídá, stydí se říct, že mu opilý otec v noci sešit s domácím úkolem zničil. U dialogické strategie není rozhodnutí učitele definitivní. Ví, že se může objevit něco, co opomněl a co zpochybní kvalitu jeho rozhodnutí.

Pátá etapa – konání – je u postojové strategie mocenské. Učitel má výsadní postavení, které mu dává tradice a řád školy. Šest práv identifikovaných P. Gavorou a uvedených v oddíle 3.2 to dokumentuje. Ke svému rozhodnutí se učitel nerad vrací a i když později zjistí, že bylo chybné, chybu si není ochoten přiznat. Naopak u dialogické strategie učitel přijímá opozitní názory žáků. Žáci vědí, že lze učiteli i poté, co vyřkl své rozhodnutí, říct svůj názor. Autorovy zkušenosti se týkají zejména situací, kdy se někteří žáci třídy zastanou spolužáka proti, podle nich nepřiměřenému, trestu, který učitel dal. Učitel pak předně žákům poděkuje za to, že svým postojem jednají charakterně a utužují dobré vztahy ve třídě, a pak zváží jejich námitky.

Dvě polarity charakterizující edukační styl učitele – transmisivní/konstruktivistický přístup k výuce a postojová/dialogická interakční strategie učitele – spolu souvisejí. Obecně platí, že konstruktivistický přístup vyžaduje spíše dialogickou interakční strategii a transmisivní přístup často provází strategie postojová. Takové jsou i příklady, které uvádíme v dalším textu. Autorovi jsou ale známy případy, kdy učitel gymnázia vykládal transmisivně, ale se žáky jednal dialogicky. Není nám znám případ, kdy učitel vyučuje konstruktivisticky, ale jeho jednání se žáky je spíše postojové. Nicméně i tento případ si dovedeme představit.

Vše, co bylo řečeno v předchozím textu, se spíše vztahuje k oblasti výchovné než vzdělávací. Jenže, jak již bylo také řečeno, vzdělávací oblast je v područí oblasti výchovné. Například, když učitel při postojové strategii není ochoten přiznat vlastní chybu, demonstruje tím svoje přesvědčení, že chyba je nežádoucí a trestuhodná. Tento předsudek pak silně zasahuje do vzdělávací oblasti, protože pro konstruktivistickou edukační koncepci je strach z chyby mnohdy rozhodující překážkou pochopení matematické myšlenky (viz kap. 4) .

3.4 První ilustrace – postojová přístupová strategie učitele

Všechny naše analýzy interakční strategie uskutečněné do roku 2000 vycházely vždy z materiálu, který byl získán pozorováním interakce učitel – žák, popřípadě doplněné o protokol získaný z magnetofonového záznamu. V roce 2001 jsme se společně se S. Domoradzkim poprvé pokusili o analýzu materiálů jiného typu. Jednalo se o závěrečné práce několika desítek polských učitelů 1. stupně. Práce vznikly jako součást procesu zvyšování kvalifikace učitelů. Podrobněji je o tvorbě těchto materiálů psáno v (Domoradzki; Hejný 2004).

Zadání, které dostal učitel, znělo asi takto: 1. Zvolte malou část (1–3 strany) učebnice (Demby; Semadeni 1999); 2. s jedním „vypůjčeným" žákem 3. ročníku, který se dříve s učebnicí nesetkal, tuto část učebnice proberte; cílem rozhovoru není žáka něco naučit, ale pozorovat, jak postupuje, co pochopí dobře, co s obtížemi, co deformovaně, co vůbec nepochopí; pokuste se popsat, jaké představy si žák o předloženém textu (obrázcích, tabulkách, grafech) vytvoří, jakých nepřesností a chyb se dopustí; 3. pak počínání žáka analyzujte a pokuste se odhalit příčiny chyb, jichž se žák dopustil; 4. rozhovor nahrajte na magnetofon, hlavní části rozhovoru přepište do protokolů a svá pozorování i úvahy sepište; 5. stejnou část učebnice takto proberte s několika žáky tak, aby rozsah vaší práce byl přibližně 70 stran. Učitelům bylo doporučeno pracovat raději se slabšími žáky, aby se objevilo více chyb a nedorozumění.

Práce, které takto vznikly, dávají vhodný podklad pro zkoumání edukačního stylu učitele, jeho pedagogických hodnot, jeho pedagogického přesvědčení i jeho interakční strategie. První analýzy uvedeného materiálu byly uveřejněny v (Domoradzki; Hejný 2002), odkud zde některé části přebíráme.

Již po zběžném prohlédnutí několika desítek učitelských prací bylo možno konstatovat, že jejich autoři

- popisují výukový proces, jak dané učivo žáka učili, a nerespektují instrukci žáky neučit, ale jen pozorovat,
- nemají zkušenosti s analýzou žákovských prací, dokonce nevědí, co taková analýza znamená,
- používají při interakci se žákem postojovou strategii.

Na jednu z uvedených prací se podíváme blíže. Její autorku nazveme Eva a žáka 3. ročníku, kterého Eva potkala v tomto rozhovoru poprvé, nazveme Petr. Víme, že Petrova učitelka dala Evě o chlapci následující informaci. „Je to slabý žák, který má značné potíže se zvládnutím učiva. Od učitele očekává stálou pomoc. Na konci 2. ročníku měl z matematiky trojku. Byl vyšetřen v psychologické poradně a má na její návrh snížené požadavky. Matka se Petrovi hodně věnuje a výsledky této péče se ve škole projevují."

Pro experiment s Petrem zvolila Eva z učebnice (Demby; Semadeni 1999) celek „Velká čísla". Z práce Evy uvádíme pouze dva krátké fragmenty.

Fragment A se týká čtení velkých čísel. Originál je v polštině. Překlad z polštiny usiluje o maximální věrnost; nevylepšovali jsme ani terminologii, ani formulace, ani stylistiku. Neodstraňovali jsme nepřesnosti, ani nejasnosti.

Eva píše:

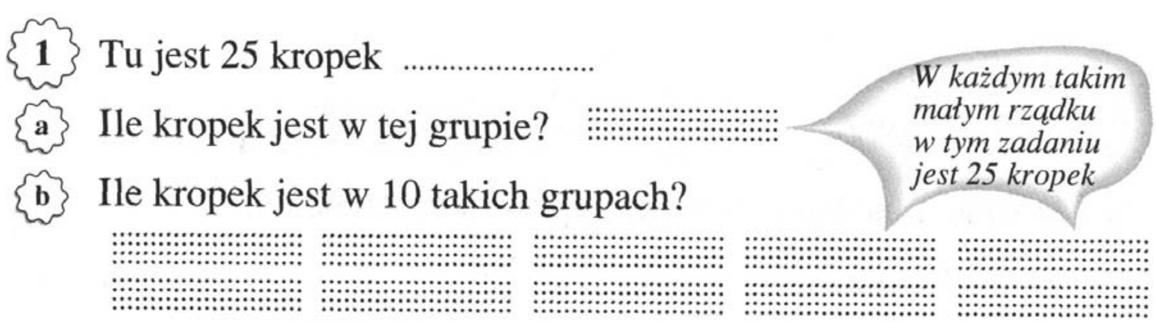
Svůj výzkum jsem začala připomenutím celočíselných číselných řad. Napsala jsem mu číslo 123 a poprosila jsem ho, aby číslo přečetl a řekl, které číslo následuje. To udělal pomalu, ale správně. Další úlohou bylo čtení čtyř- a pětimístných čísel, a to mu již dělalo velice moc těžkostí, proto jsem mu ukázala tabulky, jako je ta níže uvedená, a zapsala jsem do ní taková čísla jako 123, 3 263, 43 263, 521 143, 2 154 617, a pak jsem vyjasnila způsob čtení takových čísel. Po tomto vysvětlení Petr bez problémů přečetl čísla napsaná v tabulce.

Miliony			**Tisíce**			**Jednotky**		
S	D	J	S	D	J	S	D	J
						1	2	3
					3	2	6	3
				4	3	2	6	3
			5	2	1	1	4	3
		2	1	5	4	6	1	7

Komentář 1A. Informace, kterou o chlapci dostala Eva od jeho učitelky, ji vede k očekávání, že chlapec se bude dopouštět mnoha chyb a bude mu třeba hodně pomáhat. Proto, jakmile hoch při čtení vícemístných čísel narazí, přispěchá mu na pomoc s tabulkou. Petr pak úlohu zvládne. Eva necítí potřebu toto počínání Petra komentovat, neboť je to v souladu s jejím očekáváním: „Hoch bude mít potíže, já mu to názorně vysvětlím a on to, doufejme, pochopí. Když ne napoprvé, tak při opakovaném vysvětlování. Hlavně musím být dostatečně trpělivá.“

Fragment B se vztahuje k následující úloze, která má tři části:

Úloha 1.[4]



[4] Zde je 25 teček. Kolik teček je v této skupině? Kolik teček je v deseti takových skupinách? V každé řádce je 25 teček. (Vlastní překlad.)

Eva píše:[5]

1. Při řešení těchto úloh se objevily potíže. Petr měl problémy již s úlohou 1a. Neuměl říct, kolik je v ní teček.
2. Požádala jsem jej, aby na papír napsal, jak by ty tečky sečetl. Pak napsal: $25 + 25 + 25 + 25 = 100$
3. Na moji otázku „Kolik je to dohromady?“ odpověděl $42, 30$.
4. Proto jsem mu začala pomáhat s počítáním, nejprve po 20, tedy $20 + 20$ to je 40, $5 + 5$ je 10 a $40 + 10$ je 50, takže zde je 50, toto je též 50, ale 50 a 50 je 100. Proto je v celé skupině 100 teček.

Komentář 2. Podívejme se podrobněji na čtyři uvedené myšlenky Evy.

1. Potíže, které Petr má, učitelka pouze komentuje, ale jejich příčiny nezkoumá, protože je očekává. Když se při obhajobě práce S. Domoradzki Evy zeptal, jaké jsou asi příčiny Petrových potíží, odpověděla, že je to slabý žák a asi se i málo učí. Vůbec ji nenapadlo zkoumat, zda Petrovy potíže pramení z neporozumění otázce, neschopnosti zrakové percepce nebo něčeho jiného. Tedy první tři etapy přístupové strategie Evy jsou jasně postojové: eviduje nedostatek, nezkoumá jeho příčinu, situaci hodnotí tezí „slabý žák dělá chyby, učitel mu musí látku vysvětlit“.

2. Zde dochází k překvapení. Eva se odklání od postojové strategie. Nevysvětluje, ale klade otázku. Toto odpovídá konstruktivistickému stylu učitele. Žák na výzvu reaguje pozitivně a dává správnou odpověď. Tu pouze napíše a nevysloví.

3. Učitelka neakceptuje žákovu správnou odpověď, zřejmě proto, že není v souladu s jejím očekáváním chyby. Protože se očekávání nenaplnilo, Eva chlapce podezírá, že odpověď pouze uhodl. Proto mu klade kontrolní otázku, na kterou dostává zcela nepochopitelnou odpověď. Je možné, že příčinou tak podivné odpovědi je zmatek, který mohla ve vědomí Petra vyvolat intonace položené otázky. To již zjistit nelze. Z hlediska naší analýzy to ani není důležité. Důležitá je reakce Evy.

4. Eva se neptá po příčině tak prapodivné odpovědi. Je uspokojena tím, že očekávaná chyba se dostavila. Eviduje chybu a aplikuje vlastní pedagogickou tezi uvedenou o několik řádek výše. Proto Petrovi vysvětlí, jak to má řešit. Je to mocenský přístup, protože vychází z představy Evy, z jejího vnímání situace, z její řešitelské strategie.

Případný dialogický přístup učitele by byl orientován na diskusi se žákem, nikoli na poučování. Potíže Petra při určení počtu teček skupiny by v učitelově mysli vyvolaly otázku po příčinách této neznalosti. Vedly by pak učitele k tomu, aby se Petra zeptal „Víš, co od tebe chci?“ nebo „Uměl bys mi říct, co je zde těžké?“ nebo k nabídce „Nevíš-li co dělat, zeptej se, co bych ti měl poradit.“.

[5] Jednotlivé Eviny myšlenky číslujeme, abychom se na ně mohli odvolávat.

3.5 Nálepkování žáků

V sociální interakci si vytváříme o lidech, s nimiž se setkáváme, jistý obraz. Víme, že jeden je zvědavý, jiný je „šetřílek“, další je výbušný nebo klidný apod. V uvedených charakteristikách lidí je kondenzována zkušenost naše, případně i dalších lidí o chování onoho člověka. Tato zkušenost nám pomáhá rychle se orientovat při jednání s ním. Podobně i učitel ekonomizuje interakci se žáky pomocí *nálepkování*. V (Hejný aj. 1989, s. 21) je používán původní termín V. Hejného – *etiketování*. Z. Helus (1990, s. 80) mluví o *typizování žáků*, které charakterizuje adjektivy *schématické* – upřednostňuje šablonovité a stereotypní nahlížení na žáky a *implicitní*, neboli nepromyšlené nezdůvodněné, nereflektované. Nálepka, kterou ve vědomí učitele daný žák nese, pak do značné míry určuje způsob interakce učitele se žákem. Učitel již předem *očekává* jisté chování žáka, a to do značné míry omezuje jeho práci se žákem. Například nálepka „slabý žák“, kterou v uvedeném příběhu dala učitelka Eva Petrovi, vede Evu k očekávání, že

1. žák se bude dopouštět chyb a bude nutné mu věci názorně a trpělivě vysvětlovat,
2. může mít sklon k rezignaci a bude třeba jej povzbuzovat,
3. bude mít tendenci hádat a je nezbytné případnou správnou odpověď prověřit,
4. často si nebude umět poradit jak dál a bude třeba jej „popostrkovat“.

Každé z uvedených očekávání je spojeno s jistou *tezí*, která říká, jaký typ reakce má učitel volit. Při konkrétní interakci pak učitel zvažuje pouze formu, nikoli typ své reakce. Různí učitelé mají spektrum svých tezí různý. Jeden vnímá neznalost žáka jako důsledek jeho malé pracovitosti a vytváří na žáka tlak, druhý připouští nedostatek nadání a snaží se žáka sám látku naučit. Někteří učitelé svoje zásady důsledně dodržují a často i zveřejňují, jiní mají na danou situaci více možných tezí a volí je „podle nálady“. Ti první jsou žáky považováni za spravedlivé, ti druzí za náladové.

Dovolte dvě poznámky na toto téma. Jsou případy, kdy je spravedlivost pouze domnělá. Měřit všem stejně je v principu dobrá zásada, ale má slabinu v tom, že každé měření si všímá pouze jisté oblasti žákova projevu a nemůže postihnout složitost měřené situace. Například příčinou selhání dítěte může být frustrující událost, kterou ráno doma prožilo, ale kterou tají. Druhá poznámka je jistou „obranou“ náladových učitelů. Náladovost je jev negativní, nicméně běžný. Žáci se s ním budou setkávat. Má-li škola připravovat na život, měla by žáky připravovat i na interakci s náladovostí. Příležitost k tomu se naskytne například učiteli, kterému si žáci stěžují na náladovost jeho kolegy. Víme ale, že diskutovat tuto věc se žáky je problém vysoce delikátní, a to eticky, pedagogicky i společensky.

Hlavními nedostatky nálepkování jsou jeho osudovost a statičnost. Nálepkování předpokládá, že žák má jistou neměnnou charakteristiku. Nemůže se například ze „slabého“ stát „šikovný“. Je-li slabý, může se více naučit, ale nemůže zlepšit svoje intelektuální danosti. Napíše-li slabý žák dobře písemku, podezírá jej učitel z opisování. Napíše-li vynikající žák písemku špatně, chápe to učitel jako momentální indispozici. Ani v jednom z těchto případů učitel nereaguje na potenciální změnu, ke které může u žáka dojít. Svým předsudkem sráží žáka do předurčené charakteristiky. Když se učitel po letech o daném „slabém" žáku doví, že úspěšně ukončil studium na MFF, je překvapen, ale nevede jej to ke kritickému zvažování svého postojového přístupu k žákům.

3.6 Transmisivní a konstruktivistický přístup učitele

Transmisí (přenosem) zde rozumíme přenos znalostí z hlavy učitele do hlavy žáka. Roli učitele může zastávat rodič, spolužák, instruktor, ale i televize, rozhlas nebo kniha. Ve všech těchto případech je přijímateli předkládána hotová a dobře utříděná jednotka poznání. Každý, kdo má s učením zkušenosti, ví, že pro přijímajícího je tato činnost někdy velice náročná. Když si přivezeme z obchodu novou pračku, „moudřejší" než byla předešlá, sedíme nad návodem, studujeme jej, opakovaně se k jednotlivým informacím vracíme a snažíme se proniknout do podstaty práce pračky. Kdyby nás viděl autor čteného návodu, asi by se mu zdálo, že jsme málo chápaví, protože nám nestačí věci přečíst jednou. Podle něj je všechno jasné.

Jeden ze základních rysů problematiky vysvětlování je to, že ten, kdo vysvětluje, má věci dobře promyšlené a nevidí nikde žádné nejasnosti. Ten, kdo přijímá, si musí o novém poznatku vytvořit představu, musí jej vložit do existující struktury svých znalostí. Musí si svoje poznání *zkonstruovat* (viz kap. 1). V následujících dvou odstavcích stručně zopakujeme to, co bylo zevrubněji diskutováno v kap. 2 a co je pro naše další úvahy důležité.

Zaznamenali jsme výpověď žáka „než jsem ta procenta pochopil, musel jsem vyřešit snad sto úloh". V této větě je obsažena podstata kvalitního procesu přijímání. Při řešení konkrétních úloh se totiž ve vědomí žáka po částech budují představy. Nejprve velice konkrétní (separované modely příštího poznání), později obecnější a obecnější (modely generické), až posléze se vytvoří představa nosného abstraktního pojmu – ve zmíněném případě je to představa pojmu procento.

Bohužel většinou bývá proces přijímání nové informace méně kvalitní. Žák nejde náročnou cestou řešení mnoha úloh, ale snaží se novou informaci (např. 1 % z celku je „když celek vydělím stem") uchovat jako paměťový záznam. Příslušné úlohy pak neřeší promýšlením, ale imitací učitelova postupu. Tak vzniká formální poznání.

Popsaná situace vede ke zpochybnění transmisivního způsobu vyučování matematice vysvětlováním a ke zdůraznění konstruktivistického přístupu. Ovšem vize jeho frontálního zavedení do škol je utopická. Edukační styl, stejně jako styl interakční nelze měnit jako pračku. Tkví hluboce ve vědomí, ve zkušenostech, ve zvyklostech a zejména v hodnotovém systému každého z nás. Měnit edukační styl znamená měnit všechny tyto složky osobnostní podstaty člověka. A jestliže chceme takovou věc uskutečnit nikoli u jedince, ale u celé komunity učitelů, pak to není úkol na desetiletí, ale pro celé generace. Musíme totiž měnit mem[6] edukačního stylu.

Jako u všech změn memů i zde lze očekávat, že přesun bude spojitý a bude veden přesouváním těžiště existujícího spektra edukačních stylů od konce „transmisivní styl“ ke konci „konstruktivistický styl“. Naše společnost, zejména obec rodičovská, zatím netuší závažnost této potřeby a přiklání se k tradičním hodnotám. Komunita didaktiků ale proces možných změn zkoumá a jednou z oblastí, na které se komplexní problém rozkládá, je i oblast interakce.

Vše, co bylo uvedeno do této chvíle, lze považovat za hledání odpovědi na první otázku formulovanou v úvodu kapitoly. Jádrem odpovědi je typologie popsaná v tab. 3.1. V následujícím textu se zaměříme na druhou otázku. Na rozsáhlejší ilustraci se pokusíme poukázat na hlavní body konstruktivisticky orientované dialogické interakční strategie.

3.7 Ilustrace druhá – konstruktivisticky vedený poznávací proces

Následující příběh se odehrál v roce 1987 na jedné základní škole v Bratislavě v 7. ročníku. Pokusíme se na něm ilustrovat, jak účinně si žáci sami řídí svůj poznávací proces, když jim k tomu učitel vytvoří dostatečný prostor. Dobové oslovení „soudruh učitel“ zde nahrazujeme soudobým oslovením „pan učitel“.

Cílem úloh, které učitel žákům předkládá, je rozvíjet v jejich poznatkové struktuře propojení mezi pojmy „číselná osa“ a „procento“. Všechny předložené úlohy se týkají následující matematické situace.

Základní situace. Na číselné ose jsou vyznačeny body P, Q a R tak, že pro jejich souřadnice p, q a r platí $p < q < r$. Bod Q tedy dělí úsečku PR. Vztahy délek úseček vyjádříme procenty: $PR = 100$ %, $PQ = u$ %, $QR = v$ %. Tři z čísel p, q, r, u, v jsou dána, zbylá dvě čísla je nutno najít. Úlohy, které zde zapisujeme pouze zkratkovitě, byly žákům, zejména na začátku, předkládány i v obrázkové podobě.

Úloha 1.	$p = 31$, $q = 43$, $r = 71$.	Úloha 6.	$p = 2{,}1$, $q = 4{,}2$, $v = 37$.
Úloha 2.	$p = 1{,}1$, $q = 1{,}4$, $r = 1{,}6$.	Úloha 7.	$u = 20$, $q = 2{,}1$, $v = 80$.
Úloha 3.	$p = 3{,}1$, $q = 4{,}3$, $r = 7{,}1$.	Úloha 8.	$u = 15$, $q = 3{,}4$, $v = 75$.
Úloha 4.	$p = 2{,}6$, $u = 35$, $r = 6{,}6$.	Úloha 9.	$v - u = 20$, $p = 0$, $r = 5$.
Úloha 5.	$p = 9$, $u = 28$, $q = 30$.	Úloha 10.	$u - v = 36$, $p = 1{,}9$, $r = 9{,}4$.

[6] Pojem *mem* zavedl R. Dawkins (1976, český překlad 1998). V knize (Blackmoreová 2001, s. 11) najdeme toto vymezení: „Mem, základní prvek kultury, o němž lze tvrdit, že je dědičný negenetickou cestou, zvl. imitací.“ Ještě jeden citát, ze strany 41: „Memy nejsou o nic více ‚mytické‘ než geny – zatímco geny jsou instrukce kódované v molekulách DNA, memy jsou instrukce usídlené v lidských mozcích a v člověkem vytvořených předmětech, jako jsou knihy, obrazy, mosty nebo parní lokomotivy.“

Pondělí 26. 10. 1987

První setkání žáků s úlohami uvedeného typu. Učitel napsal na tabuli úlohu 1 a přikreslil orientační obrázek. Žáci řešili úlohu individuálně nebo ve dvojicích. Fragment diskuse je přeložen do češtiny.

1. Albert (po 15 vteřinách vykřikne) „Tři, sedm."
2. Beáta (podivení, výtka) „Tři čeho? Procent, co? Co sedm procent?"
3. Cyril (soused Alberta vysvětluje, co chtěl jeho přítel říct) „Ne, procenta ne. Ten menší kousek je tři, větší je sedm. Jako tři díly a sedm dílů."
4. Albert „No jo, dyk je to jedno. Hele, je to třicet procent a sedmdesát procent." (ve třídě se ozve několik souhlasů a několik žáků se hlásí)
5. Dana (téměř pláče) „Pane učiteli, já jim nerozumím. Ať nemachrují!"
6. Učitel (chvíli zvažuje jak reagovat, pak s nádechem humoru „vyčítá" chlapcům) „Kluci, nemáte machrovat, Dance se to nelíbí. A ostatním je to jasné?" (ozve se několik žáků, že ani jim to není jasné, proto učitel řekne) „Alberte, vysvětlíš jim to?"
7. Beáta (žene se k tabuli) „Já to řeknu. On by to poplet."
8. Učitel „Beáto, nech to jednou vyložit taky někoho jiného. Jak se má Albert naučit vysvětlovat, když mu to nikdy nedovolíš?" (povzbudivě) „Alberte, pojď to vyložit."

Beáta se s nelibostí vrací na místo, Albert jde ne příliš ochotně k tabuli. Učitel jim oběma narušil zaběhnutý způsob řešení podobných situací.

9. Albert (rozpačitě) „Tady máme takhle, jo?" (do obrázku píše 12 jako délku úsečky PQ) „Tady dvacet osm, jo?" (píše 28 nad úsečku QR) „Teda ten" (střídavě ukazuje na čísla 12 a 28) „ten poměr ty úsečky, tedy délky" (pauza) „poměr těch délek, je dvanáct ke dvaceti vosmi" (píše $12 : 28$), „jo", (píše $= 6 : 14 = 3 : 7$), „jo, už víš" (k Daně) „tři ku sedmi."
10. Dana „Nevím. Já ti nerozumím, ať to řekne Beáta."
11. Beáta (nečeká na pokyn učitele, jde k tabuli; Albert jde ochotně na místo) „Já věděla, že to nepochopí." (trochu jako výtku učiteli; ne příliš úhledný obrázek smaže a nakreslí nový, pěkný, včetně čísel 12 a 28; obrátí se k Daně a začne instruktivně-tázací výklad, jehož způsob je třídě dobře znám) „Jak dlouhá je tato úsečka?" (ukazuje PQ)
12. Dana „No dvanáct."
13. Beáta „Ano, dvanáct. A kolik je toto celé?" (ukazuje úsečku PR)
14. Dana „No" (pauza) „čtyřicet?"

15. Beáta	„Výborně, čtyřicet“ (dopisuje do obrázku číslo 40) „Tedy dvanáct – část, čtyřicet – celek. Ták. A teď máš říct, kolik procent“ (na tabuli napíše bokem veliký znak %) „je těchto dvanáct z těchto čtyřiceti“ (mluví pomalu, větu dobře frázuje a objekty, o nichž mluví, ukazuje na tabuli) „Jasné?“ (Dana přitaká) „Počítáš procenta, jakou operaci vemeš?“
16. Dana	„Dělení“ (trochu se zarazí a kvapem dodá), „ale nejprve krát sto.“
17. Beáta	„Přesně. Tak dělej, říkej.“
18. Dana	„Vydělím těch dvanáct těmi čty. . . ne vynásobím dvanáct jako tím stem, sto dva. . . tisíc dvě stě, tisíc dvě stě“ (pauza) „děleno čtyřiceti“ (Beáta píše na tabuli, co Dana říká: $1\,200 : 40 =$) „škrtnu nuly“ (Beáta škrtá poslední 0 v čísle 1 200 a 40 a nově přepisuje $120 : 4 =$) „to je třicet.“
19. Beáta	„Výborně. Třicet. Třicet čeho?“ (ukazuje na znak %)
20. Dana	„Procent. Třicet procent.“ (Beáta ukazováním na úsečky a zvláštním klátěním trupu vybízí Danu, aby pokračovala) „Z té malé, ne z té velké úsečky“ (Beáta ukazuje PR), „je ta malá třicet procent.“ . . .
21. Beáta	„Která malá? Ta“ (ukazuje na PQ), „nebo ta“ (ukazuje na QR)?
22. Dana	„Ta“ (pauza) „ta levá.“
23. Beáta	„Výborně, toto je třicet procent“ (píše 30 % k úsečce PQ), „a tedy tady zbývá sedmdesát.“ (píše 70 % k úsečce QR) „Jasné?“
24. Dana	„Zcela jasné, tomu rozumím.“ (smích, zjevná radost)

Beáta s pocitem vítěze odchází od tabule. Albert jí náznakově zatleská a s jistou dávkou ironie, ale i uznání řekne: „Beáta umí.“ Učitel je bezradný jako již vícekrát dříve. Na jedné straně musí vysoce hodnotit skvělý pedagogický výkon Beáty, ale na druhé straně ví, že jeho úspěch je protetický: Beáta dovede Danu ke správnému výsledku, ale podstatě postupu Dana nerozumí. Ovšem Dana i její rodiče právě toto vyučování považují za nejúčinnější.

Čtvrtek 29. 10. 1987

Hned ráno bylo rušno kolem úlohy 6, která byla minule dána za domácí úkol. Jana i několik dalších žáků oznámilo, že nevychází. Karel tvrdil, že vychází, i když jsou čísla větší. Učitel nejprve požádal Janu, aby ukázala, v čem je problém. Ta zjistila, že délka úsečky PQ je 2,1 a to odpovídá 63 % celkové úsečky, neboť $100 - 37 = 63$. Pak na kalkulačce vypočítala $1\ \% = 2{,}1 : 63 = 0{,}033\,333$, načrtla obrázek s údaji $p = 2{,}1$, $q = 4{,}2$, $u = 63$, $v = 37$. Kousek dál od obrázku napsala $r = 5{,}433\,333\,33$.

25. Jana	„Toto hloupé číslo se ani po vynásobení stem nestane normální a na ose neleží.“
26. Karel	(třídní expert v oblasti zlomků) „To číslo tam je, ale ty ho neumíš najít.“
27. Jana	„Tak mi ho ukaž, když seš tak chytrej!“

28. Karel „Tak se dívej! Hele!“ (smaže Janin obrázek a kreslí svůj, ve kterém místo desetinných čísel používá zlomky; několik žáků projeví nevoli; Karel ze svého sešitu přepisuje na tabuli údaje: $p = \frac{21}{10}$, $q = \frac{21}{5}$, $u = \frac{21}{10} = 63\ \%$, $1\ \% = \frac{1}{30}$, $37\ \% = \frac{37}{30}$, $r = \frac{21}{5} + \frac{37}{30} = \underline{\frac{163}{30}}$) „Takže bod R leží na číselné ose asi tady. Lze to najít přesně.“

29. Jana „No jó! Zlomky! Já tomu stejně nevěřím!“

30. Beáta „Vychází to. Mně to vyšlo. Sto šedesát tři“ (čte z kalkulačky) „dělím třiceti a je to těch pět celých, čtyři, tři, tři, tři, tři furt. Karel má pravdu.“

31. Učitel „Včera, jak jsem psal tuto úlohu na tabuli, přepsal jsem se. Číslo q mělo být osm celé čtyři a ne čtyři celé dva, jak jsem napsal. Udělal jsem úlohu hodně těžší, ale vy jste to vyřešili. Karle, díky! Ještě důležitější je, že jste viděli úlohu, která se dá pomocí zlomků řešit daleko lépe než pomocí desetinných čísel. To, co si na Karlově řešení cením nejvíce, je, že poznal, že je třeba místo desetinných čísel pracovat se zlomky.“

32. Karel „Já to věděl ihned, jak mi začly vycházet ty furt trojky. To je třeba vzít zlomky.“

Karlova poslední poznámka měla nečekané pokračování. Eva s Lenkou asi po týdnu přišly s objevem, že $0{,}111\,11\cdots = \frac{1}{9}$, $0{,}222\,22\cdots = \frac{2}{9}$, $0{,}333\,33\ldots\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, atd. Když svůj objev ukázaly třídě, Cyril ihned řekl, že mají pravdu a že tedy $0{,}999\,999\cdots = \frac{9}{9} = 1$. To bylo další potvrzení jeho teze, kterou hlásal již v 6. třídě, že totiž $0{,}999\,9\cdots = 1$. V té době většina třídy tvrdila, že $0{,}999\,9\cdots < 1$. Tento objev Cyrila velice potěšil.

3.7.1 Dodatek

Úlohy vztahující se k dané situaci se postupně přesunuly na nástěnku, ale i ve třídě se ještě občas o těchto problémech diskutovalo. V podstatě až do Vánoc. Tuto část příběhu již nezmíníme. Omezíme se na seznam nejzajímavějších osmi úloh, které vymysleli žáci. Tím vyprávění ukončíme.

Úloha 11. $r = p + 25$, $u = 16$, $q = 19$.
Úloha 12. $q = 7{,}1$, $r = 12$, $p = u - v$.
Úloha 13. $p = 1$, $r = 101$, $v = 6u$.
Úloha 14. $uv = 2275$, $p = 0$, $r = 20$.
Úloha 15. $p + q = r$, $p + 0,5u = q$, $q + 0,5v = r$.
Úloha 16. $u + q = 85$, $v + q = 131$, $v - u = 46$.
Úloha 17. $p = 18$, $r = 23$, $v - u = q$.
Úloha 18. $p + q + r = 26,6$, $2p + 5 = 2r$, $3q + 0,7 = u - v$.

Autorem úlohy 17 je Beáta. Úloha vyhrála u žáků cenu krásy.

3.8 Ilustrace druhá – komentáře

Komentáře analyzují a hodnotí popsaný příběh a snaží se nabídnout čtenáři podněty ke konstruktivistickému vyučování, které z příběhu vyplývají. V této části se nejedná pouze o hledání vědeckého poznání, ale i o pedagogické i životní přesvědčení autora. Neomezujeme se na konstatování a analyzování pozorovaného, ale vyslovujeme soukromý názor, jak by měla konstruktivisticky vedená výuka matematiky probíhat. Čtenář, jehož pedagogické a životní přesvědčení je odlišné, bude přijímat nabízené podněty kriticky.

Pondělí 26. 10. 1987 – komentáře

1. V asi osm minut trvajícím úseku hodiny dominují žáci. Zejména Beáta a Dana. Učitel na začátku hodiny formuluje úlohu a do rozhovoru vstoupí pouze dvakrát (6 a 8). Z průběhu celého rozhovoru je vidět, že žáci jsou zvyklí diskutovat spontánně, bez učitelova řízení. Diskuse je disciplinovaná, mluví se k věci. Podobnou evidenci najdeme i u dalších dvou fragmentů. *Učitel není nositelem poznání. K jeho hlavním úlohám náleží motivovat žáky a předkládat jim problémy k řešení, organizovat třídní diskusi, povzbuzovat žáky s nižším sebevědomím, být mravní autoritou v konfliktní situaci.*

2. Důležitý je vstup Dany (5), po němž učitel chvíli zvažuje svoji reakci na egoizmus Dany, který byl již dříve předmětem jejich rozhovorů. V matematice patří Dana k nejslabším žákům třídy. Jinak je sebevědomá, ambiciózní a egocentrická. Když se ve třídě mluví o něčem, co se může objevit v písemce a ona tomu nerozumí, protestuje, agresivně žádá vysvětlení od Beáty. Učitel jí před časem soukromě řekl, že její chování je arogantní. Vysvětlil jí, že není povinností spolužáků ji látku učit. Jestliže tak činí, musí jim být vděčná a nepřijímat to jako samozřejmost. Konečně, někteří spolužáci jí řekli, že je nudí, když se jí pořád něco vysvětluje. Dodal, že v budoucnu se bude ve třídě diskutovat jen o takové otázce, která bude nejasná více žákům. Jestliže jen jeden žák potřebuje pomoc, udělá se to po hodině soukromě. Poté dívka změnila styl žádosti o pomoc. Předchozí agresi vystřídala sebelítost. Ale egocentrizmus v postoji zůstal. Učitel to evidoval a uvažoval, jak s dívkou promluví. Teď jen zvolil intonaci, která odlehčila naléhavost žádosti Dany. *Cíl vychovat je přednější než cíl naučit.*

3. Učitel se řídil tím, co řekl Daně – zeptal se třídy, zda více žáků potřebuje osvětlit danou problematiku. Když o to více žáků požádalo, poprosil Alberta, aby řešení osvětlil. Tím narušil do té doby běžný postup: Dana požádá o vysvětlení, Beáta běží k tabuli jí to vyložit. K rozhodnutí změnit zaběhaný postup dospěl učitel domácí úvahou vyvolanou námitkami některých žáků kritizujících, že se Beáta „předvádí“ a oni se nudí. Beátino vysvětlování posoudil učitel takto: (a) Beáta vysvětluje skutečně skvěle, ale instruktivně. Sérií sugestivních otázek vyžadujících od Dany pouze standardní (nacvičené) odpovědi dovede Danu k výsledku. (b) Dana si zapamatuje posloupnost kroků, ale takový poznatek je formální. (c) Dana je přitom přesvědčena, že látce rozumí. (d) Beátin instruktivně-tázací způsob výuky ovlivňuje i další žáky; některým odhalí nové souvislosti, ale někteří se pak

přiklání k paměťovému učení. To vše jsou jevy nežádoucí. Jediné, co je zde pozitivní, je skutečnost, že (e) z tohoto vysvětlování získává Beáta; sama řekla, že při takovém vysvětlování objeví věci, které dříve neviděla.

4. Učitel zvážil uvedené myšlenky a rozhodl se, že při nejbližší příležitosti nebude Daně a třídě novou věc vysvětlovat Beáta, ale jiný žák, nejlépe ten, kdo novou myšlenku objeví. I když to bude trvat déle, musí to zkusit. Teď ta chvíle nastala a učitel reagoval vstupem (6).

5. Učitelův zásah byl neúspěšný. Albert to u tabule skutečně popletl – jak předpověděla Beáta (7). Dana si vyžádala Beátu (10) a ta ihned nastoupila (11). Vše se seběhlo tak rychle, že se učitel nezmohl na prosazení svého záměru udržet Alberta u tabule déle. Beáta byla úspěšná (24). Beátino vysvětlování bylo adresné a ukázalo, že dívky mají již dobře zavedenou komunikaci typu „Beáta vysvětluje Daně“.

6. Učitel se v okamžiku, kdy byl zaskočen rychlou reakcí dívek, dopustil chyby, když nechal bez komentáře kritiku Dany (10). On to byl, kdo přiměl Alberta, aby šel k tabuli, a proto se on podílel na jeho „neúspěchu“. Ale možná to neúspěch nebyl. Učitel se měl nějak chlapce zastat. Například se mohl zeptat třídy, zda někdo pochopil, co Albert řekl. Určitě by se přihlásil Cyril a asi i někdo další. To by byla pro Alberta satisfakce. Navíc učitel absencí svého vstupu nechtě mlčky odsouhlasil, že vysvětlování, které se zde vede, je vysvětlování pro Danu. Učitelovo selhání je výzvou k jeho další domácí úvaze. *Evidence toho, co se ve třídě odehrává (psaní pedagogického deníku), a analýza těchto záznamů patří k nejúčinnějším nástrojům, jimiž může učitel zlepšovat svoji práci.* (Viz též poznámka 9, s. 59.)

7. Příčinou uvedené učitelovy chyby byla jeho úzká zaměřenost na Danu, která z jeho pozornosti vytěsnila Alberta. K tomu došlo již v době, kdy si tento zásah doma promýšlel. Uvažoval pouze o Beátě a Daně a nepřipravil se na neúspěch žáka, který bude, z jeho příkazu, Daně (a třídě – na to zapomněl!) něco vysvětlovat. Takový neúspěch bylo možno očekávat.

Čtvrtek 29. 10. 1987 – komentáře

8. Učitel musel hned v úvodu hodiny rozhodnout, zda pustí k tabuli Karla, nebo Janu. Věděl, že Karel to asi bude mít dobře a Jana předvede chybnou úvahu. Kdyby upřednostnil Karla, byla by úloha vyřešena rychleji a žáci by viděli, jak to má být správně. Jana a možná i další chybující žáci by ale nevěděli, kde se dopouští chyby. A to je důležitější, než znát správný postup. Proto učitel upřednostnil Janu. *Poznání příčiny vlastní chyby přinese žákovi hlubší vhled do dané problematiky než poznání správného postupu.*

9. Zajímavé je konstatování Jany, že bod, jehož souřadnice je nepěkné číslo, na číselné ose neexistuje. Až po hodině si učitel uvědomil, že tuto důležitou komunikaci mezi Janou a Karlem (25)–(27) nechal zapadnout. Do pedagogického deníku zapsal: „Otevřít debatu o existenci, poznatelnosti a konstruovatelnosti objektu. Prstýnek ztracený v trávě existuje,

i když jej nenajdu. Čapek napsal povídku o ztracené barevné kuličce, kterou identifikuje až Bůh – najít. Sněhurku znám, ale ona neexistuje. Podle Míši existuje číslo nejbližší k nule, ale nedá se napsat."

Ukázka ilustruje způsob, jak lze s pedagogickým deníkem pracovat. I když jen málo z takovýchto zkratkovitě zapsaných poznámek bylo později v deníku rozvedeno, jsou i po letech tyto poznámky připomínkou zajímavých momentů, na něž navazují někdy další poznámky. Například k této poznámce se vrací zápis o debatě o existenci objektů. Katka velice úspěšně položila otázku, zda její babička, která loni zemřela, ale jejíž duch je přítomen v jejich rodině stále, existuje. Katka trvala na tom, že babička stále existuje, byť ne tělesně.

10. Učitelův komentář (31) upozorňuje žáky na metakognitivní hladinu poznání: volbou vhodného jazyka můžeme náročnou úlohu změnit na jednoduchou. *Metakognitivní úvahy jsou projevem vyšší intelektuální úrovně žáka a otevíráním této oblasti učitel podporuje intelektuální růst žáků.*

11. Událost, která byla vyvolána Karlovou poznámkou (32), ukazuje na dva pozoruhodné jevy: (a) *při konstruktivisticky vedeném vyučování žáci autonomně reagují na podněty učitele a spolužáka*; učitelovo upozornění na potřebu umět přecházet z jazyka desetinných čísel do jazyka zlomků a Karlova poznámka, že tato potřeba se objeví pokaždé, když se jedná o číslo s nekonečným periodickým rozvojem, vedla dívky k hledání nástroje na převod takového čísla na tvar zlomku. Pravidlo, které odhalily (které mimochodem již někteří žáci třídy znali), jim takový nástroj, aspoň v některých případech, dává. (b) Cyril uvedené pravidlo znal, ale až když jej dívky napsaly na tabuli, napadlo jej aplikovat pravidlo na dávnější problém. V Cyrilově vědomí byl důkaz tvrzení $0{,}999\,99\cdots = 1$ opřen o geometrickou argumentaci (na číselné ose body 1 a $0{,}999\,9\ldots$. splynou, jinak by jejich střed neexistoval) a nebyl propojen na jeho poznatek, který teď prezentovaly Eva a Lenka. Až uvědomění si toho, že $0{,}999\,999\cdots = \frac{9}{9} = 1$, mu propojilo oba poznatky v nové poznání, ze kterého měl velikou radost. Z toho plyne, že *bohatá varieta kontextů, v nichž se týž poznatek objeví, výrazně napomáhá budování matematické struktury žáka.*

12. Cyrilova poznámka vztahující se k debatě staré jeden rok ukazuje, že tato problematika byla v žákově vědomí potenciálně stále přítomna. Působila zde jako *strategická motivace*. Tímto termínem rozumíme problém, který přetrvává ve vědomí žáka nebo člověka po dlouhou dobu. Historie matematiky zná mnoho problémů, které působily jako motivující zdroje někdy po mnoho století. Například klasické problémy kvadratury kruhu, duplicity krychle, trisekce úhlu nebo slavný problém rovnoběžek byly formulovány ve starověku a vyřešeny až v novověku. Po mnohá staletí byly tyto problémy hnací silou vývoje a principem, který pomáhal strukturovat a restrukturovat budovu matematiky. Podobný motivační proces může probíhat i v ontogenezi. *Přítomnost „strategického" problému ve vědomí žáka svědčí o vysoké kvalitě žákova matematického poznání.*

3.9 Závěr

V kapitole byly popsány dvě krajní interakční strategie učitele: dialogická a postojová. Každá byla charakterizována mechanizmem obsahujícím pět složek: evidence jevu, zkoumání příčin, hodnocení žáka, rozhodnutí učitele, jeho konání. Dále bylo ukázáno, jak a proč interakční technika nálepkování znesnadňuje učiteli účinné působení na žáka. V hlavní části studie byl ilustrován, analyzován a komentován jak transmisivní, tak konstruktivistický přístup učitele. Konečně pedagogické a didaktické poznatky, které byly získány z ilustrací zobecněním, jsou aplikací teoretických úvah a mohou být použity jako rady pro učitele, který usiluje o dialogickou interakci se žáky a konstruktivistický přístup k výuce.

Tato kapitola není návodem na konstruktivistické vyučování, ale pouze ilustrací práce učitele, který o takový přístup k vyučování usiluje. Mluvit o návodu na konstruktivistické vyučování je vnitřně sporné, protože podstatou tohoto přístupu k procesu učení a učení se je autentičnost, hledání, bohaté využívání vlastních zkušeností. Jakákoli z vnějšku převzatá instrukce ruší klima konstruktivizmu. Z vnějšku lze přijímat pouze impulsy.

Kapitola 4

Chyba jako prvek edukační strategie učitele

Milan Hejný

4.1 Formulace problému

Chyba hraje v životě žáka důležitou, někdy dokonce osudovou roli. V naší škole je chyba často vnímána jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je nutno se vystříhat, jako něco, čeho se bojí nejen žáci, ale i učitelé. V zemích s dlouhou demokratickou tradicí je chyba vnímána spíše jako přirozená součást učení se.

Zamyslíme se nad chybou, které se dopustí žák při písemné nebo ústní odpovědi, i nad chybou, kterou udělá učitel při výkladu, při opravě žákovy práce, při komunikaci se žákem. Všimneme si též didaktické chyby, které se dopustí učitel v interakci se žákem nebo třídou. Neškolské chyby budou do našich úvah vstupovat pouze okrajově.

Cílem studie není pouze analýza jevu, ale též snaha o praktické využití teoretických poznatků. Proto bude naše pozornost zaměřena především na učitele; na to, jak se staví k chybě žáka i ke své chybě; jak dovede pomoci žákům i sobě překonat frustrující vliv chyby; jak dovede tlumit strach z chyby; jak dovede chybu žáka využít k urychlení jeho rozvoje, a to jak kognitivního, tak i osobnostního; jak dokáže naučit žáka i sebe poučit se z vlastních i cizích chyb; jak dovede vést žáky k tomu, aby dokázali z chyb vlastních i chyb svých spolužáků vyvodit cenná poučení.

Soubor všech zmíněných dovedností chápeme jako učitelovu *kompetenci*, kterou nazveme učitelova *práce s chybou*. Její zkoumání vymezujeme pomocí dvou cílů:

1. *Popsat různé přístupy učitele k chybě žáka i své vlastní a najít kořeny těchto přístupů v historických souvislostech.*
2. *Hledat cesty, jimiž může učitel změnou vnímání chyby a následnou změnou své edukační strategie zvýšit efektivitu své práce (na hodinách matematiky).*

4.2 Metoda výzkumu

Mapování přístupů učitelů nebo obecně dospělých lidí k chybě žáka nebo dítěte vycházelo z celého spektra zdrojů. Především zde byly mnohé příběhy z pedagogických deníků V. Hejného a autora. Dvě takové epizody celou problematiku v oddíle 4.3 otevírají. Na nich ilustrujeme různé pohledy, různé vzorce chování, různá přesvědčení, která existují. Dále byly použity epizody popsané domácími i zahraničními autory, ale též literární prameny (např. Ch. Dickens, M. Gorkij, Ľ. Kabanová, J. Neruda, M. Twain, ...) popisující reakci učitele, rodiče nebo občana na chybu dítěte. Porovnáváním epizod jsme identifikovali několik kritérií, jimiž soubor získaných příběhů lze třídit. Vyloučili jsme případy, kdy se jedná o sociálně narušené jednání žáka (lhaní, podvádění, agresivita, drzost, ...) a omezili se na chyby kognitivní (žák chybuje ve výpočtu nebo odpovědi). Ukázalo se však, že i když tyto případy vyloučíme, nevyloučíme tím z našich úvah složky emotivní. Dospělý člověk totiž někdy klasifikuje žákovo kognitivní chování jako chování sociální („Již třikrát jsem tě na to upozornila a ty, Lenko, pořád děláš stejnou chybu; ty mi to děláš naschvál!“), někdy svým hodnocením žákovy chyby vyvolá v jeho vědomí emotivní stavy („No jistě, Koloušek, známá firma, ve třech výpočtech pět chyb!“ a hoch se rozplakal.). Proto jsme u každé chyby zkoumali tři hladiny:

1. chování žáka, který se chyby dopustil (zde jsme hledali příčiny, které k chybě vedly, a snažili se odhadnout následky, zejména to, zda si žák z chyby vzal poučení),
2. chování dospělého, který na chybu žáka reaguje (zde byla paleta zkoumaných jevů daleko bohatší a bude ilustrována v dalším textu),
3. dopad této reakce na další konání žáka (dá se s chutí do práce, upadne do letargie, prohloubí se jeho pocit méněcennosti, ...).

Popsaný rozklad chybové situace do tří hladin byl prvním metodologickým principem hledání klasifikačních kritérií pro situaci „žák chybuje, učitel na to reaguje“. Inspiraci k druhému a hlavnímu klasifikačnímu principu jsme našli v knize (Castle 1961). Spočívá v propojení zkoumaného pedagogického jevu s memy (Blackmoreová 2001) různých kultur. Pro naše cíle se jako rozhodující ukázaly čtyři společensko-historické proudy, které nejvýrazněji zasáhly do struktury memu naší společnosti. Jsou to Starý zákon, Nový zákon, Judea a Antika. Z analýz, které udělal B. Castle, jsme navíc čerpali i některé konkrétní poznatky, zejména pokud jde o židovskou edukační kulturu. Výsledky jsou uvedeny v oddíle 4.3 a 4.4. V oddíle 4.3 nejprve uvedeme dvě ilustrace a v oddíle 4.4 popíšeme získané nástroje výzkumu. V podstatě stejnou klasifikaci bylo možné použít i na zkoumání chyby učitele. Zde jsme se však omezili na několik epizod.

Získaný metodologický rámec výzkumu bylo potřebné projektovat z roviny kulturně společenské do roviny školní praxe. To je popsáno v oddíle 4.5, který uzavírá první část studie a tím plní první cíl studie formulovaný v oddíle 4.1. Druhá část studie je vymezena druhým cílem formulovaným v oddíle 4.1. Nejprve je popsána anatomie situace „dopustil jsem se chyby“ (oddíl 4.6) a pak v oddíle 4.7 je metodou atomární analýzy (Hejný; Michalcová 2001, Stehlíková 2000) zkoumán rozsáhlejší příběh interakce učitele se slabým žákem. Třetí konkrétní příběh se týká domnělé chyby (oddíl 4.8). Ve všech těchto třech případech je analýza příběhu dovedena až k aplikačním závěrům.

Průzkum o tom, jak chybu vlastní i chybu partnera vnímají žáci a jak učitelé, jsme uskutečnili v Čechách, na Slovensku i v Polsku. Byly použity metody dotazníků, rozhovorů, kolektivních diskusí i soukromých písemných výpovědí některých žáků nebo učitelů. Byly využity i myšlenky studie (Slavík 1994). Výsledky našeho šetření jsou popsány a komentovány v oddíle 4.9, který uzavírá druhou část studie věnovanou druhému cíli formulovanému v oddíle 4.1. Závěr sumarizuje původní výsledky studie.

4.3 Chyba a následná lítost

Člověk, když se mu něco nepovede, má vztek, někdy lítost. Dítě na neúspěch často reaguje pláčem. Podíváme se na dvě epizody, které to ilustrují.

<u>Ilustrace 1.</u> V 1. třídě je vyvolán Aleš a má říct, kolik je $7 + 6$. Po chvíli řekne „15“ a učitelka jej ostře kárá: „Aleši, Aleši, podívej, všichni to už znají, pouze ty to ještě pořád neumíš.“ Hoch se rozpláče: „Když já to bez prstů neumím.“ Slzy učitelku obměkčí. Utírá Alešovi slzy a konejší jej: „Jsi šikovný hoch, když se budeš učit, určitě se to naučíš.“ Dodejme, že podobná scéna se neodehrála poprvé, ale poprvé se u ní Aleš rozplakal. Dříve jen stál se skloněnou hlavou a mlčel. Doma se to snažil naučit, sám i s maminkou, ale nějak se mu nedařilo naučit se to zpaměti. Pomocí prstů zvládl počítání bezpečně a dost rychle, ale ne tak rychle, jak to chtěla paní učitelka.

<u>Komentář 1.</u> Pozoruhodná je změna chování učitelky. Nejprve přísná a kárající, pak chlácholivá a povzbuzující. Proč změnila své chování? Asi proto, že zatím se nikdy Aleš do pláče nedal a učitelka to vnímala jako paličatost a neochotu učit se. Pláč se teď objevil poprvé a učitelka si to vyložila jako přiznání si chyby a slibnou naději, že se to teď již začne učit. Učitelka chybně diagnostikuje hochův pláč. To není pláč pokání, ale pláč beznaděje, pláč volání o pomoc. Tu mu poskytla jen povzbuzením, nikoli radou.

K epizodě se vrátíme v oddíle 4.5, kdy již budeme mít nástroj pro přesnější popis toho, co se vlastně odehrálo.

<u>Ilustrace 2.</u> Asi pětileté děvčátko se na dětském hřišti snaží přejít kladinu. Nedaří se jí to. Dříve než dojde do poloviny, spadne. Jednou tak nešikovně, že se uhodí. Pláče a běží k babičce. Ta ji polituje, ale dívka opět jde na kladinu. Když opět spadne, uhodí se a pláče, babička jí přikáže: „Bárko, už toho nech, už sis dost natloukla.“ Holčička brečí teď asi zejména proto, že na kladinu nesmí a že ji nedokáže přejít. Hraje si na písku. Pak po kladině bezpečně přejde o něco starší dívenka. Má přitom rozpažené ruce. Bára to ihned po ní opakuje navzdory zákazu babičky. Tentokrát se jí to povede. S elánem opět skočí na kladinu a volá na babičku: „Babi, koukej, už to umím.“

Komentář 2. První bolavý pád Báru neodradil, protože nutkání k nabývání zkušeností bylo větší než strach z dalšího pádu. Po druhém úrazu a zákazu babičky Bára pokusů zanechá. Stačí ale nový impuls a opět to jde zkusit. Starší dívenka, která po kladině přešla, dala Báře nejen podnět k opětovnému pokusu, ale i radu, jak to dokázat. Učitel, který Báru sleduje, zatouží, aby jeho žáci se stejnou energií opětovně zkoušeli vyřešit úlohu, která si jim nedaří. Již ne tak často si uvědomí, že i jeho žáci, jako Bára, potřebují poradit, jak se chyby vyvarovat.

V první ilustraci je chyba vnímána jako jev společensky nežádoucí, jako něco, čeho se nutno vyvarovat. Ukazuje též, že upřímná lítost nad vlastním pochybením může člověku přinést odpuštění. Druhá ilustrace ukazuje chybu jako přirozenou překážku, kterou nutno překonat, chce-li člověk dojít k úspěchu.

V obou ilustracích chybující pláče. Aleš proto, že je mu vyčítáno, Bára proto, že ji bolí rozbité koleno. Aleše trestá společnost, Báru příroda. Aleš strádá psychicky, Bára somaticky. Aleš je bezradný, Bára je připravena opět na kladinu skočit.

Reakce učitelky na Alešovu chybu klade otázku: Čeho chce učitelka dosáhnout? Je její postup k stanovenému edukačnímu cíli optimální? K tomu, abychom dokázali na tyto otázky odpovědět, potřebujeme poznat kořeny hodnot, které určují vnímání chyby, zejména školské chyby, v naší společnosti.

4.4 Chyba jako kulturně-společenská hodnota

Chyba člověka a její vnímání okolím je jev kulturně-společenský. V různých dobách vnímala různá společenství chybu rozličně a reagovala na ni různě. Všimneme si čtyř hodnotových proudů, které jsou nejhlouběji uloženy v našem vědomí a genetickém kódu: proud starozákonní, novozákonní, židovský a antický. Ty jsou pro další analýzy inspirativní.

Starý zákon zná dva typy chyb; první se týká lidské pospolitosti, druhý pak božích příkazů, zákazů a nařízení. Chyba, jíž se člověk dopustí v této oblasti, není vnímána jako omyl, ale jako závažný přestupek, jako hřích. Hřích má osudové následky a transcendentní ukotvení v Boží vůli.

První kniha Mojžíšova vypráví, jak za dvacet stříbrných prodali Josefa jeho bratři do otroctví. Dopustili se tím vážné chyby, nikoli však hříchu, proto bylo možné chybu odčinit. Josef, který se zvláštním řízením osudu stal nejmocnějším úředníkem Egypta, svým bratrům nakonec jejich velikou chybu odpustil (Genesis, 37 a 45).

Jinak to bylo s Adamem a Kainem. Adam jedl z Bohem zapovězeného stromu a dopustil se hříchu. Trest, který následoval – vyhnání z ráje –, osudově změnil život nejen Adama a Evy, ale celého lidského rodu (Genesis, 3). Nesmazatelná byla i vina Kainova. Hříšník sám tuto skutečnost přiznává slovy: „Většíť jest nepravost má, než aby mi odpuštěna býti mohla“ (Genesis, 4,13). Bůh nevaroval ani Adama, ani Kaina v rozhodující chvíli před spácháním hříchu. Stejné to bylo při zániku Sodomy a Gomory, kde Jahve zničil obě města a varoval pouze Lota a jeho rodinu (Genesis, 19). Stejné to bylo při potopě, kdy zničil celé lidstvo a zachránil pouze Noa a jeho rodinu (Genesis, 6). Jahve nenabízí člověku pomocnou ruku, ale přísně sleduje jeho počínání a přísně trestá ty, kteří narušují jeho vůli a projevují nedostatek pokory a bázně. Ty, kteří se ho bojí a snaží se mu zalíbit, pohromy ušetří a odměňuje. Jahve je zákon a rozhodující není vztah člověka k člověku, ale vztah člověka k Všemohoucímu.

Stav, který je ve vědomí hříšníka vyvolán jeho pocitem viny, je beznaděj. Je to stav, kdy člověk pozbývá energii, protože není cíle, k dosažení kterého by ji bylo možné použít. Podobný pocit známe ze situace, kdy nám zemře někdo blízký, milovaný. Vůči majestátu smrti jsme bezmocní. Je nesmyslné cokoli dělat. Poznamenejme, že podobný stav beznaděje prožívá dítě, když trest, který za svoji chybu dostalo, nemá otevřené dveře k odčinění chyby. Trest se stává silným nástrojem řízení dítěte strachem.

Nový zákon tlumí osudovost hříchu a dává hříšníkovi naději získat upřímným pokáním odpuštění. Ježíš přichází jako spasitel a jeho spása spočívá v naději, které se člověku dostává od Všemocného. Hříšník může nabízenou naději naplnit pokáním, tj. hlubším, lepším a pravdivějším poznáváním. Jan Křtitel vyzývá „Pokání čiňte, nebo přiblížilo se království nebeské“ (Matouš 3,2).

Kromě toho Nový zákon žádá vzájemné tolerování chyb. „Nesuďte a nebudete souzeni. Nepotupujte a nebudete potupeni. Odpouštějte a budeť vám odpuštěno.“ (Lukáš 6,37). Zde jsou Starý a Nový zákon v kontradikci. Ostře to ilustruje scéna, v níž zákoníci a farizejové předvedou před Ježíše cizoložnici. „A v zákoně Mojžíš přikázal nám takové kamenovati.“[1] „Ty pak co pravíš? A to řekli, pokoušejíce ho, aby jej mohli obžalovati. ... A když se nepřestávali otazovati jeho, zdvihl se a řekl jim: kdo je z vás bez hříchu, nejprv hoď na ni kamenem.“ (Jan 8,5–7). Žádný na ženu kámen nehodil, neboť svědomí mu to nedovolilo. Když všichni odešli, promluvil Ježíš k ženě: „Aniž já tebe odsuzuji. Jdiž a nehřeš více.“ (Jan 8,11).

Desatero[2] stanoví základní hodnotový systém Starého zákona. Má příkazy mravoučné kodifikující lidské soužití (cti rodiče, nezabíjej, nesmilni, nakraď, nelži), ale především má příkazy věroučné, v nichž Jahve žádá poslušnost, úctu a bázeň lidí. Strach člověka před Jahvem je vyžadován na mnoha místech Starého Zákona.[3]

Kodexem Nového zákona je Kázání na hoře (Matouš 5). Zde Ježíš stanoví hodnoty Nového zákona. Nikoli pomocí příkazů a zákazů, ale cestou blahoslavenství, jejichž základním principem je láska. Novozákonní Hospodin nežádá úctu pro sebe, ale vzájemné lidské porozumění, pomáhání, odpouštění a lásku. Nehrozí krutými tresty pro hříšníky, ale odměnu v nebesích slibuje těm, kteří žijí v lásce.

[1] 3. kniha Mojžíšova, Leviticus, kapitola 20, verš 10.

[2] 5. kniha Mojžíšova, Deuteronomium, kapitola 5.

[3] Např. „A ostříhej přikázání Hospodina Boha svého, chodě po cestách jeho a boje se jeho.“ (5. kniha Mojžíšova kapitola 8, verš 6.)

Na rozdíl od Starého zákona, kde, jak jsme viděli, trest za hřích bere člověku veškerou energii, je naděje daná Novým zákonem naopak dodavatelem energie. Chybující ji bude potřebovat, aby odčinil chybu, které se dopustil. Je jasné, že tato poloha projektovaná do situace chybujícího žáka je edukačně daleko účinnější než poloha starozákonní.

Judea. Židovská kultura vnímá chybu (nikoli hřích) jako přirozenou součást života. Hřích jako narušení vůle boží vnímá stejně jako Starý zákon, ale k chybě se staví s porozuměním. Zvláště k chybě žáka. Je to totiž právě tato kultura, která jako první vůbec chápe dítě a žáka jako svébytnou osobnost, jako individuum vyžadující specifický přístup.

> It is in the Talmud, not in the Old Testament, that we meet for the first time the effort to understand the child, to awaken his interest, to win his active sympathy. ... Talmudic writers begin to regard children no longer as possession but as personalities in their own right.[4] (Castle 1961, s. 170)

Je dobře známo, že osobitostí této kultury je výjimečná schopnost nenechat následky chyby nebo neúspěchu na sebe citově působit. Nedovolit, aby neúspěch demobilizoval člověka, obral jej o energii. Okamžitě po chybě (ale i po zvenčí přicházející živelné pohromě) je nutno pokračovat v konstruktivní práci. Chyba nebo neúspěch je zde dodavatel a ne spotřebitel lidské energie. Obdivuhodná schopnost rozvoje této kultury, ke které nepochybně přispívá její vnímání chyby, je průkazným argumentem pro účinnost tohoto vnímání. Dodejme, že k její úspěšnosti přispěla i promyšlená výchovná strategie.

Antika vnímá chybu člověka jako součást lidského bytí. „Errare humanum est,“[5] praví Seneka. Již čtyři staletí před Senekou Sofoklés v tragédii Antigoné vkládá do úst Teiresiáse následující káravé poučení určené Kreónovi:

„Chybovat je společné všem lidem smrtelným; však chybí-li kdo, není bláhový ni bezhlavý, když, klesnuv v pohromu, se snaží chybu zhojit a je ústupný. Být tvrdošíjný – toť být zpozdilý. . . ; a je milé poučit se dobrou radou, je-li prospěšná.“ (Sofoklés 1976.)

Dopustit se chyby je tedy přirozené, ale setrvat v ní je zpozdilé, nemoudré. Klasik přesně odhaluje to místo, na které je nutno při zkoumání fenoménu chyba zaostřit pozornost – na to, co po chybě následuje. Tedy na chování chybujícího a na reakci všech aktérů, kteří se k chybě mohou nebo dokonce musejí nějak postavit a vyjádřit. V tomto průzoru najdeme rozhodující rozdíl čtyř zkoumaných hodnotových systémů.

Kain svoji chybu přiznává, ví, že musí následovat trest, a Hospodin jej podle očekávání trestá. Ježíš nezpochybňuje chybu cizoložnice, ale nedovolí, aby byla kamenována. Dává jí odpuštění s napomenutím, aby více nehřešila. O následné reakci hříšnice evangelista Jan nepíše. Ale zkušenost, kterou žena prožila, na ni určitě silně zapůsobila.

[4] Je to Talmud, nikoli Starý zákon, kde se poprvé setkáváme se snahou porozumět dítěti, probudit jeho zájem, získat jeho sympatie. . . . Zapisovatelé Talmudu začali nahlížet na děti ne jako na majetek, ale jako na osobnosti s vlastními právy. (Vlastní překlad.)

[5] Mýliti se je lidské.

Je zřejmé, že emotivní vnímání chyby (nebo dokonce hříchu) v křesťanské tradici stojí proti racionálnímu vnímání chyby v tradici antické. Rozdíl dobře ilustruje biblický text čtený v řečtině. Ono výše zmíněné *pokání čiňte* (v anglickém překladu *Repent ye*), které vyzývá k pokoře, má v řecké dikci tvar *metanoiete*. Význam tohoto slova nemá s pokorou nic společného. Toto slovo znamená *lépe (nově, důkladněji, hlouběji) poznávejte.*[6] Je tedy výzvou nikoli k pokoře, ale k poznávání.

Přehledně lze uvedenou analýzu sumarizovat pomocí tří otázek: Jak chybu (hřích) vnímá daná kultura? Jak má podle zákonů této kultury na chybu reagovat chybující? Jak má na chybu člověka reagovat společnost a povolaný soudce? Tyto tři otázky budou východiskem pro projekci získaných poznatků do prostředí školy.

4.5 Projekce fylogenetické analýzy do reality současné školy

Předchozí analýzu aplikovanou na školní prostředí popisuje následující tabulka.

Vzorová kultura	**Co je chyba**	**Jak na chybu žáka reaguje**	
		žák	**učitel**
Starý zákon	Jev nežádoucí, poklesek	Strachem a obranou	Trestáním
Nový zákon	Jev nežádoucí, poklesek	Obranou, někdy i zvýšeným úsilím	Napomenutím, shovívavostí a povzbuzováním
Judea	Součást života	Hledáním příčin chyby, nápravou	Pomáhá žákovi najít příčiny chyby, povzbudí žáka
Antika	Součást života	Hledáním příčin chyby	Pomáhá žákovi najít příčiny chyby

Učitel, který vnímá chybu jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je nutné se vyvarovat, vytváří klima, které demobilizuje. Žák ze strachu před chybou raději nic nedělá. Ani učitel nedělá pro odstranění chyby nic, kromě tlaku, který vytváří směrem k žákům.

Jestliže je navíc učitel přesvědčen, že je chybu třeba potrestat, vychází z víry v nápravnou a někdy i odstrašující sílu trestu. Věří, že přiměřený a spravedlivý trest povzbudí žákovo úsilí učit se a povede ke zlepšení jeho studijních výsledků. Realita toto očekávání učitele nepotvrzuje. Je pravda, že žáci ze strachu vynakládají na daný předmět více energie, ale její značná část je věnována na protetické činnosti zaměřené na ochranu

[6] O. Funda mě upozornil, že ruská verze bible překládá slovo metanoeíte jako „novaja mysl“. Stejně byl ještě v době totality nazván známý sovětský časopis. Název mohl být jinotajem, výzvou pro bible znalé lidi, ke změně hodnotového systému.

před trestem: simulování nemoci, opisování, lhaní, absence, vymýšlení výmluv. Počínání učitele vycházejícího z biblického vnímání chyby jsme měli možnost poznat v ilustraci 1. V komentáři 1 k této ilustraci jsme položili dvě otázky, ke kterým se vrátíme.

Komentář 1a. Učitelka při interakci s Alešem přechází mezi dvěma biblickými způsoby reakce na chybu žáka: nejprve přísným káráním, pak mateřskou shovívavostí. Ke změně dochází, když žák pláčem projeví lítost.

Zajímalo nás, jak reakci učitelky z ilustrace posoudí jiné učitelky z prvního stupně, které tuto kolegyni neznají. Autor příběh vypravoval na semináři, kde bylo přítomno asi dvacet učitelek 1. nebo 2. třídy, a požádal je o vyjádření. Všechny s chováním učitelky souhlasily. Říkaly, že by jednaly stejně. Jen jedna kolegyně cítila, že Aleš potřebuje pomoc. Neuměla ale upřesnit, jak by mu pomohla. Nakonec řekla: „Aspoň bych jej povzbudila – ale to vlastně ta kolegyně udělala též; jo, jednala bych stejně.“

Autor řekl, že podle jeho názoru je neúspěch hocha dán umělou překážkou – zákazem používat prsty. S tím většina učitelek nesouhlasila. Namítaly, že „když žák nezná zpaměti příslušné spoje, nemůže pochopit další učivo a začne zaostávat“. Proti tomuto názoru autor argumentoval vlastní zkušeností. Žákům ve 3. i 4. třídě povolil používat tabulky na násobení (bylo to v sedmdesátých letech 20. století, kdy ještě kalkulačky nebyly běžné) a stejně se po nějaké době všichni naučili násobilce zpaměti. Kolegové mínili, že autorovo vyučování bylo experimentální, a tam se to dalo dělat, ale v běžném vyučování to dělat nelze. Tři kolegyně však potvrdily, že mají stejnou zkušenost i v běžném vyučování. Oni též dovolí žáků používat tabulku násobilky nebo dokonce kalkulačku a žáci se tabulku nakonec stejně naučí. Jejich argumentům kolegové asi nevěřili, protože na ně nijak nereagovali.

Závěry oddílů 4.1–4.5

Učitel, který vede žáka ke strachu z chyby, zpomaluje jeho kognitivní rozvoj, protože strach odebírá intelektuální energii. Dlužno dodat, že takové konání učitele není důsledkem jeho zlé vůle, ale toho, že i on byl vychován v prostředí, které chybu vnímalo jako jev, jehož je nutno se bát. Učitel, který vede žáka k tomu, aby se chyb nebál a poučil se z nich, urychluje žákův matematický i osobnostní růst. Zvláště účinné je pak působení toho učitele, který dokáže pomáhat žákovi poznávat a analyzovat jeho chyby. Učitel, který dokáže odstraňovat z výuky umělé překážky, urychlí rozvoj všech žáků, u některých dosti značně.

4.6 Reakce učitele na chybu žáka

Ilustrace 3. Cyril (septima osmiletého gymnázia) řeší úlohu z „minipísemky“.

Úloha 1. Najděte průsečík přímek p: $x + 3y = 6$, $q = \{X = A + t\vec{v}\}$, kde $A[2; 0]$, $\vec{v}(1; 2)$.

Chlapec zapsal přímku p ve vektorovém tvaru: $p = \{X = B + t\vec{u}\}$, $B[0; 2]$, $\vec{u}(3; -1)$, a napsal soustavu rovnic $0 + 3t = 2 + t$, $2 - t = 0 + 2t$, pak několik zápisů šktl, podtrhl vztah $\underline{1 = \frac{3}{2}}$ a připsal „přímky se neprotínají, jsou mimoběžné“.

Učitelka červeně škrtla vektorové vyjádření přímky p a připsala: „Potřetí stejná chyba! Cyrile, pamatuj: KDYŽ MÁM DVĚ RŮZNÉ PŘÍMKY, MUSÍM MÍT I DVA RŮZNÉ PARAMETRY tedy ne t, t, ale t, s!!! Navíc – viděl jsi mimoběžky ležet v rovině?“ Vše, co učitelka napsala, neslo grafickou podobu jejího rozhořčení: první slovo „potřetí“ bylo nejen podtrženo, ale i větší než další dvě slova, všechny výkřičníky byly v „nadživotní“ velikosti, trojice vykřičníků za písmenem s narůstala, hlavní věta napsaná tiskacím písmem byla červeně orámována.

Komentář 3. Učitelku nutno pochválit za snahu pomoci Cyrilovi odstranit chybu, které se dopouští opakovaně. Vnímá ji jako vlastní neúspěch a odtud plyne její silná citová angažovanost. Otázkou ovšem je, zda volí pro svůj záměr správnou strategii. Snaží se chlapce vést k tomu, aby si informaci pamatoval. Jenže, co když on není schopen zapamatovat si informaci, která není součástí jeho matematické struktury? Nebylo by vhodné zvolit postup, aby on sám chybu odhalil? Například napsat Cyrilovi: „Nakresli si obě přímky na čtverečkovaný papír a ještě jednou to promysli.“

Z jiných podobných evidovaných případů můžeme hypoteticky předpovědět možnou reakci žáka na takovou výzvu učitele. Učitelova poznámka jej informuje, že v řešení má chybu, a dává mu dokonce návod, jak ji odhalit. Nakreslil by si obrázek, uviděl průsečík přímek a začal hledat, v čem je rozpor mezi obrázkem a výpočtem. Jakmile by objevil, že průsečík přímek p, q má souřadnice $[\frac{18}{7}; \frac{8}{7}]$ zjistil by, že jádro omylu byla rovnice $0 + 3t = 2 + t$. Tím by zjistil lokalitu chyby a současně i její příčinu: parametr t pro přímku p je totiž $\frac{6}{7}$ a pro přímku q je to $\frac{4}{7}$. Dané poznání by pak Cyrilovi pomohlo vyvarovat se této chyby v budoucnu. Jistě by celý proces trval déle než vložení do paměti orámované nátlakové instrukce učitele, ale bylo by to jeho vlastní poznání, a tedy poznání trvalé.

Hypotetická úvaha ilustruje proces poznání a odstraňování chyby žákem. Tento proces jsme mapovali v několika desítkách případů a výsledkem analýz těchto případů je rozklad celého procesu na šest dílčích činností žáka:

1. poznání přítomnosti chyby,
2. lokalizace chyby,
3. věcná analýza chyby (proč je daná myšlenka chybná, případně i s čím chybná představa souvisí a jaké případné chybné představy jsou s ní propojeny),
4. odstranění chyby,
5. procesní analýza chyby (jak k chybě došlo),
6. vyvození poučení.

Ne každý proces poznávání chyby obsahuje všechny činnosti. Důležité je, že uvedená stupnice pomůže učiteli přesněji reagovat na žákovu chybu. Reakce závisí nejen na chybě, ale i na matematické vyspělosti žáka. O tom píšeme v závěrech.

Závěry oddílu 4.6

Jestliže chybu udělá žák matematicky zdatný, pak obvykle stačí dát mu jinou úlohu, v níž by stejný postup vedl k dobře viditelné chybě, a pak jej nechat, aby sám objevil chybu v původním řešení. Jestliže taková pomoc nestačí, může učitel poradit žákovi, přiměřeně jeho schopnostem, podle této stupnice:

1. Projevením nejistoty upozorňuje učitel žáka na přítomnost chyby.
2. Když žák již o přítomnosti chyby ví, ale nedovede zjistit její lokalitu, může mu učitel naznačit, kde se asi chyba nachází, nebo jej na ni přímo upozornit.
3. Když žák ví, ve kterém kroku udělal chybu, ale přesto ji nevidí, může mu učitel dát návaznou úlohu, která mu poradí. Např. žák napsal úpravu $\frac{a(b+c)}{b} = \frac{ab}{b} + \frac{c}{b}$. Již ví, že je to chybně, ale chybu nevidí; učitel mu poradí, aby dosadil $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$.
4. Jestliže žák chybu nedokáže odstranit, pak je potíž v neznalosti, která leží v nižší úrovni poznání, a je třeba tuto situaci diagnostikovat a až pak přistoupit k reedukaci.
5. Opravou chyby učitelova práce nekončí. Naopak, teď přichází to hlavní: vést žáka k určení příčin chyby. Například chybu uvedenou výše v bodě 3 žák sám komentoval: „Chvátám a přeskakuji a pak u té závorky často zapomenu násobit ten zadní člen.“
6. Žák, který dobře popíše, jak k chybě došlo, již vlastně říká i to, jak se chyby v budoucnu vyvarovat.

4.7 Práce učitele s chybou slabého žákem

Ústřední problém vedení slabého žáka nespočívá ani tak v oblasti kognitivní, jako v oblasti volní. Nejde o to, jak žáka to nebo ono naučit, ale jak zajistit, aby měl víru, že jeho učení se je smysluplné. Reakce učitele na chybu žáka přitom hraje vážnou roli.

Vrátíme se k příběhu učitelky Evy, která učí Petra, „vypůjčeného“ žáka 3. ročníku, část z učebnice (Demby; Semadeni 1999); viz oddíl 3.4. Na oba fragmenty vybrané ze závěrečné práce Evy se podíváme z hlediska práce učitele s chybou žáka.

Komentář 4 k fragmentu A. Připomeňme, že Eva konstatuje, že „čtení čtyř pětimístných čísel ... mu již dělalo velice moc těžkostí, proto jsem mu ukázala tabulky, jako je ta níže uvedená ... a pak jsem vyjasnila způsob čtení takových čísel. Po tomto vysvětlení Petr bez problémů přečetl čísla napsaná v tabulce.“ K tomu učiníme pět poznámek.

1. Eva neuvádí, kde Petr chyboval, nehledá lokalitu chyby, ani její příčinu. Bylo to již u čtyřmístných čísel, nebo až u pětimístných? Kterou číslici neuměl přečíst nebo ji přečetl chybně? Uměl by zapsat čtyřmístné číslo, které mu učitel přečte? Jak by postupoval?
2. Konání Evy ukazuje, že cílem její práce je momentální výkon chlapce, nikoli snaha o to, aby porozuměl čtení vícemístných čísel. Když Petr další čísla četl správně, považovala Eva svůj pedagogický cíl za splněný. Neklade si otázku, zda bude Petr umět vícemístná čísla číst i za týden. Domnívá se, že když jej to dnes naučila, je úkolem žáka, aby si procvičováním tuto dovednost upevnil.
3. Způsob, kterým učitelka Petra učí, je založen na pomůcce – tabulce. Je to jistě způsob účinný z hlediska cílů, které Eva sleduje. Domníváme se ale, že tento postup nezaručí, že žák zákonitosti čtení vícemístných čísel porozumí.
4. Eva nikde nezmiňuje to, že čtení čísel je úzce vázáno na ideu poziční soustavy, která patří k nejhlubším myšlenkám aritmetiky základní školy. Nezkoumá, zda je Petrovi jasný význam pozice jednotlivých číslic. Jinak řečeno, chybu, které se Petr při čtení dopustil, nedává do souvislostí se strukturou žákových znalostí, ale pracuje s ní jako s izolovaným jevem, a to dokonce jen na úrovni dovednosti.
5. Eva si neuvědomuje, že čtení vícemístných čísel je poznání gradované. Jestliže žák dělá chybu u čtení čtyřmístných čísel, je třeba mu nejprve zpřístupnit tuto úroveň poznání a až pak přistoupit k úrovni vyšší. Dodejme, že snaha o nabídnutí poznatku v obecné rovině (tou jsou v námi sledovaném příběhu stamilióny) je častou příčinou toho, že žák se nesnaží jevům porozumět, ale převzít hotový návod v jeho obecnosti. To se týká například čtení desetinných čísel, kde se záhy po zvládnutí desetin hned přistupuje k setinám, tisícinám i desetitisícinám. Týká se to i zlomků, o kterých píšeme v kap. 20.

<u>Komentář 5</u> k fragmentu B, který je rozčleněn do čtyř myšlenek. První tři jsme zevrubně rozebrali v komentáři 2 v oddíle 3.4. Zde rozebereme ještě myšlenku čtvrtou, v níž Eva uvádí postup, jak Petrovi ukazovala řešení: „... nejprve po 20, tedy $20 + 20$, to je 40, $5 + 5$ je 10 a $40 + 10$ je 50, takže zde je 50, toto je též 50, ale 50 a 50 je 100. Proto je v celé skupině 100 teček.“ K tomu přičiníme čtyři poznámky.

1. Je jasné, že zde existuje více cest, jak dojít k výsledku, a způsob volený Evou se nám vůbec nejeví jako názorný. Domníváme se, že Petrův způsob počítat čtyři řádky po 25 tečkách je daleko přirozenější. Proč Eva volí jiný způsob? A proč nezdůvodní svoji volbu?
2. Jedno z možných vysvětlení počínání Evy vychází ze zkušenosti, že učitelé nezřídka při opravě žákovy chyby použijí jinou cestu, aby jej ta, na které žák bloudil, nepletla.
3. Z textu Evy je vidět, že učitelka vysvětluje řešení spíše pro sebe než pro Petra. Když vysvětlování ukončí, přechází k dalšímu tématu a neptá se (jako to udělala u fragmentu A), zda žák její vysvětlení pochopil.

4. Jak přijímá Petr vysvětlování učitelky? Pociťuje to jako vnucování? Jestliže je již smířen s tím, že „on na matematiku nemá“, tak to přijímá s odevzdáním, ale bez zájmu věci pochopit. Jestliže má ještě aspoň trochu naděje, že i vlastním úsilím může něco z matematiky pochopit, pak vysvětlování Evy mu z malé sebedůvěry ukrajuje další kus.

Ilustrace bohatá na didaktická poučení bude doplněna o další zkušenosti a sumarizována v závěrech.

Závěry oddílu 4.7

Čím slabší je chybující žák, tím náročnější je práce učitele. Pro tuto práci platí více zákonitostí. Pět z nich se nám jeví jako základní.

1. Jestliže slabý žák dostane od učitele nálepku „slabý“ a učitel pak od něj stále čeká jen chyby, znemožňuje to žákovi tento stav změnit. Naopak učitel, který věří, že žákovi dokáže pomoci, který vnímá změnu žáka jako vlastní úkol, vyzývá svým postojem žáka ke spolupráci, která má značnou naději na úspěch.
2. Slabý žák je při rozhovoru s učitelem pod psychickým tlakem; chronickým, protože nevěří, že může matematice porozumět, i akutním, protože je v ohrožení, že se dopustí chyby, a tedy hledá způsob jak uniknout. Ujištění učitele, že mu nic nehrozí, oslabí tlak akutní, povzbuzení mu dodá energii potřebnou k intelektuální práci, přiměřená úloha mu dá šanci něco samostatně vypočítat.
3. Jestliže žákovu práci učitel neposuzuje podle vlastního vzorového řešení, ale snaží se rozumět jeho reakcím, často najde v jeho myšlení pozitivní momenty, které lze využít na motivaci jeho další práce.
4. Do žákova projevu vstupují jednak informace, které má uložené v paměti, jednak reakce na impulsy vysílané učitelem, jednak pokusy o autonomní myšlení; ty mají cenu nejvyšší, a to i v případě, že jsou věcně problematické.
5. K tomu, aby žákovo matematické sebevědomí stouplo, nestačí pochvala a dobrá známka. K tomu je nutný vnitřní pocit radosti ze zdolání překážky. Ten může přinést i chybná myšlenka. Radost totiž není důsledkem správnosti výsledku, ale námahy vynaložené k jeho získání a přesvědčení, že je to výsledek aspoň v něčem dobrý. Učitel, který nakonec musí žáka dovést k poznání, že výsledek je chybný, může uchovat v jeho vědomí zkušenost, že intelektuální práce může být zdrojem velké vnitřní radosti.

4.8 Domnělá chyba

Stává se, že žák je kárán za chybu, které se nedopustil. Může k tomu dojít nedopatřením, a když se věci vysvětlí, je vše v pořádku. Když učitel ví, že za chybu žáka považoval něco, co bylo správně, a přesto z prestižních důvodů na pomýleném hodnocení trvá, dochází ke konfliktu dvou hodnot: moci a pravdy. Taková zkušenost zasáhne nejen žáka domněle chybujícího, ale celou třídu a může mít na žáky dlouhodobý vliv. Vítězství moci nad pravdou, zvýrazněné pocitem křivdy, přetrvá v mysli člověka celá desetiletí. V jedné z epizod z našeho archívu se píše, jak učitel uvedeným způsobem poškodil žáka v tercii a svoji chybu přiznal až na maturitním večírku. Neudělal to dříve, protože měl strach, že kdyby chybu přiznal, utrpěla by jeho autorita ve třídě. Z žáka se později stal učitel a jeho dávná zkušenost jej vedla k tomu, aby se ostražitě vyvaroval toho, aby podobným způsobem nepoškodil svého žáka.

Běžnějším případem domnělé chyby je nestandardní postup žáka. Žák není kárán za to, že něco špatně vyřešil, ale za to, že to vyřešil způsobem, který není učitelem autorizován. Takový případ je vykreslen v následujícím příběhu.

Ilustrace 4.[7] Dušan (2. ročník) je skvělý počtář. Bez problémů pracuje i se čtyřmístnými čísly. Potíže má se čtením a zejména s psaním. Příběh začíná úlohou napsanou na tabuli.

Úloha 2. V tramvaji jelo 31 lidí. Na zastávce 4 osoby vystoupily a 13 osob přistoupilo. Kolik lidí jelo dále?

Učitelka se ptá, kdo to půjde vyřešit, a Dušan z lavice odpoví: „Dále pojede čtyřicet osob.“

1.	Učitel	(vyčítavě) „Copak takhle se řeší písemná slovní úloha? Bez znázornění, bez zápisu? Bez výpočtu? Bez písemné odpovědi? Pojď, Dušane, k tabuli.“
2.	Dušan	(stále ještě z místa) „Vlastně přistoupilo devět, tak. . . “
3.	Učitel	„Pojď k tabuli a pořádně to zapiš.“
4.	Dušan	(stojí u tabule, dívá se na text napsané úlohy) „Jelo třicet jedna lidí“ (napíše 31). „Pak nastoupilo třináct a vystoupili čtyři.“ (pod číslo 31 píše $13 - 4 =$)
5.	Učitel	(přeruší Dušana) „Počkej, počkej, co to tam šmudlíš? My ti vůbec nerozumíme. Píšeš něco a my nevíme co. Dášo, ty mu rozumíš?“ (aniž by vyčkala reakce Dáši, pokračuje) „Vidíš, žádný ti nerozumí. Tak to smaž a vyřešíme úlohu pořádně. Napiš ‚jelo osob‘.“ (Dušan to píše, pak na příkaz učitelky napíše „vystoupilo“ a dostává první pochvalu)
6.	Učitel	„Vidíš, že ti to jde. A teď pod to napiš ‚nastoupilo‘.“
7.	Dáša	(naléhavě se hlásí, když je vyvolána, řekne) „Přistoupilo.“
8.	Učitel	(nechápavě) „Co přistoupilo?“ (teď jí dojde, že ji Dáša opravuje v souladu se zadáním úlohy) „Aha, ano, nastoupilo nebo přistoupilo, obojí je dobře. To je totéž.“ (k Dušanovi) „Ale tak jo, napiš přistoupilo, ale hlavně napiš, kolik to bylo.“

[7] Fragmenty z příběhu „Albert“ (Hejný; Kuřina 2001, s. 24–25), upraveno.

V uvedeném duchu je úloha dořešena. Učitelka instruuje, Dušan zapisuje. Nakonec je jeho poslušnost odměněna pochvalou.

Učitel „Vidíš Dušane, že to jde. Teď si to všichni zapíšeme do školních sešitů.“

Komentář 6. Ani jeden žák se v tomto příběhu nedopustil věcné chyby. Jediný, kdo chyboval, byla učitelka a ta svoji chybu nepřiznala. Přesto je příběh poučný právě z hlediska chyby. Opisuje totiž klima, v němž se strachu z chyby dobře daří. Jde zejména o dva momenty takového klimatu: vnímání chyby učitelkou a způsoby penalizace chyby.

Nejprve si ujasněme, v čem je hochova „chyba“. Dušan ihned vidí řešení úlohy a správně odpoví. Učitelka jeho odpověď odmítá, jako kdyby byla chybná. Nereaguje na obsah chlapcovy myšlenky, ale na to, že Dušan nepostupuje tak, jak to ona žáky učí a jak to od nich vyžaduje. Nepřijímá jeho pokus slovy vysvětlit, jak úlohu vyřešil (2), ani jeho písemný pokus (4) řešit úlohu po svém. Dušanovo *produktivní* myšlení se nesetká s pochopením učitelky. Ta žádá, aby hoch postupoval tak, jak to nacvičují, tedy nápodobou a reprodukcí.

Trest, který následuje, je vícevrstvový. V jediném vstupu (5) pomocí pouhých 31 slov dokáže učitelka čtyřmi různými „údery“ pranýřovat odvahu hocha myslet. Použije následující nástroje:

1. Zesměšňování: „Co to tam šmudlíš?“
2. Odsouzení chlapcova počínání ve jménu třídy: Učitelka neřekne „já ti nerozumím“, ale „my ti nerozumíme“; vnutí Dáše odmítavé stanovisko k Dušanovu postupu. Žáci ovšem vědí, že Dáša může mít jiný názor, ale nátlakové klima žádnému z nich nedovolí postavit se proti demagogii učitelky. Ve vědomí žáků se tak posiluje zkušenost, že demagogie je legitimní prostředek při interakci mocných se slabými.
3. Ničení toho, co hoch vytvořil: Učitelka přikáže Dušanovi smazat vše, co napsal. Akt mazání nápisů věcně správných, ale učitelkou neautorizovaných je vítězstvím moci nad pravdou.
4. Odebrání chlapci práva vstupovat do procesu řešení úlohy: Učitelka po oznámení „vyřešíme úlohu pořádně“ odsune chlapce do role zapisovatele a sama se ujme řízení řešitelského procesu. Ona rozhoduje, co a jak se bude dít, žákům není ponechán žádný prostor.

Učitelka za správné a chvályhodné považuje jednání žáka, které plně odpovídá tomu, co ona žákům přikazuje a co očekává. Za nežádoucí a pokárání hodné považuje každé samostatné jednání žáka, které není v souladu s rituály, které ona od žáků požaduje. Nepochybuje o didaktické správnosti svého postupu.

Dušan u tabule trpí. Je v roli intelektuálního nádeníka, je ponižován a otráven. Jeho snaha byla devalvována. Stejně jako totalitní režimy od svých občanů vyžaduje učitelka od žáků, aby nic nového nevymýšleli a plnili předepsané rituály s radostí a přičinlivostí.

Pro učitelku je rozhodující to, co je napsáno na tabuli, nikoli to, co je v hlavách žáků. Vychází z předpokladu, že když je to dobře na tabuli, bude to dobře i v hlavách dětí.

Zajímavý moment nastane, když Dáša opraví učitelku. Dívka asi očekává pochvalu za to, že je tak pozorná. Učitelka však v opravě cítí osten výčitky. Dášu ani nepochválí, ani jí za opravu nepoděkuje. S jistými rozpaky korekci akceptuje, protože si uvědomí, že předpona „při" je pro ni důležitá. Slovem přistoupilo navede žáky na to, že je třeba použít operaci přičítání. Svoji chybu však nepřizná a bagatelizuje slovy: „Nastoupilo nebo přistoupilo, obojí je dobře. To je totéž." Pozornost žáků od své chyby odpoutá, když Dušanovi přikáže „ale hlavně napiš, kolik to bylo".

S učitelkou, která v ilustraci vystupuje, jsem měl možnost několikrát rozmlouvat. Pokud se naše řeč vedla o věcech neškolských, vše bylo v pořádku. Jakákoli zmínka o pedagogických problémech vedla kolegyni k agresi. Zcela odmítala mluvit o matematice. Věděla, že její znalosti jsou chatrné, a bála se to odhalit.

Závěry oddílu 4.8

Učitel, který od žáků požaduje, aby matematiku dělali přesně tak, jak to on vyžaduje, nerozvíjí, ale znásilňuje žákův intelekt. Nevychovává myslící lidi, ale poslušné roboty. Do této polohy byli dříve učitelé tlačeni preskriptivním klimatem našeho školství. Nástroji byly detailně vypracované osnovy, jednotné učebnice, „ideologicky kovaná" inspekce, která na vše dohlížela. Je pochopitelné, že totalitní režim otupování kritického myšlení nastupující generace vítá, protože kritické myšlení je mu životně nebezpečné. K prosazení instruktivního způsobu vyučování výrazně přispívá starozákonné vnímání chyby jako hříchu, jako věci nepřípustné. Bez možnosti dělat chyby se žádná nová myšlenka nemůže rozvinout. Bezchybné mohou být pouze reprodukce. Žák, který si chce uchovat naději na vlastní rozvoj, se musí takovému tlaku vzepřít. Nemusí to dělat vyzývavě, ale i tak ponese následky. Učitel, který je v matematice slabý, ale nechává žákům volnost svobodně o problematice diskutovat, může vychovat velice kvalitní žáky s vysokou úrovní tvořivého myšlení. Takový případ známe.

4.9 Jak chybu vnímají žáci a jak učitelé

V roce 2001 jsme v kvintě osmiletého gymnázia ve Zvolenu uskutečnili první sondu zaměřenou na mapování názorů žáků o chybě. Žáci měli odpovědět na pětipoložkový dotazník. Dotazník zadávala jejich třídní profesorka, která je učila matematiku. Žáci věděli, že se jedná o výzkum, na kterém se kromě jejich profesorky A. Michalcové podílí i autor této kapitoly. Žáci se nemuseli podepsat, ale skoro všichni se podepsali. Zde jsou otázky.

1. Napíšte svoj najsilnejší zážitok, ktorý ste mali so (a) školskou, (b) neškolskou chybou. Nemusí to byť váš osobný príbeh, môže to byť príbeh, kde ste boli iba ako divák.

2. Spomínate si na nejakú chybu, ktorá sa vyskytla v literatúre, resp. vo filme, ktorý ste videli?
3. V ktorom predmete sa bojíte chyby najviac, v ktorom najmenej a prečo?
4. Ako sa dívate na učiteľa, ktorý sa dopustí chyby a

   (a) snaží sa ju bagatelizovať alebo ututlať?

   (b) prizná sa k nej a ospravedlní sa?
5. Keby ste boli učiteľom, ako by ste sa zachovali v situácii, keď sa žiak dopustí chyby?

Analýza dotazníku ukázala více očekávaných, ale i některé nečekané odpovědi.

- Chybu všichni žáci považují za jev nežádoucí. Ani v jedné odpovědi se nemluvilo o tom, že chyba může být žákovi užitečná. Překvapilo nás to, protože již na první třídní hodině třídní profesorka se žáky debatovala o chybě a na příkladech ukázala, jak může poučení z chyby přivést žáka k pevnému poznání.
- Chybu učitele je většina žáků ochotna tolerovat, zejména když se učitel nesnaží chybu bagatelizovat a zastírat. K vlastním chybám a chybám spolužáků se ale žáci staví velice kriticky. Jedině chyby, jichž se žák dopustí při probírání nové látky, byly žáky tolerovány.
- Ne všichni žáci se chyby obávají kvůli špatné známce; někteří (zejména dívky) se více bojí zesměšňování ze strany učitele. Vůbec ironie a lidské ponižování bylo nejen v této, ale i v dalších sondách kritizováno jako největší trest, který může učitel žákovi udělit.
- Některé odpovědi ukazovaly, že žáci se vlastně až při tomto dotazníku poprvé hlouběji zamýšleli nad významem chyby v životě člověka. Někteří si ujasňovali rozdíl mezi chybou a trestem, rozdíl mezi chybou a neštěstím, mnozí dospěli spíše k otázkám než odpovědím. Ty formulovali otevřeně i skrytě, někdy dokonce provokačně. Příkladem náznaku takové provokace bylo předsevzetí žáka učit se tak, aby se chyb vůbec nedopouštěl.
- V jedné odpovědi byla popsaná standardní situace z rodokapsů: padouch nastraží past, do které nic netušící dobrák padne. Žák klade otázku, kdo zde chybil. Ten dobrák jistě pochybil, ale trestat jej by bylo nespravedlivé. Ale pochybil padouch, kterému se jeho záměr zdařil? Co to je vlastně chyba?

Z odpovědí bylo jasné, že téma chyby žáky oslovilo, a bylo proto žádoucí, aby na toto téma učitelka ve třídě vyvolala diskusi. K tomu došlo po dvou dnech a skoro všichni žáci se do debaty zapojili se značným zaujetím. Ukázalo se, že v uplynulých dvou dnech o těchto věcech společně rozmlouvali a nejeden žák tuto tematiku diskutoval i s rodiči. Bouřlivá diskuse byla o nespravedlivém hodnocení učitele, o tom, zda je chybou, že se jej spolužáci nezastanou. Nejvíce protimluv vyvolala teze o prospěšnosti chyby.

Ve stejném roce jsme na závěr jednoho dvoudenního semináře pro české učitele žádali účastníky, aby se kriticky zamysleli nad vlastní pedagogickou prací a napsali jednu až tři chyby, kterých se v ní dopouští. Tentokrát byla anonymita odpovědí plně využita. Žádný učitel se nepodepsal. Z početného seznamu uvedených chyb vybereme asi třicet reprezentantů a rozdělíme je do čtyř okruhů:

Nedostatečná komunikace se žákem, většinu času mluví učitel sám. Jsem upovídaná. Kladu si řečnické otázky, na které sám odpovídám. Na opakovacích hodinách se málo ptám. Odpovídám za žáka. Skáči žákovi do řeči. Jsem netrpělivá, když žák nešikovně rýsuje na tabuli; raději rýsuji sama. Příliš rychle vykládám (instruuji).

Odsouvání slabých žáků. Nemám dost trpělivosti se slabými žáky. Otázky dětí typu „mám psát do sešitu?, barevně?, podtrhnout?. . . " mě rozčilují (4. třída). Rychlost výkladu určuji podle dobrých žáků. Pozdě eviduji, že slabí žáci nechápou, a pak opakovaně vysvětluji. Zapomínám pracovat se slabými žáky. Nevěnuji se vůbec slabým žákům. Nevšímám si úrovně nejslabších žáků. Domácí úkoly kontroluji selektivně (jen slabé žáky).

Upřednostňování slabých žáků. Více času věnuji slabým žákům; rozptyluji se opakovaným instruováním slabých žáků. Příliš mnoho času věnuji slabým žákům. Mám výčitky svědomí, že nechám slabé žáky projít.

Kontrola a hodnocení práce žáků. Zadávám příliš rozsáhlé domácí úkoly. Při kontrole domácích úkolů se nedívám, co žák napsal. Jsem příliš shovívavý k žákům, kteří nenosí domácí úkol (ředitel, který často nemůže odučit hodinu v plném rozsahu). Nedůsledná kontrola žáků. Dávala jsem hodně pětek. Teď, když to musím zdůvodnit, dávám jich již méně. Vím, že žáky nehodnotím v souladu se svým svědomím. Jsem příliš shovívavá, nedávám pětky, bojím se ptát slabých žáků. Jsem shovívavá k dobrým žákům, leccos jim promíjím.

Učitelé si své pedagogické chyby uvědomují a přesto se jich dopouštějí. Jak si to lze vysvětlit? V rozhovorech o této problematice učitelé uváděli argumenty ospravedlňující nebo dokonce zdůvodňující některé výše uvedené chyby. Analýzou těchto argumentů jsme dospěli ke třem základním příčinám popsaných jevů:

1. *Zaměřenost učitele na matematiku, nikoli na žáka*. Učitel, který je především matematik, rád diskutuje se žáky, kteří matematice rozumí, a často je bezradný při interakci se slabými žáky. Necítí potřebu jim pomoci, protože si myslí, že jim ani pomoci nelze. Je otázkou, zda si takový člověk správně zvolil povolání. Plně souhlasíme s přesvědčením našeho předního pedagogického psychologa, který píše: „Osobně jsem přesvědčen, že na prvém místě je zapotřebí uvažovati o dítěti jako o adresátovi všeho toho, proč zde učitel a škola jsou." (Helus 1996)
2. *Tradice*. Teorie memů[8] nás učí, že vzorce skupinového chování se ve společnosti reprodukují. Školství patří ke společenským systémům s vysokým stupněm setrvač-

[8] Viz poznámka pod čarou na s. 54.

nosti. Proto je pochopitelné, že učitel se bude ve své práci orientovat spíše podle vzorů, které poznal jako žák, než podle pouček a teorií získaných na vysoké škole připravujících učitele. Tato skutečnost je výzvou pro uvedené fakulty, aby využily poslední příležitosti přímo ovlivnit zkušenost budoucího učitele a vedly jej konstruktivistickými přístupy.

3. *Vnější tlaky působící na učitele*: osnovy, způsob prověřování jeho práce, ... Tyto tlaky jsou značné a mnohdy ochromí i práci zaníceného a kvalitního učitele. Zde máme bohužel jen malou šanci do věci zasáhnout, protože tuto sféru řídí politická rozhodnutí. Přesto mohou jednu věc učitelé ovlivnit: volbu úloh, které se žákům předkládají k přijímacím pohovorům na různé typy škol. Budeme-li usilovat o to, aby se zde postupně objevovalo více spekulativních úloh a aby se oprava žákovských řešení neomezovala na polaritu dobře-špatně, ale aby se hledaly myšlenkové pochody žáků, přispějeme tím ke zkvalitnění výuky matematiky na školách.

4.10 Závěr studie

Studie přináší čtyři původní výsledky výzkumu.

1. Komparativní analýzu vnímání chyby (resp. hříchu) čtyř kulturně-společenských memů. Projekci těchto memů do chování učitelů a žáků v současné škole.
2. Analýzu situace „žák se dopustil chyby“ a různé reakce učitele na tuto situaci. Popis a analýzu důsledků různých reakcí učitele na chybu žáka. Návrh manuálu pro práci učitele s chybou žáka.
3. Popis a analýzu dvou běžně se vyskytujících didaktických situací: chybuje slabý žák a chyba žáka je pouze domnělá.
4. Některá odhalení o vnímání chyby získaná šetřením mezi učiteli a žáky. Nejzávažnějším odhalením je identifikace tří příčin, proč se učitelé dopouštějí i těch pedagogických chyb, jichž jsou si sami vědomi.

Kapitola 5

Nedorozumění v komunikaci učitel – žák/student

Darina Jirotková, Jana Kratochvílová

5.1 Formulace problému

Při analýzách protokolů některých experimentů uskutečněných v rámci různých výzkumů, které byly převážně zaměřeny na popis kognitivních procesů žáků a na identifikaci kognitivních a interaktivních fenoménů v komunikaci, jsme několikrát nečekaně, často až po delším časovém odstupu, odhalily, že v komunikaci mezi žákem a učitelem/experimentátorem došlo k nedorozumění. Při prvních analýzách byla naše pozornost upřena především na žáka. Časový odstup umožnil získat nad situací nadhled a věnovat se i analýze vlastních vstupů do komunikace. Odhalení, že nedorozumění nebylo způsobeno špatným porozuměním ze strany žáka, ale ze strany experimentátora, se stalo pro nás silnou motivací se tímto jevem průběžně zabývat i v dalších výzkumech.

Nebudeme zde řešit obecnější otázky komunikace mezi žákem a učitelem, ale zaměříme se pouze na jev nedorozumění, a sice nedorozumění, které je způsobeno na straně experimentátora/učitele a jehož si experimentátor/učitel v průběhu komunikace nebyl vědom. Jeho citlivost na vnímání komunikačních šumů nebyla na takové úrovni, aby hrozbu nedorozumění včas identifikoval a průběh další komunikace kontroloval. To znamená, aby nedorozumění buď předešel, nebo je nechal proběhnout a vhodně na ně reagoval.

Cílem kapitoly je analyzovat jev nedorozumění ve školní interakci prostřednictvím tří experimentů. Výsledky studie obohatily naše zkušenosti, které jsou potřebné pro zvyšování citlivosti na komunikační šumy, a tím také ke zkvalitňování komunikace mezi učitelem/experimentátorem a žákem.

5.2 Přehled současného stavu

Výklad nového učiva v transmisivním pojetí výuky (viz kap. 1) probíhá jednosměrnou komunikací (obvykle to je zvuková forma verbální komunikace) od učitele k žákovi, resp. k žákům (Mareš; Křivohlavý 1995). Učitel předává žákům poznatky často takovým způsobem, jak jim sám nejlépe rozumí, pravděpodobně tak, jak se k nim někdy sám dopracoval nebo jak jim byl naučen. Komunikaci (výklad učiva) mívá zejména začínající učitel detailně připravenu a soustředí se při ní převážně na obsahovou stránku. Zpětnou vazbu o hloubce porozumění učiva dostává od žáků jejich reakcemi na otázky typu „Rozumíte? Kdo tomu nerozuměl?“ nebo až při zkoušení buď orientačním celé třídy, nebo klasickým ústním individuálním zkoušením. Komunikace, tentokrát oboustranná, probíhá tak, že učitel klade otázky a žák na ně odpovídá. Správnou odpověď učitel obvykle interpretuje jako projev porozumění problému a naopak špatnou nebo žádnou odpověď považuje za známku neporozumění. Z toho pak vyvozuje důsledky buď pro hodnocení, nebo pro další vysvětlování látky. To obvykle probíhá tak, že opakuje původní výklad a snad uvede více ilustrací. Jiná forma oboustranné komunikace buď mezi učitelem a žákem/třídou, nebo mezi žáky při probírání nové látky neprobíhá.

Jedním z významných prvků konstruktivisticky vedeného vyučování je diskuse, a to jednak diskuse učitele se žáky/třídou, ale také diskuse mezi žáky. Diskuse obvykle řídí učitel takovým směrem, aby při nich žáci objevili něco nového, aby prověřili hypotézu vyslovenou nějakým žákem, zhodnotili různá řešení zadané úlohy apod. Dávat dostatek prostoru pro účelné třídní diskuse však klade na učitele značné nároky, neboť velké množství komunikace je takové podoby, na kterou se nemůže detailně připravit. Může se na ně připravit jen rámcově, a tak se často dostane do jedinečných situací, které nemohl předem naplánovat ani předvídat, ale v daném okamžiku je musí řešit. Pokud se takové situace učiteli přihodí, a zejména když se mu nepodaří je řešit optimálně, je důležité, aby se k nim vracel, analyzoval je a vytěžil z nich zkušenosti do budoucna. Je zřejmé, že čím více zkušeností s těmito situacemi učitel má a čím důkladněji je po obsahové stránce připraven na předmět diskuse, tím je menší pravděpodobnost, že ho zaskočí situace, kterou by neuměl vhodně vyřešit, a tím méně se obává dávat takovým diskusím prostor.

Za nevhodné vyřešení situace považujeme takové, kdy učitel násilně ukončí diskusi s tím, že on je jediná autorita, která umí rozhodnout o matematické pravdě, nebo důsledkem chybné interpretace žákových výpovědí nebo neznalosti mechanizmu poznávacího procesu vede žáka cestou, která neodpovídá jeho kognitivnímu stylu. Tím může zabrzdit nebo při častějším opakování dokonce přerušit žákův intelektuální rozvoj v dané problematice.

Hloubka porozumění žákovi je do značné míry úměrná porozumění chybám, kterých se žák dopustí. Studium chyby v myšlenkových procesech žáků při řešení úloh je jednou z oblastí zkoumaných v současné době v didaktice matematiky (viz také kap. 4). M. Hejný a A. Michalcová poukazují na společenské vnímání chyby z historického hlediska: „My všetci, ktorých do života pripravovala herbartovská škola, sme od detstva nasiaknutí presvedčením, že chyba je poklesok, a preto sa snažíme vlastné chyby ukrývať. Strach z možnej chyby, ňou vyvolaný pocit hanby, hnevu či ľutosti a túžba vyvarovať sa chýb – to všetko prenášáme na našich žákov. . . . Žiakova chyba može učiteľovi prezradiť všeličo o jeho myšlienkových pochodoch a predstavách. K tomu je ale potrebné, aby sa učiteľ na tieto predstavy pýtal, aby mal o ne zájem. . . . aby hľadal jej príčinu, aby sa pýtal prečo k chybě došlo.“ (Hejný; Michalcová 2001, s. 54–55.) My k tomuto dodáváme na základě svých zkušeností, že „chyba“ evidovaná učitelem/experimentátorem u žáka nemusí být vždy důsledkem nedostatku žáka. Může vzniknout například špatnou interpretací žákova písemného nebo ústního projevu učitelem/experimentátorem, jeho nejednoznačným zadáním úlohy nebo nepřesnou otázkou.

Obecné poznatky o komunikaci ve škole obecně lze čerpat především z knihy (Mareš; Křivohlavý 1995). Různým aspektům komunikace v matematice je v současné době věnováno několik výzkumů nejen u nás, ale i v zahraničí (např. Boero aj. 1998, Brown 1997, Bussi 1998, Dormolen 1986, Jirotková; Littler 2003c, Steinbring 1998). Některé myšlenky, které jsme použily při analýze komunikace, jsme též čerpaly z článku (Pirie 1998). S. Pirie klasifikuje jazyk používaný ve vyučování matematice do šesti skupin: 1. každodenní jazyk, 2. matematický verbální jazyk, 3. matematický symbolický jazyk, 4. vizuální jazyk, 5. neverbální jazyk, 6. kvazi-matematický jazyk. Tato klasifikace pomáhá lokalizovat nedorozumění a najít příčiny jeho vzniku. Zkoumáním, do jaké míry žáci umí naslouchat učiteli, jak interpretují jeho sdělení, komentáře, otázky a také jak učitel interpretuje komentáře a poznámky svých žáků (často tak, jak by si on sám přál), se zabývají T.J. Cooney a K. Krainer (1996). O jevech nedorozumění, které byly odhaleny při analýzách protokolů realizovaných experimentů, jsme již referovaly (Jirotková; Swoboda 2001, Jirotková; Kratochvílová; Swoboda 2002, Kratochvílová; Swoboda 2002, 2003a, Kratochvílová 2002).

5.3 Metody práce

Autorky dosud samy žádný výzkum nezaměřily pouze na odhalování nedorozumění a ani jim není žádný takový výzkum znám. Zkoumání nedorozumění bylo vždy provázáno na výzkumy zaměřené na jinou problematiku, např. na zkoumání geometrických představ žáků (Jirotková 2001a), na zkoumání strukturace geometrických poznatků žáků prostřednictvím jejich komunikace (Jirotková; Littler 2003c), na zkoumání pojmotvorných procesů v geometrii (Swoboda 1997), poznávacích procesů z oblasti kombinatoriky (Kratochvílová 1995) i v netradiční aritmetické struktuře (Kratochvílová 2001). Dále si jevu nedorozumění všímáme také v probíhajícím výzkumu, který je zaměřený na ověřování účinnosti konstruktivistických přístupů k vyučování geometrii v rámci vysokoškolské přípravy budoucích učitelů 1. stupně základní školy (viz kap. 12) a na hledání vhodných úloh pro aplikaci kreativního přístupu k vyučování (Hejný; Jirotková 2004).

Metodologie výzkumů je popsána v jednotlivých článcích, na které se odkazujeme. Všem výzkumům je společné to, že byly pořízeny zvukové záznamy z dílčích experimentů nebo vlastní experimentální výuky a ty byly spolu s ostatními relevantními údaji přepsány do formy písemných protokolů, které byly dále opatřeny poznámkami buď experimentátora, nebo pozorovatele o neverbálních projevech účastníků experimentu, o klimatu, v němž experiment proběhl, nebo doplněny žákovským písemným řešením předložené úlohy. Nástrojem výzkumu byly úlohy, které žáci řešili buď ústně (ilustrace 1) nebo písemně (ilustrace 2). Účastníky experimentu z ilustrace 1 a 2 byli žáci 3. a 4. ročníku. V ilustraci 3 se jedná o příběh, kde došlo k nedorozumění mezi učitelkou a budoucí učitelkou při rozboru komunikace budoucí učitel – žák ve třídě (4. ročník).

Zpracování experimentálního materiálu bylo děláno pomocí komparativní analýzy a atomární analýzy. Metodu atomární analýzy poprvé použil J. Perenčaj (1989) pod vedením M. Hejného. Poprvé byla atomární analýza popsána v článku (Hejný 1992). Od té doby byla použita a dále rozpracována ve více pracích (např. Jirotková 1998, Stehlíková 2000). Pro potřeby studia interakce učitel/experimentátor – žák a zejména pro studium jevu nedorozumění rozpracovaly tuto metodu na vrstvenou atomární analýzu J. Kratochvílová a E. Swoboda (2002, 2003a.) Podstatou vrstvené analýzy je rozklad celého procesu do několika vrstev (kognitivní, jazyková, sociální a emocionální), a to pro každého aktéra interakce zvlášť. Jednotlivé vrstvy jsou nejdříve zkoumány odděleně a pak ve vzájemných souvislostech.

5.4 Výsledky

Výsledkem částí výzkumů, na které je odhalení nedorozumění propojeno, je identifikace komunikačních fenoménů, pomocí nichž lze popsat mentální procesy účastníků komunikace. Popis nedorozumění je sám o sobě výsledkem analýz.

V této kapitole uvedeme tři příběhy, které mají společného jmenovatele. Každý je ukázkou fragmentu protokolu experimentu, při němž proběhla komunikace žák – žák – experimentátor (ilustrace 1), experimentátor – žák (ilustrace 2) nebo učitel – žák (ilustrace 3). Každá zachycená komunikace je analyzována. Jak bylo řečeno výše, v komunikaci v prvních dvou ilustracích nezazněl zřetelně žádný signál nedorozumění nebo komunikačního šumu. Nedorozumění bylo odhaleno teprve tehdy, když jsme se pomocí analýzy protokolu snažily popsat žákovy myšlenkové procesy a jeho poznatkovou strukturu.

Ve všech ilustracích je nedorozumění způsobeno nesprávnou interpretací žákových výpovědí experimentátorem či učitelem.

V prvním příběhu se jedná o komunikaci mezi žáky, kterou učitel pouze sleduje. K nedorozumění mezi žáky nedochází, avšak vstup experimentátora ukazuje, že je to on, kdo komunikaci žáků nerozumí. Navíc moment, kdy zazněl jistý komunikační šum, který mohl vést k nedorozumění, experimentátor v průběhu komunikace vůbec nezaregistroval. Nedorozumění vyplynulo z různé interpretace verbálního popisu pojmu, která byla důsledkem různé úrovně porozumění daného pojmu.

Ve druhém příběhu je ilustrována chybná učitelova interpretace, když žákova myšlenka byla dobrá. Nedorozumění vyplynulo z různého použití komunikačního prostředku.

Třetí příběh ilustruje nevhodnou reakci na žákovo řešení úlohy opět způsobené učitelovou chybnou interpretací jeho myšlenkového procesu. Příčina nedorozumění, které není nedorozuměním v pravém slova smyslu, vyplývá z různého přístupu k úloze.

První dva příběhy patří k prvním zkušenostem experimentátorek, a je tedy pochopitelné, že i sama realizace experimentů měla mnohé nedostatky. Ty se týkají jak samotné komunikace se žákem, tak i způsobu evidence rozhovoru. Například záznamy o neverbálních projevech žáka, o klimatických prvcích, o vlastních psychických stavech a zlomech nebyly dostatečně podrobné, aby i po delším časovém odstupu při opětovné analýze umožnily lépe rozhodnout o některých otázkách, které analýza klade.

5.4.1 Ilustrace 1. Hra ANO-NE

V tomto příběhu sledujeme komunikaci mezi žáky 4. ročníku jedné pražské školy. Komunikace byla zprostředkována modifikací ANO-NE didaktické hry SOVA (viz kap. 14). Objekty hry bylo čtrnáct modelů geometrických těles, jejichž velikost byla přiměřená žákům tak, aby je mohli uchopit do jedné ruky: tetraedr (1), pravidelný čtyřboký jehlan (2), komolý čtyřboký jehlan s obdélníkovou podstavou (3), krychle (4), trojboký hranol (5), čtyřboký hranol (6), pětiboký nekonvexní hranol (7), pětiboký nekonvexní jehlan (8), kužel (9), komolý kužel (10), válec (11), koule (12), pravidelný šestiboký hranol (13), kvádr (14).

Ukázka části protokolu

Hru hráli dva chlapci, Jarda a Tomáš. Oba dva hru znali. Tomáš vybíral objekt a Jarda hádal. (Tomáš vybral těleso 14.)

Vysvětlivky (týkají se i dalšího protokolu): Jr03 značí třetí vstup Jardy (resp. Tm – Tomáše, Ex – experimentátora). Text psaný v závorce je komentářem experimentátora.

Jr01	„Je kulatá?“	Tm01	„Ne.“
Jr02	(a) „Je jako kosočtverec?“ (b) „Je hranatá, že jo.“	Tm02	„Ne.“
Ex01	„Není hranatá?“	Tm03	„Jo je.“
Jr03	„Má v sobě takovou dírku?“	Tm04	„Ne.“
Jr04	„Je vysoká?“	Tm05	„Mírně vysoká.“
Jr05	„Zužuje se, když jede nahoru?“	Tm06	„Ne.“
Jr06	„Vypadá to jako trojúhelník?“	Tm07	„Ne.“
Jr07	„A vypadá to jako obdélník?“	Tm08	„Jo.“
Jr08	„Je to tahle?“ (ukazuje správně těleso 14)		

Analýza

Tato hra přispívá k utváření geometrického světa žáků, při němž se vzájemně prolínají dvě poznávací linie.

První linie – objekty jsou poznávány jak zkoumáním jejich „anatomie“, tak vzájemnou komparací. Tato hra soustřeďuje pozornost žáka právě na komparaci.

Druhá linie – jednotlivé znalosti jsou jazykově uchopovány. Buduje se terminologie. Můžeme sledovat, že žák 4. ročníku má částečně vybudovánu terminologii rovinné geometrie (kosočtverec, trojúhelník, obdélník). Naproti tomu ve stereometrii je hranice mezi termíny a slovy z běžného života zatím velice neostrá. Zcela scházející slovník týkající se těles je nahrazen terminologií rovinné geometrie a slovy z běžného života.

Vágní, nejasné termíny, které žáci v dialogu používají, mohou vnášet do komunikace jistý šum. Každým hráčem mohou být interpretovány jinak. Tento šum může vyvolat:

- komunikační konflikt, to znamená, že každý účastník komunikace má jinou představu pod jedním použitým slovem,
- opatření (prevenci) proti komunikačnímu konfliktu, to znamená, že aspoň jeden účastník komunikace si je vědom možnosti nedorozumění, kterému předejde.

V našem případě ukážeme, že žáci jsou si nebezpečí nedorozumění vědomi, a aby omezili případné nedorozumění, používají kontrolní otázky. Tuto upřesňující strategii si dítě tvoří již někdy od druhého až třetího roku svého života a v běžném životě je zcela obvyklá. Pro matematika zvyklého na jednoznačně deterministický jazyk je tato strategie komunikace často obtížně srozumitelná.

Kromě geometrie je situace hry zaměřena i na logiku, například na volbu strategie nebo na porozumění kvantifikátorům, případně negaci.

Ve scénáři experimentu si experimentátorka předepsala, že nesmí vstupovat do hry, aby nemohla ovlivnit její průběh. Měla být pouze pozorovatelem a arbitrem. Z jejího vstupu hned na začátku hry je patrné její neporozumění komunikaci chlapců, neporozuměla ani Jardovi (Jr02), ani Tomášovi (Tm02). Projevilo se též, že v tu chvíli nedokázala oddělit od sebe roli experimentátorky od role učitelky, která jí velela uvést věci na pravou míru, nenechat zaznít chybná či nejasná tvrzení a těm pokud možno předcházet.

Aby bylo neporozumění experimentátorky zřejmé, analyzujme co nejpodrobněji začátek hry a snažme se interpretovat použitá slova s geometrickým významem.

Jr01 „Je kulatá?“

Z první otázky, ani z první odpovědi (Tm01) zatím nemůžeme poznat nic o tom, co si jeden nebo druhý žák představuje pod pojmem kulaté těleso, neboť s tělesy nemanipulovali. Na základě našich zkušeností však víme, že kulatost patří k dominantním klasifikačním charakteristikám a děti ji vnímají většinou jako charakteristiku pro třídu těles, tedy jako jev diferenciační – kulatá versus nekulatá (hranatá). Jarda tímto slovem pravděpodobně označil čtyři tělesa – 9, 10, 11, 12. Někdy však bývá slovo kulatá použito i jako diferenciační vlastnost uvnitř skupiny kulatých těles: koule je kulatější než válec, kužel atd., nebo také koule je „celá kulatá“, ale ostatní tělesa jsou pouze kulatá. Slovo kulatá tak vyjadřuje kvalitu objektu. Význam tohoto a nejen tohoto slova tedy záleží na souboru uvažovaných těles.

Jr02 (a) „Je jako kosočtverec?“. . . (b) „Je hranatá, že jo.“

První část Jardova vstupu Jr02(a) je analytická. Výrazem „jako kosočtverec“ chce pravděpodobně označit ta tělesa, která jsou různá od krychle nebo kolmých hranolů, tedy taková tělesa, ve kterých je přítomno něco šikmého, kosého. Slovo kosočtverec je použito zřejmě metaforicky.

Druhá část Jardova vstupu Jr02(b) je propojena na předchozí repliku Tm01 a pouze stvrzuje to, že hledané těleso je hranaté, protože není kulaté. Také se potvrzuje, že Jarda vnímá fenomény kulatost a hranatost jako dva polaritní diferenciační jevy. Slova kulatá a hranatá pocházejí z běžného života a jejich význam v geometrickém světě nemá ostré hranice. Ačkoliv Tomáš s první odpovědí nezaváhal a svojí jistotou nezavdal důvod obávat se komunikačního šumu, Jarda si byl vědom možnosti odlišné interpretace slova kulatý v první otázce. Veden upřesňující strategií předchází možnému komunikačnímu konfliktu, nedorozumění a vyslovuje kontrolní tvrzení, v němž formuluje zkoumaný jev jiným způsobem (není kulatá = je hranatá). Obdobná situace se odehrála ještě jednou později. Vyjádření pocházející výlučně z běžného života, a tudíž vágní v Jr05 („Zužuje se, když jede nahoru?“), Jarda kontroluje, upřesňuje alternativním vyjádřením „Je jako trojúhelník?“ v Jr06, přestože dostal jasnou odpověď. V Tm02 Tomáš odpovídá na Jardovu otázku, zda je hledané těleso „jako kosočtverec“, jak je zřejmé z dalšího průběhu.

Nyní vstupuje do dialogu experimentátorka v domnění, že mezi chlapci dochází k nedorozumění, a ve snaze předejít kolapsu hry. Chybně se domnívá, že Jarda slovy „je hranatá“ upřesňuje a dokresluje otázku „Je jako kosočtverec?“. Neuvědomuje si, že druhá část otázky Jr02(b) má pouze marginální charakter a že se k první části otázky vůbec nevztahuje, nýbrž že se vztahuje k Tomášově odpovědi „ne“ (Tm01). Experimentátorka reagovala na Jardou použitou upřesňující strategii.

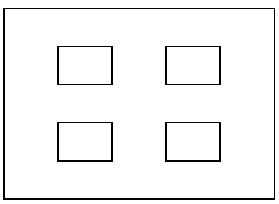
Experimentátorka také nepoznala, že Tomáš odpovídá na Jr02(a) a nikoliv na druhou část Jr02(b). V komunikaci chlapců k žádným šumům nedocházelo, ale experimentátorka zasáhla do hry způsobem, který mohl šumy způsobit. Chlapci se však nenechali poplést a pokračovali ve hře. Tomáš (Tm03) přesně odpovídá na otázku Ex01.

Mohlo by se zdát, že dojde k nedorozumění při interpretaci vyjádření „Je jako kosočtverec.“. Ze hry není patrné, která tělesa podle chlapců vypadají jako kosočtverec. Domníváme se, že i když Tomáš bez váhání na tuto otázku odpověděl, neuměl by pro každé těleso ze souboru rozhodnout, zda vypadá nebo nevypadá jako kosočtverec. Otázku však propojil pouze na myšlený kvádr a ten žádné prvky kosoúhlosti nenese. Vzhledem k tomu, že Jarda s tělesy nemanipuloval, můžeme pouze z dalšího průběhu hry odhadovat, jakou informační sílu tato otázka měla.

Podle první reakce experimentátorky by se nyní dalo očekávat, že bude chtít situaci opět vyjasnit. Je zřejmé, že si v danou chvíli neuvědomila nesrozumitelnost použité charakteristiky „je jako kosočtverec“, neboť Jarda použil geometrický termín, a ten v experimentátorce nevzbudil ostražitost, takže ani na konci hry si nenechala vysvětlit, která tělesa vypadají „jako kosočtverec“.

5.4.2 Ilustrace 2. Cesty

Další příběh se uskutečnil v březnu 1995 v rámci jednoho experimentu, který se odehrál v klidném prostředí kabinetu. Přítomna byla pouze experimentátorka (Ex) a devítiletý žák 3. ročníku Marek (Ma). Nástrojem výzkumu byla jedna Abrakadabra úloha vztahující se k obr. 5.1, která byla zadána ústně experimentátorkou následujícím způsobem:



Obr. 5.1

Ex: „Na obrázku je plánek města. Najdi všechny cesty z levého dolního rohu (ukazuje) do pravého horního rohu (ukazuje). Můžeš chodit pouze nahoru nebo doprava (ukazuje). Půjdeš-li stejnou cestou dvakrát, zaplatíš pokutu. Najdi všechny cesty tak, abys neplatil žádnou pokutu.“

Marek dostal arch papíru se šesti kopiemi obr. 5.1, do nichž si mohl zaznamenávat jednotlivé cesty. Experimentátorka očekávala, že z experimentu získá výzkumný materiál, který ukáže, jak žáci řeší tuto úlohu. Neměla žádná očekávání, co se týká reakce žáka, např. zda pochopí zadání úlohy, zda bude mluvit při řešení úlohy, zda požádá o pomoc, jak dlouho bude úlohu řešit.[1]

Ukázka části protokolu

Ma01 (Marek vyznačuje první 4 cesty (1) *ppnn*, (2) *nppn*, (3) *npnp*, (4) *nnpp*) (pauza 2 minuty)
Ma02 (Marek vyznačuje cestu (5) *pnnp*) (pauza 4 minuty)
Ex01 „Pojď, ukážeme si ty cesty, co jsi našel.“ (experimentátorka prstem ukazuje průběhy všech cest, které byly již vyznačeny)
Ma03 (Marek vyznačuje cestu (6) *pnpn*)
Ex02 (experimentátorka podává Markovi další arch papíru s plánky) „Hledej další cesty tak, abys nezaplatil žádnou pokutu.“
Ma04 „Kolik pokut mohu dostat?“
Ex03 „To záleží na tom, kolikrát půjdeš stejnou cestou.“ (pauza 1 minuta)
Ma05 „Myslím, že jsem našel všechny cesty.“

[1] Číslo v kulaté závorce označuje pořadí plánku, do něhož byla cesta vyznačena. Každá cesta je popsána „slovem“ složeným ze čtyř písmen (dvou *n* a dvou *p*), kde *n* znamená krok nahoru a *p* znamená krok doprava. Např. *nnpp* je cesta nahoru, nahoru, doprava, doprava.

Analýza

Vstupem Ex02 se chtěla experimentátorka od Marka dozvědět, zda našel všechny cesty. Nechtěla se ho dotazovat přímo („Nalezl jsi všechny cesty?“), protože případná odpověď ano nebo ne málo vypovídá o tom, co si Marek opravdu myslí. Neočekávala, že Marek pochopí tento vstup jako výzvu k hledání dalších cest, přestože mu svým vstupem dala dvojí informaci – jak neverbální (podání papíru s dalšími plánky), tak verbální.

Marek byl v konfliktní situaci. Nevěděl, zda má říct „Vždyť jsem úlohu vyřešil!“ nebo splnit domnělé očekávání experimentátorky a hledat další cesty. Rozhodl se pro druhou možnost, ale položil si otázku, jaké další cesty má hledat, když už všechny našel. Vzniklý konflikt ve vědomí Marka je přesně formulován otázkou Ma04. Experimentátorka zde mohla reagovat velice přirozeně odpovědí: „Pokud možno žádnou pokutu.“ To by umožnilo Markovi říct, že již žádnou další cestu najít nemůže. Experimentátorka ale interpretovala Markovu otázku Ma04 jako potřebu vysvětlit slovo „pokuta“, proto ve vstupu Ex03 takové vysvětlení podává.

Za jádro nedorozumění, ke kterému došlo, považujeme vstup Ex02. Ukazuje, že rozpor spočíval v nedostatku informací, které experimentátorka měla o Markově počínání. Na jedné straně bylo možné, že Marek přesně věděl, že jeho práce byla ukončena, tudíž nerozuměl výzvě k hledání další cesty. Na druhé straně tato informace nebyla experimentátorce nijak naznačena, a tudíž nevěděla, zda byla v jeho vědomí přítomna. Zřejmě bylo nutno překlenout informační vakuum například položením otázky či výzvy, která by ukázala, zda Marek o úplnosti svého řešení věděl. Experimentátorka se mohla zeptat Marka, jak by přesvědčil svého kamaráda o tom, že již žádná další cesta neexistuje.

5.4.3 Ilustrace 3. Alice

V tomto příběhu rozebereme z hlediska nedorozumění příběh 1 z kap. 4, oddíl 10.6. Tento příběh je uveden jako ilustrace dvou různých edukačních stylů učitelky a budoucí učitelky. V komentáři je nedorozumění lokalizováno, my zde odhalíme jeho možné příčiny.

Žáci řešili úlohu:

Délka obdélníkové zahrady je 20 m a obvod zahrady je 66 m. Jaká je šířka zahrady?

Učitelka na rozdíl od budoucí učitelky považovala postup Adama u tabule za hádání, když Adam původní výsledek – číslo 8 – přepsal po chvíli na 18 a pak se nechal ovlivnit hlasy ze třídy a číslo 18 přepsal na 13. V komentáři M. Hejný (s. 189) píše: „Učitelka nemá pravdu, když Adamovo „hádání“ nepovažuje za matematiku. Hádání nebylo střílení nazdařbůh, ale postupné ujasňování si situace. Je velice pravděpodobné, že první chyba, které se Adam dopustil, byla ve výpočtu: rozdíl $66 - 40$ spočítal jako 16. Když si chybu uvědomil, pochopil, že se zmýlil o 10, a tuto hodnotu připočítal k 8.“ Je zřejmé, že zde došlo k nedorozumění ze strany učitelky.

Příčina nedorozumění tkví v různém přístupu k úloze. Žák umí simultánně zpracovávat sérii podnětů přicházejících zvenčí a ty nějak hierarchizovat. Adam na nejvyšší stupeň hodnot klade výsledek, informaci zpracovává z hlediska zde nabízené korekce a zkoumá, zda vede k dobrému výsledku nebo ne. Tak akceptuje číslo 13, protože vede k dobrému výsledku, ale možná si neuvědomil příčinu své předchozí chyby, když napsal číslo 18. Kdyby učitelka do myšlenkového procesu Adama viděla, byla by se hocha zeptala, kde se vzalo číslo 18. To by Adamovi umožnilo nabytou zkušenost plně zužitkovat: chyba pomůže kultivovat myšlení pouze tenkrát, když žák pozná její příčinu. Tudíž pokud se díváme na chybu jako na „skúsenosť, ktorú možno v ďalšom živote zúžitkovat"" (Hejný; Michalcová 2001), měli bychom zvyšovat svoji citlivost na nedorozumění při komunikaci se žáky a mezi nimi.

Řešitelský mechanizmus učitelky je řízen již zakořeněným schématem. Její víra, že jakýkoliv jiný postup je didakticky méně vhodný, vede k přesvědčení, že zkoumání žákovských chyb je zbytečné (konečně tuto kompetenci má zřejmě málo rozvinutu) a efektivní je pouze demonstrace vzorového postupu, který mají žáci imitovat. Trestání žáka za chybu chápe jako posílení jeho snahy správný postup si pamatovat.

5.5 Závěr

V kapitole jsme uvedly tři ukázky nedorozumění, které proběhly při komunikaci v matematice. Za důležité pro tuto kapitolu považujeme to, že při samotné realizaci experimentu jsme si nedorozumění ani komunikačního šumu nebyly vědomy. Ty se objevily až po opakovaných pokusech hledání odpovědí na otázky: Proč žák použil toto slovo? V jakém významu jej použil? Co tím myslel, když řekl . . . ? Proč tak dlouho neodpovídal? Jak asi rozuměl mé otázce? Proč odpověděl jinak, než jsem očekávala? Jak jsem já interpretovala jeho otázku, jeho reakci, když jsem řekla toto? apod.

Uvědomily jsme si, v jak těžké situaci je učitel, který chce co nejčastěji otevírat smysluplné třídní diskuse. Aby mohl diskuse vhodně usměrňovat, aby v těchto diskusích umožňoval žákům dojít k poznání cestou, která je jim nejbližší, a aby jim nevnucoval svou vlastní představu a vlastní cestu k poznání, je nezbytné, aby probíhajícím diskusím rozuměl, a to jak po stránce kognitivní, tak sociální.

To znamená, že učitel by měl

- věnovat pozornost obsahové stránce svých vlastních sdělení,
- získávat zpětnou vazbu o tom, jak žák interpretuje jeho sdělení,
- naslouchat žákovi a interpretovat jeho sdělení,
- konstruovat model žákovy kognitivní struktury týkající se diskutovaného problému (Jirotková; Littler 2003c),

- vyhodnocovat kognitivní i komunikační jevy, včetně neverbálních (Kratochvílová; Swoboda 2002),
- volit vhodné komunikační prostředky přiměřené úrovni žáka,
- odhalovat strategie diskutujících.

Odhalená nedorozumění v prvních dvou ilustracích zpočátku každou z nás nemile překvapila, a tak silně přispěla k tomu, že jsme se začaly prostřednictvím dalších experimentů a jejich analýz učit svým žákům/studentům naslouchat, hledat kontext, v němž žák/student přemýšlí, a interpretovat jeho výpovědi.

Význam výpovědí týkajících se nejen matematických pojmů je samozřejmě svázán s představami o těchto pojmech. S některými představami již žák přichází do školy a buduje nové poznatky na základě svých vlastních zkušeností získaných již dříve ve škole nebo i mimo školu. Vytvořené poznatky jsou v mysli každého žáka jistým způsobem propojovány, jsou strukturovány. Je tedy zřejmé, že poznatkové struktury různých jedinců jsou různé. A to může vést k tomu, že to, co se jednomu (ať je to učitel nebo žák) zdá být smysluplné, druhému žádný smysl nedává. O struktuře žákových poznatků dostává učitel výpověď tím, jakým způsobem interpretuje situace a jaké používá strategie řešení problémů, jednoduše řečeno jeho matematickým, ale i sociálním chováním.

5.6 Aplikace

Ukázkami analýz tří různých situací jsme demonstrovaly to, jak se samy postupně učíme:

- zvyšovat vlastní citlivost na přítomnost komunikačního šumu popřípadě nedorozumění,
- budovat schopnost účelného řešení nedorozumění,
- komunikačním konfliktům buď předcházet, nebo je účelově simulovat,
- diagnostikovat strategii diskutujících,
- odhalovat představy diskutujících o pojmech a jejich průvodních jevech,
- sledovat změny těchto představ v průběhu komunikace,
- všímat si nestandardních či chybných představ,
- uvažovat o formulaci vlastních myšlenek,
- interpretovat verbálně formulované myšlenky diskusního partnera,
- sledovat změny v užití znakového systému při mentálních operacích,
- evidovat osobnostní jevy diskutujících,
- vyhodnocovat sociální jevy interakce.

Věříme, že taková činnost je smysluplná a že by, tak jako nám, mohla i dalším učitelům pomoci připravovat se na vedení třídní diskuse jako jednoho z efektivních doplňků vyučovacích forem, které odpovídají duchu konstruktivizmu. V současné době se ve všech probíhajících výzkumech, v nichž je přítomna verbální komunikace, na tento jev zaměřujeme. Zatím jsme nenašly vhodný nástroj, který by nám umožnil soustředit se pouze na tento jev.

Kapitola 6

Žák a jeho vyhledávání pomoci v hodinách matematiky

Jiří Mareš

6.1 Formulace problému

Žáci, kteří se učí matematiku v rámci školního vyučování, se relativně často ocitají v situaci, kdy *nevědí jak dál*. Mají subjektivní pocit, že na zadaný či vzniklý problém sami nestačí, že se neobejdou bez určité sociální opory, bez vnější pomoci.

Důvody vzniku této zátěžové situace jsou přinejmenším čtyři. Souvisejí se zvláštnostmi žáka samotného, zvláštnostmi matematického učiva, zvláštnostmi učitele matematiky a zvláštnostmi dané školní třídy. Společné mají jedno – ovlivňují žákovo ochotu situaci konstruktivně řešit, tedy jeho ochotu vyhledat pomoc.

První skupina důvodů souvisí se žáky. Problém není jen v tom, že nemají potřebné matematické znalosti a dovednosti, ale též v tom, že učení se matematice je náročné. Vyžaduje, aby žáci nespoléhali na povrchový styl učení (s nímž vystačí v některých jiných vyučovacích předmětech), ale osvojili si hloubkový styl učení (Mareš 1998).

Druhým důvodem jsou zvláštnosti učiva: matematické učivo je specifické – má pevnou strukturu, jasně definované vztahy a postupy řešení. Bez hlubšího pochopení a tvrdé práce není možné matematiku zvládnout.

Třetí skupina důvodů souvisí se zvláštnostmi učitele. Učitel matematiky může své žáky motivovat k učení různými způsoby. Formulacemi cílů, náročností zadávaných úloh, formulacemi otázek, mírou pomoci poskytovanou žákům apod. Souhrn takových nároků na žáky se začíná zkoumat pod různými názvy: tlak školy, tlak na úrovni školy (*school academic press*) (viz např. Lee; Smith 1999) nebo tlak třídy, tlak na úrovni třídy (*academic press at classroom level*) (viz např. Shouse 1996, Philips 1997). Pro matematiku je důležitý krok, který uskutečnili M.J. Middleton a C. Midgley (2002), když začali zkoumat učitelův tlak na žákovo porozumění matematice (*press for understanding in math*).

Čtvrtá skupina důvodů souvisí se zvláštnostmi dané třídy, konkrétně se sociálním klimatem třídy. Zjišťuje se, nakolik je klima příznivé učení a spolupráci mezi žáky. Analogicky s výše uvedeným případem by se dal detailněji zkoumat také tlak spolužáků na žákův vztah k matematice a na porozumění matematice, což však, pokud je nám známo, zatím nikdo neuskutečnil.

Žák občas potřebuje vnější pomoc, oporu. Potenciální zdroje sociální opory jsou v rámci vyučování matematiky bohaté. Žákovi mohou pomoci živí lidé, *bezprostředně přítomní* v hodině (učitel, soused v lavici, členové skupiny, která společně řeší matematickou úlohu, spolužáci ve třídě). *Zprostředkovaně* mu mohou pomoci další lidé, např. autor učebnice, cvičebnice, příručky, autor počítačového programu. V poslední době se zkoumají také situace, kdy se žák učí pomocí počítače či počítačové sítě a v tomto specifickém interaktivním prostředí hledá od systému pomoc (Aleven; Stahl; Schworm aj. 2003).

Lidé někdy pomáhají žákovi z vlastní iniciativy, obvykle však až poté, co je žák vyhledal a o pomoc je požádal. Dvě zmíněné aktivity (vyhledat někoho a požádat ho o pomoc) berou učitelé a rodiče jako samozřejmost, jako jednoduchou činnost. Ve skutečnosti jde o složité jevy, které se začínají studovat pod označením *vyhledávání pomoci* (*help-seeking*).

Vyhledávání pomoci je zajímavou pedagogicko-psychologickou kategorií, u nás zatím relativně opomíjenou,[1] v zahraničí však studovanou už přes 20 let; počínaje průkopnickou prací S.A. Nelsona-Le Galla (1981) až po speciální monografie (Karabenick, ed., 1998). Zajímavé je, že to byly výzkumy právě v hodinách matematiky, které odstartovaly zájem o danou problematiku.

Je třeba konstatovat, že víme velmi málo o období, které proběhlo mezi žákovým *uvědoměním si potřeby pomoci* a skutečným *vyhledáním pomoci*. Jde o období, kdy žák cítil, že potřebuje pomoc, ale váhal, rozhodoval se: zda se sluší za někým jít a prosit o pomoc, za kým konkrétně jít, jakými slovy o pomoc požádat, co všechno je vhodné dotyčnému o svých problémech říci, co si o jeho kroku pomyslí okolí, až se to dozví, jak bude vypadat v očích spolužáků, učitele, jak si bude připadat sám atd.

Proč toho víme relativně málo? Příslušníci pomáhajících profesí se totiž zabývají především jedincem, který už se někam dostavil. Začínají časovým bodem, kdy už jedinec vyhledal pomoc. Obrátil se na učitele, dostavil se k výchovnému poradci, do pracovny školního psychologa, do pedagogicko-psychologické poradny apod.

Cílem této kapitoly je shrnout dosavadní poznatky o žákovském vyhledávání pomoci v hodinách matematiky, popsat a analyzovat průběh i výsledky vyhledávání vnější pomoci. Předložit pracovní model a diskutovat faktory, které pravděpodobně ovlivňují žákovo vy-

[1] K výjimkám patří studie (Mareš 2002a).

hledávání pomoci, včetně možných bariér. Naznačit také, jak by mohli učitelé s žákovým vyhledáváním a využíváním vnější pomoci cíleně pracovat.

6.2 Změny v pohledu na žákovo vyhledávání pomoci

Názory na vyhledávanou pomoc se v psychologii vyvíjely. Až donedávna byly aktivity s ní spojené interpretovány spíše *negativně*. Vyhledávání pomoci bylo považováno za indikátor žákovy nekompetentnosti, nezralosti, jako důkaz jeho přílišné závislosti na jiných lidech, nízkého sebepojetí, absence vhodných zvládacích strategií. U žáků na 1. stupni dokonce jako ukazatel žákovy tendence vyhýbat se řešení problémů či unikat z konfliktů se spolužáky tím, že se obrací o pomoc k dospělým, např. k učiteli.

Výzkumy v pedagogické psychologii však už dávno upozornily, že vyhledávání pomoci lze interpretovat také *pozitivně*. Jako indikátor žákova instrumentálního přístupu k učení (Nelson-Le Gall 1981, Ames 1983). Badatelé ukázali, že žák sleduje své učení, zvažuje, zda zadané úkoly je schopen vyřešit sám nebo nikoli. Pokud zjistí, že jeho síly nestačí, vynakládá úsilí a projevuje samostatnost při hledání pomoci, prokazuje tedy zralost a strategické jednání. Hledání pomoci svědčí o žákově zaangažovanosti na vyřešení úkolů, umožňuje mu předcházet studijním neúspěchům a z dlouhodobého pohledu posiluje jeho šance dosáhnout lepších výsledků a zvýšit svoji nezávislost na druhých (Skinner; Wellborn 1994). Jinak řečeno: vyhledávání pomoci lze interpretovat pozitivně jako doklad adaptivní strategie při autoregulaci učení (Newman 1994).

6.3 Definování pojmu vyhledávání pomoci

Způsob, jímž definujeme vyhledávání pomoci, závisí minimálně na třech hlediscích. Za prvé na obecné výchozí pozici. Podle A. Nadlera (1997) se výzkumy vyhledávání pomoci odvíjejí ze tří tradic: psychologické, epidemiologické a mezioborově chápané sociální opory. Pokud zvolíme psychologickou tradici, pak musíme za druhé rozhodnout, který psychologický obor bude základem dalšího uvažování (kognitivní psychologie, vývojová psychologie, sociální psychologie, pedagogická psychologie, psychologie zdraví). Konečně je zde třetí úroveň, kdy musíme rozhodnout, kterou konkrétní vědeckou teorii v rámci zvoleného psychologického oboru použijeme.

Pro naše účely bude nejvhodnější zvolit psychologický základ uvažování; z psychologických oborů pak pedagogickou psychologii. Přikláníme se k definici vyhledávání pomoci, kterou formuloval zakladatel teoretického i empirického výzkumu v dané oblasti, S.A. Nelson-Le Gall (1981, Nelson-Le Gall; Resnick 1998). Vymezuje vyhledávání pomoci takto: jde jednak o obecnou *strategii řešení problémů*, která žákům umožňuje zvládnout výzvy i požadavky školy, aktivně se podílet na řešení učebních úkolů. Žák, který hledá a získá pomoc, kterou potřeboval, prokazuje racionální přístup a zaangažovanost na vyřešení úkolu.

Hledání pomoci není jen potenciálem pro překonání momentálních školních obtíží; umožňuje žákovi získat takové znalosti a dovednosti, jichž může použít v budoucnu, aby pomohl sám sobě nebo jiným lidem. Vyhledávání pomoci může být zralou a velmi promyšlenou strategií, jak zvládnout obtížné úkoly. Jde o jednání, které iniciuje žák sám a které je orientováno na určitý problém či úkol. Žák tímto jednáním dává najevo svou výkonovou motivaci. Žák, jenž hledá pomoc, aktivně využívá dostupné lidské zdroje, aby zvýšil pravděpodobnost svého úspěchu v učení.

Hledání pomoci není jen obecnou strategií zvládání zátěže, ale může být také strategií učení, *učební strategií*. Žák se jejím prostřednictvím snaží naučit správné postupy vedoucí k cíli. Žák, který ovládá efektivní instrumentální hledání pomoci, bude odmítat takovou pomoc, která by jej vyřazovala ze hry a chtěla úkol vyřešit za něj; bude naopak hledat tu pomoc, kterou si on představuje, pomoc, která odpovídá jeho individuálním potřebám a konkrétní situaci (modifikovaně podle Nelson-Le Gall; Resnick 1998, s. 40–41).

Z procesuálního pohledu zřejmě začíná vyhledávání pomoci (v širším slova smyslu) časovým bodem, kdy si jedinec uvědomí složitost situace, v níž se ocitl, je zmaten, neboť mu není jasné, co by měl dál dělat (*stage of perplexity*). Je postaven před rozpor mezi tím, co zatím ví a umí, a tím, co se po něm požaduje, nebo co sám očekává, že nastane.

B. Pescosolidová (1992) charakterizuje vyhledávání pomoci jako sérii jedincových rozhodnutí o tom, zda vyhledat či nevyhledat pomoc u druhých lidí. Nejde však pouze o individuální rozhodnutí, neboť aktivita vyhledat pomoc se odehrává v rámci určité komunity, v rámci určité sociální sítě. Jedinec v interakci s touto sítí identifikuje problém samotný i to, co problém asi vytváří. Jedinec hledá pomoc ne jednorázově, ale kontinuálně: radí se s blízkými lidmi (členy rodiny, kamarády, spolužáky), s významnými osobami dané komunity i s profesionály (psychology, sociálními pracovníky atp.).

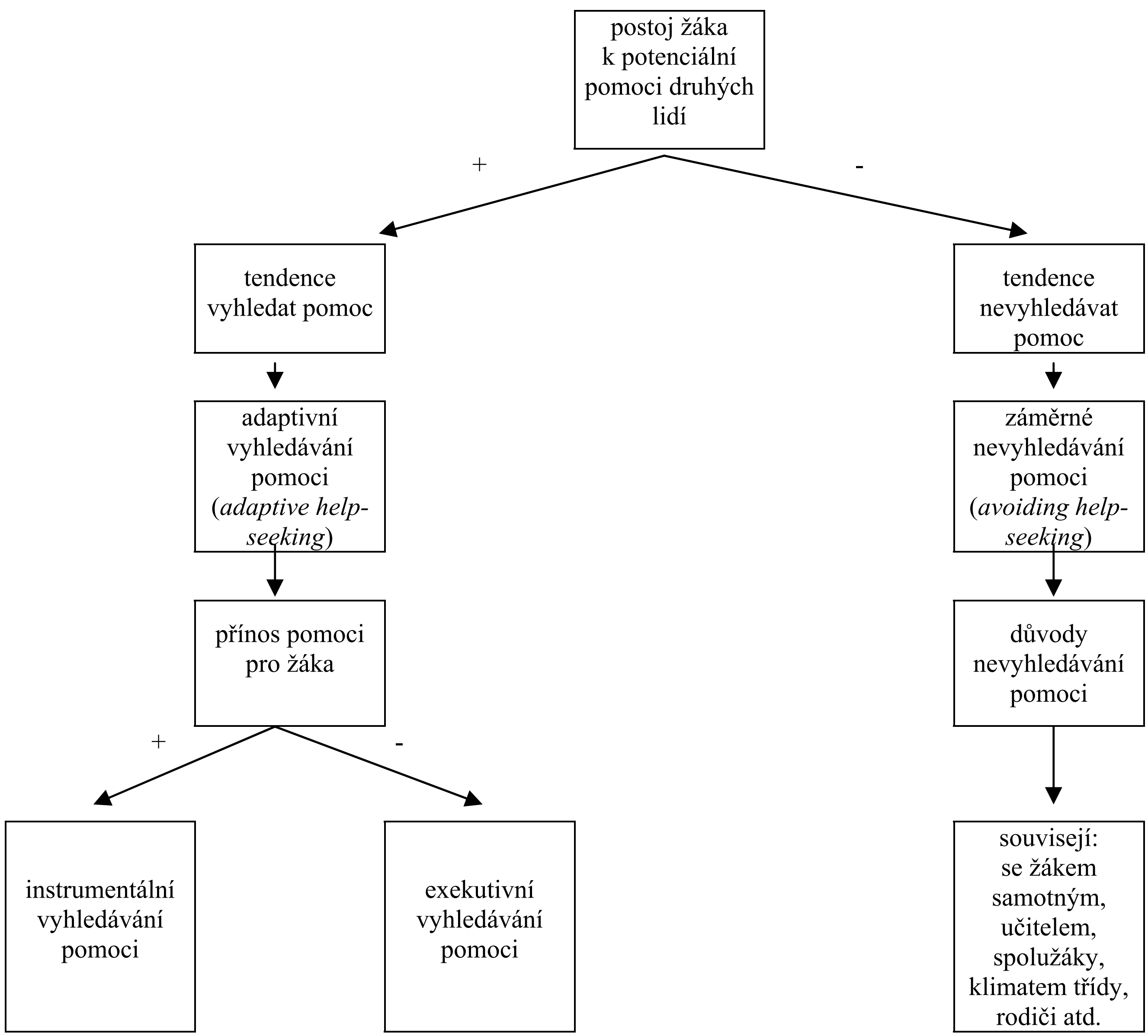
Podle L. Roglera a D. Cortese (1993) můžeme definovat určitou jednotku hledání pomoci. Je jí *vyhledávací epizoda* (*help-seeking episode*), tj. svébytný typ interakce, „interakční vzorec“ se členy osobní sítě v době, o které jedinec uvažuje, že je vhodná a potřebná pro řešení problému. Některé z těchto epizod jsou jedinečné, neopakovatelné; existují však epizody, které mají společné rysy, jejich průběhové charakteristiky se opakují. Můžeme u nich předvídat, co asi nastane v dalším kroku.

6.4 Základní typy vyhledávání pomoci

Předchozí výklad už naznačil, že existuje mnoho typů žákovského vyhledávání pomoci. Jejich detailní přehled jsme podali v jiné práci (Mareš 2002a). Zde se soustředíme na typy, které jsou zásadní pro školní vyučování a učení. V principu existují dva typy žákovských postojů k vyhledávání pomoci jiných lidí (viz obr. 6.1).

Obr. 6.1 ukazuje, že jeden typ postoje (uvedený na obrázku vlevo) vede žáka k tomu, že – přes mnohé vnitřní pochybnosti – vyhledává pomoc. Druhý typ postoje (uvedený na obrázku vpravo) ústí v záměrné vyhýbání se pomoci od druhých lidí.

Levá část obrázku také připomíná, že vyhledávaná pomoc může mít v zásadě *dvě podoby*. Jedna podporuje rozvoj žáka, druhá naopak rozvoj žáka brzdí.



Obr. 6.1 Typy žákovských postojů k pomoci druhých lidí (Mareš 2002b)

Terminologicky nalezneme variantní dvojice pojmů:

- *autonomní* vyhledávání pomoci (*autonomous help-seeking*), které posiluje rozvoj žáka, jeho autonomii,
- *závislé* vyhledávání pomoci (*dependend help-seeking*), které posiluje závislost žáka na druhých (Nadler 1997),

- *instrumentální* vyhledávání pomoci (*instrumental help-seeking*), při němž hlavní odpovědnost za výsledek zůstává na žákovi samotném; ostatní lidé mu jenom radí, pomáhají dílčím způsobem, navádějí ho na řešení problému, ale podstatnou část práce musí vykonat sám,
- *exekutivní* vyhledávání pomoci (*executive help-seeking*), při němž žák přenáší odpovědnost na pomáhajícího; požaduje hotové informace, šetří si čas a úsilí, chce, aby pomáhající za něj vykonal většinu práce (Nelson-Le Gall 1984),
- *negociační* hledání pomoci (*negotiating help-seeking*), při němž jedinec vyjednává, snaží se dohodnout na vhodné podobě pomoci a žádá jen dílčí pomoc,
- *„didaktické"* hledání pomoci (*didactic help-seeking*), při němž jedinec žádá o úplnou pomoc; chce, aby někdo kompetentnější udělal práci místo něj (Asser 1978).

Podívejme se podrobněji na vyhledávání pomoci jako celek. Jde o případ, kdy se žák snaží adaptovat na nově vzniklou situaci.

Adaptivní vyhledávání pomoci. V tomto případě se zajímáme nejen o určité žákovské aktivity, ale také o určitý *typ žáků*, kteří tyto aktivity vykonávají. Podle R.S. Newmana (1994) jde o žáka, který:

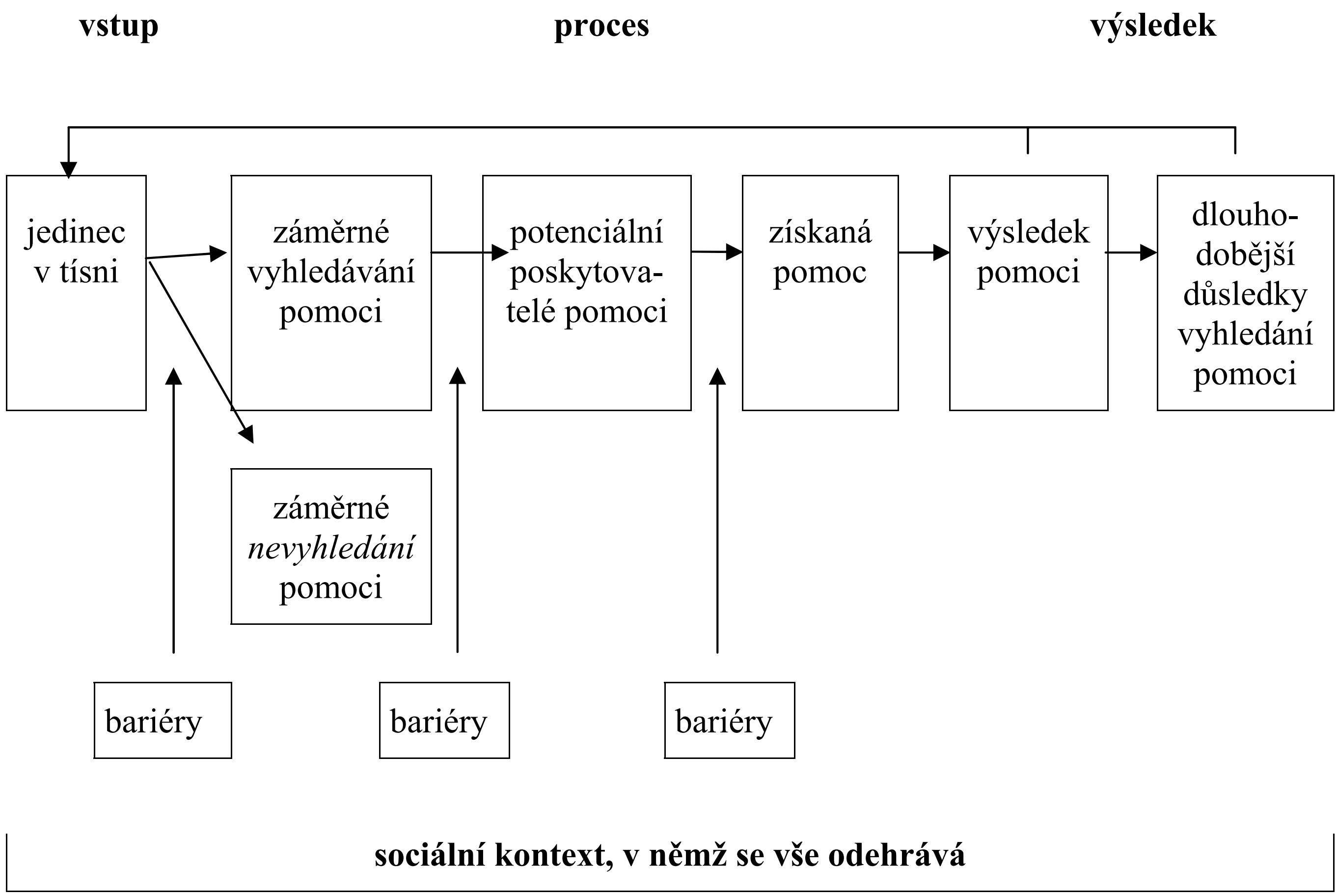
1. si uvědomuje obtížnost úkolu, který ho čeká,
2. bere v úvahu všechny dostupné informace (např. požadavky obsažené v úkolu, zdroje, které má k dispozici; co musí „investovat", co mu to přinese) při rozhodování:
   (a) o nezbytnosti požádat o pomoc („Je to opravdu nutné, abych někoho požádal o pomoc? Nemohu to zvládnout sám? Co kdybych ještě něco zkusil, než se budu doprošovat? Můžu čekat, že mně pomůže?"),
   (b) o obsahu a formě prosby o pomoc („Jak bych to měl asi říci?"),
   (c) o adresátovi prosby („Na koho se mám obrátit? Na souseda, na spolužáky, na učitele?").
3. chce vyjádřit prosbu o pomoc způsobem, který je za dané situace nejvhodnější.
4. chce využít poskytnutou pomoc způsobem, který je optimální pro případnou další prosbu o pomoc v budoucnu.

6.5 Model vyhledávání pomoci

Celý děj nazývaný vyhledávání pomoci, je relativně složitý. S určitým zjednodušením jej můžeme zachytit různými modely. O jeden z možných modelů jsme se pokusili (obr. 6.2).

Podívejme se nyní na jednotlivé složky modelu podrobněji.

Jedinec v tísni. Patří sem řada složek souvisejících se žákovým zvládáním zátěže, tj. především žákovo hodnocení rizikovosti celé situace, v níž se ocitl. Dále pak žákovo hodnocení náročnosti úkolů, před nimiž stojí, a konečně hodnocení rizik, která hrozí, když úkol nebude splněn. Dále sem patří jedincovo přiměřené hodnocení svých možností, svých kompetencí vyrovnat se se situací sám, vlastními silami i ceny, kterou musí zaplatit, kdyby chtěl zvládnout situaci úplně sám, bez cizí pomoci.



Obr. 6.2 Pracovní model vyhledávání pomoci (Mareš 2002a)

Kromě toho sem patří faktory související s žákovým „já“: žákův sebeobraz, sebehodnocení, celkové sebepojetí, sebepojetí vlastních schopností, vloh, dále vnímaná vlastní kompetence (*self-efficacy*), žákova tendence evalvovat či devalvovat sám sebe, včetně žákova záměrného sebeznevýhodňování (*self-handicapping*). Dále motivační faktory: orientace na výkon, orientace na vyhnutí se neúspěchu, orientace na úkol, orientace na dosažení mistrovství, na rozvoj osobnosti; potřeba kompetence, potřeba afiliace, potřeba autodeterminace. Kromě toho sociální faktory: sociální zralost, sociální afiliace, sociální srovnávání a soutěžení, sociální stylizování se, podoba osobní sociální sítě. Konečně faktory související přímo s vyhledáváním pomoci: žákovy dosavadní zkušenosti s pomocí jiných lidí, jeho postoje k vyhledávání pomoci, orientace na vyhledávání/nevyhledávání pomoci (např. přesvědčení o užitečnosti/neužitečnosti pomoci), záměr vyhledat pomoc, úsilí a vytrvalost při hledání pomoci, komunikační zdatnost při vyjednávání o vnější pomoci.

Právě jsme si vyjmenovali některé důležité vstupní faktory, jež ovlivňují rozhodování žáka, který se ocitl v tísni. Co nám o těchto faktorech říkají výzkumy zaměřené na *výuku matematiky*?

Dva faktory – jednak žákovo sebepojetí i sebehodnocení vlastních matematických schopností, jednak učitelovo hodnocení „talentovanosti" žáka na matematiku – zřejmě souvisejí s žákovým stylem hledání pomoci. A. Aberbachová aj. (1991) u žáků 5. třídy zjistila, že žáci, kteří měli nízké mínění o svých schopnostech pro matematiku a které učitelé také nepovažovali za talentované pro matematiku, byli méně často ochotni hledat pomoc v době, kdy to bylo nejvhodnější; pokud už ji vyhledávali, pak ještě předtím, než se pokusili sami o vyřešení matematického problému.

Poněkud složitější přístup zvolili J.A. Ross, A. Hogaboam-Grayová a C. Rolheiser (2001). Vyšli z psychologického předpokladu, že žák, který má v matematice podat adekvátní výkon, musí umět adekvátně hodnotit sám sebe. Je-li jeho sebehodnocení nepřiměřené, pak také všechny jeho další úvahy o potřebě pomoci jsou nepřiměřené. Žákovo sebehodnocení nechápali jako jedinou entitu nýbrž složitě strukturovaný celek. Podstatu jejich pohledu na žákovo sebepojetí v matematice přibližuje obr. 6.3.

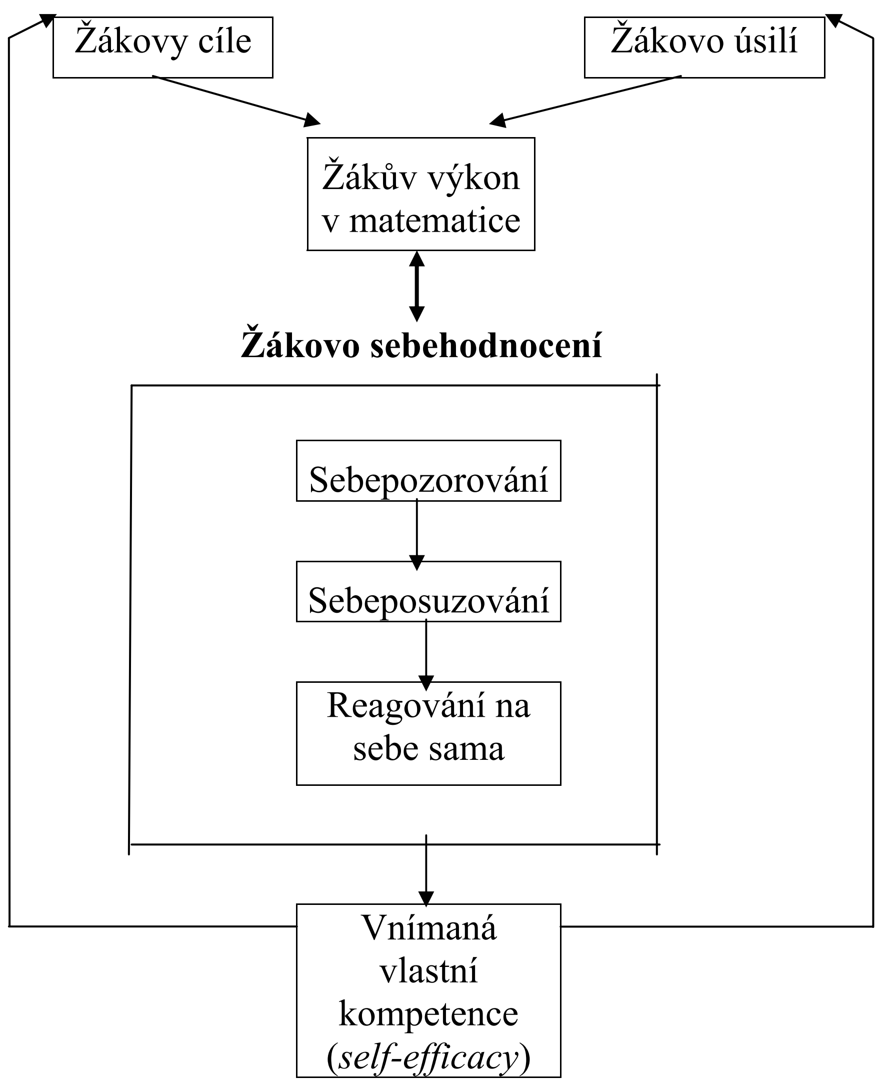
Z obrázku je patrné, že žákovo sebehodnocení má tři složky: pozorování sebe sama (sebemonitorování), posuzování sebe sama při dílčích činnostech, reagování na sebe sama. To vše pak vyústí v žákovu představu o jeho možnostech v matematice, o vnímané vlastní kompetentnosti pro matematiku. Tato subjektivní představa pak zpětně působí jak na žákovy cíle, tak na jeho úsilí.

Psychologické výzkumy z posledních let rozlišují obvykle dva typy žákovských cílů: orientování žáka na srovnávání svých schopností se spolužáky anebo orientování žáka na rozvoj sebe sama. V jiné terminologii – orientace žáka na výkon, na známky anebo orientace žáka na dosažení mistrovství, na zdokonalování sebe sama. Či ještě jinak: orientace žáka na plnění úkolů anebo orientace na zlepšování svého „já". Kromě toho autoři sledovali ještě jeden žákovský cíl, jednu orientaci, jíž je naplňování potřeb někam patřit, mít přátelské vztahy s lidmi, být přijímán spolužáky.

Model na obr. 6.3 nemá explicitně zabudovánu proměnnou, která nás zajímá – vyhledávání pomoci. Mohli bychom ji situovat nahoru, buď jako samostatný blok, anebo jako součást podrobněji strukturovaného bloku „žákův výkon v matematice". Vždyť žák může podat určitý výkon úplně sám, nebo s menší pomocí či s velmi výraznou vnější pomocí.

Bariéry při rozhodnutí vyhledat v daném případě pomoc. Patří k nim vnímaná cena za vyhledání pomoci a hodnocení rizik plynoucích z případné pomoci (strach z neochoty, strach z odmítnutí, strach ze ztrapnění). Sociální kontext hledání pomoci (sociální nesouhlas, tlak vrstevníků, komentáře dospělých atd.).

Proces vyhledávání pomoci. Má svoji vnitřní a vnější stránku. Vnější stránka se obvykle nazývá chování při vyhledávání pomoci (*help-seeking behavior*). Může jít o vyhledávání akutní (pod tlakem událostí) nebo vyhledávání dlouho odkládané. Navenek se může hledání pomoci projevit jako hledání přímé, zjevné, všem patrné anebo se jedná o hledání pomoci nepřímé, naznačené, implicitní, pro řadu lidí nejednoznačné. Může začít u nesmělého náznaku a postupně (jak se jeho situace stává neudržitelnou) může jedinec svou prosbu zvýrazňovat až po důrazné žádání o pomoc. Žák může svou potřebu získání pomoci dávat ostatním najevo spíše verbálně nebo spíše neverbálně (např. gesty, mimikou) anebo kombinovaně. Může hledat pomoc cíleně u konkrétní osoby anebo „volat o pomoc" obecně, nekonkrétně, ke všem, kdo jsou okolo. Může mu jít o získání hotové pomoci (vyřešení, udělání „za něj") anebo jen o dílčí přispění, radu, asistenci, s tím, že „to hlavní udělá sám".



Obr. 6.3 Vztah žákova sebehodnocení a učení (modifikovaně podle Ross aj. 2001)

Vnitřně může hledání pomoci žák prožívat jako spíše příjemnou záležitost (je přesvědčen, že mu vždy někdo pomůže, že ho ostatní „nenechají na holičkách“, že funguje lidská sounáležitost) nebo spíše jako nepříjemnou záležitost (má pocit, že tím dokazuje svou neschopnost, je mu trapně, že obtěžuje jiné, má obavy, že mu asi nikdo nevyhoví).

Bariéry při hledání pomoci. Poté, co se žák přece jen rozhodl, že pomoc vyhledá, mohou se mu stavět do cesty další překážky. Např. neví, na koho by bylo nejvhodnější se s daným problémem obrátit. Hledá vhodnou osobu či skupinu osob. Nebo má konkrétní představu, kdo by mu mohl pomoci, ale není si jistý, jak svou žádost vhodně formulovat, v které situaci s žádostí vyrukovat, co na tuto žádost řekne sociální okolí.

Případně ví, na koho se obrátit, ale stojí mu v cestě administrativní překážky, neboť profesionální poskytovatel pomoci (učitel, výchovný poradce, školní psycholog) nemusí být snadno dostupný: je třeba někam dojít, je třeba přijít v určitou dobu, jinak ho nezastihne, je třeba se předem objednat, je třeba vyčkat, až poskytovatel pomoci bude mít čas, je třeba opakovaných návštěv, aby se problém vyřešil, atd.

Potenciální poskytovatelé pomoci. Může jich být mnoho, v zásadě lze rozlišit pomáhajícího jednotlivce, pomáhající skupinu a pomáhající instituci. Dalším hlediskem je míra profesionality poskytovatele. Poskytovatel může být naprostý laik (třeba kamarád) či zaškolený člověk (viz tzv. peer-programy) anebo příslušník pomáhající profese (učitel, psycholog). Může být se žadatelem v přímém osobním kontaktu anebo se jedná o zprostředkovaný kontakt. Potenciální poskytovatel pomoci může být v blízkém vztahu k žákovi (rodič, sourozenec, kamarád, spolužák) anebo v sociálně rolovém vztahu (učitel, poradenský či školní psycholog). Potencionální poskytovatel pomoci se může vyznačovat osobnostními a jinými zvláštnostmi, které mohou usnadňovat nebo naopak komplikovat poskytnutí pomoci: vstřícnost, empatičnost, otevřenost, altruismus, optimismus, ochota pomáhat, kompetentnost. Anebo rezervovanost, uzavřenost, pesimismus, labilita, depresivita, nekompetentnost, vypočítavost apod.

Získaná pomoc. Může mít mnoho podob. Podle aktivity žáka může jít o vyžádanou či nevyžádanou pomoc. Specifickým případem může být pomoc druhých, kterou žák považuje za nevhodnou (např. předčasná pomoc či pomoc mající neakceptovatelnou podobu) a pociťuje ji jako obtěžující (Mareš 2003).

Podle způsobu poskytování můžeme rozlišovat pomoc přímou a pomoc nepřímou. Podle potřebnosti jde o pomoc nutnou, nezbytnou nebo pomoc nadbytečnou, zbytečnou (Nelson-Le Gall 1984). Podle reciprocity může jít o pomoc jednosměrnou či vzájemnou. Podle odbornosti poskytovatele o profesionální pomoc nebo laickou pomoc. Podle věku poskytovatele o vrstevnickou pomoc, pomoc starších osob, pomoc mladších osob. Podle specifičnosti o pomoc rámcovou, globální nebo pomoc propracovanou, elaborovanou. Podle procesů, které akcentuje, může být např. spíše kognitivní nebo spíše afektivní. Podle rozsahu může být maximální, střední, minimální. Podle potřeb žadatele a povahy úkolu může být nadbytečná, adekvátní, nedostačující. Podle míry proveditelnosti může být deklarativní nebo realizovatelná. Podle míry zaangažovanosti pomáhajícího může být formální či neformální. Podle míry připravenosti může jít o pomoc hotovou nebo improvizovanou.

Výsledek pomoci se dá posuzovat z objektivního nebo subjektivního hlediska. Při hodnocení odevzdaného matematického úkolu můžeme konstatovat objektivně doložitelný úspěch řešení, částečný úspěch či neúspěch v pokusu o řešení. Kromě toho existuje také žákem subjektivně vnímaný přínos získané pomoci. Žák může hodnotit poskytnutou pomoc jako účinnou, částečně účinnou anebo neúčinnou.

Řešení matematického úkolu však není jen kognitivní záležitostí. Dosažený výsledek provázejí různé emoce, jako např. úleva, radost, štěstí, vděčnost, hrdost anebo zklamání, smutek, pocit viny, pocit studu, závist, vztek.

Ať už výsledek pomoci dopadne dobře nebo špatně, žák se nad ním zamýšlí a hledá příčinu svého úspěchu či neúspěchu. Mluvíme o žákově připisování příčin; odborně řečeno jde o žákovu kauzální atribuci úspěchu či neúspěchu. Žák může příčinu lokalizovat vně sebe („Učitel nám dává samé těžké příklady.“, „Kamarád mně to pořádně nevysvětlil.“) či ji hledat v sobě samém („Měl jsem si to zadání přečíst pořádně.“). Může ji považovat za ovlivnitelnou („Příště se musím víc snažit.“) či neovlivnitelnou („Já na matematiku nemám buňky.“). Může příčinu považovat za stabilně působící („Matematika mně nikdy nešla a nepůjde.“) nebo náhodnou („Učitel byl dnes naštvaný.“ „Při téhle písemce jsem neměl štěstí na otázky.“). Žák může přehodnocovat svůj původní pohled na situaci („Myslel jsem, že to nezabere tolik času.“, „Příště musím začít těmi nejlehčími příklady a ty těžké si nechám nakonec.“), pohled na sebe sama („Zbytečné jsem se podceňoval, nejsem tak blbej.“), sociálního kontextu („Až si budu příště říkat o pomoc, musím dát pozor, aby to neslyšela XY, ta všecko rozkecá.“).

Dlouhodobější důsledky vyhledané pomoci. Pro žáka jsou jistě důležité okamžité výsledky pomoci. Avšak mnohem závažnější dopady má vyhledaná pomoc v delším časovém horizontu. Dopadá-li vše dobře, posiluje to žákovu snahu zdokonalovat se, získávat kompetence, naučit se autoregulaci. Zvyšuje se žákova sebedůvěra, autonomie, nezávislosti na druhých. Opakují-li se naopak neúspěchy, posiluje to žákův pocit nedostatečnosti, nedůvěry ve vlastní síly, zvyšuje se jeho závislost na druhých lidech. Jsou-li neúspěchy velmi časté, žák po marných pokusech o změnu nakonec rezignuje. Neprosí už o pomoc, nezkouší sám s nepříznivou situací něco udělat. Smiřuje se s tím, že „na matematiku nemá“, a může skončit ve stavu naučené bezmocnosti.

Je-li vyhledání pomoci úspěšné a pomoc je účinná, u žáka stoupá důvěra v druhé lidi, prohlubuje se pocit sounáležitosti. Žák nezneužívá pomoci, snaží se pomoc oplatit. Směřuje k sociální zralosti, altruistickému chování, ochotě také poskytovat pomoc jiným. Je-li vyhledání pomoci neúspěšné nebo je pomoc neúčinná, klesá u žáka důvěra v ostatní, prohlubuje se u něj pocit izolovanosti, pocit, že druhé nezajímá, zda je někdo v nouzi, a spíše toho využijí. Objevuje se snaha nevyhledávat pomoc, vystačit si sám. Někdy se setkáváme i s vypočítavostí některých žáků, s pragmatickým kalkulováním: snaží se kupovat si pomoc, získávat výjimky, nadužívat ochoty, zneužívat ochoty, podvádět apod.

Z výše uvedeného je zřejmé, že jednoduchý model hledání pomoci v sobě skrývá velké bohatství témat. V naší studii se můžeme věnovat jen některým, ostatní zůstávají jako náměty pro speciálněji zaměřené práce.

6.6 Učitel jako zdroj pomoci

Zvláštnosti učitele, které napomáhají nebo brzdí žákovo vyhledání pomoci. O těchto zvláštnostech se dá uvažovat z několika pohledů: pohledu teoretiků, pohledu učitelů, pohledu žáků. Pokud nás zajímá pohled *žáků* samotných, nenajdeme příliš mnoho prací, které by se jím zabývaly. K výjimkám patří kvalitativní výzkum provedený na kanadských základních školách (Le Mare; Sohbat 2002). Autorky se v rozhovoru ptaly žáků 2.–7. ročníku, které charakteristiky učitele je povzbuzují k požádání o pomoc a které charakteristiky je naopak od prosby o učitelovu pomoc odrazují. Jejich seznam čítá deset proměnných.

Ochota učitele pomoci. Žáci jsou velmi citliví na to, zda učitel projevuje nebo neprojevuje snahu jim pomoci, když o ni výslovně požádají. Ve zkoumaném vzorku se žáci relativně často setkávali s neochotou, která se projevovala třemi způsoby: neposloucháním či ignorováním prosby o učitelovu pomoc, výslovným odmítáním pomoci a konečně úhybným manévrem typu „teď nemám čas, teď mám moc práce“.

Osobnostní zvláštnosti učitele. Žáci v tomto věku používali převážně globálních charakteristik učitelů. Spíše se obraceli na učitele, které označovali za milé a hodné, protože znali jejich vstřícný postoj a sami se necítili „trapně“, když žádali o pomoc. Oceňovali, když někteří učitelé vybízeli žáky, aby se nebáli a řekli si o pomoc, pokud si myslí, že potřebují poradit. Naopak u učitelů, které označovali jako přísné a nepříjemné, poněkud váhali, zda mají projevit neznalost a žádat o radu. U učitelů, které charakterizovali jako tvrdé, neoblomné a neústupné, se žáci cítili velmi nepříjemně, když chtěli poprosit o pomoc.

Učitelův způsob reagování na žádost o pomoc. V zásadě jsou dva typy reakcí – pozitivní a negativní. O pozitivních se žáci příliš nerozepisovali, neboť jde o příjemné zkušenosti typu: „Je fajn se zeptat, když něco nevím, a učitel nekřičí, ale odpoví.“ Častější jsou však – bohužel – nepříjemné zážitky. Když se žák na něco zeptá nebo poprosí o vysvětlení, část učitelů reaguje nevhodně. Učitel se může tvářit otráveně a dávat najevo, že bude lepší, když ho žáci příště nebudou ničím obtěžovat. Nebo se učitel rozčílí a začne na žáka křičet. Žákův dotaz bere jako provokaci či snahu zpochybnit kvalitu jeho výkladu. Učitel může také žáka zesměšňovat před celou třídou: „Je tady ještě někdo, kdo to nepochopil?“ nebo „Pojď k tabuli a postav se před třídu. Může někdo z vás Mikovi pomoct?“.[2]

[2]Viz také výpověď studentek, budoucích učitelek 1. stupně, v kap. 9, s. 165–166.

Učitelovo očekávání. Učitelova ochota žákům pomoci závisí – podle názoru žáků – také na tom, jaká očekávání se u daného učitele spojují s určitým učivem. Pokud považuje učivo za lehčí a srozumitelné, pak očekává, že by žákům nemělo činit potíže. Žákovské dotazy bere jako důkaz nepozornosti nebo jako snahu zpochybnit jeho pedagogickou kompetentnost. Rovněž žákovské problémy pramenící z hledání návaznosti mezi poznatky, z hledání složitějších vazeb mezi „starým“ a „novým“ učivem chápe učitel jako projev neznalosti, důkaz lenosti v obstarávání poznatků.

Učitelova kompetentnost. Zde je míněna kompetentnost v pomáhání žákům. V žákovských odpovědích se objevily dva typy: (a) poskytování pomoci v plném rozsahu a využitelným způsobem, (b) porozumění potřebám daného žáka. Vyskytují se totiž případy, kdy se učitel snaží pomoci, ale nechápe, čemu žáci nerozumějí, nechápe podstatu žákovského dotazu. Nebo otázku pochopí, ale jeho vysvětlení je pro žáky nesrozumitelné, nepoužitelné. Žáci si naopak pochvalují takové učitele, kteří se dokáží na problém podívat žákovýma očima, dokáží poradit a povzbudit.

Učitelovy vzájemné vztahy se žáky. Stručně řečeno, jde o problém sociálního klimatu, které učitel vytváří spolu se žáky dané třídy. Je-li klima vstřícné, přátelské, učitel dává najevo, že má zájem, aby se žáci něco naučili, pak se ho žáci nebojí zeptat, nebojí se požádat o radu či pomoc. Je-li klima plné napětí, nedůvěry a podezírání, pak si žáci netroufnou žádat o pomoc.

Obeznámenost s daným učitelem. Žáci se potřebují s učitelem seznámit, zjistit si, jaký je, co od něho mohou a nemohou čekat. Teprve když zjistí, že je vstřícný, pak se osmělují na něco zeptat, odvažují se poprosit o radu.

Učitelova momentální nálada. Jde o charakteristiku, která je časově limitovaná a vázaná na určitou situaci. Učitel může přicházet do třídy s dobrou či špatnou náladou anebo teprve nějaká událost v průběhu hodiny změní jeho náladu. Žáci zpravidla dokáží odhadnout, kdy je učitel nakloněn pomoci a kdy je naopak zbytečné ho „dráždit“.

Předpověditelnost chování učitele. Učitelé (a tím navazujeme na předchozí charakteristiku) se navzájem liší stabilitou svého chování, svých reakcí. Jsou učitelé, u nichž žáci dokáží přesně odhadnout, jak se asi zachovají. Jsou však učitelé, kteří jsou „nevypočitatelní“, nekonzistentní ve svém jednání a žáci nikdy nevědí, co se stane. Právě tito učitelé vzbuzují nejistotu; žáci velmi váhají, zda si mohou dovolit se na něco zeptat nebo požádat o radu.

Pohlaví vyučujícího. Z pohledu žáků základní školy není jedno, zda požádají o pomoc učitele či učitelku. Dosavadní výzkumy naznačují, že se žáci spíše odhodlají zeptat učitelky než učitele. Učitelky (alespoň v citovaném výzkumu) byly vůči žákům vstřícnější. V případě učitelů se žák raději obrací o pomoc ke spolužákům. Situace však může být složitější, protože ve hře ještě může být pohlaví žáka. Jinak může reagovat učitelka na dotaz dívky a jinak na dotaz chlapce. Analogicky učitel může reagovat jinak na prosbu o pomoc ze strany dívky a jinak ze strany chlapce.

Uvedených deset charakteristik bylo vyvozeno z názoru žáků. Jaký je názor odborníků? Čím může učitel ovlivnit žákovu ochotu či neochotu vyhledat pomoc? R.S. Newman (2000) ve své přehledové studii identifikuje tři hlavní cesty:

1. Navození a udržení příznivých *osobních vztahů* se žáky; žáci pak vnímají svého učitele příznivě, nebojí se s ním komunikovat, nebojí se ho požádat o radu či pomoc, protože z jejich pohledu už nejde o neosobní, úřední vztah, o učitelovu povinnost.

   Osobní vztah se projevuje učitelovou vstřícností (projevováním sympatií žáků, snahou porozumět žákovským problémům, radostí ze společně tráveného času se žáky); věnováním se žákům (věnuje jim čas, energii, obstarává pomůcky apod.); spolehlivostí (je žákům k dispozici, když to potřebují); citlivostí (snahou porozumět jejich osobním i školním problémům).

2. Učitel společně se žáky vytvoří v hodinách takové *sociální klima*, které je příznivé učení a spolupráci; žáci jsou ochotni se obracet na učitele, jsou ochotni si navzájem pomáhat; výuka podporuje autonomní učení, při němž žák postupně přebírá odpovědnost za výsledky učení.

3. Učitel svým každodenním jednáním se žáky jim pomáhá *rozvíjet kompetence*: učí je klást otázky, vyptávat se na problémy, které jsou jim nejasné, dává jim zažít pocit, že jsou v něčem kompetentní, ukazuje jim, jak spolu souvisí adaptivní hledání pomoci a úspěch v učení.

Ve škole ovšem není jenom učitel. Mnohem blíže mívá žák ke spolužákům. Podívejme se tedy, jak probíhá hledání a využívání pomoci na této úrovni.

6.7 Spolužáci jako zdroj pomoci

Jde o velmi zajímavé a bohatě strukturované téma, které je součástí širšího tématu: vliv *vrstevníků* na dítě. Proto se dříve, než přistoupíme k úvahám o vlivu spolužáků na jedince, zastavíme u obecnějších poznatků o vlivu vrstevníků.

Už od předškolního věku vstupují na scénu výrazných *socializačních faktorů* dětského vývoje vrstevníci. Dítě po nich touží a zároveň se jich trochu obává. S nástupem do školy a s přibývajícím věkem dítěte se zprvu dominantní postavení *rodičů* jako socializátorů dětského vývoje začíná zeslabovat. Na začátku školní docházky se přechodně projeví také vliv *učitele*, ale jeho vliv slábne obvykle ještě rychleji než vliv rodičů. S nástupem puberty, kdy se množí konflikty mezi dospívajícím a jeho rodiči, mladý člověk hledá a nachází sociální oporu mezi svými vrstevníky. Jejich vliv je nejen silnější než vliv rodičů a školy, nýbrž jinam směřující; někdy působí až proti tomu, co dospělí považují pro dospívajícího za vhodné.

Pro naše téma je podstatné, že vrstevníci:

- pobývají s dítětem denně po delší dobu, než dospělí; mají tedy víc příležitostí na něj působit,
- jsou pro dítě stále důležitější: na jejich mínění dítěti velmi záleží, neboť začlenění anebo naopak vyčlenění z vrstevnických sociálních vztahů má pro dítě vážné důsledky,
- jsou dítěti vzorem, modelem určitých forem mezilidské spolupráce,
- kladou na dítě určité požadavky, učí ho skupinovým normám a sankcionují nedodržování těchto norem,
- vedou dítě k sociálnímu srovnávání; dítě se učí porovnávat své kvality, své výkony s vrstevníky stejně starými, staršími i mladšími, než je samo,
- vedou dítě k sebereflexi; pokud dítě dospěje k závěru, že je slabší, horší, neschopnější, může to tlumit jeho autonomii a vést přinejmenším ke dvěma odlišným sociálním zkušenostem: buď zažije solidaritu, pomoc anebo zažije ústrky, zesměšňování, někdy i šikanování,
- učí dítě, jak obstát ve skupině a jak reagovat v zátěžové situaci; specifickou zkušeností pro dítě je, že se naučí dvě důležité sociální dovednosti: (a) kdy, komu a jak si říci o pomoc, (b) kdy, komu a jak pomoc poskytnout.

Nyní už je čas věnovat se spolužákům jako zdroji možné pomoci. V dalším výkladu se budeme inspirovat strukturou, kterou zvolil ve své výborné přehledové studii R.S. Newman (2000). Probereme problematiku sociálního začlenění žáka do skupiny, sociálního srovnávání a rozvíjení jazykových kompetencí.

Přátelství mezi žáky. Je běžnou zkušeností, že ve třídě není ochoten každý pracovat s každým, každý není ochoten pomáhat každému. Školní třída je strukturovaná nejen podle prospěchu, nejen podle sociální situace rodin, ale – což je pro žáky mnohem důležitější – podle vztahů mezi žáky. Projevují se zde sympatie, antipatie či neutrální sociální vztahy. Zvláštní místo mezi nimi ovšem zaujímá přátelství.

Přátelství bývá zpravidla charakterizováno snahou pomáhat tomu druhému, být mu sociální oporou. Kvalita přátelství mezi žáky se proměňuje s věkem, ale podstatné je, že usnadňuje jedinci hledání a nacházení pomoci. Mezi výrazné rysy přátelství mezi žáky patří: vzájemná sympatičnost, vřelost, radost z vzájemného společenství, spolehlivost, ochota se svěřovat s problémy, které jsou privátní a nehodí se, aby o nich jiní lidé věděli, ochota pomáhat druhému, absence rivality, absence konfliktů (Buhrmester 1990).

Žák se svými postoji k učení, ke škole přizpůsobuje postoji kamaráda. Je-li kamarádův postoj kladný a přátelství uspokojuje žákovy potřeby, mívá tendenci se zajímat o školu, učit se, zlepšovat svůj prospěch. V situaci, kdy se dostane do problémů, se nemusí obávat, že by se mu nedostalo od kamaráda sociální opory. Naopak žák, který se dostane do problémů, může těžko očekávat, že mu spolužák, s nímž je v konfliktních vztazích, poskytne iniciativně pomoc; dokonce i v případě, kdyby ho o pomoc výslovně požádal („doprošoval se“), může očekávat přinejmenším zdráhání.

Sociální cíle sledované žákem. Badatelé rozlišují dva základní sociální cíle: (a) sociální afiliaci, tj. snahu žáka získat a udržet si příznivé vztahy se spolužáky, těsnost a opravdovost kamarádství; (b) sociální status ve třídě, tj. snahu žáka být ve třídě populární, uznávaný, vybudovat si dobrou „pověst“, získat významnější postavení, vliv a moc.

Žáci, kteří se orientují na první cíl, bývají ve třídě oblíbení a nemívají potíže při hledání a získání pomoci. Výzkumy naznačují, že se také netrápí tím, za jakou cenu pomoc získají. Neobávají se odmítnutí, neobávají se, že by byli nejprve tím druhým „potrápeni“, že by si „vychutnával“ jejich pozici prosebníka. Naopak tito žáci berou hledání pomoci jako reciproční záležitost, jako činnost, která patří do školní třídy, patří k roli spolužáka a měla by se oceňovat jako něco dobrého.

R.S. Newman však upozorňuje na důležitou okolnost: ani samo přátelství, ani žákovo preferování sociálních cílů automaticky nezaručuje, že žák, jenž se ocitl v nouzi, zvolí právě adaptivní hledání pomoci, tedy to cennější, vhodnější hledání pomoci. Ve hře je totiž ještě žákova sociální zralost, jeho postoje k učení, zkušenosti se spoluprací se spolužáky, vhodnost načasování žádosti apod. (Newman 2000).

Se vzrůstajícím věkem žákům vzrůstá také ohled žáků na druhý sociální cíl – na udržení sociálního statusu ve třídě. Obecně lze říci, že zmíněný cíl vystupuje u žáků do popředí se začátkem puberty, tedy na 2. stupni základní školy. Žák už nejedná jenom sám za sebe, podle svých motivů a své hodnotové orientace. Stále více bere v úvahu to, co si o něm pomyslí spolužáci. Záleží mu na tom, aby pro svůj čin získal *sociální souhlas* většiny třídy (nebo alespoň těch spolužáků, na jejichž mínění mu neobyčejně záleží). Záleží mu rovněž na tom, aby hledáním pomoci neohrozil své postavení ve třídě a *pozitivní obraz* – „image“, který si mezi spolužáky pracně vybudoval. Hlídá si také, aby neklesl ve vlastních očích, aby si neohrozil *sebeúctu* (*self-worth*). Podle převažujících postojů třídy ke škole a k učení je na žáka vyvíjen určitý *sociální tlak*. Školní třída má své vnitřní normy toho, co se dělá a co se nedělá. Jsou-li postoje třídy vůči učení příznivé, bude i hledání pomoci sociálně snadnější. V opačném případě žák velmi riskuje.

Tím jsme ukončili část věnovanou sociálnímu začleňování žáka a můžeme se věnovat sociálnímu srovnávání, které je důležité pro rozvoj žákovy autonomie, samostatnosti, nezávislosti.

Zpětná vazba týkající se výkonů žáka. Už předškolní dítě se zajímá o to, jak vypadá ve srovnání se svými vrstevníky, zda se jim vyrovná a začíná být citlivé na své neúspěchy. Zpětná vazba v těchto případech udělí provedenému výkonu sociální význam, zařadí ho do sociálního kontextu (*social referencing*). Dítě se učí posuzovat, zda to, co předvedlo, vyhovuje sociálním normám. Je to velmi důležité, neboť v předškolním věku nemívá realistický odhad a často přeceňuje kvalitu svého výkonu.

S nástupem do školy se pod vedením učitelů (a postupně i pod vlivem spolužáků) dítě učí dvěma dovednostem: *posoudit obtížnost úkolu*, který má splnit (včetně toho, zda je v jeho silách se s ním samostatně vyrovnat nebo je lepší požádat někoho o pomoc), a dále *posoudit průběh svého řešení úkolu*. Učí se mj. monitorování sebe sama a zamýšlení se nad sebou samým (*self-monitoring* a *self-reflection*). Z toho mu vyplyne i odhad, zda dosažený výsledek je či není v pořádku.

Zpětná vazba poskytovaná žákovi zvenku má nejméně dva závažné kontexty. První je sociální: záleží na sociálním klimatu třídy (které spoluvytváří i učitel), zda zpětná vazba bude žákovi prezentována jako informace konstruktivní, vstřícná, neohrožující, nezesměšňující jeho úsilí; anebo jako příležitost ho pokárat, zesměšnit, ztrapnit jeho snahu, odradit ho od dalších pokusů. V prvním případě je chyba chápána jako běžná součást učení se něčemu novému, jako příležitost pro diagnostické úvahy a příležitost pro cílenou pomoc (Kulič 1971 a kap. 4). Ve druhém případě jako něco nepatřičného, co do učení nepatří a je třeba to exemplárně potrestat.

Druhý kontext je kognitivně-osobnostní. Zpětná vazba může naučit žáka správně posuzovat kvalitu své činnosti tak, že se zmenšuje rozdíl mezi objektivně registrovaným průběhem a výsledky žákovy činnosti na jedné straně a vnitřními pocity žáka o správnosti postupu a výsledku na straně druhé. Řečeno odborně: zpětná vazba může ovlivňovat žákovu *subjektivní evidenci výsledků činnosti* (Kulič 1992, s. 150 a násl.). Patří sem soubor žákových vnitřních kognitivních kritérií, podle nichž posuzuje kvalitu své činnosti, soubor non-kognitivních kritérií (pocitů jistoty či nejistoty) a konečně soubor osobnostních faktorů, jako je žákovo sebepojetí, sebehodnocení, sebedůvěra. Ze čtyř teoreticky možných situacích jsou psychologicky závažné dvě, při nichž je subjektivní evidence nepřiměřená: 1. žákův výkon je objektivně chybný, ale žák jej subjektivně považuje za správný (žák se přeceňuje), 2. žákův výkon je objektivně správný, ale žák jej subjektivně považuje za chybný (žák se podceňuje). R.S. Newman aj. (2001) připomínají, že adaptivní hledání pomoci vyžaduje znalost sebe sama, svých možností, odhad toho, na co stačím; tato znalost je „kalibrována“ žákovými zkušenostmi s reálným řešením úkolů různého stupně obtížnosti a dále žákovou metakognicí, vnitřními pocity jistoty či nejistoty.

Se vzrůstajícím věkem a bohatšími zkušenostmi stoupá žákova schopnost poznat, kdy je vnější pomoc při řešení obtížného úkolu nezbytná a vzrůstá také žákova dovednost přizpůsobit svoji strategii hledání pomoci a formulování prosby o pomoc obtížnosti úkolu (Nelson-Le Gall; Jones 1990). Při tomto sociálním učení, které vychází ze sociálního srovnávání žáků mezi sebou, získává žák také odhad, kolik pomoci asi potřebuje a kterého ze spolužáků by bylo v této situaci nejvhodnější oslovit. Zjistí také, kdo ze spolužáků a na jaký problém je nejvhodnějším poskytovatelem pomoci (*effective helper*).

Soutěžení ve třídě, žákova kompetentnost a sebeúcta. Konkrétní podoba klimatu školní třídy může podporovat nebo naopak tlumit žákovu potřebu autonomie, nezávislosti, jakož i žákovu potřebu autodeterminace. Pokud klima třídy podporuje vnitřní motivaci, učební cíle, individualizované hodnocení, vztahy mezi žáky jsou vstřícné, pak se žák ve třídě cítí dobře a nebojí se poprosit o pomoc. Pokud však klima třídy akcentuje vnější motivaci, výkonové cíle, neustálé soutěžení, srovnávání žáků mezi sebou, známkování založené na relativním výkonu vůči vrstevníkům a vztahy mezi žáky jsou napjaté, pak se v takové třídě žák necítí dobře; bojí se odhalit před spolužáky své slabiny a dát najevo, že potřebuje pomoc (Deci; Ryan 1985).

Sociální srovnávání a hledání pomoci se mění s věkem dětí. Tabulka 6.1 ve zjednodušené podobě shrnuje některé výzkumné poznatky.

Údaje uvedené v tab. 6.1 spíše naznačují hlavní vývojové trendy. Věková pásma se mohou překrývat a v konkrétních případech může žák a třída reagovat (vzhledem k údajům v tabulce) poněkud „opožděně“ nebo naopak „s předstihem“.

Věková pásma	**Hledání pomoci u vrstevníků**	**Hledání pomoci u učitele**	**Očekávané důsledky z pohledu dítěte**	**Poznámky**
Do 4 let	Ano	Ano	Dítě má dobrý pocit z kontaktu s jinými lidmi	Hledání pomoci je vázáno na konkrétní situaci
4–5 let	Ano	Ano	Dítě zjišťuje, že s pomocí jiných může vyřešit některé problémy	
5–6 let	Ano a navíc nevyžádaná pomoc nevadí	Ano, ale nevyžádaná pomoc už vadí	Dítě má pocit, že pokud poskytuje nevyžádanou pomoc kamarád, nevyvolá to negativní odezvu vrstevníků; pokud poskytuje pomoc dospělý, signalizuje to okolí, že dítě nemá dost schopností	
6–7 let	Ano, ale začíná trochu vadit	Ano, ale začíná trochu vadit	Dítě má pocit, že by se mělo nejdřív snažit samo a teprve potom se rozhlížet po pomoci	
7–8 let	Spíše ne	Spíše ne	Hledání pomoci bývá provázeno pocitem trapnosti	
9–10 let	Spíše ne a velmi vadí zejména dívkám	Spíše ne	Hledání pomoci bere třída jako signál, že daný žák nemá dostatečné schopnosti	Žáci ještě příliš nerozlišují vztahy mezi schopnostmi, úsilím a prospěchem

11–12 let	Spíše ne a velmi vadí jak dívkám, tak chlapcům	Ne	Hledání pomoci u kamaráda se toleruje, u učitele nikoli	Žáci dokáží postihnout vliv schopností a úsilí na prospěch
12–14 let	Ne a velmi vadí	Ne a velmi vadí	Hledání pomoci je riskantní: pokud má třída kladný postoj k učení, je hledání pomoci známkou slabosti; pokud má třída záporný postoj k učení, je hledání pomoci známkou zájmu o učení – šplhounství	Nastupuje výraznější sociální srovnávání a soutěžení mezi žáky

Tab. 6.1 Věkové proměny postoje dětí a dospívajících k vyhledávání pomoci u vrstevníků a učitelů

Navíc záleží na zvláštnostech konkrétního žáka. Cítí-li se žák – na základě sociálního srovnávání – velmi dobrý v např. v matematice, nebojí se vyhledat vnější pomoc, protože se chce dozvědět něco víc, chce být ještě lepší, kompetentnější. Dokáže bagatelizovat znevažující poznámky, nebojí se o svou pozici (Newman 1990).

Tím jsme ukončili část věnovanou sociálnímu srovnávání a můžeme přistoupit k poslední části hledání pomoci u spolužáků, jíž je jazykové vyjádření.

Žákova jazyková kompetentnost. Požádat někoho o pomoc není snadná záležitost. Nejen po sociální stránce, ale také po jazykové stránce. Žák si klade otázky typu: „Co všechno říci (a co zatajit)? Jak svou prosbu či žádost formulovat? Kdy by bylo vhodné s tím vyrukovat? A když bude kamarád souhlasit, jak si naši spolupráci bude představovat on a jak já?“

Prosba o pomoc, ať už je adresována spolužákům nebo dospělým osobám, předpokládá dovednost, která není u dětí a dospívajících samozřejmá. Když člověku není něco jasné, měl by se dobře zeptat na to, co se potřebuje dozvědět. Přesné kladení otázek u žáků – žákovské dotazování – je dovednost, která se v našich školách příliš necvičí; někdy je dokonce ze strany učitelů brána jako žákovské provokování. Velmi užitečný přehled problémů, spojených s žákovským dotazováním jako specifickou formou hledání pomoci, podává J.T. Dillon (1998).

Kromě dotazování potřebuje žák zvolit vhodnou formu prosby. Pokud napoprvé neuspěje, měl by umět svou prosebnou formulaci upravit a zopakovat. To ovšem předpokládá určitou zralost a zkušenost. Teprve starší žák dokáže revidovat svou prosbu o pomoc, vhodněji vysvětlit, v čem a proč potřebuje pomoci (Cooper aj. 1982).

Ve vyšších ročnících 1. stupně základní školy a na 2. stupni už lze nacvičovat systematickou spolupráci mezi žáky. V rámci této spolupráce se žáci učí mj. „přemýšlet nahlas“ a vyměňovat si se spolužáky nápady, stanovovat společné cíle, diskutovat o možných strategiích dalšího postupu a jiné typy verbálních dovedností (Rogoff 1998). Během spolupráce se žádost o pomoc adresovaná kamarádovi stává přirozenou a nikoho neohrožující aktivitou. Prosba o pomoc usnadňuje žákovo učení za dvou podmínek: (a) jde o elaborovanou pomoc, tedy pomoc propracovanou, provázenou vysvětlením, jak řešit určitý matematický problém, (b) žák poskytnutou pomoc využije konstruktivním způsobem; přeformuluje, přepracuje problém s oporou o nově získané informace (Webb; Troper; Fall 1995). Když žáci potřebují elaborovanou pomoc, ale dostanou pomoc nerozpracovanou (spolužák jim např. sdělí správný výsledek, ale nevysvětlí jim postup k němu vedoucí), pak učení neproběhne nebo jen s velkými obtížemi.

Souběžně s žákovou dovedností požádat spolužáky o pomoc se rozvíjejí i reciproční aktivity. Dovednost nabídnout pomoc a dovednost poskytnout pomoc. Spolužáci tedy mohou poskytnout jeden druhému příležitost zažít (vedle individuálního učení) také sociální učení a ocenit jeho přínos.

V běžném životě žák hledá pomoc a hledá ji za různých situací. Jak toto hledání zachytit a jak poznat jeho kvality? K tomu slouží diagnostika hledání pomoci.

6.8 Diagnostika vyhledávání pomoci

K diagnostikování žákovy snahy vyhledat pomoc můžeme použít řadu metod: pozorování, rozhovor, analýzu produktů (např. zápisů žákovských řešení, pomocných náčrtů, kreseb), dotazník, příp. kombinaci více metod.

Kvantitativní nástroje se snaží zmapovat typy problémů, které žáky trápí; žákovy postoje vůči vnější pomoci; rizika a hrozby, které žák vidí v souvislosti s hledáním pomoci; okruh osob, o nichž žák uvažuje jako o potenciálních zdrojích pomoci; cíle, které si klade při hledání pomoci; strategie, které používá při hledání pomoci; bariéry, které se mu stavějí do cesty; míra žákovy aktivity a vytrvalosti při hledání pomoci; žákovo vnímání sociálního kontextu, v němž se hledání pomoci odehrává. Všechny tyto proměnné jsou kvantifikovány (obvykle pomocí ordinálních škál) v rámci různých dotazníků.

Kvalitativní nástroje se zajímají mj. o to, které typy pomoci jsou pro žáka akceptovatelné a které nikoli; zda jde o jednosměrné poskytování pomoci nebo o reciproční záležitost; jak hledání pomoci začalo, zda se pomoc nějak proměňuje v čase, jak dlouho celkově trvá, jakou perspektivu jí dávají oba aktéři; jaký přínos má pomoc pro obě strany; jak reagují na hledání a poskytování pomoci spolužáci, učitelé a rodiče; zda existují rozdíly ve vnímání, prožívání a hodnocení pomoci mezi poskytovatelem a příjemcem.

Nástroje specificky zaměřené obsahují položky, které se snaží rozkrýt, specifikovat kontext vyhledávání pomoci právě při výuce matematiky (Newman 1990, Newman; Schwager 1993).

Nástroje globálně zaměřené se nezajímají o vazbu na konkrétní vyučovací předmět, někdy ani ne na školské prostředí, nýbrž se snaží zachytit obecnější aspekty vyhledávání a využívání pomoci u dětí a dospívajících. Poskytují globální údaje o kvalitě procesu vyhledávání vnější pomoci.

V poslední době se objevují snahy jít ještě hlouběji. Jednou z nich je snaha přistupovat ke zkoumání vnější pomoci neosobně, z hlediska neexistujícího průměrného žáka. Opakem je snaha dopátrat se *smyslu vnější pomoci pro daného jedince*, zjistit osobní význam pomoci. Zmapovat jeho stabilní názor na sociální svět kolem něj (zda ho vnímá jako převážně dobrý nebo převážně špatný) a jeho individuální celkový pocit, zda je okolím přijímán, odmítán nebo je lidem jeho osud lhostejný. I když je tento smysl vnější pomoci do jisté míry ovlivňován tím, co daný žák kolem sebe vidí a momentálně na sobě zažívá, jedná se do jisté míry také o stabilní charakteristiku osobnosti, která může vyvěrat ze zkušeností s lidmi v raném dětství. Jedinec se tedy učí interpretovat sociální interakci jako pozitivní či negativní, učí se od lidí něco očekávat nebo nečekat nic dobrého.

Druhou snahou je nepřistupovat ke zkoumání vnější pomoci neutrálně, přírodovědecky, nýbrž se dobrat *morálních aspektů hledání a poskytování pomoci*.

Pomáhání druhým lidem má jako svébytná morální kategorie mnoho významových odstínů. G. Lind (1997) připomíná, že při prvním přiblížení můžeme uvažovat o zvláštnostech různých situací, v nichž se pomáhání uskutečňuje, a o zvláštnostech pomáhajícího člověka – kdo pomáhá a proč pomáhá. Mnozí lidé, když vidí jiného člověka v nouzi, mívají tendenci okamžitě uvažovat o tom, jak mu pomoci. Méně už přemýšlejí o tom, zda tento člověk vůbec stojí o nějakou pomoc, zda nechce vyzkoušet vlastní síly při zvládání zátěže a konečně, zda možnosti pomáhajícího nejsou omezené, zda by mu skutečně dokázal účinně pomoci.

Chápání pomoci závisí také na sociální perspektivě, zejména u dětí. Navíc se pomáhání druhým lidem spojuje s intencionalitou a konzistentností jednání; za pomoc se obvykle nepovažuje ojedinělý a nahodilý čin. Při úvahách o pomoci jiným se nesmí zapomínat také na zkoumání efektu pomoci, tedy původního záměru pomáhajícího, skutečného výsledku pomoci a dopadů pomoci na příjemce i pomáhajícího. G. Lind (1997) v této souvislosti zmiňuje názor D. Krebse, že altruistické chování není nezbytně chování morální nebo správné. Idea altruismu totiž předpokládá, že jedinec více dává, než dostává, anebo více dává, než by podle okolí „měl dávat“, a tím dochází k porušení reciproční rovnováhy odvozované ze „spravedlnosti“.

Tím se dostáváme k dalšímu hledisku spravedlnosti v pomáhání – je jím rovnováha mezi právem pomáhat a povinností pomáhat. Můžeme zase dodat, že pomáhání druhým lidem nezahrnuje jen *pocit povinnosti* pomáhat (vznikající v konkrétní sociální skupině nebo ve společnosti pod tlakem psaných i nepsaných společenských norem), ale odvozuje se též od jedincových vnitřních morálních norem. Jinak řečeno: závisí na *úrovni morálního vývoje* žáka. Pak mohou nastat případy, kdy se dospívající rozhoduje v morálně složité situaci a je ochoten při pomáhání druhému jít do konfliktu s existujícími morálními normami a principy. Z pohledu nás dospělých jak v pozitivním, tak negativním smyslu.

Z těchto premis vychází i Lindova (1997) dvouaspektová teorie morálního vývoje a pomáhajícího chování. Jeho teorie rozlišuje mezi afektivními a kognitivními aspekty pomáhajícího chování, tedy mezi přáním jedince pomoci na jedné straně, jeho schopnostmi a dovednostmi adekvátně pomoci na straně druhé. Autor říká, že v předškolním věku dítě mívá vyvinutý smysl pro povinnost pomáhat druhým, ale jeho schopnosti a dovednosti adekvátně pomáhat jsou ještě málo rozvinuty. Navíc podle této teorie (na rozdíl od jednosměrné kognitivně-vývojové teorie Kolberga) může v životě jedince nastat období, kdy dochází k regresu morální vývoj včetně ochoty pomáhat druhým. Bývá to velmi pravděpodobné, když nastanou dvě okolnosti: (a) když jedinec nepřekoná ve svém vývoji „kritickou hranici“, tj. úroveň, kdy si morální úsudky tvoří sám, kdy nastoupí sebevýchova, (b) když nemá příležitost využívat svou morální kompetenci.

Pomáhání mezi žáky je psychologicky i pedagogicky velmi zajímavý jev. Dosavadní výzkumy se zaměřovaly spíše na jeho *spontánní* podoby s *negativním* zabarvením – viděno z pohledu nás dospělých. Šlo např. o napovídání či opisování (Mareš; Křivohlavý 1995).

Pozitivní podoby žákovského prosociálního chování sice v běžném školním životě existují, ale o jejich prevalenci nemáme spolehlivé údaje. Proto jsme uskutečnili výzkumnou sondu u 185 žáků 2. stupně základní školy (Mareš; Ježek; Ludvíček 2003). Sonda naznačila, že ve sledovaném vzorku není vzájemné pomáhání mezi žáky ve škole běžnou záležitostí, ale žáci přikládají vzájemnému pomáhání dost velkou důležitost. Žáci cítí určitou morální povinnost pomoci spolužákovi v nesnázích a zřejmě jsou ochotni (do jisté míry) mu pomoci. Jednotlivý žák (má-li posoudit ochotu svých spolužáků pomoci spolužákovi v nesnázích) je poměrně skeptický vůči své třídě. Pokud by jeho spolužák (v hypotetickém případě) nezískal pomoc ve třídě a propadl by, pak by téměř polovina žáků pociťovala poměrně výrazně svou spoluodpovědnost. Rozdíly v názorech žáků zřejmě závisejí na pohlaví – dívky vnímají vzájemné pomáhání ve škole jako důležitější než chlapci; pociťují větší morální povinnost pomáhat a jsou ochotnější pomoci; pokud by spolužák propadl, pociťovaly by větší míru spoluzodpovědnosti za neúspěch než chlapci. Rozdíly v názorech žáků zřejmě závisejí i na věku – mladší žáci jsou ochotnější pomáhat.

Přehled dotazníkových metod. Dotazníkové metody jsou relativně často používané, ale specifických metod cílených přímo na žákovo vyhledávání pomoci je málo. V dostupné literatuře jsme našli šest obecněji koncipovaných (nesouvisejících s matematikou a někdy ani ne se školou) a jednu speciální, zkonstruovanou přímo pro zjišťování pomoci v hodinách matematiky.

Přehled dotazníkových metod přináší tab. 6.2.

Autor	**Název metody**	**Věk**	**Počet položek**	**Struktura**	**Reliabilita**
			Obecně koncipované dotazníky		
Karabenick; Knapp (1991)	Perceived Help-Seeking Threat (PHST)		6 položek hodnocených pomocí čtyřstupňové škály	Jediná škála zjišťující míru ohrožení žákova sehednocení, sebeúcty	Cronbachovo alfa 0,74 až 0,80
Karabenick; Knapp (1991)	Help-Seeking Behavioral Tendencies (HSBT)		19 položek hodnocených pomocí sedmistupňové škály	5 proměnných: hledání formální pomoci, hledání neformální pomoci, angažování se v instrumentálních aktivitách, vytyčení si alternativních cílů, snížení výkonové aspirace	
Deane; Wilson; Ciarrochi (2001)	General Help-Seeking Questionnaire (GHSQ)		18 položek hodnocených pomocí sedmistupňové škály	2 typy problémů, které jedince trápí: 1. osobní-emocionální, 2. sebevražedné myšlenky a 6 možných zdrojů pomoci: rodina, přátelé, psycholog, lékař, linka důvěry, odmítání pomoci	
Kuhl; Jarkon-Horlick; Morrissey (1997)	Barriers to Adolescent Help-Seeking (BASH)	9.–12. ročník	37 položek hodnocených pomocí šestistupňové škály	Jediná škála zjišťující 13 typů bariér bránících jedinci vyhledat pomoc	Cronb. alfa 0,91. Test-retest po 2 týd. 0,91
Newman (1990)	Help-Seeking Benefit Scale (HSBS)		Údaje nedostupné	Údaje nedostupné	

Karabenick; Knapp (1991)	Price of Help-Seeking Scale (PHSS)		Údaje nedostupné	Údaje nedostupné	
Dotazníky specifické pro matematiku					
Newman (1990); Newman; Schwager (1993)	Mathematics Learning in the Classroom Questionnaire (MLCQ)	3.–7 ročník	51 položek hodnocených pomocí pětistupňové škály	4 proměnné: 1. sociální klima třídy, 2. žákovy strategie učení, 3. žákovy postoje k vyhledávání pomoci, 4. žákovy postoje, přesvědčení a cíle týkající se výkonu v matematice	Cronbachovo alfa 0,69 až 0,73

Tab. 6.2 Přehled dotazníků zjišťujících různé aspekty vyhledávání pomoci u dětí a dospívajících

6.9 Situační pohled na vyhledávání pomoci

6.9.1 Situace, v nichž je osobní pomoc vyžadována

Při výuce matematiky mohou nastat nejméně dvě situace, kdy se s vyhledáváním i poskytováním pomoci přímo počítá: kooperativní vyučování a učení ústící ve vrstevnické učení a dále skupinové vyučování a učení.

První možností je *kooperativní vyučování*. V tradičním hromadném (zpravidla frontálním) vyučování je relativně málo situací, kdy se dítě systematicky učí podílet se na společné práci, pomáhat druhému a přijímat jeho pomoc, radit, vyučovat. Vzájemná spolupráce nebývá příliš žádoucí; žáci pracují spíše „vedle sebe“ (viz učitelovo nabádání „Každý sám za sebe!“), než „spolu“. Oproti tomu kooperativní vyučování a učení (Kasíková 1997) je bez spolupráce, kooperace nemyslitelné. Přesněji řečeno v rámci té podoby kooperace, kterou autorka nazývá kooperace jako nápomoc, kdy jeden žák pomáhá druhému. Vztah mezi tím, kdo pomáhá, a tím, komu je pomáháno, bývá iniciován a řízen učitelem; sociální role žáků jsou rozděleny: jeden žák (zpravidla stejně starý, ale kompetentnější anebo věkově starší a kompetentnější) vyučuje, druhý žák se pod jeho vedením učí. V angličtině jde o termín *peer tutoring*, který lze přeložit jako *vrstevnické učení*, *partnerské učení*.

M. Webb (1987) uvádí, že tento typ učení nově definuje úlohu učitele. Učitel už není jediným, kdo vyučuje žáky. Žák v roli vyučujícího má specifické přednosti: je věkově bližší svým vrstevníků, dokáže lépe pochopit jejich problémy s učením, dokáže se snadněji vžít do jejich způsobu uvažování. Žáci se neostýchají vyhledat jeho pomoc, nebojí se přiznat k neznalostem. Snadněji se s ním identifikují jako s vzorem, neboť přiblížit se úrovni, kterou dosáhl jejich vrstevník, je z pohledu dětí snadnější, než přiblížit se úrovni učitele. Spolužák jim dokáže poskytnout častější zpětnou vazbu než učitel a dokáže ji poskytnout způsobem, který je pro dítě srozumitelnější a přijatelnější.

Profit z vrstevnického učení však nemá pouze vyučovaný žák. Také žák, který vyučuje spolužáky, tedy tutor, něco získává. Tutor rozvíjí své znalosti a dovednosti (nechce se ztrapnit), stoupá jeho sebedůvěra, sebevědomí, sebeúcta. Prožívá pocit odpovědnosti za kvalitu své pomoci a za výsledky svých svěřenců. Vysvětlováním učiva, reagováním na různorodé chyby a naivní otázky si sám prohlubuje pohled na učivo, dospívá k vyšší úrovni porozumění učivu.

Vrstevnické učení zlepšuje školní výsledky žáků, zejména žáků prospěchově slabších, dále žáků, kteří dobře neovládají jazyk majority, žáků ze znevýhodněného sociálního prostředí a žáků odlišného kulturního nebo etnického původu. Zlepšuje však i postoje k učení, k vyučovacímu předmětu a škole obecně. Příznivě působí také na žáky, kteří předtím měli potíže v navazování a udržování kontaktů se spolužáky nebo jim chyběla dovednost spolupracovat. Vrstevnické učení tedy funguje na principu vzájemné odměny mezi dětmi či dospívajícími a tím přispívá k rozvíjení dovednosti být druhému člověku sociální oporou.

Druhou možností je *skupinové vyučování*. Jeho podoby a principy, na nichž stojí, jsou obecně známy. Méně známo ovšem je, jak hodnotit kvalitu skupinové práce. Vždyť tradiční hodnocení ve škole se zaměřuje na jedince. U něj se zjišťuje kompetentnost, pokud jde o způsob uvažování, znalost učiva, odbornou zdatnost. Hodnotí se individuální kompetence, kterou žák prokazuje sám, bez pomoci ostatních. Jinak by byly výsledky hodnocení považovány za zkreslené, za znehodnocené.

Jak ale hodnotit kvalitu skupinového učení, kvalitu skupinové práce, kde žáci mohou žádat o pomoc ostatní, kde takovou pomoc mohou dostat a kde (v důsledku pomoci) podají lepší výkon, než kdyby pracovali sami?

Odpověď hledala také N.M. Webbová (1994). Tvrdí, že kvalita skupinové práce ve škole se dá hodnotit ze tří odlišných pohledů:

1. Měří se, jak kvalitní výkon může žák podat, když dostane příležitost učit se ve spolupracující skupině. Jde o alternativu vůči individuálnímu hodnocení. Zde je žákova kompetence založena na faktu, že většina jeho učení je konstruována ve spolupráci se spolužáky. Sociálně konstruktivistický pohled říká, že žákova individuální kompetentnost sestává ze znalostí, dovedností a porozumění, které žák konstruuje tehdy, když pracuje s ostatními žáky. Individuální kompetence se vynořují ze spolupráce se spolužáky; žák se učí, jak řešit problémy, které by nedokázal vyřešit, kdyby na to byl sám.

2. Měří se produktivita skupiny jako celku. Práce skupiny se chápe jako týmová záležitost a zjišťuje se efektivita celkové práce a kvalita výsledného produktu. Přínos jednotlivců není podstatný, tím méně se sledují změny, která se udály s každým jedincem.
3. Měří se žákova schopnost spolupracovat se členy skupiny, reagovat na jejich nápady, fungovat jako platný člen skupiny. Sleduje se, jak si žák vede v komunikaci s druhými, jak přistupuje k řešení konfliktů, jak dokáže vyjednávat, jak se rozhoduje ve složitých situacích apod. Tyto sociálně komunikační dovednosti jsou podstatné pro žákovo pozdější uplatnění v zaměstnání.

N.M. Webbová (1994) upozorňuje, že při skupinové práci se sledují a hodnotí dva rozdílné až soupeřící cíle: dosažení produktivity skupiny jako celku a zlepšení žákovy kompetence prostřednictvím sociálního učení (v rámci spolupracující skupiny žáků). Procesy, které probíhají v rámci takové skupiny, mohou napomáhat dosažení jednoho cíle, ale komplikovat dosažení druhého. Jen výjimečně jsou skupinové procesy výhodné pro dosahování obou cílů najednou.

Co především skupinové procesy umožňují? Jde o sérii různorodých aktivit, z nichž se nejčastěji uvádějí tyto:

- dělba práce,
- stejný přínos členů,
- společné generování a konstruování nápadů,
- konflikty a rozpory,
- *hledání, poskytování a získávání elaborované pomoci*,
- ale i příležitost k minimální aktivitě,
- zamlžení odpovědnosti za výsledek.

Četné výzkumy žákovského učení ukazují, že vzájemná pomoc žáků mívá dvojí funkci. Pro žáka, který nechápe učivo a hledá pomoc, je vysvětlení podstaty problému a návod jak postupovat, velmi užitečný. Mnohem užitečnější však může být, jak se zdá, pro žáka, který pomoc poskytuje. Když spolužákům něco vysvětluje, ať už jim pomáhá anebo brání svůj vlastní nápad, nutí ho to rekonstruovat dosavadní poznatky, identifikovat příčiny jejich nepochopení učiva, odhalovat miskoncepce učiva a tím se otevírá prostor pro další učení (Webb 1994).

To všechno jsou situace, kdy vzájemná pomoc žáků je vítána. Existují však i situace opačné.

6.9.2 Situace, v nichž je osobní pomoc zakazována

Při výuce matematiky pochopitelně existují situace, kdy je vzájemná pomoc žáků nežádoucí, kdy se vyžaduje samostatná práce. Spolupráce mezi žáky je zakázána buď psaným řádem školy či nepsanými pravidly školy, nebo pravidly „hry“, která ve třídě stanovil konkrétní učitel. Připomeňme situaci, kdy se kontrolují domácí úkoly, situaci ústního zkoušení u tabule, situaci písemného zkoušení celé třídy atp.

Přesto mohou nastat případy, kdy žák, jenž se obává špatné známky i důsledků s ní spojených, se snaží získat pomoc spolužáků a verbálně či neverbálně „volá o pomoc“. Vyhledávání a poskytování pomoci je ovšem ze strany učitele chápáno jako přestupek proti kázeňským pravidlům a bývá trestáno. Máme na mysli opisování domácího úkolu z matematiky před vyučováním nebo o přestávce, napovídání zkoušenému žákovi, opisování při písemné zkoušce.

Opisování domácího úkolu před vyučováním nebo o přestávce. Jde o činnost relativně častou a žáci ji interpretují jako běžnou pomoc kamarádovi. U delších a složitějších domácích úkolů nemusí nepřipravený žák stihnout celý úkol opsat, takže se může od učitele dozvědět: „Tu ukázku si odnes zpátky do lavice a přines mi celý úkol“ (Richter 1994, s. 38).

Napovídání zkoušenému žákovi. Napovídání je specifická komunikační činnost, při níž spolužáci pomáhají konkrétnímu žákovi, jenž má odpovědět na učitelovu otázku či vyřešit zadaný úkol a nezná správnou odpověď nebo správný postup řešení. Verbálně i neverbálně mu sdělují klíčové prvky správné odpovědi a žák s oporou o tuto *pomoc* splní zadaný úkol, třebaže nebyl na jeho řešení připraven a někdy odpovědi ani sám příliš nerozumí (Mareš; Křivohlavý 1995, s. 85).

Opisování při písemné zkoušce. Opisování mívá dvě podoby: buď jde o nelegální komunikaci mezi dvěma či více žáky v hodině, anebo nelegální „svépomoc“ jediného žáka (opisování z různých podob „taháku“).

V prvním případě spolužák *pomáhá* konkrétnímu žákovi, jenž má písemně zodpovědět zadané úkoly a nezná správnou odpověď nebo správný postup řešení. Verbálně (buď šeptem nebo písemně) mu sděluje správný postup při řešení. Obvykle nejde jen o poskytnutí klíčových prvků správné odpovědi, ale o podrobnější pokyny ke správnému postupu anebo o poskytnutí úplného znění správného postupu, které nepřipravený žák opíše do svého záznamového archu. Pokud postupu nerozumí, opíše někdy poskytnutý text i s chybami anebo při opisování udělá další chyby.

Ve druhém případě se žák připravuje na písemnou zkoušku doma a vyrábí si stručný výtah z učiva, o němž předpokládá, že bude předmětem písemného zkoušení. Vytváří si svépomocný přehled těch prvků učiva, které považuje za klíčové anebo o nichž ví, že právě jemu dělají potíže. Tento miniaturní přehled mu slouží jako *zdroj pomocných informací* při písemném zkoušení.

V obou případech jde o pomáhání, které běžné školní normy nedovolují. Existují však učitelé, kteří psaní „taháků“ berou jako specifickou formu žákovy přípravy na písemné zkoušení.[3] „Tahák“ nezakazují, nýbrž povolují a záleží na žákovi, zda této možnosti

[3] Viz také kap. 10, oddíl 10.9, a kap. 16, oddíl 16.4.6.

využije. Učitelé ovšem podobu taháku specifikují: určují, že musí jít o jediný lístek papíru, a definují jeho maximální přípustné rozměry. Tím nutí žáky, aby se pokusili vybrat z učiva to nejpodstatnější nebo to, co žák subjektivně pociťuje jako své největší slabiny. Tvorba „taháku“ doma je pak specifickým druhem učení a použití „taháku“ specifickou formou autoregulace učení.

6.9.3 Situace, v nichž dominuje technicky zprostředkovaná pomoc

Žáci, kteří se učí matematice, nejsou stejní. Liší se svým věkem (a tedy svými vývojovými zvláštnostmi), liší se svými poznávacími schopnostmi, svou motivací, ale také různou *potřebou pomoci* při učení. V případech, kdy je vyučuje živý učitel a kdy je to učitel dobrý, dokáže tyto rozdíly diagnostikovat a podle nich s žáky odlišně jednat.

V případech, kdy se žák učí pomocí počítače, je situace složitější, neboť autor systému musí promyšleně zakalkulovat diagnostiku žáků a reagování na rozdíly mezi žáky do programu řídícího žákovo učení.

Zajišťují to tzv. inteligentní tutorské systémy, mezi jejichž důležité charakteristiky patří detekční a reaktivní *senzitivita* na učícího se žáka a *efektornost* systému (Kulič 1992). Jedním z příkladů je také konkrétní varianta inteligentního tutorského systému nazvaná *AnimalWatch* (Arroyo; Beck; Beal aj. 2001). Byla zkonstruována pro výuku elementární matematiky u žáků ve věku 8–11 let, tedy ve věku, kdy se žáci ocitají na rozhraní mezi konkrétním a abstraktním myšlením. Cílem systému bylo ověřit různé možnosti *počítačového poskytování pomoci* žákům, pokud si ji vyžádají.

Citovaní autoři navrhli, zkonstruovali a vyzkoušeli počítačový systém, který propojil dva předměty: matematiku a biologii. Vymysleli soubor slovních úloh, které se týkají ohrožených biologických druhů. Z databáze slovních úloh počítačový program vybírá další vhodné úlohy podle toho, jak úspěšně žák řeší úlohy předchozí a které pomocné informace si pro svá řešení vyžádal. Pokud žák odpoví chybně, program mu nabízí pomocné informace, dává mu nápovědi (*hints*), které se stupňují, pokud nepřesnosti či chyby v odpovědích přetrvávají. Počítačový program konstruuje pravděpodobnostní model daného žáka; snaží se zmapovat jeho matematické znalosti, jeho způsob uvažování a jeho způsob řešení matematických problémů.

Autoři ověřovali tři varianty počítačové pomoci:

- podle bohatosti a interaktivnosti pomoci: multimediální, interaktivní a velmi propracované formy pomoci žákovi versus jednoduché, převážně slovní formy pomoci,
- podle náročnosti na abstraktní myšlení žáka: celková pomoc stavějící na matematických symbolech a nácviku obecných algoritmů versus celková pomoc stavějící na konkrétních obrazcích a vyžadující manipulaci s názornými objekty (žák pomocí „myši“ obrazce rozděluje, přemísťuje, odebírá atp.),
- podle podoby dílčích nápovědí: sledovali pedagogickou účinnost dvou typů nápovědí – nápovědí s nízkou symboličností versus nápovědi s vysokou symboličností.

Své výzkumy vztahovali k věku žáků, jejich kognitivní úrovni i k jejich pohlaví. Uvedený počítačový systém je dokladem toho, že počítačové programy musejí být vybaveny velmi kvalitní a v mnoha dimenzích odstupňovanou nabídkou pomoci žákovi při učení. Nabídka nejen usnadňuje žákovi další postup při učení se matematice, ale současně formuje jeho způsob uvažování, styl učení a sebepojetí.

6.10 Žákovo záměrné nevyhledávání pomoci

Až doposud jsme se zabývali případy, kdy žák vyhledává vnější pomoc. Ve škole nejsou však vzácné i případy složitější, které jsou uvedeny na obr. 6.1 v jeho pravé části. Týkají se žáků, kteří mají problémy ve škole, vědí, že na jejich vyřešení sami nestačí, vědí, že by potřebovali pomoc, ale přesto pomoc *záměrně nevyhledávají*, *vyhýbají se jí* (*avoiding help-seeking*); nechtějí o ni sami prosit a nechtějí ji ani přijmout, když je nabízena (Ryan; Pintrich; Midgley 2001).

Důvody můžeme hledat v těchto oblastech: ve zvláštnostech žáků samotných, ve zvláštnostech učitelů, ve zvláštnostech spolužáků, ve zvláštnostech sociálního klimatu školní třídy, ve zvláštnostech rodiny.

Velmi podstatné jsou *zvláštnosti samotného žáka*. Nevyhledávání pomoci (i když žák ví, že by ji potřeboval) souvisí zejména s:

- žákovým vnímáním své poznávací kompetence: žáci, kteří pochybují o svým schopnostech, kteří mají špatný prospěch, nechtějí žádat o pomoc, protože by tím dali všem najevo svou neschopnost, riskovali by v očích ostatních lidí svou (již tak pošramocenou) pověst,
- žákovým vnímáním své sociální kompetence: žáci, kteří pochybují, že by dokázali bez komplikací někoho oslovit a „vysoukat ze sebe“ prosbu o pomoc, žáci, kteří mají zábrany v sociálním styku, ti všichni nechtějí riskovat „trapasy“ z odmítnutí nebo ze škodolibých reakcí okolí,
- žákovými důvody, proč se učí (odborně řečeno – žákovou orientací na určitý typ cílů učení): žáci, kteří se učí především kvůli známkám, se soustřeďují na to, jak budou hodnoceni ve srovnání s jinými žáky; bojí se, zda v konkurenci obstojí, zda neudělají chybu, zda nedají najevo slabost, a proto se bojí požádat o pomoc,
- žákovými důvody, proč se chová před spolužáky určitým způsobem (odborně řečeno – žákovou orientací na určitý typ cílů sociálního chování): žáci, kterým nejvíce záleží na tom, aby je jejich spolužáci „brali“, aby si před nimi zachovali dobrý „image“, těžko se budou „doprošovat“ nějaké pomoci. Obdobně žáci, kterým nestačí, že jsou součástí třídy, že je třída přibírá ke všem akcím, ale chtějí patřit mezi špičky, chtějí být „populární“, „zajímaví“, nemohou ohrozit své sociální postavení. Prosba o pomoc se u dospívajících obvykle neslučuje s vysokým sociálním statusem.

Druhá skupina důvodů souvisí s *učitelem* a jím nastolenými *pravidly chování*. Řada příkladů byla uvedena v předchozím textu. Zde jen dodáváme, že záměrné nevyhledávání pomoci může být posilováno výslovnými i nevyslovenými „pravidly hry“: nepřipouštění žákovských dotazů, zdůrazňování jen individuální práce, nepoužívání metod, při nichž žáci musejí v hodině i mimo ni spolupracovat, zakazování vzájemné pomoci.

Mnohé může rovněž ovlivnit *sociální klima dané třídy*. Spoluvytvářejí ho žáci i učitel, ale žák (zejména dospívající žák) dá spíše na mínění spolužáků než učitele. Žák citlivě vnímá, zda je pro třídu přijatelná jeho snaha skutečně porozumět učivu, dozvědět se něco víc, splnit zadaný úkol, anebo zda riskuje. V případě, že je klima třídy příznivé učení, riskuje označení „ubožáka“, „blbečka“, „debila“. V případě, že je klima třídy nepříznivé učení, zase riskuje označení „šplhouna“, „šprta“, „zrádce“, příp. mu hrozí šikanování za „nevhodnou“ aktivitu.

Co udělat pro to, aby se minimalizovaly případy, kdy žák záměrně nevyhledává pomoc?

Dílčí odpověď přináší výzkum J. C. Turnera aj. (2002). Žáci se v hodinách matematiky nevyhýbali učení a vyhledávání pomoci, když (a) v dané školní třídě převažoval kladný vztah žáků k učení, cenilo se úsilí, byla snaha učivu porozumět, ne se ho jen „naučit“, (b) učitel žáky dobře motivoval, byl jim oporou a kladl důraz na rozvoj každého žáka podle jeho možností, nikoli na vzájemné srovnávání.

6.11 Závěry

Přehledová studie se soustředila na žákovu vyhledávání pomoci u druhých lidí v případech, že si neví rady s dalším postupem v učení. Ukázala, že se postupně mění pohled odborníků na žákovu snahu vyhledat účinnou pomoc. Dá se chápat pozitivně jako doklad žákova sebehodnocení, aktivního přístupu k řešení problémů, zaangažovanosti na jejich vyřešení, snahy porozumět učivu, naučit se novým postupům a do budoucna snížit svou závislost na vnější pomoci. Vyhledání pomoci je tedy nejen obecnou strategií zvládání zátěže, ale také učební strategií.

Výzkumy ukazují, že existují dva základní žákovské přístupy k pomoci druhých lidí: tendence vyhledat pomoc a tendence nehledat pomoc, i když žák ví, že by ji potřeboval. Pokud už žák projeví snahu vyhledat pomoc, pak může sledovat dva různé cíle: (a) naučit se novým věcem s dílčí pomocí, s dopomocí (pak mluvíme o autonomním či instrumentálním vyhledávání pomoci), (b) přesunout většinu práce na někoho druhého a tím vyřešit problém s minimem úsilí, aniž se sám něčemu novému skutečně naučí (pak mluvíme o závislém či exekutivním vyhledávání pomoci). Pro výuku obecně a pro matematiku zvláště je důležitější žákovo adaptivní, instrumentální vyhledávání pomoci u druhých lidí.

Naše studie se detailně věnovala dvěma základním zdrojům pomoci žákovi, který je v tísni – učiteli a spolužákům. Diskutovala též otázku, jak diagnostikovat žákovu snahu vyhledat pomoc při učení. Připomněla, že tato snaha je podmíněna situačně, a ukázala na situace, kdy je pomoc vyžadována, a situace, kdy je pomoc naopak zakazována.

Samostatný oddíl byl věnován případům, kdy žáci záměrně nevyhledávají pomoc, i když si uvědomují, že na vyřešení problému sami nestačí. Ukázal, co všechno může determinovat taková – zdánlivě paradoxní – rozhodnutí.

Vyhledání pomoci může žákovi v matematice usnadnit učení v mnoha ohledech. Žák může s vnější pomocí překonat mezery ve svých znalostech, naučit se novým postupům řešení, korigovat své miskoncepce matematických pojmů, konstruovat nové pojmy a rekonstruovat dosavadní pojmy.

Uvedené změny nenastávají automaticky. Je třeba splnit určité podmínky (Webb; Farivar; Mastergeorge 2002). *Získaná pomoc* 1. musí odpovídat žákově potřebě pomoci, 2. musí přijít v pravý čas, 3. musí být věcně správná, 4. musí být elaborovaná tak, aby korigovala nedostatky, nikoli jen sdělovala správný výsledek. Ani to však nestačí. Žák musí být schopen získanou *pomoc využít*. K tomu je třeba splnit – podle citovaných autorů – nejméně tři další podmínky. Žák 1. musí vysvětlení porozumět, 2. musí mít příležitost použít získaného vysvětlení při řešení matematického problému nebo při samostatné práci s úlohou, 3. musí mít příležitost se alespoň pokusit o aplikování toho, co se dozvěděl v rámci pomoci. Jinak řečeno, samo získání pomoci ještě nestačí. Je třeba, aby byla splněna nejméně tato sekvence:

vyhledání pomoci → úroveň získané pomoci → úroveň využité pomoci →
→ výsledek pomoci

Teprve potom je jeden cyklus uzavřen.

Dodejme, že pro rozvoj žáků (nejen v matematice) jsou důležité ještě dva další aspekty učení, které jsme v této studii ponechali stranou, neboť by samy vydaly na zvláštní kapitolu. Pomoc jedinci v zátěžové situaci by měla být koncipována tak, aby se jedinec postupně stal samostatným, nezávislým na vnější pomoci, aby se u něj rozvíjela autoregulace. Pomoc by dále měla být koncipována nikoli jako jednosměrná, nýbrž obousměrná, jako reciproční záležitost. Žáci si musí uvědomit potřebu spolupráce; jsou situace, kdy já poprosím o pomoc tebe, a jsou situace, kdy ty můžeš potřebovat moji pomoc. Obojí je přirozené a není na tom nic ponižujícího, ani povyšujícího.

Kapitola 7

Svět aritmetiky a svět geometrie[1]

Milan Hejný, Darina Jirotková

7.1 Formulace problému

Matematika se zabývá pojmy a vztahy mezi pojmy, které chápeme vně lidského vědomí. Pojem čtverec vnímá matematika jako něco objektivního, nezávislého na konkrétním lidském vědomí. Didaktika matematiky se naproti tomu zajímá spíše o představy matematických jevů nacházejících se ve vědomí člověka. Uvedená odlišnost hraje ve všech našich úvahách důležitou roli. Budeme ji vyjadřovat pomocí polaritních adjektiv *interní (vnitřní)*, resp. *externí (vnější)*. F. Kuřina upozornil na to, že tato terminologie koresponduje s koncepcí Bolzano – Popperových tří světů (viz Hejný; Kuřina 2000), kterou může didaktika matematiky využívat jako pracovní nástroj. První Bolzano – Popperův svět obsahuje „věci", do druhého Bolzano – Popperova světa, do světa lidských vědomí, náleží jevy označované jako interní, do třetího světa, do světa kultury, náleží intelektuální jevy označované jako externí. Obohacení této koncepce o svět školy lze najít v novější práci (Hejný; Kuřina 2001, kap. 5).

Aritmetika a geometrie tradičně představují dva základní pilíře školské matematiky a z hlediska historie matematiky byly tyto oblasti jediné části matematiky až do nástupu diferenciálního počtu. Oblast školské aritmetiky je tradičně zaměřena na číslo, základní početní operace, strukturu čísel, rozšiřování přirozených čísel na čísla racionální a záporná a rovnice. Tuto strukturu výuky aritmetiky nacházíme již nejméně dvě století bez vážnější změny. Naproti tomu vyučování geometrii doznalo jenom v posledním století výrazných změn. Popsané skutečnosti vyvolávají potřebu blíže tyto změny prozkoumat, vysvětlit jejich příčiny a případně i naznačit další možný vývoj.

[1]Některé pasáže této kapitoly jsou převzaty z (Jirotková 2001a).

Cílem této kapitoly je charakterizovat současný stav vyučování matematice na základních a středních školách v ČR z hlediska polarity aritmetiky a geometrie.

Naše metodologie nevychází ze speciálně realizovaných experimentů. Podkladem pro výzkum jsou osnovy, učebnice, učební materiály, ale zejména pak osobní i zprostředkované zkušenosti pokrývající období od „modernizace“ v šedesátých letech 20. století až do dnešních dnů. Z různých zahraničních odborných pramenů, které byly ke studiu využity, uveďme alespoň některé (Polya 1954, Freudenthal 1973, Krygowska 1977, Erdniev 1978, Noddings 1990, Gray; Tall 1994, Glasersfeld 1995).

K řešení uvedeného problému použijeme komparativní metodu, pomocí níž hlouběji prozkoumáme příbuznosti a odlišnosti školské aritmetiky a geometrie. Naše pozornost se zaměří zejména na objekty, s nimiž tyto disciplíny pracují (oddíl 7.2), nástroje, které se při práci používají (oddíl 7.3), a edukační strategie jejich prezentace žákům (oddíl 7.4). Jak jsme již zmínili, vztah aritmetiky a geometrie je nerovnovážný. Aritmetika, která je opřená o pevnou strukturu, se jeví spíše jako stabilní disciplína, ale geometrie značně podléhá převládajícím pedagogickým a didaktickým názorům příslušné doby. Proto začínáme naše úvahy u aritmetiky, abychom mohli rozvinout myšlenky vázané ke geometrii v komparaci ke světu aritmetiky.

7.2 Objekty

První významná odlišnost světa aritmetiky a geometrie se vztahuje k objektům, z nichž je příslušná struktura budována.

7.2.1 Objekty světa aritmetiky

Společenství základních aritmetických objektů – přirozených čísel – je silně vnitřně provázáno. Každý jedinec tohoto společenství je charakterizován a vymezen právě svým postavením a vztahem k dalším číslům. Tak například číslo 5 se začíná budovat ve vědomí dítěte pomocí říkanky jedna-dva-tři-čtyři-pět (cos to Janku cos to snědl). Přichází do vědomí jako poslední slovo říkanky, ze které se stane nástroj na evidenci počtu předmětů od 1 do 5. Říkanka je též východiskem pro porozumění jevu pořadí i pro porozumění výrazům „je hned za“, „je bezprostředně před“. Z této říkanky se později ve vědomí dítěte vytvoří relace „větší než“ a „menší než“. Všechny tyto vztahy ukazují na bytostní provázanost všech „obyvatel“ světa aritmetiky. Zrušení existence jediného z přirozených čísel by vedlo ke kolapsu celého společenství.

Od nástupu do školy si žák ve svém vědomí buduje svůj svět aritmetiky prostřednictvím různorodých mentálních operací: určování a porovnávání počtu i pořadí, přičítání nebo odčítání jedničky, sčítání a odčítání dvou, později i více čísel, hledání největšího nebo nejmenšího čísla ve skupině několika čísel, evidování významných prvků (nuly a jedničky) a významných podskupin (sudá čísla, dvouciferná čísla, čísla dělitelná například třemi, prvočísla apod.). Nejprve jsou mentální aritmetické operace projekcí manipulativní činnosti dítěte a jsou závislé na světě věcí, na prvním Popperově světě. Číslo 2 jako takové dostává ve vědomí dítěte význam pouze tehdy, když je vázáno na nějaké předměty. Poměrně rychle se ale svět aritmetiky, vynořující se ze světa reálných zkušeností dítěte, začíná osamostatňovat a zbavovat své závislosti na světě věcí. Tento proces vede k abstraktnějšímu pojímání objektů světa aritmetiky. Dítě již rozumí vztahu $5 + 6 = 11$, aniž by potřebovalo reprezentovat tuto operaci v reálném světě. V tomto vztahu dítě vnímá jako objekty pouze čísla 5, 6 a 11, binární operaci „+“ vnímá jako činnost a znak „=“ jako výsledek činnosti, jako ukončení procesu hledání.

Osamostatňování aritmetického světa umožňuje abstraktnější manipulaci s čísly. Opora, kterou měl svět aritmetiky při svém vzniku v reálném světě, však získáním abstraktnějšího pohledu neztrácí na důležitosti. Předčasná izolace světa aritmetiky od reálného světa je silně nežádoucí, neboť vede k umrtvování a deformaci aritmetického světa, žákovo poznání tohoto světa se stává formálním (Hejný; Stehlíková 1999, s. 65).

7.2.2 Objekty světa geometrie

Situace v geometrii je odlišná. V návaznosti na myšlenky P. Vopěnky (2003) píše M. Hejný (1997):

> Společenství geometrických objektů nemá, na rozdíl od aritmetiky přirozených čísel, ostré hranice. Je věcí názoru pozorovatele, zda bude daný objekt shledán jako obyvatel tohoto světa. Geometrie nemá nástroj, kterým lze vytvořit všechny geometrické objekty. Neexistuje žádné univerzální pouto, kterým jsou kterékoli dva takové objekty navzájem propojeny. Svět geometrie se jeví jako svět pozoruhodných individualit, z nichž každá po podrobnějším prozkoumání vydá svědectví o jedinečnosti svého bytí. Je pravda, že některé z těchto individualit se shlukují do jasně vymezených a lépe organizovaných tříd (pravidelné mnohostěny, konvexní mnohoúhelníky, izometrie), ale taková organizovanost se nevztahuje k celému společenství geometrických objektů.

Aritmetické znalosti jsou pro praktický život člověka důležitější než znalosti geometrické. Geometrie však nabízí dítěti větší paletu možností kultivace jeho intelektu. Jedná se především o prostor pro tvořivost. Ve světě aritmetiky se tvořivost zaměřuje na odhalování různých pravidelností a vztahů mezi již existujícími objekty. V geometrii však může dítě objevovat i nové objekty, s nimiž se zatím nesetkalo. Porovnání světů aritmetiky a geometrie lze metaforicky přirovnat ke společenství starověké Sparty a Athén. První, totalitní, jasně organizovaná, vojensky sevřená a řízená neměnnými zákony, druhá demokratická, organizovaná spíše vnitřním zápalem tvůrců a hledáním hodnot pravdy a krásna.

I když se omezíme pouze na dvourozměrný prostor, tedy na geometrii roviny, nenajdeme žádný univerzální princip, který by „občany“ tohoto společenství pevně propojil. O nalezení takových principů usilovalo v historii mnoho skvělých myslitelů a každý úspěch v tomto směru představoval posun v kulturním a intelektuálním vývoji. Snad nejvýznamnější takové posuny v historii geometrického myšlení byly koncepce Euklida, Descarta a Kleina.

- Strukturální koncepce planimetrie vybudovaná před 2 300 lety Euklidem (překlad Servít 1907) omezuje svět geometrických objektů na útvary lineární a „kružnicové“. Vychází z pojmů bod, čára, přímka, úhel dvou čar, meze, útvar, shodnost a za princip propojení těchto pojmů bere logiku, tedy axiomatickou stavbu, kde z „evidentně pravdivých“ skutečností se ryze logickou cestou budují další a další, stále méně a méně evidentní nové pravdy. Studium Euklidovy geometrie vnímá čtenář nejprve jako poznávání světa geometrie, ale po jisté době začíná pociťovat, že svět geometrie je pouze prostředí. To podstatné, co se zde odehrává, je zasvěcování do hledání jevů, odkrývání pravdy a nabývání jistot.

  Moderní verze této koncepce pocházející od D. Hilberta (1902) upravuje soubor základních objektů, nikoliv však jejich charakter a způsob stavby geometrie. Dodejme, že i pro Hilberta byla konstrukce této struktury úzce spojena s jeho hlubokým pronikáním do lidského myšlení a dokazování, do odhalování problematiky dokazatelného a nedokazatelného.
- R. Descartes a P. Fermat (viz Fiala 2000) objevili způsob, jak lze geometrické objekty převést na objekty aritmetiky. Například bod se stává uspořádanou dvojicí reálných čísel, přímka lineární rovnicí, kružnice speciální kvadratickou rovnicí apod. Optimizmus způsobený v první polovině 17. století prudce narůstajícími aritmetickými poznatky o řešení rovnic vedl ke skvělé myšlence převést řešení náročných planimetrických úloh na úlohy aritmetické. R. Descartovi se tak skutečně podařilo vyřešit do té doby nevyřešenou Pappovu úlohu (Hejný aj. 1989, s. 396–400). Myšlenka propojení aritmetiky a geometrie byla dále rozvíjena mnoha směry. Avšak snaha svěřit celou geometrii do péče světa aritmetiky byla nabourána objevením nových geometrických jevů, které nebylo možno uchopit aritmeticky.
- Třetí přístup ke geometrickému světu podal F. Klein v roce 1872 ve slavném Erlangenském programu. Hlavní Kleinova myšlenka tkví v přesunu pozornosti z geometrie objektů na geometrické transformace. Jednotícím principem geometrického světa se stal pojem grupy transformací, tedy pojem, který svou podstatou náleží do světa algebry.

Ze tří uvedených koncepcí je pro vyučování geometrii na základní škole nejdůležitější koncepce Euklidova. Avšak i tato koncepce je již příliš vyspělá a k poznání geneze geometrického myšlení je potřebné zkoumání období geometrické struktury před Euklidem.

Hluboké analýzy této *protogeometrické struktury* udělal P. Vopěnka (1989) ve své antropomatematické koncepci geometrie, jejímž filosofickým východiskem je Husserlova fenomenologie. Za základní objekty považuje ty, které nazývá *osobnostmi*. Vymezuje je následujícím způsobem:

> Osobností nějakého jevu je to, co z nějakého jevu činí samostatného jedince, co jej osamostatňuje a zároveň sjednocuje tím způsobem, že si ho přisvojuje – a již nic více. (Odvozeno od slov „osobný“ – osamělý, „osobiti si“ – přisvojiti si.) Nemůžeme se o osobnosti jevu přesvědčit, můžeme ji jevu pouze přiznat.
>
> (Vopěnka 1989, s. 19, 20)

Myšlenka analytické geometrie R. Descarta a P. Fermata je ve školské matematice prezentována jako metoda řešení geometrických problémů aritmetikou. Domníváme se, že z didaktického hlediska neméně významná je i opačná interpretace: vizualizace aritmetických jevů (např. lineární závislost je vizualizovaná přímkou). Konečně obě tyto interpretace vzájemně úzce souvisejí a vytvářejí most mezi světem geometrie a světem aritmetiky.

V této studii, stejně jako při práci se studenty, vycházíme z Vopěnkovy koncepce geometrie a geometrického světa. Používání Vopěnkových nástrojů nám však klade otázky ryze didaktické, které P. Vopěnka ve svých zkoumáních neanalyzuje. Příkladem je slovo osobnost. Na rozdíl od P. Vopěnky se snažíme určit, zda danému geometrickému objektu daný žák osobnost již přiznal nebo ne. O řešení tohoto problému se pokusila D. Jirotková (2001a, s. 81).

7.3 Nástroje

Druhá významná odlišnost světa aritmetiky a geometrie se vztahuje k nástrojům, jimiž je příslušná struktura budována.

7.3.1 Nástroje světa aritmetiky

Aritmetika, jak víme, může z čísla 0 a aritmetické operace „přičítání jedničky“ vytvořit celou množinu $\mathbf{N}_0$, a dále pak přirozeným způsobem další aritmetické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení se zbytkem, resp. relace následníka, uspořádání a dělitelnost. Využitím rovnic lze pak množinu $\mathbf{N}_0$ rozšířit na nadmnožiny $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$. V aritmetickém světě tedy existují nástroje, jimiž lze z jediného prvku (číslo 0) a jediné operace (následník) za pomoci jazyka množin a logiky tento svět vytvořit a strukturovat. Z didaktického hlediska je možné nástroje aritmetiky rozdělit do tří skupin.

Do první skupiny patří *realizace aritmetických operací a relací* vycházející z manipulativní nebo kinestetické činnosti žáka. Například: $5 - 2 = 3$ je situace odebrání dvou jablíček ze skupiny pěti jablek nebo sestoupení o dvě patra z pátého patra dolů; pojem $\frac{1}{5}$ vznikne krájením koláče na pět stejných dílů nebo spravedlivým rozdělení dvaceti bonbónů mezi pět kamarádů; představa záporného čísla vznikne při putování tajemnou chodbou, která stoupá i klesá a dostává se pod hladinu vchodu (viz kap. 19).

Do druhé skupiny náleží *budování systému aditivních a multiplikativních spojů* (např. $7 + 6 = 13$, $6 \cdot 9 = 54$) a *ekonomizace kalkulativních procesů*, výrazně vyžívající silnou strukturu poziční desítkové soustavy (písemné a mentální algoritmy zejména s vícemístnými čísly). Obě tyto vrstvy poznatků se vkládají do dlouhodobé paměti žáka. Spoje jako jednorázové informace, algoritmy jako procedurální návody. Dodejme, že izolace činností této druhé skupiny od činností první skupiny vede v mnoha případech k formálním poznatkům (viz kap. 2).

Třetí skupinu nástrojů otevírání aritmetického světa tvoří *řešení problémových situací*. Jsou to jak situace sémantické (např. Mám pět korun, potřebuji osm korun, kolik korun mi schází?), tak situace strukturální (např. $5 + x = 8$, $x = ?$). První typ těchto problémových situací tvoří slovní rovnice, druhý pak rovnice zapsané znakově. Existující stav vědomostí našich žáků[2] ukazuje na nepoměr jejich schopnosti řešení těchto dvou typů problémových situací. Řešení znakově formulovaných problémů je výrazně úspěšnější než řešení slovních rovnic. To podle našeho soudu ukazuje, že výše zmíněná izolace druhé skupiny nástrojů od první ve vyučování matematice na našich školách je nežádoucí skutečností.

7.3.2 Nástroje světa geometrie

Svět geometrie se dítěti otevírá prostřednictvím jevů, kterým dítě přiznává statut *geometrické osobnosti*[3], s nimiž začíná provádět mentální operace. Příkladem takové operace je interní reprezentace manuální činnosti stavění věže z kostek, kutálení míče, překládání papíru i kinestetické aktivity jako orientované pohyby rukou, nohou i celého těla. Představy, které se ve vědomí dítěte v průběhu této činnosti budují, jsou důsledkem procesu *interiorizace* jevu, který P. Vopěnka (1989, s. 26) nazývá *jev průvodní*. Například dítě staví z kostek věž. Ta někdy spadne, někdy se udrží. Opakovaná manuální zkušenost vytváří ve vědomí dítěte poznání, že věž bude pevná, jestliže „stěny dvou kostek ležících nad sebou dobře přiléhají“. Dítě toto poznání neumí formulovat a ani nezná pojmy, které by k formulaci byly potřebné. Jeho poznání je *poznáním v činnosti* (knowledge-in-action), ale toto již obsahuje zárodek budoucího pojmu stěna jako průvodního jevu osobnosti kostka. Podobně vzniká ve vědomí dítěte představa jevu oblosti při kutálení

[2]Podle výzkumu TIMSS (Hejný; Kuřina 2001, s. 11–12).

[3]Jednou z prvních takových osobností je čtverec. Nejprve dítě tento objekt v různých situacích vidí a slyší jeho jméno. Pak je vyzváno, aby ze sirek vytvořilo čtverec. Dítě žádný čtverec v okolí nevidí a jestliže tuto úlohu dobře vyřeší, pak představa čtverce, kterou realizuje pomocí sirek, přichází z jeho vědomí. Řekneme, že pro dané dítě je pojem čtverec osobností.

míče, představa jevu přímosti nebo pojmu úhlopříčka při překládání papíru, propedeutika pojmu směrnice při stoupání do schodů nebo při sáňkování apod.

Vopěnkovy pojmy osobnost a její jevy průvodní jsou již několik let používány jako účinný nástroj didaktiky matematiky, zejména při studiu vynořování se geometrického světa ze světa každodenní zkušenosti dítěte a jeho osamostatňování. V dosavadních úvahách (Hejný 1993, Perenčaj 1989, Perný 1999) byly jevy průvodní využívány pro charakteristiku objektu, který je osobností. Při studiu geometrických představ žáků pracujeme kromě vazby *osobnost a její jevy průvodní* i s inverzní vazbou *jev a třída osobností, pro něž je daný jev jevem průvodním*. Popsaný inverzní postup se může objevit i v žákově poznávání geometrického světa, kde výrazný průvodní jev jedné osobnosti generuje celou třídu dalších objektů, později i osobností.

Například zkoumání osobnosti čtverec nás přivede k průvodnímu jevu strana. Tento pojem, který se jako jev průvodní objeví i u některých dalších osobností jako obdélník, rovnostranný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, . . . , může vést žáka k propojení tohoto pojmu na celou třídu objektů, které dostanou jméno mnohoúhelníky.

Jiný příklad, kdy se jev průvodní stává východiskem celé třídy objektů, je osová souměrnost. Ta vede k vytvoření obecného pojmu útvary osově souměrné.

Ve společenství geometrických objektů tak vznikají různé podskupiny, které pak studujeme jako svébytné geometrické komunity. Každou z nich můžeme obvykle zkoumat různými myšlenkovými postupy. Například pojem pravidelný mnohoúhelník, který je vlastně názvem pro celou komunitu objektů, z nichž některé jsou pro žáka osobnostmi, můžeme vnímat jako sérii shodných rovnoramenných trojúhelníků vzájemně k sobě přiložených jako na kousky nakrájený kruhový dort nebo jako skupinu bodů pravidelně rozložených na kružnici nebo také jako mnohoúhelník, jehož každým vrcholem prochází jeho osa souměrnosti.

Geometrie ovšem není pouze poznávání tvarů, osobností a jejich jevů průvodních. Podstatu geometrie tvoří vztahy, které mezi těmito objekty zákonitě platí. Například poznání, že v každém trojúhelníku je součet jeho vnitřních úhlů přímým úhlem, nebo že trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na kružnici sestrojené nad úsečkou AB jako průměrem, je pravoúhlý, jsou hluboké pravdy geometrického světa. Právě odhalování těchto pravd, jejich zdůvodňování, vzájemné provazování a využívání (např. u geometrických konstrukcí) tvoří první podstatu školní geometrie.

Druhou podstatu této geometrie tvoří jevy míry, které provazují svět geometrie se světem aritmetiky. Nejedná se zde samozřejmě o měření jednotlivostí, jak je tomu třeba v zeměměřičství, ale o hledání měřičských procedur universálně platných pro celou třídu geometrických jevů.

Uvedené provázání světů geometrie a aritmetiky však není jediné. Hlubší vazba obou těchto disciplín je dána skutečností, že obě jsou součástí matematiky. V obou se pracuje s přesně vymezenými pojmy, s velice podobnými objevitelskými procesy, s obecně platnými pravdami, které jsou dokazovány stejnými principy logiky.

Dodejme, že v tomto směru byla geometrie první disciplínou vůbec, která již 300 let př.n.l. dosáhla vysoký stupeň strukturovanosti a logické sevřenosti.

7.4 Edukační strategie

Vzhledem k odlišnosti objektů i nástrojů světa aritmetiky a geometrie se pochopitelně bude odlišovat koncepce vyučování těmto dvěma matematickým disciplínám.

7.4.1 Strategie vyučování aritmetice

Výuka aritmetiky na základní škole byla v našich zemích, přinejmenším od Tereziánské reformy, orientována na aritmetické operace, relace a rovnice. Rčení „počítá, jako když bičem mrská" bylo běžně používáno na označení výtečného žáka v matematice. Cíl nacvičit co nejlépe paměťové spoje a algoritmy zatlačil do pozadí cíl využít matematiku pro intelektuální rozvoj žáka. Tento nedostatek je již od konce 19. století (např. Šimerka 1881) předmětem úvah pedagogů. Narůstající disharmonie mezi realitou vyučování matematice na 1. stupni základní školy zaměřenou na kalkulativní dril a představami matematiků o charakteru své disciplíny vedla v šedesátých letech minulého století k celosvětové iniciativě, která pronikla do škol téměř všech vyspělých zemí v sedmdesátých letech pod názvem „moderní matematika" nebo „množinová matematika". K protagonistům této iniciativy patřili vynikající matematici jako A. N. Kolmogorov, G. Pappy, H. Freudenthal, E. Čech a další. V první etapě modernizačního procesu ve světě byla tato iniciativa velice úspěšná. Bohužel po několika málo letech zde došlo ke stagnaci a nadšení žáků i učitelů začalo ustupovat rutině, nudě a strachu. Vysvětlení je jednoduché. Nový obsah učiva, množiny, učitelé neznali a museli se sami vzdělávat. Jejich nejistota je nutila pracovat se značným nasazením bez možnosti rutinní práce. Jejich tvůrčí vztah k matematice indukoval ve třídách klima hledání a radosti z objevů. Víme, že po krátkém období vzestupu utrpěla tato iniciativa silnou porážku a vyučování aritmetice se vrátilo k původní koncepci nácviků a drilů aritmetických operací.

Uvedený celosvětový neúspěch přinesl didaktikům matematiky hluboké poučení, že totiž určujícím prvkem kvality vyučování není obsah, ale metoda práce učitele, jeho nadšení a tvořivost. Přímým důsledkem tohoto zjištění byl výrazný posun orientace didaktiky matematiky. Jestliže ještě v šedesátých letech 20. století byla didaktika matematiky zaměřena především na obsah, je tato disciplína v osmdesátých letech již silně orientována na procesy poznávací, řešitelské, pojmotvorné a komunikační. Výsledky, kterých nově orientovaná didaktika matematiky dosáhla, jsou slibné. Naše poznatky o tom, jak žák, ale i učitel vnímá, buduje i používá matematiku, se v posledních dvaceti letech zmnohonásobily. Projekce nových myšlenek do škol však probíhá pomalu. Proto do popředí zájmu didaktiků v posledních několika letech vstupuje učitel. Otázka, jak ovlivňovat a měnit pedagogické přesvědčení současných i budoucích učitelů směrem k upřednostňování konstruktivistických přístupů, je v současnosti velkou výzvou všem didaktikům matematiky.[4]

Úvahu o modernizaci jsme vázali na aritmetiku, ale závěry, k nimž uvedená úvaha vedla, totiž nutnost hledání cest ovlivňování pedagogického přesvědčení učitele, se týkají celé matematiky, tedy i geometrie.

7.4.2 Strategie vyučování geometrii

Jak již bylo řečeno, geometrie dosáhla ve starém Řecku velmi vysoké úrovně a vzdělání v této disciplíně bylo považováno za nezbytnou průpravu pro královnu věd – filosofii. Nápis na slavné Platónově akademii *Nevzdělaný v geometrii nevstupuj* byl toho výmluvným důkazem. Geometrie skýtala prostředí k „trénování" mozku, rozvíjení schopnosti dedukce, odhalování souvislostí, tvoření, formulování a ověřování hypotéz, argumentování apod. V Tereziánské reformě byla výuka geometrie orientována prakticisticky a logická struktura této disciplíny se v podstatě do základní školy nedostala. Diametrálně jiná situace byla v anglickém školství 19. století, kde původní Euklidovy *Základy* byly nejužívanější učebnicí geometrie. V českých zemích, zejména v Praze, byla na konci 18. a začátkem 19. století intenzivně rozvíjena deskriptivní geometrie, což ovlivnilo i pozici geometrie na základních a středních školách. Učebnice z první republiky (např. Bydžovský; Vojtěch 1912) zdůrazňovaly význam geometrických konstrukcí, ale i dovednost přesného rýsování a numerických výpočtů. To vše bylo zřejmě ovlivněno prudkým rozvojem strojírenského, ale i jiného průmyslu, který potřeboval vyšší a tvořivé geometrické vzdělání absolventů příslušných škol.

V první polovině 20. století byla tedy u nás geometrie váženou disciplínou, protože pestrost a bohatost geometrického světa nabízela rozvoj těch potencí žáka, které byly tehdejší školou (ale i společenskou potřebou) zdůrazňovány. Byly to schopnosti tvořivě zkoumat danou situaci, efektivně organizovat soubor jevů, vynalézavě hledat řešitelské strategie, přesně konstruovat požadované objekty, zobecňovat evidované jevy, odhalovat a zdůvodňovat vztahy mezi objekty, řešit složité úlohy z oblasti strojírenství, stavebnictví, zeměměřičství, navigace, astronomie, ... Když později pod Bourbakistickým vlivem nabyla v matematickém světě absolutní moc množinově-strukturální koncepce, stala se geometrie pro školskou matematiku přítěží, protože epizodální charakter geometrických poznatků bylo možno strukturovat až na úrovni Kleinova pojetí geometrie. K tomu mohlo dojít nejdříve na gymnáziu. Geometrie názoru, *geometrie prvního a druhého porozumění* (Vopěnka 1989, s. 18, 27), byla s ideou množinové struktury neslučitelná. To vedlo k útlumu výuky geometrie a v mnoha zemích dokonce k úplnému vytlačení této disciplíny ze škol.

[4] V této publikaci se uvedenému problému z hlediska výzkumu věnuje kap. 17.

U nás, v zemi silné geometrické tradice, došlo v době modernizace matematiky k posunu koncepce výuky geometrie na všech úrovních od geometrie názoru a spekulace k axiomatické stavbě geometrie. Na prvním stupni to znamenalo ukotvení geometrie v základních pojmech axiomatické stavby: bod, přímka, incidence, relace mezi, shodnost, rovnoběžnost, okolí. Je pochopitelné, že žákovské představy o těchto pojmech byly často deformované, protože neměly oporu v životní zkušenosti žáka. Navíc neposkytovaly úlohový materiál, který by motivujícím způsobem provokoval zvídavost žáků. Tato situace byla do jisté míra petrifikována nejenom učebnicemi a osnovami, ale i způsobem přípravy budoucích učitelů. Ještě v druhé polovině osmdesátých let 20. století byla axiomatická stavba planimetrie těžištěm geometrické přípravy budoucích učitelů elementaristů a i učebnice pro 1. stupeň základní školy byly zpracovány tak, aby co nejvíce vyhovovaly modernizačnímu heslu *přiblížit školskou matematiku matematice vědě*. Důsledky této změny nepochybně přispěly k tomu, že geometrické znalosti našich žáků základních i středních škol byly namnoze čistě formální. Axiomatický přístup k výuce geometrie byl realizován v duchu transmisivního vyučování. Pokus o konstruktivistický způsob vyučování strukturálně pojaté geometrie učinil M. Hejný (1979). Tato iniciativa však nenašla odezvu v komunitě učitelů, a to zřejmě proto, že představovala zásadní změnu koncepce výuky geometrie. K odklonu od axiomatického budování školské geometrie a k návratu k původní a obohacené koncepci výuky došlo až začátkem devadesátých let. Poznatky didaktiky matematiky o mechanizmu poznávacího procesu (Cobb 1987, Davis 1987, Lawrel 1990, Thagard 2001) začaly intenzivněji pronikat mezi autory osnov, učebnic i učitele. V poslední době byla zvýrazněna polarita a komplementarita dvou kognitivních principů, procesu a konceptu. Na základě analýzy E. Graye a D. Talla (1994) ukázal M. Hejný (1999, s. 52) na důležitost proceptuálního transferu, ke kterému dochází ve vědomí žáka, když procesně vnímanou situaci uchopí konceptuálně nebo konceptuálně vnímanou situaci uchopí procesuálně. Právě tento druhý směr od konceptu k procesu je v geometrii daleko frekventovanější než v aritmetice. Proto absence geometrických úvah oslabuje žákovu schopnost rozvíjet tuto důležitou psychickou potenci.

Myšlenky konstruktivizmu (viz kap. 1), které opětovně zdůrazňují potřebu rozvíjení tvořivosti, schopnosti organizovat soubor jevů, hledání řešitelských strategií, abstrahování atd., přispěly k renesanci geometrie názoru. Hlavním protagonistou této iniciativy u nás je F. Kuřina (Kuřina 1989, 1996, 2000, Kuřina; Štrynclová; Cachová 1999). Školní geometrie se opět postupně stává přejícným prostředím pro rozvoj uvedených psychických potencí žáka. Podle našeho přesvědčení je školská geometrie především prostředím pro různorodou činnost žáka, oblastí podněcující rozvoj žákova myšlení a příležitostí k prolínání krásy výtvarné a logické. Geometrie díky své vizuální informaci přispívá ke kultivaci představ nejen geometrických. O tom svědčí příklady vizualizace některých aritmetických a algebraických pojmů jako nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, dělitelnost čísly $2, 3, 5, \ldots$, zbytková třída modulo n, řešení diofantovských rovnic apod. například pomocí čtverečkovaného papíru. Geometrie je vedle teorie čísel tradiční prostředí pro rozvoj argumentačního myšlení. Konečně geometrie, více než kterákoliv jiná oblast matematiky, propojuje životní zkušenost žáka, teoretické poznání a verbální přemostění obou těchto oblastí.

Podle našich průzkumů u studentů přicházejících na fakultu i u mnoha praktikujících učitelů přetrvává z geometrie strach více než z aritmetiky a převládá představa, že geometrie je pouhou snůškou pouček, návodů a vzorců. Mnoho žáků a někdy i učitelů se domnívá, že vše je nutno si zapamatovat, jinak nelze řešit geometrické problémy. Velmi často je geometrie zaměňována za rýsování, protože hodnocení kvality obrázku je dobrým nástrojem pro známkování žáka. Podle výsledků dotazníkového šetření studenti přicházející na naši fakultu studovat primární pedagogiku očekávají, že rýsování bude důležitou součástí výuky geometrie.

Bariéru mezi geometrií a ostatními matematickými disciplínami podporují i kurikula základní školy a následně i mnohé učebnice tím, že ji zřetelně oddělují od aritmetiky či algebry a zužují ji pouze na trénink jistých geometrických pojmů, rutinního dosazování do vzorců a konstruování pomocí pravítka a kružítka. Neláska většiny učitelů ke geometrii se samozřejmě promítá do jejich přístupu k její výuce, která je pak ryze transmisivní. Máme evidenci o tom, že se někteří učitelé zdárně vyhýbají geometrii i po několik let výuky matematiky. Jejich postoj k vyučované disciplíně se samozřejmě velice snadno přenáší dále na jejich žáky či studenty. Politické zásahy jako je například ubírání hodin předmětu činí pak z tohoto problému začarovaný kruh. Cítíme, že rozetnout tento začarovaný kruh je jedním z našich úkolů ve vysokoškolské přípravě budoucích učitelů. Jako účinný nástroj se ukazuje použití netradičních geometrických prostředí umožňujících různé typy manipulace jako předstupně následné interiorizace. Sem patří například Wollringova (2001, 2003) koncepce využití origami (Kratochvílová; Jirotková 2003), naše koncepce využití čtverečkovaného papíru (Hejný; Jirotková 1999) a také naše edukativní modifikace hry SOVA (kap. 14; Jirotková, 1999, 2001a, 2001b, 2002a; Jirotková; Littler, 2002a, 2003a, 2003b).

7.5 Závěr

V této kapitole byl sumarizován dynamický vývoj koncepce vyučování matematice na základních a středních školách v uplynulém půlstoletí, ale zejména v současnosti, a to v polaritě aritmetika – geometrie. Komparace byla rozložena do tří částí týkajících se objektů, nástrojů a edukační strategie. Závěry analýz ukázaly na možné rezervy ve vyučování geometrii. Bylo naznačeno, jak se autoři ve své pedagogické práci snaží tyto rezervy využívat.

Kapitola 8

Sémiotická analýza v didaktice matematiky

Filip Roubíček

8.1 Úvod

Problematika reprezentací je jedním z bohatě zpracovaných, a přesto stále aktuálních témat – je bezesporu „evergreenem“ didaktiků matematiky. Existuje celá řada teorií, které uplatňují různé přístupy. *Sémiotický přístup* (Roubíček 2003), který představuje zcela nový pohled na problematiku reprezentací, vychází ze sémiotiky – teorie zkoumající vlastnosti znaků a znakových soustav. Sémiotika našla své uplatnění nejprve v lingvistice, logice a estetice, ale později se stala jedním z vědních oborů a zároveň nástrojem vědy. S matematikou ani didaktikou matematiky nebyla sémiotika dlouhou dobu spojována, přestože práce s různými sémiotickými (znakovými) systémy reprezentace je pro matematiku typická. Právě v rozmanitosti sémiotických reprezentací R. Duval (2001) nachází rozdíl mezi kognitivní činností v matematice (jako vědecké disciplíně i jako vzdělávacím předmětu) a tou, která je požadována v jiných oborech. Tvrdí, že rozvoj sémiotických reprezentací byl hlavní podmínkou pro rozvoj matematického myšlení.

8.2 Formulace problému

Vyučování matematice je pro žáky příležitostí seznámit se s jinými sémiotickými systémy reprezentace, než je přirozený jazyk. Užití několika různých sémiotických systémů je nejen charakteristickým rysem poznávání v matematice, ale i nutným předpokladem pro její uplatnění při řešení reálných problémů. Ukazuje se, že porozumět matematice znamená mimo jiné umět reprezentovat matematické objekty a vztahy mezi nimi pomocí různých sémiotických systémů a umět tyto reprezentace transformovat a interpretovat. Dovednost pracovat s různými sémiotickými systémy reprezentace a schopnost vidět vztahy mezi nimi jsou tedy předpokladem (ne-li podmínkou) pro poznávání matematických zákonitostí a úspěšné řešení matematických úloh.

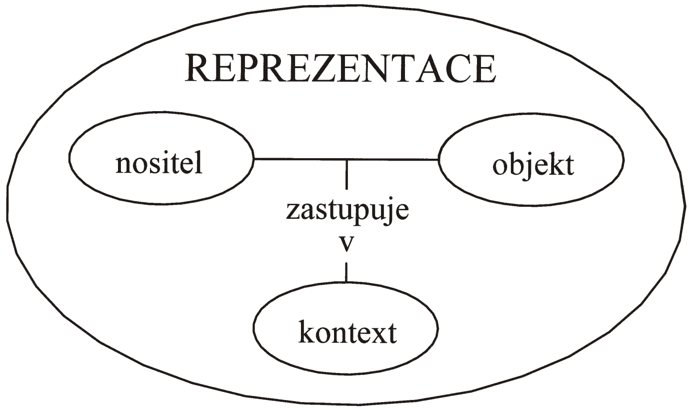
Vyučovací proces se stává efektivním, pokud není narušován příliš častým výskytem komunikačních překážek. Tyto překážky vznikají v situacích, kdy se žák a učitel rozcházejí v interpretaci užité reprezentace nebo kdy nenacházejí pro komunikaci společnou adekvátní reprezentaci. Příčiny vzniku některých komunikačních překážek ve vyučování matematice můžeme odhalit sledováním dějů, kdy žáci vytvářejí, transformují nebo interpretují sémiotické reprezentace matematických objektů. Stejně tak tomu je ve vyučování geometrii, které se vyznačuje užitím specifických, především vizuálních prostředků reprezentace.

Na základě výše uvedených poznatků byl výzkumný problém formulován jako *hledání vhodných metod pro popis a analýzu sémiotických systémů reprezentace, s nimiž žáci pracují ve vyučování geometrii, a vymezení fenoménů provázejících tyto činnosti*. Na mysli máme zejména jevy, které se týkají vytváření, interpretace a transformace sémiotických reprezentací geometrických objektů a jejich užití v komunikačních a kognitivních procesech. Jeho nedílnou součástí je rovněž kultivace dovedností žáků reprezentovat geometrické pojmy a poznatky. Neméně důležité jsou otázky, jak reprezentovat matematické objekty, aby užité prostředky reprezentace podněcovaly u žáků vytváření správných představ, nebo jak zformulovat zadání úlohy, aby bylo pro žáky dostatečně srozumitelné.

8.3 Teoretický rámec

Termín reprezentace je užíván ve dvou základních významech. Reprezentací se rozumí jednak *materiální uspořádání znaků* (jako jsou diagramy, schémata apod.), které se vztahuje k jiným entitám nebo které modeluje různé mentální procesy, jednak určité *uspořádání poznatků* v mysli člověka (Janvier 1987). Jiné vymezení pojmu reprezentace vychází z Peirceovy koncepce znaku (Peirce, 1931–1935, 1958) jako *něčeho, co pro někoho něco zastupuje z nějakého hlediska nebo v nějaké úloze*. Reprezentace (viz schéma na obr. 8.1) je tedy dána vztahem mezi reprezentující složkou (nositelem reprezentace) a reprezentovanou složkou (objektem reprezentace), který je determinován určitým kontextem. Pro takto vymezený pojem reprezentace používáme označení *sémiotická (znaková) reprezentace*.

Existence tří uvedených složek je pro reprezentaci klíčová. Reprezentace (znak) není jen materiální nositel, jak bývá někdy nesprávně interpretováno. Například list papíru zastupuje obdélník, ale není sám o sobě reprezentací obdélníku, nýbrž jeho nositelem, a to za podmínky, že vjem listu vyvolá v interpretově mysli ideu obdélníku. Nenastane-li tento účinek, nelze z pohledu tohoto subjektu hovořit o reprezentaci. To, co jeden subjekt vnímá jako reprezentaci, druhý subjekt jako reprezentaci vnímat nemusí.



Obr. 8.1 Schéma sémiotické reprezentace

Pojetí reprezentace jako toho, co reprezentuje (bez jasného vymezení objektu a kontextu), sice usnadní klasifikaci reprezentací, ale postupy z něj vycházející mohou při analýze žákovských prací selhat. Určitá izolovanost reprezentace od jeho objektu je přijatelná v případě reprezentací, které lze označit jako konvenční, tj. vázané určitou dohodou a společné určité skupině uživatelů. Ovšem i mezi těmito konvenčními reprezentacemi existují případy, kdy je jejich užití závislé na kontextu. Kontext determinuje užití reprezentace, určuje, který objekt je zastupován. Například písmeno $\mathbf{N}$ označuje v aritmetice množinu všech přirozených čísel (symbol), v geometrii může být užito pro označení bodu (index), ale může také představovat středově souměrný obrazec (ikon).

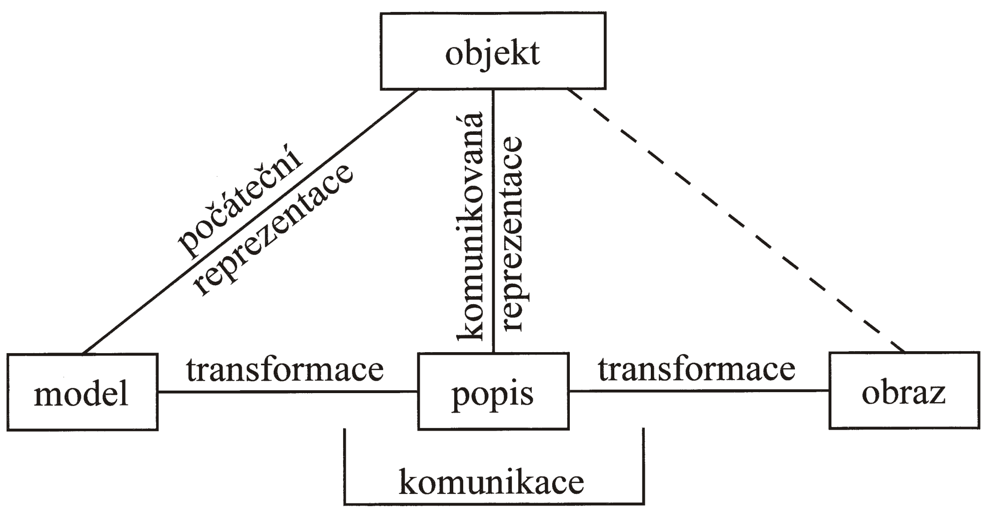
R. Duval (1995) hovoří o tom, že není možné porozumět matematice, jestliže se nerozlišuje objekt od jeho reprezentace. K tomu, aby matematický objekt nebyl ztotožňován s jeho reprezentací, je třeba, aby žák uměl reprezentovat matematický objekt alespoň ve dvou různých sémiotických systémech. F. Hitt (1998) poukazuje na to, že pro osvojení matematického pojmu je nezbytné nejen užití různých sémiotických reprezentací (mluví o tzv. trojité reprezentaci matematických pojmů, která zahrnuje algebraickou, numerickou a grafickou reprezentaci), ale také propojení (tj. transformace) mezi těmito reprezentacemi.

Pro kognitivní činnosti v matematice je nezbytná nejen schopnost reprezentovat matematický objekt v různých sémiotických systémech, ale rovněž schopnost nacházet spojitosti mezi těmito reprezentacemi a umět je transformovat. Reprezentace, které odpovídají zkušenostem a poznání žáka, jsou pro jeho porozumění problému nezbytné. „Většina žáků, kteří mají na základní škole problémy s matematikou, si nevytváří žádný typ reprezentací problémů, které jsou jim ukládány. . . . dojem pochopení problému žák nezíská z učitelova vysvětlování, ale na základě transformace, kterou při poslechu učitele provádí.“ (Bertrand 1998, s. 85.) Transformace reprezentací tedy plní ve vyučování velice důležitou funkci.

8.4 Metodologie

První experimenty zaměřené na zkoumání reprezentací trojrozměrného objektu prostřednictvím jejich transformace (přeměny) umožňovaly sledovat pouze výsledek tohoto procesu. Při jejich analyzování se ukázalo, že interpretace žákovy reprezentace daného objektu bez záznamu průběhu transformace je zatížena různými dohady. Další experimenty byly proto koncipovány tak, aby bylo možné získat co nejvíce informací o průběhu transformace, kterou žák uskutečňuje, a tím objektivněji interpretovat žákovy reprezentace. Jako optimální pro tento účel byla shledána situace, kdy je transformace uskutečňována prostřednictvím komunikace dvou žáků.

Experimentální situace spočívala ve vytvoření obrazu trojrozměrného objektu na základě verbální deskripce jeho modelu (viz obr. 8.2). Byla navržena tak, aby žáky nejen zaujala, ale především je motivovala k přirozené a bezprostřední komunikaci. Proto byla role experimentátora záměrně potlačena. Experimentátor pouze pozoroval a do komunikace mezi žáky nijak nezasahoval.



Obr. 8.2 Schéma transformace „model – popis – obraz"

Metoda sémiotické analýzy, která byla použita pro zpracování záznamu transformace reprezentací uskutečněné prostřednictvím verbální komunikace, spočívá v uplatnění sémiotického přístupu ke zkoumaným jevům a v jejich popisu užitím poznatků sémiotiky (Roubíček 2003). Sémiotickou analýzou rozumím zpracování experimentálního materiálu provedením následujících kroků:

1. Určení úrovně analýzy:

   (a) sémiotická analýza perceptibilní reprezentace,
   (b) sémiotická analýza transformované reprezentace,
   (c) sémiotická analýza komunikované reprezentace.

2. Vymezení reprezentačních, transformačních nebo komunikačních faktorů.
3. Vymezení komponent znaků a jejich popis:

   (a) ze sémantického hlediska,
   (b) ze syntaktického hlediska,
   (c) z pragmatického hlediska.

4. Určení vztahu mezi integrálním znakem a jeho komponentami.
5. Stanovení základních charakteristik užitého systému reprezentace.
6. Určení typu uskutečněných transformací.
7. Vymezení hlavních kroků průběhu transformace a jejich popis.
8. Stanovení základních charakteristik transformačního procesu.
9. Identifikace fenoménů.
10. Klasifikace zjištěných fenoménů.

Z hlediska dimenze semiózy se rozlišují tři úrovně sémiotické analýzy: syntaktická, sémantická a pragmatická. Každá z uvedených úrovní se zabývá jednou z relací mezi činiteli znakového procesu. Na *syntaktické úrovni* jsou zkoumány znaky a vztahy mezi nimi (tj. syntax), na *sémantické úrovni* vztah znaku k jeho objektu (tj. význam znaku) a na *pragmatické úrovni* vztah znaku k interpretovi (tj. užití znaku). Výsledky experimentu byly analyzovány na všech jmenovaných úrovních, ale vzhledem k jejich vzájemnému prolínání nejsou v analýze přímo vymezeny.

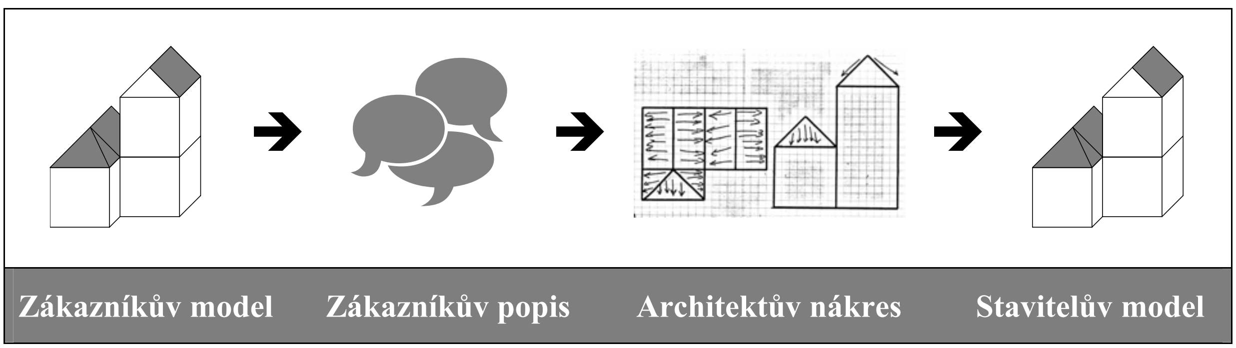
Při analýzách experimentů zaměřených na zkoumání reprezentací a jejich transformací se ukázalo, že uvedené úrovně jsou v některých případech příliš obecné. Proto byly pro účely zkoumání sémiotických reprezentací geometrických objektů vymezeny tři speciální úrovně sémiotické analýzy. Tyto úrovně byly voleny tak, aby obsáhly tři základní znakové procesy: *vytváření*, *přeměna* (transformace) a *sdělování* (komunikace) reprezentací. Jmenované procesy byly zkoumány na základě *perceptibilní* (tj. smysly vnímatelné) *reprezentace*, kterou v případě transformačního procesu označujeme jako *transformovaná reprezentace* a v případě komunikačního procesu jako *komunikovaná reprezentace*.

Sémiotická analýza perceptibilní reprezentace, jako nejnižší úroveň sémiotické analýzy, je zaměřena na zjištění způsobů a prostředků, jimiž žák reprezentuje geometrické objekty a vztahy mezi nimi. Součástí této úrovně je také určení dominantních či jinak specifických reprezentantů. Mezi faktory, které ovlivňují podstatnou měrou proces perceptibilní reprezentace a jeho výsledek, patří mentální reprezentace subjektu, jeho sémiotická kompetence (tj. znalost pravidel znakové soustavy – skladby, významu a užití jednotlivých znaků) a situační kontext (tj. situace, v níž je objekt reprezentován).

Další úrovně jsou rozšířeny o rozbor transformačního procesu, a to z hlediska jeho výsledku v *sémiotické analýze transformované reprezentace* a z hlediska jeho průběhu v *sémiotické analýze komunikované reprezentace*. Uvedené úrovně na sebe navazují a zohledňují hlediska syntaktická, sémantická i pragmatická. Pro analýzu transformované reprezentace byly vymezeny tři hlavní faktory, a to percepce reprezentovaného objektu, sémiotická kompetence a situační kontext. V případě komunikované reprezentace byly hlavními faktory znakové uchopení objektu, situační kontext a komunikační kompetence.

8.5 Experiment „Stavíme dům“

V rámci zkoumání problematiky transformací sémiotických reprezentací geometrických objektů byl uskutečněn experiment „Stavíme dům“ (Roubíček 2002). Předmětem zkoumání byla posloupnost transformací „model – popis – obraz – model“ (viz obr. 8.3). Transformace „model – obraz“, spočívající ve vytvoření obrazu trojrozměrného objektu na základě slovního popisu jeho modelu, se ukázala být nejzajímavější částí celého experimentu. Uvedená transformace byla analyzována na základě videozáznamu komunikace dvou žáků. Pro experiment byli vybráni tři komunikativní žáci 8. ročníku jedné základní školy v Praze.

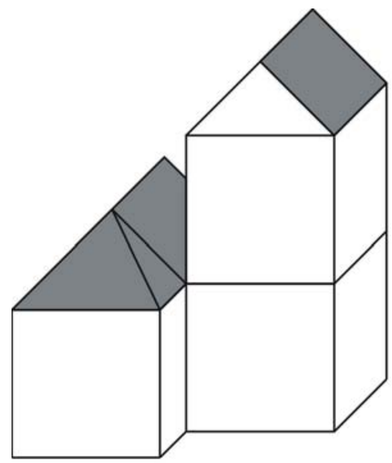


Obr. 8.3 Posloupnost transformací

Experiment byl založen na spolupráci tří žáků v rolích zákazníka, architekta a stavitele. Jejich úkolem bylo předat si prostřednictvím verbálního popisu a nákresu co nejpřesněji informaci o podobě domu a dojít ke shodě zákazníkova a stavitelova modelu.[1] Zákazník a architekt byli od sebe odděleni zástěnou tak, aby na sebe neviděli. Zákazník sestavil ze stavebnice model domu (viz obr. 8.4) a slovně jej popsal architektovi. Architekt se nesměl zákazníka v průběhu popisu na nic ptát, mohl popis pouze přerušit nebo požadovat jeho zopakování. Architekt na základě zákazníkova popisu vytvořil nákres a stavitel sestavil podle architektova nákresu opět model. Žáci měli k dispozici listy papíru s centimetrovou čtvercovou sítí, centimetrová měřítka a dvě stavebnice, které tvořily papírové modely krychlí, kvádrů, trojbokých hranolů, čtyřbokých jehlanů a těles z nich složených.

[1] Aktivita podobného typu, hra SOVA, je popsána v kap. 14.

Záznam komunikace mezi zákazníkem a architektem, která trvala asi šest minut, je rozdělen na několik částí podle četnosti výskytu sledovaných fenoménů. Výpovědi jsou psány v uvozovkách a označeny písmenem s číslem (např. Z1); **Z** znamená zákazník, **A** architekt, **E** experimentátor a číslo udává pořadí výpovědi. Přepis jednotlivých výpovědí je doplněn poznámkami vztahujícími se k tvorbě architektova pracovního nákresu a čtyřmi obrázky, které znázorňují základní fáze konstrukce nákresu tak, aby bylo možné sledovat průběh komunikace z pohledu zákazníka i architekta.



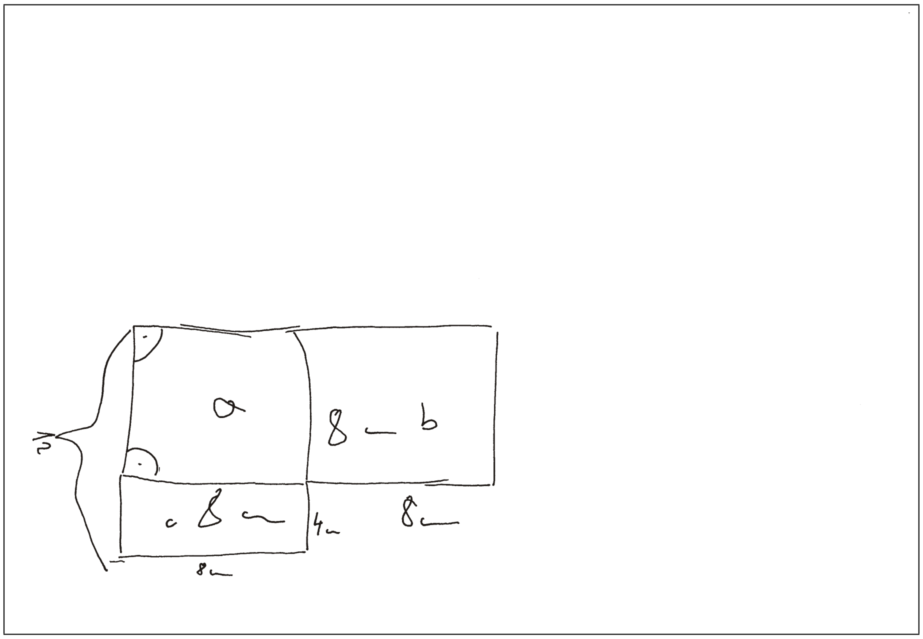
Obr. 8.4 Zákazníkův model domu

Zákazník jako mluvčí kóduje *integrální znak* domu (modelu) do souboru verbálních znaků. Architekt jako příjemce jeho verbální popis dekóduje a vytváří si mentální reprezentaci domu. Poněvadž zákazník nedovede vyjádřit podobu domu jedním verbálním znakem (jedním slovem), musí jej rozložit na části tak, aby jej mohl znakově uchopit. Základní komponentou je pro něj „půdorys“, jak naznačuje výpověď Z1.

Z1 „Začnu půdorysem. . . “
A1 „No.“
Z2 „Nakresli si prostorově čtverec. . . osm krát osm.“
A2 „No.“
Z3 „Chápeš to?“
A3 „Jo.“

A kreslí v levé dolní části listu papíru čtverec. Dva vnitřní úhly označuje jako pravé a ke dvěma sousedním stranám připisuje údaj „8 cm“ (viz obr. 8.5).

Užití znaku „půdorys“ vede k názoru, že popis bude veden v duchu pravoúhlého promítání (dále jen PP), ale výpověď Z2 to nepotvrzuje, ba naopak se zdá, že preferovanou zobrazovací metodou bude volné rovnoběžné promítání (dále jen VRP). Znak „půdorys“ podle toho, jak jej **Z** použil, lze interpretovat jako „základ“ domu. Výpověď Z2 má procesuální charakter. **Z** se snaží ulehčit úkol **A** tím, že ho orientuje při výběru zobrazovací metody. Výpověď Z3 má z hlediska komunikace sociální charakter. **Z** si patrně ověřuje, zda **A** správně dekódoval verbální znak „prostorově čtverec“, a tím sleduje míru porozumění **A** jeho znakové deskripci.



Obr. 8.5 Architektův pracovní nákres I

A nereagoval na možný podnět k užití VRP, neboť nakreslil útvar, který po všech stránkách splňuje ikonický znak čtverce. **A** zřejmě inklinuje k užití PP (jak bylo možné pozorovat v průběhu celého experimentu) a vyjádření podoby domu pomocí jeho půdorysu mu vyhovuje. Přestože **Z** neužívá ve své výpovědi délkových jednotek, **A** interpretuje údaj správně – rozměry uvádí v centimetrech.

Z4 „Označ si jej ‚a‘.“
A4 „No.“

A píše doprostřed nakresleného čtverce písmeno „a“ (viz obr. 8.5).

Z5 „Napravo od něj, na takovou tu šikmou nalevo, napoj další jakoby čtverec osm krát osm a označ si jej ‚b‘.“
A5 „No.“

A přikresluje zprava ke čtverci „a“ tři strany druhého čtverce, k jedné straně připisuje údaj „8 cm“ a doprostřed píše písmeno „b“ (viz obr. 8.5).

Z přijímá již na počátku komunikace velmi racionální opatření – *indexaci*. Čtverce označuje písmeny „a“ a „b“, tj. používá *indexových znaků*, aby mohly být snadno identifikovány. Všimněme si také slova „jakoby“ ve výpovědi Z5. Slovo „jakoby“ naznačuje, že čtverec, který má **A** nakreslit, nevypadá docela tak jako čtverec, který má **A** běžně v představě, ale že vlivem užití VRP dochází k jeho deformaci.

Z6 „A před čtverec ‚a', jakoby k tobě. . . “
A6 „Ano.“
Z7 „. . . si udělej obdélník osm krát čtyři.“

A přikresluje k vodorovné straně čtverce „a“ (směrem k dolnímu okraji papíru) tři strany obdélníku a k jeho delší straně připisuje údaj „8 cm“ a ke kratší „4 cm“ (viz obr. 8.5).

Použití slovních vyjádření „před čtverec“ a „jakoby k tobě“ potvrzuje domněnku, že **Z** nerozlišuje dostatečně ostře mezi dvojrozměrnou (dále jen 2D) a trojrozměrnou (dále jen 3D) reprezentací objektu. Usiluje sice o popis půdorysu (2D reprezentace), užívá však verbálních znaků spjatých s 3D reprezentací. Kdyby se **Z** omezoval pouze na rovinu, použil by patrně místo slova „před“ slovo „dole“ nebo „pod“.

Sousloví „jakoby k tobě“ představuje *explikační komplement* k předcházejícímu nejednoznačnému vyjádření „před čtverec“. Slovo „před“ znamená pro **A** zjevně něco jiného v případě, že se na krychli dívá zpředu, než představuje-li si pohled na ni shora. Slovem „jakoby“ je opět zvýrazněna nedokonalost vyjadřování **Z**. Zdá se, že si ji uvědomuje, proto se snaží nacházet doprovodná doplňková vyjádření blíže specifikující jeho popis. **A** vstupuje do **Z** popisu stručnou výpovědí A6 ve smyslu „rozumím, pokračuj“ (jde tedy o sociální výpověď). Forma výpovědi Z7, jež je dokončením výpovědi Z6, koresponduje s popisem „čtverců“ s tím rozdílem, že „obdélníku“ není přiřazen žádný indexový znak.

A7 „Můžu se ho na něco zeptat?“
E1 „Nemůžeš se na nic ptát.“
Z8 „Já ti to teda vysvětlím ještě podrobnějc. Jo?“
A8 „Hm.“
Z9 „Vlastně ten obdélník osm krát čtyři, tak ta hrana osm. . . “
A9 „No.“
Z10 „. . . vlastně přilejhá k tomu čtverci ‚a'. Chápeš?“
A10 „Jo.“
Z11 „Takže vlastně vznikne ti úplně nalevo strana dlouhá dvanáct.“
A11 „Jo.“

A dokresluje do obrázku zleva svorku s číslem 12 (viz obr. 8.5).

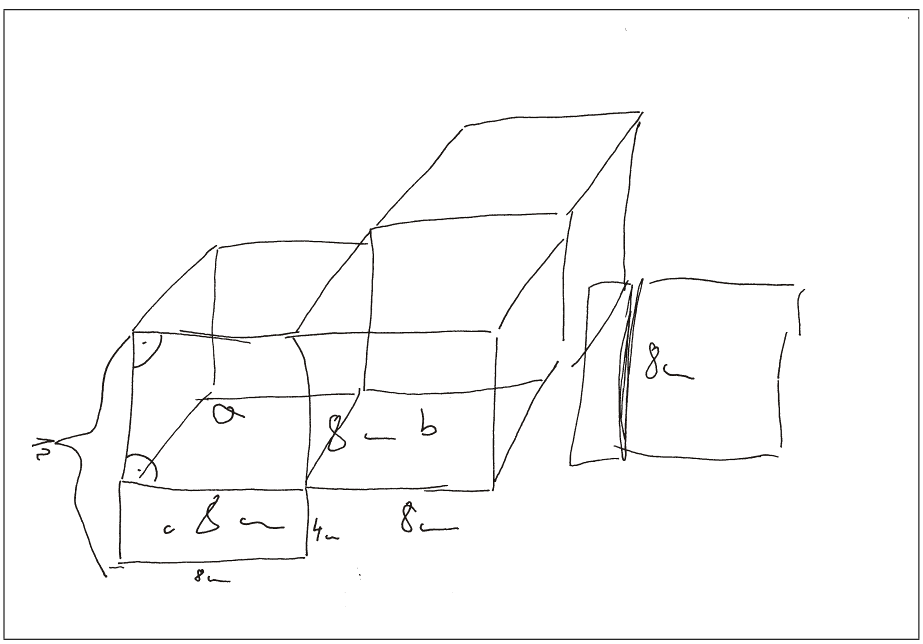
A výpovědí A7 adresovanou **E** sděluje potřebu odstranit určitou nejasnost, kterou blíže nevymezuje. Cíleným dotazem oslovuje **E**, ten však jeho výzvu neakceptuje z důvodu striktního dodržení předem daných pravidel. **Z** reaguje na negativní postoj **E** nabídkou podrobnějšího vysvětlení. **Z** předpokládá, že nejasnost, kterou **A** dal najevo svým dotazem, souvisí s umístěním naposledy popisovaného objektu. Proto údaj o poloze „obdélníku“ vzhledem ke „čtverci ‚a'“ upřesňuje výpovědí Z10, kterou lze chápat jako vyjádření skutečnosti, že jmenované objekty tvoří šestiúhelník, a na ni navazující výpovědí Z11, v níž sděluje délku jedné strany tohoto šestiúhelníku.

Z12 „Máš to?“
A12 „Jo.“
Z13 „Dobrý. Tak. A teď ze všech si nahoru vyveď výšku osm. Všechny jsou stejný – osm. Vzniknou vlastně dvě krychle a jeden kvádr.“
A13 „Hm.“

A kreslí z vrcholů čtverců „a“ a „b“ čáry, které považuje za úsečky narýsované pod úhlem 45° a znázorňující viditelné hrany krychlí ve VRP. Napravo od obrázku načrtává čtverec a v něm několikanásobnou čáru s údajem „8 cm“ (viz obr. 8.6).

Z14 „Máš?“
A14 „Jo.“
Z15 „Teď máš vlastně krychli ‚a‘, krychli ‚b‘, krychli ‚c‘, teda kvádr ‚c‘.“
A15 „Jo.“
Z16 „Tak na krychli ‚b‘ . . . “
A16 „Ano.“
Z17 „. . . dej tu samou krychli.“
A17 „Ehm? No, v pohodě.“

A dokresluje neviditelné hrany krychlí „a“, „b“ a zakresluje krychli, která je umístěna za krychlí „b“ při pohledu zepředu (viz obr. 8.6).



Obr. 8.6 Architektův pracovní nákres II

Z ukončil popis tvaru a konfigurace dolních podstav těles spočívajících na podložce a ve smyslu užití metody VRP dává **A** instrukci pro znázornění těchto těles. Slovo „výška“ je v jeho výpovědi užito jako verbální znak pro úsečku, která je kolmá na podstavu a má krajní bod v jejím vrcholu.

Výpověď Z13 má procesuální charakter, což naznačuje určitou stylizaci **Z** do role **A** (vytváření nákresu domu ve VRP). Uvedená fáze komunikace mezi **Z** a **A** je pozoruhodná především tím, že v ní vrcholí určitá nejednotnost v použití zobrazovacích metod. Tato nejednotnost nevede zatím ke komunikačnímu kolapsu, patrně proto, že geometrickým prostředím byla doposud rovina (půdorysna).

A je nucen radikálně změnit svou strategii v okamžiku popsaném výpovědí Z13. Formulace **Z** „ze všech si vyveď výšku“ pro něj představuje neřešitelný problém v případě, že by se dále držel znakové reprezentace objektu v PP. Změna strategie pro něj, kupodivu, nepředstavuje časově náročnou operaci. Zdá se, že disponuje dobrou prostorovou představivostí, protože jeho reakce je rychlá, správná a naprosto nestandardně překvapivá: Zobrazovaný objekt otočí ve své představě podle osy obsahující jednu z podstavných hran a při nadhledu zprava využije informace „vyveď výšku“, pro niž užije znakového vyjádření charakteristického pro VRP. Tento „trik“ mu umožňuje uvést svoje zobrazení do souladu s předcházejícím popisem **Z** („šikmá strana“). Výšky zobrazuje jako úsečky svírající úhel 45° s vodorovnými hranami podstavy. Popsaný postup mu dovoluje využít beze zbytku dosavadní náčrtek. Uvedenou operací dosáhl **A** „nápravy“ cesty, kterou původně volil při transformaci verbálního popisu **Z** do 2D znakové reprezentace.

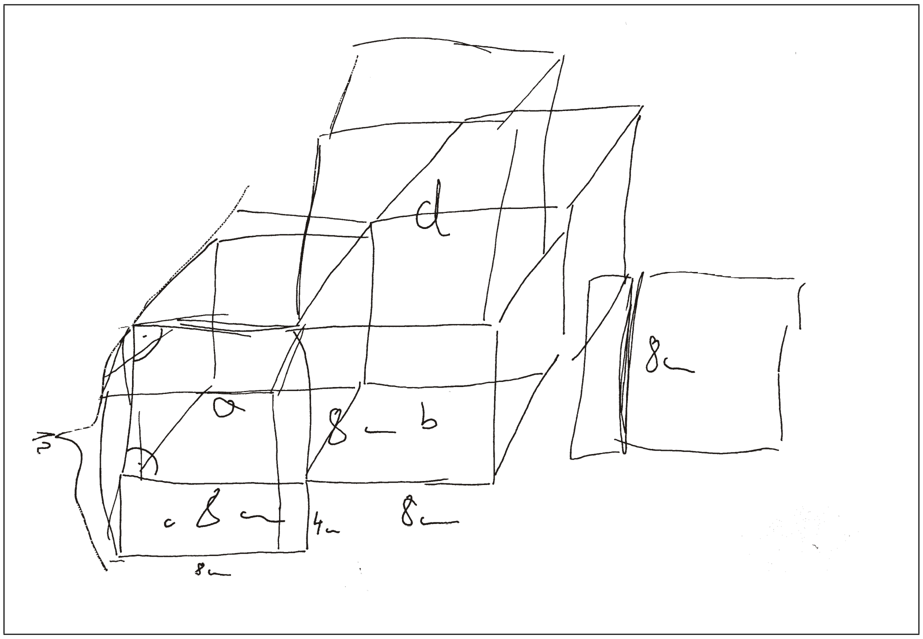
Popsaná operace je, podle našeho názoru, náročná především z hlediska práce s mentálními obrazy vnímaných znakových struktur. Otočení kolem osy v 3D reprezentaci bezprostředně doprovázené transformací ve 2D reprezentaci (z PP do VRP) je výjimečným jevem. Žák provádí transformaci znakové reprezentace z verbální podoby zasazené do 3D reprezentace, realizuje ji v požadované 2D reprezentaci (formou PP) a bezprostředně na to (v rámci představ) transformuje tuto znakovou reprezentaci opět do 2D, ale formou VRP. Procesuálně koncipovaný popis zřejmě donutil **A** korigovat svůj postup tímto způsobem, jakmile pochopil, že nemůže dál pokračovat vzhledem k rozdvojení kontextů, v nichž se pohybuje on a **Z**.

Popsaná situace opět naznačuje, že žáci inklinují k určité zobrazovací metodě. **A** používá PP ve všech svých nákresech, dokonce i nákres, který byl nucen opravit z PP na VRP, doplňuje náčrtkem v PP (představujícím nárys). Výška je reprezentována v nákresu **A** dvěma způsoby. Vyjádření „vzniknou vlastně dvě krychle a jeden kvádr“ ve výpovědi Z13 naznačuje, že **Z** nevnímá model při popisování jako celek, nýbrž jako sjednocení stavebnicových dílů. Přestože se nejedná o složitou konfiguraci těles představující obtížně popsatelný geometrický objekt, k jejich percepční integraci nedochází. Vzniká otázka, jak by se **Z** zachoval v případě, že by model byl tvarově identický, byl však přitom složen z většího počtu stavebnicových dílů (např. krychle by byla nahrazena dvěma kvádry). Rozklad modelu na jednotlivé stavebnicové díly je patrný i ve výpovědi Z15.

Z reakce **A** na popis **Z** (výpověď Z17) lze soudit, že znaková transformace mentální reprezentace popisovaného objektu se stává pro **A** náročnější, nedochází však zatím k žádnému kolapsu. **A** zobrazuje model v nestandardní poloze (záměna půdorysu s nárysem), což vyžaduje překódování popisu **Z**.

Z18 „A teď už o střechách.“
A18 „Počkej. . . . No.“

A překresluje nákres (dokresluje hrany kvádru „c“ a překresluje krychli „d“) tak, že model je zobrazen VRP ve standardní poloze (viz obr. 8.7).



Obr. 8.7 Architektův pracovní nákres III

Výpovědi Z18 a A18 představují v komunikaci mezi **A** a **Z** významný přelom. **Z** vstupuje do druhé etapy popisu. Doposud popisoval dekomponované části modelu domu představované geometrickými útvary, jež dobře zná z vyučování geometrii (kvádr, krychle, čtverec, obdélník). V následující etapě se musí pokusit o popis geometrických útvarů, které nejsou modelovány elementárními tělesy (dům se střechou).

A si uvědomuje, že podoba nákresu je pro další sledování popisu modelu nevyhovující, proto svůj nákres upravuje v souladu s popisem **Z**. Překresluje nákres ve VRP tak, aby odpovídal standardní poloze modelu, a to i za cenu vzniku nepříliš přehledného nákresu. **A** se v něm však orientuje bez větších potíží. To svědčí o jeho dobré prostorové představivosti.

Z19 „Na krychli ‚a‘ dej střechu. Teď se ti ji pokusím popsat. Je to úplně normální střecha, jaká je na barácích. Vlastně do toho tvaru trojúhelníku ten štít má. Jo?“
A19 „Počkej. Znova. Zopakuj.“

Z první větou výpovědi Z19 oznamuje, který objekt bude popisovat a kde má být umístěn. Tato výpověď má opět procesuální charakter (jako například výpověď Z16+17). Popis **Z** vychází z představy, že model on sám právě sestavuje. Sousloví „normální střecha“ je pro **Z** znakem reprezentujícím kolmý hranol s podstavou tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku. **Z** patrně považuje uvedený znak za jednoznačný a srozumitelný (vzhledem k tomu, že tento znak byl žáky užit v předcházejících částech experimentu). Svědčí o tom i dodatek (čtvrtá věta výpovědi Z19), ve kterém **Z** uvádí pouze základní charakteristiku tvaru střechy. **A** však nevnímá komunikovaný znak jako jednoznačný, proto žádá o bližší informace.

Z20 „Úplně normální střecha. Znáš střechu? Vlastně ten její štít, ta strana, ta podstava vlastně. . . “
A20 „No.“
Z21 „. . . je trojúhelník.“
A21 „Podstava je trojúhelník?“
Z22 „Tak jestli víš, co je podstava?“
A22 „Nevím.“ (směje se)
Z23 „Podstava je takový to, co má ty tři strany. . . Víš, co myslím?“
A23 „Ne.“

Z je reakcí **A** překvapen. O tom svědčí jeho otázka „Znáš střechu?“. Jeho popis střechy se však jeví jako značně chaotický. Neužívá termínu trojboký kolmý hranol. Buď s ním neumí pracovat, nebo verbální znak „normální střecha“ ztotožňuje se znakem trojbokého kolmého hranolu a z hlediska kontextu, v němž probíhá komunikace, považuje tento znak za srozumitelnější. Snaží se blíže popsat tvar podstav, přičemž trojúhelníkovou podstavu nazývá nejprve „štít“, pak „strana“ a nakonec „podstava“. Jev, kdy **Z** ve své výpovědi užívá místo verbálního znaku „stěna“ znak „strana“, který je srozumitelný z hlediska hovorové řeči, matematicky však patří do 2D kontextu, nazveme *znaková konfuze*. Zaměřme se zatím jen na posloupnost slov „štít“, „strana“ a „podstava“. Můžeme v ní totiž sledovat určitou *gradaci znakové reprezentace*: **Z** vychází původně z hovorového označení reálného objektu a postupně jej zpřesňuje užitím matematických termínů.

Může se zdát, že **Z** nepřináší výpovědí Z20 a Z21 v podstatě nic nového ve srovnání s výpovědí Z19, nebereme-li v úvahu jeho sdělení, že podstava popisovaného tělesa je trojúhelník. Z reakce **A** na toto sdělení je patrné, že „štít“ a „podstava“ nejsou pro něj ekvivalentním vyjádřením. **A** zřejmě rozumí podstavou pouze tu stěnu tělesa, která je v horizontální poloze. **Z** je opět překvapen reakcí **A** (o čemž svědčí výpověď Z22). **A** si uvědomuje, že termínu „podstava“ nerozumí, a nerozpakuje se svou neznalost přiznat. **Z** sice zná zmíněný termín a umí jej správně použít, avšak není schopen jej srozumitelně definovat. Výpovědí Z23 chce sdělit, že podstava je trojúhelník (obecně mnohoúhelník).

Jev, ke kterému v dialogu Z20 až A23 dochází a který je zapříčiněn kontextuální nejednotností komunikantů, nazveme *komunikační disonance*. Znaky, které **Z** užívá ve své výpovědi, jsou korektní a odpovídají jeho pohledu na situaci; pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník je podstavou kolmého trojbokého hranolu. **A** vnímá podstavu patrně jako útvar, který je částí horizontální roviny, proto je pro něj neřešitelným problémem ztotožnit trojúhelníkovou podstavu trojbokého hranolu a čtvercovou podstavu krychle.

Příčina neporozumění ze strany **A** tkví v tom, že odlišnost polohové deskripce dané situace vyvolává kontextuální nejednotnost obou komunikantů. **Z** v tom nevidí problém, proto není poloha jím popisované podstavy v jeho výpovědi nijak specifikována. Za podstatnou charakteristiku svého sdělení považuje tvarovou stránku popisovaného objektu. **A** se naopak soustřeďuje na jeho polohovou stránku ve smyslu vlastní interpretace pojmu „podstava". **Z** neví, čemu **A** nerozumí, proto hledá jiný způsob, kterým by popsal tvar střechy. Nesoulad v komunikaci mezi **A** a **Z** zatím nevede ke *komunikačnímu kolapsu*.

Z24 „Tak zkusíme jinak. Tak tu krychli ‚a' jakoby opticky rozděl na tu horní část, horní čtverec. . . na dvě části. Jo? . . . Prostě ho rozděl na dvě části."
A24 „Ale jak?"
Z25 „No. Že z toho vznikne obdélník osm krát čtyři. . . "
A25 „Ano."
Z26 „. . . nalevo a napravo, ne k tobě a vzadu. Jasný?"
A26 „Jo. Mám."

A kreslí střední příčku horní stěny krychle „a" (viz obr. 8.8).

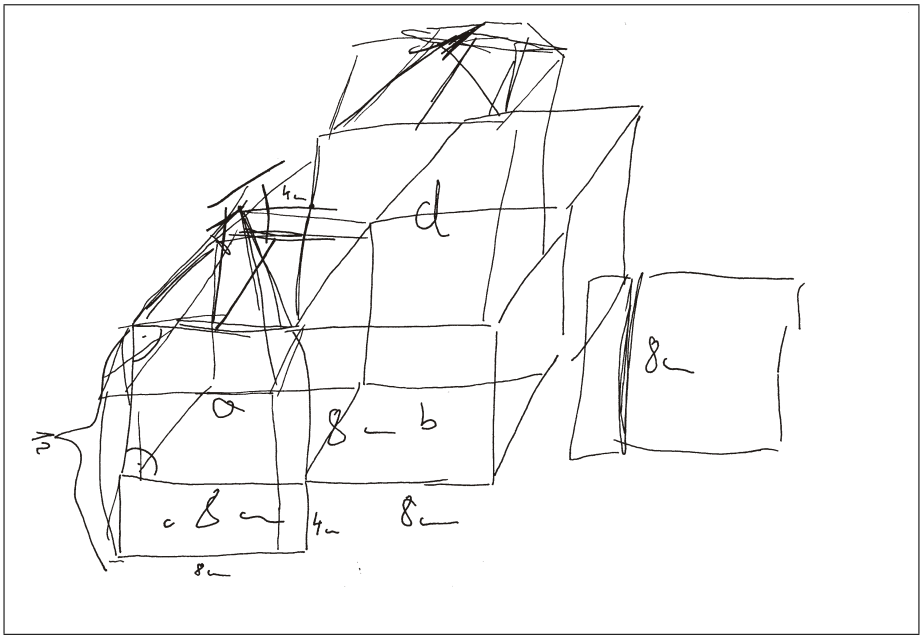
Z27 „A teď vlastně tu čáru, co tam máš, vyzvedni. . . "
A27 „No, vyzvednul jsem ji."

A kreslí čáru nad krychlí „a" (rovnoběžnou se střední příčkou horní stěny) (viz obr. 8.8).

Z28 „. . . vlastně do výšky čtyři. Ano? Chápeš to? A teď tam máš vlastně takovou jakoby nahoře a tu takhle sesuň dolů jakoby z těch konců jejích a máš z toho střechu."
A28 „Jo, už jsem tě pochopil."

A načrtává pomocné čáry a hrany hranolu (střechy) na krychli „a"; zakresluje kótu „4 cm" (viz obr. 8.8).

Z se snaží, jak vyplývá z výpovědi Z24, odstranit nesoulad v komunikaci pomocí mentálního modelování a instruktivní popis považuje pravděpodobně za optimální řešení vzniklé situace. **Z** má sice jasnou představu, jak při popisu daného objektu postupovat, ale jeho verbální vyjádření jsou nepřesná. Dopouští se ve svých výpovědích myšlenkových skoků a některé údaje nutné pro pochopení obsahu výpovědi vynechává. **Z** chtěl svou výpovědí Z24 zřejmě dát pokyn k rozdělení horní podstavy krychle „a" na dva shodné obdélníky. **A** však hodnotí obsah výpovědi Z24 jako nesrozumitelný a požaduje jasnější instrukce. **Z** si neuvědomuje, že se ve svém popisu dopouští řady nepřesností. Teprve výpovědí Z25 říká, jaký tvar mají části rozdělené čtvercové stěny a jakou mají polohu. Užití verbálních znaků „k tobě a vzadu" naznačuje 3D kontext. **Z** se stylizuje do role **A**. Dekódování jeho pokynů „tu čáru. . . vyzvedni" a „takovou jakoby nahoře. . . sesuň dolů" není snadné, přesto mu **A** porozuměl (výpověď A28).



Obr. 8.8 Architektův pracovní nákres IV

Z29 „Chceš to zopakovat?“
A29 „Ne. To je všechno?“
Z30 „Nenene. Půjdem dál. . . A teď taková těžší věcička. Štít toho domu. . . a vlastně představ si to asi takhle: Ten bod, co je nahoře u tý střechy, co jsem ti teď popisoval, ten si jakoby představ, že tam je a k tomu se sbíhají z těch čtyř stran toho obdélníku, z toho kvádru. . . Jo? . . . až úplně do toho vrcholu.“
A30 „Jo! Už jsem tě pochopil.“
Z31 „Víš, co myslím? Vlastně z těch všech čtyř bodů se to seběhne do toho jednoho.“
A31 „Ze čtyř? To nejde.“
Z32 „Obdélník má přece čtyři.“
A32 „Jo! Už vím, jak to myslíš. Už vím. . . No. Dobře.“

A kreslí dvě hrany jehlanové části střechy (viz obr. 8.8).

Z si zřejmě uvědomuje složitost svého popisu, proto výpovědí Z29 zjišťuje, zda **A** jeho popisu opravdu porozuměl. **A** dává výpovědí A29 najevo, že popis byl dostačující. Je spíše otázkou **Z** zaskočen, neboť svůj nákres domu zřejmě neshledává jako úplný.

Z pokračuje v popisu další části střechy, přičemž větou „A teď taková těžší věcička.“ sděluje, že její popis je pro něj obtížný. Z výpovědi Z30 vyplývá, že hledá způsob, jak tvar střechy vypodobnit. Nakonec opět volí postup jako v předcházejícím případě. **Z** se snaží popsat boční stěny jehlanu. Ve své výpovědi však slovo „stěna“ nebo jemu ekvivalentní znak neuvádí a pouze popisuje, že jejich strany jsou stranami obdélníkové podstavy a že mají společný vrchol. **A** jeho mentální konstrukci zřejmě porozuměl jen částečně, neboť je překvapen výpovědí Z31, v níž **Z** opakuje s malou obměnou obsah své předcházející výpovědi. Obměna spočívá v tom, že **Z** nepopisuje „vznik“ bočních stěn, ale bočních hran jehlanu. Další výpovědi naznačují, že **A** porozuměl, a dokazuje to také jeho nákres.

Způsob, jakým **Z** popisuje uvedenou část střechy, vede k otázce, proč nepoužil v popisu termín „jehlan“. Nabízejí se nám dvě vysvětlení. **Z** si buď neuvědomil, že se jedná o jehlan, nebo dané těleso za jehlan nepovažoval. Možnou příčinou tohoto jevu je nestandardní tvar jehlanu, případně jeho spojení s trojbokým hranolem. **Z** rozezná bez potíží mezi mnohostěny krychli a kvádr, ale již ne hranol a jehlan, nebo je alespoň neumí pojmenovat.

Z33 „A teď máš vlastně krychli ‚c‘, tu nad ní si označ ‚d‘. A na ni. . . Jo?“
A33 „Ano.“
Z34 „. . . dej úplně stejně stejnou střechu, jako byla na krychli ‚a‘ . . . “
A34 „Ano.“
Z35 „. . . Jo? . . . a úplně stejně položenou. Vlastně, že ty její hrany nahoře budou rovnoběžný. Abys to nedal obráceně.“
A35 „Jo, jo. . . Ale. . . Tak jo. A to je všechno?“
Z36 „No, chceš to zopakovat?“

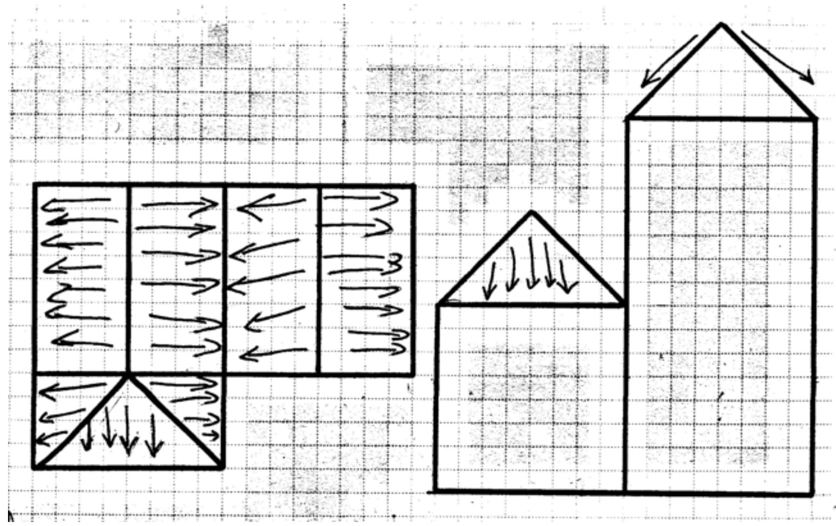
A načrtává hrany hranolu (střechy) na krychli „d“.

Komunikace mezi **Z** a **A** probíhá dále bez komplikací. **Z** se v popisu další části odkazuje na již jednou popsaný tvar trojbokého hranolu, pouze určuje polohu. Ve výpovědích Z33 a Z34 se opět objevují indexové znaky. Jejich užití se však ukazuje jako zavádějící, neboť index „c“ použil pro kvádr, a také jako zbytečné, protože se v dalším popisu již neobjevují. **Z** zřejmě předpokládal, že je bude potřebovat pro vyjádření polohy. Popis je pro **A** srozumitelný, proto nákres úspěšně dokončuje. Ze svého nákresu **A** usuzuje, že popis domu je již úplný, což **Z** potvrzuje.

Na obrázku 8.9 je architektův konečný nákres domu, podle kterého stavitel vytvářel model. Nákres je přehledný a správný; jedinou výtkou je umístění půdorysu vzhledem k nárysu. Uvedený nákres také potvrzuje výše uvedenou domněnku, že **A** inklinuje k zobrazování trojrozměrných objektů v PP, neboť nepoužil VRP, v němž byl nakonec „donucen“ vytvořit pracovní nákres. Pozoruhodné na jeho nákresu je užití šipek pro znázornění sklonu střechy.

8.6 Výsledky

Z uvedeného záznamu komunikace je patrné, že trojrozměrný objekt reprezentovaný v experimentu modelem domu byl dekomponován, tzn. dělen na části s cílem usnadnit jeho znakové uchopení, a že znaky reprezentující dekomponované části objektu tvoří jistou posloupnost, která charakterizuje strukturu popisu. Tuto posloupnost nazýváme *znaková trajektorie*.



Obr. 8.9 Architektův konečný nákres

Znakovou trajektorii ve výše uvedeném popisu lze přirovnat k postupu stavby domu. Zákazník začal základy domu, potom postavil přízemí a patro a nakonec střechu. Základy domu reprezentoval znakem „půdorys“, stavbu přízemních zdí vyjádřením „. . . ze všech si nahoru vyveď výšku. . . vzniknou vlastně dvě krychle a kvádr“ a stavbu patra slovy „. . . na krychli. . . dej tu samou krychli“. Pro popis střech užil běžných vyjádření. Zákazníkův popis byl nejen návodem pro stavbu domu, ale také návodem, jak dům zobrazit ve volném rovnoběžném promítání. Zákazník se stylizoval do role stavitele i architekta. Jedním z důvodů, které vedly zákazníka k této stylizaci, byla zřejmě situace navozená zadáním experimentálního úkolu.

Videozáznam komunikace mezi zákazníkem a architektem umožnil rekonstruovat jednotlivé fáze architektova pracovního nákresu a sledovat jejich souvislosti s popisem zákazníka. To umožnilo osvětlit průběh transformace „model – obraz“. Ukázalo se, že tvorba nákresu byla ovlivněna stylizací popisu. Tím, že zákazník pojal popis jako návod „jak nákres vytvořit“, architekt neměl příliš mnoho prostoru pro vlastní iniciativu. Byl nucen přijmout znakovou reprezentaci, kterou zvolil zákazník. Zákazník popisoval objekt z hlediska užití volného rovnoběžného promítání a architekt, který upřednostňoval pravoúhlé promítání a začal tvořit pracovní nákres tímto způsobem, se mu musel nakonec podřídit, aby jeho popisu porozuměl. Zákazník tedy omezil architekta stylizací popisu ve volbě znakové reprezentace.

Zákazníkův popis obsahoval různé verbální znaky, které sloužily k identifikaci, lokalizaci, orientaci a tvarové specifikaci dekomponovaných částí objektu. V popisu domu se objevovaly jak geometrické termíny (výška, podstava, trojúhelník, krychle apod.), tak běžná slovní vyjádření (čára, štít, střecha). Geometricky byly popisovány zejména ty části modelu, které představovaly zdi domu. Avšak v popisu střech se vůbec nevyskytly termíny trojboký hranol nebo jehlan. Slova „přední – zadní“ nebo „vpředu – vzadu“ reprezentovala v popisu polohu částí objektu z hlediska jejich umístění v modelu, zatímco slova „horní – dolní“ nebo „nahoře – dole“ vyjadřovala ve většině případů polohu částí objektu z hlediska jejich zobrazení na nákresu. Na základě užití těchto znaků bylo možné sledovat *dimenzionální kontext*, tj. dimenzi prostoru, v němž se žák právě pohybuje, tedy zda manipuluje ve své představě s nákresem, nebo s modelem. Užití slov „napravo – nalevo“ bylo z tohoto pohledu neutrální, neboť se objevovalo v obou kontextech. Stejně tak tomu bylo s užitím předložek („před“, „nad“, „vedle“), pomocí nichž byla specifikována poloha jedné části vzhledem k jiné. Třetí způsob lokalizace a orientace se vyznačoval užitím vyjádření „u tebe“, „dál od tebe“ nebo „směrem k tobě“. V tomto případě byla poloha částí objektu určena jejich umístěním vzhledem k subjektu, který vytvářel nákres. Obdobně tomu bylo s užitím vyjádření „pohled zepředu – seshora“. Zajímavé bylo užití indexových znaků, které podstatně zjednodušovalo komunikaci. Žáci jich užívali jako prostředku pro identifikaci již popsaných částí objektů.

Pro zdárný průběh komunikace bylo třeba, aby se žáci shodli v otázkách syntaxe (spojování znaků), sémantiky (významu znaků) a pragmatiky (užití znaků). Pokud byla shoda v některé z těchto oblastí narušena, docházelo k jevům, které nazývám komunikační konfuze, komunikační disonance a komunikační kolaps.

Komunikační konfuze je jev, kdy komunikant snižuje hodnotu komunikované informace užitím znaku, který neodpovídá komunikovanému kontextu, či užitím stejného znaku ve dvou různých sémantických kontextech, nebo náhlou či opakovanou změnou kontextu. Například zákazník, který měl na mysli kvádr se čtvercovou podstavou a výškou 4 cm, řekl, že čtverec je vysoký 4 cm, a architekt nevěděl, jak má jeho výpověď v daném kontextu interpretovat. Je-li konfuze v komunikaci způsobena užitím znaků, aniž dojde ke ztrátě sémantického kontextu (např. komunikant použije nesprávný odborný termín), hovoříme o *znakové konfuzi*.

V některých případech zákazník předcházel vzniku znakové konfuze užitím *explikačního komplementu*, jak je patrné z následující výpovědi: „. . . podstava je čtverec a výška čtyři centimetry. Takže je to kvádr.“ Jiným prostředkem, který eliminoval vznik znakové konfuze, bylo užití *gradované znakové reprezentace*, například ve výpovědi „Vlastně ten její štít, ta strana, ta podstava vlastně je trojúhelník.“.

Druhý typ komunikační konfuze – *kontextová konfuze*, jejíž příčinou je nejednotnost nebo nejednoznačnost kontextu, bývá závažnější. Dlouhotrvající kontextová konfuze totiž vede ke komunikační disonanci. Kontextová nejednotnost komunikantů vzniká z náhlé či opakované změny kontextu, kterou druhá strana neregistruje, nebo při užití znaku, který reprezentuje pro komunikanty sémanticky rozdílné objekty. Kontextová nejednoznačnost vzniká na základě nesouvislé nebo neúplné výpovědi.

Komunikační disonance je jev vyvolaný komunikační konfuzí, který způsobuje nesoulad nebo neshodu mezi komunikanty. Příkladem komunikační disonance jsou výpovědi Z20 až A23 ve výše uvedené ukázce. Zdroj disonance bývá skrytý a komunikanty neuvědomovaný. Komunikační disonanci lze odstranit doplněním nebo sjednocením kontextu, případně užitím jiných komunikačních prostředků, které vyjasní vzniklou situaci.

Komunikanti se snaží předcházet komunikačním disonancím tím, že průběh komunikačního procesu monitorují prostřednictvím *komunikačních signálů*, které mají většinou podobu sociálních výpovědí.

Komunikační kolaps je jev, kdy se nesoulad v komunikaci nedaří odstranit žádnými prostředky, a proto je nutné provést radikální zásah do průběhu komunikačního procesu. Selhání v určité etapě komunikačního procesu nemusí vždy znamenat jeho konec.

8.7 Závěr

Aktivita, na níž byl zde popsaný experiment založen, má dvojí využití: vzdělávací a diagnostické. Jednak představuje metodu, pomocí které lze ve vyučování geometrii rozvíjet komunikační dovednosti žáků a jejich schopnost geometrizovat reálné objekty, jednak poskytuje vyučujícímu diagnostický nástroj. Učitel může prostřednictvím této aktivity na základě poslechu rozhovoru žáků zjistit, zda je zavedená geometrická terminologie funkční a zda ji žáci užívají správně. Umožňuje mu rovněž získat informace o tom, kde žákovo porozumění geometrickým pojmům není na požadované úrovni a na co je třeba se ve vyučování zaměřit.

Uplatnění sémiotického přístupu umožnilo uchopit některé stránky vyučovacího procesu a interpretovat experimentálně zjištěné fenomény. Metoda sémiotické analýzy, která byla použita pro zpracování experimentálního materiálu, odhalila řadu fenoménů, jež se týkají procesů vnímání, vytváření, přeměňování a sdělování sémiotických reprezentací trojrozměrných objektů, a otevřela problémy k dalšímu zkoumání. Jedním z podnětů, který vzešel z provedeného experimentu, je problém situačního kontextu a jeho vlivu na volbu znakové reprezentace.

Důležitým výsledkem zkoumání problematiky reprezentací z hlediska teorie je vymezení pojmu reprezentace. Významně k tomu přispělo studium obecné teorie znaků – Peirceovy sémiotiky, jež byla shledána přínosnou platformou. Díky vymezení pojmu sémiotická reprezentace nalezením paralely mezi sémiotickým pojmem znak a didaktickým pojmem reprezentace se podařilo překlenout některé terminologické disproporce ve stávajících teoriích reprezentací. Sémiotická interpretace pojmu reprezentace je tak bezesporu významným příspěvkem do teorie reprezentací.

Část 2: Učitel a jeho příprava

Kapitola 9

Postoje studentů k matematice a možnosti jejich změn

Eva Zapotilová

9.1 Formulace problému

Jednou ze základních zásad permanentního zkvalitňování jakékoliv lidské činnosti je systematické evidování a vyhodnocování činností předcházejících, tzv. zpětná vazba. V pedagogice ke zpětné vazbě dochází zcela spontánně tím, že učitel o nabytých zkušenostech uvažuje, diskutuje se žáky či studenty a kolegy, popřípadě získává informace z odpovídající odborné a vědecké literatury. Účinnější způsob získávání zpětné vazby je založen na archivování písemných výpovědí žáků, respektive studentů. U tohoto způsobu je jednak proces zpětné vazby objektivizován, jednak uchováván do budoucna, například pro případné komparativní analýzy. Cílem této studie je:

- *získávání zpětné vazby od studentů učitelství primární školy o tom, jak vnímají vyučování matematice na základní škole, střední škole a na fakultě,*
- *utřídění získaného materiálu na základě důležitých didaktických a klimatických fenoménů,*
- *využití poznatků ke zkvalitnění přednášek, seminářů a praxe v oblasti matematiky i pro případné kurikulární změny.*

9.2 Přehled současného stavu

Škola ve 3. tisíciletí by měla vést především k tomu, aby se žáci, respektive studenti naučili, jak se mají učit a jak mají sami řídit své učení. Je tedy logické, že předpokladem pro výuku, která má postupně naučit žáky autoregulaci učení, je výuka, která má vést k metakognici, tj. naučit žáka tomu, aby dokázal poznávat své vlastní poznávací procesy. Metakognitivně koncipovaná výuka by se měla řídit některými zásadami. P.R. Simons (1996, citován v Mareš 1998, s. 170–171) jich uvádí celkem čtrnáct, zde vzhledem k zaměření kapitoly zmíním především zásadu afektivnosti: „Pro žákovské učení je klíčový vzájemný vztah mezi kognitivními, metakognitivními a afektivními stránkami učení. Učení není jen poznávání, žák své učení také prožívá. Žák musí mít možnost najít si k učení svůj osobní vztah, svůj citový odstín.“

Průběh učení může determinovat vnímání osobní zdatnosti, sebepojetí a sebeúcta (Mareš 1998). Sebepojetí zahrnuje poznávání zkušenosti sama se sebou (co si myslím, že jsem). Sebeúcta zahrnuje emocionální aspekty zkušenosti se sebou (jak prožívám sám sebe). Člověk, který sleduje sám sebe, jak postupuje, když něco poznává, něčemu se učí, jistým způsobem zasahuje do následného průběhu těchto procesů. Budou se odehrávat zpravidla jinak, než kdyby probíhaly spontánně, bez jejich sebereflexe.

V roce 2000 jsme proto z podnětu M. Hejného začali zadávat v 1. ročníku studia učitelství pro l. stupeň základní školy v rámci disciplíny Úvod do studia matematiky seminární práci na téma „Sebereflexe postoje k matematice“.[1] Úkolem studenta je popsat svá setkání s matematikou od předškolního věku až po současnost a pokusit se charakterizovat především změny svého postoje k matematice a současně se zamyslet nad tím, čím nebo kým byl postoj k matematice ovlivněn. Zadáním této seminární práce bývají studenti zpravidla zprvu zaskočeni, neboť si nedovedou představit, že mohou na dané téma popsat 3 až 5 stran. Pak bývají v závěru semestru překvapeni, kolik zážitků z matematiky jim utkvělo v paměti.

Studenti většinou oceňují možnost zamyslet se nad svým postojem k matematice, neboť si uvědomují, že takto lépe poznávají důležitou složku své budoucí práce, totiž vliv učitele na utváření žákova vztahu k matematice i spekulativnímu myšlení vůbec. Sebereflexe studentů jsou přínosné i pro nás vysokoškolské učitele. Dovídáme se, že většinou pozitivní postoj žáka k matematice utvořený během vyučování na 1. stupni základní školy se mění někdy již na 2. stupni základní školy, většinou však během studia na střední škole. Zejména na gymnáziích se stává negativním, až výrazně negativním.

Toto poznání je přínosné i pro studenty oborového studia matematiky, budoucí učitele matematiky na 2. stupni základní školy a na střední škole. Oni se též budou s největší pravděpodobností setkávat se studenty tohoto typu a mohou se pokusit změnit neradostný stav postupného zhoršování vztahu žáků k matematice.

Toto poznání může být zajímavé i pro další čtenáře, učitele matematiky z praxe.

[1] Podobný sběr materiálu byl proveden u budoucích učitelů matematiky jako sebereflexe z praxe (Zhouf; Stehlíková 2004).

9.3 Sběr dat a výsledky

Zpětná vazba získávaná od studentů měla jak písemnou, tak ústní podobu. Zde uvažujeme pouze o písemné podobě, která zahrnovala tři typy studentských výpovědí:

- sebereflexe (vyjádření individuálních vzpomínek a zkušeností studentů v rámci jejich setkávání s matematikou),
- anketa (anonymní vyjádření kvality postoje studentů k matematice v úvodu studia na fakultě),
- vstupní test (diagnostika vstupní kvality matematických znalostí a schopností studentů prověřovaných souborem dvaceti zajímavých i standardních úloh z učiva 1. a 2. stupně základní školy).

V letech 2000/03 jsem získala, archivovala a přečetla téměř 300 studentských esejí. Některé myšlenky studentů mne silně zaujaly a diskutovala jsem o nich jak s autory, tak s dalšími studenty a kolegy. Postupně jsem si tyto myšlenky začala třídit podle různých kritérií. Snad nejpřirozenějším kritériem je to, které používám v této stati a které je organizováno podle toho, zda student mluví o svých zkušenostech s matematikou získaných na 1. nebo na 2. stupni nebo na střední škole, resp. na vysoké škole.

Vybrané ukázky jsou z prací, které mě nejvíce oslovily. Jsou většinou psány vytříbeným stylem, mnohdy s jistou dávkou humoru či nadsázky, v některých se setkáváme již s velmi vyzrálými názory (studenti 1. ročníku prezenčního studia nejsou vždy jen mladí lidé ve věku 19 až 20 let).

9.4 První série ukázek ze seminárních prací studentů

(a) Vzpomínky na první setkávání s matematikou a matematiku na 1. stupni základní školy

- „Je velmi obtížné říci, kdy se malý človíček poprvé setkává ve svém životě s matematikou. Záleží totiž na tom, co si pod slovem matematika představujeme. Děti, které ještě ztěží umí mluvit, dokáží většinou na svých prstíkách křečovitě ukázat, kolik je jim let. Později, když se jim jazýček trošku rozváže, rádi hrdě oznamují, že jsou jim ‚či', rozuměj tři. Toto by ale většina z nás asi nepovažovala za projev nějaké matematické zdatnosti, ale spíše za nacvičené cirkusové číslo, protože děti zpravidla nemají představu o významu slova, které používají."
- „S matematikou jsem se seznámila již v mateřské škole. Jako každý předškoláček jsem ‚znala' i já různé matematické pojmy. Byla jsem na sebe pyšná, jak pěkně počítám do dvaceti. Měla jsem pocit, že vlastně matematiku už skoro umím, když znám i další termíny jako například sto a milion."

- „Můj vztah k matematice se začal utvářet v době, kdy jsem už nežvatlal, plínky jsem z frajeřiny nenosil a dudlík jsem používal výhradně v soukromí... Dnes budeme mít hodinu matematiky, milé děti, prohlásila radostně paní učitelka a usmála se na třídu. Usmál jsem se taky a těšil se. Již dlouho jsem kšeftoval s céčky, ale vzhledem k tomu, že jsem si je neuměl s jistotou správně spočítat, krutě jsem prodělával. Konečně přijde chvíle, kdy to všem natřu, myslel jsem si. ‚Toto je jednička, dvojka, trojka,... ' začala paní učitelka a kreslila číslice na tabuli. Stále jsem se usmíval. Číslice jsme začali obkreslovat. Kdy ale začneme počítat, říkal jsem si pro sebe. Tak jsme měli postupně několik hodin matematiky, ale stále nic pro mě. Pak jednou paní učitelka nakreslila na tabuli velký ovál a s jiskřičkami v očích nám oznámila: ‚To je množina, děti.' Pohlédla na mě s úsměvem. Koutky se mi křečovitě roztáhly. ‚Dnes budeme pracovat s množinami,' dokončila. Měl jsem pocit, že moje noha zachytila o něco na zemi a já se v temné chodbě mého dětství natáhl jak široký, tak dlouhý."
- „Myslím, že v předškolním věku jsem se hodně setkávala také s geometrií. Například, když jsme stavěli z kostek a potom ze stavebnice Lego. Člověk musí vědět, co je krychle a co kvádr, co může postavit na sebe a co mu spadne nebo se mezi ostatní kostičky nevejde, že válec naležato vždycky někam uteče. Jednotlivá tělesa jsem většinou samozřejmě neuměla pojmenovat, pro mě to všechno byly kostky. Důležitým poznatkem byla ostrost ‚rohů' krychlí a čtverců, jako příklad uvedu stůl – když se člověk praští, pěkně to bolí."
- „Důležitým číslem v životě je dvacet pět. Ani ne proto, že když by si člověk řekl v pěti letech, že za dvacet let mu bude dvacet pět a připadalo mu, že bude tak strašně veliký, že to ani není možné. Ale spíše proto, že každé dítě má v hlavě větu, kterou když slyší, rychle hledá nejbližší únikovou cestu a mizí, jak nejrychleji to jde. Tou větou je: ‚Jestli tě chytnu, tak dostaneš pětadvacet na zadek.' Kdo by neutíkal?"
- „Od malinka nesnáším čekání. Důvod mám celkem prostý. Vzhledem k tomu, že jsme byly čtyři děti, bylo poměrně složité s námi někam chodit. Proto vždycky, když jsme někam jeli s tátou, nechal nás všechny čtyři se sušenkami v autě se slovy: ‚Přijdu za pět minut.' Jak já ten čas nenáviděla! A pět minut bylo pro mě jako půl života. Neboť, jak jsme později zjistili, těch pět minut tam bylo, ale těch posledních. Až do dob školních jsem si myslela, že pět minut jsou tak dvě hodiny, až paní učitelka mě vyvedla z omylu."
- „Mám pocit, že na 1. stupni jsem měla určitý náskok, protože mám starší sestru, s kterou jsem občas ‚počítala'. Tím si částečně vysvětluji to, že si z hodin matematiky v první třídě moc nepamatuji. Vybavuji si jen to, že jsme měli kartičky s čísly a puntíky a ty jsme vždycky zvedali nad hlavu a mávali s nimi jako o život. Také jsme počítali na takové průhledné desky, ze kterých se dalo všechno vygumovat. A kdo vypočítal celý sloupeček příkladů bez chyby, dostal včeličku."
- „Snažila jsem se opravdu poctivě vybavit první vzpomínky na matematiku, a také se mi v mysli probudilo několik mlhavých momentů, které se intenzivním přemýšlením

stávaly zřetelnějšími a jasnějšími. Narodila jsem se v učitelské rodině, kde tatínek večer co večer opravoval písemky plné čísel a pro mne nesrozumitelných obrázků. Seděla jsem mu často na klíně a nahlížela přes rameno. Mohla jsem se zeptat na cokoli a dostala jsem vždy uspokojující odpověď, objevovala jsem stále nové souvislosti a vlastnosti čísel. Tatínek mi ukazoval matematiku v běžném životě kolem nás a já jsem se obdivovala neznámému světu, který mne obklopoval.

A pak přišla škola a s ní první zkušenosti s jinými dospělými lidmi, než jsou rodiče. V učebnicích byly vytištěné nekonečné sloupce příkladů, ale naštěstí i nějaké zajímavé úlohy, na které jsem se mohla podívat doma s tátou. Poznala jsem také, že na matematiku je třeba zcela jiné soustředění a přemýšlení než na jiné předměty. Proniknout do dané tematiky bylo někdy radostné, a naopak někdy velmi bolestné, stálo mě to mnoho slz, vztekání, naříkání a tatínka mnoho trpělivosti.

Také jsem ve druhé třídě dostala první pětku, a právě z matematiky. Když jsem se doma nad příklady zamyslela v klidu a bez stresu, který vyvolávala paní učitelka při písemce, zjistila jsem, že opravdu o nic nejde, že můžu radostně počítat další příklady.

Ve čtvrté třídě přišel nový pan učitel a naše třída se pod jeho rukama změnila k nepoznání. Nastal radostný rok plný her a nových poznání. Jediné, co mi nahánělo strach, byly matematické rozcvičky na začátku každé hodiny. Všichni jsme stáli a sednout si mohl jen ten, který správně zpaměti vypočítal příklad. Příklady nebyly moc těžké, ale záleželo na rychlosti, která však nikdy nebyla mou velkou přítelkyní. Ale to ani z malé části nezastínilo mé nadšení z krásného roku živé a tvůrčí práce.“

(b) Vzpomínky na setkávání s matematikou na 2. stupni základní školy

- „Na druhém stupni se matematika proměnila ve formálnější předmět, jako ostatně i mnoho dalších předmětů. Přišly vzorové příklady, které jsme se učili kvůli přijímacím zkouškám na střední školu. Stále intenzivněji jsem cítila potřebu prokousat se do dané problematiky, protože jinak jsem byla v hodinách ztracená a začalo mne obklopovat moře nejasností a nebýt záchranného člunu, kde za kormidlem stál tatínek, bývala bych se utopila. Ale ve chvílích vyjasnění jsem cítila pevnou půdu pod nohama, radost z počítání a touhu dojít až k jádru příkladu. Střídaly se tedy ve mně vlny úplného temna s čilou lehkostí.“
- „Na matematiku na prvním stupni se mi uchovaly jen kusé vzpomínky. Neuvědomuji si, že bych tehdy byla z matematiky nějak příliš nadšená nebo zděšená. Zkrátka mám v sobě uchované spíše neutrální pocity. Možná je to tím, že jsem byla po celé ty čtyři roky spíše napřed – mám dva starší sourozence.

  Po příchodu na druhý stupeň se však na obzoru objevily zajímavější věci a k tomu ještě vynikající učitel, kterému vděčím za to, že od té doby jsem měla matematiku opravdu ráda. Tím učitelem byl náš pan ředitel, jediný muž na celé škole. Nikdy nekřičel, naopak vždy vstupoval do třídy s neopakovatelným humorem. Nevím, jak to dokázal, ale když nám říkával, že matematika je královnou věd, všichni jsme mu do puntíku věřili. Když přemýšlím nad tím, jak je možné, že nás uměl tolik naučit, a na chvíli pominu vliv jeho osobnosti jako takové, myslím, že základem všeho byla naprostá systematičnost.“

- „V páté třídě jsme dostali na matematiku učitele, o kterém dnes mohu říct, že nás nenaučil to, co měl. Neměl matematiku jako aprobaci, sám měl v učivu mezery, proto klidně některou látku vynechával a učil jen to, co chtěl. Později jsem musela dohánět mezery, abych porozuměla složitější látce. Byl kromě toho takový, že spíš využíval našeho neúspěchu než pochvaly. Často mi říkával: ‚Žádný génius z tebe nebude!‘ Moc mi to sebedůvěry nedodávalo.

  V sedmé třídě jsme dostali novou mladou paní učitelku. Můj pohled na matematiku se tenkrát změnil. Učitelka měla v probírané látce systém, jednotlivá témata na sebe navazovala. Látku jsem si spojovala do souvislostí a učivu rozuměla. V té době patřila matematika k mým oblíbeným předmětům.“
- „Na druhém stupni jsem matematiku a vlastně i jiné předměty vnímala poněkud jinak než na prvním stupni. Opustili jsme svou kmenovou třídu a stali se těmi, kteří se musí o přestávce důležitě stěhovat z jedné učebny do druhé. Učebna matematiky byla v tom nejvyšším třetím patře, což znamenalo mnohé. Do vyšších pater jsme dosud neměli přístup. Jen nejodvážnější kluci ze třídy se tam vydávali za svými staršími sourozenci nebo kamarády, aby nás potom mohli ohromovat vyprávěním o tom, co všechno je tam nahoře a tady dole není. Cítila jsem, že tam nahoře se odehrává nějaký jiný život, který je tajemný a lákavý. Proto jsem se na hodiny matematiky v nejvyšším patře těšila. Naše nová paní učitelka byla poměrně přísná, ale musím přiznat, že i spravedlivá. Hodiny měly svůj řád a byly příjemné. To se mi líbilo. Patřila jsem mezi poctivé a pilné žáky, můj sešit s domácími úkoly prošel o přestávce před hodinou matematiky rukama řady mých spolužáků. Nikdy jsem však nebyla geniálním dítkem, které je schopné vyřešit jakoukoli úlohu. Nadšeně jsem se účastnila různých matematických soutěží, ale nikdy jsem se nedostala dál než do školního kola.“

(c) Vzpomínky na setkávání s matematikou během středoškolského studia

- „Na gymnáziu jsem se zpočátku matematiku denně učila, ale zjistila jsem, že matematice věnuji více času než předmětům, které mě baví a kterými bych se chtěla v budoucnu zabývat. Dodnes si myslím, že spousta věcí, které se na gymnáziu učí, je zbytečná a pokud nebudeme matematiku vyloženě studovat, stejně ji brzy zapomeneme. Po gymnáziu jsem studovala vyšší odbornou školu sociální práce a z gymnaziální matematiky jsem po celé dva roky nepoužila nic. To mě v mém názoru pouze utvrdilo.“
- „Nevím, co mi středoškolská matematika dala do života? Snad stres, že jsem hloupější než ostatní, a tím pocit méněcennosti, zjištění mé pomalosti, neschopnosti, čistou

prohru sama nad sebou."

- „Dodnes si pamatuji na svoji první kompozici z matematiky na gymnáziu, z které jsem dostala svoji první čtyřku v životě. Od té chvíle jsem byla u vyučujícího zapsána jako velmi slabá. Bylo mi hrozně. Na písemky jsem se připravovala, ale byla jsem pomalejší, a to se na gymnáziu netolerovalo. Měla jsem pocit, že učitel nové učivo vysvětluje těm chytřejším a námi se nezabývá. Píšu námi, protože těch slabších byla v naší třídě více než třetina. Hrozila jsem se dnů, kdy jsem měla být zkoušena. Mívala jsem sny o matematice, snažila jsem se matematice všemožně vyhnout, dokonce se musím přiznat, že ze strachu z písemek jsem chodila za školu. Někdy jsem učivu rozuměla a byla jsem ráda, že jsem příklad vypočítala sama a dobře, ale učitel mi nevěřil, že jsem na to přišla sama. Úplně jsem proto ztratila zájem o tento předmět."
- „Z našeho profesora na gymnáziu jsme měli od začátku strach. Později jsme zjistili, že za svou přísností schovává nejistotu, myslím, že matematiku příliš neovládal a nebavila ho. Jediné, co jsme při hodinách řešili, byly vzorové příklady z učebnice. Když jsme se zeptali na nějakou jinou úlohu, byl v úzkých a se slovy ‚takže si doma tuto úlohu promyslete' nás odbyl. Ovšem jeho silnou stránkou byly definice. Ty ovládal a tvrdě je od nás vyžadoval. Podle jeho představ byla matematika jen spousta definic."
- „Když se vracím ke špatné zkušenosti s matematikou, resp. učitelkou matematiky, chtěla bych dodat, že arogantní, povýšená a věčně se vysmívající učitelka mnohem více ovlivnila, samozřejmě v negativním smyslu, ty, kterým matematika nešla. Její posměšné výstupy, kterými se projevovala snad každou hodinu, neustále srážely tyto žáky a díky nim v nich čím dál víc převládala hrůza z matematiky. Měli strach se na něco zeptat, aby nebyli vystaveni ironickým poznámkám, které je nemilosrdně ponižovaly. Myslím, že právě tato učitelka je pravým důkazem toho, že většina žáků, kteří se bojí matematiky, nemají ve skutečnosti strach z matematiky jako takové, ale z učitele, který si zřejmě mnohdy neuvědomuje, že někomu trvá pochopení příkladu déle, ale že proto ještě nemusí být úplně ztracený případ, kterému nepomůže žádná rada ani pomoc."
- „Problémy s matematikou nastaly až na gymnáziu. Dostali jsme jednu z nejhorších učitelek, o které kolovaly pověsti po celém městě. Více než polovina studentů měla čtyřku. Vždy, když se někdo přihlásil, že danému problému nerozumí, učitelka začala vztekle bušit do katedry a hystericky nadávala dotyčnému, že pokud nedokáže pochopit tento triviální příklad, na gymnázium nepatří. Samozřejmě jsme se ptát přestali a nechali jsme učitelku vykládat. Ta si nás nevšímala a pokračovala si po svém. Postupem doby jsme si vybudovali k matematice silný odpor a vůbec jsme se neučili. Nyní je mi jí líto, ale tříd, kterým pomohla vytvořit averzi k matematice, bylo za její kariéru asi mnoho. Přestože jsme se mnohokrát pokusili o dialog, dozvěděli jsme se, že chyba je v nás."

- „Tenkrát na gymnáziu jsem poprvé zažívala pocity strachu. Vždy, když se ozvalo zvonění, které ohlásilo hodinu matematiky, seděli jsme všichni v lavicích se zatajeným dechem a očekávali jsme klapání podpatků naší paní učitelky. Její nepříjemný hlas vykládal celou hodinu fakta a definice, které jsme pouze opisovali z tabule a snažili se doma marně látku pochopit. Její výbušná povaha a náš strach z toho, že se opět rozzlobí, až se někdo z nás přihlásí s tím, že látku nepochopil, v celém kolektivu vybudovala odpor k tomuto předmětu. Dnes, s odstupem času, jsem vděčná nejen hodným a kvalitním kantorům, ale poděkovat bych měla i této paní učitelce, která mi do mého nitra vštípila jistotu, jak jednou určitě nebudu učit a vychovávat děti."
- „Na druhém stupni ZŠ nebyla pro mne matematika žádný problém, alespoň podle hodnocení na vysvědčení. O to větší překvapení nejen pro mne, ale i pro mé rodiče, byly mé výsledky ze školy střední, kde, jak si myslím, je výuka matematiky nadstavbou na elementární vědomosti získané na ZŠ. Nevím, do jaké míry byly mé nevalné, spíše katastrofální výsledky ovlivněny snad záměrně pečlivě pěstovanou pověstí matematické autority našeho vzdělávacího ústavu. Dnes mohu o tomto muži prohlásit, a to nejen proto, že je již mrtev, ale i proto, že nejsem již jeho student a hlavně můj dnešní věk mi umožňuje, abych své zkušenosti a prožitky v rozmanitých situacích a při setkávání s ještě rozmanitějšími lidmi popisoval kriticky. Byla to obluda, hulvát a hlavně to nebyl pedagog. Jistě, že jsem měl a dodnes mám určité ‚poruchy na svém přijímači', ale člověk jako on vypěstoval u mne a troufám si tvrdit, že i u mých tehdejších spolužáků trvalou a nevratnou nenávist k tomuto předmětu. Dokázal jakýkoli početní příklad řešit během dvaceti vteřin, o čemž nás vytrvale přesvědčoval. Jeho způsoby řešení byly fascinující a do jisté míry jsme všichni zažívali jakousi slavnostní náladu. Všude naprosté ticho, nikdo se neodvážil špitnout nebo se jen pohnout, aby nevyrušil koncertního mistra z jeho působivého prožitku a nezpůsobil tak nežádoucí proměnu z člověka neškodného, matematického dirigenta, na člověka zákeřného, lovce nevinného studenta. Našich nedostatků si byl plně vědom a dovedl své zřejmé převahy náležitě využít. Jeho ironické poznámky však nemířily pouze k naší matematické ‚impotenci', ale i naší osobnosti. Víme, že v období puberty hledá každý svoji identitu, své místo. Řeší to různými způsoby. Jinak se obléká, má jiný účes než dospělí, není přístupný dialogu, zkrátka bojuje a neví za co a proč. Myslím, že by si měl být této skutečnosti vědom každý pedagog i náš středoškolský matematický génius, člověk, který nemohl zřejmě z nějakého neznámého důvodu naplnit své profesní ambice na pozici univerzitního profesora."
- „Matematika na gymnáziu byla v rozporu s mým očekáváním. Pan profesor bez slůvka vysvětlení vždy ‚něco' počítal na tabuli a my jsme většinou jen mlčky přihlíželi a opisovali pro nás nesrozumitelná čísla do sešitu. Jeho přirozený respekt a obavy z matematiky a ze zesměšnění nám nedovolovaly zvednout ruku a zeptat se, čemu jsme neporozuměli. Matematika se tak pomalu ale jistě stávala nejen pořádným strašákem, ale rovněž hádankou pro většinu třídy. Toto bylo mé první setkání s vyučujícím, který

sice dle mého mínění měl výborné znalosti, ale jejich přenos na nás byl minimální. Někteří z nás, kteří se nedostali na vysokou školu, šli učit na základní školu. Tento přístup se mi zdá poněkud nezodpovědný, neboť takový člověk může mít sice výborné znalosti, ale přenos těchto znalostí na jeho žáky, především na ty nejmenší, kde se teprve vztah k matematice utváří, již nemusí být tak kvalitní. Vážným problémem by potom bylo neproniknutí do podstaty a hloubky matematiky již na základní škole a byli bychom v ‚bludném kruhu‘.“

Charakteristika sebereflexí postoje k matematice

Uvedené ukázky představují nejčastěji se vyskytující postoje. Často přemýšlím nad tím, jak je možné, že se objevuje takové množství studentů, kteří vyjadřují velmi negativní vztah k matematice. Obdobné postoje se objevují ve studentských esejích pravidelně každý rok. Doufejme, že nekvalitních učitelů či profesorů matematiky je méně než zmíněných esejí. Někteří studenti mohou postupně přicházet na fakultu z týchž středních škol a fakticky pouze poněkud jinými slovy popisovat působení týchž učitelů či profesorů.

Objevují se i práce, v nichž studenti charakterizují svůj postoj k matematice jako převážně neutrální, proměnlivý podle toho, zda pochopili či nepochopili právě probíranou látku, dále v závislosti na většinou četných změnách vyučujících matematiky. Studenti, kteří s láskou vzpomínají na hodiny matematiky a všechny učitele či profesory matematiky, jsou pouze výjimkou. Jistě to úzce souvisí s kvalitou studentů, kteří jsou přijímáni ke studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy na Pedagogickou fakultu UK v Praze.

Vstupní kvalita studentů učitelství pro 1. stupeň základní školy

Katedra matematiky a didaktiky matematiky PedF UK v Praze se vzdala možnosti konat přijímací zkoušku z matematiky. Dáváme tím šanci všem uchazečům, kteří vyhověli v disciplínách, které jsou součástí přijímací zkoušky (český jazyk a literatura, hudební výchova, výtvarná výchova, tělesná výchova). Všichni přijatí studenti se však musí v úvodu studia podrobit vstupnímu testu z matematiky. Jeho úspěšné absolvování je podmínkou pro zápis do kursu Úvod do studia matematiky. Do vstupního testu zařazujeme zpravidla zajímavé, nestandardní úlohy ze soutěží pro žáky 4.–5. ročníku základní školy (např. Klokánek), dále pak standardní úlohy 2. stupně základní školy. Úlohy klasické středoškolské matematiky zpravidla nezařazujeme nebo pouze v omezeném počtu. Značnou část studentů tvoří totiž absolventi středních pedagogických škol a zařazení středoškolských úloh pokládáme za nevhodné vzhledem k jejich očekávanému budoucímu uplatnění.

Studenti, kteří nezískají stanovený počet bodů, jsou zařazeni do „výběrového“ semináře. Jeho cílem je zlepšení kvality základních matematických vědomostí a dovedností studentů tak, aby v opakovaném testu vyhověli a mohli se zapsat do kurzu Úvod do studia matematiky v letním semestru 1. ročníku svého studia na fakultě.

Vstupní test tvoří tradičně dvacet úloh, za správné řešení každé z nich je možné získat až 5 bodů, tedy celkem 100 bodů. Složitost úloh se ve sledovaném období (2000/01, 2001/02, 2002/03) neměnila, některé typy úloh byly ponechány, jiné obměněny. Hranice pro úspěšné absolvování vstupního testu se nemění (60 bodů). Dlouhodobě se přitom ukazuje správnost takto stanovené hranice. Studenti, kteří splní stanovené podmínky, pracují v kurzu Úvod do studia matematiky se zájmem a jejich nápady při řešení problémů odpovídají našim představám.

Mezi výkony studentů jsou vždy velké rozdíly (největší rozptyl se projevil ve školním roce 2000/01, nejlepší výkon 93 bodů, nejhorší pouze 9 bodů!). To znamená, že existují absolventi střední školy, kteří nejsou schopni správně vyřešit ve stanoveném čase 60 minut ani dvě úlohy z látky 1. a 2. stupně základní školy.

Celkové výsledky vstupního testu se přitom stále zhoršují.

	Vyhovělo	Průměrný bodový zisk	Nejlepší výkon	Nejhorší výkon
2000/01	54,8 %	53,2	93	9
2001/02	34,6 %	45,8	89	12
2002/03	28,8 %	39,5	86	11

Na závěr oddílu uveďme spontánní reakci studentky na vstupní test uvedenou v jedné z esejí. „Musím se přiznat, že když jsem se připravovala na vstupní test a viděla jsem některé úlohy v učebnicích matematiky pro ZŠ, byla jsem překvapená a říkala jsem si, že to není možné, že děti na ZŠ řeší takovéhle těžké úlohy a že my jsme takové řešili asi taky. Myslím si, že se někde stala chyba při výuce matematiky. Když na vysoké škole jen tak tak napíšu test z učiva základní školy, asi to není úplně v pořádku. Zřejmě nám učitelé nedokázali dávat poznat různé ‚věci‘ tím nejlepším způsobem a v souvislostech, takže my teď máme ‚mezery‘."

9.5 Aplikace

Úpravy výuky a kurikulární změny

V souladu s přípravou nového studijního plánu souvisejícího s prodloužením délky studia učitelství pro 1. stupeň základní školy ze čtyř na pět let navrhujeme, aby od školního roku 2004/05 byla disciplína Úvod do studia matematiky rozložena do dvou semestrů 1. ročníku studia.

1. semestr: ÚSMA I, 1/2 Z

2. semestr: ÚSMA II, 1/2 KZ

V úvodu zimního semestru absolvují studenti vstupní test. Ti, kteří splní stanovené podmínky, se povinně účastní pouze přednášek. Semináře budou věnovány především snaze o zmírnění rozdílů mezi přijatými studenty a zlepšení kvality jejich celkové matematické kultury.

V letním semestru budou všichni studenti, kteří splní podmínky vstupního testu, studovat disciplínu ÚSMA II (obsah současného kurzu K 31 ÚSMA).

Současné pojetí modulového systému studia, které umožňovalo talentovaným studentům studovat následné disciplíny (K32 Aritmetika a K 33 Geometrie) zároveň v jednom semestru, vytvářelo fakticky tři skupiny studentů:

1. nastupují do K 31 ÚSMA se zpožděním jednoho semestru,
2. procházejí standardní trajektorií,
3. procházejí matematickými disciplínami „se zrychlením“.

Technicky se však ukazuje nemožné zařadit do rozvrhu v daném semestru (vzhledem k omezeným prostorovým kapacitám fakulty) tři typy výuky matematických disciplín. Předpokládáme, že navrhovaná úprava studijního plánu vyřeší zmíněnou situaci po všech stránkách.

Obsah a cíl kurzu Úvod do studia matematiky

Výuka v disciplíně Úvod do studia matematiky je zaměřena především na řešení problémů v kaskádách úloh s narůstající složitostí, které umožňují studentům zažít pocit radosti z „objevení“ řešení jednodušších problémů a získávat postupně sebevědomí, že mohou vyřešit další, již složitější problémy.

Řešení problémů s reflexí postupu

Problémy nejsou řešeny pouze v hodinách kurzu Úvod do studia matematiky, ale studenti zpracovávají během semestru seminární práci v rozsahu pět až deset stran, která obsahuje:

1. rozbor problému (uchopování problému a první nápady řešitele),
2. řešení problému (další nápady a popis myšlenkového procesu),
3. evidenci chyb, jejich identifikaci a přehled objevů, vedoucích k řešení problému.

Seminární práce může obsahovat i pozorování dvou žáků při řešení vybraných úloh. V tomto případě musí obsahovat i stručné údaje o provedeném pozorování, charakteristiku žáků a podmínek experimentu.

Podívejme se na reakci studentky na zpracování projektu uvedenou v jedné z esejí. „Práce mě velmi bavila. Nejen moje vlastní počítání, ale především počítání s dětmi. Přibližně půl roku jsem se totiž k práci s dětmi nedostala a začala jsem pochybovat o svém snu stát se paní učitelkou. Ovšem stačilo 90 minut s třemi dětmi a já jsem zjistila, že tato práce je opravdu to, co bych chtěla v budoucnosti dělat. Během práce jsem také zjistila, co všechno bych chtěla dělat jinak než paní učitelka z příslušné třídy. Celkově se domnívám, že práce pro mě byla velmi přínosná, a jsem ráda, že jsem takový projekt mohla zpracovat hned v prvním semestru mého studia na pedagogické fakultě.“

Změny postoje studentů

Vzhledem k tomu, že studenti odevzdávají své seminární práce na téma Sebereflexe postoje k matematice zpravidla v závěru semestru studia kurzu Úvod do studia matematiky, spontánně reagují v řadě případů na změny svého postoje na Pedagogické fakultě UK, i když k tomu nebyli při zadávání seminární práce vyzváni. Tím se dozvídáme, jak studenti vnímají a prožívají hodiny matematiky na fakultě a zda se nám daří ovlivnit jejich postoj k matematice. Některé ukázky výpovědí ukazuje následující oddíl.

9.6 Druhá série ukázek ze seminárních prací studentů

- „Dostala jsem se na svou vysněnou vysokou školu. S hrůzou jsem očekávala první hodinu matematiky. Byla jsem příjemně překvapena. Nečekaly nás žádné nepřekonatelné příklady. Kdyby se mě někdo zeptal, co se učíme, s určitostí bych ho opravila, že my se neučíme, ale my si hrajeme. Sice ne v pravém slova smyslu, ale my si hrajeme s matematikou.“
- „Tato matematika se naprosto nedá srovnat s matematikou na střední škole. Můj postoj se naprosto změnil k lepšímu. Matematika mi začala být srozumitelná a jasná. Oceňuji výběr příkladů, rozvíjejí naše myšlení. Mohli jsme se na cokoli zeptat a nikdy na nás nebylo nahlíženo jako na neinteligentní tvory, jako na střední škole.“
- „Můj postoj k matematice se výrazně zlepšil po příchodu na fakultu. Učivo je zajímavé. Celý semestr jsem se na hodiny matematiky těšila. Co se týče obtížnosti, myslím, že je střední, spoustu věcí zvládnou i slabí a lepší studenti je dovedou do obecnosti. Je to pestré pro každého. Rozvíjí se naše logické myšlení.“
- „Tento seminář mi dal úplně jiný náhled na matematiku. Když si vybavím, jak jsme se vždy museli učit vzorečky a vše řešili podle předem daného postupu, je mi z toho nanic. Zde jsem se naučil věci odvozovat logicky.“
- „Nikdy bych si nemyslela, že mě matematika zaujme. Vždy mi šla lépe čeština. Bavilo mě to, měla jsem chuť do učení, chtěla jsem vše pochopit. Dala jste všem stejnou šanci, nikoho neponižovala, o to jde.“
- „Můj vztah k matematice se díky tomuto kurzu změnil, a za to jsem vděčný. Rád bych proto začal s matematikou pracovat jinak než dosud, chápat její souvislosti. Díky osobnímu přístupu a hlavně uctivému ke studentům matematicky nezdatným si myslím, že k tomu mám konečně velkou příležitost.“
- „Mé hodiny matematiky na střední škole byly kritické. Měla jsem naučené vzorečky a věděla, do kterého příkladu který dosadit. Tady na VŠ jsem pochopila, že úloha může mít několik řešení a že na to mohu přijít sama. Nikdo mě nedirigoval a připadám si tady svobodně. Mám možnost říct svůj názor a nemusím se stydět, i když je to

špatně. Konečně vím, co matematika znamená, a nemusím říkat, že z ní mám strach. Matematika mě začala bavit.“

- „Hodiny matematiky na VŠ mě mile překvapily. Je to nesrovnatelný rozdíl s gymnáziem. Strach a nervozita se vytratily a začala jsem se těšit na příští hodinu. Vážím si vyučující, která nikdy nikoho nepodcenila, nezaškatulkovala, naopak dodávala sebevědomí, že každý má šanci uspět.“
- „Oproti středoškolské matematice, která se mi zdála nezáživná, nudná a zbytečná, mě hodiny matematiky na VŠ příjemně překvapily. Řešíme zajímavé úlohy, které alespoň k něčemu jsou, rozvíjejí naše myšlení.“
- „Řešíme příklady, které jsem nikdy před tím neřešila, nebo jsem se nad nimi dostatečně nezamyslela. Poznávám nové souvislosti a principy a začínám mít pocit, že matematika stejně jako hudba je stále mezi námi, stále přítomná, nepopsatelná, nekonečná, ukazuje nám určitý řád a eleganci, které můžeme cítit nejen v číselných příkladech, ale i v situacích každodenního života. Přináší nám čilost ducha, který by nikdy neměl ustrnout na jednom stálém bodě.“
- „Na pedagogické fakultě přišla ‚jiná‘ matematika. To ‚jiné‘ bych charakterizovala jako zvláštní, zajímavé, badatelské, průzkumné, pokusné.“
- „Mohu říci, že jsem si náplň hodin matematiky určených pro budoucí učitelky prvního stupně nedokázala představit. Zatím ale přiznávám, že jsem obsahem poměrně mile překvapena. Studenti matematicko-fyzikální fakulty by se sice asi malinko pousmáli, kdyby nás viděli, jak se lopotíme s příklady, na které oni nejspíše jen ‚kouknou a vidí‘, ale mně tyto typy maximálně vyhovují. Patřím spíše k lidem, kteří si všechno potřebují umět představit. Proč tedy počítat třeba v imaginárním čtyřrozměrném prostoru, když lidé znají jenom trojrozměrný? Úlohy, které řešíme v seminářích, se mi zdají logické, ze života, potřebné pro mou budoucí praxi a nakonec i poměrně zábavné. Důkazem toho je fakt, že když si sednu k domácímu úkolu z matematiky, zaberu se do počítání tak, že nemůžu přestat, dokud nemám výsledek. To se mi dříve nestávalo. Doufám, že mi tato radost z matematiky vydrží i v následujících semestrech, nebo že dokonce ještě vzroste, protože sama ze své vlastní zkušenosti vím, že pro žáky neexistuje žádné větší požehnání než učitel, kterého to, co učí, skutečně baví.“
- „Matematika na vysoké škole mě překvapila. Líbí se mi. Ta středoškolská mě často odrazovala tím hektickým počítáním obrovského množství příkladů založených na stejné nebo podobné početní operaci. Je mnohem zajímavější a možná i proto přínosnější zabývat se jedním příkladem delší dobu než tu, která je pro dosažení výsledku nezbytně nutná, tedy tak, jak je zvykem v seminářích – vymýšlet jiné varianty postupu, jiná zadání, diskutovat. Hodiny plynou volně a nenásilně a není z nich cítit, že je osnovami přesně určeno, čím a kdy se musíme zabývat. Je krásné se hluboce zamyslet a porozumět.“

- „Další a zatím poslední setkání s matematikou se odehrálo na pedagogické fakultě. Před zahájením kurzu ÚSMA jsem neměl ani matnou představu o tom, co mě čeká. Hádal jsem, že to bude buď naprostá ztráta času, při níž se budeme zabývat příklady typu $5 + 5$, to bude navíc doplněno úchvatnou přednáškou o tom, jak na ty děti jít. Anebo jsem předpokládal situaci zcela opačnou, mám na mysli návrat ke středoškolské matematice, ze všech logaritmů, funkcí a rovnic o několika neznámých mi naskočila husí kůže. Evidentně jsem od tohoto kurzu nic závratného neočekával. O to víc jsem byl také potom překvapen, a to velmi mile. Náplň jednotlivých seminářů se mi zamlouvala od samého počátku. Příklady, které jsme na hodinách řešili, byly vybrány opravdu skvěle. Většinou už jen samotné zadání úloh svádělo k tomu se do řešení okamžitě pustit. Jak jsem se však mnohokrát přesvědčil, nebylo nijak snadné se dopracovat ke správnému výsledku, přijít na ten pravý způsob řešení. Kolikrát jsem si do noci lámal hlavu nad jednou z těchto rafinovaných úloh. Bezmoc, vztek, nápad, nic! A takhle několikrát dokola. A pak to přišlo. . . , pocit vítězství, obrovská radost! Jo, dokázal jsem to, ty dvě hodiny za to stály. Nádhera! Mně osobně udělalo velkou radost, že k řešení není třeba znát vzorce či nějaká matematická pravidla. Místo toho zadání příkladu donutí člověka intenzivně přemýšlet, třídit informace, logicky uvažovat. A to je přesně to, co mi v záplavě všech humanitně orientovaných věd tolik chybělo.“

9.7 Třetí série ukázek ze seminárních prací studentů

První i druhá série ukázek ze seminárních prací studentů obsahují části esejí věnované zcela konkrétnímu období jejich dosavadního života, jsou jakoby vytrženy z kontextu, neumožňují nám sledovat vývoj postoje k matematice komplexně v celé šíři. Z tohoto důvodu uvedu několik ukázek podstatných částí studentských esejí, z nichž je vývoj postoje k matematice u vybraných jedinců zcela patrný.

- „$1 + 1 = 2$, $5 - 2 = 3$. . . Takto bych mohla pokračovat do nekonečna. Tak se mi vybaví tento předmět. Vzpomínám si, jak jsem se seznamovala s číslicemi. Psali jsme je stále dokola. Hlavně ty osmičky, ty mi daly zabrat! Jako sněhuláček, opakovala mi maminka. A pak už to šlo rychle. Sčítání, odčítání, násobení, dělení a vlastně taky množiny. První stupeň byla hračka. Na druhém začalo přituhovat. Ale měla jsem štěstí. Dostali jsme perfektního učitele, který dovedl upoutat. U ostatních předmětů je to snazší. Dějepis se může obohatit poutavým příběhem, v zeměpisu shlédnout zajímavý dokument, v chemii jsou pokusy. Ale co v případě matematiky? Ale náš učitel to dokázal! Celý můj sešit vypadal jako kuchařka. Ne, nedělám si legraci. Vždy, když jsme začali probírat novou látku, nadepsali jsme si stránku jako ‚RECEPT‘. Měli jsme recepty na rovnice, úlohy i geometrii. Pan učitel byl taková Rettigová s kružítkem. Měli jsme ho moc rádi a matematika byla najednou přitažlivější a zajímavější. Po prázdninách jsme dostali jinou paní učitelku. A začaly, až na pár jedinců, těžké dny. Najednou byla matematika strašák, který nám přinášel hořce strávených 45 minut, pětkrát týdně. Matematika se mi poprvé přehoupla z oblíbených předmětů do kategorie velmi neoblíbených. A od té doby se z ní už nedostala. Myslím, že jaký máme vztah k daným předmětům, se z velké části odráží od toho, kdo nás učí.“

- „Můj vztah k matematice prodělal během mého dosavadního života několik zvratů. Nevzpomínám si, kdy jsem se vůbec poprvé s matematikou setkala, neboť jsem ještě tento pojem neznala a nepřipouštěla jsem si, že by se mohlo jednat o nějakou vědu. Prostě a jednoduše jsem používala jednoduchou matematiku při hře a z nějaké té chybičky jsem si nedělala hlavu.

  Pak nastala školní léta, která mne dovedla k poznání, že matematika je věda exaktní, že každý matematický krok je přísně verifikovatelný a tudíž jakákoli odchylka od jednou provždy stanovené matematické skutečnosti bude odhalena. Na matematiku prvního stupně vzpomínám v dobrém, neboť jsem v ní dosud nespatřovala žádnou záludnost a zákeřnost, vše bylo logické a celkem přirozené.

  Dokonce ani druhostupňová matematika ve mně nevzbuzovala odpor, naopak jsem se těšila na slovní úlohy a úsměv milé paní učitelky, který byl tou nejsladší odměnou. Byla to krásná léta. Stačilo mi tenkrát tak málo, abych se nadchla a zapálila pro věc, abych milovala vše, co mi bylo dáno úkolem. Hlavním motivem mi tenkrát byla spokojenost paní učitelky, hlavně ji nezklamat – to byl hnací motor veškerého pokroku mého já.

  A poté udeřila puberta, která se velmi asertivně projevila v období přestupu ze základní školy na gymnázium. Někam se postupně vytratil nekritický obdiv k učitelům. Mé období vzdoru se nejvýrazněji projevovalo právě v hodinách matematiky, ke které jsem začala pociťovat nepřekonatelný odpor a zaujala jsem vůči ní postoj pasivní rezistence.

  Dnes už ani přesně nevím, co bylo to prvotní zlo, které mne postavilo na opačnou stranu barikády, co učinilo z matematiky mého nepřítele. Nejspíš to nebyla příčina jediná. Jako bych ztratila víru v matematickou pravdu, která ke mně najednou hovořila cizím jazykem, roztahovala se v mém světě a já si to nechtěla nechat líbit. Od nepřívětivého světa čísel, všech těch záhadných x a y jsem utíkala do světa slov, která dokážou člověka pohladit, potěšit a dát mu pocit života, který je plný svobody a alternativ, který nemá jednoznačné řešení.

  Nechuť k matematice byla jedním z kritérií při výběru vysoké školy. Rozhodla jsem se studovat práva. A tak jsem se za stohy právních předpisů na pět let schovala před matematikou, abych se učila jinému druhu logiky.

  Cesty osudu jsou nevyzpytatelné, a tak jsem nakonec opustila právní praxi, abych se vrátila ke svému dávnému snu, být kantorem. Přes trochu nepochopení ze strany mého okolí jsem se vrhla do studia učitelství 1. stupně a po letech úspěšného vyhýbání se matematice, jsem se jí ocitla tváří v tvář. A jaké bylo mé překvapení, když jsem zjistila, že to není nic tak odporného, jak jsem si od gymnaziálních let myslela. Možná je to výběrem témat, výkladem kantora, jeho přístupem, pochopením a schopností nadchnout člověka pro něco, čemu již dávno ukázal záda. Možná je to také tím, že ze mne za těch osm let, které mne dělí od maturity, vyprchala touha bouřit se proti všemu, co mi tak úplně není po vůli a změnila se v jiné metody vypořádání se s problémy. Teď už matematiku nechápu jako svého nepřítele, ale jako výzvu sobě samé, jako příležitost dokázat víc, než si myslím, že ve mně je."

- „Na prvním stupni jsem se, co se týká matematiky, vesměs nudila. Učitel nebyl moc vynalézavý. Sčítání a odčítání jablek a hrušek na magnetické tabuli a soutěž, kdo neudělá početní chybu, byly asi jediným zpestřením nudných sloupečků v učebnici. Ještě si pamatuji na pracovní sešit, který jsem postupně přeměnila na sbírku nejprve razítek s hvězdičkou a později jedniček. I přesto jsem ale měla mnohem radši český jazyk – na čtení a dokonce i psaní jsem se těšila mnohem víc, než na matematiku. Na druhém stupni jsem nebyla příliš dlouho, a tak mi žádný konkrétnější pocit z tohoto předmětu neutkvěl. Ovšem na sedmiletém gymnáziu byla matematika s fyzikou tím nejhlavnějším zdrojem permanentního stresu, a to tak obrovského, že i o víkendech a o prázdninách jsem se v noci probouzela hrůzou, že budu muset opět vstoupit do učebny s nápisem na nástěnce: ‚Je-li matematika královnou věd, je fyzika zajisté princeznou.' Paní profesorka přicházela se zvoněním do mrtvolně ztichlé třídy, propichovala žáky očima a měla ve zvyku nechávat propadnout i devět žáků jedné třídy. Jsem šťastná, že už pomalu začínám zapomínat, jak tyto hodiny probíhaly, ale myslím, že na ty stavy před téměř každou hodinou matematiky, jako je studený pot po celém těle, špatně od žaludku a drkotání zuby, nikdy nezapomenu. Také mi hned vytanou na mysli desetiminutové rozcvičky, studenty přezdívané ‚kolečka smrti'. Spočívaly v tom, že profesorka třikrát objela třídu otázkami. Když žák odpověděl hned a správně, poznamenala si malou jedničku, odpověděl-li se zaváháním, psala si malou trojku, v každém dalším případě to byla ‚čistá pět'. Za zmínku stojí i zkoušení. Profesorka sklonila hlavu nad svým sešitkem, tím bylo třídě jasné, že se nebude začínat výkladem, a do hrobového ticha zaznělo bezbarvým hlasem jméno nešťastníka. Jmenovaní se okamžitě zvedli – už si za ta léta zvykli, že je zakázáno zdržovat, nebo dokonce mluvit a bledí a odevzdaní osudu nastoupili před tabuli. Někteří se tam netrápili dlouho, ‚čistou pět' dostali hned, jak vypustili první větu z pusy. Jiní bojovali déle, vzdávat se bylo také zakázáno. Stupnice známkování přesně odpovídala výkonu a chování žáka při zkoušení. Známku ovlivňovala doba přemýšlení, doba počítání, nespočítání zpaměti, ale písemně pod sebe, není početní chyba jako početní chyba a není neznalost jako neznalost. Co ale musím zdůraznit, paní profesorka byla ke všem krutá a nelítostná stejně. V tomto ohledu byla opravdu spravedlivá. Dále musím říci, že za celých sedm let se v hodině přepočítala asi dvakrát a že by si s nějakým příkladem nevěděla rady, to se nestalo ani jednou. Nemohu však pochopit, proč genialitu v matematice vyžadovala i po nás za cenu psychického deptání, kterého si musela být vědoma. Kromě toho, že tyto hodiny ve mně zanechaly celkem pevné základy matematiky, zůstal mi pocit ohromného respektu, který hraničí až s odporem. Také se ve mně umrtvily veškeré sympatie ke gymnáziu, na tom se ale podíleli i jiní učitelé a jiné předměty. Jsem moc ráda, že na pedagogické fakultě jsem se setkala s naprosto odlišným přístupem k vyučování matematiky a vlastně i k samotnému předmětu. Zapisovala jsem si ho a dělala se mi husí kůže hrůzou. Ale teď jsem docela klidná a hlavně šťastná, že vím, že to špatné není v předmětu."

- „Je to zajímavé, ale na matematiku si vzpomínám až jako desetiletý žáček 5. třídy druhého stupně ZŠ, kdy jsme dostali nového učitele. Tento výjimečný učitel byl velmi mladý, hodný a milý. Stejně jako on byl naším prvním učitelem matematiky na druhém stupni, i my jsme byli jeho první třída, kterou začal vyučovat. Byl pro nás vším. Třídním učitelem, ale hlavně kamarádem, na kterého jsme se mohli spolehnout, kdykoli se mu svěřit a věděli jsme, že nám s čímkoli pomůže. Samozřejmě jsme museli dodržovat určitá pravidla a zásady, které určoval, ale právě o to to bylo zajímavější a přidávalo to na hodnotě našeho vztahu. Moc jsem si ho vážila a dodnes na něj vzpomínám jako na nejlepšího učitele, kterého jsem za celý svůj život poznala. Bohužel nás v polovině 7. třídy opustil a od té doby si na vzdělávání v matematice na základní škole nevzpomínám.

  Paní profesorka na střední škole byla zvláštní osoba. Dokázala naučit, ale měla k nám ke studentům úplně jiný přístup. Dalo se velmi lehce vycítit, že ‚nemá ráda lidi' a že nerada učí. Byla na nás nepříjemná a často někoho urážela, či ponižovala. Bála jsem se jí a postupně jsem k matematice začala cítit odpor.

  Překvapilo mě, že když jsem nastoupila na vysokou školu a prošla pár hodinami matematiky, tak nejen, že to pro mě nebyl a není neoblíbený předmět, ale je to jeden z předmětů, na jehož hodiny se těším, a ráda doma uvažuji nad zadanými úlohami, a když se mi povede je vyřešit, moc mě to potěší. Také mě překvapilo, že nemám ráda lehké úlohy, ale naopak ty složitější, nad kterými se musí přemýšlet. Takže kdybych měla zhodnotit svůj nynější postoj k matematice, musím konstatovat, že je pozitivní!"

- „Naše hodiny matematiky spočívaly v docela dobře zaběhnutém stereotypu: zkontrolovat úkol, nešťastného vyzkoušet u tabule před celou třídou a ‚jet'. Slovo ‚jet' dobře vystihuje, co učitel provádí při matematice: rozevře tabuli, začne řešit příklad vlevo nahoře a nezastaví se, dokud není vpravo dole. Když tam dorazí, smaže tabuli, ale urychleně, abychom stihli jet podle osnov, a vyrukuje na nás s dalším příkladem. Ani nemluvím, jak naše učitelky matematiky vypadaly – matikáře jsme měli jen v 5. třídě, a to pouze na stáž na čtyři měsíce. Učitelky se dělily na dva druhy – ‚ošklivky' a ‚nebezpečné'. ‚Ošklivky' ještě ušly, z těch alespoň nešel děs a hrůza, neboť na nich bylo docela dobře vidět, že mají také své chyby, a tak nám občas tolerovaly ty naše. Ale ‚nebezpečné‘ učitelky byly ty, co považovaly za osobní prohru mít ve třídě matematického laika, a dávaly mu to pěkně najevo. Asi původně chtěly na vojenskou akademii, ale z nějakého neznámého důvodu jim to nevyšlo. Tak se mstily. Šeď, nudu a nechuť k hodinám matematiky občas rozčeřily mladé, nadějné studentky pedagogické fakulty, které byly milé, mladé, pohledné a hlavně přišly s netradičními formami matematiky, takže jsme se dočkali místo nudného biflování vzorečků i nějakých her a soutěží, které nebyly na známky, takže motivovaly i ty méně schopné.

Základní škola byla za mnou a já měla novou hrůzu před sebou – přijímačky na gymnázium. Začala jsem chodit na doučování z matematiky k takové staré paní domů. Tato dáma měla několik desítek let praxe a dokázala se mnou nemožné. Háček je v tom, že na to šla jiným způsobem než učitelé ve školách. Nechávala mi prostor na rozmyšlenou, vysvětlovala mi postupy úplně laicky, a když poznala, že mi to není jasné, nešla se mnou dál, dokud mi to jasné nebylo. Naučila mě matematicky myslet a matika mě začala bavit.

Pak jsem se opravdu dostala na gymnázium a začalo znovu to, co na ZŠ. Naštěstí jsem seděla v lavici s dívkou, která matematiku ovládala docela dobře. Hodiny matematiky probíhaly tak, že profesorka mluvila u tabule nejspíš arabsky, neboť jsem jí nerozuměla ani slovo, a spolužačka vedle mě mi to překládala z arabštiny do češtiny. Gymnázium jsem tak díky této spolužačce absolvovala s trojkami z matematiky.

A teď jsem tady. Snaží se, aby z nás ‚udělali‘ učitele – profesionály, tak se snaží, abychom sami mysleli. To je dobré, ale přesto hodnotím matematiku jako pro mě nejtěžší předmět. Máme si sami doma přicházet na řešení, připravovat se na testy, psát seminární práce, a tak i když je zde matika zajímavá, je zase tak obsáhlá, že člověk nemá tolik času, kolik by potřeboval, alespoň já ne. Jinak to nejde, já vím. Zjistila jsem aspoň, že matematiku nemusí učit jen staré, zlé babizny, nýbrž lidé, kterých si člověk může vážit.“

Anketa

I když nám ukázky uvedené v poslední sérii poskytují komplexnější pohled na vývoj postoje k matematice u několika vybraných jedinců, nelze si na jejich základě utvořit představu o četnosti jednotlivých kvalit postojů. Z tohoto důvodu jsem v rámci kurzu K 31 uskutečnila v zimním semestru 2002/03 anketu, v níž se měli studenti vyjádřit anonymně o kvalitě svého postoje k matematice, s nímž přicházejí na fakultu ze střední školy. Dovoluji si připomenout, že se ankety účastnili studenti, kteří splnili podmínky vstupního testu a díky tomu navštěvovali uvedený kurz přímo ve zmíněném zimním semestru. Byla jim nabídnuta pětibodová škála:

5 bodů: matematika patřila k mým nejoblíbenějším předmětům,
4 body: matematika patřila spíše k oblíbeným předmětům, měl jsem však předměty ještě oblíbenější,

3 body: neutrální postoj,
2 body: matematika patřila k méně oblíbeným předmětům, měl jsem však předměty ještě méně oblíbené,
1 bod: matematika patřila k mým nejméně oblíbeným předmětům.

Anketa byla vyhodnocena takto: 5 bodů uvedlo 10 % studentů, 4 body 15 % studentů, 3 body 45 % studentů, 2 body 20 % studentů, 1 bod 10 % studentů. Anonymnost ankety, která měla zvýšit upřímnost studentů při vyjádření jejich postoje, však neumožnila zjistit korelaci kvality postoje s výkonem ve vstupním testu.

Z výsledků ankety je zřejmé, že práce se studenty v úvodu jejich studia matematických disciplín na fakultě je velmi náročná.

9.8 Závěrečné zamyšlení

Nedávno se mi do ruky dostala kniha (Bono 1998) a některé myšlenky zde uvedené na mě silně zapůsobily, a to i v souvislosti s tím, čemu byla věnována tato kapitola. Na jedné straně ukazují, že lze, a to dokonce úspěšně, rozvíjet myšlení i méně nadaných jedinců. Na druhé straně nám umožňují alespoň částečně pochopit arogantní chování některých vyučujících matematiky, které studenti ve svých sebereflexích, bohužel ne ojediněle, popisují; nejen chování samo, ale i jeho důsledky. Kéž by to byla pouze zmíněná arogance inteligence a ne arogance jako charakteristický rys osobnosti pedagogů.

Výmluvné jsou zejména tyto citáty (Bono 1998, s. 167–169):

> . . . domníváme se, že lidé s vyšší inteligencí už nemusí pro své myšlení nic dělat. Myslíme si, že lidem se skromnější inteligencí není pomoci.
>
> Inteligentní člověk si dokáže udělat názor na určitý problém a tento názor velmi obratně hájit. Čím lépe je schopen svůj názor obhájit, tím méně je nakloněn tomu, aby se skutečně problémem zabýval. Takže vysoce inteligentní člověk se může chytit do pasti jediného názoru, a to jednak vinou své vlastní inteligence a jednak vinou naší obvyklé logiky, která nám říká, že máte-li pravdu, pak jí nemůžete mít víc. Méně inteligentní jedinec si je méně jistý svou pravdou, a proto je při zkoumání problému i ostatních stanovisek mnohem svobodnější.
>
> Velmi inteligentní člověk obvykle vyrůstá s přesvědčením o své intelektuální nadřazenosti a potřebuje, aby ostatní viděli, že má pravdu a je chytrý. Inteligentní lidé často podléhají dojmu, že negativita se rychle vyplácí. Pokud napadnete cizí myšlenku nebo nápad, můžete dosáhnout okamžitého úspěchu a pocitu převahy.
>
> Inteligentní mozek pracuje rychle, někdy až příliš rychle. Vysoce inteligentní člověk může po několika prvních signálech dospět k závěru, který není tak dobrý jako ten, ke kterému dospěje někdo pomalejší, kdo musí přijmout více signálů, než k závěru dokáže dojít.

> Peníze se hodí, když si chceme koupit rychlé auto. Geny jsou užitečné, když chcete být inteligentní. Ale pouze to, že máte rychlé auto, z vás neudělá dobrého řidiče. I silný vůz můžete řídit špatně, ale někdo jiný může výborně řídit mnohem skromnější vůz. Síla motoru a konstrukce automobilu poskytují potenciál. Tento potenciál se uplatňuje díky zručnosti a schopnostem řidiče. Podobně i inteligence je takový potenciál mysli a uplatňuje se díky myšlenkovým dovednostem. I silný mozek lze špatně používat, zatímco mnohem skromněji vybavený mozek lze řídit velmi dobře.
>
> Myšlení lze definovat jako schopnost ovlivňovat působení inteligence na zkušenost. Potřebujeme rozvinout myšlenkové dovednosti, abychom s jejich pomocí dokázali plně využít potenciál, který nám zkušenost nabízí. Nadaní studenti (jedinci s velmi vysokým IQ) potřebují myšlenkové dovednosti rozvíjet stejně jako všichni ostatní – a snad i o něco víc, aby tak dokázali překonat přirozenou aroganci své inteligence.

V závěru příspěvku uvedu některé další myšlenky E. de Bona (1997).

Autor charakterizuje šest způsobů myšlení, každý z nich spojuje s představou existence jakéhosi zázračného klobouku, tedy celkem šesti klobouků, které jsou odlišeny barvou. Jestliže si nasadíme na hlavu zázračný klobouk příslušné barvy, začneme přemýšlet očekávaným, předem popsaným způsobem.

Člověk, který začíná pracovat se studenty, jejichž matematické schopnosti jsou omezené a postoj k matematice spíše záporný, si nutně musí položit otázku, jaký klobouk si má vědomě nasadit na hlavu před vstupem do posluchárny. Bude zřejmě barvy žluté. (Všechny následující citáty tohoto oddílu jsou z knihy Bono 1997, s. 99–119.)

> Když si člověk nasadí na hlavu žlutý klobouk, začne se především řídit požadavkem, aby se k věci stavěl pozitivně a optimisticky. Myšlení se žlutým kloboukem je cílevědomé pátrání po přednostech a hodnotách, i když je to pátrání někdy marné. . . .
>
> Často se setkáváme s názorem, že pokud není přednost na první pohled zřejmá, celá věc asi nemá valnou cenu. Obdobně lze slyšet tvrzení, že je zbytečné lámat si hlavu nad tím, kde a jak vypátrat jakési skromné klady, když nakonec budou mít zřejmě mizivou praktickou hodnotu.

Takto zřejmě uvažuje většina středoškolských profesorů při setkání se studenty, podle jejich názoru pro matematiku nenadanými.

> My však musíme prohlásit, to je zásadní nepochopení. Důležité pozitivní momenty mohou existovat, ale vůbec nemusejí být na první pohled patrné. Musíme dokázat vidět hodnoty tam, kde je ostatní zatím vůbec nepozorovali.

Avšak i E. de Bono upozorňuje, že optimismus některých lidí se žlutým kloboukem na hlavě hraničí s pošetilostí, a klade si otázku, kdy optimismus přechází v bláznivou naději. „Přehnaný optimismus vede obvykle k nezdaru, ale prohra není nevyhnutelná. Uspějí jen ti, kteří v úspěch skálopevně věří.“

Domnívám se, že je nutné, aby si žluté klobouky nasadili i naši studenti.

> Jakmile máte totiž na hlavě žlutý klobouk, je vaše myšlení vyzváno, aby přišlo s nějakým nápadem. Je to touha přicházet v vlastními konkrétními návrhy, třebaže jsou velmi obyčejné. . . .
>
> Myšlení se žlutým kloboukem na hlavě je víc než usuzování a produkování návrhů. Je to způsob myšlení, které předbíhá vývoj událostí v očekávání nadějných výsledků. Je velice obtížné cokoli dělat, pokud nemáte pocit, že dosáhnete jistého úspěchu a vytvoříte nějakou hodnotu. Vzrušující a podněcující účinky vize daleko překračují objektivní usuzování. . . .
>
> Vize dává myšlení a činům směr. Samotné rozhodnutí dívat se na věc pozitivně může způsobit, že ji vnímáte jinak. Sklenice nemusí být poloprázdná, ale jen napůl plná!

Argumentem pro zdravý optimismus a ne pouhou bláhovou naději na úspěch jsou pro nás názory, hodnocení a postoje studentů uváděná v jejich sebereflexích postoje k matematice (viz oddíl 9.6).

Samozřejmě, že existují studenti, kteří se ve svých esejích nezmiňují o změně svého postoje k matematice během prvního semestru studia na fakultě. Nebylo to totiž zadáno, oni splnili úkol a zřejmě necítí potřebu spontánně cokoli v tomto smyslu sdělit. Mohou to být rovněž studenti, jejichž postoj k matematice se přes naši maximální snahu nepodařilo ovlivnit, např. proto, že došlo k výraznému nesouladu mezi vývojovým stadiem autoregulace učení u těchto studentů a pojetím výuky učitele, který nabízí více volnosti, svobody a samostatnosti než dokáží unést.

V průběhu vysokoškolského studia lze, podle mého názoru, jako optimální označit nenásilný přechod mezi nejvyššími stadii autoregulace učení (Mareš 1998, s. 165, podle G. O. Growa 1991):

- žák je plně zaangažován na svém rozvoji, učitel je partner, člověk usnadňující rozvoj,
- žák se ujímá řízení sebe sama, přebírá odpovědnost za průběh a výsledky svého učení,
- učitel deleguje část svých kompetencí na žáka, ustupuje do role konzultanta, kolegy.

Může docházet rovněž k paradoxní situaci, kdy studenti nejsou zcela spokojeni s učiteli, kteří se snaží naučit hloubkovému přístupu k učení, oni však preferují spíše povrchové styly učení, které úzce souvisí s úrovní jejich velmi nízkého sebepojetí, které se utvořilo v průběhu předcházejícího studia.

9.9 Výhledy

Každý vyučující je s největší pravděpodobností přesvědčen o významu zpětné vazby ve vyučování matematice. Mnohdy však zřejmě chápe zpětnou vazbu pouze úzce ve smyslu obsahovém. Prověří si zvládnutí dané problematiky při řešení úloh testem či jinou formou. Dlouhodobé sledování a analýza studentských esejí vyústily v přesvědčení o nutnosti chápat zpětnou vazbu v širším smyslu, zajímat se rovněž o kvalitu „prožívání“ učení se matematice. Jedině tak může být vyučující plně informován o účincích svého působení a může je na základě toho určitým způsobem modifikovat s cílem vytvořit pozitivní klima při vyučování a učení se matematice.

Ukazuje se proto jako užitečné pokračovat v analýze sebereflexí postoje studentů k matematice, a to nejen v rámci disciplíny Úvod do studia matematiky, ale sledovat rovněž další vývoj postoje studentů v průběhu studia následných matematických disciplín v rámci nového studijního plánu učitelství pro 1. stupeň základní školy na Pedagogické fakultě UK.

Kapitola 10

Koncepce matematické přípravy budoucích učitelů prvního stupně základních škol

Milan Hejný

10.1 Formulace problému

Studenti přicházející na pedagogickou fakultu studovat primární pedagogiku si přinášejí z předchozích škol nejen matematické znalosti, ale i vztah k matematice, hierarchii pedagogických hodnot, styl učení se a vzory pro styl vyučování.[1] Jsou mezi nimi i lidé, kteří měli štěstí na dobré učitele, kteří věří vlastním rozumovým schopnostem a nejsou ochotni konzumovat poznatky, aniž by si je sami ve svém vědomí neprověřili nebo spíše nově nekonstruovali. Bohužel více je těch, kteří o vlastních schopnostech pochybují a náročnější myšlenky se nesnaží pochopit, protože jsou přesvědčeni, že by to bylo marné. Naučí se tedy příslušná fakta zpaměti.

Tradiční vysokoškolská příprava budoucích učitelů je založena na prezentaci hotových ucelených teorií a nácviku řešitelských postupů vybrané skupiny úlohových typů. To většinou odpovídá předešlé zkušenosti posluchačů, kteří i zde, stejně jako na střední škole, zvládají matematiku hlavně pamětí. U zkoušky úspěšně odříkají definice, věty a důkazy a nacvičenými postupy vyřeší standardní úlohy, aby v další generaci opakovali stejný model učení se matematice založený na reprodukci a imitaci, bez zvídavosti a tvořivosti. Neradostný stav klade před obec didaktiků a učitelů pedagogických fakult otázku, zda existují způsoby jak situaci měnit k lepšímu. Tak zní problém, o jehož částečné řešení se pokusíme.

[1] Viz výpovědi budoucích učitelů 1. stupně v kap. 9.

Hledáme takovou koncepci přípravy budoucích učitelů 1. stupně základní školy v matematice, která by přispěla k posunu edukačních přístupů další generace těchto učitelů ve směru od transmisivního vyučování k vyučování konstruktivistickému (viz kap. 1).[2]

Uvedený problém je výrazně náročnější, než bývají běžné didaktické problémy zaměřené na zkvalitnění výuky. V nich se obyčejně jedná o hledání cest, jak otevřít žákům nebo studentům tu nebo onu oblast matematiky. Zde jde o působení na pedagogické přesvědčení budoucích učitelů a prostřednictvím učitelů pak na ovlivňování memu[3] naší společnosti. Tento širší rozměr našeho problému rozvedeme blíže.

10.2 Celospolečenské a historické souvislosti

K základním principům každého totalitního režimu patří jednotnost a instruktivnost. Život občana je řízen přesnými pravidly, jeho osobnímu rozhodování je ponechán jen malý prostor, který je přísně ohraničen. Jakékoli spolčování se mimo předepsané a ideologicky pevně vedené komunity je stíháno. Demokratická různost je každé totalitě nebezpečná. Když u nás v roce 1948 komunisté převzali moc a začali společnost svazovat a organizovat do přesně vymezených kategorií, bylo školství v popředí jejich zájmu. Školství bylo prohlášeno za první linii ideologické fronty. Zákon o jednotné škole zavedl jednotu makrostruktury školského systému. Jednotné osnovy i učebnice, jednotné metodické postupy i klasifikační techniky prosazované školní správou a inspekcí, která byla zdatná spíše ideologicky než odborně, potíraly všechny projevy demokracie a osobnosti učitelů. Učiteli byl systematicky vnucován velice jednoduchý vzorec práce:

1. učitel předkládá hotové poznatky, demonstruje řešitelské postupy,
2. žák se snaží poznatky si zapamatovat a postupy nacvičit,
3. cílem zkoušeného žáka je co nejvěrněji reprodukovat poznatky a imitovat řešitelské postupy.

Učitel, který dodržoval tato pravidla, se nemusel obávat neúspěchu. Společnost od něj nechtěla, aby cítil odpovědnost za vzdělání a výchovu žáků. Chtěla, aby plnil předepsané postupy. Horlivost v tomto směru pak odměňovala.

Dodejme, že i když podobná situace byla i v dalších totalitních zemích, Československo bylo, pokud jde o ideový tlak na školství, na tom asi nejhůře. Tato skutečnost je dána historicky a její podstatu formuloval již F. Palacký výrokem „kdykoli jsme vítězili, zbraněmi ducha jsme vítězili“. Proto se naši komunističtí vládcové obávali především inteligence, a proto byl u nás ideový tlak na školství tak urputný.[4]

[2] Příspěvkem k řešení tohoto obecného problému jsou i kap. 11, 12, 13 a 14.

[3] Viz poznámka po čarou, s. 54.

[4] Konečně historie potvrdila oprávněnost těchto obav, neboť to byla inteligence, zejména Charta 77, kdo se nejvíce přičinil o pád totality u nás.

Čtyřicet let systematického působení těchto principů značně poznamenalo osobnost učitele i metody jeho práce. Oslabilo jeho vůli tvořit, zbavilo jej pocitu odpovědnosti za výsledky své práce, a vnutilo mu strategii přizpůsobování se požadavkům shůry. Prostoupilo vědomí nejen školství, ale i celé společnosti. I dnes se rodiče spíše zajímají o známky svého dítě než o jeho vědomostní i osobnostní rozvoj. Světlou výjimku tvoří cizí jazyky, kde rodiče spíše než o jedničku stojí o skutečné komunikační dovednosti dítěte. Pokud jde o matematiku, přetrvává memorování a nacvičování. Je třeba tuto situaci měnit nejen proto, aby se zvýšila kvalita matematického poznání žáků, ale i proto, aby matematika nepřispívala k udržování totalitou budovaného memu naší společnosti. Proto je tato změna součástí procesu demokratizace celé společnosti. Její význam tedy daleko překračuje oblast matematického vzdělání příští generace.

10.3 Teoretická východiska a metoda práce

Výchozím bodem naší studie je zmapování existující situace, tedy charakteristika posluchače primární pedagogiky – poznání jeho názorů na matematiku a vyučování matematice, jeho pedagogických i didaktických postojů a přesvědčení. K tomu nám budou sloužit i sebereflexe studentů uvedené v kap. 9. Dále je nutno porovnáním existujícího a kýženého stavu identifikovat ty fenomény, které tvoří hlavní překážku pro požadovanou změnu. Pak v nejnáročnější etapě výzkumu je třeba hluboce analyzovat identifikované fenomény a na základě výsledků analýzy hledat konkrétní cesty, jak tyto překážky utlumit.

Vzhledem k tomu, že výzkum probíhá paralelně s výukou, je třeba výuku chápat jako součást výzkumu. Je třeba permanentně registrovat vše, co se odehraje na přednáškách nebo cvičeních a jeví se jako závažné z hlediska zkoumané problematiky. Soustavně diskutovat se studenty o jejich názorech, postojích a změnách v pedagogickém i didaktickém přesvědčení, ke kterým dospěli. Nutno archivovat písemné projevy studentů, analyzovat je, třídit a novými zjištěními obohacovat existující poznání. Podstatným rysem výzkumu je jeho týmovost. Zejména při analýze písemného projevu studenta je diskuse účinný nástroj pronikání do hlubších vrstev mentálních procesů, které k danému projevu vedly.

Výzkum je longitudinální a permanentní v tom smyslu, že v něm neexistuje finální stav. Lze pouze formulovat jednotlivé výsledky nebo popsat stav výzkumu v dané etapě, ale nelze výzkum prohlásit za uzavřený. Dílčím výsledkem je vydání skript (Hejný; Jirotková 1999) a dalším pak vydání monografie (Hejný; Stehlíková 1999). Specifikem práce je permanentní změna výzkumného materiálu. Stále se měnící soubor vstupního materiálu nedovoluje standardní výzkumnou práci s přesně vymezeným souborem dat. Navíc učitel – výzkumník, který nový jev eviduje, bývá svým osobním prožitkem ovlivněn a je pro něj těžké objektivně jej analyzovat. Proto jsou používány všechny tři běžné nástroje objektivizace: týmová práce, návraty k předchozím analýzám a jejich nové promýšlení a komparativní techniky, v nichž se písemné materiály propojené na přímou zážitkovou oblast výzkumníka zkoumají společně s materiály, u nichž tato vazba není.

Popsaný typ výzkumu má dva pozitivní prvky. Prvním je skutečnost, že každá nová myšlenka, každý nový nápad je možné ihned zpracovat tak, aby jej bylo možno v praxi aplikovat. Ať již jde o formu přednášky, způsob vedení semináře, výběr úloh, formy prověřování vědomostí nebo další edukační činnosti, vždy lze tyto velice brzo projektovat do praxe. Druhým je stálá zpětná vazba, kterou vyučování poskytuje. V poslední době jsme tuto vazbu obohatili o pravidelná setkávání se skupinkou posluchačů, kteří se vyjadřují ke všemu, co se v uplynulém týdnu ve výuce odehrálo.

10.4 Vstupní data – charakteristika posluchače primární pedagogiky

Posluchač, který přichází na fakultu, nemá s tím, co jej na fakultě čeká, ve většině případů žádné zkušenosti. Má jisté pocity a očekávání a většinou k nim patří i strach z matematiky. Mnozí studenti v matematice vidí hlavní překážku k získání diplomu. Očekávají, že bude ještě těžší a záludnější, než byla ta, kterou poznali na střední škole. Matematické znalosti většiny těchto studentů jsou chatrné. Pro ně jsou slovní úlohy, používání jazyka algebry nebo kombinatorické úvahy náročné záležitosti. Jejich geometrické znalosti se omezují na několik vzorců. Bojí se konstrukcí, důkazů i prostorové geometrie. Značná část studentů nedovede vysvětlit pravidlo na sčítání zlomků nebo zdůvodnit, proč je součet dvou lichých čísel číslo sudé, nebo přesně vymezit pojem čtverec. Z pojmů jako odmocnina nebo absolutní hodnota čísla mají studenti strach. Většina jejich znalostí je uchována pamětí a schopnosti jako hledání, experimentování, abstrahování, analyzování situace, formulování myšlenky, zdůvodňování apod. jsou na nízké úrovni. O těchto skutečnostech svědčí nejen vstupní písemná práce, kterou studenti píší na začátku svého studia, ale i jejich další projevy.

Nízká úroveň konkrétních znalostí a schopností není to nejhorší, co je nutno brát v potaz při hledání edukační koncepce přípravy budoucích učitelů 1. stupně. Ještě závažnější než slabé znalosti a matematické schopnosti je zkreslený pohled posluchačů na disciplínu. Z rozhovorů se studenty víme, že matematiku nechápou jako prostředí ke kultivaci myšlení, ale jako obsáhlý a chaotický soubor definic, pouček, vzorců a návodů, jehož smyslu nerozumí (viz kap. 9). Matematika se v jejich představě dělí na dvě zcela oddělené části. První je ta, kterou budou jednou sami učit. Zde je většina studentů přesvědčena, že smysl této matematiky chápou, že jí rozumí a že ji dokáží učit. Základní početní úkony jsou podle nich pro život potřebné a věří, že tyto algoritmy žáky naučí tak, jak se je naučili sami. Druhá matematika je ta, které se učili na střední škole a kterou očekávají i na fakultě. Tu se zkrátka musejí naučit zpaměti. Po absolvovaní fakulty ji pak budou moci celou zapomenout.

Avšak ani zkreslený pohled na matematiku není tou nejzávažnější překážkou pro úspěšnou přípravu budoucích učitelů 1. stupně v matematice. Tím, co zde vystupuje nejostřeji (u značné části posluchačů), je jejich nízké matematické sebevědomí. Studenti se matematice učí zpaměti a nemají snahu věci pochopit. Ne proto, že by nechtěli, ale proto, že nevěří, že by taková činnost měla smysl. Jsou přesvědčeni, že nedostatečná genetická výbava je v oblasti matematiky odsoudila do role intelektuálních nádeníků. K tomuto poznání dospěli daleko dříve, než na fakultu přišli. Někdy již na druhém stupni základní školy (když se probírají zlomky, procenta, algebra či geometrické konstrukce), ale většinou až na střední škole. Sami o tom dávají jasná svědectví (viz kap. 9, oddíl 9.4, a oddíl 10.5, bod 2).

Tři popsané úrovně překážek – nízká úroveň matematických znalostí a schopností posluchačů, jejich zkreslený pohled na matematiku a slabé intelektuální sebevědomí – jsou částečně vyváženy jejich snahou být dobrými učiteli. O své budoucí práci mají studenti celkem reálné představy a těší se na ni. Těší se na své žáky, na to, jak je budou učit, a do jisté míry i na matematiku. Vědí, že jejich úkolem bude naučit žáky základní početní algoritmy, a z toho strach nemají. Budou napodobovat své učitele a pilně procvičovat počítání. Budou dokonce lepší, než byli jejich učitelé, protože do vyučování zavedou mnohé nové výukové prvky jako hra, dramatizace, skupinové vyučování apod. Věří, že se tak matematika stane pro jejich žáky přitažlivější.

Z uvedené charakteristiky vyplývají závěry, které lze chápat jako první výstup naší analýzy. Existují čtyři hlavní *překážky* změny pedagogického přesvědčení budoucích učitelů:

1. nízké matematické sebevědomí posluchačů,
2. nedostatečné zkušenosti s konstruktivistickým přístupem ke školní matematice (viz kap. 1),
3. zkreslený pohled na školní matematiku,
4. osvojený styl učení se matematice založený na repetici a imitaci.

První překážka je zcela rozhodující, proto jí věnujeme následující oddíl.

10.5 Zvyšování matematického sebevědomí posluchačů

Řekli jsme, že základní problém, od něhož je nutné začít řešit ústřední problém, zní, jak zvýšit intelektuální sebevědomí posluchačů.

Sebevědomí se získává úspěchem. Nejde jen o zisk dobré známky, ale především, metaforicky řečeno, o krásný pocit skokana po skoku „já to přeskočil“. Na dosažení úspěchu se musí podílet celý komplex faktorů, především příznivé klima, které povzbuzuje odhodlání posluchače pustit se do řešení matematických problémů samostatně, a vhodné úlohy, které jsou na jedné straně tak jednoduché, aby je posluchač vyřešil, ale na druhé straně dosti složité na to, aby na řešení musel vynaložit takové úsilí, které přinese silnou radost z úspěchu. V průběhu několika let jsme postupně rozpracovali různé způsoby jak zvyšovat sebevědomí posluchačů, motivovat je k cílevědomé práci, otevírat jim cestu k radosti z používání vlastního rozumu. Tyto nástroje rozdělíme do dvou částí:

- *obecné*, ke kterým počítáme tvorbu povzbudivého klimatu, sebereflexi posluchačů, první pedagogické zkušenosti posluchačů a budoucí rodičovskou funkci posluchačů.
- *speciální*, které se týkají bezprostředně matematiky, zejména geometrie; u těch jde nejen o odstraňování komplexu méněcennosti posluchačů v oblasti matematiky, ale i o získávání zkušeností s konstruktivistickým přístupem k matematice, o změnu pohledu na smysl vyučování matematice a o změnu stylu učení.

Podívejme se nejprve blíže na nástroje obecné.

1. Klima. V souladu s jednou ze základních tezí konstruktivizmu je nutno cílevědomě budovat povzbudivé pracovní klima, ve kterém práci studentů nebrzdí ani strach, ani ostych. Původně jsme se domnívali, že hlavním zdrojem strachu je jednorázová zkouška, která často rozhoduje o studentově bytí či nebytí. Tento strach se nám podařilo výrazně oslabit zavedením bodového hodnocení, při kterém má posluchač možnost získat dostatečný počet bodů domácí prací v průběhu semestru. Ukázalo se však, že strach nebo ostych, který zrazuje studenty od větší aktivity na cvičeních, pramení spíše z toho, jak je v komunitě studentů vnímána chyba. Tento problém rozvádíme v kap. 4, kde ukazujeme na potřebu demystifikace chyby. Zde jen připomeneme dvě myšlenky:

- chyba a její následná analýza je účinná cesta k hlubšímu pochopení dané poznatkové oblasti,
- k tlumení strachu z chyby přispěje učitel, když vlastní chybu před studenty analyzuje a vyzývá je, aby řekli svůj názor na (a) příčinu chyby a (b) to, co je třeba udělat, aby se neopakovala.

Povzbudivé pro všechny studenty je, když učitel kladně hodnotí každou autonomní myšlenku, se kterou posluchač vystoupí. Její věcná správnost je druhořadá, prvořadé je, že se myšlenka objeví. Zvláštní povzbuzení pak potřebuje myšlenka studenta s malým matematickým sebevědomím.

Problém, který zde zůstává nevyřešen, zní: Co s posluchači, kteří se v průběhu semestru vůbec neprojeví? Doložme, že k tomu dochází pouze u skupin, kde je počet studentů vyšší než patnáct. V menších skupinách se do práce zapojí všichni studenti.

K důležitým klimatotvorným prvkům, zejména pro studenty přicházející na fakultu, patří písemný materiál, ve kterém se snažíme formulovat naše pedagogické přesvědčení a povzbudit studenty k samostatné práci (je uveden v oddíle 10.9).

2. Písemná sebereflexe (posluchačů) je účinný nástroj sebepoznávání. Může se týkat jak prožité zkušenosti (například vystoupení posluchače v průběhu pedagogické praxe), tak zkušeností nabytých během několika let (při psaní diplomové práce). V průběhu psaní sebereflexe má člověk možnost podívat se na sebe z odstupu. Při pozdějším čtení této výpovědi má možnost uvědomit si změny vlastních názorů, postojů a hodnot. Některé drobnější sebereflexe jsou uvedeny dále v příbězích. Cenný soubor sebereflexí je podán v kap. 9.

3. První pedagogické zkušenosti získává posluchač přirozeně v průběhu praxe. Tuto součást výuky považují téměř všichni posluchači za nejpřínosnější činnost. Důležité ale je, aby se odučené hodiny podrobně analyzovaly nejen s daným posluchačem, ale i ve skupině posluchačů.

Pozorovali jsme, že když dá učitel posluchači podnět k přípravě a realizaci vlastního menšího experimentu s dítětem, mívá taková zkušenost na posluchače silný vliv. To se projeví zejména snahou posluchače zevrubně diskutovat svoji zkušenost s učitelem. Navíc, dostane-li posluchač příležitost vyprávět svůj zážitek kolegům, má to povzbudivý dopad na celou skupinu nebo ročník (směrem k matematice ale zejména směrem k experimentování s dětmi).

4. Budoucí rodičovská funkce posluchačů. Pozorovali jsme, že kdykoli vyučující vypravoval své zkušenosti s dětmi předškolního věku, pozornost posluchačů se zvýšila. Je to zcela přirozené, protože posluchači vnímají tyto informace jako potenciální rodiče. Toho v současnosti využíváme ve výuce. Na některé z prvních přednášek k posluchačům promluvíme jako k budoucím rodičům. Uvedeme, že současná psychologie dokazuje, že rozhodující podíl na formování osobnosti člověka má jeho rozvoj v předškolním věku, a tedy působení rodičů, zejména matky.[5] Účinnost takového působení rozhodujícím způsobem závisí na osobní angažovanosti rodiče. Angažovanost narůstá s mírou práce, kterou rodič do interakce s dítětem vloží. Jestliže například rodič předkládá dítěti úlohy převzaté z nějaké příručky, nebude intenzita práce dítěte tak vysoká, jako když mu předkládá ty, které vytvořil sám, protože vztah rodiče k těmto úlohám bude rozdílný. Navíc u vlastních úloh bude znát rodič i didaktické zázemí úlohy, její různé varianty a možná napojení na další úlohy. Poznání, že se na přednáškách i cvičeních z matematiky mohou dobře připravit na jednu rodičovskou roli, má na posluchače silný motivační vliv. Jestliže je tento motivační zdroj soustavně sycen pozorností věnovanou dítěti předškolnímu věku, stává se výuka matematiky pro posluchače zajímavější a smysluplnější.

Pro mnohé studenty je konstruktivistický přístup k vyučování matematice překvapivý. Nelze tvrdit, že je vítán všemi posluchači. Určitě, zejména ze začátku, jsou mnozí studenti zaskočeni a dezorientováni. Návyk učit se věci zpaměti a nacvičovat algoritmy nelze použít. Je třeba začít samostatně myslet. Lze ale říct, že již v průběhu prvního roku se většina studentů na nový styl práce dobře adaptuje a počet těch, kteří z toho mají radost, narůstá (viz kap. 9, oddíl 9.6). Nakonec zůstane jen nevelký počet těch, kterým popsaný přístup nevyhovuje a kteří budou asi v budoucnu učit transmisivně.

[5] Můžeme zmínit Suzukiho metodu výchovy mladých geniálních hudebních virtuózů (Gardner 1999, s. 380).

Speciální nástroje zvyšování matematického sebevědomí posluchače se týkají matematiky. K jakým změnám je nutno přistoupit v této oblasti? Domníváme se, že především ke dvěma.

1. Je třeba přehodnotit obsah osnov, podle nichž učíme. Budeme-li posluchačům předkládat základy matematiky – teorii množin, axiomatiku aritmetiky a geometrie, pak můžeme stěží dosáhnout jejich aktivní spolupráce, zvídavosti a tvůrčího elánu. V uvedených oblastech není pro tuto aktivitu posluchače téměř žádný prostor. Musíme naopak hledat takové oblasti matematiky, které posluchače aktivují a předpokládají jejich skutečně existující znalosti a schopnosti. Příkladem pokusu, domíváme se, že úspěšným, hledání vhodného obsahu pro posluchače primární pedagogiky jsou učební texty (Hejný; Jirotková 1999).[6]
2. Tradiční způsob prezentace matematiky založený na výkladu učitele je třeba přesouvat ke konstruktivistickému způsobu, jehož jádrem je práce posluchače na řešení úloh. Úloha se tak dostává do středu naší pozornosti. K ní se obrátíme v druhé části této kapitoly.

10.6 Úloha jako výzva – nástroj ovlivňování edukační strategie posluchače

Ve škole řeší žáci mnoho úloh. Většina z nich jsou úlohy nácvikové, některé úlohy vyžadují od řešitele hlubší zamyšlení. Řešitel neví ihned po přečtení zadání, jaký zvolit postup řešení. Musí spekulovat, experimentovat, hledat. Takovéto úlohy nazýváme *tvořivé* nebo také *výzvy*.[7] K nim patří slovní úlohy, s nimiž mají potíže i žáci, kteří v algoritmických dovednostech vynikají. Tito žáci považují spekulativní výzvy za mystickou oblast matematiky a vědí, že zde nestojí na pevné půdě. Mnozí učitelé ve snaze usnadnit žákům řešení konstruují různé návody, jak ten nebo onen typ úloh řešit. K nejfrekventovanějším návodům patří použití *signálů*. Jsou to slova nebo idiomy, která naznačují, jakou operaci máme s čísly danými v úloze udělat. Je-li v textu úlohy slovo „přidat“ nebo „vyrůst“ nebo „přistoupit“, pak je třeba sčítat;[8] naopak je-li v textu úlohy slovo „ubrat“, „ztratit“, „prohrát“, pak je třeba daná čísla odčítat. Strategie signálu je jen protézou skutečného porozumění, a proto je didakticky pochybná. Navíc může být zavádějící. Například při řešení úlohy „Mám 5 Kč, kolik korun mi musí maminka přidat, abych měl 8 Kč?“. Sloveso „přidat“ ukazuje na přičítání, ale řešení $5 + 8 = 13$ je chybné. Toto slovo není signálem, ale *antisignálem*.[9]

[6] Pro posluchače odborného studia jsou to pak texty (Hejný; Stehlíková 1999, Hejný; Jirotková; Stehlíková 1996, 1997), viz také kap. 16.

[7] V podobném významu používá M. Trch a E. Zapotilová v kap. 11 termín motivující úloha.

[8] Viz úloha 2 v kap. 4, oddíl 4.8.

[9] Blíže viz příběh A v (Hejný; Kuřina 2001, s. 24–27).

Věříme, že skoro každého žáka lze naučit řešit slovní úlohy. Nikoli tím, že mu nabídneme návod na řešení, ale tím, že jej vedeme k analýze dané situace a tvorbě matematického modelu. Následující příběh ilustruje střet dvou didaktických přístupů, transmisivního a konstruktivistického.

Příběh 1. Posluchačka Alice měla v průběhu praxe výstup ve 4. ročníku. Vyučující v této třídě ji požádala, aby se žáky vyřešila úlohu 1. napsanou na tabuli.

Úloha 1. Délka obdélníkové zahrady je 20 m a obvod zahrady je 66 m. Jaká je šířka zahrady?

Alice úlohu přečetla a pak se ptala, kdo ji umí řešit. Přihlásil se Adam a řekl, že to je 8 m. Alice jej požádala, aby své řešení vysvětlil. On nakreslil na tabuli obdélník, k jeho stranám připsal čísla 20, 8, 20 a 8 a začal sčítat: „Dvacet a dvacet je čtyřicet, osm a osm je šestnáct, čtyřicet a šestnáct. . . “ Zde se Adam zarazil, obě osmičky napsané na tabuli smazal a napsal místo nich čísla 18. Ze třídy se ozvaly hlasy, že to má být 13. Alice povzbudila Adama, aby se nenechal ovlivňovat, a požádala jej, ať zjistí obvod. Adam sám ale obě osmnáctky přepsal na třináctky a řekl: „Teď je to dobře; tady jsem to. . . “ (ukazuje na horní třináctku). Třída souhlasila. Alice Adama pochválila za to, jak rychle odhalil vlastní chyby a jak je uměl opravit.

Po hodině vyčítala učitelka Alici její postup. Řekla, že to nebyla matematika, ale věštění. Řekla, že hned, jak Adam střelil první číslo, měla takový postup zarazit a žádat Adama, aby napsal vzoreček, popřípadě jej měla napsat sama. Energicky napsala na papír $o = 2 \cdot d + 2 \cdot š$ (obvod = 2$\cdot$ délka $+\,2\cdot$ šířka) a pokračovala: „Dosadím za obvod 66, za délku 20, za šířku x, mám $66 = 40 + 2x$, teď takhle $2x = 26$ a mám $\underline{x = 13}$.“ Svoji edukační strategii zdůvodnila tím, že u číselně náročnějších úloh hádání nepomůže a postup, který ona navrhuje, je univerzální. Žáci, kteří si jej zapamatují, určitě tuto úlohu vyřeší, kdyby byla u přijímaček do primy gymnázia.

Komentář 1. Příběh ilustruje zásadní rozdíl edukační strategie učitelky a posluchačky Alice. Učitelka je přesvědčena, že je žákům nutno dávat hotové obecné návody na řešení úloh jistého typu. Cílem její práce je úspěch žáků u přijímacích zkoušek. Vede žáky k *pamatování* si návodů. Alice se snaží o to, aby žáci měli do situace vhled. Cílem její práce je intelektuální rozvoj žáka. Vede žáky k *analyzování* situace.

Učitelka nemá pravdu, když Adamovo „hádání“ nepovažuje za matematiku. Hádání nebylo střílení nazdařbůh, ale postupné ujasňování si situace. Je velice pravděpodobné, že první chyba, které se Adam dopustil, byla ve výpočtu: Rozdíl $66 - 40$ spočítal jako 16. Když si chybu uvědomil, pochopil, že se zmýlil o 10, a tuto hodnotu připočítal k 8. Hlasy ze třídy jej upozornily, že ani to není dobře, a on si asi uvědomil, kde se chyby dopustil. Soudíme tak podle jeho dovětku „tady jsem to. . . “.

I když je popsané vysvětlení pouze hypotetické, jisté je, že jak Adam, tak aspoň někteří žáci ve třídě při řešení úlohy situaci analyzovali a získali tak do ní vhled. Podle našeho názoru by tito žáci podobnou úlohu s většími čísly řešili stejně úspěšně (pokud jde o strategii řešení). Úspěšně by analýzou obrázku řešili nejen tuto úlohu, ale mnohé další, vztahující se na čtverec, pravoúhlý trojúhelník, rovnoramenný lichoběžník apod. Žák odkázaný na návody a vzorečky by při řešení každé takové úlohy musel z paměti vybírat jiný návod a vzoreček.

Příběh ilustruje jednak to, jak jsou žáci vedeni k používání standardních postupů (1. podívej se na typ úlohy; 2. najdi ve své paměti návod na řešení úloh tohoto typu; 3. návod aplikuj), i to, proč tomu tak je (snaha učitele připravit žáky k přijímacím zkouškám). Dodejme, že důraz na výsledky u přijímacích zkoušek vychází více od rodičů a často i od vedení školy než od učitele.

Víme, že existují žáci, kteří nepodlehnou tlaku učitele. Nedokáží se přimět k učení se návodů zpaměti a často navzdory vůli učitele rozvíjejí svůj spekulativní přístup k úlohám. Z nich se pak stávají úspěšní řešitelé matematických olympiád a úspěšní vysokoškolští studenti na školách s náročnou matematikou. Na pedagogické fakultě těchto studentů není mnoho a mezi studenty primární pedagogiky jsou výjimeční.

Konstruktivistické pedagogické přesvědčení je postaveno na hodnotě osobnostního rozvoje žáka a studenta. Usiluje zejména o rozvoj žákovy kognice a meta-kognice. To, co tím míníme, asi lépe osvětlíme seznamem schopností než teoretickým vymezováním. Jde tedy o to, abychom rozvíjeli schopnost žáka

- experimentováním získávat zkušenosti a přehledně je evidovat (tabulkou, grafem),
- rozšiřovat paletu řešitelských strategií,
- zvyšovat svou citlivost na přítomnost chyby a umět chybu lokalizovat a odstraňovat,
- umět se z chyb (i cizích) poučit,
- izolované zkušenosti propojovat a konstruovat tak nové generické modely,
- nové poznatky formulovat a propojovat je s existujícími poznatky (strukturovat je),
- účinně používat strategii pokus – omyl,
- tvořením hypotéz a jejich prověřováním objevovat nové pojmy a vztahy,
- argumentací měnit intuitivní strukturu poznatků na strukturu logicky sevřenou,
- srozumitelně artikulovat vlastní myšlenku,
- nabývat vhled do nové situace,
- třídit (hierarchizovat) daný soubor jevů,
- odhalovat vztahy mezi existujícími poznatky,
- vytvářet dílčí matematické struktury,
- ty obohacovat o další nové jevy,
- citlivě vnímat přítomnost kognitivního konfliktu a odstraňovat jej restrukturací struktury původní,

- nabývat poznání o kauzální propojenosti jevů,
- smysluplně interpretovat danou informaci atd.

V příběhu 1 jsme viděli, že učebnicová úloha může být didakticky pojata jak transmisivně (jako nácviková), tak konstruktivisticky (jako tvořivá). Zjevně ne každá úloha je pro konstruktivisticky orientovanou výuku stejně vhodná. Úlohy nácvikové, které je též potřebné ve škole řešit, sledují jiné cíle, které jsou dobře známy. Kromě nich je ale třeba pracovat i s úlohami tvořivými, neboť jejich absence brzdí matematický rozvoj žáků. Stejná úloha může být pro jednoho žáka nácviková, pro jiného tvořivá a pro dalšího nepřiměřeně náročná. *Proto je nutné adjektivum „tvořivá" chápat individuálně – vzhledem k danému žáku.*

Tvořivá úloha je východiskem a osou konstruktivistického přístupu k vyučování. Její tři základní vlastnosti jsou: nestandardnost, vstřícnost, volitelná/nastavitelná obtížnost. Tyto vlastnosti blíže osvětlíme.

1. *Nestandardností* úlohy rozumíme to, že řešitel nezná proceduru na její řešení. Chce-li ji vyřešit, musí zkoumat, hledat, experimentovat, vynaložit jisté intelektuální úsilí. (Taková úloha se často nazývá problém, viz kap. 11.)
2. *Vstřícností* úlohy (k řešiteli) rozumíme to, že řešitel dokáže najít cestu k jejímu aspoň částečnému řešení; popřípadě pomocí nápovědy.
3. *Volitelnou (nastavitelnou) obtížností* úlohy rozumíme to, že nabízí varianty jednodušší i složitější, nebo ještě lépe, různou rychlost, jíž může řešitel dospět k řešení. Příkladem tvořivé úlohy pro žáky 3. ročníku je úloha 2.

Úloha 2. Mirek vzal číslice 4 a 7, vytvořil z nich dvě dvojmístná čísla 47 a 74 a tato sečetl. Dostal výsledek $47 + 74 = 121$. Pak vzal jiné dvě číslice a stejným postupem dostal číslo 132. Které číslice Mirek vzal? Kolik má úloha řešení? Mohl dostat i číslo 88 nebo 243 nebo 166?[10]

Další dvě ilustrace tvořivých úloh zaměřených na posluchače primární pedagogiky uvedeme a rozebereme v dalším textu.[11] Uvedeme zároveň i dva různé způsoby aplikace úlohy. První úloha byla řešena na semináři, druhá pak individuálně, doma.

10.7 Získávání sebevědomí

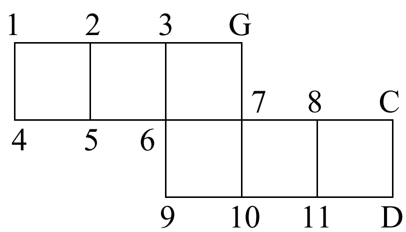
Ve školním roce 1994/95 jsme vytvořili série úloh pro seznámení se posluchačů s krychlí. Používali jsme standardní značení krychle $ABCDEFGH$ (na stěnu $ABCD$ jsou kolmé

[10] Podobné typy úloh uvádí též kap. 24.

[11] Jiné ilustrace jsou uvedeny v oddíle 10.8.

hrany AE, BF, CG a DH). Následující úloha patří do série „doplň scházející vrcholy sítě“.

<u>Úloha 3.</u> Na obrázku 10.1 je nakreslena síť krychle. Tři vrcholy sítě jsou popsány C, D, G a další jsou pouze očíslovány čísly od 1 do 11. Popište i další vrcholy krychle. Potřebujete-li radu, použijte tabulku nápovědy. V ní se dozvíte jméno (písmeno) kteréhokoli z očíslovaných vrcholů.



N Á P O V Ě D A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
H	D	C	E	A	B	F	H	A	E	H

Obr. 10.1

<u>Komentář 2.</u> Úloha vyhovuje kritériím tvořivé úlohy. Je nestandardní, protože studenti žádný návod na řešení neznají. Je vstřícná, protože studenti vědí, jak ji řešit: síť vystřihnout z papíru, přepsat na síť jména tří známých vrcholů, síť složit do tvaru krychle a porovnáním s typovou krychlí najít jména dalších vrcholů. Pro většinu posluchačů jsou poslední dva kroky obtížné, ale zvládnutelné. Konečně úloha má nastavitelnou obtížnost. Když student nedokáže úlohu vyřešit, použije nápovědu. Na druhé straně student, který řešení zvládne rychle, může úlohu řešit jen v představě bez modelu. I zde mu nápověda umožňuje nastavit si stupeň obtížnosti. Jedna posluchačka v sebereflexi o úlohách tohoto typu napsala: „. . . nejprve jsem sítě stříhala a skládala, pak jsem to dělala jen v hlavě, ale potřebovala jsem odkrýt až 6 políček nápovědy, potom stačilo odkrýt políčka dvě a teď již to řeším bez nápovědy. Baví mě to.“ Výpověď ukazuje nejen technologii práce řešitele, ale i to, že posluchač sám pozoruje svůj pokrok, a to je jev silně motivující.

Didaktickou předností úlohy je, že má značný počet modifikací daný mimo jiné i tím, že krychle má jedenáct různých sítí. Proto i řešitel, který k vytvoření generického modelu (k získání vhledu do dané problematiky) potřebuje konstruovat větší počet separovaných modelů, má možnost tyto modely tvořit. Navíc zdatnější posluchač může po vytvoření si generického modelu přejít od řešení k tvorbě úloh, a zvažovat, čím je která úloha náročná a čím jednoduchá.

<u>Příběh 2.</u> Hrdinkami příběhu jsou Blažena a Bětka, kamarádky, které spolu bydlí na koleji. Úlohy o sítích krychle jsme řešili opakovaně. Na prvním semináři jsme úloze věnovali asi třicet minut, na dalších již méně. Pokaždé jsme vyřešili jednu až tři úlohy a pak dostali posluchači několik úloh jako domácí cvičení.

Když jsme poprvé na semináři řešili úlohu o doplňování jmen vrcholů sítě krychle, všichni posluchači se na řešení nějak podíleli, jedině Bětka nepracovala. Opisovala do sešitu, co bylo na tabuli, a projevovala nevoli nad častým mazáním a přepisováním obrázků na tabuli. Když byla úloha vyřešena, ozvala se Bětka, že vůbec neví, co je řešení, protože na tabuli je chaos. Blažena jí řešení do jejího sešitu dopsala.

Pak dostal každý posluchač svoje zadání i s nápovědou a měl řešit individuálně. Bětka ihned odkryla celou nápovědu a podle ní síť popsala. Byla první a pak se nudila. Na výzvu, zda by uměla aspoň jeden z vrcholů určit sama, rozmrzele odpověděla, že ona tomu vůbec nerozumí. Dostala radu, ať si, podobně jako několik dalších dívek, síť vystřihne a modelováním zjistí jména nepopsaných vrcholů. Velice neochotně si začala stříhat síť krychle. Bylo vidět, že je přesvědčena, že nemůže pochopit, co ta síť, kterou podle dané předlohy stříhá, představuje. Navzdory snaze dívku povzbudit k samostatné práci se situace na dalších seminářích opakovala.

Zcela opačné chování projevovala Blažena. Již od druhého cvičení uměla řešit všechny úlohy o sítích, protože si nosila s sebou jak nůžky, tak lepící pásku a všechny situace si modelovala. Pokaždé jí řešení chvíli trvalo, ale vždy došla ke správnému výsledku, aniž použila nápovědy. Tu měla jen pro kontrolu svého řešení. Trochu záviděla dvěma kolegyním, které mnohé úlohy zvládaly dosti rychle a bez modelování. Mírně kárala kolegyně, které raději použily nápovědu, než aby modelovaly.

Když jsme úlohy o sítích krychle řešili již potřetí, byla Blažena zvláště aktivní a úlohy řešila velice rychle. Měla úplnou sadu jedenácti sítí krychle vytvořených z tvrdšího papíru a dovedně se v nich orientovala. Na otázku, co ji přimělo tak pečlivě se na tyto úlohy připravit, Blažena řekla, že Bětka to vůbec neuměla a ona se rozhodla, že ji to naučí. Pro ni musela vymýšlet různé úlohy, nejdříve lehčí a pak i náročnější, a pro ni vlastně vyrobila i tuto sadu sítí krychle. Tím sama sítím krychlí dobře porozuměla. Na otázku, jak ji to Blažena naučila, Bětka odpověděla vyhýbavě. Bětka i tentokrát použila celou nápovědu, i když spíše potajmu než provokativně. Blaženě jsme poradili, aby výrobu sítí přenechala Bětce. Připomněli jsme jí, že ona se to naučila, když sama sítě vyráběla, a stejně ať to dělá Bětka. Ta tiše řekla, že ona to nikdy nepochopí. V její intonaci byla cítit beznaděj i prosba o pomoc. Blažena jí řekla ostré slovo a Bětka se zasmála.

Komentář 3. Běta je přesvědčena, že nemá naději úlohy tohoto typu řešit, ale mrzí ji to. Návod se stříháním sítě se jí jeví příliš složitý a spekulativní. Je zvyklá učit se v matematice algoritmičtější návody. Blaženu výroba sítí krychle zaujala. Sama později v sebereflexi napsala, že jí to připomínalo šití šatů na panenku, což jako dívka dělala velice ráda. Psala, že některou síť předělávala i třikrát, protože se jí první výrobek esteticky nezamlouval. Manuální zručnost dívky a propojení dané problematiky na dřívější citově příjemné zkušenosti přispěly nejen k motivaci, ale i k poměrně rychlému získávání vhledu do problematiky.

Nejzajímavější na příběhu je interakce mezi Blaženou a Bětkou. Iniciativa vychází od Blaženy, která má potřebu svoje nové poznání, z něhož má radost, někomu sdělit. Začne to tedy učit Bětku. Postupuje v duchu transmisivního vyučování: ona, učitelka, aktivně vysvětluje a od Bětky, žačky, čeká pasivní přijímání poznatků. Tato činnost pomůže

Blaženě proniknout do problematiky sítí ještě hlouběji, protože se zamýšlí již nejen nad řešením úloh, ale i nad jejich konstrukcí. Na druhé straně ale Bětce toto vyučování příliš nepomůže. Bětka však pomoc Blaženy neodmítá, protože od ní získává naději, že se to přece jen někdy naučí. O tom svědčí poslední tři věty příběhu.

Příběh 2, pokračování. Na dalším semináři došlo ke zvratu – Bětka přičinlivě pracovala. Blažena byla na svoji žačku hrdá. Obě pak popsaly, co se na koleji odehrálo. Blažena přiměla Bětku, aby na velkou krabičku sirek společně ušily papírové „šaty“. Nejprve si vystřihly šest obdélníků, dílů budoucích „šatů“, a ty pak postupně lepící páskou „sešívaly“ a vytvořily tak síť hranolu. Bětka řekla, že nejprve měla na Blaženu vztek, že ji do toho nutí a že říká „přeci nejsi tak blbá“, pak se jí ale rozsvítilo a bylo to skvělé. Sama, bez Blaženy, pak vyřešila tři úlohy o sítích krychle, protože si to již uměla představit, i když místo modelu krychle měla jen krabičku od sirek. Dělala to dvě hodiny. Při líčení chvíle, ve které se jí „rozsvítilo“, dívka zářila štěstím. Její radost sdílely další dívky a samozřejmě i já. Za mimořádný pedagogický úspěch jsem Blaženě velice poděkoval.

Dodejme, že popsaná zkušenost, založená na vhodném využití životní zkušenosti Bětky, změnila přístup dívky nejen k sítím těles, ale k prostorové geometrii vůbec. Oslabila její předsudek o naprosté nepochopitelnosti této oblasti a navíc jí ukázala cestu, jak bude ona povzbuzovat svoje budoucí žáky, kteří budou potřebovat podobnou pomoc. Tuto myšlenku vyslovila Bětka sama. Pak si s výčitkou v hlase posteskla, proč jí to někdo takto nevysvětlil dříve.

O důležité pedagogické zkušenosti Blaženy jsme chvíli společně v kroužku diskutovali. I další dívky potvrdily, že když učí jiného člověka (nejen matematiku, může to být třeba i gramatika), samy se tím učí. Jedna dívka si vzpomněla na výrok Seneky „Docendo discimus“ („Učíce jiné, sami se učíme“), který byl uveden v materiálu, který studenti dostali na první přednášce (viz oddíl 10.9). Diskuse kolem Senekova výroku se rozproudila zcela spontánně. Každá dívka chtěla říct vlastní zkušenosti. Autor do diskuse nevstupoval, pouze v závěru formuloval tři myšlenky, k nimž debata dospěla:

- každý člověk chápe matematiku po svém a tuto okolnost si mnozí učitelé neuvědomují; snaží se žákům, v dobré víře, vyložit věci tak, jak je vidí oni, a znásilňují tím jejich matematické myšlení,
- když chci někomu otevřít přístup k nějaké myšlence, musím se snažit udělat to způsobem, který vyhovuje jemu, ne mně; tato snaha přinese ovoce i mně, neboť najednou uvidím věci, které jsem dosud neviděl,
- tvořit úlohy (nebo křížovky nebo nové recepty nebo nové vzory na svetr) je obvykle zábavnější i poučnější než ty úlohy řešit; je to ale složitější a hlavně je obtížné vymyslet úlohu tak, aby byla přiměřená a korektní.[12]

[12]Zkušenost s „nekorektní“ úlohou Blažena získala, když dala Bětce síť, ve které byly označeny vrcholy A, C a E. Neuvědomila si, že toto zadání připouští dvě různá řešení (což považovala za nekorektnost).

Po napsání závěrů autor řekl: „Promiňte, že jsem při poslouchání vašich zajímavých myšlenek zapomněl na čas. Zabili jsme třicet minut, které jsme mohli věnovat sítím krychle. Tato debata by byla na místě na semináři z pedagogiky, ale ne na semináři z geometrie.“ Dívky odhalily provokační intonaci hlasu a reagovaly útočně. Uvedly, že tato „diskuse byla stokrát přínosnější pro naše budoucí povolání, než by bylo zabývání se geometrií“. Řekly, že taková diskuse se nedá dělat jindy než v okamžiku, když nastane přirozená situace. Ostré spontánní názory budoucích učitelek autora velice potěšily a motivovaly do další práce.

Komentář 4. Motivační sílu diskuse čerpala z autenticity příběhu interakce Blažena – Bětka i dalších příběhů, které následně vyprávěly dívky. Zazněly nářky typu „proč nám to neukázali tímto způsobem, vždyť je to pochopitelné“. Zazněly ale i optimistické řeči – to když se dívky chlubily svými pedagogickými úspěchy u mladších sourozenců, neteří nebo dětí od sousedů. Rozhodující byla ale radost, která vyzařovala z Bětky – té se otevřel nový svět a její sebevědomí rostlo.

Autor se na semináři dopustil tří chyb. První, že debatu nenahrával na magnetofon. Druhé, že nepožádal dívky, aby napsaly aspoň některé z příběhů, které vypravovaly. Třetí, že závěr debaty formuloval a napsal sám. Měl to nechat posluchačkám za domácí úkol a na příští hodině se k tomu vrátit.

Autor si ze svých chyb vzal určité poučení. První z nich se dopouští i nadále, druhé a třetí chyby již méně často. Materiál, který je získán z písemně formulovaných názorů posluchačů, má velkou cenu i pro výzkum.

10.8 Nastavitelná rychlost procesu zobecňování

Ve školním roce 2003/04 měli posluchači možnost získávat body řešením úloh „navíc“. Tyto úlohy přirozeně vyplynuly z probírané látky a byly hodnoceny jednak z hlediska matematiky (originalita řešení, zobecnění dané situace, přesnost formulace), jednak z hlediska didaktického (jak hluboce posluchač zkoumá vlastní řešitelský postup). Některé z těchto úloh uvedeme.

Úloha 4. Na čtvercové síti je vyznačen obdélník $n \times 2$, jehož jeden vrchol je označen A. Na hranici obdélníku najděte mřížové body B, C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný. Takových trojúhelníků existuje více. Označme jejich počet $t(n)$. Najděte číslo $t(n)$ nejprve pro některé konkrétní n a pak se snažte najít obecný vzorec.

Dodatek. Předpokládáme, že v rovině je pevně daná soustava souřadnic. Bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla, nazveme mřížový a množinu všech mřížových bodů

Tvorba úloh je dosti intenzivně zkoumaná oblast didaktiky matematiky. Z našich autorů se této oblasti soustavně věnuje např. M. Tichá (2003b).

čtvercovou sítí. Uvedenou situaci je pak možné pomocí souřadnic popsat takto: $A(0;0)$ je „hlavní vrchol“ obdélníku a $(n;0)$, $(n;2)$, $(0;2)$ jsou jeho další vrcholy.

Komentář 5. Úloha vyhovuje třem výše formulovaným požadavkům: je nestandardní, řešitel ví, že ji musí řešit kreslením obrázků a že případy pro menší čísla n budou snazší a případy pro větší n náročnější a případ pro obecné n asi hodně náročný. Úloha 4 však neumožňuje modifikace jako úloha 1. Patří k úlohám gradačním. Proces řešení se rozkládá do tří etap.

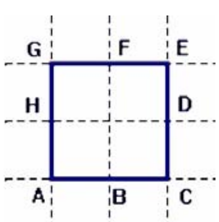
Nejprve jde o vyřešení několika konkrétních případů (separované modely příštího poznání, viz oddíl 2.5). Pak je hledána pravidelnost, která dané případy propojuje (generický model, viz oddíl 2.6). Konečně je nutno najít a formulovat obecné pravidlo, jak zjistit číslo $t(n)$ (abstraktní poznání, viz oddíl 2.7).

Danou nepovinnou úlohu řešilo jedenáct z 28 posluchačů. První etapu řešili všichni pomocí obrázků. Každý vyšetřil aspoň sedm případů, jedna posluchačka jich vyšetřila dvacet. Druhou etapu řešili nejčastěji pomocí tabulky, která měla následující tvar:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
$t(n)$	4	6	7	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	...

Začátek tabulky je atypický. To několik řešitelů zmátlo. Jedna posluchačka našla prvních pět případů a odpověděla, že $t(n) = 7$ pro $n > 2$. Ostatní řešitelé objevili, že „$t(n)$ narůstá pouze u sudých čísel n“, a považovali to za obecné řešení. Jedna dívka na můj dotaz, jak tedy najde $t(100)$, po chvíli uvažování řekla: „Vím, že $t(10) = 10$ a $t(20) = 15$. Tedy $t(30) = 20$, $t(40) = 25$, přidávám po pěti, do stovky přidám šestkrát, tedy přidám 30, proto $t(100) = 55$.“ Pak dodala: „Jo a $t(200)$ bude 105 a $t(1\,000)$ bude“ (pauza) „bude 505.“ Byla blízko k objevu, že pro sudá čísla n platí $t(n) = 5 + n/2$.

Na dvě řešení úlohy 4 se podíváme podrobněji. Autentický text je psán v uvozovkách, znak [...] označuje vypuštění části textu.



Obr. 10.2

Řešení Cilky. Dívka stručně a nepříliš pečlivě zakreslila a zapsala řešení případů pro $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ a šipkami naznačila, že rovnoramenné trojúhelníky případu n se objevují i u případu $n + 1$. Výjimkou je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník AEH (viz obr. 10.4, s. 198), který se objeví jen pro $n = 3$. Dívka píše (k řešení patří obr. 10.2):

„Protože se síť rozšiřuje jen do jedné strany; nejvíce[13] mnoho možností se vyčerpá v síti o rozměrech 2×2 (ten základ – 5 trojúhelníků),“ (má na mysli trojúhelníky ABH, ACE, ACF, ACG a AEG). Pokračuje: „K pravidelnosti dochází od sítě $2 \times 4 \Rightarrow$ kde je: základ 5 trojúhelníků +1 tr., u kterého vždy zůstávají body A, G – jen D se posouvá (podle prodloužení) $\Rightarrow$ z $6 + 1$ tr., který

[13]Slovo „nejvíce“ je škrtnuto.

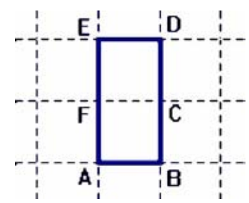
také zůstává u dalších $\Rightarrow$ těchto 7 tr. je v každé další síti $2 \times 5 \Rightarrow$ zůstává počet při každém dalším sudém čísle (na místě n) se přidává. 1 trojúh. který tam zůstává [...]. Když chci spočítat, kolik tr. je v síti, když za n dosadím větší číslo (př. 10) spočítám si, kolik sudých čísel je mezi č. 4 a č., které dosadím za n ($10 - 3$ čísla $\rightarrow 6, 8, 10$) k č. 7 přičtu jejich počet ($7 + 3 = 10$) síť $2 \times 5 \Rightarrow$ obsahuje 10 rovnoramenných troj., které vychází z určitého bodu A – body B a C jsou po okraji sítě.“

Komentář 6. Text by byl trochu srozumitelnější, kdybychom měli k dispozici grafickou část řešení, ale i tak bychom jej museli luštit. Navzdory vágní a nejasné formulaci úvahy, je návod na výpočet čísla $t(n)$ jasný: je to 7+ počet sudých čísel větších než 3 a menších než $n + 1$. Když jsme dívku žádali, aby řešení vypracovala pečlivěji, vymluvila se na nedostatek času. Dodala, že to vymýšlela asi dvě hodiny a pokreslila hodně papíru.

Z hlediska námi sledovaných cílů je tato reakce posluchačky optimistická. Dívka je ochotna věnovat čas i energii řešení problému, nikoli však, jak to sama chápe, krasopisu. Řešení i chování dívky dokumentuje její dobré porozumění smyslu vyučování matematice. Neochota některých posluchačů věnovat péči vypracování řešení je složitý problém, o jehož hlubší analýzu jsme se zatím nepokusili.

Řešení Dany. Jedná se o dlouhé řešení, které končí zjištěním, že číslo $t(n)$ se zvyšuje pouze u sudých čísel n. Z řešení uvedeme pouze první tři části (k řešení patří obr. 10.3).

„Můj první krok: určila jsem si první možný obdélník, tedy 2×1, znázornila si ho na čtverečkovaném papíře a krajní body (vrcholy) jsem si označila písmeny, abych měla jistotu, že se mi žádný nalezený $\triangle$ neopakuje. [...] Začala jsem vyhledávat $\triangle$. Postupovala jsem systematicky, bod po bodu, abych žádný $\triangle$ nevynechala [...].“ Nakreslené a popsané jsou pak všechny čtyři rovnoramenné trojúhelníky: ABC, ABF, ACE, ACF. Potom přichází první zajímavost: „Mimo jiné jsem si také všimla počtu vrcholů, domnívala jsem se, že by mi to mohlo v další práci s úkolem nějak pomoci. Tento obdélník má 6 vrcholů.“ Slovem „vrchol“ míní mřížový bod.



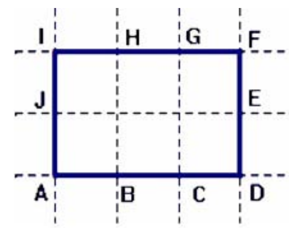
Obr. 10.3

Komentář 7. Úloha, která zdánlivě směřuje pouze do geometrie a trochu do algebry, se u tohoto řešení najednou obrací ke kombinatorice. Dívka má zřejmě již předcházející zkušenost, že při nesystematickém hledání objektů daných vlastností na některý objekt zapomněla nebo naopak jiný započítala dvojnásobně. To jsou základní chyby při kombinatorické úvaze, v níž jde o identifikaci všech prvků jisté, vlastnostmi popsané, množiny. Dana na oba hrozící nedostatky poukáže a popíše metodu, která jí dá jistotu, že žádná z těchto chyb jí do úvah nepronikne.

Druhý důležitý moment řešení je zaměření pozornosti na počet mřížových bodů na hranici zkoumaného obdélníku. Zde se již objevuje něco, co lze zařadit do kultury matematického myšlení: vnímavost na ukryté jevy, které by se snad mohly ukázat jako přínosné pro řešení.

„Další obdélník, který připadal v úvahu, byl až 2×3, neboť 2×2 je čtverec. Okamžitě z náčrtu jsem zjistila, že má 10 vrcholů, což je o 4 více, než v obdélníku předešlém [. . .]. Zde jsem nalezla 7 řešení.“ Uvedeny jsou obrázky všech sedmi nalezených trojúhelníků včetně popisů ABJ, ACG, ACH, ACI, AEH, AEI, AGI. Obrázky jsou pečlivé, není zde ani stopa nedbalosti z pocitu stereotypní práce.

„Další obdélník je 2×4, ve kterém se nalézá již 12 vrcholů, což je opět o 2 více než v předešlém obdélníku. Z těchto faktů jsem tedy usoudila, že počet vrcholů se mi bude pokaždé zvyšovat vždy o 2, neboť mi vždy přibudou 2 kostičky. Tento obdélník má také 7 řešení, jako obdélník 2×3.“ Přiložený obrázek obdélníku 2×4 má mřížové body označeny A, B, $\ldots$, I, J, K, L stejným způsobem jako na obr. 10.4.



Obr. 10.4

Komentář 8. Podrobněji popišme myšlenkový pochod Dany. Zákonitost, kterou najde experimentováním a pozorováním, dodatečně podepře argumentem o dvou kostičkách, které přibudou. Podobně jako v předchozích případech je popsáno všech dvanáct mřížových bodů $A, B, \ldots, K, L$ a nakresleno a popsáno všech sedm rovnoramenných trojúhelníků: ABL, ACI, ACJ, ACK, AEI, AFK, AIK. Obrázky sedmi rovnoramenných trojúhelníků případu 2×3 a obrázky 7 rovnoramenných trojúhelníku případu 2×4 jsou umístěny pod sebou tak, že na sebe navzájem poukazují, jak uvádí tabulka:

ABJ	ACG	ACH	ACI	AEH	AEI	AGI
ABL	ACI	ACJ	ACK	AEI	AFK	AIK

Dvě další příbuznosti jsou naznačeny spojnicí: $AEH \leftrightarrow AEI$ a $AEI \leftrightarrow AFK$.

Ke stejnému výsledku se Cilka dopracovala daleko rychleji a snadněji. To potvrzuje důležitou vlastnost úlohy 4: každý řešitel si nastaví sobě přiměřenou náročnost. V tomto případě jde o postup. Kde Cilce stačilo několik spěšně načrtnutých obrázků, musela Dana obrázky pečlivě narýsovat a označit. Teď se dívka textem vrací k již naznačené příbuznosti případů pro $n = 3$ a $n = 4$.

„Po tomto zjištění jsem si všimla a zároveň uvědomila, že v obou těchto obdélnících (2×3 a 2×4) jsou totožné $\triangle$, které se budou v každém dalším obdélníku opakovat, jsou zde stabilně. Jsou to tyto:“ Dana uvádí obrázek čtverce 2×2, v němž je zakresleno všech pět trojúhelníků, které se vyskytují v každém obdélníku $2 \times n$ pro $n \geqq 2$. Pak jsou tyto trojúhelníky bez popisu uvedeny odděleně a dále je zde obrázek, který ilustruje sérii trojúhelníků AEI (z 2×3) a AFK (z 2×4), a naznačuje, jak to půjde dál. K tomuto poslednímu obrázku je červeně psaný text: „Stejné $\triangle$, liší se pouze tím, že je vždy o 1 kostičku delší $\Rightarrow$ bude se vyskytovat v každém dalším obdélníku.“ Pokračuje modrým perem: „Těchto 6 $\triangle$ se bude vyskytovat v každém příštím obdélníku.“ Tuto část končí zeleně: „Trojúhelníky AEH a AEI k sobě mají jistě také určitý vztah, ale ještě jsem nevěděla jaký, proto jsem vyzkoušela další obdélník, který by mi to mohl objasnit.“

Komentář 9. Dana, podobně jako Cilka, nachází víc než pravidelnost v posloupnosti čísel $t(n)$. Ukazuje, jak se jednotlivé rovnoramenné trojúhelníky přenášejí z případu n na případ $n+1$ a jak u sudého čísla nový rovnoramenný trojúhelník přibude. Poslední uvedená věta ukazuje na její sebevědomí. Nebojí se ukázat vlastní neznalost a dává informaci o tom, jak se pokusí tento dílčí problém řešit. Ví, že jej vyřeší.

Výzkum, z něhož jsme zde jednu část uvedli, je živý a v současné době se snažíme zkoumat možnosti ovlivňování učitelů z praxe metodou vzájemné spolupráce.

10.9 Dodatek

V roce 1994, kdy jsme poprvé do přípravy posluchačů primární pedagogiky zcela systematicky zavedli konstruktivistické prvky, jsme naše pedagogické přesvědčení formulovali na první přednášce a hlavní teze jsme pak dali posluchačům v písemné podobě. Část tohoto materiálu je uvedena v tomto dodatku.

Úvahy obecné

- Láska k dětem je, podle našeho názoru, nejdůležitější vlastností učitele. Láska nikoli jako abstraktní vztah, ale jako orientovaná činorodost. Jako práce ve prospěch dětí, tedy i práce na sobě. Když se učitel odmítne vzdělávat v hudbě s odůvodněním, „nebylo mi dáno“, říká tím „moje nechuť k muzicírování je silnější než můj vztah k dětem“. Totéž pak platí o mateřském jazyku, tělesné výchově i o matematice. Ztratit víru v možnost vlastního růstu znamená rezignovat na lásku k dětem. Překonat strach, nezájem i odpor cílevědomou prací – tot' též je láska k dětem, nebot' „práce je zviditelněná láska“ (Džibrán 1990, s. 28).
- Cílem přednášky a cvičení bude napomoci těm z vás, kteří opravdu chtějí být dobrými učiteli. Chceme pozitivně ovlivnit vztah posluchačů ke geometrii, matematice i spekulativnímu myšlení. Chceme ukázat cesty, jak se lze zbavovat pocitu „já na to nemám“, jak lze tlumit nechut' a povzbuzovat intelektuální apetit.
- Naše úsilí bude zaměřeno na rozvoj osobnosti, nikoli na „učení se“ v tradičním školském slova smyslu. Matematika není skladiště definic, návodů, zaříkávadel, vět a pouček. Je to hřiště plné atrakcí, které nám poskytnou vzrušení i radost. Každá zvládnutá prolézačka, bludiště, nebo dračí dráha v geometrickém lunaparku zvýší naše sebevědomí. Umocní radostné očekávání té chvíle, kdy budeme svět matematického poznávání otevírat vlastním zvídavým žáčkům, lépe nás na tuto práci připraví.
- Předchozí teze se projeví i ve formách zkoušení. Při zkoušce nebudeme zjišťovat obsah vaší paměti, ale to, jak rozumíte geometrickému světu. Kdykoli vám pamět' selže, můžete beztrestně nahlédnout do sešitu, knihy nebo „taháku“. Domníváme se, že právě změna způsobu zkoušení, kterou zde zažijete a pak přenesete do vaší příští

školy, může výrazně přispět k žádoucímu posunu ve vyučování matematice: utlumit „biflování“, zdůraznit myšlení.

- Dělejte si „taháky“. Při této práci se mnohé naučíte, mnohé pochopíte. Doporučujeme zejména slovníček termínů a symbolů a různé přehledy. Například přehled poznatků o trojúhelníku, kružnici, . . . Nebo soubor těch geometrických situací, které by vám mohly být užitečné v kantorské práci.
- Svůj zájem o práci můžete prokázat vypracováním semestrálního projektu. Některá možná témata nabízíme přímo v úlohách, ale po poradě s vedoucím cvičení můžete zvolit i jiné téma.
- Docendo discimus = učíce jiné, sami se učíme – je stručná formulace myšlenky Nerova učitele: Homines, dum docent, discunt = Lidé, učící jiné, sami se učí (Seneca 1969, s. 17). Když posluchač vysvětluje něco svým kolegům, učí se i on sám. Dokonce dvě věci současně – věc, kterou vysvětluje, i vysvětlování jako takové, tedy své příští kantorské řemeslo. Reakce kolegů jsou pro vysvětlovatele cennými impulsy. Student, který vysvětlování přijímá, prolíná své vlastní zkušenosti s tím, co je mu předkládáno, a snaží se konstruovat si obraz poznávané situace, objektu, vztahu. Při debatě pak každý její účastník chvíli mluví a chvíli poslouchá.
- Gnóthi seautón = Poznej sebe sama bylo prý napsáno na vstupu do Apollónova chrámu v Delfách. Pro (příštího) učitele je tato obecná výzva hlubokou moudrostí. Jedna z nejlepších cest, jak sebe sama poznávat, je psát si deník o sobě. Zaznamenat si, jak jsem tápal a hledal, jak najednou přišlo světlo, evidovat pocity radosti i zklamání, průběh debaty, měnící se vztah k matematice, . . . Reflexe vlastního poznávacího procesu může být též vhodné téma semestrálního projektu.

Experimentování (zejména v geometrii)

- Moudrosti o světě lze hledat buď v knihách nebo přímo ve světe samém. Jste-li na pochybách, zda se úhlopříčky ve čtverci půlí, můžete se o radu obrátit k autoritě, knize nebo učiteli. Můžete se však též zeptat přímo v geometrickém světě – narýsovat přesný obrázek a zkoumané délky změřit. Pro jistotu pak pokus opakovat a změnit velikost i polohu čtverce.
- Příbuzná slova *experiment* a *expert* jsou latinského původu. První značí *pokus*, druhé *člověka zkušeného, znalého, znalce*. Latinské slovo *experientia* značí jak *pokus (zkoušku)*, tak *zkušenost*. Obojí poukazuje na hlubokou pravdu, že zkušenost nabýváme pokusem. Protože osobní zkušenost je základem poznání, je pokus vstupní branou poznání. Chceme-li opravdu znát geometrii, musíme experimentovat; rýsovat, modelovat, stříhat, lepit, . . .
- Experimentem v geometrii je kreslení obrázku, tvorba modelu, měření, přemísťování, překládání, stříhání, lepení, . . . Experimentování přináší člověku nepostradatelné geometrické zkušenosti, rozvíjí též jeho zručnost, někdy i estetické cítění.

- Experimentování bude po krůčcích zvyšovat naši geometrickou kompetenci. Je radostné i poučné tento nárůst evidovat. Doporučujeme neopomenout těchto devět dílčích parametrů:

  1. Porozumět textu úlohy.
  2. K položené otázce plánovat odpovídající experimentování.
  3. Experiment technicky dokonale uskutečnit.
  4. Výsledek experimentu vyhodnotit.
  5. V případě potřeby plánovat další experimenty.
  6. Vytěžit ze zkušeností experimentů nové poznání.
  7. Výsledek zformulovat slovně.
  8. Zvyšovat stupeň důvěrnosti ke geometrickému světu.
  9. Zvyšovat víru ve vlastní síly.

- Experiment zprostředkuje člověku základní stavební kameny příštího poznání – separované modely. Porovnáváním, tříděním a hierarchizací separovaných modelů vzniká generický model – hlubší vhled do zkoumané situace.
- Při formulování výsledku jde především o snahu o jasnost, pak o přesnost a posléze i o stručnost. Je rozumné k napsanému se po jisté době vracet a text přepracovávat, napsat dvě, nebo více verzí řešení. Například jedno deklarativní, druhé procesuální; nebo jedno pro žáka a druhé pro kolegu.

10.10 Závěr

Ještě před dvaceti lety se pod koncepcí toho nebo onoho vysokoškolského předmětu rozuměl seznam základních myšlenek, pojmů a poznatků, které mají být studentům v průběhu výuky příslušného předmětu předloženy a vysvětleny. V důsledku konstruktivistických přístupů došlo i v této oblasti k dosti významným posunům. Místo jednoznačného vymezení koncepce přes obsah, se začíná stále více přidružovat i vymezování vyučovacích metod, sporadicky se objevuje i poznávací proces. Původní přístup, v němž přednáška prezentovala myšlenky a ve cvičení se pak ukazovalo, jak lze obecné myšlenky použít k řešení různých problémů, se mění na přístup, v němž je učitel spíše iniciátor poznávacích procesů studentů a organizátor jejich vzájemné diskuse. Tím se tradiční tripartitní vztah učitel – student – látka rozšířil o societu studentů, která je sama různě stratifikována. Ale posun, k němuž ve vysokoškolské výuce v poslední době dochází, směřuje ještě hlouběji, a to do oblasti osobního přesvědčení a intelektuálního sebevědomí studenta. Konečně změny, o nichž zde mluvíme, jsou zvláště významné, pokud je studentem budoucí učitel.

Na něj totiž tyto změny působí nejen v oblasti vzdělávání, ale i v oblasti formování jeho budoucí pedagogické práce.

Výsledky studie lze rozdělit do čtyř oblastí.

1. Byly identifikovány čtyři překážky změny pedagogického přesvědčení budoucích učitelů: nízké matematické sebevědomí posluchačů, nedostatečné zkušenosti s konstruktivistickým přístupem ke školní matematice, zkreslený pohled na školní matematiku a osvojený styl učení se matematice založený na repetici a imitaci.
2. První a nejzávažnější z těchto překážek byla hlouběji analyzována a byly ukázány nástroje na její překonávání: přející klima, písemné sebereflexe, využití zkušeností získaných v průběhu praxe a využití budoucí rodičovské funkce posluchačů.
3. Byla analyzována úloha jako jeden z nejúčinnějších nástrojů ovlivňování edukační strategie posluchače. Byly podány její základní charakteristiky: nestandardnost, vstřícnost a nastavitelná obtížnost.
4. Konečně teoretické úvahy byly široce ilustrovány pomocí materiálů získaných ve výuce posluchačů primární pedagogiky v posledních deseti letech.

Kapitola 11

Problémy, výzvy a diskuse – prostředky motivace při vyučování matematice

Milan Trch, Eva Zapotilová

11.1 Úvod

V posledních patnácti letech prošlo české školství řadou změn. Otevřel se prostor pro humanizaci vzdělávání a vzrostla rozmanitost vzdělávacích programů. Ke studiu oboru učitelství pro primární školy se hlásí absolventi různých typů škol s odlišnou úrovní znalostí a dovedností. Tento obor předpokládá studium řady různorodých disciplín a matematika je jen jednou z nich. Opakované průzkumy ukazují, že studentů, kteří nemají k matematice pozitivní vztah, přibývá (viz kap. 9). S touto skutečností se setkávají vyučující na všech pedagogických fakultách v naší republice. Kapitola je věnována jedné metodě utváření pozitivního klimatu při vyučování matematice, kterou jsme v průběhu deseti let rozvíjeli na Pedagogické fakultě UK v Praze.

11.2 Formulace problému

Problém se týká jednoho typu studia (učitelství pro primární a speciální školy), velmi specifického předmětu (matematiky) a speciální skupiny vysokoškolských studentů (většinou dívek). Jeho podstatu je možné vymezit trojicí otázek:

- *Lze efektivně motivovat studenty oboru učitelství pro primární školy ke studiu matematiky na vysoké škole, zvyšovat jejich sebevědomí a úroveň matematických znalostí?*

- *Je možné při studiu matematiky v rámci přípravy budoucího učitele při poměrně malé časové dotaci dosahovat pozitivních změn v postojích studentů k matematice a jak?*
- *Je možné již během studia matematiky v rámci přípravy budoucího učitele rozvíjet také schopnosti a dovednosti studentů potřebné pro budoucí vyučování matematice, které a jak?*

Otázky jsou součástí širšího problému formulovaného v kap. 10, s. 182.

Kapitola reflektuje zkušenosti, které jsme v posledních deseti letech shromáždili při přípravě budoucích učitelů primárních a speciálních škol na Pedagogické fakultě UK. Snaha o kvalitnější výsledky při studiu matematiky budoucích učitelů vedla k hledání účinnějších forem a metod práce. Využili jsme poznatky a přednosti známých teorií a rozpracovali některé okruhy témat s ohledem na motivace, možnosti a specifické potřeby žáků mladšího školního věku.

Naše metoda, kterou označujeme jako metodu systematického užívání motivujících úloh a provokujících otázek, se opírá o upřímný zájem většiny studentů učitelství pracovat s dětmi a o jejich pocit odpovědnosti za to, že mají děti matematiku naučit.

11.3 Přehled současného stavu

Naše metoda staví na kombinaci tří okruhů poznatků didaktiky matematiky. Je inspirována myšlenkami konstruktivizmu a zejména jejich přínosem k hlubšímu pochopení matematických poznatků. Především se opírá o zkušenosti označované jako *problem solving* a *problem posing*, které se týkají motivace a řešení problémů při studiu matematiky. Bezprostředně souvisí s problematikou formování postojů a přesvědčení studentů při studiu matematiky označovanou v literatuře jako *mathematical beliefs*.[1]

V poslední čtvrtině minulého století byla řada didaktických prací věnována otázkám rozvoje matematického myšlení žáků. Většina publikovaných prací se však týká studentů či žáků staršího školního věku. Tomu také odpovídá podstata a složitost problémů a zkoumaných jevů (např. Ambrus 1997, Gardiner 1996, Pehkonen 1997). S hledáním úloh, jejich formulací a řešením problémů vhodných pro žáky mladšího školního věku jsme se však setkávali jen zřídka. *Problémem* rozumíme úlohy, které nelze řešit mechanicky užitím již známého postupu. *Řešení problému* proto vyžaduje aktivní přístup řešitele a kombinaci alespoň dvou známých metod a poznatků (podrobněji Ambrus 1997).

[1] Kapitola je především výsledkem vlastního hledání, pozorování a vyhodnocování postupů, které jsme používali při přípravě budoucích učitelů v posledních deseti letech. Zkoumání souvislostí a vazeb na jiné výzkumy v didaktice matematiky jsme začali ve svých příspěvcích více uplatňovat až v poslední době. Reagovali jsme tak na oprávněné požadavky editorů sborníků, aby v příspěvcích byly uváděny odkazy na literaturu. Jsme si vědomi toho, že citované prameny odráží charakter naší práce. Obsahují pouze literaturu, kterou jsme v průběhu deseti let skutečně využili.

Jedním z hlavních principů konstruktivizmu (viz kap. 1) je aktivizace žáků, kteří pak mohou poznatky sami objevovat a na základě vhodně sestaveného sledu kroků se spolupodílet na dosažení cílového stavu. Série „motivujících“ úloh, které vedou žáka k vlastnímu objevu, lze vytvářet i v elementární matematice (Trch; Zapotilová 1995, Steiner-Oetterner; Trch; Zapotilová 1999, Back; Trch 2002).

Koncem minulého století byly publikovány první práce, které se týkaly postojů studentů k matematice, jejich matematické víry a přesvědčení (Pehkonen; Törner 1996, Törner; Pehkonen 1996). Je známo, že hodnotové vztahy se mění jen zvolna a často významně ovlivňují individuální výkony jednotlivců. Ukázalo se, že příprava nestandardních úloh pro děti a poznávání jejich reakcí přispívá k pozitivním změnám postojů budoucích učitelů (Trch 2000, Zapotilová 2003).

11.4 Podstata metody

Idea systematického užívání *motivujících úloh*[2] a navazujících *provokujících otázek* byla zpočátku určena k odbourání či oslabení nežádoucího stresu a zlepšení výsledků při studiu matematiky. Základem úspěchu metody byla skutečnost, že studenti si zvolili učitelství dobrovolně a byli ochotni pracovat na tom, aby v budoucnu byli opravdu dobrými učiteli. Podstata metody spočívala ve využívání pozitivních zkušeností, které provází úspěšné řešení problémů. Perspektiva vlastního experimentu a pozorování dětí při řešení problémů od počátku významně podporovala úsilí studentů.

11.4.1 Motivační situace, motivační atmosféra a motivační klima

Učení lze chápat jako aktivitu individua, která využívá předpoklady a získané zkušenosti, rozvíjí jeho schopnosti a dovednosti, přináší nové poznatky. Odráží a formuje však též jeho morální kvality, představy, přání, cíle a vůli. Procesy učení představují složitý komplex jevů, který vždy provázejí emoce a individuální prožitky. Ty mohou významně ovlivnit výsledky učení. Proto je jednou z nejdůležitějších kompetencí učitele jeho schopnost vytvářet *motivační situace*, navozovat v cílové skupině *dobrou pracovní atmosféru* a dlouhodobě tak přispívat k utváření *pozitivního motivačního klimatu* při vyučování matematice.

Pro potřeby této kapitoly rozumíme *motivační situací* jevy krátkodobé, které jsou vždy spojeny s konkrétním učivem a přístupem učitele. *Motivační atmosférou* označujeme jev s delším trváním, ve kterých se výrazněji projevuje úroveň vnitřní motivace adresátů cílové skupiny. Takové jevy jsou vždy vázány k nějaké ucelené partii učiva a jsou pozorovatelné během několika po sobě následujících vyučovacích hodin nebo

[2] V podobném významu používá M. Hejný v kap. 10 termín tvořivá úloha.

jednotlivých fázích vyučovací hodiny. Pojem *motivační klima* je vyhrazen pro označování jevů, které probíhají v cílové skupině pod vedením příslušného učitele dlouhodobě. Odráží kvalitu vzájemných vztahů uvnitř skupiny, míru spolupráce adresátů, jejich vztah k učiteli, ale také postoje adresátů ke studovanému předmětu. Tyto jevy jsou dobře patrné až při dlouhodobém pozorování jevů, které jsou typické pro motivační atmosféru řady vyučovacích hodin a nejsou vázány na nějakou konkrétní partii učiva (podrobněji Trch; Zapotilová 2001).

11.4.2 Potřeba vlastních zkušeností s řešením úloh

Úsilí autorů vychází z přesvědčení, že kvalitně učit matematice mohou především ti učitelé, kteří mají k vyučovanému předmětu pozitivní vztah. Nebojí se sami řešit problémy, rozumí podstatě úloh a umí je dobře vysvětlit. Dokáží srozumitelně podávat instrukce a formulovat provokující otázky. Umí povzbuzovat žáky, ale také jim nechají dostatek prostoru pro jejich vlastní objevování. Jsou schopni pochopit případné obtíže svých žáků a cítí odpovědnost za rozvoj jejich myšlení. Vlastní zkušenosti s řešením problémů představují nutnou podmínku užití této metody.

Ilustrovat popisovanou metodu na konkrétních ukázkách není jednoduché.[3] Oba autoři mnohokrát pozorovali, že při použití stejných úloh, obdobné motivaci a stejných provokujících otázkách reagují různé skupiny studentů různým způsobem. Každá konkrétní ukázka totiž nutně odráží nějakou zcela určitou a neopakovatelnou situaci. Při použití nestandardních úloh ve výuce matematiky musí učitel vždy pružně reagovat na momentální situaci. Musí rychle vyhodnotit odezvu řešitelů, přizpůsobit se jejich možnostem, rychle volit další motivující úlohy, srozumitelně volit další výzvy a otázky. Proto je nutná znalost úlohového prostředí a komunikační dovednosti. Není tedy důležitý sled jednotlivých kroků, ale převažující trendy ve stylu učení v delším časovém období.

11.4.3 Řešení problémů a možnosti motivace

Pro řešení problémů je charakteristická aktivita a intenzita práce řešitele. Poznatky získávané při řešení problémů bývají obvykle hlubší a mají trvalejší charakter. Snáze se vybavují postupy, které vedly k úspěšnému vyřešení úloh (viz kap. 1, oddíl 1.3.4). Tím se zpravidla zvyšuje úspěšnost při řešení podobných úloh a postupně narůstá důvěra řešitele ve vlastní síly. Příjemné pocity žáků prožívané při jejich vlastním objevování mohou postupně ovlivnit proces jejich motivace k řešení dalších úloh. Nezbytnost vnější motivace ustupuje a je stále výrazněji doplňována motivací vnitřní. Systematické řešení problémů posiluje sebevědomí řešitelů a pomáhá snižovat obavy doprovázející zadávání nových neznámých úloh. Citlivým přístupem učitele lze zmírnit nežádoucí stresy žáků plynoucí

[3] Viz také kap. 3, oddíl 3.9.

z případného neúspěchu, nenaplnění vlastního či učitelova očekávání, případně negativní odezvy spolužáků. Aby mohl učitel tuto roli naplnit, musí mít sám dostatek zkušeností a prožitků spojených s řešením problémů. To je první a nejdůležitější předpoklad užití zde diskutované metody.

11.5 Metody práce

11.5.1 Volby problémů a analýza prostředí

Specifickým rysem použité metody je potřeba důkladné přípravy ze strany vyučujících při vyhledávání vhodných úloh, které mají sehrát roli přiměřeně obtížných problémů. Mělo by vždy jít o úlohy a problémy, které by svým obsahem byly blízké zájmům a zkušenostem adresátů v cílové skupině. K jejich motivaci může učiteli napomáhat netradiční obsah úloh, ale také atraktivita a srozumitelnost formulace při zadávání problému. Nejde však jen o hledání a výběr vhodných úloh, ale také o jejich provázanost a gradaci. Pro učitele je nejdůležitější *citlivý odhad přiměřenosti úloh* na základě reflexe vlastních myšlenkových pochodů při jejich řešení a systematického pozorování dosažené úrovně komunikačních dovedností, schopností a možností řešitelů. Odhad přiměřenosti problému spojený s možností volby jiné obtížnosti motivujících úloh je druhým předpokladem.

11.5.2 Přiměřenost úloh a posilování sebevědomí

Úspěšnost při řešení úloh nezávisí pouze na kvalitě vzájemné komunikace (věcně správné pochopení podstaty problému), umění a dovednosti učitele efektivně motivovat žáky. Důležité jsou zejména zkušenosti, úroveň potřebných znalostí a dovedností každého řešitele (podrobněji např. Hejný 1995, 1997). Sebevědomí řešitelů může být posilována zkušenostmi postupně získávanými řešením přípravných úloh.

Nemají-li se mezi adresáty učitelova působení příliš projevit individuální rozdíly řešitelů, je třeba volit netradiční obsah úloh, které mají motivovat řešitele a tím zvýšit jeho šance na vyřešení určitého problému. Bude-li téma úloh pro většinu adresátů nové a přitom blízké, mohou mít srovnatelnou úroveň počátečních zkušeností. Zpracování přípravných úloh k danému problému je proto předpokladem k dosažení srovnatelné úrovně individuálních zkušeností a dovedností. Přípravné úlohy mají žáky motivovat a mají také zvýšit šance, že si žáci svým tempem a vlastním způsobem najdou odpovědi na otázky, v nichž učitel formuluje podstatu příslušného problému. První přípravnou fází užití popisované metody je volba vhodného *motivujícího problému* a tvorba *motivujících úloh*.

11.5.3 Potřeba gradace motivujících úloh

Vyučování je záměrná činnost učitele, která obvykle probíhá v organizovaných skupinách žáků či studentů. Je zřejmé, že v takové skupině lze očekávat různou úroveň motivace jednotlivců. Určitým rizikem popisované metody může být negativní přístup některých žáků, jejich rezignace na předložené problémy nebo odmítání spolupráce při řešení úloh. Aby mohl učitel pružně reagovat na specifické možnosti a potřeby svých žáků, je třeba promýšlet složitost a obtížnost přípravných úloh. Má-li mít učitel možnost volby, je třeba, aby soubor motivujících úloh byl strukturován podle složitosti a předpokládané obtížnosti úloh. Zkoumání obtížnosti úloh vrací učitele do role řešitele.

V průběhu let autoři rozpracovali řadu témat, o kterých informovali na seminářích a konferencích k rozvoji myšlení a představivosti studentů učitelství a žáků primární školy. Jako příklad uvádíme tyto:

- Orientace v rovině a čtvercové síti (bludiště s barevnou a symbolickou instrukcí).
- Chápání pravidelností, užití rytmů (navlékání korálků, kreslení schémat) a předvídání situací.
- Odvalování hrací kostky ve čtvercové síti (zakreslování cest, určování stop a poloh kostky).
- Stavby z hracích kostek (plány staveb a určování počtu ok na viditelných stěnách).
- Provádění výpočetních procesů podle daných instrukcí (pravidelnosti v řadách čísel).
- Odvalování pravidelného čtyřstěnu v trojúhelníkové síti (zkoumání pravidelnosti jeho stop).
- Kreslení čar a obrazců ve čtvercové síti (odhalení pravidelnosti vzoru a využívání rytmů).
- Užití polymin k budování představ roviny (manipulace s polyminy, představa pokrytí roviny). Podrobnější informace o úlohách jsou zmíněny v článcích (Trch; Zapotilová 1995, 1997a, 1997b, 1999, Trch 1999, Steiner-Oetterner; Trch; Zapotilová 1999, Back; Trch 2002).

Pro ilustraci popíšeme podrobněji problematiku staveb z hracích kostek. K řešení úloh musí mít každý žák sadu shodných standardních hracích kostek (součet počtu ok na protějších stěnách je roven sedmi), aby mohl úlohy řešit manipulací. Cílem úloh je rozvíjení kombinatorického myšlení a geometrické představivosti žáků a setkání s úlohami, které mají více řešení. Motivující úlohy mají přinést žákům zkušenosti pro řešení provokujících otázek. Úlohy musí být srozumitelné a dostatečně jednoduché. Například: Postav stavbu ze tří kostek. Zapiš plán stavby. Postav stavbu podle plánu. Spočítej všechna oka na (viditelných) stěnách stavby. Rozhodni, zda jsou dvě stavby stejné či nikoliv. Jakmile mají žáci dostatek zkušeností, může učitel začít klást provokující otázky typu: Kolik různých staveb je možné postavit ze dvou, tří či čtyř kostek? Jaký je nejmenší(největší) počet ok na viditelných stěnách stavby ze tří (čtyř) kostek? Dokážete postavit ze čtyř (pěti) kostek stavbu tak, aby měla minimální (maximální) možný počet ok na viditelných stěnách? Je možné postavit dvě různé stavby tak, aby měly stejný počet ok (na viditelných) stěnách? Kolik ok je celkem skryto na stěnách, které nejsou vidět? Otázky mají rozvíjet komunikační schopnosti žáků, a je proto nutné vždy citlivě reagovat na okamžitou situaci ve třídě.

11.5.4 Reflexe a sebereflexe práce

Přímé osobní zkušenosti jsou cenným podnětem k potřebné sebereflexi vlastních postupů a utváření potřebných manažerských dovedností při vedení skupin žáků řešících nějaký problém. Vnímání vlastních prožitků při řešení úloh pomáhá učiteli pochopit vliv pozitivních a negativních emocí na kvalitu výkonu každého řešitele. Proto má zkušenost se zadáváním problémů zásadní význam pro navozování příjemné pracovního atmosféry. Promýšlení pravděpodobných reakcí žáků a předpokládaných odpovědí je přípravou učitele na obtížně předvídatelný vývoj situací, které mohou při řešení problémů ve skupině rozdílných individualit řešitelů nastat. Má umožnit učiteli improvizovat a v případě nutnosti okamžitě a vhodným způsobem reagovat na postup řešitelů a podporovat jejich snahu a tvořivé aktivity.

Oba autoři spolu často diskutovali o podstatě nestandardních úloh a možnostech jejich praktického využití při vysokoškolské výuce matematiky pro budoucí učitele. Z počátku spíše jen cítili, že důležitou roli hrají při studiu matematiky emoce a prožitky studentů. Své úsilí proto zprvu zaměřili především na utváření příznivé pracovní atmosféry, motivaci a rozvoj myšlení studentů řešením netradičně formulovaných úloh. Postupně si začali všímat, jak promýšlení konkrétních úloh a snaha o respektování individuality studentů vede k sebereflexi jejich vlastní pedagogické práce a mění jejich pojetí výuky matematiky.

11.6 Výsledky

Popisovaná metoda postupně krystalizovala v průběhu téměř deseti let. Autoři o výsledcích informovali na konferencích a setkáních s učitelskou veřejností. Dílčí výsledky byly publikovány ve sbornících mezinárodní konference SEMT v letech 1995 až 2001 v (Trch; Zapotilová 1997a, 1997b, 1999, 2001). Základní myšlenky metody byly využity v přípravě pro budoucí učitele primárních a speciálních škol na Pedagogické fakultě UK v Praze. Promítly se především v předmětech Úvod do studia matematiky a Matematika s didaktikou. Nejdůležitější však jsou pozitivní změny v postojích budoucích učitelů, které dokládá i následující výpověď studentky v závěru projektu.[4]

[4] Viz také kap. 9, oddíl 9.5.

- Karolína, studentka prezenčního studia, obor učitelství pro primární školy, zpracovávala seminární práci o užití nestandardního tzv. kalkulativního prostředí (*Sudé přirozené číslo dělte dvěma, lichému číslu k přiřaďte* $3k+1$.). Autorka popsala své objevy a očekávání při zkoumání řad čísel daných dvojcifernými hodnotami na vstupu. V závěru práce vyjádřila své pocity slovy: „Nešlo pouze o rutinní práci, mohla jsem tvořit, hrát si, vyzkoušet si přímo něco s dětmi a mnohé další. Musím říci, že jsem pracovala s opravdovým zápalem a chutí bádat."
- Jana, studentka prezenčního studia, obor učitelství pro primární školy, při zpracování stejného tématu a vyhledávání „rodokmenů čísel" si při pokusech s dětmi, kterým předložila tři úlohy různých typů, uvědomila dvě důležité skutečnosti. Na její otázku, kterou z úloh (standardní či nestandardní) by si dítě vybralo, dostala (po chvilce váhání) odpověď „Tu hru s číslama" a první z úloh dítě označilo „za příliš obyčejnou".[5] Zároveň si však uvědomila, jaká nebezpečí mohou takové úlohy pro učitele představovat: „Znovu jsem si uvědomila, jak velké rozdíly jsou mezi žáky. A poznala jsem, jak velké nebezpečí plyne z nepodchycení chybného postupu."

11.6.1 Přínos

Pozitivní změny postojů studentů k matematice byly zaznamenány v řadě anket o studiu matematiky na fakultě (podrobněji v Zapotilová; Kratochvílová 2000 a kap. 9). Studenti si postupně uvědomovali, že řešení problémů není samoúčelné, ale přispívá nejen k rozvoji jejich matematických schopností a dovedností, ale také upevňuje jejich sebevědomí a vztah k budoucí profesi. Výsledky se projevily nejen volbou témat a kvalitou zpracování studentských projektů, ale také úrovní jejich obhajob. Prokazatelně vzrostl zájem o diplomové práce z didaktiky matematiky. Následující příklady diplomových prací situaci dokumentují.

- Šárka, studentka kombinovaného studia učitelství pro 1. stupeň základní školy, ve své diplomové práci *Systém netradičních úloh pro žáky nejmladšího školního věku* podrobně popisuje vlastní zkušenosti s netradičně formulovanými úlohami, které systematicky předkládala svým žákům v průběhu dvou školních let. Práce ukazuje, že žáci tuto formu „výzev" k přemýšlení uvítali a postupně se stále více aktivně zapojovali do řešení nabízených problémů. Sledovali s napětím nástěnku s úlohami, na které se pravidelně objevovala nabídka nových provokujících otázek. Odevzdaná žákovská řešení byla pak s odstupem ve třídě úspěšnými řešiteli stručně komentována. Práce učitelky měla kladnou odezvu nejen u žáků, ale také u jejich rodičů. O tuto

[5] První úloha obsahovala sadu dvaceti příkladů ve čtyřech sloupcích, druhá úloha představovala dva řetězce s doplňováním výsledků aritmetických operací. Ve třetí úloze bylo „hrou" hledání členů posloupnosti dané pravidly pro výpočet následujících čísel.

formu práce začali projevovat zájem také žáci jiných tříd a o možnosti zpestření výuky matematiky se začali zajímat další učitelé školy.[6]

- Alena, studentka prezenčního studia, v diplomové práci *Nestandardní úlohy v matematice na 1. stupni základní školy a jejich vliv na utváření motivačního klimatu ve třídě* popisuje své zkušenosti s volbou úloh a sestavováním programu pro žáky se zájmem o matematiku. Autorka stručně zmiňuje také situaci, kdy po půlroční práci žáků v kroužku „Makovice“ byl do kroužku na přání rodičů a vedení školy „odložen“ žák, který sice o matematiku neměl zájem, ale v době konání kroužku byl pod dohledem učitele. Na „výzvy“ k řešení problémů nereagoval a o práci ostatních žáků se nezajímal. Vytvořil se tak zvláštní způsob soužití a vzájemné tolerance, který však po delší době skončil velkým překvapením učitele. Jednoho dne se tento žák najednou sám od sebe zapojil do řešení problémů u tabule. Příjemným šokem učitele však také vše skončilo – žák se s rodiči odstěhoval a přestal kroužek navštěvovat. Zdá se však, že pracovní klima ve skupině mělo v tomto případě také pozitivní dopad na vývoj žáka, který o matematiku nejevil žádný zájem.[7]
- Táňa, studentka prezenčního studia oboru učitelství pro speciální školy, měla na počátku problémy s matematikou. Netradiční forma výuky a prezentované nestandardní úlohy však získaly její zájem. Nejprve se snažila pochopit podstatu řešených problémů a intenzivně konzultovala s učiteli. Potom sama začala vytvářet pomůcky pro řešení úloh zaměřených na orientaci v rovině. Připravila série úloh, které ověřovala u žáků s handicapem. V předmětu Matematika s didaktikou své zkušenosti zpracovala do projektu, který rozšířila a nakonec úspěšně obhájila jako svou diplomovou práci. Případ jasně ukazuje, že nestandardní úlohy mohou nejen příznivě ovlivnit postoje studenta k matematice, ale také přispívat k rozvíjení jeho pedagogických schopností a dovedností.[8] (Podrobnější údaje o dalších projektech lze nalézt v článku Zapotilová; Kratochvílová 2000.)

11.6.2 Aplikace a výhledy

Popisovaná metoda práce se stala trvalou součástí přípravy budoucích učitelů primárních a speciálních škol na Pedagogické fakultě UK v Praze. Závěrečné obhajoby studentských projektů proto patří k dnes již tradičnímu zakončení matematické přípravy učitelů budoucích učitelů pro speciální školy v každém školním roce. V přípravě budoucích učitelů primárních škol je matematice a didaktice matematiky věnováno více hodin. Na výuce se však podílí více učitelů s různými vyučovacími styly. Ukazuje se, že během jednoho se-

[6]Diplomová práce byla na PedF UK úspěšně obhájena v roce 2001.

[7]Diplomová práce byla na PedF UK úspěšně obhájena v roce 2001.

[8]Nejkvalitnější diplomové práce byly navrženy k uznání jako práce rigorózní. Řada dalších prací byla oceněna jinou formou, např. mimořádným stipendiem v rámci AGONu na PedF UK.

mestru (obvykle třináct dvouhodinových setkání) lze ovlivnit pracovní atmosféru, nelze však ještě plně využít výhod utvářeného pozitivního klimatu.

Metoda systematického užívání motivujících úloh a kladení provokujících dotazů využívá všech tří složek pedagogické přípravy a rozvíjí řadu kompetencí učitele potřebných pro kvalitní výuku matematiky. Využívá motivujících úloh a provokujících otázek ke zvýšení řešitelského úsilí a k vyvolávání smysluplné komunikace. Je proto zřejmé, že učitel nemůže stavět pouze na jednom typu úloh. Po vyčerpání možností určitého úlohového prostředí nebo při poklesu zájmu by měl být uživatel metody schopen nabídnout jiný okruh problémů. Metoda tak vyvolává potřebu aktivního přístupu při hledání dalších vhodných námětů úloh.

Efektivita vyučovacího procesu je obvykle posuzována podle konkrétních výsledků učení, výkonu adresátů a jejich úspěšnosti při řešení kontrolních úkolů. Pro takový přístup nejsou příliš důležité postoje, příčiny jednání a prožitky respondentů. Takové hodnocení působení učitele je sice snadné, ale je nutně redukováno jen na obsah vzdělávání a neodráží jeho kvalitu. Kvalitativní jevy se mohou projevit jen při systematickém pozorování. Řešení problémů takové situace nejen nabízí, ale přímo je (ze strany učitele) předpokládá.

11.7 Závěr

Na tři otázky, které byly položeny na začátku kapitoly, přinášíme následující odpovědi:

- Odpověď na první otázku zní ano, a to například řešením vhodně volených problémů. Je třeba si však uvědomit, že vlastní zkušenost s řešením úloh sice zvyšuje šance na úspěch při řešení nového problému, ale není zárukou úspěchu při řešení nějakého nového neznámého problému. Vzhledem k individuálním rozdílům nemusí zpočátku netradiční formy výuky vyhovovat úplně všem žákům.
- Odpověď na druhou otázku zní ano. Jeden z možných způsobů představuje metoda motivujících úloh a provokujících otázek, která je založena na přípravě souboru netradičních úloh pro vlastní vyučovací pokusy a řešení vybraných problémů s dětmi během vysokoškolské přípravy.
- Odpověď na třetí otázku zní také ano. Výzvy učitele a následné diskuse přispívají k rozvoji *komunikačních dovedností* budoucích učitelů, především rozvíjejí schopnost stručně a přesně se vyjadřovat, srozumitelně formulovat otázky a odpovědi. Vlastní vyučovací pokusy s předkládáním nestandardních úloh žákům umožní studentům nejen *pozorovat a předvídat reakce žáků*, ale vytváří *prostor pro reflexi* vlastního pedagogického působení. Věříme proto, že se poznávání psychiky žáků bude odrážet také na hodnocení jejich výkonů.

Název: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky
Editoři: Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Stehlíková
Vydává: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta
Práce vznikla s podporou VZJ13/98:114100004
Formát: A5
Počet stran: 214
Rok vydání: 2004
Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.

ISBN 80-7290-189-3 (1. sv.)

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky

Milan Hejný, Jarmila Novotná

Naďa Stehlíková

(editoři)

2. díl

Praha 2004

Publikace obsahuje část výsledků výzkumů zpracovaných v rámci výzkumného záměru J13/98:114100004.

ISBN 80-7290-189-3 (2. sv.)

Kapitola 12

Konstruktivistický přístup k vyučování geometrii

Darina Jirotková

12.1 Formulace problému

Od roku 1990, kdy se otevřely nové možnosti zasáhnout do učebních plánů předmětů vyučovaných na Pedagogické fakultě UK, prodělal podstatnou změnu také kurz Elementární geometrie ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy. Změna se týkala jednak obsahu, ale především pojetí. Impulsem pro změny byla nespokojenost se stavem výuky geometrie v přípravě budoucích učitelů a naše víra, že to, co určuje kvalitu pedagogické práce, zdaleka není objem poznatků, které studenti prokáží u zkoušky, ale především jejich

- vztah k matematice a k jejich budoucím žákům,
- intelektuální sebevědomí založené na kvalitním spekulativním myšlení,
- porozumění mechanizmu, které řídí matematické chování a matematický rozvoj žáka.

Po několika letech experimentálního vyučování na Pedagogické fakultě UK v Praze a zvažování výsledků mnoha výzkumů týkajících se polarity transmisivního a konstruktivistického vyučování (viz kap. 1), jsme pod vedením M. Hejného dospěli k názoru, že se musíme vzdát tradičních cílů kurzu geometrie, tj. předvést studentům krásnou a věcně přesnou axiomatickou strukturu syntetické geometrie a předložit jim hotové, systematicky uspořádané abstraktní poznatky analytické geometrie. Studenti kurzu Geometrie (1. a 2. ročník) nebyli převážně připraveni na to, aby strukturu pochopili, a tudíž její poznání bylo značně formální (viz kap. 2) a také značně vzdálené tomu, co sami za pár let mají učit. Tradiční cíle výuky geometrie jsme nahradili novými cíli – otevřít studentům cestu k poznání systému schopností a dovedností, které student (jak on, tak i jeho budoucí žák) užívá k „dělání" a studování geometrie. Důraz jsme položili především na kvalitu kognitivních schopností a dovedností a zaměřili se na rozvoj schopnosti experimentovat, objevovat, argumentovat, tvořit a precizovat představy o geometrických pojmech na základě diskuse s kolegy i na základě vlastního uvažování, poznávat jejich smysluplnost a jejich místo v geometrickém světě, zkoumat své vlastní myšlenkové postupy a odhalovat chyby ve vlastních úvahách a účelně se při jejich odhalení chovat (Hejný; Michalcová 2001). Při tom bylo nutno brát v úvahu značně různou úroveň studentů.

Obsah kurzu Geometrie byl podřízen tomu, co budou studenti sami ve své učitelské praxi učit. Podkladem kurzu se stalo skriptum (Hejný; Jirotková 1999), které je koncipováno tak, aby byly uplatněny zásady konstruktivistického přístupu k vyučování.

Cílem kapitoly je popsat koncepci kurzu Geometrie v přípravě učitelů 1. stupně základní školy a podrobně ilustrovat přístupy v něm použité. Kapitola přispívá k řešení širšího problému formulovaného v kap. 10, s. 182.

12.2 Metodologie

Koncepce předmětu byla navržena M. Hejným na základě zkušeností z jeho vlastního experimentálního vyučování na základní škole v letech 1976–1988. Výzkumné metody zahrnují experimentální vyučování, komparativní analýzu průběhu vyučování, analýzy písemných testů a řešení úloh studentů, přímá pozorování studentů, sebereflexe studentů a řízený rozhovor.

Experimentální vyučování kurzu na vysoké škole probíhalo ve dvou etapách. První etapa probíhala v letech 1994–2001. Paralelní skupiny studentů byly vedeny různými vyučujícími (M. Hejný, D. Jirotková). Scénář každé vyučovací hodiny byl pečlivě připraven a prodiskutován a po každé hodině, semináři i přednášce, následovalo hodnocení a porovnání přístupů jednotlivých vyučujících, reakcí studentů a obsahu učiva. Kromě přímého pozorování reakcí studentů jsme dostávali zpětnou vazbu o jejich znalostech a dovednostech prostřednictvím písemných testů, které byly následně analyzovány.

Dalším cenným zdrojem informací byly eseje studentů na téma sebereflexe postojů a průběhu řešení úloh. První etapa výzkumu byla ukončena vydáním zmíněného učebního textu.

Druhá etapa výzkumu probíhá dosud a v poslední době se do něj zapojila i J. Kratochvílová. Důraz je však položen na ověřování účinnosti zvoleného pojetí kurzu prostřednictvím analýzy písemných prací studentů, ať povinných (testy, seminární práce) nebo dobrovolných, a řízených rozhovorů s vybranými studenty. Rozhovory jsou nahrávány a zvukový záznam je přepisován do formy protokolů, které jsou analyzovány. V analýzách se zaměřujeme na odhalení formálních poznatků studenta, na identifikování jeho kognitivního typu (Mareš 1998) a na hledání vhodných úloh pro realizaci konstruktivistického přístupu. Důležitou roli hrají též vlastní sebereflexe průběhu seminářů či přednášek vyučujících zapojených do výzkumu a jejich komparativní analýza.

Výsledky dlouhodobého výzkumu jsou vypracované a ověřené scénáře a evidence objevitelských postupů (zde ilustrované třemi ukázkami v oddílech 12.3, 12.4 a 12.5), které nyní pravidelně aplikujeme. Je nutno podotknout, že vzhledem k výlučně konstruktivistickému přístupu bývají uvedené postupy přizpůsobovány situacím v jednotlivých studijních skupinách, úrovni studentů i jejich aktuálním potřebám, takže při současné realizaci je možné sledovat určité odlišnosti od postupů popsaných zde.[1]

12.2.1 Role učitele a studenta

Jak již bylo řečeno, jsou metody práce v obou kurzech voleny tak, aby byly zdůrazněny principy konstruktivizmu. Učitel formuluje úlohy a problémy, pokud možno žádný poznatek studentům nesděluje, k poznání vede studenty pouze otázkami, řídí diskusi s a mezi studenty. Nerozhoduje sám o pravdě, vede studenty k tomu, aby odhalili přítomnost chyby, aby našli její příčiny a navrhli strategie, jak se příště chybě vyhnout.

Studenti řeší úlohy či problémové situace, využívají svých zkušeností, experimentováním provázeným mnohými diskusemi získávají další zkušenosti, jejich postupným zobecňováním konstruují nové poznatky. Často formulují sami nové problémy, na které narazili při své práci. Tím často dávají směr objevitelské cestě, která se tak pro učitele stává mnohdy nepředvídatelná. Na autonomní práci studenta je kladen velký důraz.

Při samotné výuce se mimo jiné snažíme o to, aby studenti co nejčastěji prožili takové hodiny, které by mohli po přiměřené metodické modifikaci ve své praxi napodobovat. Účinnost konstruktivistického přístupu je podpořena volbou netradičního geometrického prostředí čtverečkovaného papíru. Těžiště studia je položeno na aktivitu studenta a velké spektrum úloh diferencovaných i z hlediska náročnosti umožňuje každému studentovi volit si vlastní cestu k poznatkům. Zkušenosti z posledních tří let, v nichž výsledky výzkumu již používáme systematicky, ukazují, že z hlediska plnění uvedených cílů je edukační strategie, kterou jsme zvolili, nadějná.

12.2.2 Struktura příspěvku

Příspěvek je rozdělen do tří částí.

Oddíl 12.3 je zaměřen na téma míra úsečky, kterému se obvykle věnují alespoň dvě až tři hodiny.

V oddíle 12.4 ukážeme, jak lze vyspělejší studenty v kurzu Geometrie a při dlouhodobém vedení i žáky základní školy přivést přes několik dílčích objevů k objevu hlubokému,

[1] O jedné zkušenosti z vyučování dvou paralelních skupin je podrobněji pojednáno v kap. 15.

a to objevu metody, jak nalézt všechny pythagorejské trojice pomocí jednoduchých geometrických konstrukcí na čtverečkovaném papíře. Algebraicky vyjádřeno budeme hledat úplné řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ v oboru přirozených čísel geometrickou cestou (Hall; Rowland 1997, Bruckenheimer; Arcavi 1995).

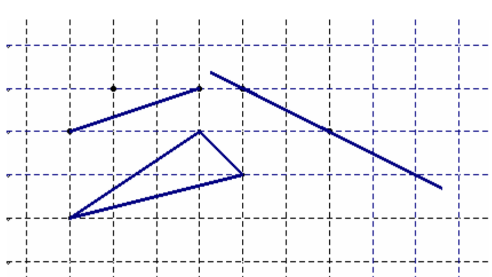
Oddíly 12.3 a 12.4 jsou zpracovány tak, že je uvedena série problémových situací, které byly předloženy studentům, a jejich řešení je zde zařazeno a označeno jako epizody. Studentská řešení a naznačené diskuse jsou autentické, avšak vše proběhlo v rámci několika kurzů s různými studenty a v různých časech. Problémové úlohy a epizody jsou vybrány a uspořádány tak, aby byl zřetelně demonstrován postup, jak je možné studenty vést přes dílčí drobné objevy postupným zobecňováním, mnohými diskusemi a porovnáváním různých výsledků k objevům, které jsou vzhledem k úrovni znalostí řešitelů z matematiky poměrně hluboké.

Edukačním cílem tohoto postupu je:

- usměrnit objevitelský proces žáků/studentů,
- dát jim možnost zažít pocit radosti z konkrétních výsledků a uspokojení z dílčích výsledků i závěrečného objevu,
- povzbudit jejich matematické sebevědomí,
- rozvíjet jejich kauzální myšlení,
- rozvíjet jejich pocit zodpovědnosti za volbu cesty k poznání nových pojmů a vztahů,
- dát jim vhled do struktury nejen geometrie, ale i aritmetiky a zejména do vzájemné propojenosti těchto struktur.

V oddíle 12.5 je ilustrováno naše přesvědčení, že nosné pojmy a myšlenky analytické geometrie je třeba zavádět „postupně, nejdříve v názorně dostupné podobě, a potom, po odhalení jistých vztahů a souvislostí dávat pojmům a myšlenkám přesnější strukturálnější podobu“ (Hejný 1996, s. 18).

12.2.3 Vstup do prostředí čtverečkovaného papíru



Obr. 12.1

Pojem čtverečkovaný papír je dobře známý a pro další potřeby stačí, budeme-li jej chápat intuitivně. Bod, v němž se protnou dvě na sebe kolmé linky čtverečkovaného papíru, nazveme *mřížový bod*. *Mřížová úsečka* je každá úsečka s krajními body, které jsou mřížové, *mřížová přímka* je každá euklidovská přímka, která prochází alespoň dvěma mřížovými body (obr. 12.1). Obdobně budeme používat termíny mřížová polopřímka, mřížový trojúhelník, mřížový n-úhelník.

Prostředí čtverečkovaného papíru, i když bývá často považováno některými studenty či kolegy za „nedůstojné“ pro vysokoškolský kurz, bylo zvoleno jako vhodné z několika důvodů:

1. Umožňuje získat dobrý vhled do problémů jednoduchými obrázky.
2. Umožňuje zpracovat problémy tak, že jsou připraveny pro další didaktické zpracování na nižší úrovni pro budoucí žáky či studenty různých stupňů škol.
3. Využívá již získaných zkušeností žáků se čtvercovou sítí.
4. Umožňuje vizualizovat různé pojmy a vztahy, např. z dělitelnosti v oboru celých čísel $\mathbf{Z}$, a objevit vztahy nové.
5. Umožňuje aplikovat metody řešení úloh, které jsou použitelné pro žáky i nižších tříd základní školy (viz tabulková metoda postupného uvolňování parametrů v oddíle 12.4).
6. Umožňuje studentovi, budoucímu učiteli, znovu projít na vyšší úrovni vývojem, který prožil na základní škole. Práce na omezeném čtverečkovaném papíře odpovídá práci s malými přirozenými čísly. Rozšiřování úvah za hranice čtverečkovaného papíru odpovídá rozšiřování oboru přirozených čísel až k množině $\mathbf{N}$, resp. $\mathbf{Z}$. Zahušťování čtvercové sítě při práci s kvazimřížovými body[2] je paralelní k zavádění zlomků a pronikání do $\mathbf{Q}$. Konečně přechodu na „čistý“ papír odpovídá přechod k množině $\mathbf{R}$.

12.3 Míra úsečky ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy

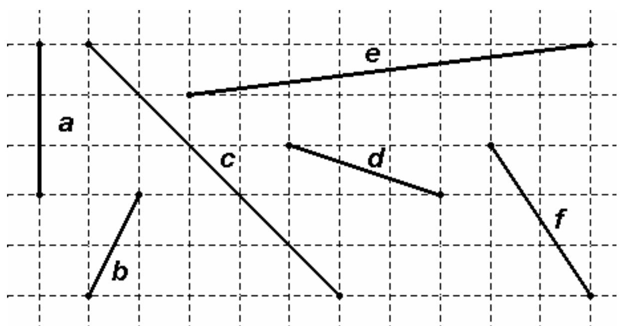
12.3.1 Přehled současného stavu

Nahlédněme nejdříve do různých učebnic matematiky pro 1. stupeň základní školy a podívejme se na úlohy týkající se měření úseček. Obvykle najdeme úlohy tohoto typu: Porovnejte dvě dané úsečky . . . , změřte hranu stolu, změřte danou úsečku v centimetrech, sestrojte úsečku dané délky apod. Porovnání se provádí zpočátku pomocí proužku papíru, později pomocí kružítka, k měření se použije nejdříve centimetrové, později milimetrové měřítko a k uspokojivému sestrojení úsečky dané délky je nutné mít ostře ořezanou tužku a rovné pravítko. Většinou se porovnávají úsečky, které lze porovnat „od oka“, a délky úseček se vyjadřují v celých centimetrech. Předmětem diskusí učitele se žáky může být potřeba zavést jednotnou jednotku délky. Problémy, které se občas vyskytují, spočívají v nesprávném přiložení měřítka ke krajnímu bodu úsečky.

[2] Kvazimřížový bod je takový bod, který je průsečíkem dvou mřížových úseček.

Toto téma je málo záživné, nedává mnoho příležitostí k experimentování a k argumentování, neumožňuje otevírat mnoho diskusí a není nutné je provazovat na další geometrické poznatky. Smysluplnost procesu porovnávání úseček, které je možné obvykle porovnat „od oka“, z ničeho nevyplyne a žáci si do života odnášejí přesvědčení, že na nějakém milimetru nezáleží a že o správnosti měření stejně nakonec rozhodne autorita učitele.

12.3.2 Problémová situace: Měření úseček



Obr. 12.2

Na obr. 12.2 je vyznačeno šest úseček a, b, c, d, e, f. Překreslete je na čtverečkovaný papír, jehož čtverečky mají strany dlouhé přesně 10 mm. Každou úsečku změřte s přesností na jeden milimetr.

Podle našich zkušeností jsou již žáci 3. ročníku základní školy schopni takovou úlohu řešit. Ta se zdánlivě neliší od standardních úloh z učebnic. Je pouze zadána v nestandardním geometrickém prostředí, na čtverečkovaném papíře. Jestliže je úloha zadána na „čistém“ papíře, změřením úseček s jistou přesností, resp. jejich zapsáním do pořadí podle délky, její řešení končí. Nestandardnost prostředí však umožňuje otevřít diskuse a nové problémy. Učiteli dává do rukou nástroj (Pythagorovu větu) pro kontrolu přesnosti měření, který není závislý na tom, jak přesně se přiloží měřítko a jak se z něj odečte délka úsečky, není tedy závislý na smyslových vjemech.

Epizoda 1: Rozpor v měření a dohoda

Studenti měřili úsečky s přesností na 1 mm. Zjistili, že $a = 30$ mm, $b = 22$ mm, $c = 71$ mm, $d = 32$ mm, $e = 81$ mm a $f = 36$ mm.[3] Je zřejmé, že délka a je určena přesně, a učitel ví, že délky dalších úseček jsou naměřeny jen přibližně. Ve skutečnosti je $b = \sqrt{500} \doteq 22{,}36$, tedy o něco více než 22.[4] Někteří studenti však naměřili $b = 23$. Rozpor v měření vedl k diskusi, která byla ukončena dohodou.

<u>Dohoda</u>. Ti, kdo si myslí, že úsečka je změřena přesně, připíší k číslu vykřičník „!“. Zapíší například $a = 30!$. Chceme-li vyjádřit, že délka b je „o něco větší“ než 22, ale je blíže k 22 než k 23, zapíšeme $b = 22^+$ a zápis $b = 23^-$ znamená, že délka b je „o něco menší“ než 23 a je blíže k 23 než k 22. Jestliže se neumíme rozhodnout o znaménku, nenapíšeme žádné.

[3]Správný zápis by měl být $|a| = 30$ mm. Pokud nebude hrozit nedorozumění, nebudeme pro jednoduchost odlišovat zápis úsečky a její délky.

[4]Všechny délky zde i dále jsou určeny v milimetrech a jednotku mm nepíšeme.

Epizoda 2: Upřesnění měření a spor

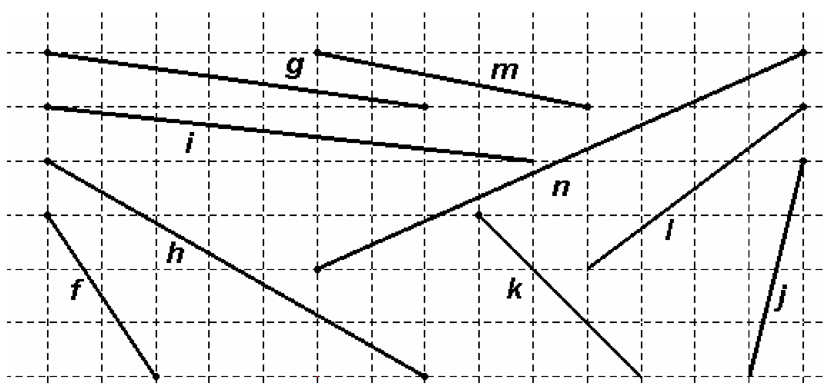
Ke každé délce úsečky nyní studenti připsali znaménko $+$, $-$ nebo ! podle dohody tak, aby upřesnili své měření. Nyní lze zapsat výsledky měření přesněji: $a = 30!$, $b = 22^+$ (nebo 23^-), $c = 71^-$ (nebo 70^+), $d = 32^-$ (nebo 31^+), $e = 81^-$ (nebo 80^+) a $f = 36$. Mezi studenty vznikly spory o tom, které měření je přesnější, zda $b = 22^+$ nebo $b = 23^-$, zda $c = 71^-$ nebo $c = 70^+$, zda $d = 32^-$ nebo $d = 31^+$, zda $e = 81^-$ nebo $e = 80^+$. Tyto spory jsme využili k formulaci dalšího problému.

12.3.3 Problémová situace: Přesné měření

Najděte způsob, kterým je možné zjistit, které z měření $b = 22^+$ nebo $b = 23^-$ je přesnější, když máme k dispozici pouze milimetrové měřítko. Jak můžeme rozhodnout, zda b je blíže k 22 nebo k 23?

Epizoda 3: Více zkušeností a vyslovení první hypotézy

Aby studenti získali do situace lepší vhled, bylo nutné jim poskytnout bohatší materiál vhodný k úvahám (viz úsečky na obr. 12.3).



Obr. 12.3

O smyslu opětovného zadání úsečky f hovoří průběh dalších diskusí. Studenti naměřili tyto hodnoty: $f = 36!$ (36^+, 36^-), $g = 71^-$ (70^+), $h = 81^-$ (80^+), $i = 90^+$ (91^-), $j = 41^+$ (42^-), $k = 42^+$ (43^-), $l = 50!$ (50^+, 50^-), $m = 51!$ (51^-, 51^+), $n = 98^+$ (99^-).

Učitel však ví, že $f = \sqrt{1\,300} \doteq 36{,}06$, $g = \sqrt{5\,000} \doteq 70{,}71$, $h = \sqrt{6\,500} \doteq 80{,}62$, $i = \sqrt{8\,200} \doteq 90{,}55$, $j = \sqrt{1\,700} \doteq 41{,}23$, $k = \sqrt{1\,800} \doteq 42{,}43$, $l = \sqrt{2\,500} = 50$, $m = \sqrt{2\,600} \doteq 50{,}99$, $n = \sqrt{9\,700} \doteq 98{,}49$.

Již při prvním měření došlo k zajímavé debatě. Většina studentů naměřila $f = 36!$, ale několik jich tvrdilo, že správné měření dá výsledek $f = 36^+$, další prosazovali výsledek $f = 36^-$. V diskusi zazněl názor, že f nemůže být přesně 36, který byl podpořen argumentem „. . . protože úsečka je šikmá“.

Studenti formulovali tento názor jako hypotézu 1: „Žádná šikmá úsečka nemůže mít při měření na milimetry délku vyjádřenou přesně celým číslem. Vždy je to o kousek míň nebo o kousek víc. Pouze svislé nebo vodorovné úsečky mohou měřit přesně celé číslo.“

Toto tvrzení bylo vysloveno velmi kategoricky. Několik studentů se nechalo strhnout a přiklonilo se k němu. Hypotéza byla použita i ve dvou dalších případech a bylo potvrzeno, že $a = 30!$, a vyloučeno, že $l = 50!$ a $m = 51!$.

Vyslovená hypotéza, i když nebyla správná, měla z hlediska dalšího poznání velký význam. Zpochybnila hodnověrnost našich smyslových vjemů, ukázala na omezenost smyslového poznání a vyzvala nás k hledání logických argumentů, jimiž lze smyslové poznání překonat. Tím nadřadila myšlení nad smyslovým vnímáním.

Bohaté diskuse studentů vedly k několika významným „objevům“. Uvedeme je již bez podrobného popisování diskusí a dílčích úloh, které bylo nutno projít na cestě k nim.

Epizoda 4: Objev myšlenky prodlužování úsečky

Trojnásobné prodloužení úsečky b vede k poznání: $3b = 67$ (přesně nebo skoro přesně), tedy $b = 22\frac{1}{3}$ (přesně nebo skoro přesně), to znamená, že b musí být 22^+.

Metoda prodlužování úsečky úspěšně vyřešila problém 2, tedy spor o délku úsečky b, ale i některé další případy: $2d = 63^+ \Rightarrow d = 32^-$, obdobně $3j = 124^- \Rightarrow j = 41^+$, $2c = 141^+(142^-) \Rightarrow c = 71^-$.

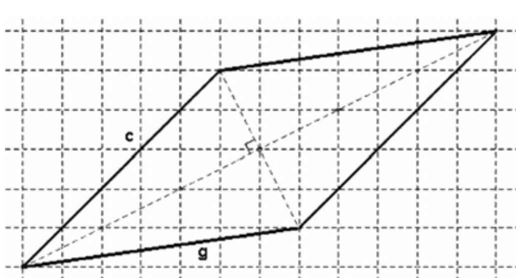
Ostatní nejasnosti v přesnosti měření této metodě odolaly.

Jestliže je obdobný objev učiněn ve 3. nebo 4. ročníku základní školy, je nutné zlomky či desetinná čísla obcházet úvahou.

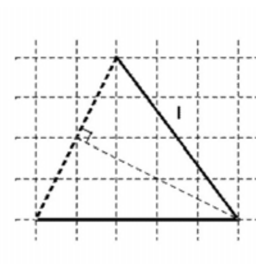
Studenti si všimli, že délky dvou dvojic úseček jsou stejné. Sami již pak formulovali další problém.

Epizoda 5: Objev myšlenky kosočtverce

Při řešení úlohy, kterou formulovali studenti sami, zda jsou úsečky c a g, e a h shodné, když jejich naměřená délka je stejná, se po delším experimentování na tabuli postupně objevily obr. 12.4a a 12.4b. Z obr. 12.4a je zřetelné, že nakreslený čtyřúhelník je kosočtverec se stranami g a c, a tudíž máme odpověď na otázku formulovanou v problému 2.



(a)



(b)

Obr. 12.4

Tato myšlenka byla rozvinuta dále a přinesla další objev.

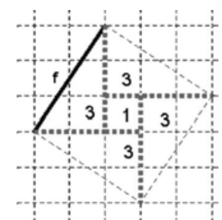
Epizoda 6: Objev myšlenky rovnoramenného trojúhelníku a pád hypotézy

Na obr. 12.4b je nakreslen rovnoramenný trojúhelník, jehož jedno rameno je úsečka l a druhé rameno měří přesně 50. Tím je vyřešen spor o délku úsečky l, ale na druhé straně se zhroutila vyslovená hypotéza 1.

Důležitá myšlenka – nahlížet na danou úsečku v kontextu nějakého jiného útvaru – byla totiž již na světě, a tak k poslednímu objevu, který umožnil dořešit spory o délky nakreslených úseček, byl již malý krok. Vedl však přes několik vedlejších objevů, kterými se budeme podrobněji zabývat v oddíle 12.4. Jedná se o různé možnosti konstrukce čtverce nad danou úsečkou a o výpočet jeho obsahu.

Epizoda 7: Objev myšlenky čtverce

Čtverec dostal novou funkci – jeho obsah posloužil k určení délky jeho strany. Z obr. 12.5 je patrné, že obsah čtverce je 1 300. Kdyby jeho strana měřila přesně 36, byl by jeho obsah 1 296. Spory o délku úsečky f jsou tím vyřešeny, $f = 36^+$. Studenti zjistili, že myšlenka čtverce je použitelná univerzálně, a všechny nejasnosti již dořešili pomocí ní. Navíc byl objeven jednoduchý nástroj na libovolně přesný výpočet délky mřížové úsečky, na kterou lze nahlédnout jako na stranu čtverce.



Obr. 12.5

12.4 Konstrukce pythagorejských trojic

12.4.1 Přehled současného stavu

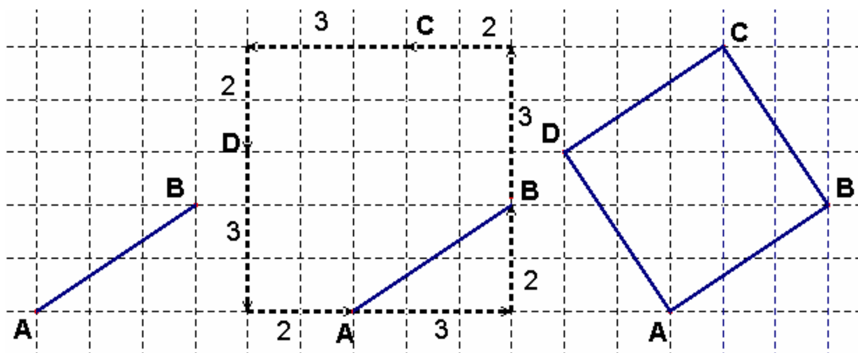
S analytickou geometrií se studenti setkávají až na střední škole. Pokud nejsou její základní pojmy dostatečně předem připravovány již v nižších ročnících a pokud učitel na střední škole volí třeba z důvodu nedostatku času transmisivní způsob výuky (viz kap. 1), je celkem zákonité, že nové poznatky jsou uchopeny formálně, bez porozumění (viz kap. 2). Na základě našich průzkumů a zkušeností můžeme tvrdit, že do kurzu Geometrie studenti přicházejí až na naprosté výjimky s nulovými znalostmi z analytické geometrie, případně se znalostmi velmi formálními, epizodickými, které se omezují na několik vzorců. Většina znalostí je uchována pamětí a schopnosti jako experimentování, abstrahování, analyzování situace, formulování myšlenky, zdůvodňování a propojování znalostí s novými situacemi jsou na nízké úrovni. Posledně jmenovaný nedostatek však přináší na druhé straně výhody při pokusu o opětovný přístup k těmto poznatkům. Pokud by probíhal tou samou cestou, na kterou jsou poznatky již vázány, byl by téměř nemožný. Pokud zvolíme nové neznámé prostředí nezatížené dřívějším transmisivním předáváním poznatků, máme možnost eliminovat překážky způsobené již existujícími představami a cesta k již známým poznatkům přes objevování je schůdná. To zde budeme ilustrovat.

12.4.2 Problémová situace: Kreslení mřížových čtverců

Je dána mřížová úsečka. Nakreslete alespoň jeden mřížový čtverec tak, aby daná úsečka byla jeho stranou.

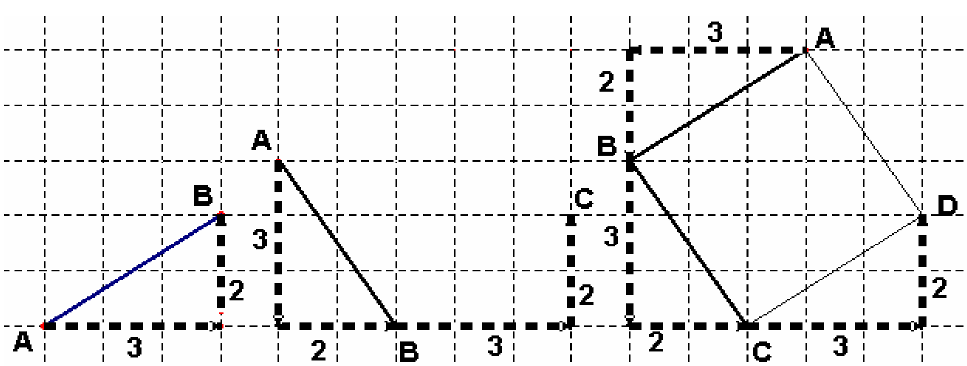
Epizoda 8: Objev konstrukce mřížového čtverce

Po mnoha experimentováních a kreslení čtverců, jejichž strany jsou v linkách čtverečkovaného papíru, studenti objevili tři návody, jak k dané „šikmé“ mřížové úsečce dokreslit čtverec.



Obr. 12.6

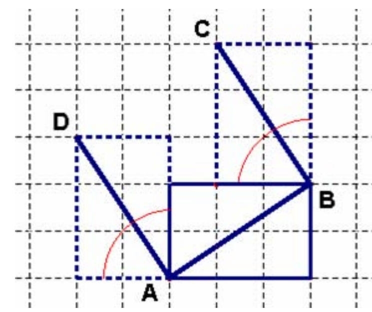
Návod 1. (Obr. 12.6.) Je dána mřížová úsečka AB. Vyjdi z bodu A a po linkách čtverečkovaného papíru „cestuj“ do bodu B takto: udělej tři kroky vpravo, pak dva kroky nahoru a jsi v bodě B. Pokračuj ve směru nahoru třemi kroky, pak zahni vlevo a udělej opět dvě kroky – máš bod C. Pokračuj v tomtéž směru třemi kroky, pak zahni dolů a udělej znovu dva kroky – máš bod D. Z něj již jen pro kontrolu – tři kroky dolů a dva vpravo a jsi opět v bodě A. Body A, B, C, D jsou pak vrcholy čtverce. Cesta, kterou jsi udělal, opisuje čtverci $ABCD$ rámeček ve tvaru čtverce.



Obr. 12.7

Návod 2. (Obr. 12.7.) Je dána mřížová úsečka AB tak, že bod A je vlevo od bodu B. Vyjdi z bodu A a zjisti, kolik musíš udělat kroků nejdříve po vodorovné lince vpravo a pak po svislé lince nahoru či dolů, aby ses dostal do bodu B. V bodě B zapíchni tužku, otoč papír o 90° ve směru pohybu hodinových ručiček a pak udělej stejný počet kroků vpravo a ve svislém směru po linkách čtverečkovaného papíru. Dostaneš bod C. Tento postup zopakuj, aby ses dostal do bodu D, a jestliže to zopakuješ ještě jednou, dostaneš se zase do bodu A.

Návod 3. (Obr. 12.8.) Nakresli obdélník tak, aby jeho strany ležely v linkách čtverečkovaného papíru a aby daná úsečka AB byla jeho úhlopříčkou. Tento obdélník otoč některým směrem o pravý úhel kolem bodu B. Vyznač úhlopříčku otočeného obdélníku, která vychází z bodu B. Její druhý krajní bod je bod C. Vrať se k původnímu obdélníku a otoč jej kolem bodu A opačným směrem. Vyznač úhlopříčku otočeného obdélníku, která vychází z bodu A. Její druhý krajní bod je bod D. Spoj body C, D a máš vyznačen čtverec $ABCD$.



Obr. 12.8

Třetí návod je zároveň ověřením správnosti prvních dvou návodů.

Čtverec se nyní stal nositelem kolmosti a tím, že umíme na čtverečkovaném papíře k libovolné mřížové úsečce zkonstruovat čtverec, umíme též k dané úsečce vést daným bodem kolmou úsečku.

12.4.3 Problémová situace: Hledání mřížového rovnostranného trojúhelníku

Najděte mřížový rovnostranný trojúhelník.

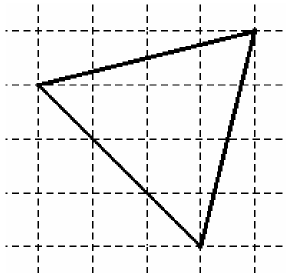
Epizoda 9: Rovnostranný trojúhelník

Studenti se pokoušeli nakreslit mřížový rovnostranný trojúhelník. Jako nejnadějnější řešení se jevil trojúhelník, který je uveden na obr. 12.9a.

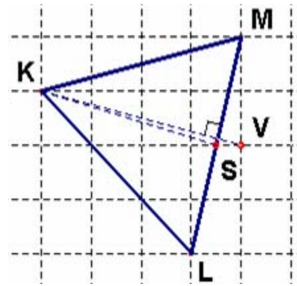
Epizoda 10: Využití konstrukce kolmice jako důkazu

Diskuse o tom, zda je trojúhelník skutečně rovnostranný, vedla přes měření jeho stran, až k obr. 12.9b a následujícímu argumentu: Kdyby byl trojúhelník KLM rovnostranný, musela by úsečka KS být jeho výškou. To ale není, neboť kolmá úsečka vedená z bodu K k úsečce LM je úsečka KV.

Samozřejmě, že musela být diskutována otázka, zda je bod S skutečně středem úsečky ML, a následně i problém sestrojení středu dané úsečky. Tímto směrem se ale nyní nevydáme.



(a)



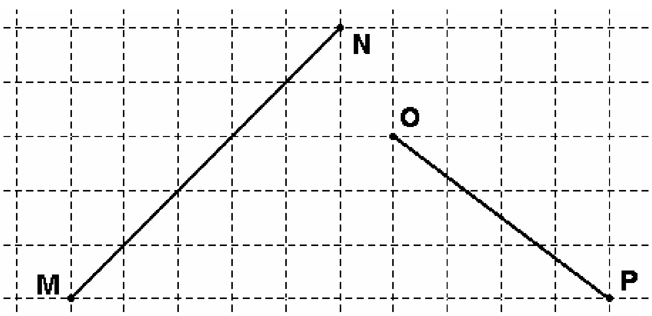
(b)

Obr. 12.9

Studenti někdy vyřešili problém i použitím myšlenky čtverce z epizody 7.

Strategický problém hledání mřížových rovnostranných trojúhelníků zůstal nevyřešen. Byl však dále zjednodušen na hledání rovnoramenných trojúhelníků.

Epizoda 11: Hledání rovnoramenných trojúhelníků



Obr. 12.10

Studenti hledali rovnoramenné mřížové trojúhelníky, když bylo dáno jedno jejich rameno. Zajímavou diskusi vyvolalo zadání úseček MN a OP na obr. 12.10.

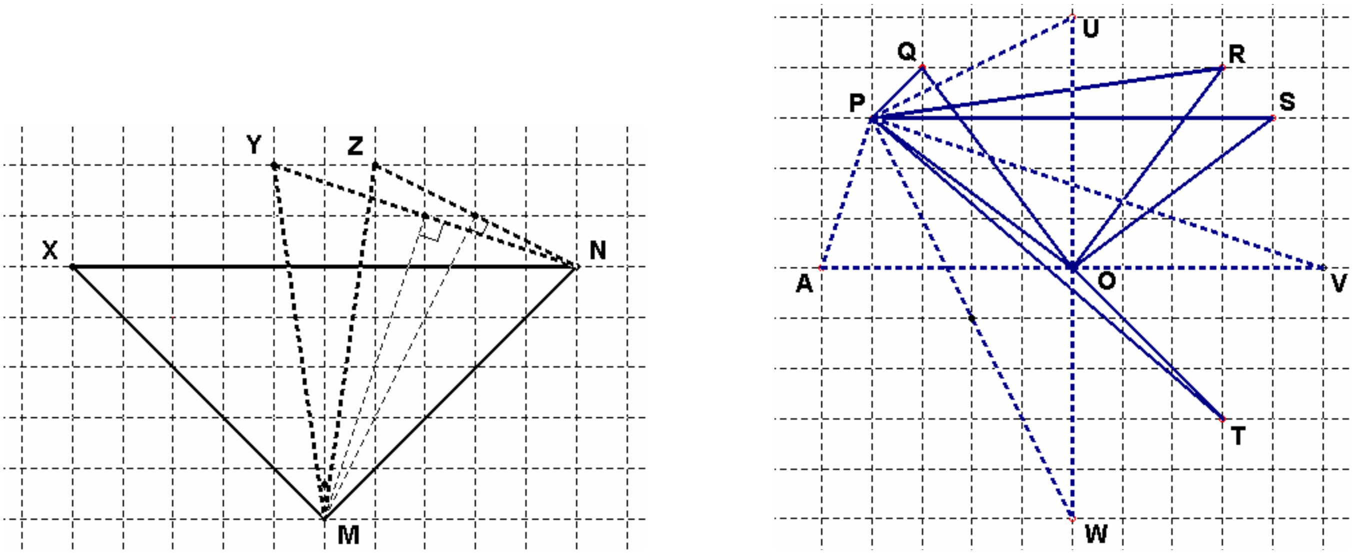
Studenti po nějaký čas problém řešili. Řešení, která jsou na obr. 12.11a i 12.11b vyznačena plnou čarou, tj. $\triangle MNX$, $\triangle OPQ$, $\triangle OPR$, $\triangle OPS$, $\triangle OPT$, nebylo obtížné nalézt. Jen málo studentů objevilo časem i další řešení, která jsou na obrázcích vyznačena čárkovaně, tj. $\triangle MNY$, $\triangle MNZ$ a $\triangle OPA$, $\triangle OPV$, $\triangle OPU$, $\triangle OPW$. Tato řešení vyvolala pochybnosti o jejich správnosti. V diskusi opět zazněla hypotéza 1 a nová hypotéza 2: „Dvě různě šikmé úsečky nemohou být stejně dlouhé.“

Epizoda 12: Dva objevy a pád druhé hypotézy

Uvedená řešení a diskuse kolem nich postupně krystalizovala ve dva velké objevy, které studenti formulovali.

Objev stejně dlouhých „šikmých“ úseček: „Trojúhelníky MNY a MNZ na obr. 12.11a jsou rovnoramenné, a tedy ramena MN a MY, MN a MZ jsou stejně dlouhé a různě šikmé úsečky.“

Vyspělejší studenti, kteří v tomto okamžiku uměli tyto nové poznatky propojit na poznatky dřívější, si všimli, že uvedené dva trojúhelníky dávají jedno řešení diofantovské rovnice $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, a to čtveřici $(5, 5, 7, 1)$.



(a) (b)

Obr. 12.11

Objev šikmé úsečky s celočíselnou délkou:[5] „Trojúhelníky OPU, OPV, OPW a OPA jsou rovnoramenné. Délka jednoho ramene je přesně 50, a tedy délka druhého ramene je také přesně 50. Úsečka OP je ‚šikmá', a přesto je její délka celé číslo."

Použití argumentů z epizody 10 (popřípadě i z epizod 5 a 6) správnost řešení potvrzuje. Například $\triangle OPW$ je rovnoramenný, protože úsečka, která spojuje střed strany PW s bodem O je kolmá k PW, a tudíž úsečky OP a PW musí být shodné, i přestože jedna leží v lince čtverečkovaného papíru a druhá je šikmá. S druhým objevem však padá hypotéza 2, že „žádná šikmá úsečka nemůže měřit přesně celé číslo". Pád hypotézy zde sehrál významnou roli – otevřel další problémové situace a s tím i další epizody.

Skutečnost, že řešení jednoho problému otevře nový nebo celou sérii nových problémů, je v konstruktivistickém přístupu charakteristický a velmi důležitý jev. Nové problémy jsou často formulovány samotnými studenty, kteří tak získávají pocit, že se na objevitelské cestě aktivně podíleli či dokonce že ji sami nasměrovali.

12.4.4 Problémová situace: Hledání šikmých úseček s celočíselnou délkou

Najdi co nejvíce mřížových „šikmých" úseček s celočíselnou délkou.

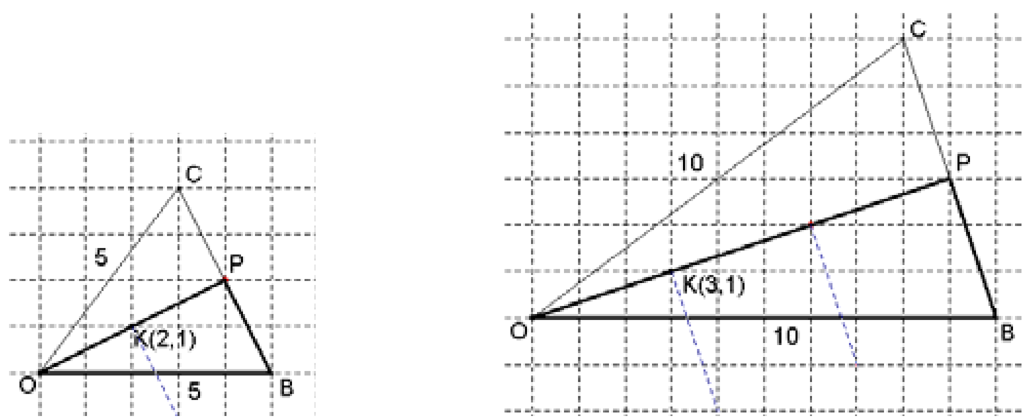
[5] Délka úsečky je uvažována v jednotce, která je dána čtverečkovaným papírem, tj. délka strany základního čtverečku.

Epizoda 13: Hledání rovnoramenných trojúhelníků

Otázku, zda existují další úsečky s celočíselnou délkou, většinou pokládali sami studenti. Pod silným dojmem posledního objevu se soustředili na hledání různých rovnoramenných trojúhelníků, jejichž jedno rameno leželo v lince čtverečkovaného papíru. Po chvíli experimentování objevili, že takových trojúhelníků lze nalézt více. Jejich experimentování byla víceméně chaotická, a tak učitel musel jejich objevitelský proces usměrnit a přivést je k tomu, že nové vztahy a zákonitosti se lépe vynoří, jestliže vneseme do experimentů pořádek a zvolíme jejich vhodnou evidenci.

Epizoda 14: Objev klíčové role výšky trojúhelníku

Studenti objevili užitečný návod – zvolit nejdříve výšku, nebo přesněji polopřímku OK, na které výška OP bude ležet. Pak již není těžké rovnoramenný trojúhelník dokreslit. Výška OP hledaného trojúhelníku OBC nejdříve hraje roli odvěsny pravoúhlého mřížového trojúhelníku OPB s přeponou v lince čtverečkovaného papíru, a pak roli osy souměrnosti hledaného trojúhelníku (viz obr. 12.12 a 12.13).

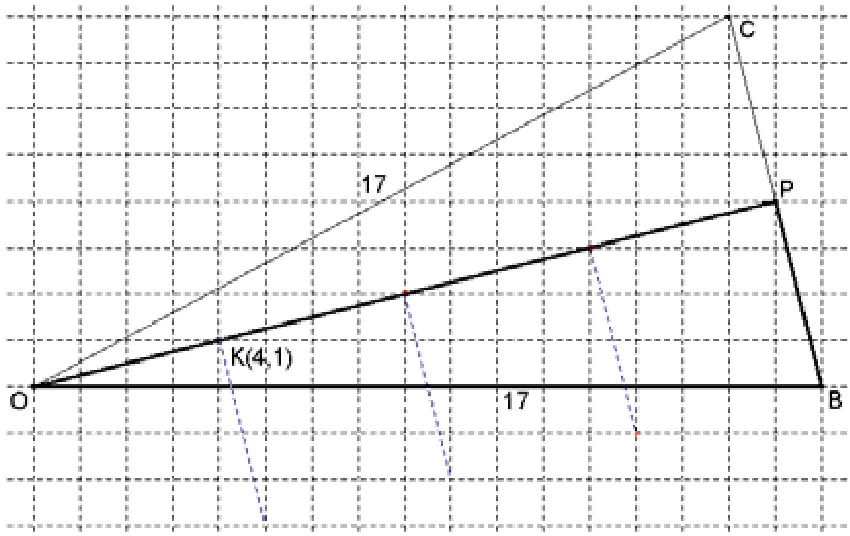


Obr. 12.12

Po několika pokusech studenti zjistili, že tato metoda kreslení rovnoramenných trojúhelníků pracuje spolehlivě a zformulovali ji jako nový objev: „Jestliže si zvolíme jakoukoliv úsečku OK, vždy ji umíme prodloužit na úsečku OP a nalézt bod B tak, že trojúhelník OPB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P a přeponou OB, která leží v lince čtverečkovaného papíru.“

Epizoda 15: Objev zákonitosti, vstup soustavy souřadnic

Po uspořádání nalezených trojúhelníků OBC studenti objevili i první zákonitost. Formulovali ji po výzvě, aby nakreslili požadovaný trojúhelník, jestliže bod K, vnitřní bod polopřímky, na které bude ležet výška, má souřadnice $[7; 1]$ (bod O je počátkem soustavy souřadnic), takto: „Výšku dostaneme tak, že úsečku OK prodloužíme sedmkrát. Obecně, má-li bod K souřadnice $[a; 1]$, úsečku OK je nutno prodloužit a-krát.“



Obr. 12.13

Výsledkem zobecnění je jednoparametrický soubor trojúhelníků (viz obr. 12.12 a 12.13) a šikmých úseček s celočíselnou délkou. Tento soubor trojúhelníků a úseček je uchopen procesuálně a dosud používaná čísla mají funkci veličiny.

Epizoda 16: Vstup algebry

Poznámka. V epizodě 15 studenti dospěli k důležitému poznání. Umějí popsat i takový obrázek, který neumí nakreslit, protože nemají dost velký papír. K popisu jim poslouží čísla, která budou souřadnicemi zkoumaných bodů. Čísla tak dostanou novou roli – roli adresy (Hejný; Stehlíková 1999).

Nyní bylo nutné opět řešitelský proces nasměrovat a učitel musel studenty vyzvat, aby předchozí situaci popsali „řečí“ čísel, tzn. aby všechny zúčastněné body opatřili souřadnicemi.

Studenti vyjádřili uspořádání obrázků uspořádáním souřadnic bodů do tabulky. Do prvních tří řádků tabulky zapisovali souřadnice bodu K, paty výšky P a vrcholů B, C trojúhelníku OBC, které vyčetli z prvních tří obrázků (viz obr. 12.12 a 12.13).

K vyplnění dalších řádků nebylo již třeba kreslit obrázky, neboť posloupnost čísel v jednotlivých sloupcích tabulky je snadno odhalitelná (viz tab. 12.1).

Aby studenti odhalili závislost čísel i v jednotlivých řádcích, vyzval je učitel k doplnění řádku tabulky, který odpovídá tomu trojúhelníku, jehož bod K má souřadnice $[7; 1]$. Ten, kdo umí vyplnit tento řádek tabulky, aniž by musel vyplnit všechny řádky předchozí, závislost mezi čísly již vidí a snadno formuluje závislost i obecně. Ta je pak vyjádřena v posledním řádku tabulky.

K		***P***		***B***		***C***	
k_1	**k_2**	**p_1**	**p_2**	**b_1**	**b_2**	**c_1**	**c_2**
2	1	4	2	5	0	3	4
3	1	9	3	10	0	8	6
4	1	16	4	17	0	15	8
…	…	…	…	…	…	…	…
7	1	49	7	50	0	48	14
…	…	…	…	…	…	…	…
a	**1**	**a^2**	**a**	**a^2+1**	**0**	**a^2-1**	**2a**

Tab. 12.1

Soubor všech požadovaných rovnoramenných trojúhelníků a jim odpovídajících šikmých úseček s celočíselnou délkou je nyní uchopen konceptuálně. Výsledkem tohoto uchopení je formulace vzorečku studenty: „Pro každé přirozené číslo a existuje šikmá úsečka OC s celočíselnou délkou. Bod C má souřadnice $[a^2 - 1; 2a]$ a délka úsečky OC se rovná $a^2 + 1$.“

V dalších dvou epizodách učitel postupně vedl studenty k tomu, aby postupně proměnili na parametr i druhou souřadnici bodu K a hledali závislost souřadnic bodů B, C na obou souřadnicích bodu K metodou uvolňování parametrů.

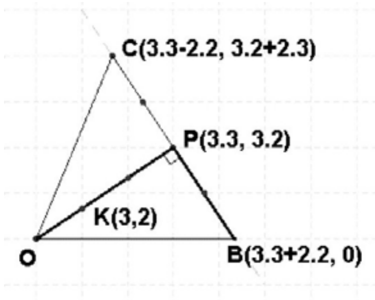
Epizoda 17: Výzva k řešení případů pro $K[a; 2]$

Studenti opět kreslili mřížové trojúhelníky OBC pro tyto volby bodu K: $K[3; 2]$, $K[4; 2]$, $K[5; 2]$ atd. (obr. 12.14a). Ke všem klíčovým bodům zapsali jejich souřadnice. Někteří z nich již v procesu kreslení trojúhelníků objevili vztahy mezi souřadnicemi zkoumaných bodů. Po „přenesení“ obrázků do tabulky (tabulka na obr. 12.14b) a po zkušenostech s první tabulkou nová tabulka „promluvila“ i k dalším řešitelům a umožnila formulovat obecný vztah v posledním řádku. Výsledkem je opět vzoreček, který studenti interpretovali slovy: „Pro každé přirozené číslo a existuje šikmá úsečka OC s celočíselnou délkou. Bod C má souřadnice $[a^2 - 4; 2 \cdot 2a]$ a délka úsečky OC se rovná $a^2 + 4$.“

Nyní již bylo vidět, že do hry vstupuje také druhá souřadnice bodu K. Jakým způsobem, to se řeší v další epizodě.

Epizoda 18: Postupné zobecňování

Studenti řešili ještě případ pro $K[a; 3]$. Získané zkušenosti jim umožnily postupovat rychleji a některé kroky přeskočit.



(a)

K		**P**		**B**		**C**	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
3	2	9	6	13	0	5	12
5	2	25	10	29	0	21	20
…	…	…	…	…	…	…	…
7	2	49	14	53	0	45	28
…	…	…	…	…	…	…	…
a	**2**	a^2	2a	$\mathbf{a^2+4}$	**0**	$\mathbf{a^2-4}$	**2.2a**

(b)

Obr. 12.14

Dále učitel vyzval řešitele, aby poslední řádky tří tabulek přepsali do nové tabulky (tab. 12.2). Protože se čísla v tabulce „chovají“ podle očekávání, snadno lze vyplňovat i další řádky, a tak postupně uvolňovat i druhou souřadnici a nakonec dojít v posledním řádku tabulky k dvouparametrickému vzorečku.

K		**P**		**B**		**C**	
k_1	k_2	p_1	p_2	b_1	b_2	c_1	c_2
a	1	a^2	a	a^2+1	0	a^2-1	2a
a	2	a^2	2a	a^2+4	0	a^2-4	2.2a
a	3	a^2	3a	a^2+9	0	a^2-9	2.3a
…	…	…	…	…	…	…	…
a	7	a^2	7a	a^2+7^2	0	a^2-7^2	2.7a
…	…	…	…	…	…	…	…
a	**b**	$\mathbf{a^2}$	**ba**	$\mathbf{a^2+b^2}$	**0**	$\mathbf{a^2-b^2}$	**2.ba**

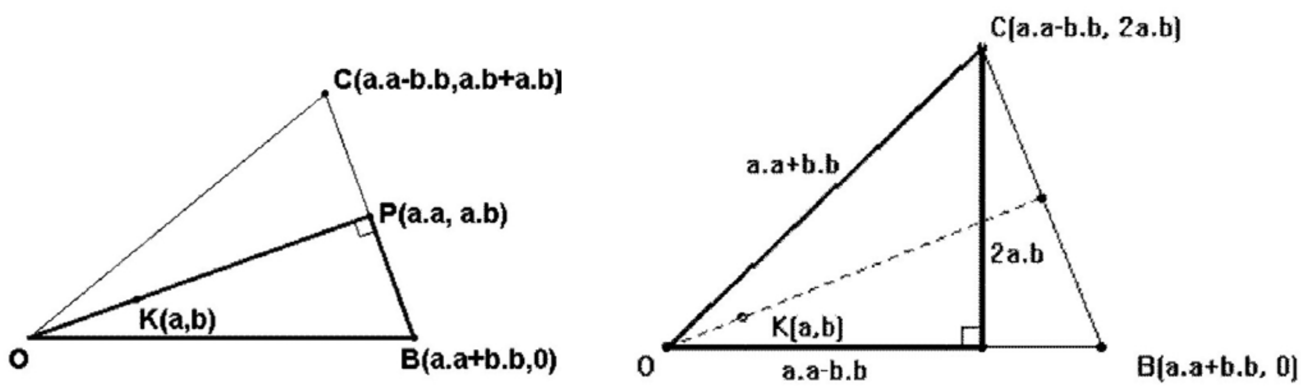
Tab. 12.2

Nyní již umíme ke každému bodu $K[a;b]$ najít příslušný rovnoramenný trojúhelník OBC. Objevený vztah budeme interpretovat obrázkem i verbálně: Ke každým dvěma přirozeným číslům a, b, $a > b$, lze najít šikmou mřížovou úsečku OC, jejíž délka je celočíselná. Bod C má souřadnice $[a^2 - b^2; 2ab]$ a délka úsečky je $|OC| = a^2 + b^2$.

Epizoda 19: Vstup Pythagorovy věty

Učitel zadal závěrečný úkol celé cesty za objevem pythagorejských trojic: Najděte všechny pythagorejské trojice, neboli najděte všechna řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ v oboru přirozených čísel. Pohled na obr. 12.15a a 12.15b se znalostí Pythagorovy věty umožňuje novou interpretaci. Některá řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ lze popsat takto: $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, kde a, b jsou libovolná přirozená čísla a $a > b$. Jiná řešení dané rovnice, například $x = 9$, $y = 12$, $z = 15$, uvedeným způsobem popsat nelze. Trojici $(9; 12; 15)$ však můžeme získat jako násobek trojice $(3; 4; 5)$. Trojice nesoudělných přirozených čísel, která jsou řešením dané rovnice, se nazývají *primitivní pythagorejské trojice*.

Můžeme tvrdit, že uvedeným způsobem lze popsat všechny primitivní pythagorejské trojice. Důkaz o tom zde uvádět nebudeme.



(a) (b)

Obr. 12.15

12.5 Propedeutika základních pojmů lineární algebry

12.5.1 Přehled současného stavu

Základní pojem vektorové algebry, volný vektor, je na střední škole budován výhradně konceptuálně. Studentům se předloží definice, že vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček v E^2 nebo v E^3, a dále se definitoricky zavede unární operace opačný vektor a binární operace sčítání, odčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem a binární relace rovnoběžnost a kolmost vektorů. Definice se studenti převážně musí naučit nazpaměť s nadějí, že jim snad někdy po čase procvičováním porozumí. Tento přístup způsobuje, že jsou poznatky z analytické geometrie často uchopovány formálně. Studenti pak tuto disciplínu považují za velmi obtížnou, neboť je nutné si pamatovat mnoho vzorečků a vidět ji jako most mezi algebrou a geometrií je nad jejich síly.

12.5.2 Náš přístup

V kurzu Geometrie se představa o volném vektoru buduje důsledně procesuálně pomocí „cestování“ na čtverečkovaném papíře zpočátku pouze mezi mřížovými body (Hejný; Jirotková 1999, Hejný; Jirotková; Stehlíková 1996). Po nabytí jistého „vhledu do situace se pojem vektor od tohoto sémantického ukotvení osvobozuje a stává se abstraktním pojmem, stavebním kamenem vektorového prostoru“ (Hejný 1996, s. 18). Hledáním „cesty“ mezi dvěma danými mřížovými body jen pomocí dvou předem zvolených vektorů se navodí pojem lineární kombinace a poznatky o operaci sčítání vektorů. Postupně se buduje též představa o bázi vektorového prostoru nejdříve pomocí pojmů bod celočíselně dosažitelný a celočíselná báze.[6] Tak například pomocí vektorů $\vec{p}(1;1)$, $\vec{q}(1;2)$ je libovolný mřížový bod $X[x;y]$ dosažitelný (z počátku), neboť $[x;y] = [0;0] + (2x-y)\overrightarrow{p} + (x-y)\overrightarrow{q}$ a vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ jsou celočíselnou bází. Avšak bod $M[1;2]$ pomocí vektorů $\vec{u}(1;1)$ a $\vec{v}(1;3)$ již celočíselně dosažitelný není, neboť nelze najít žádné $r, s \in \mathbf{Z}$, aby platilo $[1;2] = [0;0] + r(1;1) + s(1;3)$, a tedy vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ celočíselnou bází nejsou. Důležité je, že takové úlohy lze řešit na různé úrovni – experimentováním a kreslením obrázků na čtverečkovaném papíře počínaje a abstraktními úvahami nevázanými na konkrétní představy konče. Tím je řešení dostupné každému a každý si sám může nastavit obtížnost tím, jaký aparát k řešení zvolí.[7]

Otevřením problému neřešitelného ve světě celých čísel, např. jak z bodu O dosáhnout bodu $M[1;2]$ pouze pomocí vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, se vytváří situace podobná situaci ze základní školy, kdy se různými aktivitami jako „krájení“ a dělení konstruují zlomky. Překonání překážky v neschopnosti „rozdělit dva koláče mezi tři děti“, překážky v nedělitelnosti některých celých čísel, vede k objevení zlomků a hlavně k nutnosti jejich zavedení. Stejně tak vyřešení problému s celočíselnou nedosažitelností jistého bodu vede k nutnosti dělit vektor a zahustit čtverečkový papír, což znamená v obou případech rozšíření diskrétního světa celých čísel na hustý svět čísel racionálních.

Charakteristické pro konstruktivistické vedení výuky je, že k objevování nového poznatku jsou studenti vedeni také tak, že jsou jim předkládány série úloh, které postihují jeden a tentýž jev v co nejvíce různých kontextech. Uveďme příklad.

[6] Zde jsou všechna čísla ze $\mathbf{Z}$. Nechť vektory $\vec{u}(u_1;u_2)$, $\vec{v}(v_1;v_2)$ tvoří bázi. Řekneme, že bod X je celočíselně dosažitelný z bodu O pomocí báze $\vec{u}$, $\vec{v}$, když existují čísla x, y tak, že $X = O + x\vec{u} + y\vec{v}$. Bázi $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazveme celočíselnou, když je každý bod pomocí $\vec{u}$, $\vec{v}$ celočíselně dosažitelný.

[7] Viz také úlohy s nastavitelnou obtížností, kap. 10, oddíl 10.8.

Úloha 1. K danému celočíselnému vektoru $\vec{u}(a;b)$ najděte vektor $\vec{v}(x;y)$ tak, aby vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ tvořily celočíselnou bázi, neboli aby všechny mřížové body byly pomocí těchto vektorů celočíselně dosažitelné.

Úloha 2. Ke dvěma mřížovým bodům $O[0;0]$ a $A[a;b]$ najděte třetí mřížový bod $B[x;y]$ tak, aby obsah trojúhelníku OAB byl nejmenší možný (rovnal se polovině obsahu jednoho čtverečku sítě).

Úloha 3. Řešte diofantovskou rovnici $ax + by = 1$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

Úloha 4. Na přímce dané rovnicí $ax + by = 1$, $a, b \in \mathbf{Z}$, najděte všechny mřížové body.

V úloze 1 studenti snadno zjistí, že k vektoru $\vec{u_1}(2;2)$, ani $\vec{u_2}(-3;6)$ se žádný vektor $\vec{v}$ splňující dané podmínky nenalezne. K vyslovení podmínky pro existenci vektoru $\vec{v}$ je již malý krok.

V úloze 2 studenti opět zjistí, že k bodu $A_1[2;2]$, ani k bodu $A_2[-3;6]$ se žádný bod B splňující dané podmínky nalézt nepodaří. Brzy také odhalí, že bod B existuje pouze tehdy, jestliže úsečka OA neprochází kromě bodů O a A žádným dalším mřížovým bodem. Není pak již obtížné přijít na to, za jakých podmínek se mezi body O a A nějaký mřížový bod vyskytuje a jak souvisí největší společný dělitel souřadnic bodu A s počtem mřížových bodů mezi O a A (jde o vizualizaci největšího společného dělitele).

Obdobné závěry učiní studenti i v dalších případech a jsou vedeni k tomu, aby odhalili, že se jedná o různé interpretace téhož jevu. V geometrickém kontextu mluvíme o celočíselné dosažitelnosti, o obsahu trojúhelníku a o incidenci přímky a mřížových bodů. V algebraickém kontextu pak mluvíme o řešitelnosti diofantovské rovnice a o soudělnosti celých čísel a v kontextu analytické geometrie o incidenci přímky a mřížových bodů.

Tento způsob práce, to znamená konstruování vizuálních analogií k aritmetickým či algebraickým myšlenkám a procesům nebo obráceně, představuje přístupovou cestu k porozumění těm studentům, u nichž převládá „vizuální myšlení“ (Goldeberg aj. 1994). Umožní jim porozumět matematickým myšlenkám, procesům a vztahům. Zároveň je studentům nabídnuta jedna možnost, jak pracovat se svými budoucími žáky.

Konstruktivistický způsob prezentace geometrie si docela přirozeně vynutí tvořivé klima v seminářích i přednáškách. Uvedeme další příklad. Po úvodních hodinách, kdy studenti mj. vyvodí, jak otáčet vektor o úhel $\pm 90°$, aniž by se jim musel sdělovat předpis pro kolmé vektory, lze řešit úlohu 5.

Úloha 5. Je dán mřížový čtverec $ABCD$, kde $A[0;0]$, $B[3;1]$. Každou jeho stranu rozdělte na tři shodné úsečky a vzniklé body pojmenujte po řadě K, L, M, N, O, P, Q, R. Sestrojte čtyřúhelník $KMOQ$. Nyní by se dal očekávat úkol „Dokažte, že ...“, „Vypočtěte, ...“, jak je v geometrii obvyklé. My dáváme přednost výzvě: „Co můžete o čtyřúhelníku $KMOQ$ říci?“

Řešení. Studenti samostatně objevují a formulují různá tvrzení, o nichž však musí dokázat s využitím pouze známého aparátu, že jsou pravdivá. Jako první tvrzení je téměř vždy vysloveno, že daný čtyřúhelník je čtverec. To se však nyní musí dokázat pouze dosud vybudovaným aparátem. Nejdříve se tedy musí odstranit zdánlivá nekompatibilnost nástroje (daná čtverečková síť, celočíselné vektory a operace s nimi) a vstupních podmínek (čtyřúhelník, který není mřížový). Poměrně brzy se odhalí myšlenka, že není nutné se vázat na daný čtverečkový papír a že si lze tentýž papír „načtverečkovat“ jinak, aby se z nemřížového čtyřúhelníku $KMOQ$ stal mřížový. Stačí vést body K, L, M, N, O, P, Q, R rovnoběžky se stranami čtverce $ABCD$ a oba útvary $ABCD$ a $KMOQ$ jsou pak mřížové. Tím je vše připraveno pro použití poznatku o otáčení vektoru o úhel $\pm 90°$ k důkazu, že se jedná o čtverec. Tuto proceduru lze opakovat, ať se jedná o jakkoliv zadaný čtverec $ABCD$, což svědčí o tom, že důkaz je obecný, nezávislý na volbě čtverce $ABCD$.

Další tvrzení o dané situaci, která studenti obvykle vyslovují, se týkají poměru obsahů obou čtverců a úvah nad dalšími čtyřúhelníky vzniklými dělením stran čtverce $ABCD$ na jiný počet shodných dílů. Myšlenka „alternativního“ čtverečkového papíru je dále využitelná při přenášení či porovnávání úhlů a při konstruování podobných útvarů.

Formulace výzvy v úloze 5 má ještě další význam, a to diagnostický. Učitel podle reakcí studentů pozná, které pojmy a jevy má student dobře osvojeny a které jej do nějaké míry zaujaly.

12.6 Závěr

Je nutno podotknout, že při tomto vyučování čas od času získáváme i negativní reakce týkající se přístupu studentů k dané disciplíně. Dialogická forma seminářů, ale i přednášek vede u mnoha studentů k představě, že „zde se není co učit“. Jsme si vědomi toho, a mnohé reakce studentů to potvrzují, že z takto vedeného kurzu si studenti ne vždy odnášejí pocit, co všechno se naučili. Vždyť se nemuseli naučit zpaměti žádné vzorce, žádné definice, věty ani důkazy. Studenti, kteří byli v předchozím vzdělávání vedeni k „osvojování si“ předkládaných znalostí zejména učením se zpaměti, nedoceňují význam zamýšlení se, hledání a kritického posuzování pojmů, vztahů, situací. Mnozí studenti si však odnášejí radostný pocit, že jsou schopni něco samostatně objevit a že již nejsou závislí na tom, zda si vzorec zapamatují nebo ne. Jejich intelektuální sebevědomí vzrostlo a jejich postoj ke geometrii se zlepšil. Věříme, že tito studenti jsou připraveni dále na sobě pracovat a obdobným způsobem vést i své budoucí žáky. Domníváme, že námi volená cesta přináší do kognitivního, osobnostního i pedagogického růstu studenta více pozitivního než negativního.

Shrňme ještě jednou ty principy konstruktivistického přístupu k vyučování, které jsou zde zdůrazněny. Ty, které se týkají role učitele a role žáka či studenta, dnes již samozřejmé, opakovat nebudeme.

- Uvádění jevů v různých kontextech a souvislostech. Číslo ve dvou funkcích – jako veličina (délka úsečky) a jako adresa (souřadnice bodu) (oddíl 12.4); čtverec v nových rolích – nástroj pro porovnání úseček, k určení délek úseček, nositel kolmosti (oddíl 12.3 a 12.4); různé interpretace lineární diofantovské rovnice (oddíl 12.5); různé objekty jako nástroje pro porovnání úseček – čtverce, kosoúhelníky, trojúhelníky (oddíl 12.3 a 12.4); vektor jako proces a jako koncept (oddíl 12.5) apod.

- Chyba jako edukační nástroj. Chybná tvrzení (viz hypotéza 1 v oddíle 12.3 a hypotéza 2 v oddíle 12.4) se ponechala tak dlouho, dokud studenti nedospěli ke sporu a k jejich vyvrácení. Sehrála tak pozitivní roli v cestě za dalším poznáním a hlubším porozuměním.
- Úlohy s nastavitelnou obtížností. Aby se skutečně dala příležitost zažít žákům či studentům pocit radosti z dobře vyřešené úlohy, mají úlohy různou úroveň obtížnosti. Alespoň dílčího řešení lze dosáhnout jednoduchým experimentováním. Způsob uchopení úlohy řešitelem určuje její obtížnost (konstrukce čtverce v oddíle 12.4, kolmost vektorů v oddíle 12.5 apod.).
- Nepředvídatelnost. Téměř po každé epizodě v oddíle 12.3 i 12.4 je možné změnit směr bádání. Učitel by měl reagovat na podněty řešitelů a nepromarnit tvůrčí atmosféru, avšak zároveň musí mít stále na paměti sylabus a cíle kurzu a vyučovací proces neustále vyhodnocovat a modifikovat. Každý objevitelský proces, nejen ten, který je popsaný v oddíle 12.3 a 12.4, je dlouhodobý a je samozřejmě závislý na úrovni matematických znalostí a schopností žáků či studentů. Na 1. stupni základní školy může probíhat i několik let, při individuální práci se studentem, diplomantem proběhl během tří týdnů.
- Postupné budování poznatků. Byla např. aplikována metoda postupného uvolňování parametrů (oddíl 12.4), která je založena na experimentování, systemizování experimentů a jejich evidenci, transferu obrázků do „řeči“ čísel, na základě série separovaných modelů odhalení zákonitostí a jejich zobecnění a konečně interpretaci obecných závěrů. Tato metoda je široce použitelná ve výuce matematiky a je přístupná dětem i 1. stupně základní školy. Od učitele však vyžaduje značnou dávku trpělivosti. Poprvé byla tato metoda popsána v (Hejný aj. 1989).

12.7 Aplikace a výhledy do budoucna

Způsobem obdobným tomu, který jsme uvedli, jsou zpracována a vyučována další geometrická témata. Mnohá témata jsou také rozpracována v diplomových pracích studentů primární pedagogiky, o které zájem postupně stoupá. Např. v roce 2003 byla zadána tato témata: Odhalování závislostí s využitím čtverečkovaného papíru na 1. stupni základní školy, Diagnostikování obtíží ve výuce geometrie na základní škole a jejich překonávání, Poznávání geometrických tvarů v netradičních geometrických prostředích.

Přímou aplikací výsledků výzkumu, který jsme popsali, je projekt EMTISM zpracovaný v rámci programu Socrates – Comenius 2.1. a scénář každoročního kurzu pro praktikující učitele Evropské Unie nabízený programem Socrates – Comenius 2.2. (Kubínová; Littler, eds., 2003).

V současné době výzkum v této oblasti stále pokračuje. Pod vedením M. Hejného se zaměřujeme na analýzu studentských písemných řešení úloh vybraných k tomuto účelu. Ty jsou zadávány jednak jako dobrovolné, tedy jsou k dispozici řešení pouze od řešitelů, kteří se domnívali, že úlohu nějakým způsobem vyřešili, jednak jako povinné v rámci domácích úkolů a testů. Testové úlohy studenti řeší ve stresové zátěži, kterou každé testování přináší, a na domácí úlohy mají obvykle čas několik týdnů. Analýzy se zaměřují na odhalení formalismů v poznatcích studenta, na určení míry porozumění danému problému a na popis kognitivního typu studenta. Dále se ve spolupráci s J. Kratochvílovou zaměřujeme na popis a porovnání průběhu konkrétních vyučovacích hodin, které byly společně připraveny, a hledání odlišností a jejich příčin (viz také kap. 15).

Kapitola 13

Kurz Matematika s didaktikou v oboru Učitelství na speciálních školách

Jana Kratochvílová

13.1 Úvod

K technologiím, jimiž se snažíme seznámit budoucí učitele s konstruktivistickými přístupy k vyučování matematice, patří *metoda projektů*. V našem výzkumném týmu poprvé tuto metodu systematický aplikovala M. Kubínová (2002) a její práce je základní literaturou v této oblasti. Žák zpracovává jistý problém nebo matematické téma a výsledek svého snažení předkládá v písemné formě. Učitel, který buď pomáhá žákovi volit vhodné téma, nebo mu téma sám nabídne, je v průběhu žákovy práce jeho diskusním partnerem a nakonec hodnotitelem výsledného dokumentu. Zde se soustředíme na studenty oboru Speciální pedagogiky, z nichž někteří metodu projektů používají při práci se žáky jak základních, tak i speciálních škol. Popíšeme jednu seminární práci, která později přerostla v práci diplomovou.

13.2 Problém a přehled současného stavu

Nejčastější důvod, proč si studenti vybírají ke studiu obor Speciální pedagogika – učitelství (SPPG), vychází z jejich potřeby pomáhat ať už dětem nebo dospělým se speciálními potřebami. Z pohledu studentů „pomáhat“ znamená stát se učitelem, který pak může zkvalitňovat handicapovaným život a přispívat k jejich integraci do občanského života. U většiny studentů je tento cíl nejvyšší prioritou, a tudíž nepřemýšlejí o vztahu k předmětům a schopnosti je učit, protože to je pro ně při výběru této specializace podružné. Mnozí z nich si však ze základní a střední školy přinášejí nedobré zkušenosti charakterizované strachem a přesvědčením o vlastní nemohoucnosti intelektuálně zvládnout matematiku. Školní předmět matematika je v jejich vědomí často uložen tak, jak byl vnímán v průběhu jejich školní docházky.[1] Je tedy silně podřízen přesvědčení, že vyučování matematice znamená přenášení matematických myšlenek z hlavy učitele do hlav žáků (viz transmisivní výuka, kap. 1). Učitel demonstruje a žák se snaží uchovat si v paměti různé definice, poučky a vzorce a osvojit si algoritmické procedury.

Studenti často vyjadřují názor, že matematika není vhodný předmět pro mentálně handicapované žáky. Důvodem je jejich nezkušenost s tím, že i matematicky „slabé“ dítě může zažít radost při řešení přiměřeně náročného problému a může být povzbuzeno k další činnosti a rozvoji nejen matematických, ale i obecně kognitivních schopností. Studenti SPPG přicházejí na fakultu s vědomím, že budou muset v průběhu studia zvládnout i kurzy matematiky a mnozí na tento předmět nahlížejí pouze jako na institucionální překážku, kterou je nutno překonat, aby mohli pomáhat handicapovaným.

V uvedené souvislosti musí učitel připravující budoucí učitele řešit otázku, jak přistupovat ke studentovi, který je v matematice velice slabý, ale jehož působení mezi dětmi již má nebo pravděpodobně bude mít dobré výsledky. Proto často zvažuje, jaké minimum by měl budoucí učitel z matematiky umět. Tradiční přístup často nad schopnostmi upřednostňuje znalosti nebo logické myšlení na mnohem vyšší úrovni, než kterou student má či je schopen rozvinout. To podle našich zkušeností vede k učení se bez porozumění. Tato zkušenost studenta, budoucího učitele je pak dále přenášena i na děti. Domníváme se, že tento přístup, alespoň pokud jde o studenty SPPG, je nutno přehodnotit.

V hodnotovém střetu „úroveň matematických znalostí studenta versus jeho schopnost zkvalitňovat život handicapovaných dětí“ se autorka plně ztotožňuje s názory zkušenějších kolegů, kteří upřednostňují hodnotu lidské kvality studenta. Naším cílem pak není dát studentovi jistý objem matematických znalostí, ale nabídnout mu přitažlivé intelektuální činnosti, které povzbudí jeho sebevědomí a dovolí mu prožít radost z objevování nového a z řešení úloh. Nejedná se však o rezignaci, o paušální proklamaci „všichni studenti SPPG v disciplíně matematika uspějí“. Jde nám o to, ukázat těmto studentům možnosti, které pro rozvoj kognice, ale i osobnosti člověka, matematika nabízí.

V této kapitole popíšeme metody, které používáme v práci se studenty speciální pedagogiky ve výuce matematiky a na případové studii budeme ilustrovat, jak ovlivňují intelektuální a osobností růst studenta, budoucího učitele.

Kapitola je součástí širšího problému formulovaného v kap. 10, s. 182.

[1] Podrobnosti k této problematice je možné najít v (Zapotilová 2003) a v kap. 9.

13.3 Metody práce

Při přípravě studentů SPPG nám jde především o tyto cíle:

1. Systematicky snižovat, až úplně odbourat strach z matematiky.
2. Povzbuzovat intelektuální sebevědomí studentů.
3. Vést studenty k potřebě sebereflexe, a to jak v oblasti kognitivní (analyzovat vlastní myšlenkové procesy), tak v oblasti postojové (analyzovat vlastní vztah k matematice).
4. Pomáhat studentům rozvíjet matematickou komunikaci, tj. schopnost formulovat vlastní myšlenky a chápat myšlenky formulované jinou osobou.
5. Propojit všechny čtyři uvedené záměry s pedagogickými zkušenostmi a s budoucí pedagogickou prací studenta.

Dále popíšeme metody, kterými chceme dosáhnout jednotlivých cílů.

Ad 1. Pokoušíme se o vytvoření vstřícného klimatu ve skupině, a to nejen mezi vyučujícím a studenty, ale také mezi studenty navzájem. K tomu napomáhá mimo jiné náš postoj k chybě a využití diskuse. Chybu chápeme jako nutnou cestu k poznání (viz kap. 4). Pokud se student dopustí chyby a dobře ji analyzuje, je pochválen, jinak se společně snažíme o nalezení její příčiny. V případě studentovy chyby či vyslovení nepravdivé myšlenky nepřipouštíme žádnou ironii. Abychom studenty motivovali k diskusi, klademe důraz na matematiku pro děti, protože právě v této matematice studenti spatřují smysl. V diskusi využíváme jejich převahy znalostí v oblasti handicapovaných dětí, např. dotazováním se, zda by nevidomý žák vyřešil danou úlohu nebo jak by měla být úloha změněna, aby byla pro nevidomého žáka uchopitelná. Tak ve skupině vzniká partnerství „vyučující (odborník na matematiku) – student (odborník na handicapovaného žáka)“. Cílem je, aby se studenti neobávali přispět do diskuse s vlastní myšlenkou, i když vědí, že vyučující s touto myšlenkou nemusí souhlasit. Každé myšlence je přitom věnována pozornost. Studenti, kteří vidí ostatní spolužáky přispívat do diskuse, nabývají přesvědčení, že i oni jsou toho schopni, a tak se postupně zapojují.

Ad 2. Individualizujeme matematické potřeby každého studenta tak, že pro ně připravujeme vhodné úlohy – ne příliš náročné, ani příliš triviální, protože tak by nepomohly budovat jejich důvěru ve své matematické schopnosti. Na základě našich zkušeností se dobře osvědčily série gradovaných úloh. Z těch si studenti mohou vybrat takovou úlohu, při jejímž vyřešení zažijí úspěch. Studenti diskutují především o svých strategiích řešení, o řešitelnosti úlohy, o způsobu nalezení všech řešení úlohy a o momentech, kdy se při řešení cítili beznadějně. Formulují nové úlohy tak, aby byly uchopitelné pro děti s různým typem handicapu. Zpočátku modifikují úlohy zadávané na semináři, pak tvoří série gradovaných úloh a zpracovávají širší úlohová témata, např. úlohy na vytváření různých staveb z hracích kostek majících určitý počet teček viditelných na stavbě; úlohy s tetraminy a pentaminy; úlohy na pravo-levou orientaci v plánku; bludiště; úlohy na vytváření staveb z krychlí a jejich zapisování do schémat; sčítací trojúhelníky; triády; kombinatorické úlohy (viz také tvořivé úlohy, kap. 10, oddíl 10.8, a motivující úlohy, kap. 11).

Ad 3. V poslední době se ukazuje, že sebereflexe je velmi důležitá, protože nám pomáhá porozumět sobě samým a zvyšuje schopnost empatie (Hošpesová; Tichá 2003a, 2003b, Kratochvílová; Swoboda 2003b). V oblasti kognitivní dochází k uvědomování si komunikačního nedorozumění, špatné interpretace pojmu/situace, volby nevhodných řešitelských strategií apod. V oblasti postojové dochází ke změně názorů jednak na vlastní schopnosti, ale také na smysl vyučování matematice (Zapotilová 2003).

Ad 4. Když člověk „dělá“ matematiku, dokumentuje své myšlení písemným záznamem, který má soukromý charakter (Hejný; Stehlíková 1999, s. 67). Artikulace vlastní myšlenky v konvenčním jazyce je jiná činnost než činnost řešitelská. Pro učitele má schopnost dobré artikulace vlastních myšlenek (nejen verbální, ale i grafy, tabulky, obrázky, pohyby, ...), ale i přesné interpretace mnohdy vágně formulovaných myšlenek žáků velký význam. Vyučující přispívá k rozvoji matematické komunikace tak, že na semináři vystupuje jako moderátor, částečně i architekt diskuse, někdy i pomocník při artikulaci myšlenky.

Ad 5. Uvedené záměry (1 až 4) jsou neustále propojovány při práci na projektu, jehož specifikum je v tom, že je dlouhodobý a klade důraz na autonomii studenta.

Jedním z možných nástrojů, jak naplňovat cíle z předchozího odstavce, je práce studenta na projektu.

Úkolem studenta je:

1. Vybrat si jisté matematické prostředí (např. bludiště), ne nutně nabídnuté na semináři, a v rámci něho připravit několik úloh, které lze použít jako diagnostický nástroj k analýze myšlenkových procesů žáků. Inspirativně může posloužit i matematická úloha (např. úloha o věku), jejíž modifikací student formuluje další úlohy s cílem například zjistit jejich různou náročnost pro žáky.
2. Realizovat experimenty, tj. zadat připravené úlohy žákům určitého věku a handicapu (individuálně či skupinově, resp. ve třídě), sledovat žáky při řešení úloh a případně (především u individuálních experimentů) nahrávat celý průběh experimentu.
3. Zaznamenat svá sledování žáků; u nahraných experimentů přepsat magnetofonový záznam do protokolů; vybrat ta žákovská řešení, kde došlo k chybě nebo použití více než jedné strategie pro vyřešení úlohy.
4. Analyzovat myšlenkové procesy žáků při řešení úloh, případně analyzovat i své reakce na žáka v průběhu experimentu.
5. Provádět sebereflexi celé práce na projektu.

Ne vždy jsou všechny body zpracovány. Stěžejním bodem projektu je analýza myšlenkových procesů žáků (bod 4).

Na počátku celého procesu *učitel* (vedoucí projektu) je tím, kdo studentovi navrhuje, co by mohl zkoumat v projektu. Učí ho analyzovat práci nejen žáka, ale i sebe samého. Později se role učitele oslabuje, učitel se stává průvodcem – diskusním partnerem, protože student, čím více pracuje na projektu, tím častěji přináší podnětné myšlenky pro diskusi. Na konci procesu je to student, který sám analyzuje myšlenky žáka a navrhuje další možnosti experimentu.

Tento projekt spolu s průběžným sledováním studenta pak poskytuje bohatý materiál k posouzení úspěšnosti realizace cílů (viz cíle 1 až 5 v předchozím textu). Jeden takový projekt včetně průběžného sledování studenta Jana – autora projektu – ukážeme.

13.4 Metodologie výzkumu – případová studie

Jedná se o případovou studii, ve které byla analyzována data získaná především v období Janovy práce na projektu, tj. posledních dvou semestrů kurzu Didaktika matematiky. Všechny získané materiály jsou tří typů:

1. sebereflexe postoje k vyučování matematice jak před zahájením, tak na konci výuky (tj. po absolvování všech matematických disciplín) na Pedagogické fakultě UK,
2. písemné záznamy vyučujících o Janovi (včetně autorčiných) z posledních dvou semestrů výuky, na které se autorka přímo podílela,
3. čtyři verze projektu včetně konečné.

Analýza těchto materiálů byla provedena z hlediska Janova postupu práce a zejména z hlediska změny jeho postoje k matematice a vyučování matematice.

13.5 Popis případové studie

Ve 2. ročníku studenti před vstupem do první matematické disciplíny píší sebereflexe postojů k matematice. V té Jan napsal (uvádíme výňatek): „Z matematiky mám obavy. Nepatří zrovna mezi mé nejoblíbenější předměty. Chápu ji jako velmi silný nástroj k výpočtům čehosi, pro mě ne vždy zcela pochopitelného. Na střední škole jsem musel zvládnout různé vzorce a poučky na integrování a derivování, ale praktický smysl mi stále uniká.“

V disciplínách Úvod do studia matematiky (aritmetika a geometrie) a Didaktika matematiky I (zaměřena na aritmetiku) byl Jan kognitivně slabý, ale osobnostně sebevědomý. Své nedostatky v matematice si dobře uvědomoval. Klima, které jedna z vyučujících vytvořila v seminářích, Janovi umožnilo přiznat, že mu matematika nikdy nešla. Často to zmiňoval u tabule při řešení nějaké úlohy. Nicméně se pokoušel poctivě plnit všechno, co bylo na semináři zadáváno. Velmi často při řešení úloh používal metodu pokus – omyl. To ho velmi brzy vyčerpávalo, a proto další pokusy vzdával.

V sebereflexi, kterou psal na konci 3. ročníku po obhajobě projektu, v části vztahující se k těmto disciplínám napsal: „Během výuky jsem začínal vidět matematiku aplikovanou do běžného života a srozumitelnou pro široké masy lidí. To je fajn, pomyslel jsem si a již z první přednášky jsem odcházel s klidnějším srdcem a vřelejším vztahem k matematice.“

V rámci disciplíny Didaktika matematiky I byl studentům zadán projekt, který si měli v průběhu dalších semestrů zpracovávat.

V zimním semestru 3. ročníku v disciplíně Didaktika matematiky II (zaměřena na geometrii) jsme již pozorovali u Jana výrazný nárůst aktivity. Velmi rád prezentoval práci na svých domácích úkolech. Měl zájem o práci i mimo semináře. Sledovali jsme jeho první pokusy formulovat a řešit vlastní úlohy. Ale přesto vždy před testem říkával, že zadávanou úlohu nezvládne vyřešit. V sebereflexi ve 3. ročníku k této disciplíně napsal: „Cvičení sice byla vždy zajímavá a kupodivu mě i velmi bavila, ale ty písemky mě doháněly k šílenství. Co písemka, to stres. Ten přesně určený časový úsek mě trápil, že jsem se nedovedl plně koncentrovat na ten test. A výsledky tomu také odpovídaly.“

V letním semestru 3. ročníku v závěrečné disciplíně Didaktika matematiky III (zaměřena na projekt) spočívala Janova práce v přípravě experimentu (zpracoval jedno úlohové téma, které nebylo prezentováno na semináři), jeho realizaci, analýze a následné prezentaci projektu v seminární práci. V sebereflexi po obhajobě projektu Jan vypověděl: „Při zadání projektu jsme dostali nějaké náměty na zpracování. Bylo to dobré, byla možnost volby. Inspiroval jsem se, ale chtěl jsem přijít s něčím novým. A stal se zázrak, něco mě napadlo. Šlo o výzkum u dětí, které měly počítat trojúhelníky v různých obrazcích, které jsem pro ně připravil. Tyto úlohy se dětem líbily, a tak mě postupně přivedly na další možné varianty, o které je bylo možno obohatit. Tato semestrální práce se značně rozrostla, a tak jsem požádal o pomoc spolužačku při zadávání těchto úloh. Práci jsem odevzdal v termínu a jen doufal, že „projde“. Prošla! A dokonce na výbornou. A ještě navíc jsem ji prezentoval svým spolužákům, kterým se také líbila.“

Podívejme se na Janův projekt podrobněji.

Jan si pro svůj projekt vymyslel vlastní úlohové prostředí, kterým byly obrazce skládající se z různých trojúhelníků, a úlohou bylo zjistit počet těchto trojúhelníků v obrazci. Nejprve načrtával trojúhelníky jako obrazce skládající se z jistého počtu trojúhelníků různé velikosti a tvaru. Poté vymýšlel i čtyřúhelníky, pětiúhelníky a šestiúhelníky skládající se z trojúhelníků (viz obr. 13.1). Našel různé typy obrazců – od nejjednodušších, kde počet trojúhelníků je zřejmý (např. trojúhelník skládající se ze dvou trojúhelníků), po složité (např. obrazec skládající se z trojúhelníků, které obsahují menší trojúhelníky).

Jan formuloval cíl projektu takto: „Jak jsou žáci rozdílného věku na různých typech škol schopni v určitém daném obrazci hledat skryté trojúhelníky o různé velikosti a tvaru?“ Kromě správnosti odpovědi žáka Jana zajímala doba, která uběhla od zadání první úlohy až po vyslovení žákovy odpovědi u poslední úlohy. Vybral šestnáct různých obrazců a vyrobil kartičky (rozměr 13 cm $\times$ 9 cm) s obrazcem na každé z nich a pokryté omyvatelnou fólií (viz obr. 13.1 – ukázka sedmi kartiček).

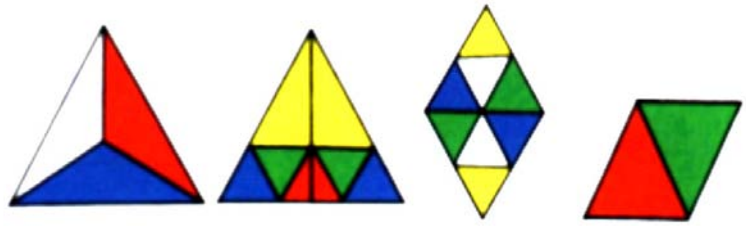
Obr. 13.1

V práci napsal: „Děti si mohly na kartičky psát fixou, označovat jednotlivé trojúhelníky apod., později se fixa smyla. . . . Tyto zalaminované karty měly ještě další přínos, a to pro mě, protože jsem mohl pozorovat přímo myšlenkový pochod dětí při řešení zadaného úkolu."

Kartičky zadal 34 žákům/studentům jedné základní školy a gymnázia ve věku 7–18 let (rozhodl se, že své šetření provede se žáky bez handicapu) a jejich výsledky zpracoval do tabulky, kde u každého řešitele měl zaznamenáno jeho jméno, věk, čas potřebný pro vyřešení úlohy (tj. kartičky), správnost odpovědi (černě označil správné řešení, červeně chybné), celkový čas potřebný pro vyřešení všech úloh a úspěšnost v procentech (viz obr. 13.3, s. 245).

Kromě tabulky Jan u některých žáků popsal, jak postupovali při řešení. Např.: „Kuba – 7 let, velmi těžko se soustředil, proto jeho výsledky jsou velice slabé, pouze jedna správná odpověď. U obrazce č. 4 uvedl, že nevidí žádný trojúhelník, neboť obrazec mu připomínal něco, co nedovedl pojmenovat."

Janovi se zdálo, že faktor černobílého zpracování obrazců výrazně určuje úspěšnost řešení úloh, proto provedl druhé šetření. Připravil stejné obrazce, ale s různě barevnými trojúhelníky (viz obr. 13.2 – ukázka čtyř kartiček.[2]



Obr. 13.2

[2]První z obrázků na obr. 13.2 je trojbarevný, druhý je čtyřbarevný – dvojice shodných trojúhelníků je vybarvena jednou barvou, třetí je též čtyřbarevný – podobně vybarvený jako druhý, čtvrtý je dvoubarevný.

Protože chtěl provést šetření na větším vzorku lidí, požádal o pomoc svou spolužačku. Barevné obrazce byly zadány 59 lidem bez handicapu ve věku 6–41 let. Výsledky opět zpracoval do tabulky.

Jan se rozhodl, že připraví počítačovou verzi zadávání obrazců. Byl mu doporučen program CorelDraw, na kterém se naučil kreslit geometrické obrazce. V konečné podobě byla počítačová verze obohacena o zvukové zadávání úlohy a volbu doby určené pro zobrazení obrazce.

Počítačovou verzi úlohy bez časového omezení zobrazení obrazce Jan zadal 29 lidem ve věku 6–20 let a verzi s časovým omezením 30 lidem ve věku 6–18 let. Výsledky opět zpracoval do tabulek.

Jan chtěl porovnat výsledky všech šetření se svými hypotézami, ale ukázalo se, že tabulky nedostatečně vypovídají o faktorech ovlivňujících úspěšnost (závislost úspěšnosti na věku, závislost úspěšnosti všech žen na věku, závislost úspěšnosti všech mužů na věku, závislost času řešení na věku). Proto výsledky všech tabulek zpracoval do grafů na počítači.

13.6 Výsledky a výhledy do budoucna

V závěrečném semestru v disciplíně Didaktika matematiky III byl u Jana zaznamenán nárůst sebevědomí v matematice, kreativity a schopnosti pracovat samostatně. To je možné doložit následujícími skutečnostmi: Jan nepřevzal žádné z nabízených témat pro projekt, vytvořil si úlohové prostředí a v něm kaskádu úloh, provedl experiment s dětmi a lidmi různého věku, svou prací ovlivnil i svou spolužačku a v neposlední míře o jeho nárůstu sebevědomí svědčí nejen jeho samostatné vytvoření počítačové verze, ale především jeho zpracování výsledků do grafů. Heslovitě vyjmenujeme hlavní posuny v jeho intelektuálním i osobnostním růstu.

- Jan se naučil tvořit úlohy a kaskády úloh jistého typu v geometrii. Seznámil se se statistickým zpracováním dat. Naučil se používat program CorelDraw. Z pedagogických dovedností rozvinul schopnost komunikovat v matematice s lidmi různého věku bez handicapu, s čímž dříve neměl zkušenost.
- Práce na projektu změnila jeho postoj k matematice natolik, že se v následujícím ročníku rozhodl rozšířit projekt na práci diplomovou a později dokonce i doktorskou (obě práce byly úspěšně obhájeny). Proces změny jeho postoje k matematice je přímo doložen v rozdílném pohledu na matematiku na počátku výuky matematických disciplín, kde Jan chápe matematiku jako „silný nástroj k výpočtům čehosi, pro mě ne vždy zcela pochopitelného“, a pohledu vyjádřeném v sebereflexi psané po obhájení projektu (viz oddíl 13.5, Historie studenta Jana).
- V rámci výuky a zvláště při práci na projektu nabýval postupně tolik sebevědomí, že se často stal autonomním partnerem při diskusích v rámci výuky i konzultací nad

projektem. To ovlivnilo změnu jeho vztahu k vyučujícím, které považoval z počátku za poradce, později za diskusní partnery.

Nejen změna postojů k matematice u studentů, ale i jejich odborné zkvalitnění v matematice (zde ilustrované na případové studii) posiluje naše přesvědčení, že projekty splňují atributy vhodného prostředku pro konstruktivistické vyučování. Tudíž i nadále budeme tuto metodu projektů nejen používat, ale i rozpracovávat, tj. hledat další podnětná úlohová prostředí pro studenty.

Do budoucna by bylo vhodné zpracovat dotazníky na měření účinnosti této metody. Student by před zpracováním dostal dotazník na zjišťování jeho očekávání (např. co vše se naučí v projektu); jeho míry autonomie při rozhodování, jak bude se žákem pracovat; jeho schopnost komunikace se žákem apod., a po zpracování a obhájení projektu by dostal druhý dotazník na zjišťování toho, co se opravdu naučil. Je vhodné doplnit metodu dotazníku klinickými rozhovory.

Tabulka výsledků č.1 - ČB

Jméno	Věk	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	čas řešení	úspěšnost
Kuba	7	6	11	12	0	6	4	12	15	15	10	12	12	3	9	8	9	152	6,25
Pavla	7	3	8	8	2	4	2	6	13	10	8	10	10	1	5	4	5	105	18,75
Tomáš	7	3	5	8	2	4	2	6	10	10	8	10	10	1	5	4	5	60	18,75
Zuzka	7	4	3	10	2	5	1	6	14	6	6	4	11	1	5	4	5	101	37,5
Agáta	8	3	6	8	2	4	2	6	13	10	4	8	9	1	5	4	5	141	18,75
Dan	8	10	17	8	6	8	11	12	22	14	12	20	27	21	12	10	15	385	0
Eliška	8	4	11	10	2	5	3	6	15	10	10	12	11	1	7	4	7	891	50
Zuzana	8	3	8	7	2	4	2	6	11	9	8	8	9	1	5	4	5	75	18,75
Adéla	9	3	8	8	2	4	2	6	13	10	8	10	10	1	5	4	5	80	18,75
Dana	9	4	9	10	2	5	2	6	14	10	10	12	11	1	5	4	7	831	43,75
Matyáš	9	4	12	10	2	5	3	6	14	18	16	19	11	1	10	8	7	840	68,75
Patrik	9	3	8	8	2	4	2	6	13	10	8	10	10	1	5	4	5	904	18,75
Petr	9	3	7	8	2	4	2	6	13	10	8	9	10	1	6	4	6	915	18,75

Obr. 13.3

Kapitola 14

Hra SOVA a její využití v přípravě učitelů 1. stupně základní školy

Darina Jirotková

14.1 Formulace problému

V kapitole je popsána hra SOVA, která byla vypracována v rámci výzkumu zaměřeného na zkoumání žákovských představ o trojrozměrných geometrických objektech (Jirotková 2001a) a odzkoušena jednak přímo ve výuce (např. J. Hanušovou, Gymnázium Mnichovo Hradiště, H. Skálovou, Základní škola Campanus, Praha 4), dále dvěma diplomanty v rámci zpracování diplomového úkolu, mnoha učitelkami – studentkami kombinovaného studia pro účely seminární práce a zejména pak autorkou kapitoly v rámci kurzu geometrie v přípravě učitelů 1. stupně základní školy na Pedagogické fakultě UK jak v denním, tak v kombinovaném studiu. Na základě vlastního pozorování i zprostředkovaných zkušeností dospěla autorka k přesvědčení, že hra SOVA je velmi účinný edukační a diagnostický nástroj i bohatý nástroj experimentu. Systematicky je hra využívána v kurzu geometrie v přípravě studentů primární i speciální pedagogiky. Autorčiny vlastní zkušenosti ukazují, že využití hry SOVA ve výuce geometrie přispívá kromě k obohacení pedagogických zkušeností učitele k:

- tvorbě příznivého klimatu v hodinách geometrie, a tím i ke zvyšování zájmu studentů o předmět (klimatotvorná a motivační role),
- rozvíjení matematických schopností a znalostí hráčů (edukační role),
- rozvíjení komunikačních dovedností, zejména schopnosti vést strategii rozhovoru a přesně se vyjadřovat z hlediska logického i sémantického (edukační role),

- diagnostikování kognitivních schopností a matematických znalostí žáků (diagnostická role).

Obrazně řečeno je hra SOVA okno, kterým může učitel i výzkumník lépe než v tradičních výukových situacích nahlížet do geometrického myšlení, představ, vědomostí i komunikačních způsobilostí žáka. Nutno zdůraznit, že uvedená pozitiva hry se projeví pouze tenkrát, když je hra realizována ve vhodné atmosféře. Je nutné zajistit dostatek času a příznivé podmínky pro diskutování různých názorů, zejména těch, které vyjadřují nepřesné představy hráčů. Hra nesmí probíhat pod tlakem strachu z chyby nebo nedostatku času. Velmi často se stávalo, že při aplikaci této hry při seminářích v kurzu geometrie se posluchači zpočátku obávali vyslovit jakoukoliv otázku, aby se nedopustili chyby. Později však, když poznali, že jejich chyby se stávaly východiskem k mnoha přínosným diskusím a že jsou naopak vítány, rostla intenzita jejich zájmu velice rychle. Dokonce projevovali radost z toho, že se ukázala nutnost precizovat jejich představy i komunikační prostředky vztahující se jak ke geometrickým objektům, tak i k logické stavbě otázek. Strach z chyby se záhy proměnil v pocit uspokojení, když zveřejněním své chybné představy pomohli nejen sobě, ale i kolegům vyjasnit věci do té doby nejasné.

Při studiu žákovských/studentských reakcí pozorovaných při hře SOVA se postupně odhalovaly některé důležité jevy a zajímavá zjištění. Ta se postupně stávala podkladem pro formulace cílů výzkumů v dalších etapách. Cíle výzkumu v jednotlivých etapách jsou uvedeny dále. Některé z nich formulujeme jako problémy, jejichž řešení předkládáme v této kapitole (problémy jsou součástí širšího problému formulovaného v kap. 10, s. 182).

Jsou to:

- *Popsat a analyzovat hru SOVA (modifikaci hry ANO-NE) v širším kontextu.* (Řešeno v oddíle 14.4.1 a 14.4.2.)
- *Popsat strategie hry a způsob evidence různých sehrávek hry SOVA pro pevně zvolený soubor objektů s cílem ohodnotit kvalitu úplné strategie hry.* (Řešeno v oddílech 14.4.3–14.4.5.)
- *Popsat hru SOVA jako nástroj výzkumu zaměřený na studium některých kognitivních a interaktivních jevů.* (Řešeno v oddíle 14.4.6 a 14.4.7.)
- *Popsat možnosti aplikace hry SOVA ve školské praxi v různých didaktických situacích (individuální či skupinová práce, různé modifikace hry, hra s různými soubory objektů, . . .), včetně pozorovaného vlivu na myšlení žáků/studentů.* (Řešeno v oddíle 14.4.8 a 14.4.9.)
- *Popsat činnost aktérů při hře SOVA.* (Řešeno v oddíle 14.4.10.)

14.2 Přehled současného stavu

Podle našich vlastních zkušeností, ale i zkušeností zprostřekovaných spolupracujícími učiteli, z mnoha hospitací na školách, dotazníkových průzkumů, výpovědí praktikujících učitelů v současných školách apod. stále převládá transmisivní přístup k vyučování matematice (viz kap. 1) a zejména geometrie. Uvažujme nyní o geometrii objektů, nikoliv o geometrii transformací. Geometrie objektů a tvarů je bohatá na názvosloví. To se ve školské geometrii zavádí výhradně transmisivně („Toto se nazývá . . . “, „Tomu budeme říkat . . . “). Školních úloh, které se týkají geometrie tvarů, je v učebnicích nabídnuto velice málo. Ty jednoduché jsou typu „Vybarvi všechny krychle na obrázku . . . “. Některé trochu náročnější úlohy jsou typu „Sestav čtverec z tří daných trojúhelníků.“ „Kolik je na daném obrázku obdélníků, trojúhelníků?“ apod. Takové úlohy však bývají jen velmi zřídka zařazovány do testování žáků a nebývají považovány za plnohodnotné. Školní geometrické úlohy, které jsou vydatně procvičovány, jsou především z geometrie konstrukční („Sestroj trojúhelník, je-li dáno . . . “) a geometrie početní. Zcela schází zkoumání geometrických pojmů označujících jak objekty, tak i jejich jevy průvodní (Vopěnka 1989). Proto jsou mnohdy znalosti žáků z této oblasti formální (viz kap. 2).

Ve studiu učitelství je od roku 2003 geometrii věnován jeden semestr se třemi hodinami týdně.[1] To je poměrně krátká doba na to, aby se odbourал strach z tohoto předmětu u většiny studentů a změnily se jejich postoje a učební styl. Je proto velmi důležité hledat efektivní nástroje, které naplnění cílů kurzu geometrie umožní. Hra SOVA je, podle našich zjištění, jedním z nich.[2]

Mnohé úvahy v této kapitole jsou čerpány nebo převzaty z práce (Jirotková 2001b). Dále jsou některé zkušenosti s edukativním využitím hry SOVA uvedeny v (Jirotková 1999, 2001a, 2002a, Daňhelková; Jirotková 1999). Od roku 2002 na výzkumu spolupracuje G. Littler (UK), který realizuje experimenty v anglickém prostředí. Výzkum se tak obohacuje o možnost porovnávat některé jevy ve dvou jazykově i kulturně odlišných prostředích. Výsledky této části výzkumu jsou publikovány v (Jirotková; Littler 2002b, 2003a, 2003b, 2003c, Littler; Jirotková 2004).

14.3 Cíle a metody výzkumu

Náš šíře pojatý výzkum byl zahájen již v roce 1993 a s různým zaměřením probíhá dodnes. Dobu výzkumu je možno rozdělit do tří etap, které se samozřejmě překrývají. První etapa výzkumu, která probíhala v letech 1993–97, byla zaměřena na zkoumání porozumění geometrickým pojmům a kultivaci tohoto porozumění. Zajímaly nás otázky, jak se vynořuje základní geometrický svět ze světa reálného zejména u dětí ve věku

[1] Do té doby pouze dvě hodiny týdně.

[2] O dalším, kterým je využití čtverečkovaného papíru, pojednává kap. 12.

6–10 let a také jakými percepčními kanály se svět tří dimenzí dostává do vědomí žáků, jak jsou ve vědomí žáků kódovány informace zprostředkované zrakem a hmatem a jak je s danou informací dále operováno. Výzkum byl od svého začátku koncipován jako výzkum kvalitativní. Cílem této části výzkumu bylo:

- poznávat a charakterizovat, třídit a aplikovat jevy, které se vyskytují ve školní komunikaci při práci s geometrickými objekty v prostoru, s důrazem na jevy kognitivní, interakční a klimatické,
- poznávat kvalitu geometrických představ žáků,
- poznávat slovní vyjádření těchto představ,
- poznávat kognitivní mechanizmy v oblasti geometrie.

První etapa zcela přirozeně přešla v etapu druhou. Po získání prvních zkušeností se výzkum přesunul i do roviny edukační a nástroj výzkumu, hra SOVA, byl velmi intenzivně využíván v kurzu geometrie v rámci experimentálního vyučování v letech 1994–1999. Se zájmem jsme sledovali podobnost mezi chováním našich posluchačů a žáků mladšího školního věku. Postupně s nabýváním zkušeností z vlastní výuky a zkušeností s vedením dvou diplomových prací na toto téma jsme i hry sehrané s posluchači v rámci výuky začali vnímat jako jisté experimenty. Výrazně jsme si uvědomovali, čím vším tato hra přispívá jak ke kognitivnímu, tak i k pedagogickému rozvoji budoucích učitelů. V edukační rovině jsme se zpočátku zaměřovali na upřesňování geometrické terminologie. Později se postupně naše pozornost přesouvala k problému komunikace. Snažili jsme se, aby studenti rozvíjeli svůj cit oznamující přítomnost šumu v komunikaci, aby tušený šum uměli pojmenovat, analyzovat a v případě komunikačního nedorozumění účelně se chovat. Tato druhá etapa je stále živá a v současné době věnujeme pozornost komunikačním nedorozuměním. Cílem druhé etapy bylo a stále je:

- hledat využití výsledků výzkumu v praxi, a to zejména v geometrické přípravě budoucích učitelů,
- popsat hru SOVA jako nástroj edukační i diagnostický pro využití v přípravě budoucích učitelů,
- využít hru SOVA jako prostředí pro kultivaci komunikačních dovedností jak v oblasti geometrické terminologie, tak v oblasti logiky a strategie,
- odhalovat komunikační jevy, pomocí nichž lze popsat komunikační šumy a nedorozumění (viz také kap. 5),
- kriticky hodnotit myšlenky jiných účastníků hry,
- hledat postupy, jak se v případech nedorozumění účelně chovat.

Třetí etapa se vrací do roviny výzkumu a navazuje tak na etapu první. Začala v roce 2001 a probíhá i v současné době. Cílem této etapy je:

- analýzou komunikace při hře SOVA odhalovat strukturu geometrických poznatků účastníků hry,
- poznávat mechanizmy, které řídí strukturování geometrických poznatků,
- hledat jevy, pomocí nichž by bylo možné charakterizovat součinnost manipulace s tělesy s vyloučením zrakového a zapojením pouze hmatového percepčního kanálu a komunikace o dané geometrické situaci,
- hledat další modifikace hry SOVA, které by významně přispívaly k procesu strukturace poznatků a k hlubšímu porozumění geometrickým pojmům a relacím.

Cíle výzkumu vždy určily i výzkumné metody. Byla použita celá škála standardních výzkumných metod počínaje metodou experimentu, přes vlastní experimentální vyučování a konče pozorováním. Experimenty byly zaznamenány pomocí audiovizuální techniky a zvukové záznamy přepsány do podoby písemného protokolu. Veškerý písemný materiál včetně písemných záznamů hráčů, administrátora experimentu či samotného experimentátora byl východiskem kvalitativních analýz. Při analýzách jsme použili kromě atomární (Hejný; Michalcová 2001, Stehlíková 2000) a jazykové analýzy zejména metodu třídění, metodu porovnávání a metodu modelování.

Hru SOVA jsme hrávali v různých modifikacích: s jediným žákem, s dvojicí žáků, se skupinou žáků nebo v rámci vyučování. V roli hráčů byli žáci základní školy, studenti Pedagogické fakulty UK i učitelé z praxe. Experimentátor byl někdy zároveň hráčem, jindy hru jenom organizoval, řídil, pozoroval a obsluhoval nahrávací techniku nebo zaznamenával neverbální projevy.

Z celého výzkumu zde prezentujeme pouze některé výsledky, které jsou formulovány jako problémy v oddíle 14.1 a jako výsledky v následujících oddílech.

14.4 Výsledky

Dříve než přikročíme k osvětlení základní modifikace hry SOVA, věnujeme pozornost obecnějšímu pojmu matematické hry a vymezíme naše pojetí tohoto pojmu. Obecné poznatky o hře lze též nalézt v kap. 23, kde je role hry posuzována spíše z hlediska klimatotvorného a motivačního.

14.4.1 Pojem matematické hry

Slovo hra se vyskytuje v mnoha slovních spojeních, které mu dávají různý význam. Například divadelní hra (herci), šachová hra (hráči), karetní hra, společenská hra, sportovní hra, počítačová hra, hra na písku, hra na slepou bábu, hra na pana učitele, hra na housle, hra barev, hazardní hra, hra „vabank", hra o čas, ... Je to slovo širokovýznamové, o čemž svědčí také množství adjektiv s ním spojených v (Hartl; Hartlová 2000): hra elektronická, televizní, experimentální, paralelní, podniková, sociální.

J. Mareš (1998, s. 13) vymezuje hru jako dominující typ činnosti dítěte v předškolním věku, která provází člověka po celý život. Významně se podílí na utváření jeho osobnosti, stimuluje jeho tvořivost a přispívá k hlubšímu sebepoznání (Krejčová; Volfová 1994, s. 5). Je provázena pocity napětí a radosti, má pozitivní důsledky pro relaxaci, rekreaci, duševní zdraví (Hartl; Hartlová 2000) a má kompetitivní nebo kooperativní charakter (Polechová 2000).

V kapitole se přikloníme k tomu významu slova hra, v němž jej používají autoři mnohé zajímavé didaktické matematické i populárně naučné literatury, například (Burjan; Burjanová 1991, Gatial; Hecht; Hejný 1982, Krejčová; Volfová 1994, Zapletal 1977, 1986, Conwey 1976, Gardner 1971, Kordemskij 1976) a jak jej vymezují P. Hartl a H. Hartlová (2000). Budeme uvažovat o hře didakticko-matematické, při níž významně vystupují některé myšlenky matematiky, jejichž hlavním cílem je kultivování matematických představ a komunikačních schopností žáka.

V. Burjan a L. Burjanová (1991, s. 9) rozlišují čtyři typy matematických her. Tuto typologii, mírně modifikovánu, uvádíme s našimi příklady:

1. matematické hlavolamy (například „Ze šesti sirek vytvoř čtyři rovnostranné trojúhelníky“, některé tangramy, některé šachové úlohy),
2. solitéry (například karetní pasiáns, puzzle, některá bludiště, některé tangramy, některé algebrogramy),
3. matematické soutěže (jednotlivci nebo skupiny samostatně řeší úlohu nebo soubor úloh, někdy i s časovým omezením, výsledky jejich práce se nakonec porovnají),
4. antagonistické hry (například šachy, deskové hry, některé karetní hry, hry typu NIM).

Matematické hlavolamy mívají krátké, často jen jednokrokové řešení založené na triku. Hlavolam řešitel buď vyřeší, nebo nevyřeší. Solitér naproti tomu vyžaduje delší proces řešení, není založen na jednorázovém triku. Může být vyřešen úplně, téměř úplně, částečně, ...

Některé matematické hry mohou podle uvedené typologie náležet k několika typům. Například šachová úloha může být matematickým hlavolamem, ale může být i součástí matematické soutěže. Zařazení závisí na způsobu realizace hry. Jak později uvidíme, k takovým hrám náleží i hra SOVA. Ta bude vystupovat v našich úvahách jako hlavolam, solitér i soutěž. Může být modifikována i jako antagonistická hra.

Z matematického hlediska je možné a potřebné dělit antagonistické hry na deterministické, které nezávisejí na náhodě (šachy, NIMy atd.), a indeterministické neboli hazardní, které na náhodě závisejí, hry, při kterých hraje roli hod hrací kostkou nebo „štěstí“ v kartách (Člověče nezlob se, Poker apod.). Hra SOVA může někdy trochu záviset na náhodě, ale při větším počtu sehrávek se kvalita hráče jasně projeví.

14.4.2 Pravidla hry SOVA

Hra je pod různými názvy, například „Uhodni, na koho myslím“, poměrně dobře známá a mezi dětmi různých věkových skupin rozšířená. Nejen však mezi dětmi – viz například finálové kolo televizní soutěže „O poklad Anežky České“.

Hra SOVA patří mezi didakticko-matematické hry. Je to hra s pravidly, která nese silný edukační náboj (Kujal aj. 1965, Průcha; Walterová; Mareš 2001). Má mnoho různých modifikací. Jako první uvedeme tu modifikaci hry, kterou jsme při jejích realizacích nazývali ANO-NE.[3]

Rámcová pravidla hry jsou jednoduchá. Je dán *soubor objektů hry*. Například na tabuli je napsáno několik (pět až patnáct) názvů geometrických objektů – rovinných útvarů nebo těles. Hru hrají dva hráči A, B. Hráč A si vybere jeden z objektů a jeho název napíše na odvrácenou stranu tabule. Úkolem hráče B je uhodnout tento objekt. Za tím účelem klade otázky vztahující se ke geometrickým vlastnostem daných objektů. Na každou otázku hráče B odpoví hráč A podle pravdy buď ANO, nebo NE. Jestliže nelze takto odpovědět nebo jestliže se otázka nevztahuje ke geometrickým vlastnostem objektů, odpoví hráč A: „Nelze odpovědět.“ Otázky, které se nevztahují ke geometrickým vlastnostem objektů, budeme považovat za nekorektní. Příklady nekorektních otázek: „Je ten název napsán na levé části tabule?“ nebo „Je v tom názvu více než osm písmen?“.

Když si je hráč B jist, že objekt zná, prohlásí „Je to objekt XY“. Je-li jeho výrok pravdivý, vyhrává, když je nepravdivý, prohrává. V případě výhry lze jeho vítězství hodnotit podle počtu otázek, které ve hře položil – čím méně otázek, tím lepší je jeho výkon.

Uvedená pravidla hry nejsou úplná. V průběhu hry se mohou vyskytnout situace, které nejsou těmito pravidly popsány. Například hráč B položí otázku „Je to krychle?“ (krychle je jedno ze slov napsaných na tabuli). Hráč A odpoví „Nelze odpovědět.“, protože se mu otázka jeví nekorektní. Vznikne konfliktní situace, která si vynutí upřesnění pravidel. Dodejme, že v našich experimentech jsme v těchto případech dali za pravdu hráči A a otázky, v nichž se objevilo slovo napsané na tabuli, jsme prohlásili za nelegitimní. Podle našich zkušeností mělo doplňování pravidel hry tehdy, když si to situace vynutila, a za spolutvorby hráčů, vždy pozitivní vliv na klima hry. Hráči se cítili jako spolutvůrci hry a dodržování pravidel, zejména těch postupně doplněných, přísně hlídali.

Hru SOVA lze hrát na ukrácení dlouhé chvíle, pro zábavu, ale může být i nástrojem soutěže. Protože role hráče A se výrazně liší od role hráče B, musí případné utkání dvou hráčů obsahovat sudý počet her, v němž týž člověk hraje stejný počet her v roli hráče A i v roli hráče B. Má-li utkání pouze dvě hry a jeden z hráčů daný objekt uhodne a druhý nikoliv, je o vítězi utkání jasně rozhodnuto. Běžně ale obě hry končí uhodnutím správného tělesa. V tom případě bude vítězem utkání ten hráč, který určil myšlený objekt na menší počet otázek.

[3] Viz také kap. 8, kde je popsána aktivita podobného typu.

To, co jsme nazvali hra SOVA, není pouze jedna hra, ale celá rodina her. Každá konkrétní hra, každý člen rodiny her SOVA je dán souborem objektů. Takovou hru zapíšeme tak, že za slovo SOVA připíšeme do závorky příslušný soubor objektů. Další významnou rodinou her SOVA, které jsou určeny spíše pro vyspělejší hráče, jsou modifikace hry ANO-NE-NĚKDY. Více je pojednáno o modifikacích hry v oddíle 14.4.6.

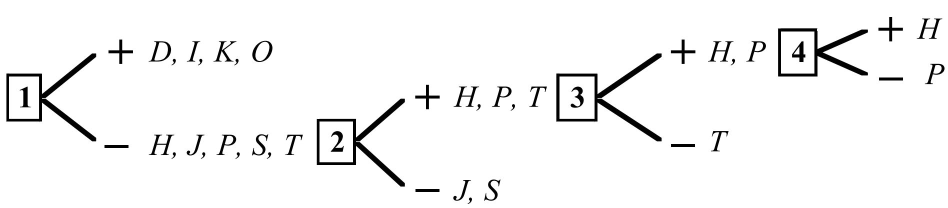
14.4.3 Ukázka hry a její evidence

Pro ilustraci zde simulujeme jednu ukázku hry. Hrajeme hru SOVA (D, H, I, J, K, O, P, S, T). Na tabuli je napsáno devět názvů těles: D – dodekaedr, H – pravidelný pětiboký hranol, I – ikosaedr, J – pravidelný čtyřboký jehlan, K – krychle, O – oktaedr, P – komolý pravidelný čtyřboký jehlan, S – šestistěn (dva „slepené“ tetraedry), T – tetraedr.

Hráči jsou dvě studentky primární pedagogiky. Obě již mají s hrou více zkušeností.

	Otázky hráče B	**Odpovědi hráče A**
1.	Má hledané těleso ke každé stěně nějakou stěnu rovnoběžnou?	Ne.
2.	Vychází z každého vrcholu právě tři hrany?	Ano.
3.	Je na tělese aspoň jedna dvojice rovnoběžných stěn?	Ano.
4.	Je aspoň jedna stěna pravidelný pětiúhelník?	Ano.
5.	Je to pravidelný pětiboký hranol.	Ano.

Hráč B uhodl, a tedy vyhrál. K uhodnutí myšleného tělesa potřeboval čtyři otázky. Uvedenou sehrávku lze přehledně zapsat pomocí schématu hry na obr. 14.1.



Obr. 14.1

V naší sehrávce hádající hráč B postupoval tak, že si po každé odpovědi ujasnil, se kterými tělesy bude pokračovat ve hře a která tělesa jsou již ze hry vyloučena. Podle toho volil další otázku. Je zřejmé, že nad každou otázkou nějaký čas přemýšlel a zvažoval, jakou informaci mu na tu nebo onu otázku poskytne odpověď hráče A. Dodejme, že pro začínající hráče s nepříliš dobrým geometrickým zázemím je vhodné hrát hru s konkrétními modely těles tak, aby s nimi bylo možné manipulovat. To také umožní učiteli lépe nahlížet do poznatkových struktur žáků či studentů.

Kdyby hráč B znal soubor objektů hry předem, mohl by se na hru připravit tak, aby mohl po každé odpovědi hráče A ihned položit další, předem připravenou otázku. Takový *úplný návod na výhru* nazýváme *strategie hry*. V našich experimentech jak se žáky, tak s praktikujícími učiteli jsme evidovali obdobnou přípravu na hru, a to především u vyspělejších a soutěživějších hráčů. Příprava na hru však nebyla provedena písemně, ale seskupením si souboru těles do vhodných skupinek a podskupinek.

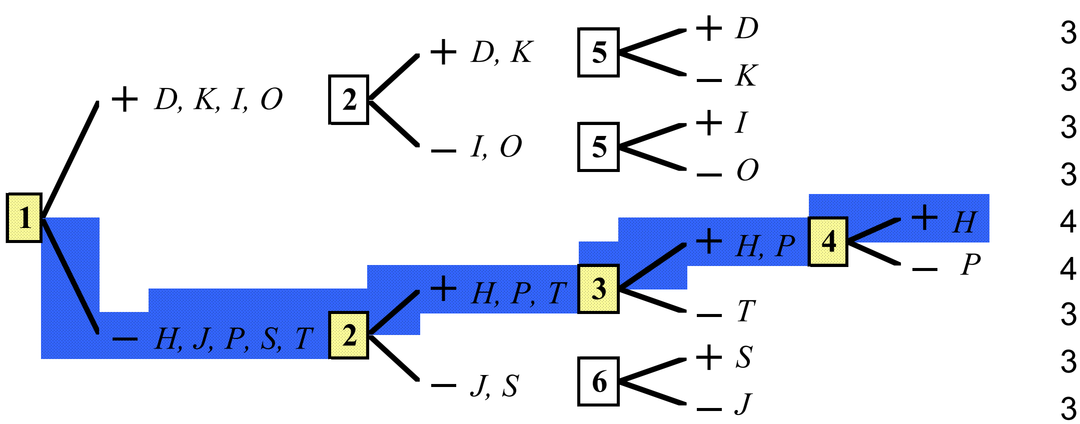
14.4.4 Strategie hry SOVA

Význam slova *strategie* je určen kontextem, v němž je použito. Mluvíme třeba o řešitelské strategii „pokus – omyl“, strategii „od konce“, strategii bifurkace, „využij komplement“ (Kratochvílová 2003), „řeš speciální úlohu“, „přepiš do jiného jazyka“, strategii redukční atd. Mluvíme též o komunikační strategii, edukační strategii učitele, o kognitivní a metakognitivní strategii učícího se žáka apod. Ve většině případů je z kontextu patrné, v jakém významu je toto slovo použito. Ve dvou případech však bude někdy nutno termín strategie upřesnit vhodným adjektivem – didaktická, resp. matematická.

Didaktickou strategií rozumíme myšlenkový záměr hráče nebo obecně řešitele jisté úlohy, který jej orientuje. Slovo strategie však používáme ještě obecněji. Vzhledem k charakteru matematického myšlení vyžaduje termín strategie ve smyslu matematickém zvláštní upřesnění.

Matematickou strategií rozumíme, zjednodušeně řečeno, návod na úspěšné chování hráče/řešitele v průběhu celé hry.

Pojem *(matematická) strategie hry* je vymezen například v knize (Maňas 1974, s. 17) a (Berge 1962, s. 69) a přístupně zaveden například v knize (Gatial; Hecht; Hejný 1982) a v (Hejný; Michalcová 2001). Matematickou strategií konkrétní hry SOVA pro konkrétní soubor objektů rozumíme úplný soubor otázek, které může hráč B položit okamžitě, jakmile dostane odpověď hráče A na předcházející otázku.



Obr. 14.2

Matematickou strategii konkrétní hry SOVA můžeme přehledně zaznamenat pomocí *schématu matematické strategie*. Příklad schématu matematické strategie hry SOVA z ukázky v oddíle 14.4.3 je na obr. 14.2. Cesta (větev), po které hra proběhla, je ve schématu zvýrazněna.

Otázku 2 může hráč B použít jak po odpovědi ANO, tak po odpovědi NE na první otázku. K otázkám 1 až 4 jsou doplněny otázky 5 a 6.

Otázka 5: Je počet vrcholů větší než jedenáct?

Stejně jako v případě otázky 2 použije hráč B otázku 5 v obou možných situacích.

Otázka 6: Mají všechny stěny stejný tvar?

Čísla v posledním sloupci schématu strategie hry na obr. 14.2 udávají počet otázek, které vedly k uhodnutí objektu.

Samotný proces vytváření matematické strategie dané hry SOVA můžeme považovat za hru typu solitér. Protože jedna konkrétní hra SOVA může mít mnoho různých matematických strategií, vzniká otázka, zda je některá z těchto strategií lepší než jiná. V následujícím oddíle uvidíme, že jednotlivé matematické strategie téže hry je možné ohodnocovat. Toto obohacení pojmu matematické strategie vytváří náročnější hru typu solitér – najít k dané hře SOVA nejlepší možnou matematickou strategii.

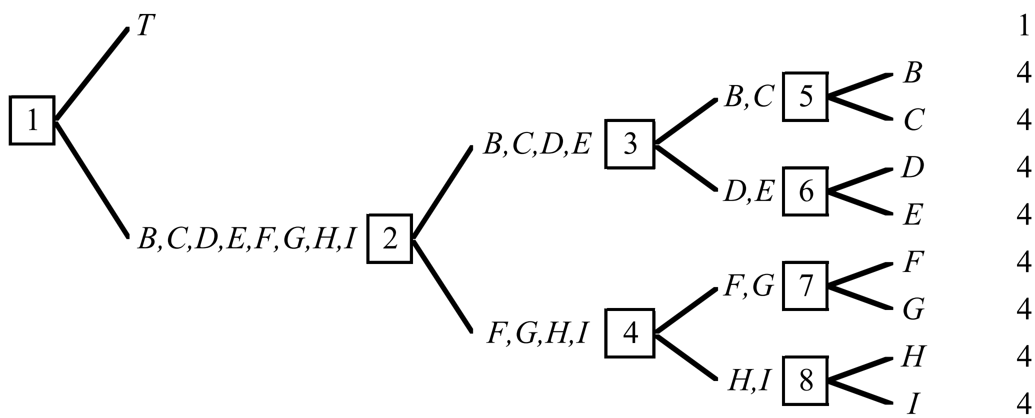
14.4.5 Negeometrické využití hry SOVA

Již obrázky 14.1 a 14.2 ukazují, že hra SOVA může být využita na tvorbu úloh z teorie grafů. Ještě zajímavější úlohy je možné formulovat v oblasti pravděpodobnosti a matematické teorie her. V tomto oddíle ilustrujeme tyto možnosti pomocí pojmů *cena matematické strategie* a *optimální matematická strategie*.

Představme si, že první otázka hráče B v uvažované hře zní: „Má to těleso méně než pět vrcholů?" V případě odpovědi ANO by hráč B mohl hru vítězně ukončit větou: „Je to tetraedr." V případě odpovědi NE by musel hádat dále a ve hře by zůstalo osm těles. Ptejme se, zda je riziko takové otázky hráče B rozumné nebo nerozumné. K odpovědi dospějeme pomocí pojmu cena matematické strategie. Nejprve zavedeme pojem *cena objektu X (v dané matematické strategii)*. Rozumíme tím počet otázek dané matematické strategie potřebných ke zjištění objektu X. *Cenou matematické strategie* pak rozumíme součet cen všech objektů dané hry.

Například v matematické strategii uvedené schématem na obr. 14.2 jsou ceny objektů $C, D, \dots, T$ dány čísly 3, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3 v posledním sloupci vpravo. Součet těchto devíti čísel je 29, a to je cena matematické strategie hry znázorněné na obr. 14.2. Žáky můžeme s pojmem cena objektu v dané matematické strategii seznámit například tak, že při realizaci hry za každou odpověď musí hráč B zaplatit hráči A pomyslnou jednu korunu. Tímto způsobem je i termín *cena* sémantizován.

Je zřejmé, že na schéma každé matematické strategie hry SOVA lze nahlížet z pozice teorie grafů jako na *orientovaný graf* zvaný *strom* (Vrba 1989), jehož *kořenem* je první otázka, kterou hráč B zahajuje hru. Každá další otázka je znázorněna *uzlem, hrana* grafu představuje rozhodnutí hráče A, tedy jeho odpověď, a *koncové uzly* jsou závěrečné výpovědi typu „Je to objekt X". Cena objektu X je pak počet hran cesty mezi koncovým uzlem X a kořenem grafu. Tedy k nalezení ceny objektu a ceny matematické strategie stačí znát graf, který je příslušnou strategií určen. Otázky není třeba formulovat. Například graf matematické strategie naší hry SOVA z ukázky v oddíle 14.4.3, která by začínala otázkou 1 „Má to těleso méně než 5 vrcholů?“, může vypadat tak, jak je znázorněno na obr. 14.3. Další otázky nejsou konkretizovány, rovněž tak názvy těles, které se skrývají za písmeny B–I. Poslední sloupec, stejně jako na obr. 14.2, udává cenu příslušného objektu ve zvolené matematické strategii.



Obr. 14.3

Z obr. 14.3 vidíme, že cena uvedené matematické strategie je 33, a tedy že tato strategie je horší než strategie z obr. 14.2. Kdybychom hráli devadesát her, tak při použití strategie z obr. 14.2 bychom pravděpodobně zaplatili 290 Kč a při strategii z obr. 14.3 pravděpodobně 330 Kč.

Formulujme problém jinak. Představme si, že dostaneme nabídku od hráče A, abychom s ním hráli v roli hráče B deset her s tím, že on nám předem vyplatí 35 Kč a my mu za každou otázku vrátíme 1 Kč. Pak všechny hry vyhrajeme. Hráč A nezná naši matematickou strategii hráče B, a proto náhodně volí jednotlivé objekty. Předpokládejme, že volíme matematickou strategii z obr. 14.2. Je pravděpodobné, že hráč A zvolí objekt s cenou 4 Kč ne více než třikrát. Potom tedy jako hráč B zaplatíme hráči A maximálně $7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 33$ korun. Podobnou úvahou zjistíme, že při volbě strategie z obr. 14.3 je velice pravděpodobné, že hráči A budeme platit $9 \cdot 4 + 1 = 37$ korun.

Uvedené úvahy vedou posluchače k poznání, že cena matematické strategie je důležitý pojem určující kvalitu strategie. Matematická strategie, jejíž cena je nejnižší možná, tedy daná hra SOVA nemá matematickou strategii s menší cenou, se nazývá *optimální matematická strategie* dané hry (Burjan; Burjanová 1991).

S pojmem pravděpodobnost jsme zacházeli intuitivně. Úvahy je možné precizovat a herní situaci popsanou v dalším textu lze užít jako nástroj pro rozvoj pravděpodobnostního myšlení.

Hráči se domluví na utkání o n hrách, v nichž jeden stále hraje hráče A a druhý hráče B. Na začátku utkání dá hráč A hráči B k korun a hráč B za každou odpověď zaplatí hráči A jednu korunu; utkání končí uhodnutím myšlených objektů ve všech n hrách.

Úlohou hráčů je domluvit se na číslech n a k tak, aby hra byla spravedlivá. Například, je-li $n = 8$, kolik má být k?

14.4.6 Modifikace hry SOVA

Je zřejmé, že modifikace hry mohou být určeny výběrem objektů. V článku (Jirotková 2002b) je popsána realizace hry, kdy si žáci nejdříve objekty hry sami vymodelovali na geoboardu,[4] přenesli je na čtverečkovaný papír a pak hráli hru. Tato modifikace hry se nám velmi osvědčila, neboť hráči byli do hry více emotivně vtaženi a každý z nich se cítil jako spolutvůrce hry.

Hru lze modifikovat podle několika dalších hledisek. Například chceme, aby

- byly do hry aktivně zapojeny oba perceptory hmat i zrak – pak objekty hry budou například reprezentovány reálnými modely geometrických těles (tato modifikace byla nástrojem výzkumu v první etapě),
- byl do hry aktivně zapojen pouze jeden perceptor, např. hmat – pak objekty mohou být uloženy v plátěném sáčku nebo krabici s otvory pro ruce,[5]
- hra rozvíjela některé složky prostorové představivosti – pak objekty mohou být reprezentovány dvojrozměrnými obrazy trojrozměrných objektů nebo jejich ikonami,
- hra rozvíjela představy o pojmech, pojmotvorný proces – pak budou objekty hry pouze názvy geometrických útvarů.[6]

Jiný zajímavý způsob modifikace je, že každý z hráčů pracuje s jinou reprezentací objektů hry nebo používá jiné perceptory. Při další modifikaci hry jsou v roli hráčů A a B jednotlivci nebo skupiny, nebo jedním z hráčů je učitel. Další modifikací, kterou jsme již použili ve výzkumu, je, že objekt, který je třeba uhodnout, si nevybírá hráč sám, ale učitel, pokud sám není v roli hráče. Několik modifikací hry SOVA je zmíněno v článcích (Jirotková 2002a, 2002b, Jirotková; Littler 2003a, 2003b, Littler; Jirotková 2004).

Významnou alternativou této hry, kterou si ostatně vynutí například situace, že objekty hry nejsou konkrétní objekty, ale jejich ikony nebo názvy, je hra ANO-NE-NĚKDY. V ní jsou povoleny všechny tři odpovědi. Uvedeme příklad použití odpovědi NĚKDY. Nechť je například slovo trojúhelník jako jeden z objektů hry. Pak na otázku „Je některý vnitřní úhel obrazce pravý?" nelze odpovědět jinak než NĚKDY. Znamená to, že lze najít dotyčný objekt, který tu vlastnost má, i takový, který danou vlastnost nemá.

---

[4]Jedná se o dřevěnou destičku s hřebíky uspořádanými do čtverce, zpravidla s devíti hřebíky, tj. 3×3.

[5]Tato modifikace hry se stala nástrojem třetí etapy výzkumu zaměřeného na zkoumání podílu haptické percepce na utváření představ o tělesech a zejména na zkoumání typů hmatových manipulací s tělesy a jejich korespondence s úrovní porozumění podle P.M. van Hieleho (1986).

[6]Dvě poslední uvedené modifikace hry byly vyzkoušeny v rámci zpracování diplomového úkolu v roce 2000.

14.4.7 Využití hry SOVA ve výzkumu jako nástroj experimentu

Nejdříve věnujeme pozornost termínu experiment, pak popíšeme metodiku výzkumu, který je založen na využití hra SOVA.

Slovo experiment budeme chápat pro účely tohoto textu ve významu experimentální metoda, jejímž smyslem je vynořit jevy, které jsou důležité a které „umožňuje odhalovat hlubší kauzální souvislosti“ (Gavora 2000, s. 125). Někdy budeme slovo experiment používat v organizačně-administrativním významu jako označení jednoho sezení výzkumníka s jedním nebo několika žáky za nezměněných podmínek.

Když experimentátor realizuje konkrétní hru SOVA, ať již s jedincem nebo skupinou lidí, nebo když eviduje takovou hru, do níž není přímo zapojen, získává zkušenosti, které lze rozdělit do dvou skupin, a to na jevy kognitivní a interaktivní.

Kognitivními jevy rozumíme ty, které se vztahují k představám a myšlenkovým procesům žáků, tzn. k tvoření pojmů, odhalování vztahů, argumentaci, k třídění a klasifikaci, k prostorové představivosti v tom nejširším významu slova apod. V našich experimentech jsme se věnovali pozornost celému spektru kognitivních jevů, které patří do světa geometrie. Jsou to například:

- dané těleso je žákem vnímáno jako osobnost (ve smyslu P. Vopěnky, 1989),
- žák využívá vlastnosti osobností k popisu těles, které jako osobnosti ještě nechápe („Chybí tomu špička.“ – žák 4. ročníku),
- žák asociuje těleso s jeho průvodními jevy („Je to čtvercaté?“ – žák 1. ročníku),
- jisté průvodní jevy těles jsou pro žáka dominantní,
- jak žák chápe slova vrchol, hrana, strana, stěna, tělesová úhlopříčka apod. a naopak, jak tyto jevy verbalizuje,
- jakým způsobem žák určuje počet vrcholů, hran, stěn, tělesových úhlopříček daného tělesa, popřípadě jejich vzájemnou polohu (incidence, rovnoběžnost, kolmost),
- které představy žáka jsou závislé na kontextu,
- jak se podílí percepce těles na tvorbě žákových představ o tělese,
- jaké představy vyjadřuje žák hovorovými výrazy (plocha, hrot, špice, . . .),
- jaké jevy vnímá žák jako vlastnosti a vyjadřuje přídavnými jmény,
- jaké „čisté“ jevy průvodní vyjadřuje žák pomocí podstatných jmen,
- jaké jevy vnímá žák procesuálně a vyjadřuje je slovesy,
- zda je žák schopen jistou vlastnost nahlížet simultánně ve vazbě ke skupině těles,
- jaké herní strategie, ať matematické nebo didaktické, žák užívá,
- do jaké míry si žák uvědomuje, že skupinová didaktická strategie je efektivnější než individuální.

Interaktivními jevy rozumíme ty, které se vztahují k oblasti komunikační, emotivní, motivační nebo hodnotové, ale i k verbální a neverbální komunikaci s dalšími účastníky hry, ke kritickému vyhodnocování názorů ostatních hráčů, ke schopnosti empatie, ke schopnosti formulovat vlastní myšlenky, k pocitům sympatie a antipatie, souhlasu a nesouhlasu, radosti a zklamání apod. Ze spektra interaktivních jevů zmíníme zejména:

- schopnost žáka artikulovat vlastní zkušenosti,
- schopnost žáka uchopit a interpretovat cizí myšlenku (důležitou roli zde hrála skutečnost, zda byla myšlenka uchopována jedincem téže sociální skupiny nebo jiné),
- chování řešitele v situaci, kdy v jeho úvahách došlo k chybě nebo když se dostal do slepé uličky,
- sociální interakce (atmosféra, klima, osobnostní dominace) (Mareš; Křivohlavý 1995, s. 116).

Výsledky, k nimž analýzy výzkumu vedou, se týkají konkrétních lidí, ale mnohé z těchto výsledků mají obecnější platnost. Mohou být tedy formulovány jako obecné jevy nebo zákonitosti nebo alespoň jako hypotézy o těchto jevech a zákonitostech.

Když se experimentátor nebo i učitel připravuje na realizaci hry SOVA, může celou herní situaci nahlížet prostřednictvím kartézského součinu dvou množin – množiny objektů O a množiny jejich vlastností V (zejména jevů průvodních). Místo slova množina budeme zde používat slovo soubor, protože tak jsme to také používali ve vyučování.

Každý prvek kartézského součinu $O \times V$, tj. dvojice (objekt, vlastnost), lze označit buď znakem „$+$“, nebo „$-$“podle toho, zda daný objekt danou vlastnost má, nebo nemá. Tuto strukturu lze vizualizovat tabulkou (tab. 14.1), ze které je dobře patrná relace „$+$“ (nebo k ní komplementární relace „$-$“) v kartézském součinu $O \times V$.

Ukázku uvedeme pro soubor devíti objektů hry (viz oddíl 14.4.3) a deseti vlastností.

Znak „?“ v devátém řádku sloupce H tab. 14.1 značí, že o znaku $+$ nebo $-$ v tomto poli nelze rozhodnout, aniž by se přesně změřily některé prvky daného hranolu. Jestliže je výška daného hranolu větší nebo rovna úhlopříčce pravidelného pětiúhelníku, který je podstavou, pak je odpověď „$+$“, v opačném případě „$-$“. Uvedená neurčitost odpovědi je důsledkem té skutečnosti, že těleso H (pravidelný pětiboký hranol) není dáno jednoznačně v grupě podobností. Otazník se nemůže vyskytnout ve sloupcích D, I, K, O, S, T, protože každé z uvedených těles je až na podobnost jediné. Otazník se může vyskytnout u těles H, J, P, jejichž tvarová variabilita je větší. Například, kdybychom tab. 14.1 rozšířili o vlastnost

11. obsahy některých dvou stěn daného tělesa jsou v poměru 1 : 2,

pak by byl v dané tabulce v jedenáctém řádku u všech tří těles H, J, P vyznačen otazník. Dokonce pro vlastnost

12. některá hrana tělesa má délku 1 cm,

by byl znak otazník ve všech sloupcích dvanáctého řádku tabulky.

		D	H	I	J	K	O	P	S	T
1	Ke každé stěně existuje stěna s ní rovnoběžná	+	-	+	-	+	+	-	-	-
2	Z každého vrcholu vychází právě tři hrany	+	+	-	-	+	-	+	-	+
3	Existuje aspoň jedna dvojice rovnoběžných stěn	+	+	+	-	+	+	+	-	-
4	Aspoň jedna stěna je pravidelný pětiúhelník	+	+	-	-	-	-	-	-	-
5	Počet vrcholů je větší než 11	+	-	+	-	-	-	-	-	-
6	Všechny stěny mají stejný tvar	+	-	+	-	+	+	-	+	+
7	Počet vrcholů je menší než počet hran	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	Počet vrcholů je menší než počet stěn	-	-	+	-	-	+	-	+	-
9	Počet rovin, které těleso řežou ve čtverci, je menší než 6	-	?	+	-	-	-	-	-	+
10	Těleso má aspoň jednu rovinu souměrnosti	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	....									

Tab. 14.1

Je jasné, že kdybychom tuto vlastnost použili pro otázku do hry, odpověď by nám nepřinesla žádnou informaci. Taková otázka v žádném z našich experimentů nebyla evidována.

Budeme-li v souboru objektů hry SOVA používat více variabilních objektů, bude odpovědí typu „?“ více. To nás přivedlo k již zmíněné modifikaci hry SOVA, kdy ke dvěma možným odpovědím ANO a NE přibude třetí odpověď NĚKDY.

Tabulka 14.1 je užitečný nástroj jak pro výzkumníka, tak pro učitele. S její pomocí může výzkumník dobře sestavovat vhodné soubory objektů k připravovaným experimentům. Učiteli pomůže při rychlé orientaci v průběhu hry ve třídě. Ovšem žáci mohou objevit i takové vlastnosti, které učitel ve své tabulce nemá. O těchto problémech mluvíme podrobněji v následujícím oddíle.

14.4.8 Využití hry SOVA ve školské praxi

Když jsme začali hrát hru SOVA s praktikujícími učiteli v rámci dálkového studia nebo v rámci různých seminářů, běžně se stávalo, že se učitelé při odhalení toho, že některý pojem není zcela jasný (například podstava), dožadovali explicitní definice. Argumentovali tím, že přece musí vědět, co je správné a co mají říkat svým žákům. Cítili se zaskočeni naší výzvou, abychom se společně snažili dobrat když ne definice, tak alespoň přesného vymezení těchto pojmů. Dosti dlouhou trvalo, než byli tento nový přístup k pojmům ochotni akceptovat. Ti z nich, kteří se pak odvážili přenést stejné klima zvídavosti do vlastního vyučování, s radostí až nadšením popisovali živé a objevné reakce svých žáků a pro ně překvapivý silný motivační impuls nového pohledu na geometrii.

U některých žáků z našich experimentů, ale i u našich studentů jsme pozorovali, že delší dobu nepochopili komunikační prostředí hry. Neuměli pracovat s asociací objekt – jeho vlastnost jako průzkumným nástrojem při hledání neznámého objektu. Tito žáci či studenti často kladli otázky směřované na konkrétní objekt, například „Je to tato kostka?“, nebo otázky typu „Kolik to má hran?“ apod. Naše zkušenosti ukazují, že s těmito žáky je vhodnější hrát hru SOVA nejdříve v prostředí, které jim je myšlenkově bližší, například hádat předmět ležící na stole, zvíře, jídlo apod., než se jim snažit vysvětlovat, jaké otázky jsou přípustné a jaké nikoliv. Dodejme, že na pochopení hry je pro žáky snazší aritmetické prostředí než geometrické. Například učitel napíše na tabuli čísla 4, 7, 9, 15, 54, 72 jako objekty hry SOVA. Vzhledem k bohatosti aritmetických zkušeností zde žáci snadněji nachází vhodné otázky, například „Je sudé?“, „Je dvoumístné?“, „Je větší než 50?“ apod. Podle našich zkušeností se volba objektů hry SOVA jeví jako užitečný nástroj na odhalení příčiny problémů žáků; zda spočívají pouze v nedostatku komunikačních dovedností nebo hlouběji v nedostatku geometrických znalostí.

Při prvních sehrávkách hry SOVA při výuce působí učitel obvykle jako zadavatel hry i její organizátor. Postupně však mohou tyto role přebírat žáci a učitel se může plně věnovat evidování toho, jak hra probíhá, a vyhodnocování jednotlivých jevů z hlediska diagnostického. U hráče A si učitel může všímat jak volby hádaného objektu, tak způsobu a pravdivosti jeho odpovědí; u hráče B zase, jak tvoří otázky, na jaké jevy je zaměřuje a jakým způsobem je vyhodnocuje. Čím více mezi sebou hráči diskutují, tím bohatší informaci učiteli poskytují. Ten pak může s žáky po skončení hry některé zajímavé jevy podrobněji prodiskutovat.

V následujícím oddíle ilustrujeme využití hry SOVA ve výuce záznamem jedné konkrétní hodiny.

14.4.9 Ukázka realizace hry SOVA v hodině geometrie v 5. třídě

Tato hodina proběhla jako otevřená hodina pro účastníky semináře Dva dny s didaktikou matematiky v roce 2002 v 5. třídě na jedné pražské škole. Úlohy formuluje učitelka žákům ústně.

<u>Úkol 1.</u> Na geoboardu vyznačte pomocí gumičky geometrický obrazec. Gumička se nesmí překřížit, jako kdybyste vyznačovali pokojíček pro Toma a Jerryho, a také nesmí vést jednou cestou dvakrát. Každý vymodelovaný obrazec zakreslete na „tečkovaný“ papír a modelujte další, dokud vám bude stačit papír. Po pěti minutách práci ukončíme.

Realizace. Po vyslechnutí úkolu byli žáci rozděleni do sedmi skupin po třech. Každá skupina dostala jeden geoboard a jeden „tečkovaný“ papír s devíticemi teček (uspořádanými jako hřebíky na geoboardu) v sedmi řadách a pěti sloupcích.

Bylo zřejmé, že se žáci na tuto práci velmi těší. Každá skupina se snažila najít co nejefektivnější organizaci své práce, aby za omezený čas našla co nejvíce obrazců. Bylo možné pozorovat čtyři různé typy organizace práce: (a) dva žáci se střídají v modelování a jeden zakresluje, (b) dva žáci se střídají v kreslení a jeden modeluje, (c) každý ze skupiny vymodeluje obrazec, nakreslí jej a pošle dalšímu, (d) jeden modeluje, druhý kreslí, třetí kontroluje, aby se obrazec neopakoval, a poté si role cyklicky mění. Atmosféra byla velmi tvořivá a radostná, neboť úkol byl srozumitelný, každému plně dosažitelný, a tak se každý mohl podílet na skupinové práci a přispět do sbírky obrazců.

Úkol 2. Nyní každá skupina vybere tři obrazce, které se jí nejvíce líbí, a překreslí je na tabuli. Pozor! Na tabuli se nesmí objevit dva obrazce shodné.

Realizace. Na tabuli je připraven velký čtverečkovaný papír s vyznačenými devíticemi puntíků. Skupiny chodí postupně k tabuli a každý žák vybere a fixem nakreslí jeden obrazec na tabuli.

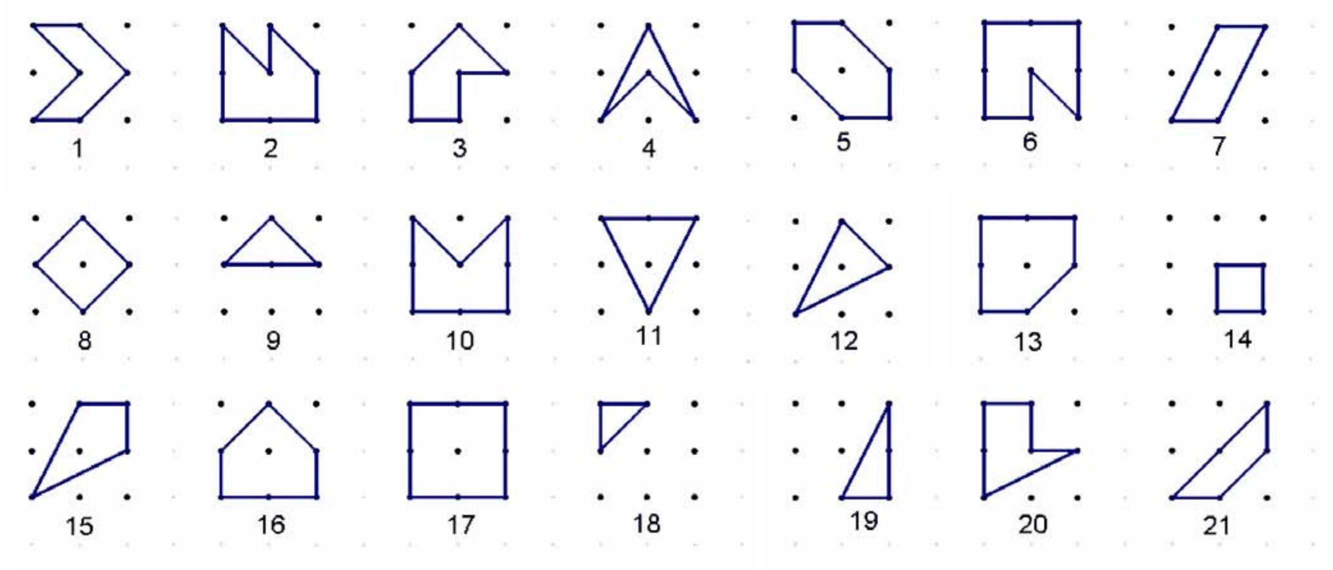
Zde je důležité zmínit, že každý žák přispěl „svým“ obrazcem na tabuli. Bylo zajímavé pozorovat, jak atraktivní jsou pro žáky nekonvexní obrazce. Učitelka uvažovala před vyučovací hodinou, že je nějakým způsobem ze hry vyloučí. Za tím účelem měla připravenu další instrukci k tvorbě obrazců: „Pokojíček pro Toma a Jerryho musí být takový, aby si mohli dát své postele kamkoliv a vždycky na sebe viděli.“ Důvodem k jejich vyloučení ze hry bylo to, že se s nimi žáci ještě nesetkali. Po uvážení, že právě tento moment by mohl být zajímavý, se rozhodla, že nebude žáky ve volbě útvarů nijak omezovat.

Obr. 14.4

První dvě skupiny nakreslily pět ze šesti nekonvexních obrazců. Další výběr obrazců učitelka ovlivňovala tak, aby se na tabuli objevily také obrazce žákům známé ze školské geometrie. Někdy bylo pro žáky obtížné rozhodnout, zda je vybraný obrazec shodný s některým, který je již na tabuli, zejména když byly obrazce nepřímo shodné (viz například obr. 14.4). Proběhla diskuse o tom, zda jsou dva obrazce shodné, i když nelze jeden papír s jedním obrazcem otočit tak, aby se s daným obrazcem překrýval. Nakonec byl přijat argument na podporu shodnosti dvou daných obrazců, že lze jak geoboardy, tak papíry na sebe překlopit, aby se obrazce překrývaly.

Na tabuli se zakrátko objevilo 21 obrazců uvedených na obr. 14.5.

Úkol 3. S vyznačenými obrazci budeme hrát hru ANO-NE. Já si budu jeden obrazec myslet a vy se jej budete snažit uhodnout. Budete klást takové otázky, abych mohla odpovědět pouze ano nebo ne. Nesmíte se ptát na barvu. Můžete se ptát pouze na geometrické vlastnosti obrazců. Jestliže uhodnete, vyhráli jste, jestliže neuhodnete, vyhrála jsem já.



Obr. 14.5

Realizace. Žáci sedí v kroužku kolem tabule a kdo se přihlásí, pokládá otázku. Učitelka počítá otázky a vyzývá žáky, aby použili co nejméně otázek.

Průběh hry 1. Žáci se o otázkách radili pouze v malých skupinkách. Písmeno Ž označuje otázku některého žáka, písmeno U odpověď učitelky.

Ž01 „Je to šestiúhelník?“	U01 „Ne.“
Ž02 „Vede přes prostřední bod některá z jeho čar?“	U02 „Ne.“
Ž03 „Má dvě strany?“	U03 „Ano.“
Ž04 „Má větší obsah než dva čtverečky?“	U04 „Ne.“
Ž05 „Má čtyři strany?“	U05 „Ano.“
Ž06 „Je modrý?“	U06 „Neodpovím.“
Ž07 „Je našikmo?“	U07 „Nedá se odpovědět.“
Ž08 „Má dvě strany kratší a dvě delší?“	U08 „Ano.“
Ž09 „Vede jedna jeho čára přes levý dolní bod?“	U09 „Neodpovím.“
Ž10 „Má obsah přesně dva čtverečky?“	U10 „Ano.“
Ž11 „Je osově souměrný?“	U11 „Ano.“
Ž12 „Má ten bod přímo uprostřed, ten prostřední?“	U12 „Ano.“
Ž13 „Má tvar zmrzliny?“	U13 „Ne“.
Ž14 „Má tvar obdélníku?“	U14 „Ne.“
Ž15 „Je to čtverec?“	U15 „Ne.“
Ž16 „Je do tvaru kosočtverce?“	U16 „Ne. Ale je takový na šikmo“.
Ž17 „Je to tvar kosodélníku?“	U17 „Ne“.

Ž18 „Má to dvě strany rovnoběžné?“	U18 „Které? Nevím, které myslíš.“
Ž19 „Dvě strany a dvě delší jsou rovnoběžné?“	U19 „Myslíš dvě a dvě rovnoběžné?“
Ž20 „Je to tenhle?“ (ukazuje číslo 15)	U20 „Ano.“

Diskuse. Učitelka se v diskusi vrátila k tomu, jak žáci počítali obsah obrazce. Někteří popisovali metodu „rozstříhání a slepení jinak“, někteří doporučovali metodu „odkrajování“.

Hra děti zjevně velmi bavila a otázky padaly jedna za druhou. Podrobnější analýza žákovských otázek i reakcí učitelky by z hlediska dříve zmíněných kognitivních i interakčních jevů v této i následné hře byla velice zajímavá, ale ponecháme ji na čtenáři. My si pouze všimněme, že při manipulativním vytváření obrazců i při jejich přenosu na papír žáci vnímali obrazec jako celek a významnou roli hrálo estetické hledisko. Teprve nutnost verbální komunikace o obrazcích přivedla žáky k novému pohledu na ně. Nutnost položit otázku žáky přivedla ke zkoumání i analytických vlastností obrazců, k hledání jejich průvodních jevů, jako je počet stran, vrcholů, rovnoběžnost a shodnost stran apod. Formulace otázky znamenala formulaci diferenciačního kritéria, tzn. nalezení takové vlastnosti, která je společná skupině obrazců a kterou zbylá skupina obrazců postrádá.

Úkol 4. Hru ANO-NE budeme hrát ještě jednou, ale zkusíte uhodnout obrazec na menší počet otázek než třináct.

Průběh hry 2.

Ž01 „Je obsah větší než jeden čtvereček?“	U01 „Ne.“
Ž02 „Má čtyři strany?“	U02 „Ne.“
Ž03 „Má tři strany?“	U03 „Ne.“
Ž04 „Má tři mřížové body?“	U04 „Ne.“
Ž05 „Prochází obvod útvaru přes čtyři mřížové body?“	U05 „Ne.“
Ž06 „Má obsah jeden čtvereček?“	U06 „Ne.“
Ž07 „Má obsah půl čtverečku?“	U07 „Ne.“
Ž08 „Je to kosodélník, jako obdélník, který by byl šikmý?“	U08 „Ne.“
Ž09 „Má tvar šipky?“	U09 „Ano“.
Ž10 „Má prostřední mřížový bod, jde ta čára přes něj?“	U10 „Ano.“
Ž11 „Má obsah dva čtverečky?“	U11 „Ano.“
Ž12 „Je to obrazec číslo 1.“	U12 „Ano.“

Diskuse. Žáci odhalili nesrovnalost v odpovědích učitelky. Odpovědi na otázky 01 a 10, 01 a 07 byly v rozporu. Žáci je zrekapitulovali a učitelka přiznala svou chybu a zároveň prohru v obou hrách. Žáci její chybu tolerovali s konstatováním: „To jste nám asi špatně rozuměla.“

Všimněme si jen stručně několika aspektů, o kterých se v této kapitole zmiňujeme.

Učitelka hned první odpovědí způsobila nedorozumění. Po odpovědi na první otázku zůstaly ve hře útvary s obsahem menším nebo rovným jedné, tzn. útvary číslo 4, 9, 14, 18 a 19. Po odpovědi na druhou otázku hra pokračovala pouze s trojúhelníky 9, 18 a 19. Třetí otázka se zdá být jen kontrolní, pomocí které si hráči ujasnili, že nedošlo k nedorozumění. Po odpovědi na ni však mnozí žáci začali tušit, že k nedorozumění došlo, a pokládali další kontrolní otázky. Po odpovědi na otázku 07 si někteří žáci již byli jisti nějakou nesrovnalostí a ve skupině se projevil značný neklid. Další otázkou v podstatě začali hrát hru znovu od začátku. Vyjádřili tím, že učitelka je pro ně příliš velká autorita, a snažili se útvar uhodnout dříve, než chybu učitelky prokáží.

Celá hodina měla velmi dynamickou atmosféru a všechny děti se aktivně zapojily do práce. Bylo důležité, že každý žák měl ve hře „svůj“ obrazec, že se pracovalo s materiálem, který si sami žáci připravili, a tím byli ve hře angažováni i emotivně. Učitelka konstatovala, že bylo zajímavé, že nejslabší žáci byli nejaktivnější, dokázali otázky i odpovědi vyhodnocovat a správně argumentovali. Ukázalo se tím, že toto netradiční geometrické prostředí a netradiční forma vyučování jsou pro tzv. slabší žáky přejícné. Nabízí se tedy otázka, proč se žáci jeví jako slabší a v čem spočívají jejich problémy. Vidíme, že tento přístup k vyučování, který odpovídá duchu konstruktivizmu (viz kap. 1), umožní citlivému učiteli vidět své žáky z jiného úhlu, umožní mu je lépe diagnostikovat a odhalovat příčiny jejich nedostatků.

Porovnejme kvalitu otázek v obou sehrávkách. Při druhé hře se až na jednu výjimku (otázka Ž09) v otázkách neobjevovaly negeometrické vlastnosti obrazců. Podle našich zkušeností se žáci při hře postupně zdokonalují ve formulacích svých otázek jak po stránce terminologické, tak po stránce logické stavby. Tím, že žáci o svých otázkách více přemýšlejí, tím, že se snaží najít otázky jistým způsobem rafinované, se však hra zpomaluje.

Je pozoruhodné, že při druhé sehrávce se hned v první otázce objevil jev obsah mřížového útvaru. Je to zřejmě reakce na diskusi po první hře, při které se opakovaly některé metody určování obsahu mřížového obrazce. O vlastnostech obrazců, kterých si žáci všimli a které ve svých otázkách použili, lze předpokládat, že jsou dobře pochopeny. Například představa pojmu obsah obrazce se zdá být v této třídě vybudována s porozuměním a není propojena pouze na vzorce.

14.4.10 Činnosti a role aktérů hry SOVA

Hrajeme-li hru SOVA v různých prostředích (jako solitér, jako soutěž dvojice, jako skupinovou hru, jako soutěž skupin, . . .), uskutečňujeme celou sérii činností, ať v roli zadavatele, nebo hráče.

V roli zadavatele (učitele, experimentátora, ale i žáka)

- vybíráme soubor objektů,
- konstruujeme soubor objektů hry se zaměřením k jistému výzkumnému, edukačnímu nebo diagnostickému cíli.

V roli hráče B

- zkoumáme objekty hry,
- analyzujeme je,
- abstrahujeme,
- hledáme a formulujeme vhodné otázky,
- hledáme optimální strategii k danému souboru objektů,
- diskutujeme s kolegy o optimální strategii nebo o nejbližší otázce, kterou budeme klást,
- zkoumáme, jakou informaci nám dala odpověď hráče A.

V roli hráče A

- se snažíme porozumět dané otázce a dát na ni přesnou odpověď, tzn. analyzovat myšlené těleso a prozkoumat zmíněnou vlastnost,
- evidujeme komunikační šumy a snažíme se jim předejít,
- zkoumáme příčiny nedorozumění, které případně v průběhu hry vznikne,
- snažíme se odstranit nedorozumění, obvykle upřesněním pravidel hry.

Uvedené činnosti jsou realizovány někdy učitelem, někdy žákem, někdy výzkumníkem nebo posluchačem. Přitom jeden člověk může vystupovat v různých rolích. Někteří žáci se nad nabytými zkušenostmi doma hlouběji zamýšlejí, někteří dokonce simulují roli učitele (to se týká zejména posluchačů učitelství, kteří při výuce většinou vystupují v roli žáků). Jakmile žák začne sám tvořit hru SOVA s vlastním souborem objektů, dostává se do role učitele. Subjekt v roli žáka nevytváří samostatně soubory objektů.

V tab. 14.5 upřesníme pojmy žák, učitel, výzkumník a expert jako školitel a poradce výzkumníka, jichž se naše úvahy týkají. Každý z uvedených pojmů charakterizujeme dvěma parametry – kognitivním a sociálním.

Je-li hra SOVA užívána jako nástroj výzkumu, považujeme za důležité si zejména role výzkumníka a roli experta zvědomit. Často se stává, že je-li v roli výzkumníka učitel, nevědomky obě své role prolíná. To však má nepříznivé důsledky na kvalitu výzkumného materiálu.

Otázka role experta, výzkumníka, učitele, žáka, hráče nebo řešitele je v poslední době studována z mnoha hledisek a zabývají se jí např. J. Kratochvílová a E. Swoboda (2002)

Role	**Kognitivní kompetence**	**Sociální činnosti**
Žák	Umí hrát hru a zdokonalovat její strategii	Hraje hru jako hráč A i jako hráč B
Učitel	Umí tvořit soubory objektů s danými edukačními cíli, rozpoznat případná nedorozumění, zná prostředí třídy, individuality žáků, umí využít své pedagogické zkušenosti	Organizuje hru, povzbuzuje hráče, pomáhá odhalovat a vyjasňovat nedorozumění, aniž by narušil hru, případně spolupracuje s výzkumníkem
Výzkumník	Umí určit cíle výzkumu, připravit, realizovat a analyzovat experiment, formulovat nově nabyté poznání, navrhnout využití výsledků v praxi, formulovat otázky motivující další výzkum	Ve spolupráci s expertem a/nebo učitelem připravuje scénář, zajišťuje jeho realizaci i evidenci, tuto zpracovává (nejčastěji formou protokolu) a posléze analyzuje
Expert	Umí vložit výzkum do širšího kontextu, hierarchizovat cíle a výsledky, navrhnout metodologii výzkumu	Diskutuje s výzkumníkem, resp. učitelem o cílech a koncepci výzkumu, výsledcích, volbě nástrojů analýzy

Tab. 14.5

a N. Stehlíková (2004), a to zejména z hlediska změny rolí v průběhu spolupráce buď s učitelkou z praxe, nebo studentem – diplomantem.

Tabulka 14.5 je výsledkem zkoumání hry SOVA. Domníváme se však, že její aplikovatelnost tuto oblast přesahuje i do oblastí mnoha jiných výzkumů.

14.5 Závěr

V této kapitole jsme popsali hru SOVA jako nástroj výzkumu, diagnostiky i výuky. Bylo představeno několik jejích modifikací a na příkladech ilustrováno jejich použití.

Kapitola 15

Dva postupy při vyvození Pickovy formule v kurzu geometrie pro budoucí učitele

Darina Jirotková, Jana Kratochvílová

15.1 Formulace problému

Je obecně známo, že nastupující učitelé často reprodukují ten způsob výuky, který sami zažili na základní škole, respektive ten způsob, kterým jim daná látka byla zprostředkována, a to vše je umocněno zážitky z matematiky na střední škole. Zkušenosti z posledních let získané v průběhu výuky a vedení praxí v rámci didaktiky matematiky v oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy potvrzují naše přesvědčení, že když zážitky budoucích učitelů získané na základní škole rozšíříme o zážitky nové, silně konstruktivisticky orientované, ovlivníme tím edukační styl budoucích učitelů. Tato zkušenost nás motivuje k dalšímu hledání účinných přístupů ve výuce geometrie, které by byly pro budoucí učitele inspirativní a aplikovatelné v jejich budoucí pedagogické práci, zejména ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy. To je cílem našeho dlouhodobého výzkumu.

> *Cílem kapitoly je prostřednictvím popisu dvou různých postupů při výuce jednoho tématu hledat odpověď na otázku, jak lze realizovat některé principy konstruktivistického přístupu ve výuce geometrie v kurzu studia učitelství pro 1. stupeň základní školy (Hejný; Kuřina 2001, Jirotková; Stehlíková 2003, Hejný 2004).*

Dva odlišné postupy byly odezvou na reakce studentů ve dvou paralelních skupinách. Analýzou těchto postupů je mimo jiné také ověřována účinnost zvoleného přístupu k výuce geometrie.

15.2 Přehled současného stavu

Problém, jak situaci změnit, jak účinně ovlivňovat postoje budoucích učitelů k výuce zejména matematiky, je v současné době řešen v oblasti didaktiky matematiky.[1] Jak ukazuje E. Zapotilová v kap. 9, studenti si často z předchozího studia přinášejí negativní vztah k matematice. Mnozí z nich vnímají matematiku jako oblast, do které mají přístup pouze prostřednictvím vzorečků a postupů naučených zpaměti. Již po prvním semestru, kdy studenti absolvují kurz Úvod do studia matematiky, jsou evidovány první změny v jejich postojích k matematice (oddíl 9.6). Po tomto kurzu studenti v libovolném pořadí absolvují kurzy aritmetiky a geometrie. Naši pozornost obrátíme ke druhému z nich.

V roce 2000 byla uzavřena první etapa experimentálního vyučování kurzu Geometrie ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy (podrobněji viz kap. 12). Tím se do jisté míry stabilizoval obsah a částečně i metody výuky. O zásadních změnách, které tento kurz prodělal, bylo referováno v příspěvku (Jirotková 2000b). Motivací ke změnám kurzu byla naše nespokojenost se současným stavem výuky geometrie na základních školách a zejména s postojem studentů, budoucích učitelů ke geometrii.[2] Podle mnohých dotazníkových šetření z posledních osmi let bývá geometrie, kterou studenti poznali na střední škole, velmi často zúžena na nácvik algoritmů několika konstrukcí a přesného rýsování, dosazování do vzorců a definic jistých geometrických pojmů. Od ostatních matematických disciplín bývá oddělena a převážně bývá vyučována výrazně transmisivně (viz kap. 1).

15.3 Metody práce

Do druhé etapy výzkumu se v roce 2002 zapojila i J. Kratochvílová. Výzkum probíhal přímo při výuce dvou kurzů – geometrie v oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy a geometrie v oboru učitelství na speciálních školách. Obecná metodologie takto zaměřených výzkumů (tzv. *akční výzkum*) je popsána v (Jaworski 2003). Obě autorky vedly semináře vždy ve dvou paralelních skupinách, společně připravovaly a následně hodnotily každý seminář, evidovaly, konzultovaly a vzájemně porovnávaly vlastní přípravy podepřené dřívějšími zkušenostmi z výuky, samotný průběh výuky a písemné výstupy studentů jako povinné i dobrovolné domácí úkoly, testy a eseje na téma sebereflexe řešitelských procesů i obecněji postojů k výuce geometrie. Zvýšenou pozornost přitom věnovaly momentům, kdy se průběh výuky podstatně lišil a kdy studenti v obou

[1] Viz také kap. 16.

[2] Ten se projevuje i na začátku inovovaného kurzu tím, že se studenti obávají vyslovit své myšlenky ve výuce a raději volí písemnou formu komunikace prostřednictvím úkolů. Rovněž mívají nepřiměřený strach z průběžných testů, i když vědí, že při jejich psaní mohou používat své poznámky, učebnici a cokoliv dalšího, co si sami připraví. Navíc mohou každý test jednou opravit, pokud se jim nepodaří získat celkem 50 % z možných bodů ze všech testů za semestr.

skupinách odlišně nebo neočekávaně reagovali. Snažily se popsat příčiny evidovaných odlišností i jejich důsledky.

Pro tuto kapitolu bylo vybráno téma Vyvození Pickovy formule pro mřížové mnohoúhelníky. Důvodem byla evidence výrazně různého průběhu výuky v každé ze dvou vyučovaných paralelních skupin.

V zimním semestru roku 2003 autorky vyučovaly ve dvou paralelních skupinách kurz geometrie pro studenty oboru učitelství pro speciální školy a jak již bylo zmíněno, měly již dvousemestrální zkušenost s paralelní výukou. Tentokrát byl program kurzu prodiskutováván pouze rámcově s cílem co nejméně se vzájemně ovlivňovat a získat tak možnost porovnat odlišnosti jak v přípravě, tak v realizaci jednotlivých témat. Začátkem listopadu bylo v obou studijních skupinách dokončeno téma objevení Pythagorovy věty, při němž se aplikovala metoda postupného uvolňování parametrů (Hejný; Jirotková 1999, s. 28). Podstata této metody[3] spočívá v počátečním experimentování, čímž řešitelé získávají vhled do problému, dále v evidenci experimentů, transferu geometrických vztahů na vztahy aritmetické, organizaci souboru dat, které umožní dílčí zobecnění. Abstrakce dílčích výsledků pak vede k abstraktnímu poznatku a jeho formulaci. Tato metoda je v souladu s kognitivní teorií M. Hejného, teorií separovaných a generických modelů (kap. 2).

Na základě výsledků testu společného pro obě skupiny, který byl zadán začátkem listopadu 2002, bylo ověřeno, že úroveň studentů obou skupin, co se týče získaných poznatků i rozvíjených schopností, byla přibližně stejná. Po „objevení“ Pythagorovy věty následovalo již téma „cesta k objevu Pickovy formule“.[4] Realizace tohoto tématu byla připravena bez vzájemných konzultací, pouze byla zdůrazněna strategie co nejcitlivěji reagovat na podněty studentů. Průběh následujících seminářů byl pečlivě evidován s cílem zjistit a popsat, jestli a jak různé reakce studentů ovlivnily nasměrování objevitelského procesu. Pro následnou analýzu byly tedy k dispozici poznámky z vlastního pozorování, audionahrávky z hodin i některé písemné dokumenty. Těmi byly tzv. flipcharty,[5] které sloužily místo obvyklé tabule.

15.4 Dva různé postupy jako důsledek aplikace konstruktivistického přístupu k vyučování

15.4.1 Postup D. Jirotkové

D. Jirotková, která vedla jednu skupinu o třinácti studentech, měla již mnoholeté zkušenosti s procesem objevování Pickovy formule z vlastní výuky, z různých experimentů,

[3] Metoda je ilustrována také v kap. 12, oddíl 12.4.4.
[4] Viz také (Hejný; Jirotková 2000).
[5] Jedná se o velké papírové bloky velikosti přibližně A1.

pracovních dílen s učiteli a také zkušenosti zprostředkované M. Hejným a několika externími studenty – učiteli. Jeden postup vedoucí k odhalení Pickovy formule je popsán ve skriptech (Hejný; Jirotková 1999, s. 45). Rozpracování a ilustrace tohoto postupu je v (Jirotková 2000a) a argumentační proces je uveden v (Hejný; Jirotková 2000). Tímto postupem jsou studenti vedeni k objevení Pickovy formule nejdříve pro všechny mřížové trojúhelníky a dále pak k vyvození Pickovy formule i pro mřížové čtyřúhelníky a další mnohoúhelníky, a to z předpokladu, že formule platí pro mřížové trojúhelníky. Jiný postup objevování Pickovy formule, který byl také několikrát aplikován, se liší tím, že se počáteční zkoumání nezužuje pouze na mřížové trojúhelníky, ale hned se pracuje s různými mřížovými mnohoúhelníky. Výhody jednoho nebo druhého postupu zde rozebírat nebudeme.

Jak bylo zmíněno, studenti měli čerstvé zážitky z „objevu" Pythagorovy věty. Z jejich reakcí i pracovního nasazení bylo zřejmé, že tyto zážitky byly velmi silné a radostné. Na otázku, zda nelitují času, který strávili objevováním moudrosti staré více než 2 000 let, spontánně reagovali, že jsou pyšní na to, že to také dokázali. Inspirována dosud nepublikovaným textem M. Hejného o odhalování Pickovy formule se žáky 1. stupně základní školy se D. Jirotková rozhodla využít příznivého pracovního klimatu, nově získaných dovedností studentů (počítat obsahy mřížových čtverců velmi efektivním způsobem a aplikovat metodu postupného uvolňování parametrů) a vyzkoušet nový postup. Obávala se, že kdyby postupovala jednou z cest zmíněnou v předchozím oddíle, musela by se nejdříve alespoň jednu vyučovací hodinu věnovat odhalení metod na výpočet obsahu mřížových mnohoúhelníků, a to by mohlo utlumit momentální nadšení studentů.

Po zavedení pojmů vnitřní a hraniční mřížový bod čtverce byla formulována úloha 1.

Úloha 1. Nakreslete několik mřížových čtverců a určete jejich obsah (S), počet mřížových bodů hraničních (h) a počet mřížových bodů vnitřních (v). Co zajímavého můžete říci o nalezených údajích?

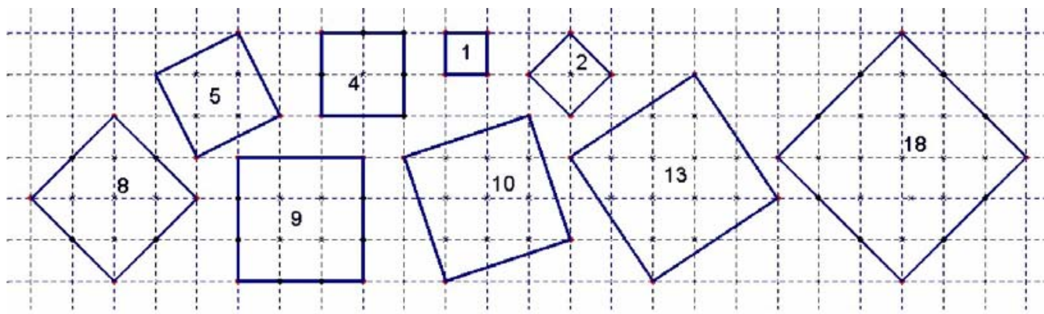
Řešení. Po chvilce experimentování reagovala Alena: „Vždyť my už známe obsahy všech možných mřížových čtverců. To nemusíme znovu hledat."

Navrhla první řádek tabulky, do kterého stačí pak dopisovat hodnoty h a v (tab. 15.1).

S	1	2	4	5	8	9	10	13	18	...
h										
v										

Tab. 15.1

Počáteční nadšení trochu vyprchalo, neboť doplňování hodnot h a v bylo poměrně pracné a ne příliš záživné. Někteří si kreslili nové obrázky, avšak Alena a další dvě studentky použily již nakreslené čtverce z předchozí práce. Ti, kteří kreslili nové obrázky, museli řešit inverzní úlohu k úloze z minulé hodiny: „Nalezněte čtverec, když je dán jeho obsah.“ Tím byl poznatek o Pythagorově větě sice upevňován, ale cesta za Pickovou formulí se zpomalila. Po nějaké době se na tabuli objevily obrázky čtverců (viz obr. 15.1) a byla doplněna tabulka (viz tab. 15.2).



Obr. 15.1

S	1	2	4	5	8	9	10	13	18	...
h	4	4	8	4	8	12	4	4	12	
v	0	1	1	4	5	4	9	12	13	

Tab. 15.2

Studenti se na tabulku dívali s nelibostí. Žádnou pravidelnost neviděli a nevěděli, jak by mohli ve vyplňování tabulky pokračovat, aniž by si kreslili další čtverce. Po výzvách vyučující, aby zkusili najít v tabulce něco zajímavého, reagovali někteří studenti:

Bedřich „Vždyť h jsou jenom násobky čtyř.“
Dita „Jak ale poznáš, jak to pokračuje?“
Vyučující „To je dobrá otázka. Nechme si tento problém za domácí úkol.“
Alena „Když se dívám jenom na sloupečky, kde $h = 4$, tak tam obsah je o jednu větší než v.“ (po výzvě vyučující zapsala na tabuli $v + 1 = S$)
Bedřich „To ale neplatí pro osmičky.“
Alena „No ale pro osmičky zase platí něco jiného, $v + 3 = S$.“ (píše na tabuli)
Ema „A pro dvanáctky zase platí, že $v + 5 = S$.“

Zdálo se, že studenti dostali novou motivaci, objevili jakousi pravidelnost. Po sepsání těchto dílčích objevů do tabulky (viz obr. 15.2) a po výzvách, jak by ve vyplňování tabulky mohli pokračovat, již brzy přišli na hledaný vztah, který formulovali zápisem na tabuli takto: $S = v + \frac{h}{2} - 1$. Sdělením vyučujícího, že učinili nový objev, kterým je Pickova formule pro čtverce, nijak ohromeni nebyli.

Bedřich	„Vždyť už umíme počítat obsah čtverce daleko jednodušším způsobem, tak k čemu potřebujeme toto?“
Vyučující	„Tak například kromě toho, že jsme se utvrdili, že umíme ledacos objevit, nám to pomůže objevit další vztahy, například najít vztah mezi S, h, v i pro trojúhelníky a jiné mnohoúhelníky.“
Bedřich	„Pro trojúhelníky nic takového platit nemůže, těch je moc. Čtverce jsou všechny stejné.“

Další průběh již nebudeme popisovat podrobně. S menšími odchylkami se ubíral již známou cestou. Jen delší dobu trvalo, než studenti vyvrátili Bedřichovu hypotézu, proti které zpočátku nic nenamítali, a poznali, že nějaký vztah mezi S, h a v pro trojúhelníky přece jen existuje. Objevení samotného vztahu i pro ostatní mnohoúhelníky již proběhlo velmi rychle.

h	S
4	$v+1$
8	$v+3$
12	$v+5$

Obr. 15.2

Poslední výzva vyučující byla: „Najděte nějaký mnohoúhelník, pro nějž tato formule neplatí.“

Zpočátku se studenti pustili do hledání s nadšením, většinou pracovali ve dvojicích, ale po chvíli neúspěšného hledání jejich zájem opadl. Prohlásili, že to asi platí pro všechny mřížové útvary.

Celý tento proces trval tři semináře (po 90 minutách) a subjektivní pocit vyučující byl přinejmenším rozpačitý. Proto ji velice mile překvapilo, když za necelý týden přinesla Alena vypracovaný nepovinný domácí úkol, v němž vyřešila, jak se určí počet hraničních mřížových bodů čtverce v závislosti na vzájemné poloze jeho dvou sousedních vrcholů, která je popsána například tímto zápisem: $A \to B(p;q)$.[6] Nejcennější však bylo, že si navíc sama zformulovala a vyřešila problém, jak závisí počet vnitřních mřížových bodů rovněž na vzájemné poloze dvou sousedních vrcholů čtverce.

15.4.2 Postup J. Kratochvílové

J. Kratochvílová vedla druhou skupinu o patnácti studentech. Do té doby měla dvě vlastní zkušenosti z předchozích semestrů s vedením studentů k objevování Pickovy formule, a to cestou od objevu Pickovy formule nejdříve pro mřížové trojúhelníky, a potom její následné ověření pro mřížové $n-$úhelníky, která je popsána v (Hejný; Jirotková 1999). Dále měla řadu zkušeností s touto metodou objevování jak vlastních (např. při objevování kritérií dělitelnosti, vítězné strategie hry NIM), tak i získaných na hospitacích a při diskusích s kolegy D. Jirotkovou a M. Hejným. Postup objevování Pickovy formule přes trojúhelníky se jí však jevil jako zbytečně zjednodušený, jelikož Pickova formule se týká všech mřížových útvarů. Navíc si byla vědoma jedné komplikace s neexistencí

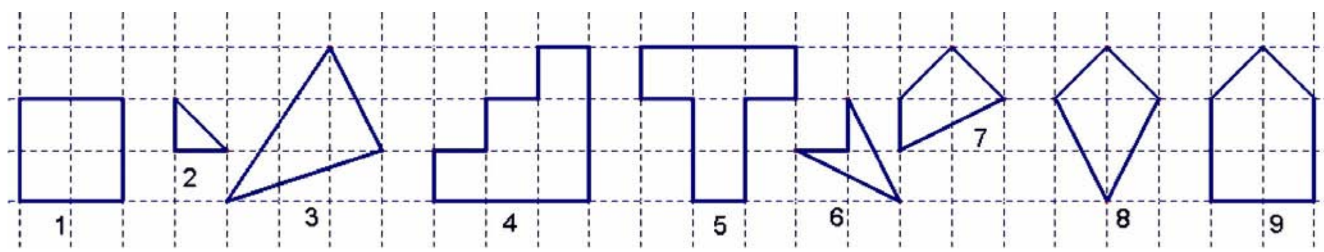
[6]Zápis $A \to B(p;q)$ znamená: Z mřížového bodu A jdi p kroků vpravo a q kroků nahoru. Jinými slovy, vektor $\overrightarrow{AB}$ má souřadnice $[p;q]$.

trojúhelníků s jistými parametry (např. $v = 1$, $h = 5$, $S = 2,5$) (Hejný; Jirotková 2000). Proto se rozhodla pro objevování Pickovy formule přímo pro mnohoúhelníky. K nalezení metody, jak určit obsah libovolného mřížového trojúhelníku i jiného mřížového obrazce, stačilo přibližně deset minut. Studenti začali brzy aplikovat některé metody na určení obsahu mřížového obrazce známé z určování obsahu mřížových čtverců (Pythagorovou větou, „rámováním“ nebo „rozkrajováním“ – Hejný; Jirotková 1999, s. 39). Pak již následovala úloha 2.

<u>Úloha 2.</u> Nakreslete co nejvíce různých mřížových mnohoúhelníků.

<u>Řešení.</u>

Studenti postupně kreslily útvary tak, jak jsou uvedeny na obr. 15.3. Vyučující je povzbuzovala a podněcovala jejich tvořivost výzvami. Tak útvar číslo 9 vznikl jako reakce na výzvu „Ještě nám tam schází pětiúhelník“.

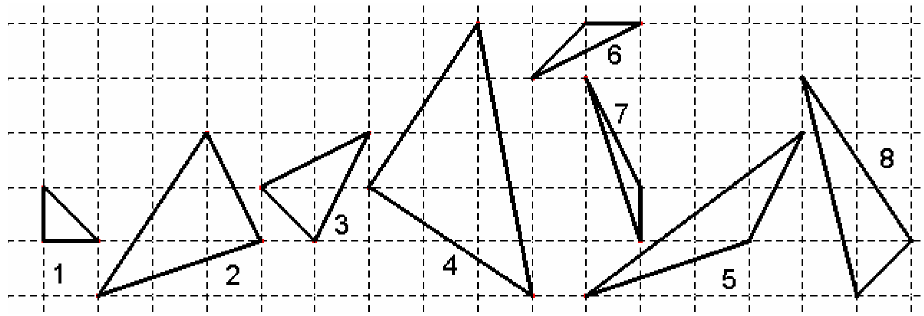


Obr. 15.3

<u>Úloha 2.</u> Určete u těchto mnohoúhelníků obsah S, počet vnitřních mřížových bodů v, počet hraničních mřížových bodů h a hledejte jakékoliv vztahy, které můžete vyčíst z tab. 15.5a.

Vyučující připravila tab. 15.5a, do které zapisovala údaje zjištěné studenty. Alžběta (po vyplnění řádku číslo 8) řekla: „Počet hraničních je přímo úměrný obsahu.“ Ukázala přitom na řádky tabulky číslo 1, 4, 7, čímž podpořila své tvrzení. Vyučující zapsala její tvrzení na tabuli. Vzápětí ostatní studenti reagovali protiargumentem s poukazem na řádky číslo 6, 7, 8, které nevyjadřují přímou úměrnost.

Následovala krátká diskuse, v níž studenti sami navrhli zkoumat závislost mezi S a v pro jistá h a začít nejmenším $h = 3$. Začali kreslit různé trojúhelníky (viz obr. 15.4). V tomto obrázku schází dva neúspěšné pokusy, které studenti škrtli. V obou šlo o trojúhelník s počtem hraničních bodů větším než 3. Již po druhém neúspěšném pokusu studenti pochopili, že podmínku $h = 3$ splňují jenom některé trojúhelníky. Více chybných obrázků nenakreslili. Pak začali zjišťovat S, h, v a evidovat hodnoty v tab. 15.5b.



Obr. 15.4

(a)

	S	h	v
1	4	8	1
2	0,5	3	0
3	3,5	3	3
4	6	12	1
5	5	12	0
6	1	4	0
7	2	4	1
8	3	4	2

(b)

	S	h	v
1	0,5	3	0
2	3,5	3	3
3	1,5	3	1
4	6,5	3	6
5	2,5	3	2
6	0,5	3	0
7	0,5	3	0
8	2,5	3	2

Tab. 15.5

Následovaly reakce, které vyučující zapisovala na tabuli v symbolickém jazyce.

Vyučující „Všichni s tím souhlasíte? Má někdo jiné řešení?“
Alžběta „Pokud $h = 3$, tak pak $S = (1/6)h$.“
Jindra „Pak by obsah byl pořád stejný.“
Dana „Musíme se podívat i na útvary pro h jiné než 3. Např. jsem objevila, že pro $h = 4$ je $S = v + 1$, pro $h = 5$ je $S = v + 1,5$ a tak by se pokračovalo pro další h.“

Po krátké diskusi studentů, v rámci které ověřovali správnost obou Daniných tvrzení, následovalo:

Eva $h = n(n \geqq 3) \Rightarrow S = v + 1 \cdot n.$

Z její intonace bylo zřejmé, že si není jistá poslední částí tvrzení, a to $1 \cdot n$. Jakmile se tvrzení objevilo napsané na tabuli, okamžitě požádala vyučující, aby nad tuto část napsala otazník. Vzápětí však žádala, aby tato část byla škrtnuta a bylo tam napsáno $0,5 \cdot n$.

Františka	$S = v + (n \cdot 0{,}5 - 1)$. (krátká diskuse)
Jindra	„Když $n = h$, pak $S = v + h \cdot 0{,}5 - 1$. To se musí napsat takto, protože se měl najít vztah mezi S a h a v a ne pro n“. (všichni studenti s Jindrou souhlasili)

Studenti objevený vztah ověřili ještě pro několik náhodně zvolených mnohoúhelníků. Téma Pickova formule byla náplní dvou seminářů. Studenti i vyučující byli s výsledky společné práce velice spokojeni.

15.5 Výsledky

Komparace postupů D. Jirotkové a J. Kratochvílové vedla k nalezení společných a odlišných prvků z hlediska implementace konstruktivistických principů (viz kap. 1).

Společné prvky byly tyto:

- V obou případech vedl postup důsledně cestou od experimentování, tj. kreslení konkrétních obrázků (separované modely) přes uspořádání experimentů a jejich evidenci v podobě čísel do tabulky, vyplňování libovolného řádku, resp. sloupce tabulky (generický model) až k vyslovení obecné formule (abstraktní poznatek).
- Žádný poznatek nebyl studentům sdělen, každý byl studenty konstruován. Vyučující pouze formulovaly úlohy a řešení studentů byla usměrňována výzvami.
- V několika případech studenti sami poukázali na jev, který pak vyučující zformuloval jako úlohu.
- Klima ve třídě bylo pracovní a přátelské a většina studentů se nebála vyslovit svůj názor, byť byl chybný (viz Bedřich a Alžběta).
- Chyba se vždy stala podnětem pro další diskuse, úvahy a objevy, nikdy nebyla hodnocena negativně ani vyučujícím, ani studenty.
- Studenti respektovali názory svého kolegy, nechali zaznít i chybná tvrzení a zapsat je na tabuli a na chybu reagovali vhodnou argumentací (vstup Jindry).
- V této atmosféře bylo každému studentu umožněno pracovat vlastním tempem – někdo byl o krok před ostatními (Dana), někdo byl o krok zpět (Alžběta), tedy každému byl umožněn individuální přístup k řešení problému.
- V obou postupech bylo shledáno, že studenti nebyli příliš aktivní v tvorbě geometrických obrazců. To bylo v rozporu s předchozí zkušeností. Mohlo to být způsobeno tím, že se tento semestr nevěnovalo příliš času manipulativním činnostem, jako je modelování na geoboardu.[7]

[7] Viz poznámka pod čarou, s. 258.

Odlišné prvky byly tyto:

- Volba výchozích obrazců (separovaných modelů). To bylo důsledkem vnímání reakcí studentů v předcházejících hodinách oběma vyučujícími.
- Doba potřebná k uskutečnění cíle. V postupu J. Kratochvílové byl dynamice procesu obětován rozvoj schopnosti organizovat soubor dat. Studentům byla předložena tabulka k vyplňování. V postupu D. Jirotkové byli studenti ponecháni samostatné volbě způsobu organizace dat i samostatnému zjištění, že nějaký vztah mezi údaji S, h, a v existuje. Další prodloužení postupu D. Jirotkové bylo způsobeno objevováním Pickovy formule postupně pro různé tvary, nejprve čtverce, pak trojúhelníky atd. Závěrečný objev Pickovy formule pro všechny mnohoúhelníky nepřinesl takové nadšení, neboť formule byla stále stejná.
- Subjektivní pocit vyučujících. Postup D. Jirotkové ne zcela naplnil její očekávání, protože nadšení studentů nedosáhlo intenzity z objevování Pythagorovy věty. Aktivita studentů byla kolísavá. Postup J. Kratochvílové jí přinesl plné uspokojení. Cesta k cíli byla přímá a přiměřeně dynamická. Studenti byli téměř po celou dobu velmi aktivní.

Domníváme se, že výše ilustrované postupy jsou ukázkou jedné z možných cest, jak realizovat zásady tzv. desatera konstruktivizmu (viz kap. 1, oddíl 1.3).

15.6 Výhledy

Prezentované výsledky jsou pouze fragmentem dosud získaných výsledků probíhajícího výzkumu. V současné době máme bohatý materiál v podobě audionahrávek a poznámek z výuky v paralelních skupinách nejen v rámci výuky geometrie, ale i didaktiky matematiky v oborech učitelství na 1. stupni základní školy a na speciálních školách. Tento získaný materiál včetně výše prezentovaného bude využit v následujících oblastech výzkumu:

1. evidence, analýza a komparace konstruktivistických přístupů používaných dvěma vyučujícími ve výuce geometrie a didaktiky matematiky pro budoucí učitelé elementaristy a speciální pedagogy,
2. evidence a analýza komunikačních šumů a nedorozumění v interakci učitel – student nebo student – student (viz také kap. 5),
3. v dlouhodobém výzkumu sledování schopnosti aplikovat konstruktivistické přístupy ve vyučování matematice jednak u studentů v rámci praxe z didaktiky matematiky a jednak absolventů v rámci jejich vyučování matematice.

Kapitola 16

Geometrické transformace analyticky

Naďa Stehlíková

16.1 Problém

V tradičně pojaté vysokoškolské výuce se často snažíme předat studentům co nejvíce znalostí a představit jim „ukončený a upravený produkt, do kterého se určitá, dobře známá, nenapadnutelná a plně akceptovaná část matematiky vyvinula“ (Dreyfus 1991). To však nutně neznamená, že studenti tuto matematiku chápou a vidí její krásu. Jejich znalosti mohou být často jen formální (viz kap. 2).

Na druhé straně se zejména v 90. letech minulého století ve světovém i českém výzkumu začínají prosazovat konstruktivistické přístupy k výuce matematiky a postupně pronikají do výuky matematice na základních a středních školách (viz kap. 1). Zde se však vysokoškolská, tradičně vedená výuka dostává s výukou na základních a středních školách do sporu. Chceme, aby naši absolventi učili konstruktivisticky, a přitom sami tento způsob ve většině případů nezažili. Jestliže se tito posluchači s konstruktivisticky vedenou výukou nesetkají ani v průběhu vysokoškolského studia, je pravděpodobné, že stejný styl budou později reprodukovat ve vlastním vyučování. Jen málo na tom může změnit úsilí učitelů předmětu Didaktika matematiky, protože teoretické zásady a zprostředkované ilustrace nemohou plnohodnotně nahradit neexistující přímé zkušenosti posluchače s konstruktivistickým přístupem. Jestliže naopak posluchači aspoň v některých předmětech na fakultě získají zkušenost s výukou orientovanou výrazně konstruktivisticky, získají hlubší pohled nejen na tuto disciplínu, ale i na to, co se dovídají v didaktice matematiky. Je však nutné zdůraznit, že změna tradičního vysokoškolského výkladu na konstruktivistický přístup vyžaduje značné úsilí učitele, protože zde je nutné látku připravit daleko šířeji a promyšleněji zejména z hlediska možných reakcí posluchačů.

Disciplína, která je již několik let opakovaně přepracovávána, aby její výuky byla výrazně konstruktivistická, je Analytická geometrie pro budoucí učitele 2. stupně základní školy a střední školy.[1] V tomto příspěvku se soustředíme na tu její část, která je zaměřena na geometrické transformace.

Naším cílem je tedy

1. *popsat základní charakteristiky konstruktivisticky vedeného kurzu na vysokoškolské úrovni,*
2. *ilustrovat způsob konstrukce matematického poznatku v rámci běžné výuky,*
3. *analyzovat reakce studentů na takto vedený kurz.*

16.2 Přehled současného stavu

Podívejme se nejprve, jak je toto téma zpracováno v některých jiných, srovnatelných kurzech. Soustředíme se vždy pouze na problematiku shodných, podobných a afinních zobrazení ve vysokoškolských kurzech, pokud možno pro budoucí učitele matematiky.

Ze zahraničních zdrojů zmiňme např. učebnici (Gans 1969), která vychází ze shodností v rovině a pokračuje podobnostmi, po nichž následují afinity v rovině. Vychází přitom důsledně z definic a vět, které ilustruje na příkladech a které též podrobně komentuje. Cvičení jsou zaměřena jak na procvičení nové látky, tak na důkazy některých vět. Většina cvičení je doplněna výsledky.

Přístup J. Čižmára (1984) je ještě formálnější. Postupuje opačným směrem, začíná od projektivní roviny a grupy projektivních transformací, pokračuje afinními transformacemi (zvlášť se věnuje ekviafinní grupě) a teprve nakonec se dostává ke grupě metrických transformací. Vždy pracuje v jednorozměrném až třírozměrném prostoru. Kniha je strukturována způsobem definice – věta – důkaz, vysvětlování jsou pouze sporadická. Cvičení jsou zaměřena na procvičování látky.

Skripta (Boček; Šedivý 1979) podávají základy teorie afinních zobrazení, a to pomocí vektorového aparátu. Pracuje se v n-rozměrném prostoru, zvláštní pozornost je věnována grupě afinních transformací. Následují shodná a podobná zobrazení euklidovských prostorů, zejména roviny. Autoři kladou důraz na ty grupy geometrických zobrazení, které se týkají středoškolské výuky matematiky. Kapitoly většinou začínají příkladem, definice jsou podány nejprve v n-rozměrném prostoru a pak konkretizovány. Text je strukturován kolem definic a vět. Na konci kapitol jsou některá cvičení. M. Sekanina aj. (1988) postupují obdobně (ostatně obě publikace mají dva společné autory), jde však do větších podrobností a uvádí více řešených příkladů. Opět však, stejně jako v předchozích případech, jsou všechny poznatky uvedeny jako hotové a student je pouze vyzván k jejich procvičování.

[1]Změny výuky na úrovni přípravy budoucích učitelů 1. stupně jsou podrobně diskutovány v kap. 10.

Učebnice (Kuřina 2002a) sice není určena pro vysokoškolskou výuku, přesto se domníváme, že způsob, jakým je zde výklad podán, je možné využít i na úrovni vysoké školy, zejména v přípravě budoucích učitelů. Vymyká se klasické představě učebnice. Nemá za cíl podat úplnou stavbu geometrických transformací, ale soustřeďuje se jen na vybrané transformace. Definic a vět je málo, zato zde najdeme mnoho podrobně vyřešených příkladů a odkazů na využití transformací v různých oblastech života. Na rozdíl od předchozích dvou publikací klade autor velký důraz na použití obrázků.

Podívejme se nyní na historii nového pojetí kurzu Geometrické transformace (analytická metoda) na Pedagogické fakultě UK. V roce 1995 M. Hejný změnil jeho strukturu tak, aby lépe odpovídala současným trendům konstruktivistického vyučování. Na této změně se dále podílela autorka této kapitoly a D. Jirotková. Změna mimo jiné znamenala výrazné „okleštění“ obsahu kurzu a snížení abstraktnosti učiva (např. úplně se upustilo od práce v n-rozměrném prostoru). Po několika semestrech testování vzniklo skriptum (Hejný; Jirotková; Stehlíková 1997), které pokrývá obsah jednoho semestru výuky analytické geometrie zaměřené na geometrické transformace v časové dotaci 1 hodina přednášky a 1 hodina semináře týdně.[2] Kurz předpokládá základní znalost shodností a podobností (v našem případě se vyučují v kurzu syntetické geometrie v 1. ročníku), teorie grup a lineární algebry (matic). Kurz začíná shodnostmi v euklidovské přímce a rovině a pokračuje k afinním transformacím v přímce a rovině.

Cílem kurzu není naučit studenty co nejvíce pojmů, definic a vět a ukázat jim ukončenou „budovu“ euklidovské a afinní geometrie, protože tu najdou v mnoha matematických knihách. Kurz jim má pootevřít svět geometrických transformací a přivést je k metodám, které jim umožní ve studiu transformací dále pokračovat. Vyučující se musí vzdát předkládání hotových poznatků a naopak musí připravovat úlohy, které studenty k poznání přivedou. K tomu je zapotřebí také jiný, aktivnější přístup studentů.

16.3 Metodologie

V tomto textu se budeme opírat o některé výsledky výzkumných sond, které autorka provedla v letních semestrech školního roku 2002/03 a 2003/04 a které zahrnovaly zkoumání autorčiny vlastní výuky.

Na konci předchozího semestru si autorka vždy vytipovala několik studentů,[3] o nichž věděla, že jsou komunikativní, plní zadané úkoly a věnují předmětu dostatečné úsilí. Cílem výzkumných sond bylo zjistit, do jaké míry je naše pojetí výuky účinné, zda si studenti skutečně zkonstruovali poznatky, o které nám šlo. K tomu jsme však potřebovali takové studenty, kteří budou skutečně zadané úlohy plnit.

[2] Od letního semestru 2003/04 máme k dispozici 2 hodiny semináře týdně.

[3] U první sondy šlo o tři studenty, v druhém případě o čtyři.

Všichni studenti souhlasili, že se stanou součástí výzkumu. Byli požádáni, aby si dělali podrobné poznámky o své přípravě na analytickou geometrii a aby si je schovávali. V průběhu celého semestru se každý týden jednotlivě setkávali s vyučující a formou volného rozhovoru probírali, na čem v průběhu uplynulého týdne pracovali. Rozhovory byly zaměřeny jak na kognitivní stránku (čemu se naučili, co jim bylo nejasné, jaký smysl jim to dávalo apod.), tak i na emotivní stránku (co se jim líbilo a co ne, jak prožívali výuku apod.). Rozhovory byly nahrávány a později přepsány.

Na konci semestru, poté, co všichni složili úspěšně zkoušku, s nimi byl proveden ještě jeden rozhovor zaměřený obecně na způsob vedení kurzu, na jeho výhody a nevýhody, na obsah apod. Otázky byly velmi volné typu „Napadá vás ještě něco, co byste mi chtěl(a) k předmětu a způsobu jeho vedení sdělit?“.

V průběhu semestru byla nasbírána databáze materiálů, které byly později podrobeny analýze. Jednalo se o *portfolio učitele* (podrobné přípravy přednášek a seminářů, včetně autorčiných očekávání průběhu výukového procesu; autorčiny popisy výuky pořízené v průběhu výuky i po ní, jejichž součástí byly i odkazy na další studenty ročníku; nahrávky rozhovorů se zmíněnými studenty a jejich transkripce) a *portfolio studentů* (kopie jejich domácí, někdy i školní práce, včetně pomocných výpočtů; jejich seminární práce na odvozování analytického vyjádření podobností v rovině; pojmové mapy předmětu analytická geometrie udělané na konci semestru).

Rozhovory se studenty umožňovaly autorce lépe reagovat na okamžité potřeby alespoň části studentů a průběžně upravovat kurz tak, aby lépe vyhovoval nejen studentům, ale také cílům, kterých chtěla dosáhnout.

Při popisu přípravy i průběhu výuky i pro následnou analýzu databáze materiálů byla využita metoda atomární analýzy (Hejný; Michalcová 2001; Stehlíková 2000), teorie „abstraction in context“ (Dreyfus; Hershkowitz; Schwarz 2001) a teorie separovaných a generických modelů (kap. 2).

V následujícím oddíle kapitoly vytvoříme obecnou představu o kurzu a popíšeme podrobněji jeho stavbu a přístupy v něm použité pomocí několika hlavních zásad. Ty budou ilustrovány konkrétními příklady úloh. V oddíle 16.5 podrobněji popíšeme konstrukci jednoho poznatku (vztah mezi afinitami v rovině a obsahem) a celý proces budeme analyzovat z hlediska principů konstruktivistické výuky (viz kap. 1).

Naše úvahy budou ilustrovány prací zejména tří studentů – Daniely, Jana a Pavla. Daniela byla hodnocena z trojice studentů jako nejlepší, Pavel jako prostřední a Jan jako „lepší trojkař“. Konečně v oddíle 16.6 odkážeme na některé výsledky výzkumné sondy zaměřené na postoje studentů k takto vedené výuce.

16.4 Metody práce – stavba kurzu

V tomto oddíle budeme ilustrovat základní principy, na kterých je kurz založen.[4] Tam, kde to budeme považovat za přínosné, bude uveden „tradiční“ způsob zpracování stejné partie. Na úvod stručně popíšeme použité způsoby analytického vyjádření transformací.

Práce se shodnostmi v E^2 začíná v kurzu odvozením jejich analytického vyjádření. Studenti jsou většinou schopni najít vyjádření transformačními rovnicemi a často si i sami povšimnou možnosti zápisu rovnic pomocí součinu matic, v němž má matice transformace funkci operátora. Oba způsoby analytického vyjádření spolu nadále koexistují s tím, že po čase studenti většinou dospějí k názoru, že použití matic třetího řádu je pro ně kalkulativně výhodnější. Výhodnost matic vynikne zejména při hledání inverzní transformace (pomocí inverzní matice) a složení několika transformací (pomocí součinu několika matic). Navíc matice umožňují využití matematického softwaru, např. programu Maple, pro zjednodušení výpočtů.

S použitím matic třetího řádu pro popis geometrických transformací v rovině se setkáme jen zřídka (viz např. Cederberg, 2001), většinou jde spíše o vyjádření pomocí součtu dvou matic. Afinita daná v kurzu maticí třetího řádu (16.3) by pak byla dána maticemi (16.1).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \text{kde } a^2 + b^2 = 1. \tag{16.1}$$

Je možné diskutovat o výhodách a nevýhodách obou přístupů. Z našeho hlediska je neobvyklost vyjádření spíše přínosem, protože studenti nemohou nastudovat látku z jiné učebnice, aniž by se zabývali vlastním zkoumáním. Musíme však zdůraznit, že u matic třetího řádu v kurzu zpravidla vůbec nemluvíme o homogenních souřadnicích. Potřeba použít matice třetího řádu vyplyne přirozeně při objevování analytického vyjádření posunutí a jeho přepisu do jazyku matic.

Tedy shodnosti a afinity v rovině jsou v kurzu nakonec popsány takto:

$$\text{Shodnosti: } \begin{pmatrix} a & b & c \\ \pm(-b) & \pm a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{kde } a^2 + b^2 = 1. \tag{16.2}$$

$$\text{Afinity: } \begin{pmatrix} a & b & i \\ c & d & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{kde } ad - bc \neq 0. \tag{16.3}$$

[4]Kurz byl popsán již dříve v (Stehlíková 2002a, 2002b, 2003).

16.4.1 Propojení syntetické a analytické geometrie a spojení geometrie s algebrou grup a matic

Přestože je syntetický přístup probírán v kurzu geometrie v 1. ročníku, v kurzu analytické geometrie se neomezujeme jen na analytický přístup, ale naopak využíváme oba tak, aby vynikly jejich výhody a nevýhody a v představě studenta se budovala geometrie jako struktura, nikoli jako soubor definic, vět, důkazů a návodů.

Při zkoumání shodností vycházíme ze znalostí studenta, tedy ze syntetické charakteristiky shodností, a teprve pak je odvozován jejich analytický popis (viz odvození analytického vyjádření rotace v dalším textu). Při studiu afinit, s nimiž se studenti setkávají poprvé (kromě krátkého seznámení s osovými afinitami v kurzu syntetické geometrie), je postup opačný. Analytické vyjádření shodností (16.2) je zobecněno na (16.3) a studenti jsou postupnými úlohami vedeni k tomu, aby charakterizovali transformace synteticky, např. aby zjistili, co je obrazem přímky (viz úlohy C1–C3, s. 286) a vektoru v afinitě, které vlastnosti afinita zachovává, jaké jsou její samodružné body, přímky a směry apod.

Kurz zachovává Kleinův přístup ke geometrii, tedy to, že na geometrii se můžeme dívat jako na prostor a transformační grupy na něm působící. Domníváme se, že studium transformací je na druhé straně příspěvkem ke studiu teorie grup, kde mimo jiné přispívá k vizualizaci grup a k překonání velkého důrazu na číselné modely struktur.

16.4.2 Objevitelské učení se

Na úrovni vysoké školy se všeobecně věří, že většina pojmů abstraktní matematiky je studentům pro samostatnou konstrukci nepřístupná, a kromě toho, samostatná konstrukce poznatků trvá nepoměrně déle než transmisivní způsob výuky (viz kap. 1). Objevitelské učení zabere mnohem více času než prosté sdělení faktu. Naše zkušenosti ukazují, že takto strávený čas není v žádném případě ztracený a že student tímto způsobem získá mnohem větší vhled do problematiky, než je tomu v případě, kdy je mu poznatek sdělen jako hotový (viz výpovědi studentů v oddíle 16.6).

Uveďme některé konkrétní ukázky toho, jak studenti objevují určitý poznatek (podrobněji viz oddíl 16.5). Například v transmisivní výuce je dána tato úloha:[5]

A1: Dokažte, že $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & p - p\cos\alpha + q\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & q - q\cos\alpha - p\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je matice rotace o úhel α kolem bodu o souřadnicích $[p; q]$.

[5]Úlohy budeme formulovat v jazyce matic, většina učebnic je však podává v jazyce transformačních rovnic.

Pak přichází procvičovací úloha A2, která vyžaduje dosazení konkrétních hodnot do daného analytického vyjádření.

A2: Najděte matici rotace kolem bodu o souřadnicích $[2; 3]$ o úhel 60°.

Naproti tomu v našem kurzu řeší student sérii úloh, která jej dovede k obecné matici rotace.

B1: Najděte analytický popis otočení $r_{\frac{\pi}{2}}$, tj. otočení o 90° kolem bodu O.

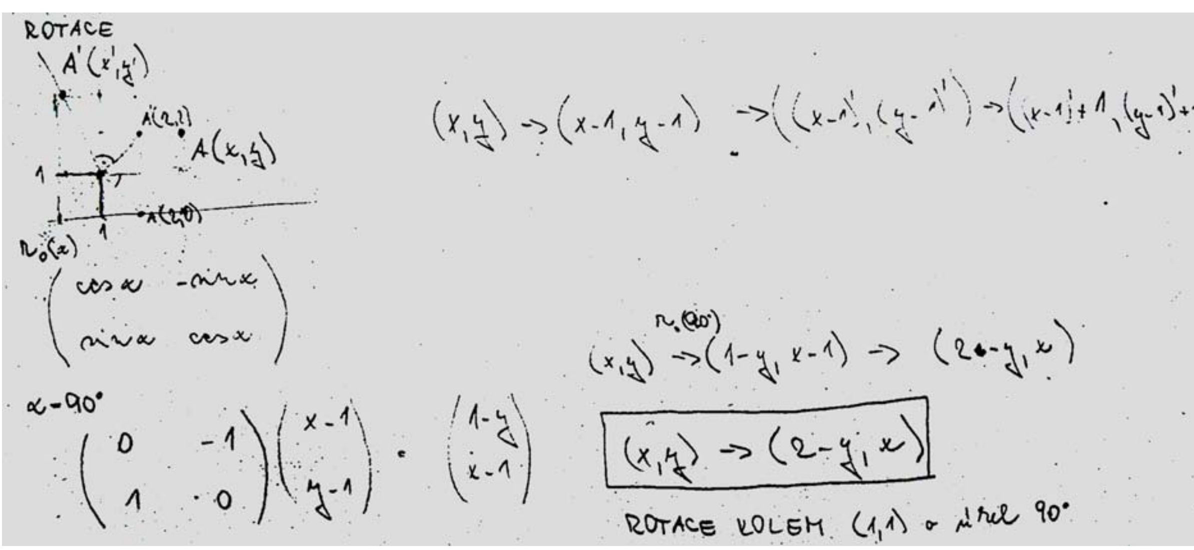
B2: Najděte analytický popis otočení $r_{\frac{\pi}{4}}$, tj. otočení o 45° kolem bodu O.

B3: Najděte analytický popis otočení r_α, tj. otočení o úhel α kolem bodu O.

Výsledkem je matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, o které studenti dále dokáží, že se opravdu jedná o matici otočení kolem počátku o úhel α. Série úloh pokračuje.

B4: Najděte matici $\boldsymbol{R}(1, 1; 90^\circ)$ otočení r kolem bodu o souřadnicích $[1; 1]$ o úhel 90°.

Například Daniela si nejprve odvodila analytické vyjádření posunutí, posunula vzor, a pak využila znalosti analytického vyjádření rotace kolem počátku o libovolný úhel (viz obr. 16.1).



Obr. 16.1

B5: Předchozí případ zobecněte na otočení o libovolný úhel kolem libovolného bodu.

Záleží na každém ze studentů. jak rychle bude postupovat, zda vyřeší všechny úlohy B1–B5 nebo jen některé, nebo pouze úlohu B5.

Tímto způsobem studenti najdou analytické vyjádření všech shodností v rovině. Vždy se přitom vychází z již známých znalostí. Např. v dalším kroku mají odvodit analytické vyjádření osové souměrnosti.

Nejprve studenti hledají matice některých konkrétních osových souměrností – podle přímek procházejících počátkem a svírajících s osou x úhel 0°, 90°, 45°, 30°. Pak najdou matici osové souměrnosti podle libovolné přímky procházející počátkem. Mohou ji získat dvěma zcela odlišnými způsoby: zobecněním předchozích konkrétních případů (jako generický model vytvořený zobecněním separovaných modelů, viz kap. 2) nebo na základě znalosti ze syntetické geometrie:

> Otočení o úhel α lze rozložit na dvě osové souměrnosti s osami procházejícími středem otočení a svírajícími úhel $\frac{\alpha}{2}$.

Jestliže tedy osa b zkoumané souměrnosti s_b prochází počátkem a svírá s osou x úhel β, pak otočení $r_{2\beta}$ kolem počátku o úhel 2β lze psát jako složení osové souměrnosti s_x (osové souměrnosti podle osy x) s osovou souměrností s_b. Ze vztahu $s_b s_x = r_{2\beta}$, pak získáme $s_b s_x s_x = r_{2\beta} s_x$, tedy $s_b = r_{2\beta} s_x$. Matice transformací $r_{2\beta}$ a s_x známe a jejich vynásobením získáme hledanou matici.

Po nalezení matice osové souměrnosti podle libovolné přímky procházející počátkem řeší studenti obecný případ osové souměrnosti s_m podle libovolné přímky m. Opět se nabízí více postupů: přímé vyvozování vztahů z obrázku (což je pracné a často dochází k chybám), nebo zobecnění předchozího postupu s využitím otáčení podle průsečíku přímky m s osou x (nebo y), nebo využitím jiné studentům známé věty ze syntetické geometrie:

Složením dvou osových souměrností podle rovnoběžných přímek vznikne posunutí.

V tomto případě je východiskem pro nalezení matice souměrnosti s_m vztah $s_m s_n = p$, kde n je přímka rovnoběžná s přímkou m vedená počátkem a p je příslušné posunutí. Uvedená různorodost postupů je typický rys konstruktivistického vyučování. Je pravděpodobné, že někteří studenti objeví první a jiní druhý postup. Vzájemnou konfrontací svých objevů pak všichni získávají hlubší vhled do celé problematiky.

Dalším příkladem objevitelského učení se je tvrzení, které je obvykle formulováno jako věta: „Afinní transformace zachovávají kolinearitu (tj. obrazy kolineárních bodů jsou opět kolineární body).“ V našem pojetí studenti řeší sérii úloh C1–C3.

C1: Zjistěte, jak vypadá obraz přímky p: $6x - 7y + 5 = 0$ v transformaci dané maticí

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Studenti mají nejdříve najít nějakou strategii řešení tohoto problému.[6] Např. Daniela si řekla, že je nutné najít obraz bodu $[x; \frac{6}{7}x + \frac{5}{7}]$, a provedla následující výpočet:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{6}{7}x + \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 1 \\ \frac{19}{7}x + \frac{10}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Získala soustavu dvou rovnic $x' = -x + 1, y' = \frac{19}{7}x + \frac{10}{7}$ s neznámými x a y a po vyřešení dostala $\frac{19}{7}x' + y' - \frac{29}{7} = 0$, což prohlásila za rovnici obrazu přímky p.

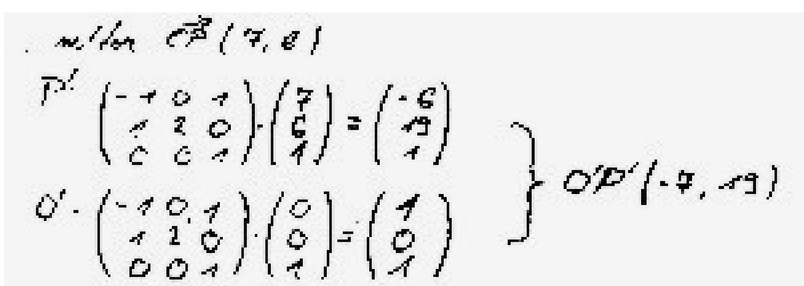
Jan použil jiné řešení založené na nalezení obrazu směrového vektoru přímky p, $\vec{s}_p(7; 6)$. Provedl následující výpočet:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{s}(-6; 19)$ prohlásil za obraz směrového vektoru a uzavřel, že obrazem přímky p je přímka p': $19x + 6y - 29 = 0$.

Jan viděl, že jeho řešení musí být chybné, protože ostatní studenti mezitím dospěli k výsledku, který měla i Daniela. Prohlásil, že to může být proto, že „jsme dosud nehledali obrazy vektorů v afinitě, jen bodů“. Nikdo však nebyl schopen najít chybu a problém byl prozatím odsunut. Vyučující do řešení problému nijak nezasahovala.

Následující týden vystoupil Pavel, že chyba byla v tom, že Jan ztotožnil obraz vektoru s obrazem jeho koncového bodu, a předvedl své řešení (viz obr. 16.2). To vedlo k otázce, jak budeme hledat obraz vektoru v afinitě. Tato problematika by stejně byla v kurzu řešena, nicméně vyučující uvítala, že se objevila přirozeně a nemusela ji otevírat sama. Kladení otázek a nastolování úloh a problémů studenty je jedním z důležitých charakteristik konstruktivistické výuky.



Obr. 16.2

Série úloh vedoucích k objevu obrazu přímky v afinitě pokračovala.

[6] Studenti řešili tuto úlohu během semináře.

C2: Najděte obraz přímky p: $ax + by + c = 0$ v afinitě dané maticí $\boldsymbol{A}$.

C3: Dokažte, že afinním obrazem přímky je přímka.

Při řešení konkrétních úloh C1 a C2 získá student zkušenosti, které může dále využít při obecném důkazu v úloze C3.

16.4.3 Od separovaných modelů ke generickým

V transmisivním způsobu výuky je studentovi předložen poznatek, např. jaké možnosti nastávají u afinit pro počet samodružných bodů a samodružných přímek, a ten jej má dokázat. V našem pojetí student nejdříve získává dostatek zkušeností se separovanými modely afinit. To znamená, že má nejprve zadány matice konkrétních afinit, u nichž vyšetřuje samodružné body a samodružné přímky (postupem, který je mu už známý ze zkoumání shodností; využívá při tom např. programu Maple). Matice jsou nejprve zadány konkrétními čísly a postupně v nich přibývá parametrů až k obecné matici afinity. Když student vyšetřuje tyto konkrétní afinity, uvědomuje si spojení s algebrou (konkrétně s řešitelností soustav rovnic).

Podobně další témata kurzu jsou předkládána tak, že studenti řeší nejprve úlohy s konkrétně zadanými transformacemi a získávají tak zkušenosti, které později zúročí při řešení obecného problému, případně při důkazu. Důležité je také to, že tento přístup umožňuje individualizaci. Někteří studenti mohou okamžitě přistoupit k řešení obecného problému, jiní nejprve získávají zkušenosti s konkrétními případy.

Ilustrace byla podána též v předchozím textu (hledání analytického vyjádření otočení, úlohy B1–B5, a hledání obrazu přímky v afinitě, úlohy C1–C3).

16.4.4 Společná konstrukce poznatků

Samostatné objevování je samozřejmě intelektuálně i časově náročné a není realistické očekávat, že každý ze studentů skutečně vše propočítá a bude schopen najít řešení. V ideálním případě by se studenti měli navzájem doplňovat a případně si rozdělit práci. Tak dochází k tzv. společné konstrukci poznatků, kdy poznatek již není individuálním konstruktem jednotlivce, ale stává se majetkem celé skupiny. Domníváme se, že pokud je student dostatečně zainteresován na probíraném tématu tím, že sám úlohy řeší, dokáže přijmout i poznatek, který za něj zkonstruuje někdo jiný, aniž by se takový poznatek uložil v jeho kognitivní struktuře jako formální.

Konstrukci poznatků v sociálním prostředí třídy nebo skupiny studentů se věnují např. (Dreyfus; Hershkowitz; Schwarz 2001), kteří navrhují některé způsoby, jak ověřit, že jedinec vzal za svůj poznatek, který byl zkonstruován někým jiným nebo ve skupině. Jednu ilustraci společné konstrukce poznatků jsme viděli v případě zjišťování obrazu vektoru v afinitě, další bude podána v oddíle 16.5.

16.4.5 Podnětné prostředí

Ukazuje se, že tematika geometrických transformací je dostatečně široká a umožňuje neustálé obohacování. Mezi náměty, kterými se kurz zatím nezabývá, ovšem pro jejichž řešení dává studentům dobré předpoklady, patří např. jiné rozdělení afinit (např. primitivní transformace, Gans 1969) a jejich zesouladění s naším rozdělením, porovnání různých možností analytického vyjádření transformací (rovnicemi a různými typy matic); využití programu Maple pro zkoumání transformací; zkoumání některých shodností v prostoru E^3 pomocí analytického vyjádření; propedeutika projektivních transformací apod.

16.4.6 Hodnocení

Současně s přístupem k „výkladu“ obsahu předmětu Geometrické transformace bylo změněno i hodnocení studentů. Tradiční způsob hodnocení zahrnoval písemný test obsahující lehce obměněné úlohy řešené v kurzu a ústní zkoušku, která sestávala z teorie. Často se stávalo, že se studenti naučili obsah kurzu nazpaměť a uměli řešit pouze standardní typy úloh. Nová podoba zápočtu i zkoušky zavedená M. Hejným spočívá v tom, že studenti mohou při písemné zkoušce využívat *libovolné zdroje* včetně svých poznámek z kurzu. Jedinou podmínkou je, že musejí pracovat samostatně. Tímto způsobem se prakticky odstranilo bezduché memorování obsahu. Studenti se při své přípravě soustřeďují spíše na pochopení pojmů a postupů a nemusejí se obávat, že si při testu nevzpomenou na nějaký vzorec nebo algoritmus. Na druhé straně se setkáváme i s případy, kdy možnost mít všechny materiály k dispozici vede studenty (kteří nemají s tímto způsobem psaní testu zkušenosti) k pocitu zdánlivého bezpečí, kdy se domnívají, že se vlastně nemusejí na test připravovat. Proto řada z nich písemný test opakuje poté, co jsou zaskočeni nestandardností úloh.

Tento způsob psaní testu klade zvýšené nároky na vyučujícího, který musí připravit úlohy, jež se od úloh řešených v semestru sice dostatečně liší, ovšem na druhé straně musí být řešitelné pouze pomocí myšlenek, s nimiž se studenti již setkali. Test sestává ze čtyř úloh a na jeho vypracování je stanoven čas tří hodin. Tři z úloh testu uvádíme jako ilustraci.

D1: Nechť je v E^2 dán rovnoramenný trojúhelník ABC s ortocentrem O a základnou $|AB| = 4$. Označme $u = AC$, $v = BC$, $w = AB$. Nechť je p přímka. Víme, že platí následující vlastnosti (s_u znamená souměrnost podle přímky u, s_C znamená středová souměrnost podle bodu C):

$$(s_u s_v)^3 = s_C, \quad s_u s_p = s_p s_v, \quad s_p(s_w(O)) = Q$$

Najděte délku $|OQ|$. Najděte všechna řešení.

V této úloze mají studenti použít své znalosti ze syntetické geometrie (základní vlastnosti shodností). Na začátku kurzu Geometrické transformace je věnováno hodně pozornosti tomu, jak skládat a „rozkládat“ shodnosti v E^2, nicméně takto komplexní problémy se neřeší. Je nezbytný náčrtek situace. Analytický přístup je zde nevýhodný, výpočty by byly příliš komplikované.

D2: Nechť máme v A^2 (afinní rovina) dán trojúhelník KLM a body N (střed dvojice bodů L a M), O (střed dvojice bodů K a M) a P (střed dvojice bodů L a K). Afinní transformace f je dána vztahem $f(LPN) = OKP$. Vyjádřete f jako složení $f = tg$, kde t je posunutí a g je elace (stačí najít jedno řešení). Najděte samodružné přímky transformace f.

Řešení druhé úlohy kombinuje synteticko-analytický přístup a vyžaduje poměrně hodně experimentování. Studenti mají využít znalostí ze syntetického hledání obrazu bodu v elaci a posunutí. Ve druhé části řešení musejí zavést vhodnou soustavu souřadnic a najít matici afinity f,[7] která jim následně poslouží při hledání samodružných přímek. Synteticky tuto část úlohy řešit nelze.

D3: Popište maticemi grupu G v E^2, která je generována třemi osovými souměrnostmi s osami souměrnosti o rovnicích $x - y = 1, x - y = -1, x + y = 2$.

Třetí úloha se nejlépe řeší analytickým způsobem, i když je možné nejprve experimentálně, syntetickým způsobem, zjistit, které transformace bude grupa obsahovat, a pak následně najít jejich analytické vyjádření. Je důležité, že úloha se pouze neptá, zda je určitá množina transformací transformační grupou, ale vyžaduje, aby student takovou množinu sám vytvořil.

Projde-li student písemnou zkouškou úspěšně, následuje ústní zkouška, která je hlubší u těch studentů, kteří v písemném testu nedosáhli dobrých výsledků. Stalo se zvykem, že test opravuje vyučující přímo se studentem, který tak má možnost vysvětlit případné nejasnosti a současně získává zpětnou vazbu o svých znalostech.

16.4.7 Role učitele a studenta

Role učitele, který v transmisivně vedeném vyučování plní roli předavatele vědomostí a často i nejvyššího arbitra rozhodování, zda je nějaký výsledek správný či nikoli, se v konstruktivistickém způsobu výuky výrazně mění (viz kap. 1). V případě našeho kurzu se do jisté míry stírá rozdíl mezi přednáškami a cvičeními, který je tradičně viděn v tom, že zatímco v přednášce učitel vykládá nové poznatky, ve cvičení si student má tyto poznatky procvičit. V našem případě se ani nedá předem předpokládat, v jakém pořadí se

[7] Pomocí trojic bodů – vzorů a jejich obrazů.

budou jednotlivé poznatky objevovat (viz problematika obrazu vektoru v afinitě, která se objevila v rámci řešení jiného úkolu, nebo problematika obsahu popsaná v oddíle 16.5).

Role studenta se také mění. Tím, že mu nejsou předloženy hotové poznatky a většinou dostává pouze podněty a úlohy k řešení, je nucen být aktivnější ve svém učení se. Jak na to reagují sami studenti, uvidíme v oddíle 16.6.

Ilustrace rolí studenta a učitele v popisovaném kurzu je podána dále v oddíle 16.5.

16.5 Konstrukce vztahu mezi afinitami v E^2 a obsahem

Pojem obsahu se ve skriptech (Hejný; Jirotková; Stehlíková 1997) nevyskytuje. Autorka se však rozhodla, že to je téma natolik zajímavé, že ho v letním semestru 2002/03 do výuky zařadí. Výuka probíhala formou jednohodinové přednášky a jednohodinového semináře týdně. Jak již bylo uvedeno, pojetí přednášky se od pojetí semináře příliš nelišilo.

Afinita v rovině byla studentům zavedena jako geometrické zobrazení, které lze vyjádřit maticí (16.3).

V první částí kurzu studenti odvozovali analytické vyjádření shodností v rovině pomocí rovnic a pomocí matic a postupně se dohodli, že vyjádření maticemi je pro ně kalkulativně výhodnější. Proto byla uvedená definice afinity logickým pokračováním (zevšeobecněním) matic shodností. O souvislosti třetího řádku matice s homogenními souřadnicemi se studenti dozvěděli na konci semestru, do té doby byla přítomnost tohoto řádku dána kalkulativními důvody.

Všechny vlastnosti afinit si studenti museli odvodit sami.

16.5.1 Popis společné konstrukce poznatků

V tomto oddíle popíšeme podrobně způsob, kterým si studenti zkonstruovali poznatky obsažené ve větě 1.

$\boxed{\text{Věta 1:}}$ Označme $A[E^2]$ množinu všech afinit v E^2. Nechť je dána afinita $f \in A[E^2]$ a trojúhelník ABC. Pak obrazem trojúhelníku ABC v afinitě f je trojúhelník $A'B'C'$ a pro jeho obsah platí $S_{\triangle A'B'C'} = \det \boldsymbol{F} \cdot S_{\triangle ABC}$, kde $\det \boldsymbol{F}$ je determinant matice afinity f. (Tedy jinými slovy, afinita „násobí“ obsah trojúhelníku ABC hodnotou determinantu své matice.)

Zatímco v transmisivním vyučování by zřejmě tato věta byla prezentována studentům jako hotový poznatek a předveden její důkaz, v konstruktivistickém pojetí se vyučující snaží vytvořit sérii úloh, v průběhu jejichž řešení je věta zkonstruována. Tak tomu bylo i v našem případě, ovšem motivací ke studiu obsahu v souvislosti s afinitami v rovině nebyly úlohy vyučujícího, ale úvahy studentů, jak popíšeme v dalším textu.

Ke konstrukci věty nedošlo najednou, ale postupně vyplynula v průběhu několika přednášek a seminářů, během nichž se probírala i další témata z geometrie afinních transformací. Tedy popisujeme-li, že byla v průběhu semináře 7 zadána úloha 1, neznamená to, že se za celý seminář nic jiného neudělalo. Zde vybíráme jen ty části seminářů a přednášek, které se týkají vztahu afinit a obsahu.

Popis celého procesu začíná úlohami, jejichž řešení inspirovalo některé ze studentů k položení otázky týkající se obsahu.

Seminář 7, zadání Ú1

Ú1: Jazykem syntetické geometrie charakterizujte zobrazení daná následujícími maticemi:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}, z\neq 0, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} z & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, z\neq 0.$$

Úloha Ú1 byla zadána v semináři 7 jako domácí úkol. Jedná se o afinity zachovávající počátek O, proto stačí pracovat s maticemi druhého řádu.

Očekáváním vyučující bylo, že si studenti uvědomí, že podobně jako shodnosti lze i afinity charakterizovat invarianty – samodružnými body a přímkami. Předpokládala, že studenti použijí jim známé postupy z předchozího studia na hledání samodružných bodů a přímek, případně že najdou obrazy několika útvarů a z nich se pak budou snažit usuzovat na syntetické vlastnosti afinit. Ukázalo se však, jako už ostatně mnohokrát předtím, že úloha vedla k naprosto odlišnému problému.

Seminář 8, prezentace řešení Ú1, zadání Ú2 a Ú3

Při řešení úlohy 1 žádný ze studentů nepracoval se samodružnými body, ale většinou hledali obrazy jednotlivých bodů a z nich se pak snažili uhodnout, zda se jedná o jim známou geometrickou transformaci. Když Marie prezentovala své výsledky u tabule, u matice $\boldsymbol{B}$ se zmínila, že afinita určená touto maticí podle všeho zachovává obsah útvarů. Zeptala se vyučující, zda má tuto vlastnost každá afinita. Vyučující tuto otázku přivítala, neodpověděla však a formulovala nový problém pro všechny.

Ú2: Zjistěte, zda afinita zachovává obsah útvarů.

Nikdo nedokázal otázku zatím rozhodnout, ani navrhnout plán, jakým způsobem je možno úlohu uchopit. Proto vyučující zadala úlohu 3.

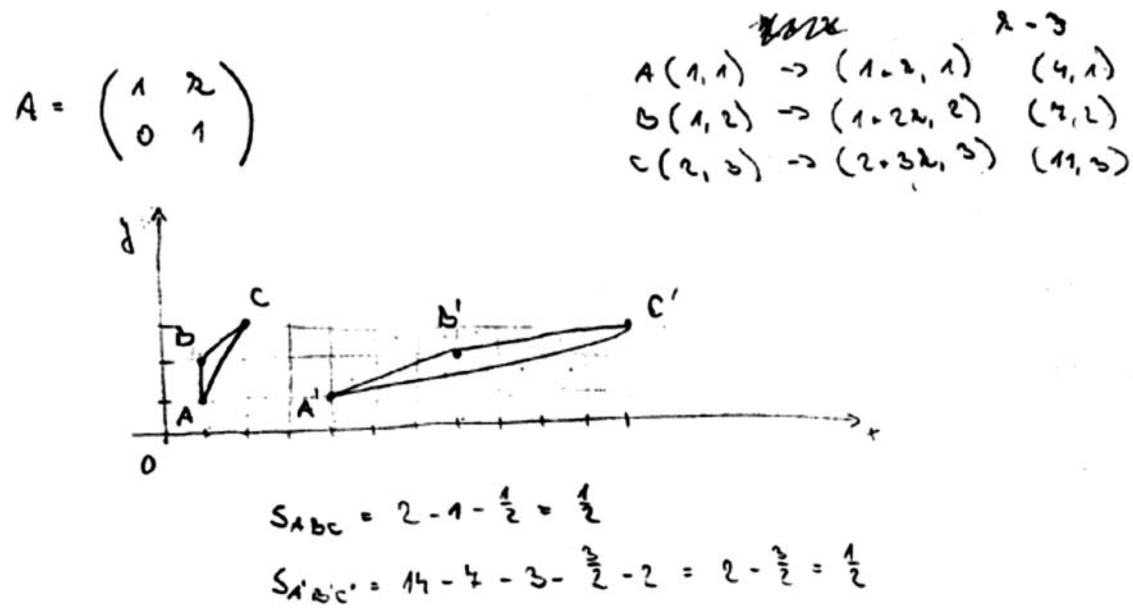
Ú3: Zjistěte, zda zkosení zachovává obsah.

(Zkosení podél osy x je dáno maticí $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, zkosení podél osy y maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.)

Tím seminář skončil a úlohy zůstaly jako domácí úkol.

Seminář 9, prezentace řešení Ú3, zadání Ú4

Daniela doma dokázala, že zkosení zachovává obsah, tím, že využila vzorec pro hledání obsahu trojúhelníku známý studentům z přechozího semestru (pokud $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$ a $C[c_1; c_2]$, pak $|\triangle ABC| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}|$). Prozkoumala však jen jeden konkrétní případ (viz obr. 16.3). Studenti pak sami dospěli k tomu, že je nutné prozkoumat i jiné polohy trojúhelníku.



Obr. 16.3

Vyučující se znovu zeptala, zda to platí u každé afinity. Nikdo nereagoval, proto zadala úlohu 4, která měla studentům zprostředkovat další konkrétní zkušenosti s problematikou obsahu.

Ú4: Zjistěte, co se stane s obsahem trojúhelníku v afinitách, které jsou dány těmito maticemi: $$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Seminář a přednáška 10, zadání Ú5

Seminář a přednáška 10 byly spojeny a studenti pracovali v počítačové laboratoři s programem Cabri Geometrie II.[8] Ve skupinách řešili úlohy, které dostali na zvláštním listu a které se týkaly osových afinit a jejich vlastností a skládání.

Osové afinity jako významná podmnožina afinit v rovině se dají s úspěchem zkoumat i synteticky. Konstrukce obrazů však není jednoduchá, proto bylo rozhodnuto využít program Cabri, s nímž už měli studenti zkušenosti z jiných předmětů.

Osové afinity byly zavedeny jako afinity zadané přímkou samodružných bodů (osou) a dvojicí různých, sobě odpovídajících bodů neležících na ose (vzor a obraz). Studenti pak měli na základě již dokázaných vlastností afinit (konkrétně faktu, že afinity zachovávají dělicí poměr a obraz přímky v afinitě je přímka) odvodit způsob, jakým se konstruuje obraz bodu v osové afinitě. Na základě toho bylo v Cabri Geometrie II vytvořeno makro pro obraz bodu, přímky a mnohoúhelníku v osové afinitě a jejích dílčích typech, elaci a involutorní osové afinitě. Studenti řešili řadu úloh, které zadala vyučující. Jednou z nich byla i úloha 5.

Ú5: Zjistěte, zda a jak osová afinita mění obsah.

Studenti pracovali ve skupinách a vyučující do jejich práce nezasahovala (kromě poskytnutí pomoci s programem).

Přednáška 12, prezentace řešení Ú5

Studenti prezentovali výsledky práce z laboratoře a jedna z hypotéz, která zazněla, byla, že elace a involutorní osová afinita zachovávají obsah útvaru. K tomu dospěli většinou použitím funkce „zjisti obsah útvaru“, která je v Cabri Geometrie II k dispozici. Jinou souvislost prozatím neviděli.

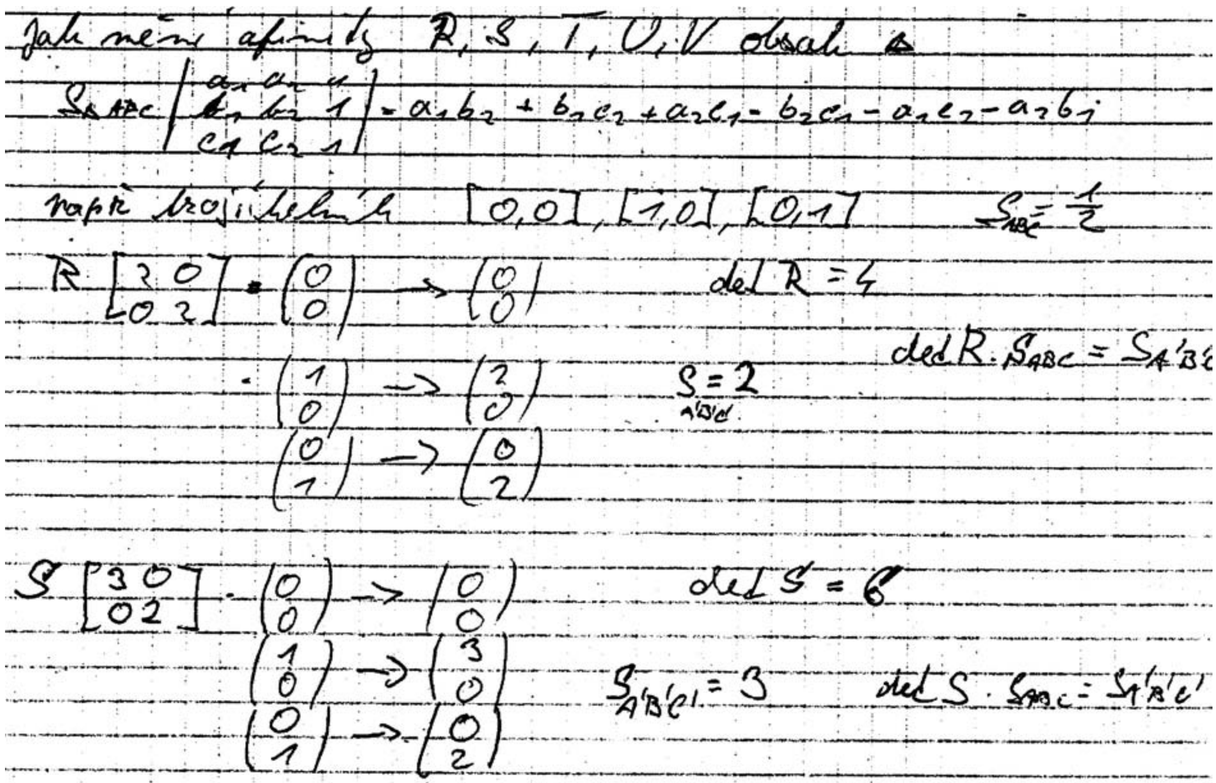
Přednáška 13, prezentace řešení Ú4, zadání Ú6

Pavel přednesl své řešení úlohy 4 (část je na obr. 16.4).[9] Uvedl, že hledal souvislost mezi obsahem obrazu trojúhelníku OIJ, kde $O[0;0]$, $I[1;0]$ a $J[0;1]$, a determinantem matice afinity, protože determinant se „přímo nabízí jako základní vlastnost matice“. Navíc „jsme determinanty zjišťovali v průběhu práce několikrát“ (abychom např. zajistili, že daná matice je opravdu matice afinity – determinant musí být nenulový). Společně pak studenti

[8] Laboratoř bylo nutné zamluvit již na začátku semestru, proto byl „běh“ kurzu přerušen a úloha 4 nebyla řešena. Nicméně, jak se ukázalo, měla práce v laboratoři přínos i pro řešení problematiky obsahu.

[9] Vztah pro obsah trojúhelníku ABC je v Pavlově řešení zapsán nesprávně, chybí koeficient $\frac{1}{2}$. Nicméně při počítání obsahu trojúhelníku OIJ se Pavel chyby nedopustil.

formulovali hypotézu, že „afinita násobí obsah trojúhelníku hodnotou determinantu své matice“. Z toho logicky vyplynula úloha 6.



Obr. 16.4

Ú6: Dokažte hypotézu o vztahu afinity a obsahu.

Daniela nejdříve vyslovila větu 1 (viz s. 291) a pak navrhla důkaz pomocí vztahu pro zjišťování obsahu trojúhelníku, který využil Pavel. Stanovila i základní postup, ovšem vlastní důkaz byl dělán společně s celou skupinou, protože, jak se ukázalo, studenti již „pozapomněli“ pravidla úprav determinantů, která probírali v lineární algebře.

16.5.2 Komentář k ilustraci

Zde shrneme celý proces objevu vztahu afinity a obsahu a kurzívou stručně uvedeme princip konstruktivistického způsobu vyučování, k němuž se daný komentář vztahuje (viz kap. 1).

Jak bylo ukázáno v předchozím textu, věta, která je v transmisivním vyučování vyslovena jako hotový poznatek a studenti ji mají pouze dokázat a procvičit na příkladech, vyplynula celkem přirozeně z řešení úloh v průběhu několika přednášek a seminářů (*konstrukce poznatků je dlouhodobá záležitost*). Úlohy mohou zůstávat nevyřešené nebo jen zpola vyřešené i delší dobu, než se naskytne vhodná příležitost k jejich znovuotevření. Ovšem podle našeho názoru je žádoucí, aby se v přiměřené době všechny problémy uzavřely.

V naší ilustraci je důležité, že prvotní motivace pocházela od samotných studentů. Problematika obsahu tedy nebyla nastolena uměle učitelem (*poznatky jsou konstruovány tehdy, kdy je jich třeba; studenti formulují vlastní úlohy a otázky*; *obsah hodin nelze předem dopodrobna předvídat*). V ideálním případě by studenti měli být schopni sami formulovat i návodné úlohy, které je dovedou k řešení problému. V našem případě tomu tak nebylo, musela zasáhnout vyučující (*učitel je významným činitelem konstruktivistického vyučování*). V případě úlohy 3 se domníváme, že byla formulována příliš brzy po obecné úloze 2. Zde měla vyučující projevit více trpělivosti. Je možné, že při domácím studiu by některý ze studentů přišel s vlastním návrhem postupu.

Vyučující neprozradila studentům správné řešení problému, když se objevil, ani nespěchala s jeho řešením. Pokračovala s tématy, která byla rozpracována předtím, a teprve, když to bylo vhodné, k problému se vrátila (*trpělivost učitele*). Z hlediska studenta se konstruktivistická výuka může jevit jako chaotická a postrádající strukturu. Je úkolem učitele, aby měl na paměti, jaké poznatky si mají studenti zkonstruovat, a aby měl také plán, jakým způsobem je k tomu povede (*učitel jako předkladatel problémů*). Vyučování není tedy „živelné“.

Komunikace v hodinách a dialog se studenty jsou velmi důležité. Z ilustrace vyplývá, že studenti byli často vyzýváni k prezentaci svých, byť i nehotových výsledků před ostatními a k jejich diskusi. Pokud to bylo možné, vyučující se zdržela hodnotících komentářů a nechala hodnocení správnosti na studentech. Na druhé straně je třeba zdůrazňovat, že dokud nějakou hypotézu, kterou studenti zformulovali během řešení nějakého problému, nedokážeme, zůstává hypotézou.

Proces konstrukce je na jedné straně individuální, tedy každý si konstruuje poznatky sám, na druhé straně je to však i záležitost *sociální*. Studenti mohou nějaký poznatek přejmout od svých spolužáků a použít ho při vlastní konstrukci něčeho nového. Jeden přijde na řešení konkrétního problému (např. Ú4), další je pak schopen na jeho základě řešit obecný problém (Ú6). Velmi cenné je, když studenti konstruují nové poznatky ve vzájemné diskusi.

16.6 Výsledky výzkumné sondy – postoje studentů

Úvahy z předchozího textu představují ideální stav, který odráží představy a plány autorů nového přístupu ke kurzu. Z hlediska studenta se jedná o poměrně radikální změnu přístupu ke studiu. Měl by být aktivnější v tom, že bude pravidelně řešit úlohy, klást otázky a zajímat se o vznikající strukturu transformací. Práce v seminářích má za cíl propojit znalosti a dovednosti různých studentů tak, aby vznikala jakási kolektivní konstrukce předmětu. Ne vždy a v každé skupině k tomu však opravdu dochází. Ne vždy se také daří studenty dostatečně motivovat, některým z nich stačí, když se jim řešení problému prostě předloží.

Ukazuje se, že konstruktivistické způsoby budí v mnoha studentech pocit nejistoty a nedůvěry. Uvedeme některé reakce tří studentů, kteří se zúčastnili našeho výzkumu, seřazené do kategorií (D – Daniela, P – Pavel, J – Jan).

Náročnost předmětu

D „Musela jsem věnovat mnohem více času přípravě. Ovšem před zkouškou už tolik ne, když to porovnám s ostatními předměty. . . . Nemusela jsem se učit tolik teorie."

P „Mně třeba stačilo u tohohle předmětu jenom pochopit, o co se tam jedná, tam jako učení třeba definic a takový nazpaměť, to tady, myslím, teď nebylo. . . . Jako trošku víc tam bylo přece jenom potřeba to pochopit."

J „Nemohl jsem si dovolit nepřipravovat se. Pak by se člověk už nechytil. . . . Před zkouškou jsem ale byl překvapený, že jsem se nemusel moc učit, že to chápu."

Nedostatek struktury

D „Nevadilo mi, že to nebylo dělané strukturovaně. Před zkouškou jsem si udělala přehled všeho, co jsme se učili. To dělám vždycky."

P „No, já bych uvítal takový jako větší uzavření a zopakování. . . . Že si uděláme prostě takovej souhrn v rámci třeba jedný přednášky."

J „V jiných předmětech je to pěkně strukturovaný, když jsou tam definice, věty, důkazy. Tady jsem si nebyl jistý."

Nedostatek učitelovy expozice nové látky

D „Líbil se mi způsob práce, kdy jsme měli hodně pracovat doma a v hodinách jsme to jen shrnuli."

P „. . . mně se teda líbilo, jak ste podala třeba tu afinitu. Já jsem jako doteď nevěděl, jako o co jde. . . . pak jsme vlastně se to učili stylem, že jsme jenom zkoumali ty vlastnosti, že jste nám neřekla, co to je, ale že jste nám dala příklad právě na ty vlastnosti.. . . Když jsme zkoumali ty vlastnosti, jestli se tam zachovává rovnoběžnost nebo ty poměry nebo obsahy, tak se to krásně vybudovalo, ta teorie afinity."

J „Bylo to zajímavější, ale kdyby to tak bylo v každým předmětu, tak bychom to časově nezvládli. . . . Bylo to zajímavější, protože jste neřekla, je to tak a tak, ale co se stane když a my jsme si to už objevili.“

16.7 Aplikace a výhledy

Podobný způsob výuky byl aplikován kromě Pedagogické fakulty UK také v jednosemestrální výuce na Concordia University v Montrealu u učitelů matematiky z praxe. Zde měla autorka jedinečnou příležitost vyzkoušet čistě konstruktivistický způsob výuky geometrických transformací. Podmínky byly příznivé; studenti – učitelé měli jen malé zkušenosti se shodnostmi, a to pouze ze syntetické geometrie, neměli k dispozici skripta, v nichž jsou úlohy řešeny, byli dostatečně motivováni (kurz byl v rámci jejich dalšího vzdělávání), nebyli omezeni osnovami, tj. kurz se mohl ubírat tempem i směrem, který určili studenti. Průběh práce v kurzu autorku utvrdil v přesvědčení o správnosti nastoupené cesty. Vzhledem k malému počtu účastníků měla možnost zblízka sledovat pokrok každého jednotlivce. Dobře byla patrná ona společná konstrukce poznatků.

Zkušenosti s výukou předmětu nás vedou k přesvědčení, že zde uvedené připomínky a názory studentů do jisté míry odrážejí i názory ostatních studentů (s výjimkou těch, kteří zadané úlohy neplnili a pouze čekali na řešení ostatních). Přestože je celkový dojem těchto tří studentů pozitivní, neustále se pokoušíme o další vylepšení vedení předmětu. Např. ve školním roce 2003/04 jsme vyzkoušeli novou formu práce, kdy studenti od začátku semestru pracovali v pevně daných skupinách a výsledky své práce neodevzdávali individuálně, ale za skupinu. Chceme také nabídnout studentům možnost shrnutí látky na konci semestru formou pojmových map. Cítíme, že někteří studenti prostě potřebují větší míru pomoci, a není v našem zájmu, aby prožívali celý semestr v nejistotě a v nedostatku sebedůvěry. Je úkolem učitele vytvořit jakýsi kompromis mezi tím, v účinnost čeho věří, v tomto případě v konstruktivistický způsob výuky, a mezi očekáváním studentů zaměřeném většinou na přijetí hotových poznatků.

Započatý výzkum bude pokračovat i nadále v podobném duchu. Časovou dotaci semináře se podařilo zvýšit na 2 hodiny týdně, přičemž množství látky se příliš nezměnilo. Chceme co nejvíce zapojit studenty do samostatného nebo skupinového zkoumání během těchto seminářů, abychom mohli okamžitě reagovat na jejich potřeby. Více než dosud bude také využíván software Cabri Geometrie II.

Kapitola 17

Jak Klára měnila své pedagogické přesvědčení

Jana Kratochvílová

17.1 Formulace problému

Jak již bylo v této publikaci několikrát řečeno, kvalita matematických poznatků žáků na základních i středních školách v České republice často trpí nedostatkem porozumění, což je zejména důsledek transmisivních způsobů (viz kap. 1). Změna tohoto stavu je velice složitý problém, protože vyžaduje změnu edukačního přesvědčení učitelů, jak ostatně uvádí M. Hejný (2004) a k čemuž se autorka přiklání:

> Myslím, že matematici, učitelé matematiky, ale především učitelé učitelů matematiky se musí nad touto situací hluboce zamyslet. Problém totiž netkví v matematice, ale ve zmiňovaném transmisivním způsobu její výuky, tedy v učitelích, kteří svět matematiky otevírají žákům. Jakmile se začne zvyšovat počet učitelů, kteří dokáží matematiku učit tvořivým a poutavým způsobem, začne ubývat hlasů žádajících její útlum. Nedojde-li ke zlepšení daného stavu, bude matematika ze škol v budoucnu vytěsňována.

Za jednu ze schůdných cest při řešení tohoto problému považujeme přímou interakci učitele z praxe s učitelem, který se věnuje přípravě budoucích učitelů pro vyučování matematice, tj. s expertem. Jeho role není zaměřena na poučování učitele, ale na společné získávání zkušeností, které mohou přesvědčení učitele měnit.

Zkušenosti, které jsem v několika posledních letech na tomto poli získala, jsem evidovala, vzájemně porovnávala a částečně analyzovala. *Cílem této studie je popsat a podrobněji analyzovat jednu konkrétní zkušenost z roku 2002/03 a přispět k hledání způsobů jak ovlivnit pedagogické přesvědčení učitelů.*

17.2 Přehled současného stavu

V současné době probíhá ve světové didaktice matematiky mnoho výzkumů týkajících se využití spolupráce učitel – expert pro vzájemné získávání zkušeností, a to vše s cílem zlepšit vyučovací proces v matematice a najít optimální způsoby, jak dostat výsledky výzkumu (tj. teoretické poznatky) do praxe. Např. na konferenci CERME 3 byla jedna z dvanácti pracovních skupin zaměřena na toto téma (Hošpesová; Tichá 2003a, Kratochvílová; Swoboda 2003a, Scherer; Steinbring 2003).

V době, kdy jsem zahajovala tento výzkum (jaro 2002), jsem na Pedagogické fakultě UK působila teprve čtvrtým rokem a především jsem se podílela a dodnes podílím na přípravě budoucích učitelů 1. stupně základní školy. Také jsem čtvrtým rokem vedla pedagogickou praxi studentů v rámci vyučování matematice na primárních školách. Výrazně jsem pociťovala, že na jedné straně mám představu (spíše pedagogické přesvědčení) o tom, jak má vyučování matematice vypadat, ale tato představa je založena především na teoretických znalostech, zkušenostech popisovaných staršími kolegy (mnohdy též jen teoretických) a svých zkušenostech z nevelkého počtu experimentů se žáky různého věku. Věděla jsem, že mi chybí praxe,[1] která je nutná k tomu, abych dobře učila didaktiku matematiky. Proto jsem se pokoušela alespoň vyhledávat takové situace, které by mi nahradily praxi. Pocit nedostatku praxe byl ještě umocněn tím, že jsem na škole, kam jsem jednou týdně docházela se studenty na praxi z matematiky, pociťovala bariéru mezi učiteli a mnou. Jakoby mezi námi existovala smlouva: Učitelé na začátku školního roku předvedou jednu vyučovací hodinu, potom umožní studentům bez problémů „odučit" a dají prostor k tomu, aby mohl být udělán (mnou a studenty) rozbor odučené hodiny. Za tuto službu jim budu vděčná, protože budu ráda, že můžu „se studenty přijít, udělat s nimi, co je třeba, a rychle odejít" a nebudu zasahovat do jejich práce. Na druhé straně jsem viděla, že učitelé učí způsobem, který se rozchází s mým konstruktivistickým pedagogickým přesvědčením, ale zároveň jsem věděla, že nemám dostatek zkušeností a autonomie, proto jsem např. váhala pozvat učitele na rozbor hodiny, v níž praktikoval student (měla jsem pocit, že by došlo k prohloubení bariéry – do konfliktu by se dostaly můj konstruktivistický přístup s transmisivním přístupem učitelů). S tímto stavem jsem nebyla spokojená a zároveň jsem byla bezradná, nevěděla jsem, jak situaci řešit. Chtěla jsem, aby mě učitelé vnímali jako kolegyni, pro kterou jsou jejich zkušenosti z praxe velmi užitečné, ale také naopak, aby mě vnímali tak, že učím na jiném typu školy, kde získávám odlišné zkušenosti, které by mohly být užitečné i pro ně. Řešení tohoto problému jsem viděla a dodnes vidím v *přímé spolupráci* s učiteli z této školy.

Na začátku školního roku 2001/02[2] došlo ke změnám ve vedení školy a nová zástupkyně ředitele mě požádala, abych přišla na jejich metodické sdružení a řekla něco k vyučování matematice. Hned po první schůzce jsem pociťovala zlepšení sociálních

[1] Učila jsem tři roky na střední a jeden rok na základní škole, a to jen na částečný úvazek.

[2] Byl to třetí školní rok, kdy jsem docházela do této školy se studenty na praxi.

vztahů. K takovému setkání s učiteli došlo po půl roce ještě jednou. Při této příležitosti jsem vyzvala učitele ke spolupráci. K ní se přihlásily dvě učitelky, z nichž jedna, říkejme jí Klára, začala spolupracovat. Kláře bylo dvacet osm let a učila třetím rokem.

17.3 Metody práce

Věděla jsem sice, že Kláru budu pravidelně navštěvovat v její třídě (3. ročník) v rámci pedagogické praxe studentů, avšak z předchozích zkušeností s ostatními učitelkami podílejícími se na praxi jsem si byla vědoma převahy formální komunikace mezi mnou a učitelkami o výuce studentů. Proto jsem, motivována zkušenostmi M. Hejného, nabídla učitelce, že společně připravíme soutěž pro její žáky. Ta se měla stát zdrojem bohatší komunikace o žácích mezi učitelkou a mnou, než tomu bylo doposud. Na přípravu a realizaci soutěže v Klářině třídě již nestačilo setkávat se ve třídě při praxi studentů, ale vznikla potřeba pravidelných každotýdenních společných schůzek.

17.3.1 Historie soutěže

Idea této soutěže se zrodila v roce 1976, kdy byly o prázdninách organizovány dva tábory (Tábory mladých matematiků), první celoslovenský v Tatranských Mlynčekoch (vedl M. Hejný), druhý východoslovenský ve Spišské Nové Vsi (vedl L. Gavalec). Významnou společnou akcí byly dvě jednodenní vzájemné návštěvy dětí z táborů, kde bylo v průběhu jednoho dne organizováno množství různých sportovních, výtvarných a kulturních soutěží. Matematická soutěž dvou pětičlenných družstev měla však tvrdý soutěživý charakter. Žáci si vzájemně dávali úkoly a řešili je. Východoslovenské děti měly ve svém logu kačátko Mat, které v soutěži dávalo úkoly za jejich družstvo. Děti z tábora v Tatranských Mlynčekoch v reakci na tuto výzvu okamžitě vytvořily vlastní logo – opičku vykukující ze sudu nazvanou Ematika. Sympatické bylo, že tímto rozkladem slova mat-ematika přispěly ke klimatu spolupráce v celé soutěži. Po návratu do třídy v září 1976 děti naléhaly na učitele, aby vytvořil celoroční soutěž, v níž opička Ematika bude každý týden dávat několik úloh pro dobrovolníky. Tuto soutěž pak M. Hejný ve svém experimentálním vyučování vedl až do roku 1989.

17.3.2 Cíle soutěže

Již od svého vzniku má soutěž dva cíle, edukační a výzkumný.

Edukační cíl sleduje motivaci žáků a individuální přístup k žákům. Jestliže se např. ukáže, že nějaký žák v průběhu jednoho týdne vyřeší všechny čtyři zatím otevřené úlohy z kombinatoriky (nebo planimetrie nebo aritmetiky, ...), pak je jasné, že v daném časovém okamžiku je žák výjimečně disponován k rozvoji právě tohoto, tj. kombinatorického (planimetrického, aritmetického, ...) myšlení. Učitel pak může individuální péčí tuto potenci maximálně využít – dát přímo žákovi, respektive na nástěnku další úlohy dané problematiky. Mezi úlohy soutěže je též možné zařadit takové, které by byly propedeutikou tematického celku, který bude v budoucnu probírán, např. půl roku před tematickým celkem „kružnice“, „kruh“, „Ludolfovo číslo“ se na nástěnce může objevit úloha: U deseti různých kruhových objektů změř jejich obvod i průměr a na základě těchto měření odhadni, jaký obvod bude mít kruh, jehož průměr je 1 723 m. Žáci, kteří tuto úlohu řeší, budou výborně připraveni na objevování vzorce pro délku kružnice a k tomuto objevu dospějí pak velice rychle a zcela samostatně.

Výzkumný cíl spočívá především v získávání cenného výzkumného materiálu, který může být využit při mnoha různých konkrétních výzkumech. Materiály jsou dvojího typu: (a) vytvořené žákem (písemná řešení úloh) a (b) vytvořené učitelem (písemně zachycená pozorování učitele o emotivní tenzi řešitele, o sociálním dopadu jednotlivých řešení, predikce úspěšnosti žáků při řešení úloh, hodnocení žákovských řešení a porovnání tohoto hodnocení s predikcí, záznamy o vlastním emočním prožívání učitele a dalších okolnostech týkajících se soutěže, např. názor kolegy vyplývající z diskuse o soutěži).

17.3.3 Moje spolupráce s učitelkou

Charakteristika Kláry

Klára se jevila jako ambiciózní, energická, někdy zbrklá a v jednání neuvážlivá. Byla autonomní víc než běžný učitel. Vždy otevřeně řekla, co si myslí. Její vztah k vedení školy byl spíše negativní, ke kolegům převážně dobrý. Měla pěkný vztah s jednou starší kolegyní, ke které měla důvěru. Přicházela za ní vždy, když potřebovala poradit. Zároveň od ní dostávala podporu v tom, co dělala. Směrem k žákům byla mateřská. Zastávala se dětí, i když někdy to bylo sporné.

Edukační styl Kláry byl transmisivní (viz kap. 1). Výuka byla zaměřena na rychlé a bezpečné zvládnutí základních početních operací, zapamatování si některých pojmů z geometrie, pečlivé rýsování přímek a úseček apod. To je žákovi předáváno, on to přijímá a nacvičuje. Učitel hodnotí jeho výsledky práce, přičemž chyba je jev nežádoucí. Názor učitele je, že žák se vyhne chybě, je-li pilný.

V hodnotovém systému Kláry byla jistá polarita. Na jedné straně popsané oficiální pedagogické hodnoty, na druhé straně hodnoty citové vazby k dětem. Tento rozpor se projevoval např. při hodnocení žáka, kdy jeho chybný, ale pracný postup Klára v duchu oficiálního hodnotového systému zamítla a neudělila mu žádné body. Na druhé straně jí však bylo žáka líto a kdyby nebyl vnější tlak na „objektivní“ hodnocení, byla by ochotná dát mu za takové řešení nějaký bod. Klára si plně uvědomovala oficiální pedagogické hodnoty a když jsme diskutovaly o žákovském řešení, vždy se přikláněla k oficiálnímu stanovisku: chyba je jev nežádoucí. Druhý pól jejího hodnotového systému byl nezvědoměný, dřímal na úrovni nezdůvodněného příznivého počínání směrem k dítěti.

V rozhovorech se zkušenými kolegy o hodnotové polaritě jsem se utvrdila v tom, že se podobná charakteristika vztahuje k většímu počtu učitelů. Jak uvidíme dále, právě tato danost je jedním z nadějných východisek pro ovlivňování pedagogických hodnot učitelů.

Průběh spolupráce

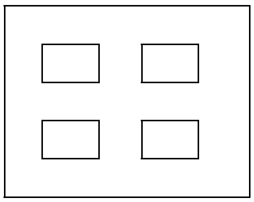
Na konci školního roku 2001/02 jsem se sešla s Klárou a její kolegyní, která se též přihlásila ke spolupráci. V průběhu asi hodinového setkání jsem stručně popsala soutěž (viz oddíl 17.3.1 a 17.3.2) a požádala je, aby v průběhu prázdnin přemýšlely o pravidlech soutěže ve svých třídách a aby začaly z různých zdrojů vybírat matematické úlohy i netradičního charakteru. Sama jsem navrhla, že by to mohly být úlohy např. z kombinatoriky nebo z prostředí netradiční aritmetiky triád (viz kap. 25). Ve druhé polovině září to byla pouze Klára, která se přihlásila o spolupráci. Její kolegyně se později omluvila, že se zatím z pracovních a osobních důvodů nemůže na spolupráci podílet.

Domnívám se, že důvod, proč se Klára přihlásila ke spolupráci, spočíval v její ambicióznosti, ve snaze se předvést před kolegy i vedením školy a získat podporu pro své počínání od autority – vyučující z Pedagogické fakulty. Později jsem se od Kláry dozvěděla, že její vysokoškolská příprava v oblasti matematiky byla zaměřena na vyšší matematiku (např. grupy a derivace), tj. na obsah, kterému nerozuměla a učila se jej nazpaměť. Moje přednáška na metodickém sdružení byla pro Kláru pravděpodobně překvapivým zážitkem (o matematice se zde mluvilo jako o vhodném prostředí pro rozvoj kognitivních a metakognitivních schopností žáků), který byl v rozporu s jejími dříve nabytými zkušenostmi jako posluchačky pedagogické fakulty. Tento její rozpor a zároveň překvapení mohlo být též důvodem ke spolupráci.

První pracovní setkání v začínajícím školním roce se uskutečnilo 20. září 2002. Naším prvním úkolem bylo vytvořit pravidla soutěže a připravit její první kolo.

Pravidla soutěže (původně vytvořená M. Hejným) byla domluvena a poté realizována následujícím způsobem: Na nástěnce ve třídě 3. A byl orámován prostor, který byl vyhrazen soutěži. Děti si soutěž nazvaly Matematika kolem nás. Každý týden bylo na nástěnku vyvěšováno pět úloh, které tvořily jedno kolo soutěže. Úlohy byly seřazeny od nejlehčí po nejtěžší s počtem bodů 2, 4, 6, 8, 10. Úlohy řešili pouze dobrovolníci a svá písemná řešení dávali učitelce. Klára tato řešení opravila, případně okomentovala a vrátila zpátky řešiteli. Ten pak odevzdal další verzi svého řešení, ale i s původním komentovaným řešením. Proces se měl opakovat tak dlouho, až Klára žákovo řešení akceptovala. Úlohy zůstávaly na nástěnce i druhý týden, ale řešení žáků byla hodnocena polovičním počtem bodů. Za každé řešení (i neúplné) přidělovala Klára žákovi body. Při bodování žákovské práce měl být důraz kladen především na objevnost a hloubku myšlenky. Vždy po měsíci byla vyvěšena tabulka s přehledem počtu bodů získaných jednotlivými žáky.

Klára na první setkání přinesla hodně úloh (vybraných z používaných učebnic Blažková aj. 1995), byly to převážně úlohy na procvičování písemných a paměťových algoritmů, ale i slovní úlohy. Avšak ani jednu z těch, které jsem přinesla já, Klára do souboru nezařadila. Odmítnuta byla tato kombinatorická úloha: Na obr. 17.1 je plánek města. Najdi všechny různé cesty z levého dolního rohu do pravého horního rohu, jestliže můžeš chodit pouze nahoru nebo doprava.

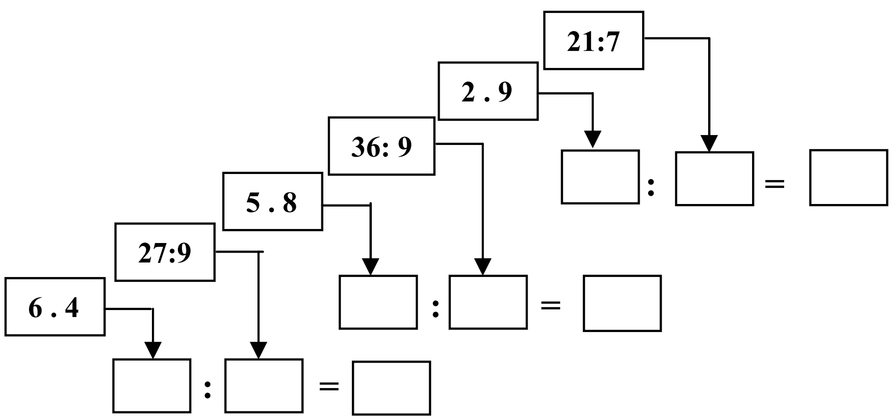


Obr. 17.1

Další mnou navrhované úlohy se týkaly převodů jednotek v netradiční formě. Například: Kolik hodin má jedna kilominuta? nebo Kolik vteřin má centihodina? Moje snaha ukázat Kláře smysl těchto úloh nebyla vyslyšena. Klára mně vytkla, že vybírám těžké úlohy, a odmítla je zařadit.

Do prvního kola soutěže Klára vybrala pět úloh. Ty pojmenovala a seřadila od nejjednodušší po nejnáročnější a přidělila jim body.

- První úloha (2 body): Honzík pospíchá na vlak. Jde rychlostí 6 km za hodinu. Kolik km ujde za 3 hodiny? Za jak dlouho by došel k tetě, která bydlí 36 km daleko?
- Druhá úloha (4 body): Viz obr. 17.2.



Obr. 17.2

- Třetí úloha (6 bodů): **Eva pletla šálu. V neděli upletla 3 cm.**

V pondělí upletla 5krát více než v neděli ....

V úterý upletla 3krát méně než v pondělí ....

Ve středu upletla 2krát více než v úterý ....

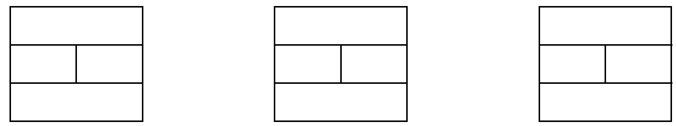
Ve čtvrtek upletla stejně jako ve středu ....

V pátek upletla 9krát více než v úterý ....

V sobotu upletla 4krát více než v neděli ....

V neděli dala mamince k svátku šálu dlouhou .... cm.

- Čtvrtá úloha (8 bodů): V domečku spolu bydlí dvě čísla. Po čase se na půdě zabydlil jejich součin a ve sklepě jejich podíl. Součin a podíl si postavily vlastní dům, tak to šlo dál. Počítej a zabydli co nejvíce domů. (Pod zadáním bylo vyznačeno dvanáct domečků, viz obr. 17.3 – ukázka tří domečků.)



Obr. 17.3

- Pátá úloha (10 bodů): Dosaď do rovnic číslice 1 až 9 (každou pouze jednou) tak, aby rovnice byly správné. (a) $(? \cdot ?) : ? = 4$; (b) $(? - ?) \cdot ? = 4$; (c) $? - (? + ?) = 4$.

Z uvedených úloh je patrné, že Klára spatřovala náročnost úlohy v počtu dílčích úloh a zároveň v tom, zda je zadání formulováno slovně nebo nikoliv. Například první úloha je sice slovní, ale má pouze dvě dílčí úlohy, proto byla považována za jednodušší než druhá úloha, která obsahuje devět dílčích úloh početního charakteru. Třetí úloha má pouze sedm dílčích úloh, ale jsou formulovány ve slovních úlohách, proto byla považována za těžší. U čtvrté úlohy se Klára domnívala, že pro žáky bude těžké dodržet pravidlo vyplňování domečků a že budou chybovat v operacích s velkými čísly. Proto se domnívala, že tato úloha je těžší než předcházející, byť slovní úlohy. Pátou úlohu považovala za nejtěžší, protože žáci budou muset použít metodu pokus – omyl, a to pro ně není obvyklé.

Požádala jsem Kláru, aby se pokusila předpovědět, jak budou její žáci na úlohy reagovat. Tuto výzvu Klára přijala pozitivně. Zajímalo ji, jak se její předpověď bude shodovat se skutečností, a hned začala o dětech nahlas uvažovat. Předpovídala a stručně popisovala žákovské strategie řešení u jednotlivých úloh.

<u>Komentář 1.</u> Různost názorů na zařazení netradičních úloh do soutěže a Klářino odmítání těchto úloh poukazuje na její víru v tento cíl vyučování matematice na 1. stupni: Žák má zvládnout základní početní operace, zapamatovat si pojmy z geometrie (předepsané osnovami) a pečlivě rýsovat. Na druhé straně Klára viděla, že z mé strany nebyl vytvářen žádný nátlak, aby přijala nabízené úlohy. Záleželo na jejím vlastním rozhodnutí, které úlohy do soutěže zařadí.

<u>Komentář 2.</u> Požadavek napsat předpověď žákovských reakcí učitelé dosti často považují za past. Obávají se, že by to mohlo být použito proti nim jako důkaz, že neznají své žáky, a za to by mohli být kritizováni. Klára však od prvního okamžiku tušila, že toto je cesta k sebepoznání, která jí může pomoci ke zvýšení kompetence poznávat žáky.

Náplní našich dalších setkání, které se uskutečňovaly každý týden na dvě až tři hodiny, byly nejen již popsané aktivity (výběr úloh do soutěže, což bylo převážně zajišťováno Klárou, přiřazení bodů k úlohám, popis očekávaných žákovských strategií), ale též předpověď úspěšnosti žáků při řešení jednotlivých úloh. K tomuto účelu byla v průběhu dalších setkání vytvořena tabulka (její první dva řádky zobrazuje tab. 17.1), do které Klára zapisovala své předpovědi, jak a zda vůbec budou žáci úlohy řešit. Ty pak porovnávala se skutečností.

	Jméno	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**Aa**	**Ab**	**Ac**	**A?**	**N**	$\emptyset$	**?**
1.	Adam	Ab,c	N	?	$\emptyset$	N	0	1	1	0	2	1	1
...	...												

Tab. 17.1

Vysvětlivky: A – žák bude řešit úlohu (Aa – úplně vyřeší úlohu, Ab – částečně vyřeší úlohu, Ac – objeví něco nového, A? – bude řešit úlohu, ale nevím jak), N – žák úlohu nevyřeší (ztroskotá), $\emptyset$ – žák nebude úlohu řešit (nebude chtít ji řešit), ? – nevím, zda žák bude řešit úlohu. V první části tabulky je u každé úlohy 1–5 uvedena předpověď a v druhé části je pod každou z uvedených předpovědí zaznamenána jejich předpovídaná četnost výskytu u sledovaného žáka.

Dále na moji výzvu Klára na setkání přinášela řešení, která považovala za chybná, nebo řešení, u kterých si nebyla jista hodnocením (tj. kolik bodů může žákovi dát). Na přinesených žákovských řešeních bylo patrné, že Klára hodnotila tradičně, tedy je-li ve výsledku početní operace chyba, je nutné žákovi odečíst body. Hodnocením si nebyla jistá v případech, kdy by sice ona žákovi přidělila body, ale domnívala se, že to budu považovat za nepřípustné po matematické stránce. Například žák udělal pouze numerickou chybu ve výpočtu, jinak strategie řešení úlohy byla správná. Některá žákovská řešení byla pod mým vedením (mám s touto činností zkušenosti) podrobena analýze. Chtěla jsem, aby sama učitelka získala vhled do žákovského řešení, tudíž jsem nevysvětlovala, ale

- zamýšlela se nebo předstírala zamýšlení se nad daným řešením a s pochybnostmi přijímala ostré hodnocení Kláry v roli obhájce žáka, jehož výkon je i vysvědčením pro ni samotnou,
- žádala jsem Kláru, aby se zamyslela nad tím, proč žák postupoval tak, jak postupoval.

17.4 Výsledky

Po prvních pěti kolech soutěže (tj. po pěti týdnech) byla Klára překvapená, jak se u některých žáků výrazně lišila realita od její předpovědi toho, jak budou žáci úlohy řešit. Např. Linda, výborná žákyně, která obvykle vše plnila bezchybně, si úlohy brala, ale nenosila je zpátky. Získala zatím pouze jeden bod. Naopak Michaela, Albánka, která ještě měla jazykové potíže a nebyla průbojná, odevzdala všechny úlohy z pěti kol. Martin, hyperaktivní žák, který často vyrušoval a práci, která nebyla na známku, obvykle nedělal, úlohy ze soutěže řešil intenzivně.

Klářina evidence její odlišné předpovědi způsobila, že postupně měnila názor na žáky a začala si uvědomovat slabá místa svého etiketování (viz kap. 3).

Klářina potřeba vzájemné diskuse se mnou o výběru úloh do soutěže a jejich řešeních, o žákovských řešeních a jejich bodovém hodnocení i o záležitostech odehrávajících se mimo soutěž, např. o problémech chování žáků nebo o problémech při komunikaci s rodiči postupně narůstala. V rámci těchto diskusí byly u Kláry evidovány změny, kterým se budeme věnovat v dalším textu.

17.4.1 Ilustrace změny hodnocení konkrétního žákova písemného projevu učitelem

Již po prvních dvou kolech soutěže mi Klára při nejbližší příležitosti, což bylo při praxi studentů, ukázala jedno žákovské, u něhož nevěděla, kolika body by měla hodnotit žákovu práci. Důvodem bylo, jak sama řekla, že výsledek úlohy nebyl správný, ale strategie řešení byla správná. Žák řešil následující úlohu:

Maminka koupila osm makových koláčků po třech korunách. Potom si všimla, že mají i tvarohové koláčky po dvou korunách. Kolik tvarohových koláčků mohla koupit za částku, kterou utratila za makové koláčky?

Žák zapsal: $8 \cdot 2 = 16$, $16 : 3 = 5(1)$ Maminka mohla koupit 5 tvarohových koláčků.

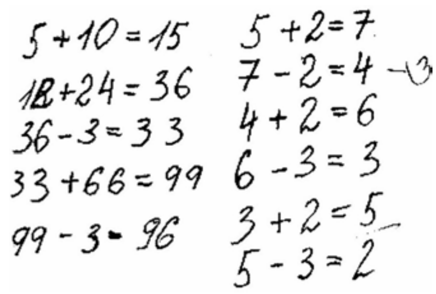
Odpověděla jsem jí, aby dala tolik bodů, kolik může, analyzovala jsem žákovské řešení a poukázala na ty části, kde žák vynaložil úsilí, aby úlohu vyřešil (použil čísla uvedená v úloze, strategie řešení je správná), i když výsledek měl chybně, protože se přehlédl v řádku při čtení zadání.

Nakonec jsem Kláru požádala, aby byla pozitivní, protože žákova intelektuální práce je vždy hodnotná. O dva týdny později jsme společně analyzovaly další žákovské řešení (viz obr. 17.4, s. 308), ve kterém sama Klára objevila převážnou většinu žákovských myšlenek.

Původní hodnocení Kláry bylo takové, že: Alžběta u první posloupnosti nenašla, jakým způsobem byla tvořena posloupnost, a u druhé by to bývala našla, ale udělala chybu.

Alžbětino řešení úlohy:
Jakým způsobem byla utvořena
tato posloupnost čísel?

5	15	12	36	33	99	96
5	7	4	6	3	5	2



Obr. 17.4

Já „Prosím Tě, řekni mi, jak to ta holka počítala.“
Klára „Alžběta začala hledat vztah mezi 5 a 15.“
Já „Našla ho?“
Klára „Našla, ale není to ten správný, a pak hledala vztah mezi 12 a 36.“
Já „Podívej se na tu 12.“
Klára „Ona tam něco přepisovala. Vlastně začínala s 15 a protože jí to nevyšlo s přičtením desítky jako v předchozím případě, vzala 12 a další člen 36.“
Já „Výborně.“
Klára „Ale pak vzala znovu 36 jako předtím tu 15 a odečetla 3, dostala 33, a to neuměla jinak než zase přičíst 66. Od 99 zase odečetla 3.“
Já „Našla Alžběta vztahy mezi čísly?“
Klára „Našla, ale vlastně jenom některé nejsou podle mých představ.“
Já „A co ta druhá posloupnost?“
Klára „Tam to vlastně našla, akorát udělala numerickou chybu.“
Já „Jak ta numerická chyba vznikla?“
Klára „Asi přepisem z prvního řádku.“
Já „Alžběta měla radost, že to tak hezky objevila, a to způsobilo nepozornost, která se projevila v této chybě.“
Klára „Proč jsem jí za to dala nula bodů? Vždyť toho dost objevila.“

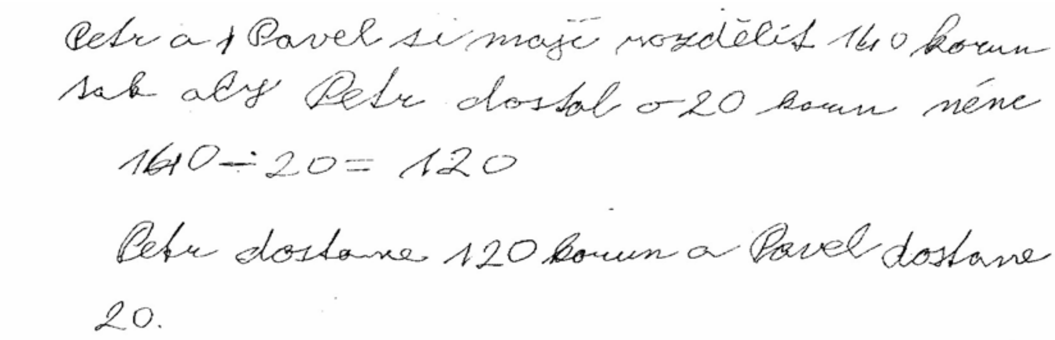
Klára sama byla překvapena, jak mohla dát této žákyni nula bodů ze šesti možných.

17.4.2 Ilustrace změny přístupu učitele k písemnému projevu žáka

Při analýze Alžbětina řešení Klára získala zkušenost, která v ní hluboce rezonovala a vyústila do snahy o strategickou změnu. S tím se mi svěřila a sama se rozhodla, že projde všechna žákovská řešení od prvního kola, aby zjistila, v jaké míře žákům ublížila. Místo odmítání chybného řešení začala hledat v každém řešitelském procesu dobré myšlenky, ty hodnotila pozitivně a na chybné myšlenky žáka upozorňovala.

Na jedno z dalších společných setkání Klára přinesla nová žákovská řešení, která jsem si půjčila. U všech bylo patrné, že učitelka nehodnotila pouze výsledek, ale celý řešitelský proces žáka. Např. před touto změnou by Bářino řešení (viz obr. 17.5) hodnotila nula body, po této změně dala učitelka žákyni jeden bod.

Bářino řešení následující úlohy:
Petr a Pavel si mají rozdělit 140 korun tak, aby Petr dostal o 20 korun méně než Pavel. Kolik korun dostane Petr, kolik Pavel?


Petr a Pavel si mají rozdělit 140 korun
tak aby Petr dostal o 20 korun néne
140 − 20 = 120
Petr dostane 120 korun a Pavel dostane
20.

Obr. 17.5

Když jsem se později Kláry zeptala, proč dala Báře jeden bod ze šesti možných, Klára řekla, že i když úloha není správně vyřešena, Bára do ní vložila hodně práce. Bára si musela úlohu přečíst, zapsat, pokusila se ji vyřešit a zapsala odpověď. Bohužel časová omezenost spolupráce mi neumožňovala společně s učitelkou analyzovat toto řešení. Analýza by ukázala, jak žákyně postupovala, a umožnila by najít vhodný reedukační postup. Položila bych Kláře následující otázky: Proč se v řešení Báry objevilo slovo „néne“? Proč nejdříve napsala 160 a pak toto číslo přepisuje na 140? Jak budeš na Bářino řešení reagovat?

Tradiční hodnocení je dominantně zaměřeno na polaritu dobře – chybně. Žák vyřeší úlohu a učitel ohodnotí jeho řešení, čímž obvykle končí práce s úlohou. Nevýhodou takového hodnocení je, že neorientuje žáka k získání poučení z chyby. Často je řešitelský proces souborem dílčích kroků, z nichž jen jeden je chybný (viz žákovské řešení úlohy o koláčcích), ale celý proces je učitelem zamítnut. Žák nezná lokalitu chyby, a proto může do budoucna volit učení se zpaměti.

17.4.3 Další evidované změny

Po pěti měsících spolupráce byla u Kláry patrná nejen změna hodnocení žákovské práce, ale i změna ve výběru úloh. Ty, které jsem dříve vybírala já, často zamítala, protože se domnívala, že jsou těžké. V této době je již sama zařazovala do soutěže (viz kombinatorická úloha v oddíle 17.3.3). Dva měsíce před koncem školního roku přišla sama s myšlenkou, že by soutěž ráda změnila, ale tak, aby se více dozvěděla o svých žácích. Chtěla, aby žáci měli možnost získávat stejné množství bodů dvojím způsobem, jak dlouhodobější prací při výpočetních operacích (písemné algoritmy), tak kratší prací, ale intelektuálně náročnější např. při řešení slovních úloh o věku nebo z kombinatoriky. A tak byla připravena nová forma soutěže, která byla bohužel aplikována pouze v průběhu posledního měsíce školního roku.

Na rozdíl od počátku spolupráce, kdy Klára pouze přijímala to, jak bude soutěž vedena, na konci spolupráce zasahovala do soutěže a hledala její kvalitnější formu. Není pochyb o tom, že Klára alespoň částečně změnila svůj přístup k vyučování. Ale i já sama jsem získala mnoho zkušeností ze spolupráce tohoto druhu, kterou jsem zažila poprvé. Je škoda, že spolupráce nemohla pokračovat. Na konci školního roku Klára přijala nabídku nového zaměstnání, které bylo pro ni finančně výhodnější než ve stávajícím případě.

17.5 Výhledy

Z uvedené ilustrace je patrné, že ten učitel, který má o takovou spolupráci zájem, který má energii, sebevědomí a dobrý vztah k dětem, má potencialitu sebezlepšování.

Ve spolupráci bylo dosaženo toho, že učitelka akceptuje intelektuální rozvoj dítěte; dříve tomu tak nebylo. Učitelka je schopna evidovat a hodnotit intelektuální práci žáka, čímž ho podporuje. Tato schopnost je pozitivní především ve směru k nadaným žákům, kteří nejsou penalizováni za nepodstatné chyby. Ovšem pro intelektuálně slabého žáka tento přístup nestačí, protože pro něj je úloha často náročná. Učitel řeší situaci tak, že mu zadá algoritmickou úlohu nevyžadující intelektuální práci. Proto kdyby spolupráce pokračovala, hledala bych cestu, jak u Kláry zvědomit, že i pro slabého žáka se dá vymyslet vhodná úloha. Měla by to být taková úloha, která po žákovi vyžaduje myšlení na jeho odpovídající úrovni. Mimoto bych motivovala Kláru, aby i ona začala na sobě po matematické stránce pracovat, protože to by nejen přispělo k jejímu intelektuálnímu rozvoji, ale i zkvalitnilo její pohled na žákovu práci.

Na intenzitu mé spolupráce s Klárou dominantně působilo to, co Klára zažila ve třídě, a následná společná analýza jejích zážitků. Zkušenosti, které jsem při této spolupráci získala, využívám nyní v podobné spolupráci, ale s jinou učitelkou. V nové spolupráci jsem získala odvahu zasahovat do těch situací, v nichž se rozchází mé pedagogické přesvědčení s přesvědčením učitele. Již se neobávám, že by takový zásah ovlivnil sociální vazby s učitelkou. V současné době je má spolupráce založena na vzájemných hospitacích učitelky a mne při výuce matematiky v učitelčině třídě, kdy vždy vyučující i hospitující hodnotí a reflektuje to, co se odehrálo ve vyučovací hodině. Poté se scházíme, abychom porovnaly a diskutovaly rozdíly v názorech na situaci. Tím se vzájemně obohacujeme, což vyvolává určité změny, u mne hlavně v oblasti interakčních kompetencí a u učitelky navíc i v oblasti hodnotového systému směrem k tvořivému přístupu k matematice i vyučování matematice. Kladu si otázku: Které jevy zmíněné interakce nejvíce přispívají ke změnám znalostí, schopností, názorů a postojů mne a učitelky v oblasti komunikačních kompetencí a pedagogických hodnot?

Kapitola 18

Tvorba diagnostických úloh z matematiky

Jaroslav Zhouf

18.1 Formulace problému a metody práce

Řešení úloh tvoří základ matematiky základní a střední školy (Frank; Lester 1994). Učitelova kompetence tvořit úlohy za různým účelem a na různé úrovni obtížnosti je podle mého názoru jednou z nejdůležitějších kompetencí, kterou je nutno systematicky rozvíjet. V průběhu své praxe bude učitel nejednou postaven před úkol vytvořit úlohy do písemné zkoušky, do přijímací zkoušky, případně do nějaké matematické soutěže. Konečně bude-li chtít ve větší míře uplatnit konstruktivistické přístupy (viz kap. 1), bude muset tvořit (gradované) série úloh vedoucích ke konstrukci určitého matematického poznatku.

Pokud je mi známo, žádné výzkumy, které by se zabývaly touto kompetencí, provedeny nebyly.[1] Spíše se jedná o práce zkoumající, jak přivést žáky k formulování vlastních otázek a úloh (*problem posing*). Protože mám dlouholeté zkušenosti s tvorbou úloh, položil jsem si otázku, jejíž řešení bude náplní této kapitoly.

Jakým způsobem lze popsat učitelův proces tvorby matematických úloh?

Takto formulovaná otázka je velice široká, protože matematické úlohy mohou být tvořeny za různým účelem. Proto se zdá vhodné zaměřit se pouze na jednu oblast a tu prozkoumat detailněji. Speciálně se tedy budu zabývat tvorbou úloh za účelem *diagnostiky matematických znalostí žáků a studentů*. Podobně bych se mohl věnovat tvorbě gradované

[1] Výjimkou je (Crespo 1994).

série úloh za účelem zavedení nějakého matematického pojmu nebo jeho procvičení, viz např. kap. 12 a 16. To však nebude obsahem tohoto příspěvku.

Celý proces, který lze v podstatě popsat jako cestu *od intuitivního přístupu* k tvorbě úloh *ke zvědomělému pohledu*, popíšu formou *sebereflexe*.[2] Při tom budu čerpat z detailních poznámek, které si vedu ke každé maturitní zkoušce, kterou jsem vytvořil. Úvahy budou ilustrovány zejména úlohami z maturitních zkoušek.[3]

V závěru kapitoly uvedu některé praktické aplikace výsledků ve výuce budoucích učitelů matematiky.

18.2 Tvorba diagnostických úloh

V roce 1992 začaly připravovat školy s třídami zaměřenými na výuku matematiky nebo na výuku matematiky a fyziky písemné maturitní zkoušky samy. Na gymnáziu Zborovská v Praze jsem byl tímto úkolem pověřen já. V témže roce jsem v podstatě spontánně, jen na základě svých dosavadních zkušeností s výukou nadaných studentů, vytvořil první požadovanou šestici úloh. Abych získal zpětnou vazbu, provedl jsem analýzu studentských řešení, čímž jsem si vytvořil první zvědomělé poznatky o tvorbě úloh. Přípravou dalších úloh a analýzou žákovských řešení jsem si postupně vytvářel na celou práci ucelenější pohled, což vyústilo v sestavení souboru zásad, které nadále vědomě používám při tvorbě úloh pro písemnou maturitní zkoušku. Můj vývoj tedy přecházel od intuitivního přístupu ke zvědomělému pohledu na svou práci.

Motivací ke stanovení zásad tvorby úloh písemných maturitních zkoušek bylo několik. Hlavně to byl můj vlastní pohled na podobu takových zkoušek. Dále to byly názory samotných žáků, řešitelů zkoušek a kolegů, učitelů matematiky. Inspiraci jsem dále čerpal z úloh podobných zkoušek v jiných zemích, např. v Bavorsku, v St. Peterburgu (Vogeli 1997, s. 119), na Slovensku (MONITOR 2000), v Rakousku, Dánsku, Francii, Sasku, Anglii, Irsku, Lucembursku, Řecku (viz Prove di esame . . . 1999).

18.2.1 Zásady tvorby úloh písemných maturitních zkoušek

Analýzy žákovských řešení mnou vytvořených úloh i konfrontace mých očekávání, jak budou studenti na úlohy reagovat, s realitou vedla k vytvoření několika zásad, které jsem začal používat při přípravě všech dalších písemných maturitních zkoušek. Zásady nejdříve stručně uvedu a pak ilustruji vlastními úlohami.

1. členění většiny úloh na řadu dílčích úkolů vyžadujících lokální strategii řešení, ale také zařazení aspoň jedné úlohy vyžadující globální strategií řešení,

[2] Proto je tato kapitola psána v první osobě čísla jednotného.

[3] Níže uvedený proces je blíže popsán v mé doktorské práci (Zhouf 2001).

2. nezávislost jednotlivých lokálních strategií v úlohách s dílčími úkoly,
3. propojení více oblastí matematiky v jedné úloze,
4. zastoupení co nejširšího spektra matematických témat v celé písemné práci a jejich nepřekrývání,
5. používání zobecňování, experimentování, řetězení jednotlivých myšlenkových kroků,
6. zavádění nových pojmů a propojování se známými pojmy,
7. možnost řešení úloh více způsoby,
8. přiměřená míra složitosti úprav pro žáky i opravovatele,
9. „čitelnost" textu a jeho jednoznačnost (dodržování „matematické kultury"),
10. zajímavost a „elegantnost" jednotlivých úloh i celé písemné zkoušky.

ad 1. Úlohy v písemné maturitní zkoušce mají být přiměřeně náročné a rozsáhlé. Bývá zvykem u úloh položit na závěr jedinou otázku. Řešení ale vyžaduje lineární postup, kdy je nutné vyřešit řadu pomocných úkolů. Rozčlenění jedné úlohy na několik dílčích problémů usnadňuje žákovi orientaci v řešení; dílčí úkoly jej směrují k vyřešení celého problému. Navíc některé mezivýsledky řešení jsou také velice zajímavé a bez upozornění na ně se jejich hodnota neprojeví.

Někdy ale může přílišné rozmělnění úlohy na dílčí úkoly znamenat řešení jen těch nejelementárnějších problémů a může až příliš navádět žáka k řešení. (Například při důkazu iracionality druhé odmocniny ze dvou bychom mohli nejprve předložit dílčí úkol dokázat, že když je nějaké číslo racionální, je i jeho druhá mocnina racionální, a pak předložit úkol dokázat, že když je druhá mocnina přirozeného čísla sudá, je sudé i číslo samo.) Proto je naopak vhodné, aby se v každé písemné práci objevila aspoň jedna úloha s jednou nebo jen dvěma složitějšími otázkami, aby se projevily schopnosti žáků řešit i náročnější úlohy.

Souhrnně mohu říci, že se od řešitele žádá, aby byl schopen vytvořit *globální strategii* řešení úloh druhého typu. Naopak u úloh prvního typu je globální strategie dána sledem otázek a od řešitele se vyžadují jen *lokální strategie* pro každý jednotlivý úkol. Zdá se, že tato zásada je složena ze dvou polaritních zásad, podle mého názoru se však jedná o zásady doplňkové.

Jako ukázka úloh s řadou dílčích úkolů může sloužit téměř každá úloha písemné maturitní zkoušky mnou vytvořená (viz úlohy v dalších oddílech).

Ilustrací úloh s jedinou otázkou je úloha 1 z roku 1998.

V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$x + yz = 2$$
$$y + zx = 2$$
$$z + xy = 2$$

ad 2. Otázky v úloze by měly být koncipovány nezávisle na sobě. Zamezí se tím zablokování řešení, jestliže žák neuspěje v prvních krocích. Pokud na sebe přesto otázky navazují, měl by se v nich prozradit výsledek, aby bylo možné se o něj opřít při řešení následujících úkolů. Např. místo úkolu „Najděte průsečík přímek…“ by měl úkol znít „Dokažte, že průsečíkem přímek je bod…“. Tato zásada se v mnou připravovaných úlohách začíná objevovat až později. Vyplynula z analýzy výsledků úloh formulovaných prvním nebo naopak druhým uvedeným způsobem. Na této situaci je velice dobře patrný proces postupného přechodu od intuitivního k zvědomělému přístupu k tvorbě úloh.

Ukázkou úloh s řadou na sobě nezávislých úkolů je úloha 3b z roku 1999.

(a) Sestrojte grafy funkcí

$$f\colon y = \sqrt{3-x}$$
$$g\colon y = \sqrt{x+1}$$

v jedné soustavě souřadnic a na jejich základě sestrojte odhadem graf funkce

$$h\colon y = f(x) - g(x).$$

(b) Pomocí diferenciálního počtu vyšetřete průběh funkce $y = h(x)$.

(c) Řešte v oboru reálných čísel nerovnici

$$h(x) > 1.$$

ad 3. Ve škole se většinou řeší úlohy, které procvičují a ověřují jednu partii matematiky. Děje se tak proto, že úloha je zadávána v průběhu a bezprostředně po výkladu onoho tématu. S úlohami, které by propojovaly více oblastí matematiky, se žák setká zřídka. Proto si často ani neuvědomí souvislosti jednotlivých partií. Typickým příkladem je chápání grafu kvadratické funkce a paraboly jako kuželosečky jako dvou zcela odlišných pojmů, protože každý byl probírán v jinou dobu a v jiném kontextu a na souvislost nebyl kladen důraz. A právě globální úlohy písemné maturitní zkoušky mají prověřit efektivitu tohoto přístupu. Je velice přínosné předložit dokonce takové úlohy, které vytvářejí most mezi zdánlivě nesouvisejícími partiemi učiva.

Ukázkou úloh, které obsahují několik dílčích úkolů z různých, zdánlivě nesouvisejících partií matematiky, je úloha 4a z roku 1994.

Uvažujme číslo $C = \underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{5\ldots5}_{n-1}6$, *kde* n *je jisté přirozené číslo,* $n > 1$. *Označme* M *množinu, jejímiž prvky jsou všechna různá čísla, která vzniknou záměnou cifer čísla* C. *Dále označme jevy:* A_2, A_4, A_5 *znamená, že náhodně vybrané číslo z* M *je dělitelné* 2, 4, 5. *Označme* $P(A_2)$, $P(A_4)$, $P(A_5)$ *pravděpodobnosti těchto jevů.*

(a) Rozhodněte, zda dvojice jevů A_2, A_4 *a* A_2, A_5 *a* A_4, A_5 *jsou závislé.*

(b) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_5)$. *Její existenci a hodnotu dokažte též podle definice limity.*

(c) Určete dvě poslední cifry zprava čísla C *zapsaného v osmičkové číselné soustavě.*

ad 4. Rozčlenění jednotlivých úloh na řadu dílčích problémů, a pokud možno ještě z různých partií, dovoluje pokrýt více oblastí matematiky. Je tak možné, aby se objevila problematika množin, výroků, binárních relací a operací, statistiky, množinového pojetí pravděpodobnosti, teorie grafů, dalších planimetrických a stereometrických pojmů (např. mocnost bodu ke kružnici, podobnost, skládání zobrazení, Eulerova věta o mnohostěnech atd.), dalších pojmů z oboru komplexních čísel (přímka a kružnice, shodnosti), pojetí Riemannova integrálu, matic, determinantů a dalších, které se jinak objevují v úlohách velice zřídka.

Ukázkou uvedení méně frekventovaných partií matematiky do písemné zkoušky je úloha 4b z roku 1998.

(a) Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

pro $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Uvažujme relaci

$$W = \{[n, x] \in \{1, 2, 3, 4\} \times \mathbf{R}; \cos^n x - \sin^n x = 1\}.$$

Rozhodněte, zda W *je zobrazení z* $\{1, 2, 3, 4\}$ *do* $\mathbf{R}$. *Je inverzní relace* W^{-1} *k* W *zobrazení z* $\mathbf{R}$ *do* $\{1, 2, 3, 4\}$*? Zakreslete kartézský graf relace* W^{-1}.

ad 5. Písemná maturitní zkouška nemá pouze ověřovat znalosti a dovednosti žáků získané při výuce, má také odhalovat jejich matematické schopnosti. Mohou se v ní tedy objevit takové úkoly, které nebyly explicite ve škole řešeny. Při jejich řešení má žák prokázat určitou schopnost zobecňování, experimentování, řetězení jednotlivých myšlenkových kroků atd.

Jako ukázka použití zobecňování slouží úloha 4b z roku 1993:

Pro každé přirozené číslo n *definujme posloupnosti*

$$s_n = x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,$$
$$p_n = x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \cdots \cdot x^n,$$

kde komplexní číslo $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(a) Dokažte, že posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je periodická s periodou 8 a posloupnost $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ je periodická s periodou 16, tj. že pro každé n platí $s_{n+8} = s_n$ a $p_{n+16} = = p_n$.

(b) Vyjádřete hodnoty s_{1993} a p_{1993} v algebraickém tvaru.

(c) Sestavte algebraickou rovnici co možná nejmenšího stupně s reálnými koeficienty, jejímiž kořeny jsou čísla s_{1993} a p_{1993}.

ad 6. Maturitní zkouška nemusí jenom prověřovat, může přinášet i poučení, např. ve formě nových pojmů, které jsou vysvětleny v zadání úlohy, a pak je na ně položena otázka. Tyto úlohy vedou k myšlence, kterou žáci zřejmě neznají, takže úlohy mohou být propedeutikou myšlenky nebo zrodem nového objevu. Je ale jasné, že zavádění nových komplikovanějších pojmů je omezené požadavkem krátkého a přehledného textu a časovým rozpětím řešení.

Ukázkou zavádění nových pojmů do písemné maturitní práce je úloha 4b z roku 1997, kde novým pojmem je tzv. heronovský trojúhelník:

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran. Heronovský trojúhelník je trojúhelník, jehož strany mají celočíselné délky a jehož obsah je celočíselný.

(a) Dokažte, že každý pythagorejský trojúhelník je heronovský.

(b) Vyslovte obrácenou větu k větě v bodu (a) a negaci této obrácené věty. Rozhodněte, která z nich platí.

ad 7. Tuto zásadu není třeba nijak podrobně komentovat. S počtem různých řešitelských postupů se zvětšuje pravděpodobnost, že žák úlohu vyřeší. Téměř každá úloha v mnou vytvořených písemných maturitních zkouškách je řešitelná více způsoby.

ad 8. Vedle hlavního významu prověřit žákovy schopnosti řešit složitější matematické problémy je dalším účelem písemné maturitní zkoušky prověřit žákovy dovednosti v užívání matematického kalkulu. Není ale účelné zadávat úlohy se zdlouhavými úpravami algebraických výrazů, s mnoha desetinnými čísly ve výpočtech, se složitými geometrickými konstrukcemi, s nepřehlednými náčrty atd. Pomůže to jak žákovi, aby se nezalekl složitých úprav a úvah, tak učiteli, aby se neutápěl ve složitých opravách a nepřehlednosti myšlenkových postupů žáků. Každá úloha, kterou jsem vytvořil, tuto zásadu splňuje. Ale přitom se vždy snažím zařadit úlohu, kde se objeví např. nějaké iracionální číslo, aby si žáci uvědomili, že v reálném životě se setkají většinou právě s těmi „ošklivými“ čísly.

ad 9. Velmi důležité je vytvářet v průběhu celého výukového procesu „matematickou kulturu“, např. v přehlednosti a jednoznačnosti myšlenek učitelů i žáků, v přehlednosti a jednoznačnosti textu i řešení úloh, v dodržování dohodnutých pravidel v ústním i písemném vyjadřování atd. Písemná maturitní zkouška je prostředím, kde by žáci měli mít možnost nabytou kulturu projevit. Požadujeme-li ji od žáků, musíme ji v nich evokovat formou precizně připravených úloh podle zmíněných pravidel matematické kultury.

ad 10. Má-li úloha žáky zaujmout, musí být pro ně nová a alespoň v několika detailech zajímavá. Není vhodné, aby byla např. složena převážně jen z úprav algebraických výrazů nebo jen z důkazů. Naopak je vhodné, aby se objevila řada obrázků nebo náčrtů, aby úlohy byly kontextové, aby byly svojí tematikou pestré a moderní atd.

Ukázkou této zásady je úloha 4a z roku 1998.

Mnoho surovin je neobnovitelných. Jejich konečná zásoba se vyčerpává s plynoucím časem. Funkce

$$R(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

popisuje typický stav rezerv surovin jako funkci času t.

(a) Vyšetřete průběh a nakreslete graf funkce R.

(b) Podle grafu funkce R *nakreslete odhadem graf její derivace* R'.

(c) Zdůvodněte nebo vyvraťte: Funkce R' *popisuje momentální výnos suroviny v tomto modelu.*

(d) Kdy je výnos suroviny maximální?

Je zřejmé, že se vždy nepodaří všechny zásady u všech úloh nebo u maturitní písemné práce jako celku splnit. Někdy je dokonce lepší záměrně některou zásadu nedodržet, aby úloha nepřestala být zajímavá, aby se příliš neztížila či naopak nezjednodušila, aby se neztratila její přehlednost atd.

18.2.2 Zdroje úloh

Kromě vlastních námětů jsem často inspirován nějakou již existující úlohou pocházející zpravidla z matematického časopisu nebo sbírky úloh. Řada úloh je též původem z Matematického klokana nebo matematické olympiády. Dokonce se v písemné maturitní zkoušce objevily úlohy, které jsou upravenými úlohami z mezinárodní matematické olympiády; jako příklad uveďme úlohu 1 z roku 1999.

V matematické soutěži byly zadány tři úlohy A, B, C. Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý vyřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nevyřešili úlohu A, byl počet těch, kteří vyřešili úlohu B, dvojnásobkem počtu těch, kteří vyřešili úlohu C. Počet žáků, kteří vyřešili jen úlohu A, byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří vyřešili úlohu A. Ze všech žáků, kteří vyřešili jedinou úlohu, právě polovina nevyřešila úlohu A. Počet žáků, kteří vyřešili právě dvě úlohy, byl ve všech třech případech stejný. Kolik žáků vyřešilo všechny tři úlohy?

Obtížnost úloh použitých v prestižních soutěžích se zmenší např. tak, že se z původní jediné otázky vytvoří několik postupných úkolů, které dovedou řešitele k cíli. Případně se mohou připojit ještě další doplňující úkoly. Naplňují se tak zásady zvětšení spektra matematických témat, odstranění monotematického obsahu úlohy, budování nových pojmů a další.

Je nutné přiznat, že ne každý můj pokus o transformaci obtížné úlohy do podoby přijatelné pro písemnou maturitní písemnou práci byl úspěšný. Příkladem takové úlohy je úloha 4a z roku 1997, která je variací úlohy mezinárodní matematické olympiády.

Je dána jednotková krychle $ABCDA'B'C'D'$. Bod Q probíhá celou úsečku AC, bod R probíhá celou úsečku $B'D'$.

(a) Určete útvar, který vyplní všechny body S, které leží uvnitř úseček QR a pro něž platí $|QS| = k|RS|$, kde koeficient $k > 0$ je dán. Zakreslete obrázek pro $k = 2$.

(b) Vypočtěte obsah $P(k)$ útvaru z bodu (a) v závislosti na k.

(c) Pro které k nabývá $P(k)$ maximální hodnoty? A jaké?

Po analýze žákovských řešení se ukázalo, že úloha měla úspěšnost kolem 30 %. Bylo to způsobeno nedostatečným zjednodušením dílčího úkolu (a), na jehož výsledek navazovalo řešení dalších dílčích úkolů.

18.2.3 Zhodnocení vypracované koncepce tvorby úloh

Používáním výše uvedených zásad tvorby úloh jsem postupně nabýval jistoty, že takový přístup je správný. Změna se projevila hned od počátku: výsledky žáků při hodnocení celé písemné zkoušky se zlepšily, neboť se jim podařilo vyřešit vždy aspoň část každé úlohy a ubylo tedy úloh s nulovým bodovým hodnocením. V důsledku toho byl snížen frustrační pocit z řešení písemné maturitní zkoušky a řešitelé byli více povzbuzeni k novým pokusům o řešení. Žáci hodnotí jak bodové hodnocení, tak klimatické působení nové koncepce pozitivně, konkrétně se vyjadřují, že zkouška je přehledná, dobře se v ní orientují, budování nových pojmů považují za zajímavé. Kritické hlasy vůči této koncepci se dosud téměř neobjevily.

Změna se projevila větší časovou náročností celé písemné maturitní zkoušky. Zavedením více dílčích úkolů do každé úlohy se vlastně zvětšila doba řešení a zápisu řešení každé úlohy. Žáci jsou tak schopni vyřešit většinou právě čtyři požadované úlohy. Dříve se vždy několika z nich podařilo vyřešit pět nebo dokonce šest úloh. Cílem tohoto vybalancování obtížnosti (podložené většinou jen mou zkušeností) je tedy to, aby žáci během celé písemné zkoušky smysluplně pracovali.

18.3 Podrobný popis metodiky tvorby diagnostických úloh

18.3.1 Tvorba jednotlivých úloh

Předpokládejme, že nějaká existující úloha, či pojem, či otázka v matematickém textu, či sám matematický text ve mně vyvolaly pocit, že se z této problematiky nechá vytvořit zajímavá úloha do písemné maturitní zkoušky, olympiády či jiné soutěže. Pak následuje můj nyní již téměř tradiční myšlenkový proces, který se dá shrnout do několika hlavních bodů:

- Nejprve je třeba ujasnit si, z jaké oblasti matematiky předložená problematika je. Téměř vždy lze nalézt více oblastí, do nichž by mohla být úloha zařazena. Zařazení úlohy do té které tematiky je ale dojmem subjektivním. Takže tento fenomén byl také jedním z podnětů k tomu, abych začal vytvářet úlohy, jež zasahují svojí tematikou do více oblastí matematiky.
- Druhým krokem je hlubší rozmyšlení, jakých konkrétních matematických pojmů se úloha dotýká. Jestliže byla např. úloha identifikována jako úloha ze syntetické geometrie, vyplyne z jejího textu dále, že se hlavně věnuje např. trojúhelníkům a v nich některým konkrétním prvkům, jako např. těžnicím a těžišti. V každé úloze jsou vždy pojmy, které jsou vysloveny explicite. Každý čtenář však může v textu úlohy objevit řadu skrytých pojmů, souvisejících s těmi vyslovenými. U uvedeného příkladu úlohy s trojúhelníkem, těžnicí a těžištěm může čtenáře ihned napadnout několik pojmů, které by mohly být v úloze zkoumány, např. stejnolehlost trojúhelníků, středy opsané a vepsané kružnice, průsečík výšek, věty o existenci trojúhelníků, konstrukce trojúhelníků atd.
- Po této, v podstatě pořád ještě hrubé, analýze úlohy začínám podrobně zkoumat, jaké konkrétní úvahy, výpočty, úpravy, tzv. kroky, je nutné provést. Tento rozbor je poměrně detailní. V každém kroku je vždy třeba se zamyslet nad jeho obtížností, nad tím, jak asi bude uvažovat žák při řešení, jedná-li se o standardně ve škole používaný krok, či jaká je míra jeho nadstandardnosti. V každém kroku je též zkoumáno, zda je možno udělat jiný krok, který by též vedl k vyřešení úlohy.
- Po analytické části přichází část tvůrčí. Při výše popsané analýze každého kroku řešení existující úlohy si rozmýšlím, jaký úkol vyplývá z tohoto kroku, a tyto varianty si zaznamenávám. Při většině kroků žádný nový úkol nevznikne. Naopak v některém kroku se objeví více otázek, jimiž se může úloha větvit, a nakonec může být vytvořeno na základě jednoho námětu více nových úloh.
- Každá nově vzniklá otázka je opět podrobně analyzována krok za krokem. Některé náměty se ukáží jako vhodné a jsou zařazeny do písemné maturitní zkoušky. Naopak jiné náměty se po několika krocích ukáží jako nevhodné. Během celého tohoto procesu

dochází k postupnému objevování nových otázek, k větvení problematiky, k realizaci některých otázek a také k odeznívání řady problémů.

- I když některý námět vede k tvorbě nové otázky, není někdy tato otázka využita, neboť např. zůstává jediná v celé úloze a nesplňuje požadavky na rozsah úlohy. V některých případech se podaří takto izolované problémy spojit z několika úloh do úlohy společné. Jiné izolované nápady využiji k tvorbě úloh např. do matematické olympiády či do korespondenčních seminářů.
- Důležitou součástí přípravy úloh je závěrečné ladění textace, jako např. krácení dlouhých vět, rozdělování souvětí na jednoduché věty, úprava slovosledu atd.
- Na závěr si úlohu podrobně vyřeším a založím ji do banky úloh i s poznámkami a alternativními nevyužitými otázkami.

Výsledkem celé výše uvedené činnosti je úloha připravená do písemné maturitní zkoušky z matematiky. Taková úloha splňuje většinu zásad, které byly popsány v předchozím oddíle.

18.3.2 Tvorba celé písemné maturitní zkoušky

Je-li připraveno dostatečné množství nových úloh, přichází fáze tvorby celé písemné maturitní zkoušky.

- Většina připravených úloh obsahuje několik dílčích úkolů. Všechny dílčí úkoly všech úloh jsou roztříděny jednak podle tematiky, jednak podle ročníků, kde se probírají, jednak podle obtížnosti (mnou subjektivně chápané), jednak podle časové náročnosti a délky zápisu řešení. Na základě těchto přehledů je vybrána šestice úloh pro písemnou maturitní zkoušku tak, aby splňovala jako celek uvedené zásady.
- Vždy se ukáže, že některé otázky se svojí tematikou překrývají nebo že některá problematika není zastoupena nebo že časová či odborná náročnost je velká či naopak malá atd. Proto je nutné některé dílčí úkoly nahradit jinými. Zde se využijí náměty, které mě napadly při analýze existující úlohy a které vznikaly jako odbočující větve řešení. Někdy je třeba dodatečně vytvořit některé další dílčí úkoly. Není-li při výběru šestice úloh do písemné maturitní zkoušky některá oblast matematiky vůbec zastoupena, je třeba vytvořit zcela novou úlohu.
- Je-li výběr úloh ukončen, provedu analýzu každé úlohy znovu po jednotlivých krocích, jak bylo popsáno v předchozím oddíle a provedu případné úpravy.
- Tato téměř hotová podoba písemné maturitní zkoušky je předložena kolegovi k recenzi a podle ní je provedena konečná úprava celé zkoušky.
- Na závěr je ještě celá písemná zkouška detailně vyřešena a doladěna textace.

Dodejme, že v ideálním případě by bylo vhodné pilotovat úlohy přímo se studenty a pak porovnat svá očekávání s realitou. To však v případě maturitní zkoušky není možné.

Dokladem výše popsané metodiky tvorby celé písemné maturitní zkoušky je následující soubor úloh.

Úloha 1

Přímka p prochází bodem $P = [\frac{1}{2}; 2]$, dotýká se grafu funkce

$$f_1 : y = -\frac{x^2}{2} + 2$$

a protíná obě osy souřadnic.
(a) Zakreslete grafy funkcí f_1 a f_2: $y = \sqrt{|4 - x^2|}$.
(b) Napište rovnici přímky p.
(c) Určete průsečík(y) přímky p a grafu funkce f_2.

Úloha 2

Jsou dány body $A = [8; 3; 2]$, $B = [12; 1; 3]$, $C = [0; 7; 0]$. Určete
(a) rovnici roviny α, která prochází bodem C a je kolmá na přímku AB,
(b) rovnici průsečnice rovin α a ABC,
(c) rovnice rovin β_1, β_2, které jsou rovnoběžné s rovinou α a mají od ní vzdálenost $v = 6$,
(d) zda střed S úsečky BC leží mezi rovinami β_1, β_2.

Úloha 3a

V oboru komplexních čísel řešte rovnici

$$\frac{2^p x^2 - (3 + 2^p)x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 1$$

s reálným parametrem p.

Úloha 3b

Půdorys nekonečného pravidelného města je umístěn v dvojrozměrném souřadném systému tak, že v každém mřížovém bodě se nachází křižovatka (žádné jiné křižovatky nejsou) a ulice jsou rovnoběžné s osami souřadnic.
(a) Kolik existuje cest z bodu $A = [0; 0]$ do bodu $B = [2n; 2k]$, kde n, k jsou celá kladná čísla, takových, že na každé křižovatce můžeme jít jen doprava nebo nahoru? (Výraz není nutné upravovat.)
(b) Vypočtěte pravděpodobnost $p(n, k)$ toho, že při cestě z bodu A do bodu B projdeme křižovatkou znázorněnou bodem $C = [n; k]$. (Výraz není nutné upravovat).
(c) Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} p(n, 2)$.
(d) Zobecněte úlohu (a) pro analogický trojrozměrný systém cest z bodu $A = [0; 0; 0]$ do bodu $B = [q; r; s]$, kde q, r, s jsou celá kladná čísla, můžeme-li se pohybovat pouze doprava nebo dozadu nebo nahoru. (Výraz není nutné upravovat.)

Úloha 4a

Do kružnice je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou kolmé a protínají se v bodě E a platí $|AD| = 8$ cm, $|AB| = 4$ cm, $|\angle CDB| = \varphi$. Přímka procházející bodem E kolmo na přímku AB protíná stranu CD v bodě M.

(a) Dokažte, že EM je těžnicí trojúhelníku CDE.

(b) Určete délku úsečky EM.

(c) Dokažte, že trojúhelníky CEB a DEA jsou podobné, a určete úhel φ tak, aby obsah trojúhelníku CEB byl třikrát větší než obsah trojúhelníku DEA.

Úloha 4b

Funkce f je dána předpisem

$$f : y = e^{-x} \sin x, x \geqq 0.$$

(a) Načrtněte její graf. (Stačí pouze přibližnou úvahou.)

(b) Vypočtěte obsah útvaru, pro který platí zároveň podmínky: $0 \leqq y \leqq e^{-x} \sin x, x \geqq 0$. Výsledek uveďte v co nejjednodušším tvaru.

18.4 Závěr a výhledy do budoucna

Závěry je možné formulovat ze dvou hledisek – z hlediska tvorby úloh pro maturitní zkoušku a z hlediska tvorby úloh jako takové.

Co se týče prvního hlediska, souhrnem je možné říci, že pozitivní hodnocení písemné maturitní zkoušky převládá, a proto zůstávám nadále u zvoleného přístupu. V budoucnu se však chci dál zabývat touto problematikou, hlavně chci neustále provádět revizi zásad tvorby úloh a chci také dát detailnější odpověď na participaci jednotlivých typů úloh s přihlédnutím ke všem uvedeným zásadám.

Tvorba úloh a celé písemné zkoušky není ale jen „strojová výroba“ podle předem daných kritérií, vždy hraje důležitou roli mé „vnitřní cítění“ při pohledu na již hotovou úlohu a celou zkoušku. (Hodnotící pohled je vhodné provádět vždy s odstupem několika dnů.) Mnohdy jsou některé zásady poněkud potlačeny ve prospěch kultury matematického projevu a jakéhosi „uměleckého dojmu“ z celé písemné zkoušky.

Co se týče druhého hlediska, některé zásady prezentované v oddíle 18.2.1 jsou platné obecně pro matematické úlohy různého typu, nejen pro maturitní zkoušku. Využívám je ve své práci se studenty, budoucími učiteli matematiky, v předmětu Metody řešení matematických úloh. Společně rozebíráme různé úlohy i jejich žákovská řešení. I když jsem zde neuvedl takové úlohy, které jsem sice vytvořil, ale které nesplnily má očekávání a nakonec jsem je ze zkoušky vyřadil, se studenty je využívám jako dobré podklady pro diskusi o požadavcích na vhodné matematické úlohy a jejich tvorbu.

Neméně důležité je, aby si studenti sami tvorbu úloh vyzkoušeli a dostali zároveň o své činnosti zpětnou vazbu. To organizuji následovně. Každý student dostane přidělenu jednu úlohu z matematické olympiády (případně si ji může sám vybrat). Úkolem je vytvořit k příslušné úloze návodné úlohy. To je výhodné i z toho důvodu, že k olympiádním úlohám tyto návodné úlohy existují, a je tedy možnost jakési autokontroly. Pokud je navíc možné, aby studenti vlastní úlohy vyzkoušeli přímo se žáky (například při praxi), pak s nimi lze provést i analýzu a úlohy zhodnotit z hlediska jejich cíle, tj. připravit žáka na řešení složitější úlohy z matematické olympiády.

Dodejme, že je třeba brát v úvahu možné reakce a řešení studentů už při tvorbě úlohy. Je třeba říci, že kompetence učitele předvídat tyto reakce a řešení je velmi důležitá, a domnívám se, že se zlepšuje se zvyšující se zkušeností učitele. U budoucích učitelů lze zkušenost do určité míry nahradit tím, že se v seminářích budou co nejvíce setkávat s různými autentickými řešeními a budou je z různých hledisek analyzovat.

Část 3: Sedm námětů pro výuku

Kapitola 19

Záporná čísla

Milan Hejný

19.1 Úvod ke kapitolám 19 a 20

Tradiční kurikulum staví do středu matematického vzdělání prvních čtyř ročníků základní školy seznámení se s přirozenými čísly a čtyřmi početními operacemi. Počínaje 5. ročníkem se začíná obor přirozených čísel rozšiřovat a to dvěma směry: k částem (zlomky a desetinná čísla) a záporným číslům. Každá z těchto oblastí představuje vážný a dobře známý didaktický problém. Jak zlomky, tak záporná čísla představují v genezi lidského myšlení významný zlom a jsou typickými představiteli „hluboké ideje“ ve smyslu Z. Semadeniho (2002).[1]

Před padesáti lety vládlo mezi didaktiky přesvědčení, že úspěšnost výuky závisí na vhodné metodě výkladu těchto partií. Mnohaleté zkušenosti ukázaly, že žádná metoda výkladu neřeší daný problém zásadním způsobem. Žádná metoda totiž nevyhovuje všem žákům a navíc existuje nemalý počet žáků, kteří záporná čísla, ale zejména zlomky nepochopí vůbec, protože jsou přesvědčeni, že k pochopení těchto pojmů je potřebné zvláštní nadání, kterého se jim nedostalo. Úsilí učitele naučit takového žáka rozumět zlomkům nebo záporným číslům je marné, neboť žák s učitelem nespolupracuje. Existence těchto žáků vede didaktiku matematiky k rozdělení problému výuky záporných čísel a zlomků do dvou úrovní, z nichž každá je vymezena vlastním problémem.

1. *Jak otevřít svět záporných čísel a svět zlomků žákům, kteří o to mají zájem?*
2. *Jak působit na žáky, kteří jsou přesvědčeni, že nemají potřebné schopnosti, aby do těchto světů vstoupili?*

---

[1] V uvedené rozsáhlé studii Z. Semadeni paralelně s hlubokou ideou mluví o povrchové formě a formálních modelech. Jeho pojem povrchové formy je blízký našemu pojmu formální poznatek (viz kap. 2), ale ukazuje jej v jiné a podnětné optice.

Druhý problém je částečně diskutován v kap. 2. Zde jen připomeneme, že komplex méněcennosti se vytváří ve vědomí žáků v důsledku edukačního stylu, do kterého jsou žáci vpravováni již v prvních čtyřech letech školní docházky a který je orientován na paměťové učení. Žák, který si v této době osvojí styl učení se matematice založený na repetici a imitaci, nerozvine své schopnosti autonomní intelektuální práce a není připraven na náročné pojmy záporné číslo a zlomek.

V této a následující kapitole zkoumáme pouze první problém a rozkládáme jej do dvou podproblémů:

Jaké jsou příčiny nízkého porozumění záporným číslům/zlomkům žáky?
Jak je možné daný stav měnit k lepšímu?

Až dosud jsme mluvili o záporných číslech a zlomcích takříkajíc jedním dechem, jako by se jednalo o dvě příbuzné oblasti. Skutečnost je však jiná. Je pravda, že obě tyto oblasti představují z matematického hlediska rozšiřování oboru přirozených čísel a z didaktického hlediska pak vysokou náročnost. Její příčiny jsou ale jiné u zlomků a jiné u záporných čísel.

U zlomků jde o procesy porovnávání, sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků. Klíč k problému se nazývá „společný jmenovatel" a jeho reprezentantem je pojem kmenový zlomek. U záporných čísel jde především o pojem sám, o jeho přijetí a zrovnoprávnění záporných čísel s čísly kladnými. Odlišnost didaktických problémů týkajících se záporných čísel a didaktických problémů týkajících se zlomků je tak značná, že u obou kapitol bude použita jiná metoda zkoumání. Rozdílně jsou obě tyto oblasti zastoupeny v odborné literatuře. Zatímco zlomkům se věnuje poměrně značná pozornost, je zájem o záporná čísla menší. Důvodem je zřejmě malý prostor pro experimentální výzkum.

19.2 Metoda zkoumání žákovských představ o záporných čísel

Metody zkoumání operačních dovedností žáků jsou dobře propracované. Schopnostem žáků manipulovat s celými čísly je věnováno mnoho kvalitativních a ještě více kvantitativních výzkumů. Daleko méně prací je věnováno pojmotvornému procesu pojmu záporné číslo. Při tomto zkoumání jde o zjišťování toho, jak se představa záporného čísla rodí a rozvíjí, jak se žákova sémantická zkušenost se záporným číslem propojuje s jeho strukturální zkušeností, jak příslušný pojmotvorný proces překonává různá úskalí. Takový výzkum nelze založit na klinickém experimentu, který mapuje pouze momentální stav, zde je potřebné dlouhodobé sledování. Proto je základním materiálem našeho studia dlouhodobé experimentální vyučování v jedné třídě (v letech 1984–1989).[2] Kromě toho jsme využili naší předchozí studie o žákovských představách čísla (Hejný; Stehlíková

[2]První výsledky týkající se výuky záporných čísel byly publikovány v článku (Hejný; Nôta 1990).

1999) jako teoretické východisko pro hledání sémantických modelů záporného čísla. Další doplňující informace jsme získali

1. z testů a sond uskutečněných v jiných třídách, nebo v klinických pokusech,
2. z komparativní analýzy současných žáků se žáky z doby „předkalkulačkové“,
3. použitím metody genetické paralely (viz oddíl 2.3),
4. rozborem pojmové koncepce několika učebnic pro 4., 5. a 6. třídu.

Didaktická literatura, která zkoumá problematiku záporných čísel, je většinou zaměřena na povrchovou vrstvu práce žáka se znaménky. Hlubší studie jsme našli jen ve starších ruských metodických učebnicích sedmdesátých a osmdesátých let minulého století. I když byl tehdejší výzkum zaměřen převážně na obsah, najdeme zde dobrou analýzu didaktického problému. Například M. D. Koškinová (1987, s. 17) píše:[3]

> Вопросы, связанные с введением отрицательных чисел, с изучением положительных и отрицательных чисел, являются найболее трудными для учащихся. История развитя математики показывает, что отрицательные числа значительно труднее дались человечеству, значительно труднее вошли в математику, чем дроби. Это обясняется тем, что отрицательные числа значительно меньше, чем дроби, связаны с жизню, практикой. Отрицательные числа возникли внутри самой математики в связи с выполнением действий, преоброзований с уже известными числами (натуральные, нуль, дроби).

M. D. Koškinová (1987) identifikuje tři hlavní myšlenky vztahující se k záporným číslům:

1. pozdní vstup záporných čísel do matematiky,
2. struktura aritmetiky jako cesta, kterou záporná čísla do matematiky vstupovala,
3. jejich malá přítomnost v reálném světě.

Přímá didaktická projekce těchto myšlenek je nasnadě – záporná čísla zavádět co nejpozději, při jejich zavádění zdůraznit strukturální kontext, jejich vypuštěním z osnov základní školy se moc zlého nestane. V dalším ukážeme, že taková projekce je unáhlená a že každá z myšlenek při projekci do prostředí školy potřebuje pečlivější rozbor.

[3] Otázky spojené se zavedením záporných čísel, se studiem kladných a záporných čísel, jsou pro žáky nejnáročnější. Historie rozvoje matematiky ukazuje, že záporná čísla se lidstvu poddávala daleko hůř, daleko složitěji vstupovala do matematiky než zlomky. To se vysvětluje tím, že záporná čísla jsou ve srovnání se zlomky daleko méně svázány s životem, s praxí. Záporná čísla vznikla uvnitř samotné matematiky v souvislosti s operacemi s již známými čísly (přirozenými, nulou, zlomky). (Vlastní překlad.)

19.3 Ilustrace a historický poukaz

Cílem následujících ilustrací je upřesnit, v čem je problém představy záporného čísla.

Ilustrace 1. Ve třech druhých třídách gymnázia (šestnáctiletí žáci) byla v testu spolu s dalšími úlohami zadána i nerovnice $x + \sqrt{a-x} < a$, kterou měli žáci řešit pro (a) $a = 4$, (b) $a = -1$. Z asi padesáti žáků, kteří tuto úlohu řešili, asi třetina případ (b) vůbec neřešila, protože napsali, že výraz $\sqrt{-1-x}$ nemá smysl nebo že pod odmocninou nesmí být záporné číslo nebo něco podobného. Symbol $-x$ interpretovali jako číslo záporné. Této chyby se dopustil i jeden ze tří žáků, kteří úlohu (a) vyřešili vtipnou úvahou: $\sqrt{4-x} < 4-x \Leftrightarrow 1 < 4-x \Leftrightarrow x < 3$.

Komentář 1. Je pozoruhodné, jak silně je znaménko mínus asociováno s představou záporného čísla. V písemných projevech žáků běžně nacházíme chyby jako $-3+1 = -4$ (podle pravidla „mínus a plus dají mínus“), nebo $|-x| = x$ pro všechna reálná x.

Ilustrace 2. V posledním kole XXII. ročníku MO SSSR řešili žáci 9. ročníku rovnici

$$(1 + \frac{1}{m})^{m+1} = (1 + \frac{1}{1988})^{1988} \text{ pro } m \in \mathbf{Z}.$$

Pouze 40 % řešitelů našlo a správně zdůvodnilo jediné řešení $m = -1989$.[4]

Komentář 2. Malé procento úspěšných řešitelů bylo překvapivé, protože úroveň soutěžících v posledním kole sovětské MO byla tradičně velmi vysoká. Klíčem k řešení bylo uvědomění si, že m může být záporné. Pak substituce $n = -m$ ve rychle k výrazu, z něhož je řešení zřejmé.

Ilustrace 3. Asi před dvaceti lety dával T. Hecht nejen studentům, ale i kolegům tuto úlohu: Najděte čtyři po sobě jdoucí celá čísla, jejichž součin je 24. Každý profesionální matematik ihned řekl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, ale podstatně déle mu trvalo nalezení druhého řešení: $(-4)(-3)(-2)(-1) = 24$. Autor sám ihned odpověděl, že 4! je jediné řešení. Až když na žádost T. Hechta začal svoje tvrzení dokazovat, poznal, že zapomněl na záporná čísla.

Komentář 3. Ilustrace ukazují, že záporná čísla jsou pociťována (a to nejen žáky základní školy) jako něco nepřirozeného, co se do našeho vědomí vtírá jako cizorodý prvek a co tam pak přetrvává v méně osvětlené a méně dostupné oblasti paměti. Dobře to ilustruje autorova reakce na Hechtovu úlohu. V první reakci mu záporná čísla vůbec nepřišla na mysl. Teprve důkaz jako cesta nabytí jistoty ho do této odlehlejší oblasti vědomí dovedl.

Historický poukaz. Řecká matematika, která v oblasti geometrie dospěla až k axiomatickému budování disciplíny, záporná čísla neznala. R. Descartes jako první dává záporným číslům interpretaci – jsou to souřadnice bodů na ose x, vlevo od počátku. Sám ale tato čísla nazývá *klamná*. S nedůvěrou hleděli na záporná čísla i objevitelé infinitezimálního počtu.

[4] Matematika v škole, 1988, číslo 5, s. 55, rusky.

Až v roce 1770 zavádí L. Euler do algebry záporná čísla jako plnohodnotné veličiny, ale cítí potřebu jejich zavedení zdůvodnit i sémanticky. Náročnou operaci $-(-a) = a$ osvětluje slovy „zbavit někoho dluhu znamená dát mu dar“. Tím ale ještě nejsou záporná čísla legalizována všemi matematiky. L. Carnot je připouští jako fiktivní veličiny, které ulehčují výpočty, ale upozorňuje, že často způsobují chybné závěry v úvahách.[5] A. de Morgan v roce 1831 píše, že imaginární výraz $\sqrt{-a}$ a záporný výraz $-b$ se shodují v tom, že objeví-li se ve výsledcích úloh, svědčí o jisté absurditě a protiřečení. Z hlediska skutečného významu jsou oba výrazy stejně nereálné, protože $0 - a$ je stejně nepochopitelné jako $\sqrt{-a}$.[6] Tato a další historická svědectví o lopotné cestě člověka k pojmu záporné číslo lze najít např. v páté a sedmé kapitole knihy (Kline 1980).

19.4 Příčiny náročnosti záporných čísel

Příčiny didaktické náročnosti záporných čísel naznačené M. D. Koškinovou (1987) a ilustrované v předchozím oddíle teď přeuspořádáme, rozvedeme a doplníme. Náš seznam bude mít čtyři položky: Řídký výskyt záporných čísel v reálném světě, jejich náhlý vpád do vyučování, způsob jejich výuky, zaměřený na nácvik pravidel, jejich faktická nepotřebnost.

Řídký výskyt záporných čísel v reálném světě. Je pravda, že záporné číslo se objeví na teploměru, na řídící desce výtahu, při počítání zisků a ztrát v oblasti financí nebo při práci s letopočty – např. v informaci „Aristoteles se narodil v roce -384“. Tato sémantická podpora záporného čísla je však v porovnání se sémantickou podporou kladného čísla slabá. Navíc i v uvedených situacích je záporné číslo často nahrazováno kladným v opozitní kvalitě, která je vyjádřena slovně. Například v informacích „garáže jsou v druhém podzemí“, „je pět pod nulou“, „Aristoteles se narodil v roce 384 před Kr.“ se záporné číslo neobjevilo.

I oblast, která je zdánlivě nejpříznivěji otevřená používání záporných čísel – finance – není v reálném životě se zápornými čísly spjata. Neřekneme „mám mínus sto korun“, ale „mám sto korun dluhu“ nebo „schází mi sto korun“. Informaci „dlužíš mi mínus sto korun“ by asi jen matematik pochopil jako „dlužím ti sto korun“.

Základní model přirozeného čísla – počet předmětů – nemá v oblasti záporných čísel ekvivalent. Záporné číslo nemůže žák vnímat smysly.

Náhlý vpád záporných čísel do výuky. Bez náležité propedeutické přípravy vstupuje do výuky mnoho pojmů. U náročných pojmů, jako je zlomek, procento, poměr nebo geometrická transformace, je absence dostatečně dlouhé propedeutické fáze didakticky

[5] Příkladem může být paradox A. Arnaulda: Mám-li dvě různá čísla a větší vydělím menším, musím dostat něco jiného, než když menší vydělím větším. Jenže $(-1) : (+1) = (+1) : (-1)$.

[6] A. de Morgan, stejně jako žáci z ilustrace l, považuje znaky a i b za nezáporná čísla.

velice závažná. Samozřejmě se to vztahuje ve zvýšené míře i na záporná čísla. Naskýtá se však otázka, jak tento pojem, v životě tak málo frekventovaný, žákům předkládat již, řekněme, ve 2. ročníku. To bude vážné téma dalších úvah.

Způsob výuky záporných čísel zaměřený na nácvik pravidel. Nepočetné sémantické modely záporných čísel se brzo oddělí od strukturálních pravidel a tato pak převezmou hlavní slovo v představě záporného čísla. Navíc někdy jsou podávána v těžce stravitelné podobě. Např. v učebnici (Urbanová aj. 1985, s. 116) je v graficky zvýrazněné formě uvedeno:

(a) Mají-li dvě čísla stejná znaménka, sečteme je jako přirozená čísla. Znaménko součtu je shodné se znaménkem sčítanců.
(b) Mají-li dvě čísla různá znaménka, odečteme je jako přirozená čísla, tj. od většího přirozeného čísla odečteme menší. Znaménko součtu je shodné se znaménkem čísla, které je na číselné ose dále od nuly.

S radostí konstatujeme, že v současných učebnicích jsme podobnou verbální mystiku neobjevili. Nedostatkem některých současných učebnic je nárazovost práce. Záporná čísla jsou v některém tematickém celku až přebujelá, ale vzápětí se z učebnice vytrácí.

Faktická nepotřebnost záporných čísel. K čemu je potřebujeme? Pokud jde o teploměr, výtah nebo vrstevnici mořského dna, jistě můžeme znaménko mínus použít, ale to není důvod k tomu, abychom věnovali výuce záporných čísel tolik pozornosti, aby učitelé stále žákům opakovali, že „mínus krát mínus dává plus“ nebo „násobíme-li nerovnost záporným číslem, znaménko se mění“. Konečně celá skvělá řecká matematika se bez záporných čísel obešla a až do poloviny 18. století je matematici nepotřebovali. Jestliže tedy budeme ve škole záporná čísla zavádět, musíme vědět, co nás k tomu opravňuje. To je další námět ke zkoumání, zřejmě nejzávažnější. Kdybychom totiž dospěli k názoru, že záporná čísla jsou nepotřebná, asi bychom je z osnov vypustili. Konečně současné osnovy je odsouvají až do 6. ročníku. Tím se ale nutnosti odpovědět na jejich oprávněnost ve výuce základní školy nevyhneme.

Náznak odpovědi na položenou otázku nám poskytne historie matematiky. Ukáže nám, kde absence pojmu záporné číslo vede k vážným konfliktům. Druhý a podle našeho názoru závažný poukaz na smysl vyučování záporným číslům může dát zamyšlení, zda má tento abstraktní pojem být součástí poznatkové struktury vzdělaného člověka naší doby.

19.5 Místo záporných čísel v matematice základní školy

Ilustrace 4. Petr a Michal, žáci 2. ročníku, společně řešili domácí úlohu $5 - 7 + 4 = ?$. Úloha vznikla špatným opsáním zadání z tabule. Na tabuli bylo napsáno $50 - 7 + 4 = ?$, ale Petr to chybně opsal. Petr řekl, že se to nedá, protože když mám 5, nemohu vzít 7.

Michal řekl, že se to dá, když nejdřív přidám 4 a pak od 9 odeberu 7. Podle Michala je výsledek 2. Petrovi rodiče, kteří byli požádáni dětmi o radu, měli též různé názory. Matka mínila, že učitelka si neuvědomila, že dává druhákům nekorektní úlohu. Otec tvrdil, že Michal provedl dobrý výpočet a že výsledek je kladný, tedy je to v pořádku. Otec našel i příběh, který by opravňoval existenci výpočtu: Hrál jsem kuličky; nejprve jsem jich vyhrál 5, pak 7 prohrál a nakonec ještě 4 vyhrál. Celkově jsem vyhrál 2 kuličky. Dětem tento otcův výklad nebyl úplně jasný. Chtěli vědět, kolik kuliček měl otec před hrou. Nakonec mi Petrův otec, můj přítel, zavolal a telefonem požádal o vyřešení sporu.

Komentář 4. Především nutno zdůraznit, že úloha se objevila náhodně, nebyla dána ve škole. Tím, že oba hochy zaujala a upozornila na zajímavý jev, pomohla propedeutice pojmu záporné číslo. Jako problémová situace může být zařazena do učebnice 2. ročníku. Důležité ale je, že nebude řešena, ale diskutována tak jako úloha v naší ilustraci.

Vraťme se k příběhu. Michal uchopil nápis $5-7+4=?$ v kontextu aritmetické struktury. Aniž by čísla sémanticky interpretoval, použil komutativní zákon, který již dříve objevil jako znalost v činnosti („při sčítání a odčítání mohu čísla jakkoli prohazovat“). Petr uchopil daný nápis sémanticky a při jeho čtení narazil na epistemologickou překážku: Co to je $5-7$? Petrův otec našel sémantický model, který lze znázornit schématem na obr. 19.1.

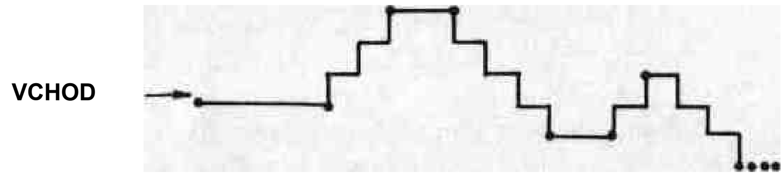
Vstupní stav	+5 →	Stav po první změně	-7 →	Stav po druhé změně	+4 →	Výstupní stav

Obr. 19.1

V něm jsou všechna tři čísla operátory změny a kromě nich se objevují čtyři utajená čísla – stavy. Reakce dětí na otcův model byla logická. Domnívaly se, že k porozumění potřebují znát vstupní stav. Otcův model ale lze upravit tak, že absence stavů nebude překážet.

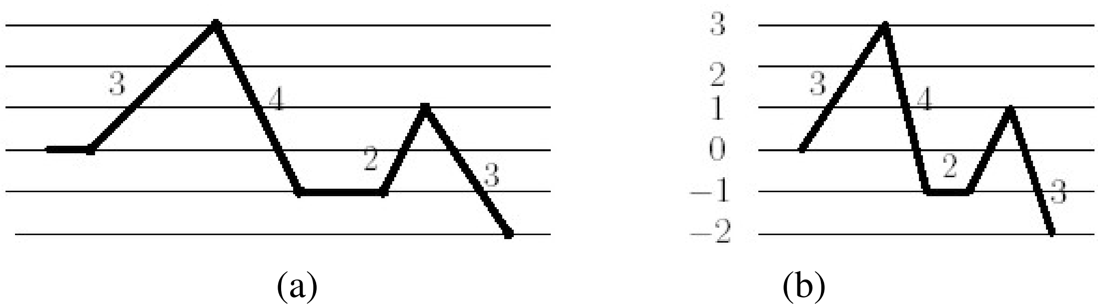
Ilustrace 5. Model „Tajná chodba“. Učitel vypráví žákům 2. třídy dobrodružný příběh. Honza, hrdina příběhu, prochází tajnou chodbou, která někdy po schodech stoupá, jindy klesá. Hrdina ví, že až se dostane na úroveň, která leží 12 schodů pod úrovní vchodu, musí hledat tajné dveře. Žáci evidují pohyb hrdiny a upozorní učitele, když se hrdina dostane na úroveň tajných dveří. První dva příběhy hry „tajná chodba“ jsme kreslili na čtverečkované tabuli (obr. 19.2). Pak si již cestu zaznamenával každý žák sám.

Podle diktátu učitele „Honza vystoupal 3 schody nahoru, pak udělal krok rovně, pak čtyři schody sestoupil dolů, . . . “ si žáci na čtverečkovaný papír kreslili obrázek tajné chodby. Při opakování hry si někteří žáci začali záznam zjednodušovat. Při dalších opakováních se objevila řada různých zápisů. Z nich zmíníme pět, které ukazují, jak se žákům během dvou let podařilo dospět k zápisu pomocí záporných čísel.



Obr. 19.2

1. (Obr. 19.3a): Každé schodiště je nahrazeno úsečkou a číslem.
2. Záznam se zhustí.
3. (Obr. 19.3b): K záznamu přibude číslování úrovní.
4. Zápis je linearizován, např. žák již nekreslí, ale zapíše $3\uparrow\ 4\downarrow\ 2\uparrow\ 3\downarrow$.
5. Šipky jsou změněny na znaménka: $+3-4+2-3$.



Obr. 19.3

<u>Komentář 5.</u> V první etapě poznávání situace Tajná chodba je úlohou žáka graficky evidovat učitelem popsaný pohyb hrdiny příběhu. Učitelův popis je proces, žákův obrázek je odpovídající koncept. Opakovaná zkušenost žáka s transformací proces $\rightarrow$ koncept postupně vytváří ve vědomí žáka procept celé situace (Gray; Tall 1994). Žák, který již má tento procept vytvořen, je schopen na základě obrázku popsat pohyb hrdiny, a to třeba i pozpátku, jako při hrdinově návratu ke vchodu. Druhá etapa poznávání situace Tajná chodba směřuje k ekonomizaci zápisu. Někteří žáci začnou poměrně záhy hledat úspornější zápis. Jiným to trvá déle a někteří převezmou způsob šikovného zápisu od spolužáků. Nicméně k zápisu pomocí kladných a záporných čísel se žáci dopracují až po několika měsících. Učitel, který úsporný zápis žákům prozradí, urychlí sice jejich poznání, ale výrazně znehodnotí jeho kvalitu. Bude to poznání, které většina žáků převezme jako izolovaný (tedy formální) poznatek. I ti, kteří pochopí, jak se k takovému zápisu došlo, budou ochuzeni o vlastní objev a tím i o nárůst schopnosti objevovat efektivnější zápisy.

Didaktická působivost tohoto modelu je dána jeho názorností, možností modifikací a schopností pokrýt další podobný model – cestování ve výtahu. Je to tedy generický model pro pohyby ve směru vertikálním. Ke směru horizontálnímu se dostaneme v oddíle 19.8.

19.6 Sémantické modely záporných čísel

Dva sémantické modely vhodné pro propedeutiku záporných čísel jsme viděli v ilustracích 4 a 5. Teď se pokusíme najít všechny typy generických modelů, které vycházejí ze separovaných sémantických modelů přirozených čísel. Východiskem bude analýza představ přirozených čísel popsaná v (Hejný; Stehlíková 1999, tabulka s. 100).

Z modelů evidovaných v tabulce se omezíme na ty, které mají aditivní strukturu. Z nich vypustíme dva, které se nespojují se záporným číslem: jméno a počet. Je asi málo pravděpodobné, že by nějaký objekt měl jméno -7, ale i kdyby tomu tak bylo, víme, že jména jako modely čísel jsou z hlediska aritmetické struktury nezajímavá. Daleko zajímavější je počet, tedy množství, jehož jednotkou je jeden kus. Ten však do záporných čísel nevstupuje, protože o záporném množství nelze mluvit. Zbývají tedy čtyři typy, které probereme.

Adresa je údaj místa nebo času vyjádřený záporným číslem. Separovanými modely jsou reálné stupnice (teploměr, výtah), generickým modelem je *číselná osa*. Nejprve je vnímána ve dvou tvarech, jako svislá a vodorovná. Později dojde k poznání izomorfizmu obou těchto modelů. Způsob objevu svislé číselné osy jsme viděli v ilustraci 5. O vodorovné číselné ose píšeme podrobně dále.

Veličina je uspořádaná trojice (číslo, jednotka, objekt). I když záporné veličiny existují, nevstupují do světa žáka na 1. stupni základní školy. Výjimku tvoří kapitál měřený v korunách a teplota měřená ve stupních Celsia. Jenže v představě žáka je teplota vnímána ne jako veličina, ale jako adresa na stupnici teploměru. Přesněji, žák ještě nediferencuje mezi teplotou a její evidencí na teploměru, asi tak jako většina z nás nerozlišuje mezi váhou a hmotností. Tedy na prvním stupni základní školy jedině *finanční model* zaujme některé žáky tak, že se pro ně stane generickým. Další záporná veličina vstoupí do vědomí žáka až později, například při pojmu orientovaný úhel. Připomeňme, že lze mluvit i o orientovaném obsahu a orientovaném objemu a že tyto veličiny též mohou být záporné. Takové objekty se objevují v integrálním počtu.

Operátor porovnání měří kvantitativní rozdíl dvou adres nebo mnohostí nebo operátorů. Přitom může být použito i záporné číslo, ale běžně se to nedělá. Výpovědi „Karel je -3 cm vyšší než Láďa“ a „dlužíš mi -50 korun“ zní podivně, byť jejich smysl je jasný: „Karel je o 3 cm menší než Láďa“ a „já ti dlužím 50 korun“. Jediná nám známá situace, kde se u porovnání údajů přirozeně objeví záporná čísla, je porovnávání souboru údajů s jedním pevným číslem, například průměrem. Tak představíme-li si, že v odstavci je na devíti řádcích 126 slov, průměrně vychází na jeden řádek 14 slov. Počet slov v jednotlivých řádcích je 12, 15, 15, 14, 16, 15, 13, 14, 12. Tedy odchylky od průměru u jednotlivých řádků jsou $-2, 1, 1, 0, 2, 1, -1, 0, -2$. Podobné úlohy jsou propedeutikou statistiky a mnozí z našich žáků si je oblíbili.

Operátor změny měří změnu adresy nebo mnohosti nebo operátora. Podobně jako v předešlém případě i zde záporné číslo použijeme, jen když je změn více. Například změny výšky při putování tajnou chodbou (ilustrace 5). Pokud opisujeme jedinou změnu, záporné číslo nepoužijeme. Přesto některé naše žáky, zejména ve 4. a 5. ročníku, takové podivné opisy operátorů silně motivovaly. Představy, které přitom vznikaly, nazveme opozitní modely.

Opozitní modely jsou modely, v nichž vystupují prvky dvou číselně opozitních kvalit: majetek – dluh, vpravo – vlevo, nahoru – dolů, vpřed – vzad apod. Výrok „Pepík dal dva vlastní góly“ byl změněn na „Pepík dal -2 góly“. Vůči tomu jeden hoch namítal: „Kdyby dal Pepa i dva normální góly, dal by pak $2 - 2 = 0$ gólů, což je lež, neboť on dal 4 góly.“ Jiný hoch mínil, že z hlediska výsledku dal Pepa skutečně 0 gólů. Zajímavé byly i úvahy o domněle opozitních modelech jako noc – den, sudý – lichý, chytrý – hloupý. Do této linie patřil výrok 3 hoši + 3 dívky = 0, který jedna dívka interpretovala takto: „Když se vezmou, žádný nebude svobodný, hoši budou ženatí, dívky budou vdány.“

Debaty o opozitních modelech bývaly dlouhé a pomáhaly účastníkům, kteří se jich zúčastňovali se zápalem, prodiferencovávat představy pojmu záporné číslo.

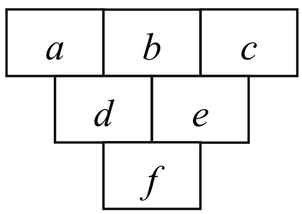
19.7 Strukturální modely záporných čísel

Jestliže u sémantických modelů šlo o to budovat představu žáka o tom, co to je záporné číslo, u strukturálních modelů jde o budování struktury celých čísel, v níž nebudou záporná čísla v hlubokém ústraní.

V ilustraci 4 jsme viděli, jak Michal zjistil, že $5 - 7 + 4 = 2$. K výpočtu použil komutativní zákon $5-7+4 = 5+4-7$, tedy nástroj struktury. Nevíme, jak by odpověděl na otázku, kolik je $5 - 7$. Možná by souhlasil s Petrem, že to se udělat nedá, ale možná by řekl, že to je číslo -2. Tak na podobnou otázku reagovalo v našich nedávných sondách více žáků 3. a několik žáků 2. ročníku. V porovnání s dobou před třiceti lety současní žáci nespojují záporné číslo s mystériem, protože jej znají z kalkulačky. Děti, které si s kalkulačkou rády hrají, si mínus i některé jeho aritmetické vlastnosti rychle osvojí. Je jasné, že zde se nejedná o plnohodnotné porozumění záporným číslům, dokonce ani ne o porozumění strukturální, ale přinejmenším o generický model situace „když od menšího čísla odčítám větší, dostanu číslo záporné“. Děti mluví o záporném čísle jako o čísle „s tím mínusem“.

Hlubší strukturální porozumění záporným číslům poskytnou žákům situace, v nichž se záporná čísla objeví v jistém aritmetickém kontextu. Tři takové situace ukážeme.

Sčítací trojúhelníky. Na obr. 19.4 je do tvaru trojúhelníku uloženo 6 čísel a, b, c, d, e, f. Tato čísla jsou vázána vazbami (1) – (3). Tedy pod každou dvojicí sousedních čísel je jejich součet. Žáci 3. ročníku toto schéma již znají a umí doplňovat trojúhelník, když jsou v něm dána čísla a, b, c nebo čísla a, b, f apod. Dáme-li například trojici $a = 1$, $d = 4$, $e = 2$, bude $f = 6$, $b = 3$, $c = -1$. Je zajímavé, že žáci 3. ročníku, kteří bez problémů řešili pomocí kalkulačky úlohu $274 - 311 = -37$, měli u této úlohy, kterou řešili s odstupem asi jednoho měsíce, problémy. Jakmile se ale jeden žák zeptal, zda může do okénka tabulky zapsat i číslo mínus jedna, hned většina žáků úlohu vyřešila. Z toho vidíme, že i když se žáci pomocí kalkulačky seznámí se zápornými čísly a čísla akceptují, ještě je nevnímají jako čísla zcela legální. Konečně v ilustracích 2 a 3 jsme viděli stejné chování i u profesionálů.



Platí:

$$a + b = d \qquad (1)$$
$$b + c = e \qquad (2)$$
$$d + e = f \qquad (3)$$

Obr. 19.4

Prostředí sčítacích trojúhelníků (se třemi, čtyřmi, nebo i pěti čísly v prvním řádku) lze využít na kultivaci porozumění aritmetické struktuře. Další dvě úlohy tyto možnosti ilustrují.

Úloha 1. Do sčítacího trojúhelníku z obr. 19.4 vložte místo písmen tuto šestici čísel: (a) 1, 2, 3, 4, 5, 9; (b) -1, 1, 2, 2, 4, 4.

Úloha 2. Ve sčítacím trojúhelníku s deseti čísly (v prvním řádku jsou čtyři čísla) známe číslo a v pravém okénku horního řádku, číslo f ve středním okénku druhého řádku a číslo j ve spodním okénku trojúhelníku. Zjistěte, jaké může být číslo d ležící v pravém okénku horního řádku. Víte, že (a) $a = 5$, $f = 1$, $j = 10$; (b) $a = 5$, $f = 2$, $j = 10$.

Tramvaj. Hra byla původně vytvořena jako nástroj na rozvoj schopnosti žáků evidovat větší soubory údajů. Myšlenka je prostá. Učitel vypráví, jak jede tramvaj z jedné konečné na druhou. Do tramvaje na konečné nastoupí jistý počet cestujících, na první zastávce někdo vystoupí a několik lidí nastoupí. To se opakuje ještě na dalších zastávkách, nakonec tramvaj dorazí na druhou konečnou a žáci mají říct, kolik cestujících zde vystoupí. Pak učitel klade další otázky jako „Kolik cestujících se v tramvaji vezlo mezi druhou a třetí zastávkou?“, „Na které zastávce do tramvaje nastoupili tři lidé?“, „Kdy bylo v tramvaji nejvíce lidí?“ apod. Později byla hra různě modifikována a jedna modifikace spočívala v tom, že neznámým číslem nebyl počet lidí, kteří vystoupili na poslední zastávce, ale počet lidí, kteří nastoupili na první zastávce. Při této modifikaci bylo někdy nutné pracovat se zápornými čísly. K tomu jsme mohli přistoupit, jen když již žáci (2. ročník) uměli změny lidí dobře evidovat.

V měsících listopad 2003 až duben 2004 uskutečnila jedna učitelka v 1. třídě experiment s dramatizovanou hrou Tramvaj. Experimentu věnovala celkem 15 vyučovacích hodin a náročnost hry postupně zvyšovala. Na poslední hodině se hrála již značně náročná hra: Tramvaj má dva vagóny (dvě hlubší škatule), trať má dvě konečné zastávky a dvě další zastávky a na každé stanici nastupují i vystupují muži, ženy i děti (plastikové lahve tří různých typů). Žáci všechny tyto údaje poměrně úspěšně piktograficky evidovali ve svých záznamových listech a dokázali na základě této evidence zjistit, kdy kolik mužů, žen a dětí jelo v celé tramvaji. Motivačně byla hra velice úspěšná až do konce; zřejmě i proto, že učitelka umně zapojovala žáky do rolí režiséra, manipulátora, řidiče tramvaje a zapisovatele. Přínos hry pro matematický rozvoj žáků spočíval zejména ve třech směrech:

- zvýšení porozumění číslu ve funkci operátora změny,
- schopnosti pomocí piktografického jazyka tabulkou evidovat demonstrovaný proces,
- z vytvořeného záznamu vyvozovat další údaje.

Posloupnosti vztahů. Známou úlohu „najdi další číslo“ (např. v posloupnosti 1, 4, 7, 10, ?) jsme v experimentálním vyučování modifikovali na úlohu „najdi další vztah“. V tab. 19.1 jsou ve třech sloupcích tři posloupností vztahů. U všech je úlohou žáka napsat další vztahy. První dva sloupce jsou určeny žákům 3. ročníku, poslední žákům 5. a 6. ročníku. Ke každé posloupnosti lze vytvářet další doplňující otázky, například u poslední se lze ptát, zda v posloupnosti bude člen, jehož číslo na pravé straně bude méně než -100.

$5-1+6=10$	$4-1+6=9$	$3+2+1=6$
$5-2+7=10$	$4-2+6=8$	$4+3+2-1=8$
$5-3+8=10$	$4-3+6=7$	$5+4+3-2-1=9$
$5-4+9=10$	$4-4+6=6$	$6+5+4-3-2-1=9$
$5-5+10=10$?	$4-5+6=5$?	$7+6+5-4-3-2-1=8$?

Tab. 19.1

Didaktický záměr uvedených her je orientován na překonávání předsudku, že záporné číslo je objekt ilegální. V těchto vztazích se kladná a záporná čísla navzájem prolínají a pokaždé se v posloupnosti přechází z jedné oblasti do druhé při zachování aritmetických pravidel hry.

V předchozích úvahách hrálo dominantní roli záporné číslo jako pojem. V předposledním oddíle ukážeme ještě jeden generický model, který jsme sice již zmínili, ale zatím jsme jej neuvedli – model Panáček. Na základě našich zkušeností a experimentů se právě tento model ukázal pro většinu žáků jako nejúčinnější nástroj na porozumění aritmetickým operacím, zejména vztahu, jehož hovorová formulace zní: „dva mínusy dávají plus“.

19.8 Model Panáček

Podobně jako u Tajné chodby, i zde jde o model adresově-operátorový. U Tajné chodby se začínalo s operátory (o kolik schodů vystoupím/sestoupím) a adresy, tedy úrovně schodů, vstoupily do modelu až později (obr. 19.3b).

Zde bude číselná osa dána hned na začátku. Po této ose chodí panáček P, který pohybem sčítá i odčítá. Přitom pracujeme s čísly dvou typů. Jsou to

adresy – čísla zobrazená na číselné ose,
operátory – čísla určující počet kroků, které panáček P udělá:

– kladné číslo přikazuje počet kroků, které má panáček udělat vpřed,

– záporné číslo přikazuje počet kroků, které má panáček udělat vzad.[7]

Každý číselný nápis jako $5+3$ nebo $3-(-5)$ nebo $5-(-3-(2-4))$ chápeme jako instrukci pro pohyb panáčka P. Tato instrukce se řídí čtyřmi pravidly:

- Nápis čteme zleva doprava. První číslo je adresa, na kterou se P postaví tváří k $+\infty$.
- Každé další číslo nápisu je operátor určující počet kroků, které P udělá.
- Objeví-li se v nápisu mínus před závorkou, udělá P čelem vzad.[8]
- Ukončení závorky, před kterou bylo mínus, znamená opět příkaz čelem vzad.

<u>Příklad</u>. Ukážeme výpočet $3-1-(-5+2)+4=9$. (Viz tab. 19.2.)

Rozklad nápisu na prvky							Akce panáčka P
3							P se postaví na číslo 3 tváří k +∞
	- 1						P udělá krok vzad, je na čísle 2 tváří k +∞
		– (					P udělá čelem vzad, je na čísle 2 tváří k -∞
			-5				P udělá 5 kroků vzad, je na čísle 7 tváří k -∞
				+ 2			P udělá 2 kroky vpřed, je na čísle 5 tváří k -∞
					)		P udělá čelem vzad, je na čísle 5 tváří k +∞
						+4	P udělá 4 kroky vpřed, je na čísle 9 tváří k + ∞

Tab. 19.2

[7] Tyto kroky nazvali žáci „račí kroky“ a později „korky“ – slovo krok je čteno pozpátku.
[8] Toto pravidlo umožňuje porozumění návodu „dva mínusy dají plus“.

Hra se realizuje jako divadlo. Číselná osa je nakreslená na podlaze a vždy jeden žák po ní chodí. Začínáme s jednoduchými nápisy a postupně je prodlužujeme. Kritickým momentem je okamžik, kdy panáček poprvé vstoupí do záporných čísel a my tuto část osy musíme dokreslit. Druhý kritický okamžik nastane, když zavedeme povel „čelem vzad“. Bylo by výborné, kdyby jej objevili žáci sami, ale nás v našem experimentálním vyučování to nenapadlo udělat.

19.9 Nula

Záporná a kladná čísla jsou dva protilehlé světy. Jsou odděleny jediným číslem, nulou. Ta, jak známo, patří k náročným objektům matematiky. V roli jmenovatele zlomku nebo dělitele je nula záludná. Ani mnohonásobné opakování pravidla o nepřípustnosti dělení nulou nedokáže odstranit hojně se vyskytující chyby v práci s nulou.

Hlavní výsledek našich výzkumů zaměřených na hledání příčin náročnosti nuly lze formulovat pomocí tří tezí:

1. Nula nemá v představě žáka sémantické ukotvení.
2. Nula jako objekt aritmetické struktury, stojí izolovaně; zejména v její multiplikativní podstruktuře.
3. Žáci 6. či 7. ročníku jsou schopni samostatně dojít k poznání, že nelze rozumně zavést operaci (např.) $12 : 0$ ani objekt $\frac{0}{0}$.

   Každou z tezí blíže rozvedeme.

1. Svízel se sémantickým ukotvením čísla nula osvětluje běžný jazyk. V situacích, v nichž matematik použije termín nula, se v běžném životě používá jiné vyjádření. Neřeknu „mám nula korun“, ale „nemám nic“ nebo „jsem bez peněz“. Neřeknu „rychlost auta je nula km/h“, ale „auto stojí“. Neřeknu „nulté podlaží“, ale „přízemí“, a to navzdory skutečnosti, že příslušné tlačítko ve výtahu je někdy označeno znakem 0.

   V běžných situacích je nula vnímána spíše jako kvalita než kvantita a tím se jakoby izoluje od světa čísel. Dokonce při počítání letopočtu se rok 0 ztratil. Po roce -1, tedy po roce 1 př. Kr., následuje ihned rok $+1$, tedy rok 1 po Kr. Pojmu „nula“ budou žáci dobře rozumět pouze tehdy, když jej budou vnímat i jako nástroj na popis reálných situací. Tuto schopnost nabudou, jestliže občas ve třídě zazní věta typu „letos je naše třída ve druhém patře, v příštím roce budeme v nultém“, nebo „mám nula korun“, nebo „před deseti lety měla Lenčina maminka nula dětí a teď již má tři“ apod.

2. Tezi argumentačně podpoříme dvěma experimenty. Asi šedesát žáků 2. a 3. ročníku základní školy řešilo písemně úlohu: *Měl jsem* 5 *korun. Koupil jsem si bonbony za* 5 *korun. Kolik korun mám teď?* Nejčastější odpověď zněla „nic“, nebo „teď nemám nic“. Jen devětkrát se v odpovědi objevilo číslo 0. Ve čtyřech případech ji však žák

škrtnul a napsal „Nemám nic“. Druhý experiment je vlastně dlouhodobé šetření. Mnoha žáků i studentů jsme se v posledních dvaceti letech ptali, jak vysvětlí pravidlo „nulou dělit nelze“. Drtivá většina tázaných se omezila na konstatování, že tak jim to řekli ve škole. Jen zřídka došlo k pokusu pravidlo osvětlit a většinou se jednalo o konstatování „to prostě nejde“ nebo o myšlenku limity. Velice jasnou argumentaci tohoto typu uvedl jeden žák 7. ročníku: „Když malé kladné číslo x klesá, roste číslo $1 : x$ do nekonečna, a kdybychom připustili, že $x = 0$, bylo by $1 : 0 = \infty$. Takový znak ale není číslem, proto nulou dělit nelze.“

3. V experimentálním vyučování na základní škole jsme o dělení začali mluvit ve 3. ročníku, ale dělení nulou se neobjevilo. Ve 4. třídě se poprvé žáci ptali, kolik je $5 : 0$. Učitel je žádal, aby to promyslili. Někteří žáci tvrdili, že to bude 0, jiní že 5, ale žádný argument neuvedli. Pak dva žáci ukázali, že to není ani 0, ani 5, protože nevychází zkouška: Kdyby bylo $5 : 0 = 0$ nebo 5, pak by bylo $0 \cdot 0 = 5$ nebo $0 \cdot 5 = 5$, a to není. Mezitím někteří žáci přišli s poznatkem, že to nejde, protože to od někoho slyšeli nebo četli v nějaké učebnici. Většinu žáků ale toto tvrzení neuspokojilo. Ptali se „Ale proč to nelze?“, chtěli sémantický vhled.

   Po několika neúspěšných pokusech jsme nakonec objevili způsob, jak vnitřní rozpornost dělení nulou otevřít žákům. Trik spočíval v tom, že jsme úlohu „rozdělit spravedlivě 12 jahod mezi 0 dětí“ vložili do série dobře řešitelných úloh: „rozdělit spravedlivě 12 jahod mezi n dětí“, kde n bylo postupně 4, 3, 2 a 1. Případy 4, 3 a 2 byly bez problémů. Případ $n = 1$ vyvolal diskusi, protože „jaképak dělení, když všechno dostane jedno dítě“. Ale případ $n = 0$ byl po kratší třídní diskusi všemi prohlášen za nesmysl. Asi po měsíci jeden žák přinesl učebnici, ve které bylo v rámečku napsáno *NULOU SE NESMÍ DĚLIT*. Řekl, že by tam mělo být *DĚLENÍ NULOU JE NESMYSLNÉ*. Právě poznání nesmyslnosti této operace je poznáním příčiny onoho často opakovaného pravidla o dělení nulou.

   Otázka dělení nulou se objevila opět v 6. ročníku u zlomků. Jednalo se o zlomek $\frac{0}{0}$. Ten byl podle většiny žáků 1. Argument byl nasnadě: $\frac{a}{a} = 1$ pro všechna a, proč ne pro nulu? A navíc, kontrola vychází: $0 \cdot 1 = 0$. Toto přesvědčení vládlo ve třídě až do 7. ročníku. Až zde jeden žák objevil posloupnost, z níž vyplývalo, že $\frac{0}{0} = 2$. Byla to posloupnost rovností $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{0}{0}$. Žáci nebyli ochotni tuto posloupnost akceptovat. Pak se objevily další podobné posloupnosti a žáci, kterým vadila poslední rovnost $\frac{2}{1} = \frac{0}{0}$, začali hledat její jiný tvar. Nakonec souhlasili s tím, že je nutno připustit i $\frac{0}{0} = 2$, i $\frac{0}{0} = 5$, i $\frac{0}{0} = \frac{3}{2}$ apod. Pochopili, že když $\frac{0}{0}$ může být cokoli, nelze s tímto číslem pracovat.

19.10 Závěr

Úvahy o výuce záporných čísel a nuly zakončíme přímou formulací našeho přesvědčení, které jsme již dříve naznačovali, a čtveřicí základních myšlenek, které považujeme za důležité při tvorbě konkrétní koncepce výuky.

Jsme přesvědčeni, že záporné číslo i číslo nula patří na základní školu (a) jako nástroj na uchopení jistých reálných i abstraktních situací i (b) jako nástroj na porozumění těmto situacím.

1. Pojem záporné číslo nestačí budovat pomocí pravidel na zacházení se zápornými čísly. Je třeba budovat jej ve směru strukturálním i ve směru sémantickém. Jinak bude poznání trpět formalizmem.

2. Propedeutiku pojmu záporné číslo je třeba začínat již v 1. ročníku základní školy, aby bylo dost času na získání dostatečného počtu separovaných modelů schopných dovést žáka k objevu generických modelů.

3. Záporným číslům v propedeutickém období není nutno věnovat při vyučování mnoho času. Spíše je třeba ukázat žákům situace, nejlépe hry, jimiž se mohou zabývat i mimo školu. Každý měsíc by se ale měla idea záporného čísla nebo myšlenka, která tuto ideu předchází, ve vyučování objevit aspoň jednou, i když krátce; takto po celou dobu pěti let.

4. Impuls k zaměření pozornosti třídy na záporné číslo, který vzejde od žáka, je cennější než impuls od učitele.

5. Vše, co bylo řečeno o záporném čísle, platí i pro nulu. Zde je navíc žádoucí používat slovo „nula“ při popisu běžných životních situací.

Kapitola 20

Zlomky

Milan Hejný

V úvodní části kap. 19 jsme formulovali několik myšlenek, které se vztahují i k této kapitole; zejména dva hlavní problémy, na které bude zaměřena naše pozornost:

Jaké jsou příčiny nízkého porozumění zlomkům žáky?
Jak je možné daný stav měnit k lepšímu?

Uvedli jsme též, že vzhledem ke zcela jiné poloze problematiky záporných čísel a zlomků v poznávání matematického světa, bude i metodologie výzkumu různá. Právě zde začneme naše úvahy.

20.1 Metodologie

Obě položené otázky jsme zkoumali již od poloviny sedmdesátých let minulého století, především jako součást experimentálního vyučování na základní škole v letech 1975–1979 a 1984–1989. Kromě bohatého výzkumného materiálu z té doby používáme i materiály z různých našich experimentů i převzaté materiály (např. Tichá 1998; Tichá 2003a; Kubínová 2002).

Od začátku je teoretickým nástrojem výzkumu hlavně autorova teorie separovaných a generických modelů (viz kap. 2). Později byly ke studiu použity i jiné teorie, zejména teorie reifikace A. Sfard a teorie proceptu E. Graye a D. Talla (1994). Teorii reifikace prezentuje A. Sfard (1991) jako nástroj na studium pojmotvorného procesu přirozeného čísla.[1]

[1]Vlastní překlad citátu na následující stránce: ... historie čísel zde byla prezentována jako dlouhý řetězec přechodů od operačního ke strukturálnímu chápání: znova a znova byly procesy provedené na již přijatých abstraktních objektech přetvářeny do kompaktních celků, či reifikovány (z latinského slova res – věc), aby se z nich stal nový druh samostatných statických konstruktů. Naše hypotéza je, že tento model může být zevšeobecněn, aby vyhovoval mnoha dalším matematickým myšlenkám.

> . . . the history of numbers has been presented here as a long chain of transitions from operational to structural conceptions: again and again processes performed on already accepted abstract objects have been converted into compact wholes, or reified (from the Latin word res – a thing) to become a new kind of self-contained static constructs. Our conjecture is, that this model can be generalized to fit many other mathematical ideas. (Sfard 1991, s. 14)

Připomeneme, že kostrou teorie reifikace je posloupnost pěti fází

$$\begin{gathered}\text{procesy na objektech } \rightarrow, \\ \rightarrow \text{ interiorizace } \rightarrow \text{ kondenzace } \rightarrow \text{ reifikace } \rightarrow \text{ nový objekt.}\end{gathered} \tag{20.1}$$

Na začátku jsou *činnosti*, u mladších žáků zejména manipulativní. Záznamy o nich se ukládají v paměti žáka jako *zkušenosti*, které se *interiorizují* ve smyslu Piageta (žák si interiorizuje jak činnosti, tak jejich produkty a je schopen vybavit si je ve své představě). Získané zkušenosti, často velice různorodé, se vzájemně propojují a kondenzují[2] do jediného organického celku, který se pak mění na *předpojem* (prekoncept) a *pojem*. Tento poslední krok nazývá A. Sfard *reifikace* kondenzované zkušenosti.

Mezi teorií reifikace a teorií modelů existuje mnoho styčných ploch. Například procesům na objektech z (20.1) odpovídá často etapa separovaných modelů a kondenzaci, ale někdy i reifikaci z (20.1) odpovídá často etapa generických modelů. Teorie reifikace zdůrazňuje dynamické jevy a teorie modelů jevy statické. Tím se oba přístupy doplňují.

Podobně jako A. Sfard i my používáme metodu *genetické paralely*: fylogeneze je studována jako inspirace pro ontogenezi. Zejména tato kapitola je na ní budována.

20.2 Vstupní ilustrace

<u>Ilustrace 1</u>. Alek (7. ročník) je vyvolán k tabuli, aby dokázal, že $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$.

Alek	(napíše na tabuli uvedenou nerovnost) „Protože šest je více než pět“ (píše $6 > 5$) „a protože znaménko nerovnosti se při přetočení zlomků. . . “
Učitelka	(skočí chlapci do řeči, opravuje jeho terminologii) „Při převrácení.“
Alek	(opraví se) „Při převrácení zlomků převrací, je pětina více než šestina.“

Autor o přestávce s Alekem rozmlouval a zeptal se ho, zda by uměl vysvětlit, případně i nakreslit, co to je $\frac{3}{4}$. Hoch to udělal dobře a rychle. Následoval rozhovor (experimentátor je autor):

[2] Pojem *kondenzace* je v psychologii používán ve smyslu S. Freuda jako „symbolický proces, splynutí dvou či více představ, např. ve snu, projevující se chybnými výkony“ (Hartl; Hartlová 2000, s. 268). A. Sfard používá termín v jiném smyslu, jako krok k ekonomizaci myšlení; k jeho zdůraznění jsme v textu použili adjektivum „organický“.

Exp. „Aleku, co je víc nula celá dvacet pět setin, nebo jedna třetina?“
Alek (pauza) „Těch nula celá dvacet pět.“
Exp. „A uměl bys mi to vysvětlit proč?“
Alek „Těch nula celá dvacet pět, to je jako čtvrtina“ (pauza) „dvacet pět korun je čtvrtina stovky.“ (delší pauza) „No a čtvrtina je víc než třetina.“

Komentář 1. Dvě věci zasluhují pozornost – učitelčin důraz na správnou terminologii a konflikt v poznatkové struktuře Aleka, který hoch neeviduje.

Matematická terminologie je komunitou učitelů matematiky i učitelů na 1. stupni základní školy považována za důležitou. Učitelé věnují značnou péči nacvičování termínů, jako jsou součet, rozdíl, dělenec, dělitel . . . Podle našeho názoru bývá toto úsilí často problematické. Je pravda, že přesná terminologie je oporou i pomocníkem přesného myšlení, ale když důraz na termíny vede učitele k přerušení myšlenkového toku žáka (jako v naší ilustraci), pak je to jev spíše negativní. Navíc důraz na terminologii ovlivňuje hierarchii žákových kognitivních hodnot, do popředí klade verbalizmus a potlačuje matematickou myšlenku samu. Dodejme, že např. anglický žák nemá slova pro „činitel“.

V průběhu několika desítek minut Alek vyslovil dvě antagonistické myšlenky:

$$\tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{6} \text{ a } \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{3}.$$

Pozoruhodné je nejen chybné tvrzení, ale především to, že Alek zde necítí rozpor; zřejmě proto, že oba vztahy jsou vloženy do různých, vzájemně nepropojených kontextů – první do kontextu školní aktuální situace, druhý do kontextu běžného života.

Z posledního konstatování plyne důležitý závěr pro hledání vhodnější koncepce výuky zlomků – tematický celek zlomky budovat v úzké návaznosti na životní zkušenosti žáků.

Ilustrace 2. (Tichá[3] 2003a, s. 21) Žáci 7. ročníku dostali za úkol vytvořit slovní úlohu, k jejímuž vyřešení stačí vypočítat $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$. Jeden žák sestavil úlohu: „Byly dvě třídy a z jedné třídy chyběla $\frac{1}{4}$ a z druhé třídy chyběla $\frac{1}{2}$ dětí. Kolik dětí chybělo v obou třídách dohromady?“

Jiný žák, Blažej, řešil danou úlohu takto: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ „Z obou tříd dohromady chyběly $\frac{3}{4}$ žáků.“ Blažej ke svému řešení poznamenal: „Myslím si, že by úloha měla obsahovat, kolik žáků každá třída má. Například: Byly dvě třídy. První třída měla 24 žáků. Druhá třída měla 26 žáků. Z první třídy chyběla $\frac{1}{4}$ žáků, z druhé třídy chyběla $\frac{1}{2}$ žáků. $\frac{1}{4}$ z $24 = 6$, $\frac{1}{2}$ z $26 = 13$, $13 + 6 = 19 = \frac{3}{4}$. Z obou tříd dohromady chybělo 19 žáků tedy $\frac{3}{4}$.“

Následoval rozhovor Blažeje s experimentátorkou, v němž hoch konstatuje, že v obou třídách je dohromady 50 žáků a když chybí 19, je to „míň než půlka.“ (pauza) „No jo vlastně. To je divný“ (pauza) „To nejde“ (pauza) „Tam musí být něco špatně.“ (přepočítává) „Ale zdá se mi to všechno dobře.“

[3]Jsou použité originální české materiály, laskavě zapůjčené autorkou.

Hoch vidí rozpor, ale nedokáže jej vysvětlit. Chce se nad problémem sám zamyslet. Požádal experimentátorku, aby mu neradila.

Komentář 2. Poukážeme na tři věci – úlohu, kterou první žák sestavil, způsob, kterým ji Blažej řešil a jeho závěrečnou žádost.

Sestavená úloha obsahuje deformaci, která je typická pro mnoho žáků – zlomek není chápán jako operátor, ale jako veličina. Blažej při řešení necítí záludnost úlohy a nachází chybný výsledek. Asi cítí, že jeho řešení je nejasné, a proto volí modelovou situaci, aby získal do situace vhled. Pomocí dobře voleného modelu jej dovede experimentátorka k poznání, že v řešení je přítomna chyba, ale chlapec ji nevidí.

Potěšitelná je hochova žádost, aby mu lokalitu chyby experimentátorka neprozrazovala, že se ji pokusí odhalit sám. To ukazuje, že bacil formalizmus (viz kap. 2), který napadl hochovy znalosti o zlomcích, je ještě dobře léčitelný.

Ilustrace 3. (Podle vyprávění Jána Perenčaje.) Cilka navštěvuje 6. ročník. Z matematiky měla zatím pokaždé jedničku, ale ta poslední ji stála hodně úsilí. Začalo druhé pololetí a do jejich třídy přišel nový učitel matematiky. Ke konci hodiny dal náročnou úlohu. Vyřešili ji jen dva žáci a ostatní si ji měli promyslet doma.

Úloha 1. Kolik šestin nutno přidat ke dvěma třetinám, abychom dostali čtyři čtvrtiny?

Cilka chtěla od J. Perenčaja vysvětlit návod na řešení těchto úloh. Když se dověděla, že návod neexistuje, znejistěla. Přes veškeré obapolné úsilí a množství obrázků, které J. Perenčaj nakreslil, byla práce neúspěšná. Nakonec však děvče zazářilo a zvolalo „Už to viem! Je to na odčítanie zlomkov. Ako že $\frac{4}{4}$ mínus $\frac{2}{3}$. To sme vyrátali, ako že $\frac{4}{12}$. Ale to“ (zvýší hlas) „treba ešte vykrátiť dvomi, aby sme mali šestiny. Aha, dve šestiny. Takže sú to dva. Je to tak?“

J. Perenčaj ukončil příběh smutným přiznáním: „Radosť Cilky a moja bezmocnosť spôsobili, že som túto polopravdu zbabelo odsúhlasil a vzdal som sa dalšieho vysvetľovania.“

Komentář 3. Cilka nechápala obrázky a vysvětlování, protože pro ni zlomek není objekt, ale dvojice čísel napsaných nad sebou a oddělených čárkou. Kdyby jí byl J. Perenčaj řekl, že od $\frac{4}{4}$ musí odečíst $\frac{2}{3}$ a výsledný zlomek upravit tak, aby ve jmenovateli bylo číslo 6, byla by asi spokojena a domnívala by se, že úloze rozumí. To aspoň prohlásila, když tento postup sama zformulovala. Cilka má již cestu ke skutečnému chápání zlomků skoro uzavřenu, protože svoje protetické poznání považuje za poznání skutečné.

Závěry. Z ilustrací i zkušenosti víme, že pro mnoho žáků je zlomek jako objekt aritmetických operací pouze uspořádaná dvojice čísel. Pravidla pro práci se zlomky žák uchovává v paměti, ale nedovede

- použít jazyk zlomků při modelování reálných situací – např. určit hmotnost cihly, když víme že váží 1 kg plus půl cihly, nebo určit celek, když $\frac{2}{7}$ z něj je 100 Kč,

- ze známých pravidel vyvodit další pravidla – např. z pravidla pro součet zlomků vyvodit pravidlo pro rozdíl zlomků nebo pro součet zlomku a přirozeného čísla,
- rekonstruovat ta pravidla, která zapomněl – např. když se pravidlo pro úpravu složeného zlomku měsíc nepoužije, mnozí žáci si na něj nedovedou vzpomenout,
- pravidla argumentačně zdůvodnit – např. ukázat, proč z nerovnosti přirozených čísel $m > n$ plyne nerovnost $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$.

Představa zlomku jako např. $\frac{7}{11}$ je u těchto žáků obyčejně prázdná. Někdy nemají představu ani o jednodušších zlomcích. Například Alek chybuje při porovnání zlomků $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$.

Výzva, kterou tato konstatování oslovují učitele matematiky, je jasná: Zjistit, proč se žáci nesnaží zlomky pochopit a dávají přednost učení se zpaměti. V kap. 4 jsme ukázali, že hlavní příčinou paměťového učení se matematice je nízké intelektuální sebevědomí a vypěstovaný styl učení se. Nám zde půjde v případě zlomků o příčinu výlučně kognitivní. Pro první poučení se obrátíme k historii.

20.3 Poučení z historie

Inspirativním zdrojem pro porozumění ontogenezi zlomků je jejich fylogeneze. Zlomky znali již staří Egypťané. Znali je jako nástroj k řešení úloh, zejména úloh typu:

Úloha 2. Spravedlivě rozděl m chlebů mezi n lidí.

Dnešní školák úlohu vyřeší okamžitě. Řekne, že na každého připadne $\frac{m}{n}$ chleba. Když například mám rozdělit 5 chlebů mezi 21 lidí, každému dám $\frac{5}{21}$ chleba. Pro egyptské písaře takové řešení neexistovalo, protože oni nevěděli, co to $\frac{5}{21}$ je. Pracovali pouze s kmenovými zlomky (to jsou zlomky ve tvaru $\frac{1}{n}$) a dělení chápali jako proces, nikoli koncept. Podle egyptského písaře každý podílník dostal $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ chleba. V historické literatuře najdeme osvětlení takového postupu přepsaného do soudobé symboliky:

Číslo 5 (čitatel) rozložím na $1+2+2$. V tabulkách vyhledám, jak lze 2 chleby rozdělit mezi 21 lidí. Najdu vztah $\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$. Podle toho by každý podílník měl z prvního chleba dostat $\frac{1}{21}$, z další dvojice chlebů $\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ a totéž z poslední dvojice chlebů. Ale $\frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}$ a $\frac{1}{42} + \frac{1}{42} = \frac{1}{21}$. Tedy každý podílník měl dostat $\frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$. Ale $\frac{1}{21} + \frac{1}{21}$ je podle tabulek totéž jako $\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$. Tedy $\frac{5}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.

B.V. Bolgarskij, od kterého jsme uvedenou ilustraci převzali, vyslovuje hypotézu o příčinách tak složitého postupu:[4]

[4] Vlastní překlad citátu na následující stránce: Takový, na náš vkus příliš zdlouhavý proces, dával někdy výsledky užitečnější pro praxi, než je naše odpověď na otázku, co je to $\frac{5}{21}$. Například úloha rozdělit 7 chlebů mezi 8 lidí dává řešení $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, který ukazuje způsob, jak se mají chleby dělit: 4 chleby rozpůlíme, dva rozčtvrtíme a jeden rozdělíme na 8 stejných dílů.

> Такой длительный, на наш взгляд, процесс иногда давал результаты, практически более полезные, чем наше простое выражение ответа в виде дроби $\frac{5}{21}$. Например, задача о разделении семи хлебов на 8 человек даст решение таково вида: $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, что укажет на способ, каким надо разрезать хлебы: 4 хлеба надо разрезать пополам, 2 хлеба – разрезать на 4 части и один хлеб – на 8 частей.
>
> (Bolgarskij, 1974, s. 29)

B.V. Bolgarskij má pravdu. Pro životní potřeby je egyptský způsob rozdělování nejlepší možný – přinejmenším pokud jde o zlomek $\frac{7}{8}$. Rozhodně tento historický poznatek zasluhuje pozornost didaktiky.

Ve fylogenezi trvalo více než 3 000 let, než se lidé naučili chápat zlomky v takovém duchu, jak je předkládáme žákům na 2. stupni základní školy dnes. Více než 1 000 let pracovali egyptští počtáři pouze s kmenovými zlomky jako menšími jednotkami počítání s částmi. Kmenový zlomek je tedy konceptem, který umožňuje práci s částí, a též prekonceptem (předpojmem) jmenovatele zlomku. Ve vyučování však kmenovému zlomku věnujeme malou pozornost.

Současný způsob zavedení pojmu zlomek ve škole použije pojem kmenového zlomku, ale jen jako předstupně pojmu zlomek. Pojem zlomku je totiž založen na konstrukci

$$1 \to \frac{1}{n} \to m \cdot \frac{1}{n} \to \frac{m}{n}. \tag{20.2}$$

Egypťané udělali pouze první krok tohoto procesu a zde ustrnuli na více než 1 000 let. Zde tedy dochází k dramatickému rozporu mezi fylogenezí a ontogenezí a my se ptáme, jak si lze vysvětlit, že existovala vyspělá civilizace, která ve vývoji pojmu zlomek ustrnula na tisíc let na pomocném pojmu kmenový zlomek. Není to náhodou tak, že z hlediska vývoje není pojem kmenového zlomku přechodové stádium, ale důležitá vývojová etapa? Je-li tomu tak – a my jsme přesvědčeni, že tomu tak je –, pak je potřebné zásadní přehodnocení koncepce výuky zlomků. Navrhovaná koncepce by se od stávající lišila zejména v tom, že by kmenový zlomek chápala jako nosný pojem, kterému je nutno věnovat dostatek času i pozornosti.

20.4 Projekce poznatků fylogeneze do ontogeneze

Význam kmenového zlomku jsme zatím opřeli pouze o argument paralely mezi fylogenezí a ontogenezí. Podívejme se podrobněji na mechanizmus pojmotvorného procesu pojmu zlomek a pokusme se zde najít přímé důkazy pro naši tezi, že kmenový zlomek není přechodný pojem před zavedením zlomku, ale důležitá vývojová etapa.

Konkretizujme posloupnost (20.2) pro případ zlomku $\frac{7}{8}$. Žák 6. ročníku základní školy, který má ukázat, co je to $\frac{7}{8}$ dortu, rozdělí dort na osm dílů a sedm dílů vybarví. Když sledujeme toto počínání, jsme ochotni uvěřit, že i poznávací proces probíhá stejně: Nejprve se naučíme spravedlivě dělit dort (nebo cokoli jiného) na osm stejných dílů a pak již s těmito díly pracujeme jako s kusy, tedy použijeme to, co známe již z prvních pěti let školské docházky. Učitelé, s nimiž jsme o náročnosti představy zlomku diskutovali, tvrdili, že představa zlomku sama o sobě nedělá dětem žádné potíže. Ty nastanou, až se se zlomky začne pracovat.

Takový pohled je ale rozporuplný. Mít představu o jistém pojmu přeci neznamená umět tento pojem popsat v jediném kontextu, ale umět s ním zacházet v různých kontextech. To, co žáci znají, je dvoukrokový algoritmus, jehož výsledkem je jedna reprezentace zlomku:

$$\text{celek} \rightarrow \textit{dělení celku na } 8 \textit{ stejných částí} \rightarrow \text{osmina} \rightarrow \textit{vyznačení } 7 \textit{ částí} \rightarrow \frac{7}{8} \qquad (20.3)$$

To ovšem není ještě kvalitní představa zlomku $\frac{7}{8}$. Alek (ilustrace 1) zná tento algoritmus, ale přesto tvrdí, že „čtvrtina je víc než třetina“. To znamená, že při řešení jednoduché úlohy nepoužil představy těchto zlomků. Blažej (ilustrace 2) jistě umí nakreslit číslo $\frac{3}{4}$, ale tvrdí, že 19 žáků z 50 jsou $\frac{3}{4}$. Chyby, jichž se chlapci dopouštějí, jsou důsledkem nedostatečné znalosti. Zlomky neznají v kontextu, který před ně klade daná úloha. Připomínají dítě, které ví, že sníh je bílý, ale na naší vlajce nedovede ukázat, která je bílá barva.

Podívejme se na posloupnost (20.3) jako na poznávací mechanizmus. V posloupnosti jsou tři koncepty – celek, osmina, sedm osmin, a dva procesy – psány kurzívou.

Koncept *celek* je vstupní a žáci mu dobře rozumí. Koncept *osmina* vznikne reifikací činnosti, která začíná manuální prací na objektech, tedy dělením jistého celku (dortu, tyče, sáčku kuliček) na osm stejných částí. Tato činnost rukou je interiorizována, množící se zkušenosti jsou kondenzovány, až dojde k reifikaci, k vytvoření představy konceptu osmina. Koncept sedm osmin je pak vytvořen snadno, protože se zde opakuje již žákem dobře osvojený proces vyčlenění sedmi kusů z množiny osmi takových kusů. Zde proběhnou interiorizace, kondenzace a reifikace velice rychle, téměř současně.

Z uvedeného plyne, že těžištěm postupu (20.3) je první reifikace, která z činnosti dělení celku vytvoří koncept kmenového zlomku. Krok, který pak vede od kmenového zlomku ke zlomku, se jeví jako drobnost. Jenže právě tento zdánlivě nepodstatný krůček

mění objekt popsaný jediným číslem na objekt popsaný dvěma čísly,

a to výrazně přispívá k zániku představy zlomku a nahrazení této představy dvojicí čísel. Všechny další operace se zlomky se ve vědomí žáka uchovávají jako pravidla, která právě kvůli velkému počtu čísel účastnících se operace dělají příslušný návod paměťově náročný. Podle nás je právě druhá reifikace v postupu (20.3) příčinou kolapsu celého pojmotvorného procesu.

V jazyce separovaných a generických modelů můžeme uvedenou tezi formulovat takto: Dříve než je vybudován generický model kmenového zlomku, přicházejí do vědomí žáka separované modely zlomků s čitatelem různým od 1 a v představách žáka dochází v důsledku uvedené „rozmazanosti" dvou pojmů k tápání, které končí metakognitivním rozhodnutím „budu se držet pravidel, ta jsou jistá". Ona „rozmazanost" je žákem pociťována jako nejistota vzájemného propojení čitatele a jmenovatele.

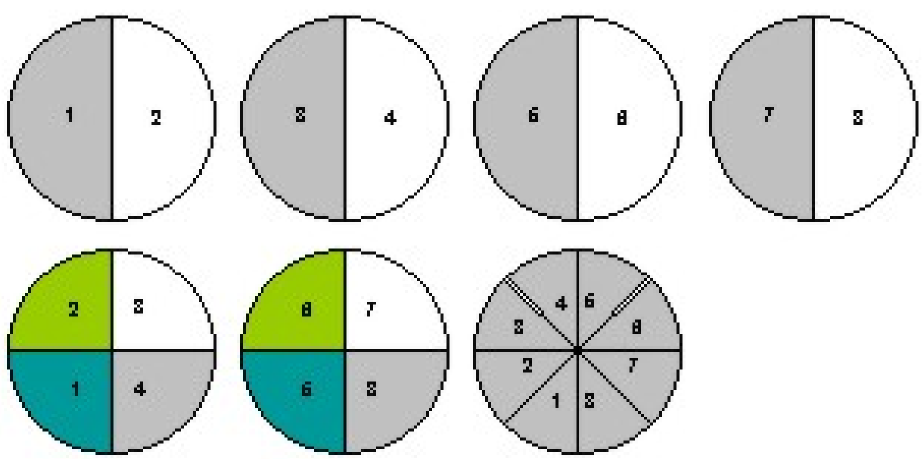
Učitelé, s nimiž jsme diskutovali o návrhu věnovat více pozornosti kmenovým zlomkům, mínili, že by to bylo velice nezáživné. Tento argument diskutujeme v další kapitole.

20.5 Kmenové zlomky jako tematický celek

Zmíníme dvě edukační strategie otevírání světa kmenových zlomků. Obě jsou inspirovány historií. První, sémantická, byla ověřována v experimentálním vyučování v 5. a 6. ročníku a v klinických experimentech, druhá, komplexní, v experimentálním vyučování v 7. ročníku.

Základem sémantické strategie je manipulace žáka s objekty: 7 chlebů (= kruhů) máme rozdělit spravedlivě mezi 8 podílníků. Egyptský návod použije rozklad $\frac{7}{8}$ na $\frac{4+2+1}{8}$, tedy $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Tento sofistikovaný postup se v našich experimentech neobjevil. Všichni žáci kruhy stříhali, ať již pomyslně nebo doopravdy. Po několika málo pokusech dospěli žáci 5. ročníku, pracující ve dvojicích, většinou k dělení naznačenému na obr. 20.1. Jejich postup měl tři kroky:

1. čtyři chleby rozpůlíme a každý z osmi podílníků dostane jednu půlku,
2. zůstaly tři chleby, dva z nich rozčtvrtíme a každý podílník dostane $\frac{1}{4}$ chleba,
3. zůstal jediný chléb; ten rozdělíme na osm dílů a každý podílník dostane $\frac{1}{8}$ chleba.



Obr. 20.1

Podobným způsobem řeší žáci rozklad zlomků $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ apod. Tím do zlomků získávají činnostní vhled, tj. vytvoří si tak generický model pro „hladký“ způsob dělení.

Dodejme, že žákům jsme dali k dispozici šablonu na dělení kruhu na 5, 7, 9 a 12 částí.

Náročnější situace nastane, když v některém kroku dělení vznikne zůstatek, který není složen z celého počtu chlebů. Zde musí žáci svoje řešení obohatit o nový objev.

Ilustrace 4. Dano a Denisa (5. ročník) dělili čtyři chleby mezi pět podílníků. Při prvním dělení dali každému podílníkovi polovinu chleba a zůstalo jim jeden a půl chleba. Vznikla nová situace. Ve všech předchozích případech zůstalo pokaždé několik celých chlebů. Chvíli na to bezradně hleděli, pak pracovali samostatně. Po chvíli každý našel vlastní řešení. Denisa rozdělila na pět stejných kusů jak půl chleba, tak i celý chleba. Došla k rozkladu $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$. Dano rozdělil celý chléb na poloviny, a tak dostal tři stejné půlky. Každou z nich rozpůlil a dostal šest čtvrtek. Pět z nich rozdal a poslední rozdělil na pět dílů. Došel k rozkladu $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Mezi žáky vypukl spor, které řešení je správné. Spor řešila celá třída a s překvapením zjistila, že obě řešení jsou správná. Tyto úlohy mohou mít i více řešení. Později většina žáků třídy používala Danův postup. Ten se stal generickým modelem pro úlohy o dělení chlebů.

Komentář 4. Danův generický model lze popsat takto: Mám několik chlebů a více podílníků. Všechny chleby nakrájím na stejné kusy tak, aby kusů bylo aspoň tolik, kolik je podílníků, a aby byly co největší. Každý podílník dostane jeden kus. Jestliže několik kusů zůstane, považuji je za nové celky a dělím je stejným postupem na kousky. Jestliže i teď několik kousků zůstane, považuji je za celky a pokračuji v procesu. Tak se stejná procedura opakuje a mění se jen jazyk: chleba → kus, kus → kousek, kousek → kousínek atd. Kdybychom měli pokračovat, dostali bychom se do potíží se zdrobňováním slova kus. Naštěstí úlohy, které se dají použít, mají maximálně tři kroky. Ty stačí i na rozklad zlomku $\frac{5}{21}$: Dělíme 5 chlebů mezi 21 podílníků. Nestačí dělit chleby na čtvrtiny, protože těch máme jen 20. Proto je kus $\frac{1}{5}$ chleba. Rozdáme 21 kusů, zůstanou nám 4 kusy. Dělíme 4 kusy mezi 21 podílníků. Nestačí dělit kusy na pětiny, protože těch máme jen 20. Proto je kousek $\frac{1}{6}$ kusu. Rozdáme 21 kousků, zůstanou nám 3 kousky. Dělíme 3 kousky mezi 21 podílníků. Každý podílník dostane $\frac{1}{7}$ kousku. Jsme u konce. Celkově každý podílník dostane jeden kus, jeden kousek a $\frac{1}{7}$ kousku (tj. kousínek). V jazyce čísel je to $\frac{5}{21} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210}$. Všimněme si, že je to jiný rozklad než ten, který je uveden v oddíle 20.3.

Druhá edukační strategie, která otevírá svět kmenových zlomků žákům 7. ročníku, je podrobně rozpracována a ilustrována v práci (Kubínová 2002).

20.6 Reprezentace zlomku

Dosud jsme se při sémantických představách kmenových zlomků setkali pouze s modelem kruh. Ukážeme, že žáci přirozeně používají všechny základní modely: stupnici, veličinu, počet, úsečku, kruh, obdélník. Použijeme experimenty z roku 1978, v nichž jsme zjišťovali, kteří žáci raději použijí desetinná čísla a kteří zlomky. Dávali jsme žákům úlohy, v nichž se prolínala desetinná čísla se zlomky. Jedna z nejčastěji používaných úloh zněla takto:

Úloha 3. (Viz též ilustrace 1.) Co je víc, $0{,}25$ nebo $\frac{1}{3}$? Vysvětli proč.

Z asi šedesáti žáků 6. a 7. tříd, kteří úlohu vyřešili správně, většina převáděla $\frac{1}{3}$ na desetinné číslo asi tak, jak to udělal Eda v ilustraci 5b. Jen 21 z úspěšných řešitelů použilo zlomky. Těm řešitelům, kteří žádné vysvětlení nedali, a těm, kteří k vysvětlení použili pravidla $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, jsme pak v následném rozhovoru kladli otázku, jak by to vyložili žákovi 4. ročníku. Tak jsme získali třináct řešení se smysluplným vysvětlením opřeným o představy žáka. Dodejme, že každý z těchto třinácti řešitelů okamžitě věděl, že $0{,}25 = \frac{1}{4}$.

V souboru získaných žákovských řešení jsme evidovali šest různých typů sémantických reprezentací zlomků. Každá reprezentace byla prezentována separovaným modelem, ale v případě Edy bylo jasné, že rozumí i příslušnému generickému modelu.

Ilustrace 5a. Eva (5. ročník): „Třetina je víc. Je to i na odměrce. Mě to překvapilo, ale babička mi to vyložila, že když pro tři, dostane každá bábovka víc.“ Eva vysvětlila, že když pomáhala babičce zadělávat na bábovku, babička ji pověřila, aby naměřila čtvrtinu litru mléka. Pak řekla, ať to doleje na třetinu. Dívku to překvapilo. Jako že tři je víc než čtyři. Babička vnučce vysvětlila, že když se dává na jednu bábovku třetina litru mléka, bude jeden litr stačit na tři bábovky, a když čtvrtina, bude to stačit na čtyři bábovky. Dívce je popsaná situace zcela jasná. Na otázku, co je víc, zda třetina nebo pětina, dívka odpovědět neumí.

Ilustrace 5b. Eda (5. ročník): „Ze stokoruny je to dvacet pět korun a“ (pauza) „třicet tři“ (delší pauza) „korun. Jo, třicet tři a“ (delší pauza) „ta“ (pauza) „těch třicet tři je víc.“ Na otázku experimentátora, co je tedy víc, zda třetina nebo čtvrtina, hoch ihned řekl, že třetina.

Ilustrace 5c. Ester (6. ročník): „Ze šesti jablek je nula celá pět tři jablka a nula celá dvacet pět“ (delší pauza) „Ne. Z dvanácti jablek jsou to šest a“ (pauza) „tři jablka, jsou to tři a třetina z dvanácti jsou čtyři. Čtyři je víc.“ (Dívka se podívá na experimentátora a vidí, že on ještě na něco čeká.) „Tedy čtvrtina, ehm, Θ totiž třetina je víc.“

Ilustrace 5d. Erik (7. ročník) ihned odpověděl správně a experimentátor požádal o vysvětlení. Erik nakreslil úsečku a rozdělil ji na třetiny. „Toto je třetina“ (vyznačuje levou třetinu úsečky) „a tady někde“ (dělí úsečku na poloviny a levou polovinu půlí) „tato čtvrtina“ (vyznačuje levou čtvrtinu) „to je těch nula celá dvacet pět, to je míň – to je vidět.“

Ilustrace 5e. Emil (5. ročník): „Jako třetina dortu a nula celá dvacet pět dortu?“
Experimentátor: „Například pomocí dortu, jak chceš.“
Emil: „No jo“ (kreslí nejprve jeden kruh a dělí jej na třetiny, jednu vyšrafuje; pak druhý kruh dělí na poloviny a jednu polovinu půlí; jednu čtvrtku druhého kruhu vyšrafuje; obrázky jsou nepřehledné), „to je blbě. Takhle“ (kreslí další velký kruh, pečlivě jej dělí na třetiny; pak do jedné třetiny vyznačí čtvrtinu kruhu). „Jo, ta třetina je víc.“

Ilustrace 5f. Elena (7. ročník).

Elena	„Třetina.“
Exp.	(ví, že dívka má mladší sestru) „Uměla bys to vysvětlit své sestře?“
Elena	„Jo. Takhle.“ (pauza) „No jo, ale ona neví, co to je těch nula celá dvacet pět.“
Exp.	(pauza) „No dobře, tak uměla bys ji vysvětlit, že třetina je víc než čtvrtina?“
Elena	„Vemu čokoládu“ (kreslí obdélník a dělí jej na „kostičky“ – 3 řádky a 4 sloupečky) „Pak jí řeknu,“ (pauza) „ne“ (pauza) „zeptám se jí, co je třetina, a ona ukáže tyto čtyři. Pak ať mi ukáže čtvrtinu a ona ukáže tyto tři čtverečky.“ (pauza) „A pak se jí zeptám, zda chce raději třetinu nebo čtvrtinu.“

Komentář 5. Náš přehled pokrývá všechny základní typy sémantických modelů zlomků: *veličinu* (případy a, b), *počet* (c), tyč = *úsečku* (d), dort = *kruh* (e) a čokoládu = *obdélník* (f).

Ve všech ilustracích žák vztahu $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ dobře rozumí. U Evy byl tento poznatek nejprve uložen do vizuální paměti jako údaj překvapivý, pak byl babičkou osvětlen, ale zůstává stále jen jako separovaný model. Nevíme, zda ve vědomí dívky utkvělo i to, že na odměrce byla i čísla $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{5}$ a že pomocí jejich polohy na odměrce lze dané zlomky porovnat. Víme jen, že dvojici zlomků $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{5}$ porovnat neuměla.

Pokusme se zjistit, do jaké míry je u dalších dětí vztah $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ modelem separovaným nebo již generickým. Popřípadě zda je již zárodkem abstraktního poznatku, že pro kladná čísla a, b je $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Emil by pravděpodobně uměl porovnat každé dva kmenové zlomky, které dokáže dosti přesně nakreslit v kruhovém modelu. Které to jsou, nevíme. Na druhé straně Erik i Elena zřejmě mají porovnání kmenových zlomků již na úrovni generického modelu, možná i abstraktního poznatku. Soudíme tak na základě jistoty, s níž danou úlohu řešili. Korekce, které v úvahách žáci dělají a které učitelé nezřídka považují za jistý nedostatek žákovy znalosti, jsou de facto důkazem neformálnosti poznatku. Žák nereprodukuje naučenou věc, ale před zraky experimentátora hledá a tvoří vhodný model problémové situace. Tak Eda zvažuje nepřesnost čísla 33, ale pak vidí, že to v dané situaci není podstatné. Ester ve dvou krocích hledá číslo, z něhož jak třetina, tak čtvrtina je celé číslo. Emil se ztratil v nepořádně kresleném obrázku, ale pak zvýšenou pečlivostí demonstroval dobrý argument.

Konečně Elena prezentovala svoje skvělé pedagogické schopnosti. Již první poznámka, že sestra neví, co je 0,25 ukazuje, že se dobře vžila do dané edukační situace. Čistý konstruktivistický způsob komunikace – vést sestru k poznání pomocí otázek – je u žáků tohoto věku zcela ojedinělý. V experimentech z roku 1978 (pracovalo se s více než 150 žáky) jsme evidovali, že ani tak jednoduché zlomky jako je $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$ skoro polovina žáků 7. ročníku nedovede bezpečně použít ve složitějších kontextech. Naopak žáci, kteří mají vybudován generický model pojmu kmenový zlomek v činnostním módu, dokáží analyzovat i situace s nekmenovými zlomky. Proto jsme nabyli přesvědčení, že didakticky nejúčinnějším vstupem do světa zlomků je pojem kmenového zlomku prezentovaný v činnostním módu.

Popsaný výzkum již využíval naše zkušenosti získané v roce 1976 při experimentální výuce v 5. ročníku základní školy. V té době autor pod vedením svého otce V. Hejného vstupoval do didaktiky matematiky a na jeho podnět připravil a v 5. ročníku základní školy Košická v Bratislavě v prosinci roku 1976 i částečně realizoval scénář výuky zaměřené na propedeutiku zlomků. Scénář byl vytvořen metodou genetické paralely (s výrazným využitím historických poznatků o zlomcích). Tomuto tématu je věnován následující oddíl.

20.7 Příprava a realizace experimentálního vyučování kmenového zlomku

Příprava na experimentální vyučování egyptských zlomků měla dvě části: tvorba motivačního příběhu a tvorba souboru úloh, které budou žákům předloženy k řešení. Motivační příběh využíval tajuplnosti a číselné zajímavosti egyptských pyramid získaných z knihy V. Zamarovského *Jejich veličenstva Pyramidy*. Součástí motivační přípravy bylo i seznámení se s egyptským zápisem čísel a vyřešení několika úloh na sčítání, odčítání a násobení. Přitom bylo použito egyptské procedury násobení založené na zdvojování.

Násobení zdvojováním uvedeme na příkladě $167 \cdot 13$. Nejprve je větší číslo postupně zdvojováno: (1) 167, (2) 334, (4) 668, (8) 1 336. Pak je udělán dvojkový rozklad menšího čísla: $13 = 8 + 4 + 1$. Konečně jsou příslušné násobky prvního čísla sečteny $1\,336 + {}$ $+668 + 167 = 2\,171$. V soudobém jazyce $167 \cdot 13 = 167 \cdot (2^3 + 2^2 + 2^0) =$ atd.

$$\begin{array}{lll}
\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, & \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, & \frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\[2ex]
\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, & \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, & \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}, \\[2ex]
\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, & \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}, & \frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \\[2ex]
\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}, & \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, & \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}.
\end{array}$$

Připravený soubor dvanácti úloh bylo možné kdykoli doplnit. Motivace byla nad očekávání úspěšná, žáci byli zaujati i egyptským způsobem zápisu čísel. Hodně práce udělali doma. Několik žáků bylo silně motivováno egyptským násobením a v 6. ročníku, když jsme se učili počítání v Bilandu (země, kde se pracuje pouze s číslicemi 0 a 1), velice rychle získali vhled do dvojkové soustavy. Po této, asi týdenní, převážně domácí přípravě, byla zadána úloha 4.

Úloha 4. Tři koláče máme spravedlivě rozdělit mezi Adama, Bětku, Cyrila a Danu. Jak to udělat? (Učitel nakreslil na tabuli tři stejné kruhy jako obrázek koláčů i postavičky dětí.)

Žáci každý koláč rozčtvrtili a dali každému dítěti čtvrtku z každého koláče. Pokusy učitele přesvědčit žáky, že je třeba hledat řešení s menším počtem řezů, nenašly u třídy odezvu. Žáci tvrdili, že koláče mohou být různé (makový, tvarohový . . .) a jediné spravedlivé krájení je takové, že se každý koláč rozčtvrtí. Učitel nevěděl, jak situaci vyřešit, a tak dal žákům další úlohu. Situace se však opakovala. Když následující den z bezradnosti učitel ukázal žákům „svoje“ řešení, zájem žáků opadl. Navíc se ukázalo, že mnoha žákům dělá potíže vidět v polovině ze třetiny jednu šestinu, dělit kruh na třetiny nebo pětiny. To učitel nečekal. Proto experiment s egyptskými zlomky skončil předčasně.

Komentář. Tři hlavní příčiny neúspěchu experimentu byly:

- nevhodná formulace úloh, která nevedla žáky k očekávaným řešitelským postupům,
- použití jen obrázkových a ne předmětných modelů,
- nepřipravenost žáků v oblasti potřebných znalostí, že totiž m-tina z n-tiny je mn-tina.

Kladem experimentu byla motivační fáze, seznámení žáků s jiným přístupem k aritmetice a cenné zkušenosti, které získal učitel. V té době měl jen tříměsíční zkušenosti s vyučováním na základní škole a neuvědomoval si, co všechno mohou žáci nevědět. Podcenil význam předmětných modelů a manipulativní činnosti žáků. Pochopil, že nestačí kruhy malovat na papír nebo tabuli – je třeba je vyrobit z papíru a skutečně stříhat a kousky vzájemně poměřovat.

Ke zde popsané myšlence jsme se nevrátili ani podruhé, protože tam jsme ověřovali jiný didaktický přístup k pojmu zlomek. I v něm byly respektovány všechny tři teze, které jsme uvedli v předchozím textu: práci se zlomky zahájit co nejdříve, vybudovat nejprve procept kmenového zlomku, generické modely postavit na činnostním základě.

20.8 Závěr

V úvodu jsme formulovali dvě otázky. První z nich, zaměřená na hledání příčin nízkého porozumění zlomkům žáky, měla teoretický charakter. Druhá byla orientována k praxi a měla tedy aplikační charakter.

Za hlavní výsledek studie považujeme teoretickou analýzu prvního problému, zejména pak zjištění, že ke konstrukci pojmu *zlomek* je nutná znalost konceptu *kmenový zlomek*. K tomuto zjištění jsme dospěli propojením tří myšlenkových proudů. Jsou to:

- experimentální zkušenosti (vlastní i zprostředkované) se žáky ve věku 9–14 let,
- paralela ontogeneze a fylogeneze,
- teorie reifikace a teorie separovaných a generických modelů.

Každá z těchto oblastí se podílí na argumentaci uvedeného výsledku.

Uvedené zjištění napovídá odpověď na druhý z problémů. Ke zlepšení výuky zlomků může významně přispět dlouhodobé budování pojmu kmenový zlomek v prvních pěti letech školní výuky. V kapitole jsou uvedeny i konkrétní postupy, které pro takovou edukační strategii navrhujeme.

Kapitola 21

Matematické objevování založené na řešení úloh

Jarmila Novotná

21.1 Úvod

Konstruktivistický přístup k vyučování vychází z přesvědčení, že učení je dynamický proces, ve kterém žáci musí být aktivními účastníky (viz kap. 1). K aktivnímu přístupu k učení lze žáky podněcovat různými způsoby. Nabídneme jim činnosti, při nichž si budou práci opravovat a kontrolovat sami (buď svou vlastní, nebo vzájemně) a při nichž budou potřebovat vyhledat některé informace sami z různých zdrojů. Povedeme je k aktivnímu experimentování a k tomu, aby využívali svých zkušeností. Zaujme-li učitel postoj pomocníka a průvodce, podporuje žáky, aby převzali za vlastní učení zodpovědnost (Petty 1996).[1]

Z rozhovorů s učiteli víme, že zařazení experimentování do předmětů, jako je chemie nebo fyzika, považují většinou za samozřejmé. Objevování ve vyučování matematice však už tak jednoznačně přijímáno není. Příčinu vidíme hlavně v malé zkušenosti učitelů s touto vyučovací strategií a v nedostatečném přístupu k materiálům, které by učiteli pomohly při přípravě vhodných témat a situací.

V dalším textu se budeme zabývat pouze případem objevování zařazeného do vyučování, objevování matematických pojmů a jejich vlastností dítětem mimo školní vyučování není předmětem této studie. S ním je možno se podrobně seznámit např. v knize (Hejný; Kuřina 2001).

[1]Z prací zaměřených na aktivity, které tento přístup podporují, zmiňme např. (Spaulding 1992, Koman; Tichá 1997/98, Kubínová; Novotná; Littler 1998, Lokšová; Lokša 1999, Novotná; Hanušová 2000, Hejný; Kuřina 2001).

Objevování v matematice je založeno na řešení úloh. Zahrnuje takové procesy, jako je např. hledání souvislostí, interpretování, formulování úloh, získávání a záznam dat, rozhodování, formulování a testování hypotéz, odůvodňování, abstrahování, komunikování. Současně podporuje individualizaci vyučovacího procesu a umožňuje zohlednit různé učební styly žáků (Mareš 1998).

Objevování v matematice patří zpravidla mezi aktivity pro žáky motivující a zábavné. Vede je k porozumění látce a k využití dosavadních znalostí a zkušeností. Podněcuje je, aby vnímali učení jako činnost, kterou konají oni sami a za jejíž výsledky jsou také oni sami odpovědní.

21.2 Formulace problému

Zařazení objevování do vyučování matematice je účinným didaktickým prostředkem pro rozvoj znalostí a dovedností žáka (a to nejen v matematice). Avšak bez podrobného porozumění procesu objevování je naděje na to, že příslušná výuková jednotka splní očekávání učitele i žáků, malá. *Cílem této kapitoly je proto popsat model procesu objevování ve vyučování matematice a zformulovat hlavní doporučení pro jeho zařazování do konkrétního vyučování, a to jak vzhledem k učiteli samotnému, tak i vzhledem k organizaci výukových sekvencí a prostředí, v němž se odehrává.*

Některé aspekty přípravy učitele a zařazení objevování do konkrétního vyučování budeme ilustrovat na experimentu, při němž byla stejná základní situace pro objevování zpracovávána skupinou studentů – budoucích učitelů matematiky, a žáky 2. stupně základní školy. Hlavním cílem experimentu bylo ověřit v praxi vhodnost vytvořeného modelu objevování. Současně byl připraven tak, aby umožnil budoucím učitelům porovnat vlastní očekávání a zkušenosti s tím, jak výuková sekvence proběhne se žáky. Taková zkušenost pomáhá odbourávat často se objevující obavy učitelů, že se jim výuková sekvence „vymkne z rukou“, že nesplní to, co oni sami očekávali a pro co ji připravili.

21.3 Model procesu objevování

V následujícím textu nejprve popíšeme model procesu objevování ve vyučování matematice, v němž rozdělíme celý proces do etap. Model je určen hlavně k tomu, aby usnadnil učiteli přípravu a realizaci výukové jednotky.[2]

Jak již bylo řečeno, je objevování založeno na řešení úloh. Samotný proces řešení úloh byl studován a modelován řadou autorů. Některé modely jsou prezentovány např. v (Novotná 2000a). Podrobněji je jeden z modelů popsán v kap. 22. Probíhá-li řešení

[2] Vycházíme z (Novotná 2000b).

úloh v komplexnější situaci, je model řešitelského procesu „košatější“. Např. v (Koman; Tichá 1997) je model uchopování situací z běžného života rozdělen do sedmi etap.

Rozdělení řešitelského procesu do etap je rozdělení teoretické. Ve skutečnosti může řešitel některé etapy úplně vynechat, nemusí dodržovat pořadí etap, může se k některým opakovaně vracet apod. Hranice mezi jednotlivými etapami není vždy zřetelná. Na rozdělení do základních etap je tedy třeba vždy pohlížet jako na model a ne jako na „předepsaný postup“.

Na základě zkušenosti se zařazováním objevování do vyučování matematice budeme za základní etapy procesu objevování ve vyučování matematice považovat:

- *(Nesystematické) poznávání situace*, které může probíhat individuálně, v malých skupinách nebo v celé třídě. V této etapě jsou nesystematicky získávány zkušenosti související se zadanou situací. Je to etapa nezastupitelná, protože v jejím průběhu řešitelé získávají aspoň částečný vhled do situace a mohou odhalit efektivní způsob další práce.
- *Systematické zkoumání*. V této etapě jsou výsledky zaznamenávány organizovanou formou, která umožňuje snáze nacházet zákonitosti, vzájemné vztahy, strukturu.
- *Tvorba hypotéz*. Sem patří zobecňování výsledků na více případů, než bylo zkoumáno v předchozích etapách, nebo předpovídání výsledků pro další případy.
- *Testování hypotéz*. Hypotézy vyslovené v předchozí etapě vyžadují ověření správnosti. To může probíhat buď formou hledání/nalezení vhodného protipříkladu (který hypotézu vyvrací), nebo jejím (různě podrobným, v závislosti na věku a schopnostech žáků často neúplným) odůvodněním.
- *Vysvětlování* nebo *prokazování*, které provádíme vždy, ať se platnost hypotézy podařilo ověřit, nebo vyvrátit. V této etapě se může stát, že žáci v návaznosti na hypotézu objeví, případně navrhnou další hypotézy, které dosud nezkoumali. Pak se často vracejí k předchozí etapě a pracují s nově formulovanou hypotézou.
- *Rozvinutí situace*, při němž je možno sledovat další související úlohy a směry zkoumání. Tato etapa často nebývá samostatná, ale prolíná všemi ostatními etapami.
- *Shrnutí*, při němž se písemnou nebo ústní formou přehledně uvádí, co bylo získáno v předchozích etapách, jak by bylo možno dále pokračovat, co zůstalo nedokončeno a proč apod. Tato etapa by měla u žáků podporovat schopnost systematicky shrnout získané poznání a pomocí tohoto přehledu docílit lepšího vhledu do problematiky. Současně podporuje kritický pohled na dosažené výsledky a schopnost jasně formulovat myšlenky a obhajovat vlastní názor.

Analýza výukových jednotek věnovaných objevování, které byly zařazeny jak v povinných, tak i v nepovinných hodinách matematiky, potvrdila užitečnost rozdělení procesu objevování do popsaných etap.

21.4 Experiment

Zkušenost z vyučování potvrzuje, že největší překážkou pro zařazování objevování do vyučování matematice není malá schopnost žáků zapojit se do objevování, ani jejich nedostatečné matematické znalosti a dovednosti, ale je jí nedostatečná zkušenost učitelů s touto činností. Proto věnujeme velkou pozornost práci s učiteli, a to jak v přípravě budoucích učitelů matematiky, tak i v kurzech dalšího vzdělávání učitelů. Experiment, který prezentujeme, byl realizován s budoucími učiteli matematiky.

21.4.1 Popis experimentu

Aktivita pro objevování byla zadána v této podobě:

Sudá a lichá (Bastow aj., nedatováno)

Zkoumejte posloupnosti čísel vytvořených podle následujících dvou pravidel: Je-li číslo liché, je následující číslo rovno číslu o jedničku menšímu. Je-li číslo sudé, je následující číslo jeho polovinou. Např. pro číslo 106 dostanete: ....

Byly realizovány dva experimenty. V prvním z nich bylo zadání předloženo skupině pěti studentů – budoucích učitelů matematiky ve 3. a 4. roce jejich studia na Pedagogické fakultě UK. Na řešení měli studenti vyhrazeno 60 minut. Cílem tohoto experimentu bylo:

- Ověřit, zda budou budoucí učitelé (jako představitelé řešitelů – odborníků) procházet stejnými etapami jako žáci na 2. stupni základní školy (jako představitelé řešitelů – neodborníků).
- Zjistit, jaké hypotézy budou budoucí učitelé formulovat a jak je budou ověřovat.
- Zjistit, jaké hypotézy a řešitelské postupy budou budoucí učitelé očekávat u žáků 2. stupně základní školy.
- Umožnit budoucím učitelům stanovit cíle, které lze při zařazení konkrétní výukové jednotky se žáky realizovat.

Ve druhém experimentu byla stejná aktivita předložena skupině pěti žáků ze 6. a 7. ročníku základní školy. Žáci měli k dispozici jednu vyučovací hodinu, tj. 45 minut. Budoucí učitelé, kteří se zúčastnili prvního experimentu, sledovali žáky při objevování. Cílem tohoto experimentu bylo:

- Ověřit, zda model rozdělení procesu objevování do etap odpovídá skutečnému průběhu objevování u žáků.
- Umožnit budoucím učitelům sledovat žáky při objevování.
- Provést srovnání jejich očekávání a skutečnosti včetně vysvětlení rozdílů.

21.4.2 Průběh prvního experimentu

Studenti, budoucí učitelé matematiky, měli možnost se nejprve se zadáním individuálně seznámit a pak pracovali společně. V průběhu individuální i společné práce se vyskytly všechny etapy objevování, které jsou uvedeny v předchozím textu. Systematické zkoumání se neobjevilo ihned, ale až po navržení a otestování několika jednoduchých hypotéz. Systematické zkoumání vyústilo do tvorby hypotéz týkajících se hlubších matematických faktů z oblasti vlastností čísel.

Studenti se shodli na tom, že základním cílem zařazení úlohy „Sudá a lichá“ je zopakovat a upevnit pojmy sudé a liché číslo, které podle zkušeností z praxe žáci často zaměňují, v konkrétních smysluplných aktivitách. Tento cíl studenti stanovili již po přečtení zadání.

Při zpracovávání situace se ukázalo, že objevování v zadaném prostředí zahrnuje řadu dalších „matematických objevů“ týkajících se vlastností čísel. Tyto vlastnosti shrnujeme v dalším textu.

Diskuse byla zaměřena hlavně na to, jaké otázky by si mohli žáci položit, jaké by mohly být jejich (správné i chybné) odpovědi na tyto otázky a na možnosti odůvodňování odpovědí a odhalování nesprávných odpovědí.

Zpočátku studenti prováděli analýzu a priori se zaměřením na žáky 2. stupně základní školy a nižších gymnázií. Podle jejich chování lze usuzovat, že v pozdější fázi se do aktivity zabrali sami natolik, že přestali přemýšlet nad věkem žáků a soustředili se na své vlastní objevování. Po celou dobu měla společná práce kooperativní charakter.

Vlastnosti, které byly navrženy a zkoumány (jednotlivé úkoly uvádíme v pořadí, v němž se při diskusi objevily)

Poznámka. U vlastností 1 až 4 se studenti věnovali nejen potvrzení či vyvrácení hypotéz, ale zamýšleli se také nad tím, jaké formy argumentace očekávají od žáků. Shodli se na tom, že vhodné argumentování je přístupné i žákům z nižších ročníků 2. stupně školy, i když formální důkaz od nich ještě nelze očekávat.

Následující výčet vlastností je doplněn hlavními myšlenkami z diskuse a argumenty používanými k ověření nebo vyvrácení vyslovených hypotéz. Cenné pro experiment jsou úvahy studentů o tom, proč očekávají, že žáci danou hypotézu vysloví.

1. *Všechny posloupnosti končí nulou.*

   Tuto vlastnost potvrdili studenti diskusí hodnot, které mohou být předposledním členem posloupnosti. Očekávali, že ji snadno odhalí a vysvětlí i žáci.

2. *Na místě jednotek v členech posloupnosti se nemohou vyskytnout číslice* 4 *a* 8.

   Studenti tuto hypotézu rychle vyvrátili např. volbou čísla 18, 28 apod. Očekávali však, že hypotézu vysloví také žáci. Jako důvod uváděli, že tuto vlastnost má posloupnost s prvním členem 106, která je uvedena v zadání. Předpokládali, že žáci najdou snadno protipříklad.

3. *Všechny posloupnosti končí čtveřicí čísel* 3, 2, 1, 0.

   Studenti nepostupovali systematicky a jednoduché rozšíření vlastnosti 1 (posloupnost vždy končí dvojicí čísel 1, 0) vůbec jako možnou hypotézu u žáků neformulovali. Zřejmě považovali tuto vlastnost za zpracovanou již v bodě 1. Vlastnost 3 vyvrátili opět nalezením protipříkladu (první člen posloupnosti např. číslo 92). Také tuto vlastnost má zadaná posloupnost začínající číslem 106. I zde studenti předpokládali, že žáci najdou protipříklad. Rychlost nalezení protipříkladu však nemusí být u všech žáků stejná, např. ti, kteří použijí jako protipříklad číslo 18, mají nalezen i protipříklad pro vlastnost 3 $(18, 9, 8, 4, 2, 1, 0)$, zatímco zahájení číslem 28 nepomůže $(28, 14, 7, 6, 3, 2, 1, 0)$.

4. *Všechny posloupnosti končí trojicí čísel* 2, 1, 0.

   Pro důkaz této vlastnosti studenti navrhli postup analogický jako u vlastnosti 1, tedy probrání možností, která čísla mohou předcházet číslu 1. Vytvoření a prokázání této vlastnosti je zřejmě spojením znalostí, které jsou získány v bodech 1 a 3. Studenti očekávali, že i žáci vlastnost 4 odhalí a odůvodní.

Při pokládání následujících otázek a jejich zkoumání již studenti věnovali pozornost vlastnímu objevování a o možném využití se žáky nediskutovali. Využívali přitom vlastnosti čísel a důkazy vlastností prováděli s využitím algebraické symboliky (zápisy typu $2m + 1$, $4k + 1$ apod. nebo 2^n).

5. Mohou v některé posloupnosti sousedit dvě lichá čísla?
6. Mohou v některé posloupnosti sousedit dvě sudá čísla?
7. Mohou v některé posloupnosti sousedit právě dvě sudá čísla?
8. Mohou v některé posloupnosti sousedit tři sudá čísla?
9. Mohou v některé posloupnosti sousedit právě tři sudá čísla?
10. Lze tvrzení 6 až 9 zobecnit?

21.4.3 Průběh druhého experimentu

Druhý experiment proběhl se žáky 6. a 7. ročníku dva týdny po prvním. Žáci se experimentu zúčastnili dobrovolně. Podle sdělení učitelky matematiky neměli předchozí zkušenosti s takto zadanou aktivitou ve vyučování matematice. Kromě žáků, experimentátora a studentů z Pedagogické fakulty UK nebyla přítomna žádná další osoba. Aktivita byla zadávána experimentátorem, studenti – budoucí učitelé byli pozorovateli. Do experimentu nezasahovali. Zadání úlohy měli žáci napsané na tabuli. První seznámení se situací prováděli individuálně. Objevování vlastností posloupností a jejich odůvodňování nebo vyvracení probíhalo ve dvou skupinách (dva a tři žáci). Prezentace a diskuse o získaných tvrzeních probíhala v celé skupině.

Rozdíly proti průběhu, který očekávali studenti v prvním experimentu

- Etapa nesystematického prohledávání byla u žáků mnohem delší, než ve svých analýzách studenti – budoucí učitelé předpokládali. Probíhala nejprve individuálně, ale pokračovala i při práci ve skupinách.
- Přechod k systematickému prohledávání probíhal paralelně s prohledáváním nesystematickým. Žáci rychle odhalili, že bez systematizace pozorování je tvorba hypotéz velmi obtížná.
- Prvním výsledkem systematického prohledávání bylo odhalení skutečnosti, že není třeba znovu zkoumat čísla, která se už vyskytla v některé posloupnosti. Žáci formulovali fakt, že posloupnosti odpovídající těmto číslům jsou už částmi posloupností, které zapsané měli, a není proto třeba je vyšetřovat zvlášť. Tato vlastnost se neobjevila mezi těmi vlastnostmi, které od žáků očekávali studenti.
- Hypotézy 2 a 3 se neobjevily, zřejmě v důsledku většího počtu nesystematicky prozkoumaných posloupností.
- Vlastnost 1 byla potvrzena způsobem, který použili studenti, pouze formulace žáků byly z matematického pohledu méně přesné. Vlastnost 4 byla vyslovena na základě pozorování, žáci ji však nedokázali zdůvodnit obecně.
- Otázky 5 až 10 si žáci sami nepoložili. Pokud jim byly tyto vlastnosti předloženy experimentátorem formou otázek, reagovali podobně jako u vlastnosti 4, totiž tak, že ukázali pouze některé konkrétní případy. V následné diskusi připustili, že jejich argumentace je vhodná pro případ, kdy hypotézu vyvracejí, ale není dostačující pro prokázání pravdivosti nějaké vlastnosti.
- V diskusi žáků se objevily některé další hypotézy a úvahy, které studenti učitelství nepředpokládali. Například:

  – V jakém pořadí se mohou čísla 0, 1, 2 na konci posloupnosti objevit? (Odpověď i argumentace byly snadné a správné.)

  – Co se objeví na konci častěji, 3, 2, 1, 0 nebo 4, 2, 1, 0? (Odpověď žáci nenašli.)

  – Jak se budou lišit posloupnosti, jestliže prvními čísly budou dvě sousední čísla? (Odpověď pro případ, že větší číslo je liché, byla odhalena po krátké diskusi. Pro případ, že větší číslo je sudé, žáci odpověď nenašli.)

  – Žáci navrhli zkoumat posloupnosti vytvořené pomocí modifikovaných pravidel, tj. přičítat jedničku a násobit dvěma. Tento návrh už nebyl v experimentu z časových důvodů realizován.

21.5 Zařazení objevování do hodin matematiky

V experimentech se zařazováním objevování do vyučování matematiky proběhly etapy, na které jsme proces objevování rozdělili. Potvrdilo se, že etapy neprobíhají vždy v pořadí, ve kterém jsou seřazeny v oddíle 21.3. Některé etapy byly krátkodobé, u některých řešitelé setrvali dlouho, v některých případech nebyl přechod od jedné etapy k druhé ostře ohraničen, etapy se prolínaly. Pro přípravu výukových jednotek pro objevování a pro jejich analýzu však navržený model vyhovuje.

Výsledky z analýz provedených experimentů a z diskusí s učiteli shrnujeme do doporučení pro zařazování objevování do vyučování matematice. Tato doporučení se týkají tří oblastí: doporučení pro prostředí pro výukovou sekvenci, pro její organizaci a doporučení pro učitele.

21.5.1 Prostředí pro objevování

Matematické zkoumání může být formulováno s různou mírou otevřenosti/uzavřenosti.[3]

Plně otevřené zadání má formu popisu situace, žákovi je ponechána volnost vyhledávat různé dílčí úkoly na základě jejich vlastního rozhodnutí (tento případ je ilustrován v popsaných experimentech). Naopak uzavřené zadání může mít formu podrobného návodu na postup zadaného např. formou otázek nebo konkrétních úkolů a vymezení požadovaných výsledků. Otevřené úlohy podporují tvořivost a samostatné rozhodování žáků, mohou však vést k větší šíři zkoumané oblasti, než bylo vzdělávacím cílem učitele. Mohou být také zdrojem nejistoty pro žáky, kteří nemají v matematice mnoho úspěchů, a je pak úkolem učitele, aby tuto nejistotu vhodným způsobem zmírnil, např. vhodně voleným systémem návodů a postupným uzavíráním situace.

Úkolem *návodu* je pomoci žákovi pokročit při řešení jeho úkolu, ne mu detailně a přesně vymezit jednotlivé kroky jeho další práce. Návody mohou mít psanou formu nebo mohou být formulovány ústně přímo při zkoumání situace. Důležité je, aby jazyk, kterým jsou žákům prezentovány, odpovídal jejich úrovni.

Úkolem *rozšíření* zkoumané situace je získat nové motivující podněty pro ty žáky, kteří postupují při objevování situace rychle a úspěšně a základní situace pro ně není dostatečně motivující. Opět závisí na konkrétní situaci, jakou formou jsou rozšíření zadávána, kterým směrem je žák nasměrován a do jaké míry jsou tato rozšíření otevřená. V popsaném experimentu navrhli možné rozšíření žáci sami – je uvedeno v posledním bodu oddílu 21.4.3.

[3] G. Petty (1996, s. 235) v této souvislosti hovoří o objevování řízeném žákem a objevování řízeném učitelem.

21.5.2 Organizace výukové sekvence

Při prvních kontaktech se zkoumanou situací je vhodné volit některé dílčí úkoly, které žákům pomohou se situací se seznámit. Tyto úkoly by měly být jednoduché, rychle zvládnutelné, aby je mohli úspěšně splnit všichni žáci. Pokud se učiteli podaří na počátku zařadit úkoly, v nichž žáci s velkou pravděpodobností získají nějaké výsledky, má to výrazně motivující charakter.

Mezi základní informace, se kterými je třeba žáky při zahájení činnosti seznámit, patří: doba trvání, typy činností (individuální, skupinová apod.), místo, kde bude zkoumání probíhat (ve vyučování, mimo školu), množství a způsob konzultací, způsob ukončení (písemné, ústní, forma obhajoby, konference apod.), kdo a jak bude výsledky hodnotit. Nejčastěji využívaný způsob zahájení práce při matematickém zkoumání je vstupní společné seznámení se situací a vyřešení některých méně obtížných dílčích úkolů. Pak může následovat jak individuální práce ve škole nebo mimo školu, tak skupinová práce.

Řeší-li žáci stejné úkoly, má to zřejmé výhody: společné podklady pro diskusi, snazší zhodnocení výsledků, získání společného základu pro další různorodé úkoly. Současně učitel může lépe rozeznat úroveň uchopení situace žáky, případně pokrok, kterého žáci dosáhli. Individualizace úkolů podporuje tvořivost a samostatnost žáků při řešení úloh.

Při vhodném zařazení návodů učitel nabízí žákům podněty, které jim mohou pomoci získat hlubší vhled do situace a tím podporují jejich objevitelské aktivity. Úspěšné se ukázalo zařazení diskuse o řešení v malých skupinách žáků dříve, než jsou jim návody dány k dispozici. Pokud žáci dostanou návody příliš brzy, mnozí z nich se na ně spolehnou a nerozvíjí konstruktivním způsobem své poznání. Jestliže po nějaké době, v níž se žák snaží situaci zpracovat, nemá odpovídající výsledky, je prospěšné, když si od něho nechá učitel nejprve vysvětlit, jak postupoval. Teprve pokud ani toto vysvětlení nevede k pokroku, je vhodné žákovi pomoci některým vhodným návodem. Při experimentu, který je v příspěvku popsán, nebylo třeba žákům dávat žádné návody. Bylo to dáno zřejmě jednak tím, že zkoumaná situace byla srozumitelná, jednak úrovní žáků, kteří se zúčastnili.

21.5.3 Práce učitele

Zkušenosti z experimentů i z diskusí s učiteli potvrdily, že příprava učitele na zařazení objevování do hodin matematiky je náročná. Je třeba, aby učitel zahajoval aktivitu s jasnou představou o cílech, které zařazením zkoumání sleduje, hlavně o tom, co by měli žáci při této aktivitě získat. Seznámí-li se učitel se situací, na níž je aktivita založena, co nejpodrobněji před jejím zařazením do konkrétního vyučování, umožní mu to lepší spolupráci se žáky, usnadní mu to konzultační činnost (pokud o ni žáci projeví zájem) i usměrňování činností jednotlivých žáků nebo skupin tak, aby bylo možno dosáhnout plánovaných cílů.

21.6 Závěrečná poznámka

Celkově lze říci, že systematické zkoumání otevřené situace nevyžaduje od žáků pouze aplikování naučených algoritmů. Žáci musí např. rozhodovat, jaké otázky si budou klást, jakými prostředky budou hledat odpovědi, jaké formy argumentace použijí. Přitom odhalují vlastnosti matematických objektů, které nejsou součástí běžného vyučování matematice.

Kapitola 22

Zpracování informací při řešení slovních úloh

Jarmila Novotná

> A teacher in school should develop his/her students' know-how, their ability to reason as well as encourage their creative thinking.[1] (Polya 1966)

> Die Lernenden werden nicht mehr als Objekte der Belehrung, sondern als Subjekte ihres Lernens aufgefasst.[2] (Wittmann 1997)

22.1 Úvod

Vážným nedostatkem transmisivního vyučování matematice (viz kap. 1) je kladení důrazu na vstřebávání celé řady poznatků a algoritmických dovedností a malá pozornost věnovaná jejich tvořivému využívání jak v matematice, tak i mimo ni. Využívat matematiku znamená umět určit, kdy, kde a jak použít poznatky, které má uživatel (a to nejen žák) k dispozici. To vyžaduje, aby tvořil, formuloval a konstruoval modely, jazyky, budoval pojmy a sdružoval je, využíval své předchozí zkušenosti, diskutoval o svých zjištěních. Slovní úlohy jsou jedním z prostředí, kde je tento přístup možno realizovat.

Mnoho informací, které získáváme, je formulováno slovně a řešení slovních úloh je jednou z mála oblastí ve školské matematice, která vyžaduje matematizaci slovně popsaných situací a návrat do kontextu po vyřešení příslušné matematické úlohy. I když jsou situace popsané v zadání slovní úlohy ve většině případů ve srovnání s běžným

[1] Učitel by měl ve škole rozvíjet ‚know-how' svých žáků, jejich schopnost argumentovat a podporovat jejich tvořivé myšlení. (Vlastní překlad.)

[2] Žáci už nebudou chápáni jako objekty poučování, nýbrž jako subjekty vlastního učení se. (Vlastní překlad.)

životem zjednodušené, získává žák zkušenosti s tím, že matematika může být užitečná při řešení úloh z praxe.

V zadání slovní úlohy není obvykle na první pohled zřejmé, jaký matematický model zadanou situaci nejpřesněji popisuje, jedním z úkolů žáka při řešení je model objevit. Žák se tak dostává do situace, kdy nemůže ihned použít přímo některý naučený algoritmus.

W. Blum a M. Niss (1991) shrnují důvody pro zařazování slovních úloh do vyučování matematice do pěti bodů. Slovní úlohy:

- jsou vhodným prostředkem pro rozvíjení obecných kompetencí žáků a jejich postojů k matematice,
- umožňují žákům „vidět a posuzovat“ nezávisle, analyzovat a porozumět použití matematiky,
- rozvíjejí schopnost žáků aktivovat matematické znalosti a dovednosti v mimomatematických situacích,
- pomáhají žákům při poznávání, porozumění a uchování pojmů, metod a výsledků matematiky.

Další funkce slovních úloh jsou uvedeny v (Verschaffel; Greer; De Corte 2000). Kromě funkce aplikační, motivační a rozvíjení matematických znalostí a dovedností je zdůrazněna role řešení slovních úloh jako

- prostředku podporujícího rozvoj schopnosti vybírat potřebné informace,
- pracovat tvořivě,
- rozvíjet heuristické postupy.

Přes svou dlouhou historii[3] je řešení slovních úloh ve vyučování matematice často vnímáno jak žáky, tak i učiteli jako obtížné.

Základní obtíže *žáků* specifické pro řešení slovních úloh můžeme shrnout do tří bodů: žák nerozumí kontextu úlohy nebo nevidí souvislost mezi kontextem a řešením slovní úlohy; žák z různých důvodů (např. délka textu, použitý jazyk, velký počet zadávaných informací, obtíže číst text s porozuměním) neuspěje při získávání informací o struktuře slovní úlohy ze zadání; žák získá potřebné informace ze zadání, ale neumí najít vhodný matematický model, nebo model najde, ale neumí ho vyřešit.

Učitel často obtížně, případně neúspěšně hledá odpovědi na otázky jako např.: Jaké povahy jsou překážky, které brání žákovi úspěšně řešit slovní úlohu? Jak by bylo možné přeformulovat zadání úlohy tak, aby žák musel překonávat pouze ty překážky, jejichž překonání přispěje k jeho porozumění odpovídající oblasti matematiky? Jaké otázky a návody jsou vhodným nástrojem pomoci žákovi, který není při řešení slovní úlohy úspěšný?

[3] Slovní úlohy se objevují již ve starověku.

22.2 Formulace problému

Informace získáváme z mnoha zdrojů a v různých formách. Ne všechny jsou však formulovány tak, že je umíme v předložené podobě zpracovávat, dále využívat, rozvíjet apod. Proto je jednou ze zásadních otázek vyučování matematice otázka: *Jakými prostředky můžeme při vyučování matematice pomáhat při rozvoji dovednosti žáka zpracovávat informace, které nejsou předkládány ve formě umožňující okamžité použití některého známého algoritmu?* Oblastí školské matematiky, která to umožňuje, je řešení slovních úloh. V dalším textu se zaměříme právě na tuto oblast.

Zařazením slovních úloh do vyučování matematice může učitel sledovat různé cíle, které mají za následek různé přístupy k řešení slovních úloh. Uvádíme dva základní:

- *Volba vhodného řešitelského algoritmu z repertoáru algoritmů*, které má žák k dispozici, a jeho úspěšné použití pro slovní úlohu. V tomto případě je učení rozděleno do dvou období – období výuky algoritmů (obvykle řízené učitelem) a období použití naučené znalosti žákem (za které zodpovídá žák).
- *Konstruování matematických znalostí*. V tomto případě žák nevybírá řešitelský algoritmus z množiny již známých algoritmů, ale při řešení slovní úlohy konstruuje svůj vlastní řešitelský algoritmus. Úkolem učitele při konstrukci algoritmu žákem je pozorovat, případně vhodně poradit, je-li to potřeba. Teprve pak „zkonstruovanou matematiku“ institucionalizuje, tj. pomáhá žákovi transformovat znalosti, které při řešení získal, do znalostí, které je schopen využívat a rozvíjet i v jiných kontextech.

Proces řešení slovní úlohy je komplexní proces. Jeden z jeho teoretických modelů[4] je uveden v oddíle 22.3. V dalším textu se zaměříme hlavně na etapu zpracování informací ze zadání úlohy, jejímž vyústěním je vytvoření matematického modelu pro řešenou slovní úlohu. Úspěšné vyřešení úlohy významně závisí na kvalitě provedení této etapy.

Učitel může vyžadovat, aby žák použil postupy, které mu předloží on sám jako účinné (transmisivní přístup), nebo může nechat žáky používat vlastní postupy (konstruktivistický přístup). Cílem kapitoly je analyzovat důsledky druhého z těchto přístupů na nalezení vhodného matematického modelu struktury slovní úlohy. Současně s tím zkoumáme, jaké požadavky, jaká úskalí a na druhé straně jakou pomoc přináší konstruktivistický přístup samotnému učiteli.

Analýza učebních textů a dalších výukových materiálů používaných na školách v České republice a diskuse s učiteli z 1. i 2. stupně škol potvrdily, že v transmisivním vyučování jsou často preferovány slovní formy zpracování informací ze zadání. Při konstruktivistickém přístupu však provedené experimenty ukázaly, že mají-li žáci

[4] V literatuře je procesu řešení úloh věnována dlouhodobě značná pozornost, jako reprezentanty různých modelů, ovlivněných obdobími jejich vzniku, zmiňme (Polya 1945, Vyšín 1972, Odvárko aj. 1990, Hejný 1995). Podrobněji viz např. (Novotná 2000a).

volnost tvořit vlastní záznam struktury úlohy podle zadání, dávají velmi často přednost záznamům obrazovým. Proto se v dalším textu zaměříme na roli *obrazových záznamů* při uchopování zadání slovních úloh.

Výhody i úskalí, které různé způsoby zpracování informací uvedených v zadání úlohy přinášejí, ukážeme na příkladu obrazového modelu zadání slovních úloh o dělení celku na části. Na konkrétních ukázkách žákovských záznamů budeme ilustrovat možnosti, které obrazové kódování informací nabízí.

22.3 Model procesu řešení slovní úlohy

V modelu řešení slovní úlohy,[5] který budeme používat v dalším textu, rozdělíme řešení do tří základních operací: *uchopení zadání* slovní úlohy (získání všech dat a vztahů, která jsou nutná pro vytvoření vhodného matematického modelu, a jeho vytvoření); *vyřešení matematického modelu* a provedení zkoušky správnosti výsledku matematické úlohy v matematickém prostředí bez vztahu ke kontextu slovní úlohy; *návrat do kontextu* slovní úlohy a ověření správnosti výsledku v kontextu.

Zaměříme se na operaci uchopení zadání slovní úlohy. Při analyzování procesů, ke kterým zde dochází, však budeme přihlížet i k výsledkům činnosti žáka v dalších etapách řešení slovní úlohy.

Na uchopování slovní úlohy budeme pohlížet jako na operaci složenou z pěti činností: *identifikace objektů*; *identifikace vztahů* mezi objekty; *identifikace otázky*; *nalezení sjednocujícího pohledu*; *získání vhledu do struktury* slovní úlohy a *vytvoření matematického modelu*. Etapa uchopování slovní úlohy vyžaduje aktivní zapojení žáka, a to jak při transmisivním, tak hlavně při konstruktivistickém přístupu k vyučování.

V praxi nemusí řešitelský proces probíhat v pořadí, ve kterém jsme uvedli jednotlivé operace a akce, řešitel se může k některým činnostem vracet nebo některé vynechat.

První model zadání slovní úlohy si žák konstruuje „v hlavě“. Tento model, který budeme dále nazývat *mentální model*, žák může (ale nemusí) následně zveřejnit písemnou nebo ústní formou. Důvody, které ho ke zveřejnění vedou, mohou být vyvolány jeho vnitřní potřebou, jako např.: vytvořený mentální model je příliš složitý pro další mentální manipulace s ním; žák si potřebuje uvolnit okamžitou paměť pro další činnosti; zveřejnění modelu mu pomůže rozhodnout o dalších manipulacích s odhalenými relacemi mezi objekty. Zveřejnění může být také vyvoláno vnějšími okolnosti, např. potřebou předat mentální model někomu, kdo to vyžaduje, nebo potřebou získat nástroj ke kontrole správnosti nalezeného modelu.

[5]Různé modely procesu řešení slovních úloh jsou uvedeny v (Novotná 2000a, s. 19–21), kde je také popsána modifikace používaná ve výzkumu zařazeném do této kapitoly. Model byl v průběhu výzkumu postupně upřesňován, viz např. (Novotná 2003). Pro potřeby této kapitoly shrnujeme základní rozdělení procesu řešení do etap a uvádíme podrobnější rozpracování etapy uchopení zadání slovní úlohy.

Při studiu písemných forem zveřejňování mentálního modelu žáka budeme používat tuto terminologii: *Kódováním* zadání slovní úlohy budeme rozumět překlad mentálního modelu řešitele do vhodného znakového systému, *referenčního jazyka*, který mu umožní přehledněji (pro něj), případně úsporněji zaznamenat data, podmínky a neznámé řešené úlohy. Výsledný písemný záznam budeme nazývat *legendou*.

Referenční jazyk obsahuje základní symboly a pravidla pro vytváření legendy. Pro danou slovní úlohu lze vytvořit několik referenčních jazyků, proto mohou řešitelé pro jednu úlohu používat různé legendy. Ať žák zvolí pro uchopení informací jakýkoli referenční jazyk, další úspěšnost při řešení záleží na tom, zda mu vytvořený model úlohy poskytne dostatečně přehlednou informaci o struktuře úlohy a umožní mu proniknout k podstatě zadaných vztahů.

Tvorba legendy je aktivní proces, dialog mezi řešitelem a textem. Při jejím tvoření žáky je role učitele rozhodující. Učitel může trvat na používání jednoho (případně několika) referenčního jazyka, který považuje za nejvhodnější, nebo může dát žákům volnost výběru referenčního jazyka ze skupiny jazyků, s nimiž se seznámili, nebo volnost vytvoření vlastního referenčního jazyka a vlastního typu legendy. V této souvislosti rozlišujeme spontánně vytvořené legendy a legendy vytvořené na základě vnějšího zásahu (obvykle na základě požadavku učitele).

22.4 Vizuální kódování informací ze zadání slovní úlohy

Obrazové reprezentace (diagramy) jsou jedním z nejstarších a nejčastěji používaných didaktických nástrojů při řešení úloh (viz např. Volkert 1989). Jejich význam ještě vzrostl s rozšířením nových technologií, např. prostředků audio-vizuální techniky, hypertextu apod.

Jestliže řešitel zachytí informace uvedené v zadání do formy schématu nebo obrázků, které s různou mírou věrnosti odpovídají kontextu slovní úlohy, budeme hovořit o *obrazové legendě* (Novotná 2000a). Obrazové legendy mají při uchopování zadání několik funkcí. Vybíráme ty z funkcí obrazových záznamů, které jsou uvedeny v (Mareš 1995) a které jsou důležité pro obrazové legendy:

– funkce reprezentující (jejím cílem je vytvářet u žáků adekvátní obrazové představy),

– organizující (jejím posláním je vhodně uspořádat už existující znalosti a představy, dodat jim soudržnost; změnit žákovy deklarativní poznatky v poznatky procedurální),

– interpretující (jejím posláním je usnadnit žákům pochopení učiva),

– transformující (jejím posláním je ovlivnit způsob, jímž žák zpracovává informace),

– funkce koncentrování pozornosti (obrazový materiál slouží k navození a udržení žákovy pozornosti),

– funkce kognitivně-regulační (obrazový materiál slouží k podpoře poznávacích procesů).

Jednotlivé typy referenčních jazyků a výsledných legend nabývají při řešení slovních úloh specifickou podobu zejména v závislosti na typu úlohy. Proto se v následujícím textu omezíme na slovní úlohy o dělení celku na nestejné části.[6]

22.4.1 Obrazové legendy v řešení slovních úloh o dělení celku na nestejné části

Nejčastěji používaný obrazový referenční jazyk pro tento typ úloh obsahuje geometrické útvary a pomocné znaky. Vztahy mezi velikostmi částí jsou většinou zaznamenány různými velikostmi útvarů a spojováním těchto útvarů do větších celků.[7] Pro jednoduchost se omezíme na referenční jazyk, v němž jsou používanými geometrickými útvary úsečky (použití jiných geometrických útvarů je analogické). Výsledné legendy budeme nazývat *legendami úsečkovými*.

Úsečková legenda může mít různé podoby, od nejjednoduššího případu jedné úsečky, představující celek a rozdělené na odpovídající části, až po několik úseček umístěných nad sebou nebo vedle sebe. V autentických žákovských legendách nebývají vztahy mezi velikostmi částí a délkami úseček zaznamenány přesně, žákům často stačí k získání vhledu do struktury úlohy přibližný náčrtek. Ukázky úsečkových legend pro úlohy o dělení celku na nestejné částí jsou uvedeny v oddíle 22.4.2.

Identifikace částí a vztahů mezi nimi (počet úseček, které budou použity, vzájemný vztah mezi nimi apod.) je obvykle sériová. K identifikaci otázky dochází často paralelně s předchozími dvěma činnostmi. Jsou-li vyznačeny všechny vzájemné vztahy mezi částmi, podporuje záznam získání vhledu do struktury úlohy a tím i vytvoření vhodného matematického modelu.

22.4.2 Ukázky použití úsečkových legend řešiteli

Uvádíme konkrétní ukázky využití úsečkových legend při řešení slovních úloh o dělení celku na nestejné části. Řešiteli byli ve všech případech žáci, kteří se před řešením, které uvádíme, s geometrickými referenčními jazyky ve vyučování matematice nesetkali. Žáci znali z předchozího vyučování slovní referenční jazyk, se kterým byli seznámeni učitelem a který aplikovali jako předepsaný postup. V ukázkách, které jsme zařadili v dalším textu, je buď úsečková legenda vytvořena žákem spontánně (U1, U2), nebo je její konstrukce

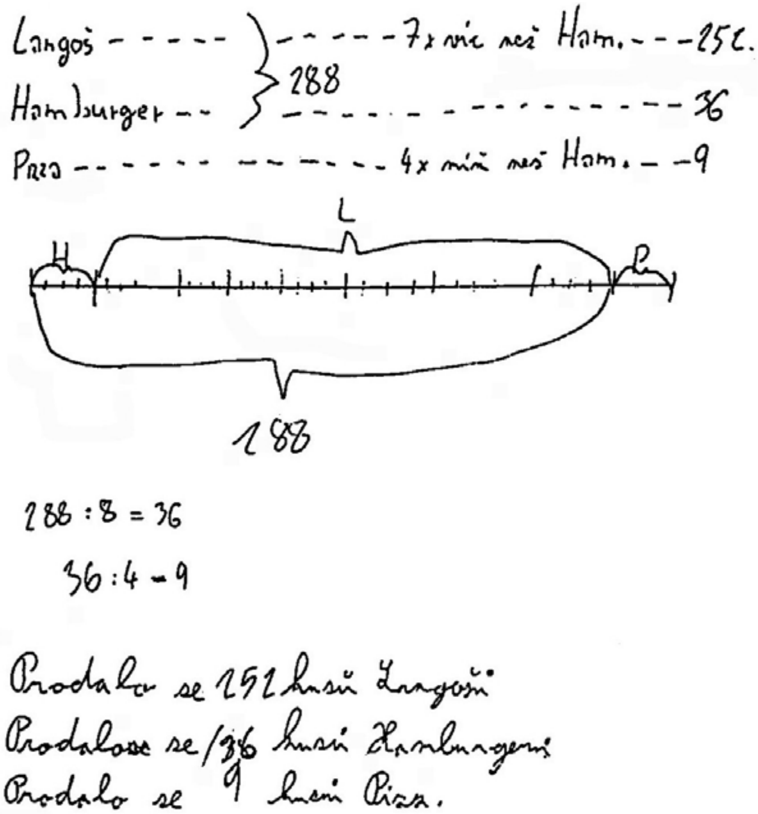
[6] Obrazové legendy pro slovní úlohy o dělení celku na nestejné části byly studovány např. v (Kubínová; Novotná 1995, Novotná 1997a, 1997b), výsledky z těchto a z dalších publikací jsou shrnuty v (Novotná 2000a).

[7] Je třeba si uvědomit, že použití geometrických útvarů pro znázornění částí má samo již algebraický charakter. Geometrický útvar zde zastupuje neznámou, která je v algebře obvykle značena písmenem. V tomto smyslu je použití obrazových legend přípravou pro práci v prostředí algebry.

společně žákem i experimentátorem použita k odstranění chybné představy žáka (U3 v oddíle 22.5.2).[8]

U1. Spontánní změna referenčního jazyka při hledání sjednocujícího pohledu na informace ze zadání slovní úlohy

Úloha: Stánek s občerstvením nabízí tři různá jídla – hamburgery, pizzy a langoše. Hamburgerů a langošů se prodalo dohromady 288 kusů. Prodalo se čtyřikrát víc hamburgerů než pizz a sedmkrát víc langošů než hamburgerů. Kolik se prodalo hamburgerů, kolik langošů a kolik pizz?



Obr. 22.1 Cyril, 14 let

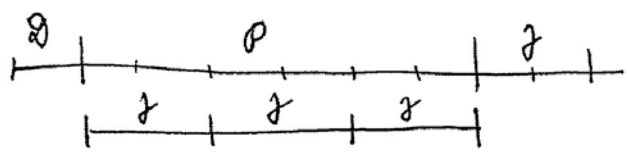
Cyril vytvořil slovní legendu, v níž správně zaznamenal všechny zadané vztahy mezi velikostmi částí. Vytvořil ji podle vzoru, se kterým žáky seznámila vyučující při předchozích řešeních podobných úloh a na jehož použití trvala. Nepodařilo se mu však najít sjednocující pohled. Proto (bez vyzvání) použil úsečkovou legendu, která mu již umožnila najít sjednocující pohled i vhodný matematický model.

Vytvořená úsečková legenda ilustruje i to, že žáci obvykle nepotřebují konstruovat obrazové záznamy s přesnými vztahy mezi velikostmi částí a délkami úseček, často vystačí s přibližným náčrtkem.

[8] Ukázky jsou převzaty z (Novotná 2000a).

U2. Spontánní nahrazení slovní úlohy úlohou se stejnými velikostmi a vzájemnými vztahy mezi částmi, ale s jednodušší strukturou

Úloha: Petr, David a Jirka sbírají odznaky. Dohromady mají 198 odznaků. Petr má šestkrát víc odznaků než David a třikrát víc odznaků než Jirka. Kolik odznaků má každý z nich?



Obr. 22.2 Květa, 12 let

Květa (bez „vnějšího zásahu další osoby“) převedla řešení zadané úlohy na řešení úlohy, pro niž uměla najít vhodný matematický model: Petr, David a Jirka sbírají odznaky. Dohromady mají 198 odznaků. Petr má šestkrát víc odznaků než David a Jirka má dvakrát víc odznaků než David. Kolik odznaků má každý z nich?

Výzkumy (Novotná 2000a) potvrdily, že při vytvoření úsečkové legendy pro úlohy se složitější strukturou vztahů mezi velikostmi částí žáci častěji převádějí zadanou úlohu na úlohu se stejnými velikostmi částí, ale s jednodušší strukturou.

22.4.3 Modelová legenda prezentovaná učitelem

Konstruktivistický charakter uchopování zadání slovní úlohy žákem je možno zachovat i v případě, že učitel žákům prezentuje jeden nebo více modelových referenčních jazyků pro skupinu příbuzných úloh. Je však třeba, aby modelový referenční jazyk splňoval některé základní požadavky. Má

- být dostatečně jednoduchý s jasnými pravidly pro konstrukci legendy,
- být impulsem, který spouští žákovu činnost,
- vizualizovat abstraktní informace ze zadání úlohy a umožnit tvořivou manipulaci s grafickými prvky,
- umožňovat snadnou orientaci v zadání a zdůrazňovat podstatné prvky a vztahy,
- umožňovat logickou a jednoznačnou interpretaci zaznamenaných informací,
- být snadno přizpůsobitelný modifikacím struktury úlohy.

Přijetí modelové legendy žáky je ovlivněno klimatem ve třídě a vzájemnými vztahy mezi učitelem a žáky. Není vždy třeba, aby učitel předložil modelovou legendu jako úplný algoritmus, tvořivý přístup žáků podporuje, jestliže tvoří legendu společně s učitelem. Při této společné činnosti mohou žáci odhalit její možné přednosti a úskalí.

Zkoumáme-li úskalí spojená s tvorbou úsečkové legendy, je třeba si nejprve uvědomit, že tato legenda v sobě obsahuje skrytý algebraický prvek, totiž velikost úsečky, ke které velikosti ostatních úseček vztahujeme (viz též poznámka 7 pod čarou na s. 372). Pro žáky, kteří mají obtíže s uchopováním zadání úloh, se může stát právě tato skutečnost překážkou, kterou nejsou schopni překonat. Představa, že některou úsečku mohu zvolit a nezáleží na tom, „jak dlouhou ji udělám“, je pro takové žáky nepřijatelná. Odstranit tuto jejich bariéru je úkol pro učitele velmi obtížný a často nesplnitelný (viz též např. Broin 2002).

Použití úsečkové legendy jako modelové přináší i další nebezpečí: Žáci mohou chybně reprezentovat vzájemné vztahy mezi velikostmi částí při přechodu mezi multiplikativními, aditivními, případně smíšenými vztahy mezi velikostmi částí. Mohou také použít úsečky představující celek a části formálně bez vyznačení vztahů mezi jejich délkami, což je může vést k záměně zadané úlohy za úlohu o dělení celku na stejné části a k neúspěšnému ukončení řešitelského procesu. Dále je třeba si uvědomit, že ne pro všechny úlohy o dělení celku na nestejné části je použití referenčního jazyka pro úsečkové legendy vhodné. Příkladem takové úlohy je např. úloha (Novotná 2000a): Bedřich má čtyřikrát víc známek než Jirka a sedmkrát víc známek než Stáňa. Má-li Bedřich 504 známek, kolik jich mají všichni dohromady?

Další ukázky chybného přenesení předchozí zkušenosti s tvorbou úsečkové legendy na modifikované úlohy je možné najít např. v (Novotná 1997a).

22.5 Některé související otázky

22.5.1 Odstraňování zvýšené nejistoty u slabších žáků

Pokud se učitel rozhodne, že seznámí žáky s několika typy referenčních jazyků, je třeba, aby si byl vědom nejen pozitivních důsledků, ale i možných úskalí, které to s sebou nese. Jedním z nejzávažnějších nebezpečí je zvýšení nejistoty u slabších žáků, kteří kromě nejistoty o své schopnosti vyřešit správně zadanou úlohu čelí navíc ještě nejistotě o tom, který referenční jazyk jim vyřešení úlohy umožní.

Uvedená nejistota je menší např. tehdy, jestliže žák ví, že v případě neúspěšného pokusu o řešení má možnost začít úlohu řešit znovu. Za jakých podmínek se žák vrací k zadání úlohy?[9] Když např.:

- Nemá strach, že bude trestán za neúspěch.
- Věří si, že je schopen úloze porozumět.
- Věří, že při novém pokusu uspěje.

[9] Upraveno podle (Hejný; Kuřina 2001, s. 128).

Tyto podmínky se týkají žáka, jeho vnitřního světa, jeho přání vědět a jeho intelektuálního a kognitivního sebevědomí. Jak může učitel podporovat tento přístup žáků? Vytvořením klimatu ve třídě, kdy:

- Chyby jsou využity ke konstrukci znalostí např. hledáním jejich příčin, návraty k řešení jednodušších úloh, kterým už žák porozuměl.
- Žáci mohou využívat bohatý repertoár různých typů legend, řešitelských strategií atd.
- Klima ve třídě je otevřené pro diskusi.

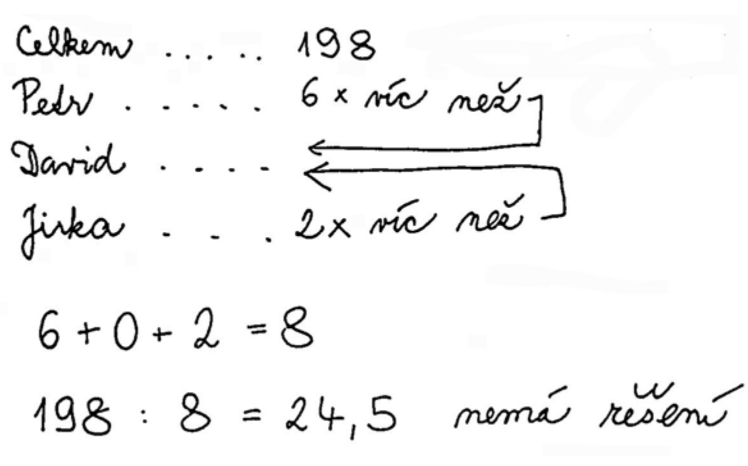
22.5.2 Odhalování a reedukace chybných představ

Míra, do které je žák ochoten a schopen překonat překážky a odstranit chyby v porozumění struktuře úlohy, závisí nejen na tom, jak obtížná je úloha, ale i na tom, jak podnětné jsou situace a úlohy, které učitel před žáka staví. Jednou z hlavních podmínek pro to je schopnost učitele diagnostikovat příčiny chyb a úroveň porozumění úlohám u jednotlivých žáků. Analýza referenčních jazyků pro danou úlohu a výsledných žákovských legend umožní učiteli snáze odhalit fázi, v níž došlo k chybné úvaze.

Na závěr uvádíme ukázku použití úsečkového referenčního jazyka k tomu, aby řešitel sám odhalil, kde v jeho úvahách došlo k chybě. Další ukázky využití úsečkových legend pro odhalení a reedukaci chybných představ žáka jsou uvedeny v (Novotná 2000a, s. 79–84).

U3. Použití obrazového referenčního jazyka pro odstranění chybné představy žáka

<u>Úloha:</u> Petr, David a Jirka hrají kuličky. Dohromady mají 198 kuliček. Petr má šestkrát víc kuliček než David a Jirka má dvakrát víc kuliček než David. Kolik kuliček má každý z nich?



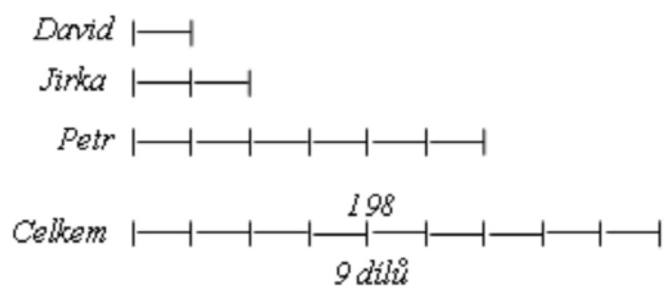
Obr. 22.3 Veronika, 12 let

U Veroniky došlo k systémové chybě.[10] V řádku zachycujícím Davidovo množství měla být uvedena informace *David* ... 1 *x víc než David*, což je umělé, nepřirozené. Ovšem i když není na papíře, je třeba, aby řešitel tento jeden díl evidoval. Schematicky by bylo možno správný myšlenkový postup zapsat takto:

Píše	Myslí
6	Petr je 6 Davidů
1	David
2	Jirka jsou 2 Davidové

Pro Veroniku jsou však jednotlivé údaje pro kalkulaci 6*, nic,* 2. Ví přesně, že má tyto položky sečíst. Operace je volena správně, chyba je v „choulostivém pojmu" 0. Nejedná se o chybu v kalkulaci, ale o pojmovou chybu.

K reedukaci byl u Veroniky použit úsečkový referenční jazyk. Ve spolupráci Veroniky a experimentátora byla zkonstruována úsečková legenda na obr. 22.4.[11]



Obr. 22.4

22.6 Výsledky výzkumu a závěr

V průběhu víceletého výzkumu řešitelských procesů žáků při řešení slovních úloh bylo analyzováno více než 800 řešení žáků z 5. až 9. ročníků základní školy.[12] Analýza potvrdila, že:

- Výsledky žáků se liší podle toho, zda je od nich vyžadováno, aby pouze reprodukovali referenční jazyk předložený učitelem, nebo zda jsou seznámeni s různými typy referenčních jazyků, případně mají dokonce možnost používat vlastní referenční jazyky.

[10] Uvedený typ chybného zpracování informací je podle zkušeností z našich výzkumů poměrně častý.

[11] Ve Veroničině případě bylo možno zvolit i jiné reedukační strategie, např. požádat ji, aby upravila čísla v zadání tak, aby úloha řešení měla, a pak např. namalovala nebo na skutečných předmětech ukázala, kolik kuliček kdo má. Je pravděpodobné, že by chybu odhalila také.

[12] Viz např. (Kubínová; Novotná 1995, Novotná 1997a, 1997b, Novotná 1998, Novotná; Kubínová 1999, Novotná 2000a, Novotná 2003).

- V posledních dvou případech jsou výsledky žáků při řešení úloh lepší. Žáci při nich rozvíjejí svou schopnost hledat souvislosti, nabývají zkušenosti pomocí experimentování a řešení úloh, rozvíjejí svou schopnost vyhledávat a používat různé druhy reprezentací a třídit informace, svou schopnost kritické analýzy a uvědomění si zodpovědnosti za vlastní činnost.
- Analýza referenčních jazyků vytvořených žáky a výsledků jejich použití umožňuje učiteli pomoci řešitelům, jestliže jejich snaha o správné vyřešení úlohy je neúspěšná (hlavně při určování typu překážky/překážek, na které žák narazil).

Uvedené úvahy nás vedou zpět ke studiu vztahu mezi řešením úloh a vyučováním matematice. Studium *didaktických podmínek transformace* modelů činnosti při žákově osvojování si znalostí je otázkou, která je pro vyučování zásadní a je otevřená pro didaktický výzkum. Vhodný rámec pro tento typ výzkumu nabízí teorie didaktických situací, zejména otázky spojené s didaktickým kontraktem (Brousseau 1997, 1998).

Kapitola 23

Hry a soutěže a jejich vliv na motivační a komunikační klima ve třídě

Jarmila Novotná

Hra je radost. Učení při hře je radostné učení.
J.A. Komenský

23.1 Úvod

Hravost je přirozeným projevem dětí, a to nejen v předškolním věku. Potřeba hry přetrvává v nejrůznějších formách až do dospělosti. Vedle spontánní hry přechází dítě ve školním věku ke hře cílevědomě zaměřené, ke hře řízené, která rozvíjí jeho smysly, postřeh, paměť, představivost. *Didaktickou hrou* je označována hra, která má výchovně vzdělávací cíl.

Matematika je u žáků často spojována s obavami, úzkostí. Úkolem učitele je hledat cesty, jak tyto negativní emoce překonat. Při humanistickém přístupu k vyučování (Crowl aj. 1997). je velká pozornost věnována afektivním složkám učení. Respektuje osobnost žáka, pomáhá vytvářet pozitivní postoje k lidem i ke světu. Propojuje školu se životem a tím podporuje aktivní přístup žáků k učení se. Didaktické hry[1] (dále jen hry) jsou typickými aktivitami humanistického přístupu k vyučování. G. Petty (1996, s. 188) uvádí: „Hry . . . mohou zapojovat žáky velmi intenzívně do výuky a přimět je k takovému soustředění, jakého nelze dosáhnout žádnou jinou metodou. Díky zvýšenému zájmu

[1] V dalším textu budeme většinou používat zkrácený termín „hra“ i tam, kde by přesnější označení bylo „aktivita herního typu“. To se týká také aktivity Bingo z experimentu, který je uveden v oddíle 23.3.

a motivaci, jež jsou vyvolány kratší hrou, mohou nadto žáci získat k předmětu (a k učiteli) kladný vztah, který přetrvá týdny.“

Hra vede k rozvíjení tvořivých způsobů myšlení, ke zdravé soutěživosti. Může sloužit k navazování kontaktů. Při hře roste sebedůvěra, sebevědomí, důvěra ve spoluhráče (Millerová 1978, Foltinová; Novotná 1997). Hra přispívá u žáků k přejímání sociálních norem při podřizování se obecným pravidlům hry.

Hry pomáhají žákům učit se organizovat poznatky (to plyne z interaktivní a kooperativní podstaty činností typu hra), objevovat nové vztahy, upevňovat znalosti a dovednosti, procvičit nedostatečně zvládnuté dovednosti. Jejich zařazení do vyučování matematice odbourává atomizaci získaných vědomostí a přispívá k jejich funkčnímu propojení a utváření potřebných souvislostí. Hry mohou být využity jako diagnostický nástroj pro odhalení chybných představ (Novotná; Hofmannová; Petrová 2002).

Zařazováním her do vyučování matematice učitel ovlivňuje klima ve třídě. Hru lze využít při usměrňování a diferenciaci emocí, při uvolňování či vhodném vyrovnávání napětí. Poznání a emoce od sebe nelze oddělit (Crowl aj. 1997). D. Byrne (1988) uvádí, že hry jsou pro žáky motivující, zmenšují zábrany, které žákům brání vyjadřovat své názory a pozorování.

V této kapitole se zaměřujeme na vliv zařazení her do vyučování na motivaci žáků a komunikaci ve třídě. Pozornost je věnována hrám, které vyžadují komunikaci mezi žáky, případně mezi žáky a učitelem. V případové studii analyzujeme, *jak zařazení vhodně zkonstruovaných her do vyučování podněcuje žáky k rozvíjení schopnosti používat správnou terminologii, prezentovat výsledky formou srozumitelnou pro ostatní, kriticky hodnotit získané výsledky a obhajovat je.* Cílem není předložit čtenáři systematický a vyčerpávající pohled na tuto problematiku, ale ilustrovat, čím může hra přispět k rozvoji dovedností žáka komunikovat v matematice. Text kapitoly je částí rozsáhlejšího výzkumu, v němž je sledováno chování žáků a učitelů při použití her ve vyučování, zejména lingvistické aspekty formování poznávacích procesů u žáků a studentů různých věkových kategorií.[2] Analýza vychází z přímého pozorování činností ve třídě.

Studie je rozdělena do dvou částí:

- Oddíl 23.2 obsahuje shrnutí teoretických informací zaměřených hlavně na roli her ve vyučování jako motivačního faktoru a faktoru podporujícího rozvoj komunikačních dovedností žáků.
- V oddíle 23.3 jsou diskutovány možnosti, které nabízí zařazení hry Bingo do vyučování matematiky, doplněné o přímé pozorování činnosti při použití její modifikace v 5. a 6. ročníku základní školy.

[2] Ukázky her, které byly pro vyučování matematice adaptovány z her používaných pro výuku angličtiny jako cizího jazyka (McCallum 1980; Ur; Wright 1992), jsou uvedeny např. v (Novotná; Hofmannová; Petrová 2002).

23.2 Hry ve vyučování matematice

Slovo hra je používáno v různých významech. G.I. Gibbs (1978) řadí hry mezi aktivity soutěžního typu, při nichž se hráči pomocí spolupracujících nebo konkurenčních rozhodnutí snaží dosáhnout svých cílů v rámci daných pravidel. Další vymezení a typy her jsou uvedeny v kap. 14, proto je zde nebudeme opakovat.

G. Brousseau (1997, 1998) charakterizuje hru jako didaktický systém, kdy hra znamená organizování aktivity v systému pravidel, která definují úspěch a nezdar, zisk a ztrátu. Uvádí podobnosti a rozdíly mezi hrou a skutečností: V každodenním životě subjekt své akce organizuje podle svých zájmů v rámci pravidel, která nejsou vždy známá a mohou se měnit; naproti tomu hra má pevná pravidla, hraje se pro radost, je zbavena vnějších tlaků.

Všeobecně je přijímána představa hry jako zábavy (Petrová 2002). Hra je často považována za synonymum pro oddech, nenucenost, bezplatnost, v protikladu k něčemu, co by bylo prací, nepříjemností, nátlakem, střetnutím (Brousseau 2001). Je zde přítomna aktivní spolupráce se spoluhráči. Činnost jednotlivého hráče je důležitá pro ostatní hráče. Při hře je obvykle příjemná, neformální a často uvolněná atmosféra (Lee 1982). Žáci se obvykle do her ve vyučování zapojují spontánně, nevyhýbají se zveřejňování svých názorů a představ.

Hry mohou být zařazeny v kterékoli části vyučovací hodiny. Mohou být využity při budování pojmů, mohou mít funkci motivační, procvičovací či opakovací. Zařazení her na konec vyučovací hodiny může být např. formou pochvaly a ocenění práce žáků ve vyučovací hodině. Do činnosti zapojujeme pokud možno celý kolektiv; usilujeme o to, aby každé dítě bylo aspoň jednou úspěšné.

Organizátorem, případně zadavatelem her nemusí být vždy jen učitel, ale i některý z žáků nebo skupina žáků. Při zadávání her je možno využít také audiovizuální a/nebo výpočetní techniku.

Důležitou součástí vyhodnocování výsledků je odůvodňování správnosti odpovědí žáků nebo skupin žáků. Při této diskusi se žáci učí nejen srozumitelně vyjadřovat své myšlenky, klást otázky a odpovídat na ně, ale právě zde má učitel větší možnost diagnostikovat případné neporozumění pojmům nebo algoritmům. Diskuse rozvíjí schopnost žáků kriticky hodnotit předkládané informace, obhajovat vlastní názory a přijímat názory jiných.

23.2.1 Hry a motivace

Jak už jsme uvedli, matematika patří ke školním předmětům, které jsou všeobecně vnímány jako obtížné. J. Hamer (1989) připomíná, že úspěch nebo jeho nedostatek má při motivaci osudovou roli. „Demotivující může být jak úplný nezdar, tak i naprostý úspěch.“ Motivace a postoje žáků k učebním situacím jsou zahrnuty v socio-kulturním modelu učení (Gardner 1985). M. Hejný (kap. 2) považuje motivaci za první krok všech poznávacích mechanizmů.

Má-li jedinec před sebou dostatečně atraktivní cíl, je silně motivován, aby udělal cokoli, co je potřebné k dosažení tohoto cíle. Aktivity typu hra podporují hlavně vnitřní motivaci žáků. Prioritou při zařazení her do vyučování pro ně není jen „něco se naučit“, ale také zapojit se do aktivity, která je pro ně zábavou a výzvou. Postupně se jejich motivace rozšiřuje např. o podstatu a smysl úkolů, kroky učitele a změny ve vztahu mezi učitelem a žákem.

G. Petty (1996, s. 42) rozděluje motivační faktory na krátkodobé a dlouhodobé. „Krátkodobé faktory bývají silnější, zejména v dětství a dospívání.“ Mezi krátkodobé faktory patří zvyšování žákova sebevědomí při dobrých výsledcích, okamžitý příznivý ohlas okolí na úspěch: „Pokud žák zaznamenává při učení úspěch, získá důvěru ve své schopnosti něčemu se ve vašich hodinách naučit. Tato sebedůvěra je spínačem, který aktivuje lidské schopnosti. Umožňuje jim, aby se prosadily.“ (Petty 1996, s. 43.) Mezi motivací a úspěchem je přímá souvislost. Významnými krátkodobými faktory je také uspokojování přirozené zvídavosti žáků nebo nalezení zalíbení v činnosti, kterou připravil učitel, je-li tato činnost neobvyklá a zábavná.

Motivační faktory jsou podstatné ve většině vyučovacích situací. Hry ve vyučování podporují hlavně krátkodobé motivační faktory. Při vhodné organizaci hry dostávají žáci dostatečný prostor pro činnosti, které jsou zábavné, mají prostor k sebevyjádření a k zveřejnění svých výsledků, návrhů a představ. Významný je i fakt, že v situacích typu hra jsou úspěchy žáků oceněny téměř ihned po jejich dosažení, uznání, pochvala, povzbuzení, ať už ze strany učitele nebo dalších žáků jsou obvykle okamžité.

23.2.2 Hry a komunikace

Matematické poznání a schopnosti jsou rozvíjeny prostřednictvím komunikace (Alro; Skovsmose 1992).[3] Jazyk matematiky je používán jako jazyk, který pomáhá jednotlivci pracovat v matematice, ale je nutný též pro komunikaci jednotlivce s ostatními. Ve vyučování matematice je třeba rozlišovat mezi jazykem matematiky, který je univerzální, a jazykem „dělání matematiky ve třídě“, který má k univerzálnosti daleko (Gorgório; Planas 2001).

Cílem efektivní komunikace mezi žáky i mezi učitelem a žákem není jen předání informací žákům, ale má současně přispívat k vytvoření přátelského a příjemného prostředí. Vhodně konstruované hry zaměřené na rozvíjení komunikačních dovedností žáků představují jednu z možných cest, jak takové efektivní komunikace dosáhnout. Současně mohou být pro učitele nástrojem pro diagnostiku, případně i odstraňování chybných představ žáků.

[3] K významu komunikace pro poznávání v geometrii viz např. (Jirotková; Littler 2003b, 2003c).

23.3 Ukázka – Hra Bingo a její zařazení do vyučování

Pro sledování vlivu zařazení her do vyučování matematice byla vybrána hra Bingo.[4]

Hraje se individuálně nebo ve skupinách. Učitel napíše na tabuli deset až patnáct položek (např. čísla, výrazy, geometrické útvary, možné je použít i položky z každodenního života žáků nebo z jiných školních předmětů). Každý žák nebo skupina si vybere pět z nich a zapíše si je. Učitel předkládá žákům výroky, které souvisí s položkami uvedenými na tabuli (v libovolném pořadí). Jestliže žáci mají ve svém seznamu položku, se kterou výrok učitele souvisí, označí ji např. zakroužkováním. Komu se podaří zakroužkovat všech pět vybraných položek, ohlásí „Bingo". Vyhrává žák nebo skupina, která první dosáhne „Binga".

Pravidla hry jsou jednoduchá[5] a navíc se s nimi většina žáků již setkala (v různých modifikacích) mimo vyučování matematice, např. při sledování různých televizních soutěží. Žáci hru obvykle znají i z vyučování cizímu jazyku; právě zkušenosti z výuky cizího jazyka potvrzují, že žáci na její zařazení reagují velmi pozitivně a téměř všichni se aktivně zapojují do řešení zadaných úloh.

23.3.1 Zařazení hry Bingo do vyučování matematice

Hra je zaměřena na receptivní dovednosti. Je vhodná pro libovolnou oblast matematiky. Lze ji využít k procvičování jednoho tématu nebo k rozvoji porozumění vzájemným vztahům různých témat školní matematiky. Je možno ji modifikovat pro různé věkové skupiny žáků.

Zadávané matematické položky i popisy položek představují úkoly pro žáky. Položka a její popis mohou být homogenní (obě patří do stejné oblasti matematiky) nebo heterogenní (nejsou ze stejné oblasti matematiky nebo jedno z nich není z oblasti matematiky).

Při každém ohlášení „Binga" žáci společně kontrolují, zda všechny úkoly vyhrávající hráč/skupina vyřešil/la správně.

Procvičování

Podle rozsáhlé zkušenosti se zařazováním hry do vyučování cizích jazyků hlavně při procvičování slovní zásoby je velkou předností hry Bingo a podobných aktivit, že žáci ve většině případů neztrácejí po vyřešení několika úkolů zájem a pozornost a snaží se splnit

[4]Hra Bingo patří do skupiny her, které byly původně určeny pro výuku angličtiny jako cizího jazyka a dodatečně modifikovány pro využití ve výuce matematiky. Lze ji využít v různých ročnících a pro různé oblasti školské matematiky. Její využití při výuce matematiky v angličtině pro české studenty je popsáno např. v (Novotná; Hofmannová; Petrová 2002).

[5]Tím je splněno jedno z desatera pravidel pro sestavování didaktických her uvedené v (Krejčová; Volfová 1994).

úspěšně všechny zadané úkoly. Tuto zkušenost potvrzují i dosud provedené experimenty ve vyučování matematice, a to jak na 1., tak i na 2. stupni školy, viz např. (Petrová 2002). Procvičování se tak stává mnohem efektivnější než řešení úloh bez jejich „zabalení“ do herní aktivity.

Rozvoj porozumění vztahům mezi různými oblastmi matematiky

Hra Bingo nabízí vhodné prostředí pro rozvoj schopnosti žáků vidět souvislosti mezi různými oblastmi školské matematiky, ale i mezi matematikou a jejich životem mimo školu, a využívat je. Např. popis čísla 16 formou „čtverec s délkou strany 4“ představuje propojení mezi početní geometrií v rovině a aritmetikou. Jeho popis „čísla 20 a 4“ lze považovat za skrytý slovní popis aritmetické operace.

Šance na výhru

Žáci, jejichž znalosti nejsou pouze formální (viz kap. 2), kteří dokáží své znalosti a dovednosti aplikovat v nových souvislostech, mají větší šanci najít položky, které učitel popisuje. Přesto ve hře Bingo nemusí být vítěz.[6] To, že žáci sami vybírají, které položky budou sledovat, vnáší do hry prvek náhodnosti; ani zadávající učitel, ani žáci nemohou ovlivnit to, zda položky, které si vybrala jejich skupina, přijdou na řadu dříve nebo později než položky dalších skupin. Je tedy možné, že slabší žáci budou někdy úspěšnější než ostatní.

Kontrola správnosti

Při společné kontrole žáci musí formulovat své postupy tak, aby jim ostatní účastníci rozuměli. Spolužáci (případně i vyučující) mají možnost klást doplňující otázky, upozorňovat na chybné odpovědi, pokud je odhalí, atd. Tyto činnosti podporují nejen schopnost žáků kriticky hodnotit předkládané informace, obhajovat myšlenky, ale při vhodné organizaci také podporují vytváření prostředí spolupráce. Každá aktivita tohoto typu je pro většinu žáků motivující i jako aktivita soutěživá.

23.3.2 Hra Bingo v konkrétním vyučování – případová studie

Hra byla experimentálně zařazována do vyučování v různých ročnících 1. a 2. stupně základních škol, a to jak ve třídách, kde byli žáci na hry ve vyučování matematice zvyklí, tak i v takových, kde to bylo něco zcela nového. Ke zpracování experimentů byla použita metoda pozorování experimentátorem a učitelem matematiky a následná diskuse experimentátorů s vyučujícími sledované třídy a s některými žáky. K získání

[6] Tím je naplněn jeden z požadavků na didaktickou hru – každý žák má možnost vyhrát.

podrobnějších informací o vztahu žáků k matematice a k aktivitám typu hra a soutěžím byl experimentátory připraven také jednoduchý dotazník, který všichni žáci před zahájením hry vyplňovali.

V dotazníku byly zařazeny podobné prvky jako v sociometrickém testu. Zaměřoval se hlavně na postoje a motivaci, ale zohlednil i afektivní složky. Skládal se ze dvou částí. S výjimkou jedné byly všechny otázky typu Ano/Ne[7]. Část 1 byla zaměřena na vztah žáků k hrám a soutěžím obecně, část 2 na jejich vztah k matematice.

Část 1. Vztah k hrám a soutěžím obecně

1.	Rád/ráda si hraji.	*ANO*	*NE*
2.	Baví mě soutěže.	*ANO*	*NE*
3.	Hry mě baví, jen když vyhrávám.	*ANO*	*NE*
4.	Většinou vyhrávám.	*ANO*	*NE*
5.	Raději hraji sám/sama než se spoluhráči.	*ANO*	*NE*

Část 2. Vztah k matematice

1.	Matematika mě baví.	*ANO*	*NE*
2.	Matematika mi jde dobře.	*ANO*	*NE*
3.	Počítání příkladů mi jde dobře.	*ANO*	*NE*
4.	Umím vysvětlit, jak jsem počítal(a).	*ANO*	*NE*
5.	Hodin matematiky se bojím.	*ANO*	*NE*
6.	Matematiku se musím hodně učit doma.	*ANO*	*NE*
	Doplňující otázka k otázce č. 6:		
	Doma mi s matematikou pomáhá:	....	

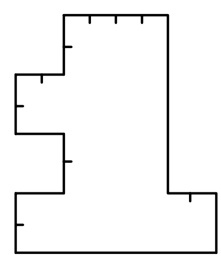
Hra Bingo byla opakovaně zařazována do vyučování matematice v různých ročnících (v 5. až 9. ročníku i na středních školách) a na různých školách. V dalším textu rozebíráme zařazení hry do vyučování ve dvou třídách: v jedné 5. třídě (23 žáků) a jedné 6. třídě (21 žáků) pražské sídlištní základní školy. Hlavním důvodem, proč byly zvoleny právě tyto třídy, byly rozdíly ve výsledcích dotazníkového šetření v těchto třídách. Přitom obě třídy byly ze stejné školy, čímž se zmírnil vliv prostředí na výsledky pozorování. Experimenty proběhly ve druhém pololetí školního roku 2000/01. Věk 10–12 let je pro pozorování aktivit typu hra vhodný, žáci jsou v tomto věku ještě dětsky hraví, ale jejich kognitivní složky myšlení už dosáhly takového stupně vývoje, že jsou schopni řešit i jednodušší abstraktní úlohy.

[7]Otázky, na něž lze jednoznačně odpovědět Ano nebo Ne. Učitel nebo jiný zadávající nesmí uvádět žádné komentáře k položeným otázkám. Žáci tento způsob kladení otázek většinou znají z her, televizních soutěží apod.

Organizace hry

V obou třídách byly při hře použity stejné položky a stejná organizace hry. Hra se hrála na šest kol a trvala čtrnáct minut. V případě, že žáci v průběhu hry prováděli nějaké výpočty, bylo to pouze pro přirozená čísla. Byla dodržena zásada, že některé položky měly souvislost s několika popisy a některé popisy bylo možno přiřadit více položkám. Důvodem byla snaha připravit prostředí pro diskusi mezi žáky při kontrole správnosti odpovědí.

Ukázka:

Příklady položek		Příklady popisů	
Po1	56	Pr1	Obdélník se stranami délek 4, 14
Po2	Obsah	Pr2	(9 – 5)(9 + 5)
Po3	Obvod	Pr3	5 600 mm^2
Po4	36	Pr4	Čísla 7 a 8
		Pr5	5 600 dm^2
		Pr6	Polovina ze 72
		Pr7	

Obr. 23.1

Možná přiřazení položek a popisů

Po1: Pr1, Pr2, Pr3 (v cm^2), Pr4, Pr5 (v m^2)
Po2: Pr1, Pr3, Pr7
Po3: Pr1, Pr7
Po4: Pr1, Pr6, Pr7

Pr1: Po1, Po2, Po3, Po4
Pr2: Po1
Pr3: Po1, Po2
Pr4: Po1
Pr5: Po1
Pr6: Po4
Pr7: Po2, Po3, Po4

Dotazníkové šetření

Výsledky dotazníkového šetření signalizovaly rozdíly v postojích, motivaci i výkonech v obou třídách. Proto uvádíme shrnutí odpovědí z dotazníkového šetření. V tabulkách jsou uvedeny výsledky zpracování dotazníků v obou třídách. Součet počtu odpovědí ANO a NE u jednotlivých otázek není ve všech případech roven počtu žáků ve třídě, kteří na dotazník odpovídali, protože někteří část odpovědí neuvedli. Je samozřejmé, že odpovědi žáků obsahují vždy subjektivní prvek a jsou také ovlivněny typem učitele a jeho vyučovacím stylem.

5. třída

Část 1		**Část 2**	
Otázka č.	Ano/Ne	Otázka č.	Ano/Ne
1	16/7	1	15/6
2	14/7	2	15/8
3	12/7	3	15/8
4	8/9	4	9/12
5	6/13	5	6/15
		6	4/15

Analýza odpovědí v dotaznících naznačila, že:

- Ve třídě převažovali soutěživí žáci, kteří si rádi hrají a touží po výhře.
- U žáků převažoval kladný vztah k matematice a k řešení úloh.
- Méně již žáci věřili své dovednosti vysvětlit ostatním postupy, které při řešení použili.

6. třída

Část 1		**Část 2**	
Otázka č.	Ano/Ne	Otázka č.	Ano/Ne
1	9/9	1	9/11
2	8/10	2	13/8
3	8/13	3	14/6
4	6/5	4	11/7
5	14/5	5	12/9
		6	12/9

Analýza odpovědí v dotaznících naznačila, že:

- Ve třídě nebyl příznivý vztah ke hrám a soutěžím výrazný. Žáci pravděpodobně nepovažovali aktivity typu hra za „to, co se má dělat při vyučování ve škole“. Roli zde mohl hrát i přechod z 1. na 2. stupeň školy.

- Projevil se zde rozdíl mezi vztahem k matematice a úspěšností – ani úspěchy při řešení úloh a odůvodňování neodstranily pocity strachu z matematiky.
- Ve srovnání s 5. třídou žáci připouštěli mnohem výraznější podíl domácí přípravy na jejich výsledcích ve škole.

V obou třídách ve většině případů, kdy žáci odpovídali na doplňující otázku, byli uváděni členové nejbližší rodiny, pouze ve dvou případech žáky doučoval někdo cizí.

Rozbor zařazení hry Bingo do vyučování

Před samotným experimentem se experimentátoři zúčastnili dvou hodin matematiky, jedné geometrické a jedné aritmetické. Sledovali, zda a jak se charakteristiky tříd odvozené z dotazníkového šetření projevují v běžných vyučovacích hodinách matematiky, na jaké jsou žáci zvyklí.

5. třída

Pozorování chování žáků při běžném vyučování odpovídalo rozdílům v odpovědích na položky dotazníku. Třídní učitelka potvrdila, že třída byla zvyklá na zařazování skupinových aktivit, což byl zřejmě důvod, proč v poslední otázce dávali přednost hře ve skupině spoluhráčů. Při aktivitách žáků se neobjevily významné obtíže při řešení tradičních úloh. Ani úlohy, které mezi tradiční nepatří, nepředstavovaly pro žáky větší překážky. Na otázky vyučující žáci většinou nabízeli poměrně rychle výsledky. Ovšem při otázkách „Proč?“, „Umíš vysvětlit?“ apod. byla situace jiná. Vyučující musela žáky vyvolávat, ostatní odpovědi nekomentovali a neměli snahu klást další otázky. Pokud bylo možno odůvodnit správnost odpovědi výpočtem, nevyskytly se obtíže.

Pro hru Bingo byli žáci rozděleni do dvojic a jedné trojice. Třída neměla problémy s vytvořením skupin, žáci se rychle do hry zapojili a hráli od začátku s velkým zaujetím. Soutěžní prvek žáky motivoval k co nejlepšímu výkonu. Ve dvojicích ve většině případů byla shoda v odpovědi. V důsledku prvku náhodnosti se stalo, že vyhrála i dvojice žáků, kteří jsou v tomto předmětu obvykle zařazováni mezi slabší.

Pro dokumentování vlivu hry Bingo na komunikaci mezi žáky byla rozhodující fáze kontroly výsledků. Jak už bylo uvedeno, v předchozích vyučovacích hodinách nebyli žáci při hledání odpovědí na otázky „Proč?“, „Umíš vysvětlit?“ apod. aktivní. Stejně se chovali i při zahájení diskuse o správnosti výsledků vítězné skupiny. Stačilo, aby si žáci uvědomili, že odhalí-li chybu v odpovědi, mohou ještě vyhrát, a situace se postupně měnila. Žáci hledali v odpovědích skupiny, která v daném kole získala „Bingo“, možné nesrovnalosti a snažili se formulovat důvody, proč nelze některou odpověď uznat apod. Ve všech kolech hry bylo zřetelné, že pokud se k jedné položce z Binga vyskytovalo více správných odpovědí, diskuse se stávala ještě živější. Postupně se do hry a hlavně do diskusí aktivně zapojovalo stále více žáků, v závěrečné části už nebyl ve třídě nikdo, kdo by nějak do průběhu nepřispěl. I když bylo vyplňování dotazníků anonymní a nebylo proto možno porovnat individuálně zapojení žáků do diskusí a jejich odpovědi, potvrdil průběh aktivity velkou motivační sílu hry.

Podle očekávání se nevyskytly žádné připomínky např. tehdy, jestliže skupina použila jako popis Po1 (56) popis Pr4 (Čísla 7 a 8). Také vysvětlení, že Pr1 (Obdélník se stranami délek 4, 14) je popisem k Po1, protože 56 je obsah takového obdélníku, nevyvolalo kritické připomínky ostatních žáků; žáci nekomentovali absenci jednotek. Absence jednotek však vyvolala bouřlivou reakci u přiřazení Pr3 a Pr5 k Po1. Příčinou byla absence jednotek v Po1. Důvody byly jednak formální (část žáků nepovažovala číslo bez jednotky za představitele čísla s uvedenou jednotkou), jednak ve znalostech žáků (ukázalo se, že žáci neměli dobře zvládnuté převádění mezi jednotkami obsahu cm^2 a mm^2 a mezi m^2 a dm^2).[8] Poslední fakt ukazuje, jak zařazení těchto položek do hry bylo pro učitele ukazatelem, že u převodů jednotek přetrvávají u žáků nejasnosti (diagnostická funkce hry).

6. třída

Pro 6. třídu uvádíme rozdíly proti průběhu hry Bingo v 5. třídě. V počáteční fázi experimentu byly rozdíly v přístupu v obou třídách výrazné. Žáci 6. třídy se sice rozdělili do skupin bez potíží, v prvních dvou kolech hry však byli většinou velmi „opatrní“, když měli ohlásit „Bingo“. Zřejmě jejich důvěra ve správnost vlastních odpovědí nebyla příliš velká. Teprve v dalších kolech se do hry zapojili plně, zapomněli na své pochybnosti a hra probíhala podobně jako v 5. třídě. Při kontrole správnosti výsledků po ukončení hry se opět potvrdily odpovědi z dotazníků. V 6. třídě byli žáci ochotni uvést kromě odpovědí i slovní odůvodnění jejich správnosti. Jestliže se k jedné položce z Binga vyskytovalo více správných odpovědí, byla diskuse o správnosti odpovědí v 6. třídě mnohem bohatší než v 5. třídě. Zatímco v 5. třídě byla většina odpovědí z oblasti početních operací s přirozenými čísly, v 6. třídě byla část odpovědí založena na použití termínů např. z geometrie.

Pokud jde o přiřazování položek a jejich popisů, byla situace (i přes rozdíl jednoho ročníku matematiky navíc) analogická jako v 5. třídě.

Vliv zařazení hry Bingo na komunikační klima ve třídě

Analogické analýzy zařazení hry Bingo do vyučování matematice i v dalších třídách vedly ke společnému závěru: Ve všech případech se postupně měnilo komunikační klima a aktivita většiny žáků ve třídě. Ve všech případech byla zaznamenána zvýšená aktivita žáků a výrazné oživení komunikace mezi žáky, případně i mezi žáky a učitelem (experimentátorem).[9]

[8] Ve vzdělávacím programu Základní škola jsou tyto jednotky zařazeny již od 4. ročníku, proto experimentátoři nepředpokládali, že by Pr3 a Pr5 mohlo být tak velkou výzvou pro žáky.

[9] K podobným výsledkům vedly i další experimenty se zařazením hry Bingo i dalších her, které byly původně používány ve výuce cizích jazyků a pro naše potřeby modifikovány a zařazeny ve vyučování matematice v různých ročnících školy.

Prozatím nebyla zkoumána trvalost změny motivace a komunikačního klimatu ve třídě. To je jeden z dalších směrů, kterým se výzkum může dále rozvíjet.

23.4 Závěr

V předchozí části jsme se zaměřili na hru jako faktor ovlivňující klima ve třídě. Cílem zařazení hry bylo hlavně zvětšení motivace žáků pro učení se matematice a rozvíjení jejich komunikačních dovedností, nikoli budování matematických pojmů a odhalování zákonitostí, které žáci do té doby ještě neznali (i když i k tomu při hře pochopitelně někdy docházelo).

Využití her při diagnostice uchopení pojmů v matematice je ilustrováno na hře SOVA v kap. 14.

Využití her při konstrukci znalostí a dovedností žáků při vyučování matematice je rozpracováno v teorii didaktických situací (G. Brousseau). Tento přístup je ilustrován na hře „The race to 20" např. v (Brousseau 1998, s. 3–18). Hra je v takovém případě rozdělena do tří různých fází (fáze akce, formulování, ověřování platnosti). Pro každou fázi je připravena jiná organizace aktivit. G. Brousseau věnuje zvláštní pozornost změně funkce žáků z pouhých „vykonavatelů instrukcí" na „hledače zákonitostí" a následně také na kritiky a obhájce nalezených zákonitostí.

V dalších výzkumech se zaměříme na modifikace her, které byly prozatím používány jako prvek motivační a podporující komunikaci mezi žáky ve smyslu teorie didaktických situací.

Kapitola 24

Pravidelnosti aritmetiky a geometrie číselných dvojčat

Milan Koman

Motto: Objevte pravidelnosti, objevíte nový svět.

24.1 Formulace problému

Využívání pojmu pravidelnosti je v naší didaktické literatuře i v naší škole jevem téměř neznámým. Jen výjimečně se můžeme setkat s pojmem periodičnosti, který je však jen jednou z mnoha forem matematických (ale i nematematických) pravidelností.[1] Přitom prostředí poskytující příležitosti k *hledání*, *zkoumání a objevování pravidelností* a k jejich následnému využití k řešení jednoduchých i složitějších úloh a k uchopování situací může být příznivou půdou pro vznik prostředí, které *podněcuje tvořivost* učitelů i žáků. Uskutečnění naznačené vize cílevědomého využívání pravidelností je plně v duchu tzv. desatera konstruktivizmu tak, jak je formulovali M. Hejný a F. Kuřina (2001 a kap. 1).

Cílem této studie je

1. *popsat jedno aritmeticko-geometrické prostředí, které nabízí celý soubor netradičních úloh a problémů, v nichž důležitou roli hraje jev pravidelnosti,*
2. *prezentovat didaktické zpracování tohoto prostředí, včetně komentovaných ukázek žákovských řešení.*

[1] V publikacích (Hejný aj. 1989, Hejný; Kuřina 2001) není pojem pravidelnost zmíněn ani jednou. Pojem periodičnost je uveden pouze v první ze zmíněných publikací, a to jen jednou.

24.2 Trochu historie na začátek

Autor si živě vzpomíná, jak na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let minulého století spolu s J. Vyšínem v tehdejším Kabinetu pro modernizaci vyučování matematiky v Krakovské ulici přemýšleli o možnostech širšího využití periodicity, a to již na 1. stupni základní školy. Mluvili sice o periodicitě, ale chápali ji v širším slova smyslu jako to, čemu dnes říkáme pravidelnost a co např. anglofonní země označují slovem „pattern“. Ale tehdy na realizaci této myšlenky ještě neuzrál čas.

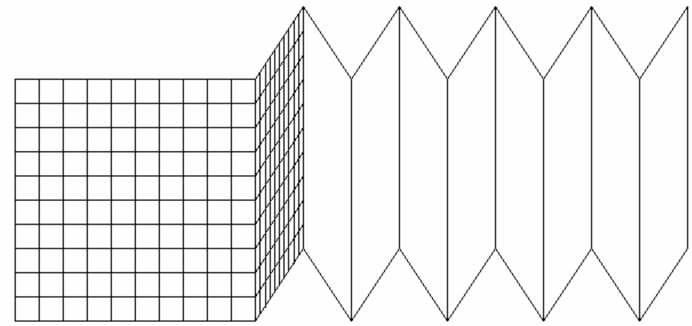
V devadesátých letech myšlenka využití pravidelností znovu ožila. Bylo to v době, kdy se autor spolu s M. Tichou začal zabývat problematikou uchopování situací. Poprvé tuto myšlenku deklarovali v práci (Koman; Tichá 1995). Ideu uplatňování pravidelností lze nalézt v některých dalších pracích věnovaných procesům uchopování matematických i nematematických situací. V letech 1993 až 2001 to byly dvě společné práce s M. Hejným (Hejný; Koman 1993, 1997) a pak řada společných prací s M. Tichou, z nichž uvedeme aspoň dvě (Koman; Tichá 1999, 2001). Poslední z citovaných prací se hlásí k hlavním myšlenkám známého německého projektu „Mathe 2000“.

V roce 2001 byla publikována společná práce s G.H. Littlerem (Littler; Koman 2001), která na konkrétních ukázkách zdůrazňuje pravidelnost jako možný přístup k řešení navržených aktivit. Od tohoto roku se datuje intenzivnější spolupráce s G.H. Littlerem zaměřená na podnětné prostředí číselných dvojčat (definice číselných dvojčat bude podána v dalším textu), viz práce (Koman; Littler 2002, Littler; Koman 2003). Nejdříve jsme chápali prostředí číselných dvojčat jako *prostředí aritmetické*. V poslední době nás inspiroval projekt „Mathe 2000“ a zejména zpracování učebnic E. Wittmanna a G. Müllera (Wittmann; Müller 1990, 1992), které vznikly jako součást tohoto projektu. Na prostředí číselných dvojčat jsme se přestali dívat jen jako na prostředí aritmetické, ale začali jsme ho nazírat i jako *prostředí geometrické*. Stejně jako ve zmíněných učebnicích představuje geometrické prostředí stovková tabulka a tisícovková kniha („kniha“ ve tvaru skládacího leporela) (obr. 24.1a a 24.1b). Jejich *aritmeticko-geometrická struktura* je velice bohatá na pravidelnosti, které mohou významně přispět k aktivnímu uchopování různých typů číselných dvojčat.

Žáci mohou v těchto aritmeticko-geometrických prostředích objevovat velmi užitečné a přitom pro ně překvapující pravidelnosti. Mohou pomocí nich získat nejen geometrický vhled na jednotlivá dvojčata a na „příbuzná“ dvojčata, ale mohou je inspirovat k dalším aktivitám, jako jsou například řešení statistických (kombinatorických) otázek týkající se číselných dvojčat. Inspirováni učebnicemi E. Wittmanna a G. Müllera, uvedeme ukázku série gradovaných úloh, která sama o sobě může inspirovat učitele základní školy k pokusu připravit pro žáky prostředí pro pěstování a povzbuzování jejich tvořivých aktivit. Tyto úlohy můžeme na základě našich zkušeností (Littler; Koman 2003) zároveň doporučit jako „vstupní bránu“ k uchopování aritmetiky i geometrie číselných dvojčat. Další části textu mohou pak posloužit jako scénář pro práci učitele se žáky ve věku od 10 let.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(a)



(b)

Obr. 24.1

Úloha 1. V tabulce na obr. 24.2 jsou vyznačeny dvě desítky čísel. První desítku tvoří šedě podložená čísla 0, 11, 22, . . . , 99 na hlavní diagonále. Druhou skupinu tvoří orámovaná čísla 10, 21, 32, . . . , 98, 9. Popište, jak byla vybrána tato druhá desítka čísel.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

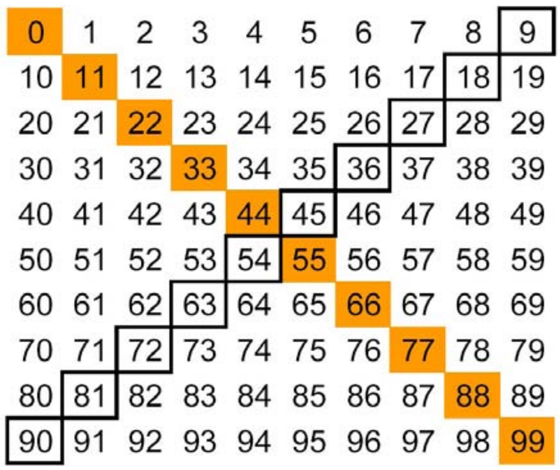
Obr. 24.2

Žáci mají porovnat součty obou desítek čísel bez toho, že by tyto součty počítali. Klíčem k řešení je pravidelnost, s jakou můžeme měnit „šedá“ čísla na orámovaná čísla. Postupujeme-li například po sloupcích, pak každé z prvních devíti „šedých“ čísel zvětšujeme o 10, a tak dostaneme pod ním ležící orámované číslo. Poslední „šedé“ číslo naopak zmenšíme o 90 a tím dostaneme „rohové“ číslo 9. Oba součty tedy musí být stejné. Ke stejnému výsledku dojdeme, měníme-li „šedá“ čísla na orámovaná čísla v řádcích.

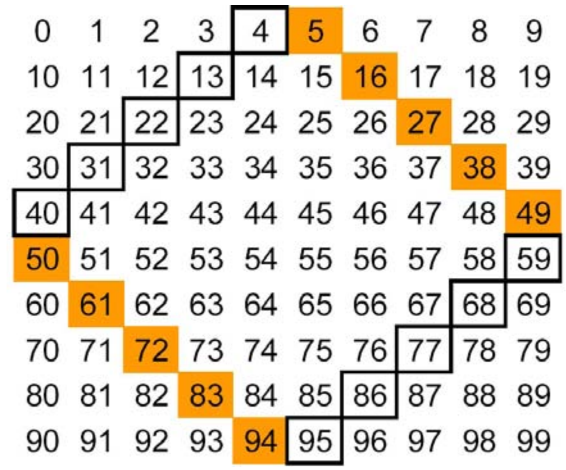
Úlohy 2 a 3. (Obr. 24.3a a 24.3b.) Podobně mohou žáci využít pravidelností při porovnávání součtů „šedých“ a orámovaných čísel na obr. 24.3a a 24.3b.

Na základě těchto zkušeností mohou žáci vytvářet a řešit podobné úlohy sami. Můžeme si položit i otázku: *Co když budeme sčítat čísla na jiných krátkých úhlopříčkách, než jsou na obr. 24.3b?* Například nám jde o součet čísel na hlavní úhlopříčce a součet čísel na dvou s ní rovnoběžných krátkých úhlopříčkách, které mají dohromady deset čísel.

Stovkovou tabulku lze chápat i jako jeden z mnoha příkladů Wittmann-Müllerových „Streichquadratů“, což můžeme přeložit „škrtací čtverce“, ale i „žertovné čtverce“.



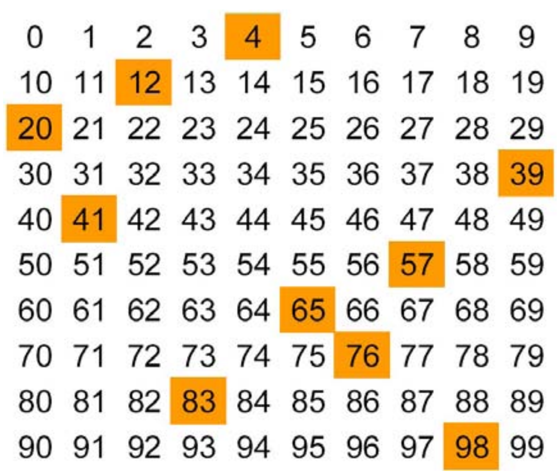
(a)



(b)

Obr. 24.3

Název škrtací čtverec je „činnostní“ název, který naznačuje, že z čtverce se cosi vyškrtává a pak teprve počítá se zbylými čísly. Název žertovný čtverec vyjadřuje překvapující fakt, že výsledek výpočtu nezávisí na způsobu vyškrtávání (při dodržení předepsaného postupu). Naznačíme to v další úloze.



0	4
1	2
2	0
3	9
4	1
5	7
6	5
7	6
8	3
9	8

Obr. 24.4

Úloha 4. Na obr. 24.4 vlevo vidíme škrtací čtverec již s ukončeným škrtacím procesem. Všechna „bílá“ čísla jsou vyškrtána, zůstávají jen „šedá“ čísla. Postup škrtání, který žáci provádějí sami, je takový, že vyberou některé číslo v tabulce, a pak škrtnou všechna čísla, která s ním leží ve stejném řádku a také ve stejném sloupci. Ze zbylé části tabulky vyberou další číslo a pokračují stejným způsobem ve škrtání. Tento postup opakují, dokud není kromě vybraných čísel celá tabulka vyškrtaná. Výsledkem je, že v tabulce zůstane v každém řádku a v každém sloupci právě jedno vybrané neškrtnuté číslo. Na našem obrázku jsou to „šedá“ čísla.

Druhá část úkolu je sečíst vybraná (šedá) čísla.

Nyní se může zdát, že jsme se dostali někam, kam jsme nechtěli. Místo pravidelnosti zde máme nepravidelnost. Ale není tomu tak. Můžeme zde najít jinou pravidelnost, která usnadní řešení úlohy. Vypíšeme vybraná čísla do úzké tabulky vpravo (obr. 24.4). Tím vypíšeme všechna vybraná čísla do tabulky desítkové soustavy. Na místě desítek, ale také na místě jednotek se vystřídají všechna celá čísla od 0 do 9, každé právě jednou. Tento fakt však vůbec nezávisí na tom, jak bylo škrtání prováděno.

Stačí tedy sečíst všechna celá čísla od 0 do 9. Při sčítání lze využít známý „gaussovský“ způsob sčítání „souměrně položených čísel podle středu“ (obr. 24.5).

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Obr. 24.5

24.3 Definice a znázorňování dvojciferných součtových dvojčat a trojčat

24.3.1 Přípravné úlohy se stovkovou tabulkou

Naše poslední zkušenosti ukazují (Littler; Koman 2003), že pro zkoumání číselných dvojčat je užitečné seznámit nejdříve žáky se stovkovou tabulkou a nechat je objevovat její nejdůležitější pravidelnosti. Např. jak se mění čísla polí, po kterých se pohybují jednotlivé šachové figurky. Pro následující zkoumání číselných dvojčat je důležitý zejména střelec. Všimneme si, že tato úloha souvisí s násobilkami čísel 11 a 9. Podobně můžeme hledat v tabulce další násobilky.

Pohybujeme-li se jako střelec po hlavní úhlopříčce a po krátkých úhlopříčkách s ní rovnoběžných, zjistíme, že se čísla liší o násobky 11 (pohyb na sousední pole v dalším řádku je přesun o jedničku doprava a o deset dolů). Na vedlejší úhlopříčce a s ní rovnoběžných úhlopříčkách se sousední čísla liší o násobky čísla 9. Odtud lze snadno objevit, že rozdíl každých dvou symetrických čísel (např. $64 - 46$, $75 - 57$, $41 - 14$ atd.) je vždy násobkem čísla 9.

24.3.2 Součtová dvojčata

V matematice jsou známá tzv. prvočíselná dvojčata, např. 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13, 17 a 19, což jsou dvojice prvočísel, která se liší o číslo 2. My však budeme zkoumat jiné typy číselných dvojčat. Nejdříve to budou *součtová dvojčata* (Koman; Littler 2002, Littler; Koman 2003).

> *Dvě dvojciferná čísla se nazývají (součtová) dvojčata, když se jejich součet rovná součtu čísel k nim „symetrických“.*

Příkladem součtových dvojčat jsou čísla 35 a 97. Snadno se o tom přesvědčíme. Jejich součet $35 + 97 = 132$ a součet čísel k nim symetrických $53 + 79 = 132$ se sobě rovnají.

Takové dvojice mohou objevit žáci sami a teprve potom zavedeme název číselná dvojčata.

Úloha 5. *1. část.* Zadáme žákům např. číslo 46. Jejich prvním úkolem je doplnit pod ně jiné číslo a pak obě čísla sečíst. Potom napíší k číslu 46 i ke „svému“ číslu symetrická čísla a opět je sečtou. S největší pravděpodobností jim vyjdou různé součty.

2. část. Žáci dostanou za úkol hledat k číslu 46 druhé číslo tak, aby se součty první dvojice čísel i druhé dvojice čísel k nim symetrických sobě rovnaly.

Žáci mohou objevit tři pravidla, která umožňují k libovolnému číslu najít jeho dvojče. Ilustrujeme je na našem příkladu (obr. 24.6).

35	Vertikální pravidlo:	$3 + 9 = 5 + 7$
+ 97	Horizontální pravidlo:	$5 - 3 = 9 - 7$
132	Křížové pravidlo:	$7 - 3 = 9 - 5$

Obr. 24.6

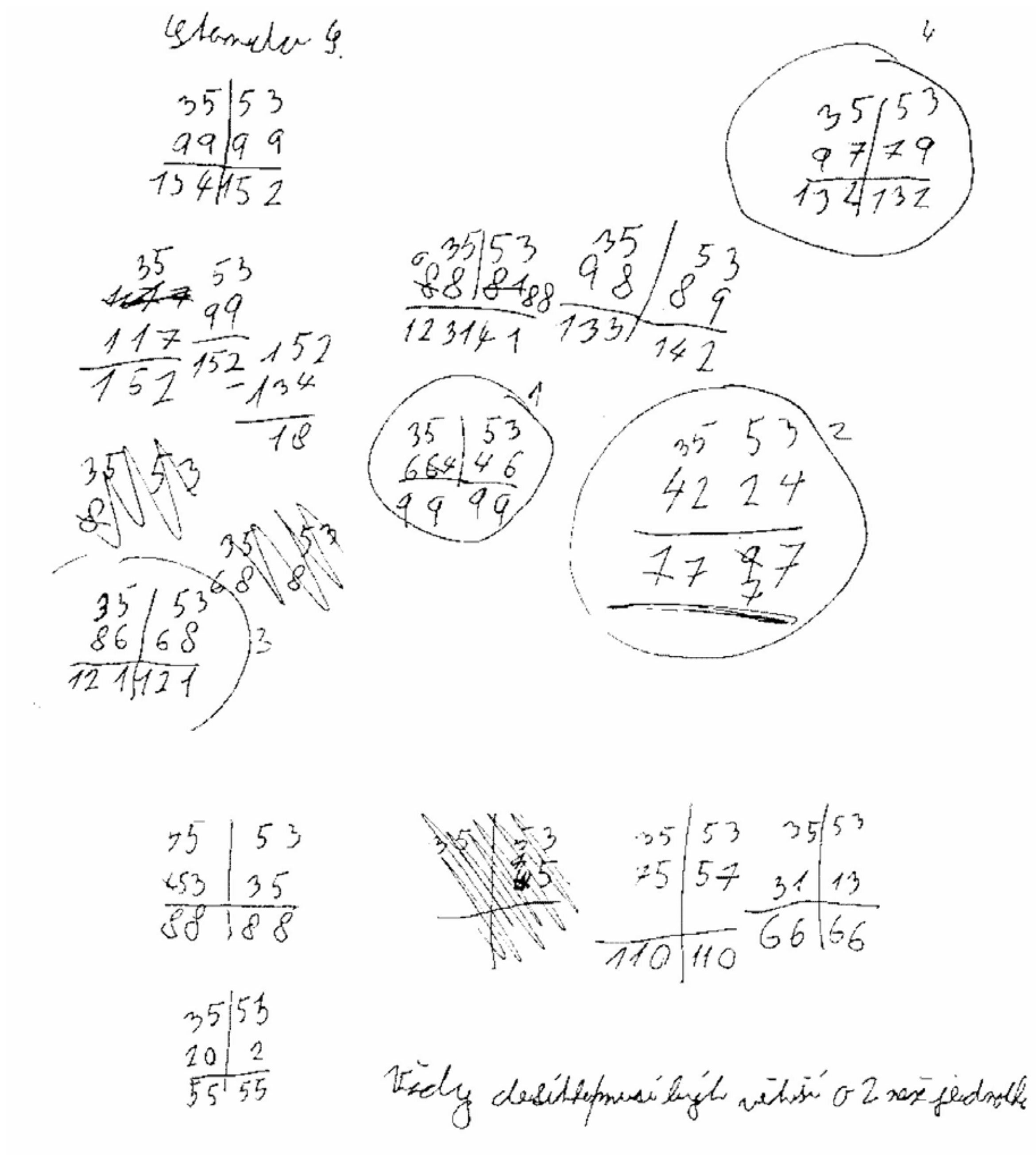
Když hledají žáci například k číslu 35 číselné dvojče, zpravidla rychle objeví symetrické číslo 53. Hledání a objevování dalších dvojčat může být z počátku „v hlavě“ i „na papíře“ značně neuspořádané. Ukázkou je záznam žáka 5. ročníku Standy na obr. 24.7.

Výpočty označené v horní části stránky čísly 1 až 4 ukazují, v jakém pořadí objevil Standa k číslu 35 čtyři různá dvojčata. V dolní části stránky jsou další dvojčata, která psal již na základě objeveného horizontálního pravidla, pomocí něhož může napsat k číslu 35 ještě další dvojčata: Vždy desítky musí být větší o 2 než jednotky. Toto pravidlo samozřejmě platí jen v těch případech, kdy dané číslo má jako číslo 35 počet jednotek o 2 větší než počet desítek.

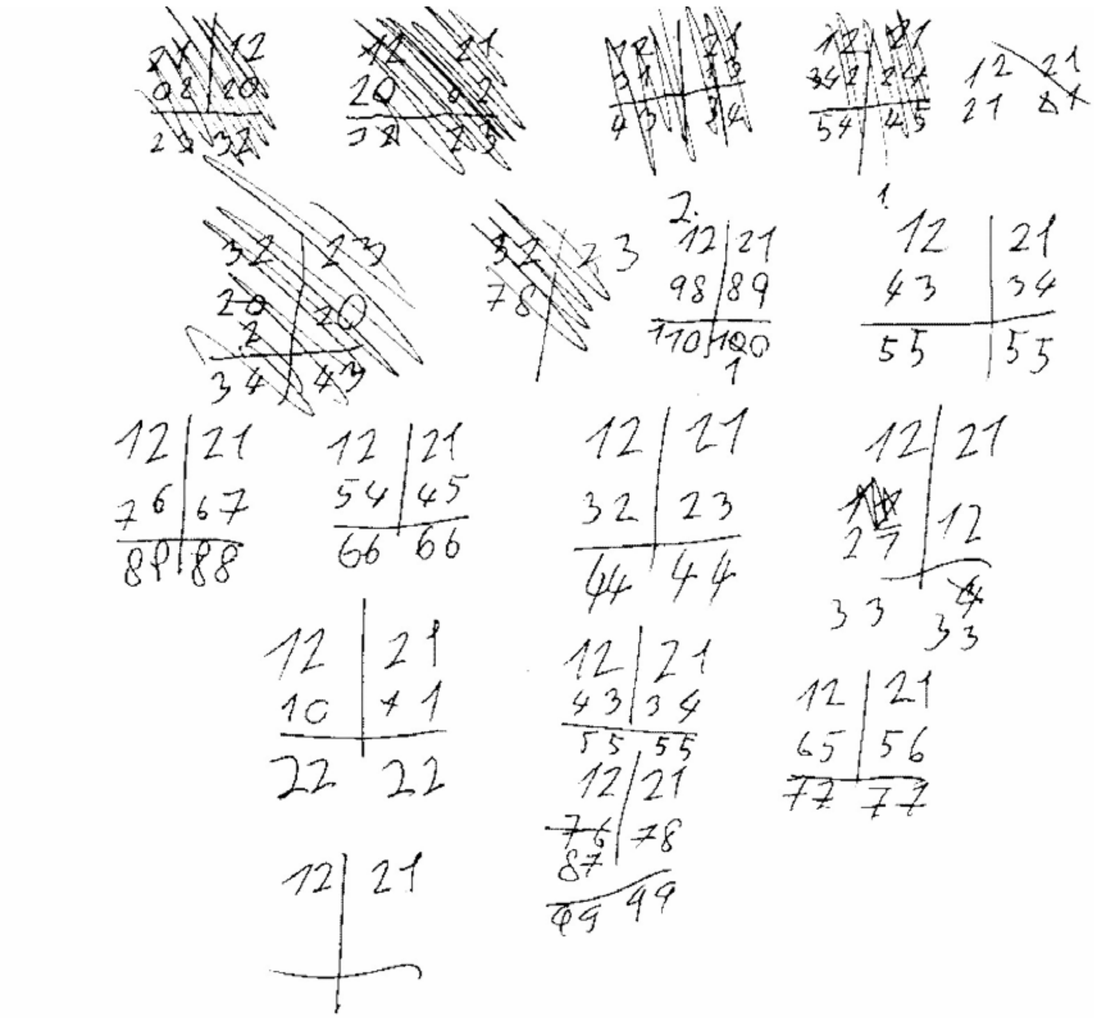
Standa pak dostal za úkol najít dvojče k číslu 21. Jeho postup ukazuje obr. 24.8, s. 398. První, co nás zaujme, je, že původní chaotický postup zde dostává systém. Chlapec vidí, že „jeho“ pravidlo pro číslo 21 nefunguje, ale brzy si uvědomí, jak musí toto pravidlo pozměnit.

Spolu se Standou hledali součtová dvojčata ještě tři další žáci. Nejméně úspěšná byla „puntičkářská“ Denisa. Příčinou toho, že se jen obtížně dopracovávala k jednotlivým dvojčatům, byl právě její puntičkářský styl práce. Veškeré neúspěšné pokusy totiž okamžitě mazala, a tím její metoda „pokusu a omylu“ postrádala veškerou zpětnou vazbu. Svůj styl „nezdařený pokus – guma“ měla velice silně zakořeněn a nebyla schopna se od něho odpoutat.

Pro úspěšné hledání a objevování pravidelností je proto zásadní nejen *systematická činnost*, ale i její *dokumentace*. Ta usnadní uplatnění zpětné vazby.



Obr. 24.7



Obr. 24.8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	$\boxed{53}$	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Obr. 24.9

Pro systematické zkoumání číselných dvojčat může být vodítkem stovková tabulka. Učitel může pomoci žákům tím, že jednomu dá za úkol najít k číslu 35 číselné dvojče například v řádku začínajícím číslem 40 (obr. 24.9) a další žáci budou hledat v jiných řádcích. Tím je dán do zkoumání systém. Shrnutím výsledků více žáků lze zjistit, že k číslu 35 jsou dvojčaty všechna čísla 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97 (obr. 24.10a).

Tato čísla vyplní krátkou úhlopříčku, která prochází číslem 53 (což je symetrické číslo k danému číslu 35) a je rovnoběžná s hlavní úhlopříčkou.

Jen krůček zbývá k tomu, abychom zjistili, že k číslům 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97 leží druhé dvojče na rovnoběžné úhlopříčce procházející číslem 35. Obě tyto úhlopříčky jsou souměrně položeny podle hlavní úhlopříčky (obr. 24.10b).

Užitím pravidelnosti můžeme snadno také odůvodnit, že každá dvojice čísel, z nichž první je z jedné ze zmíněných úhlopříček a druhé ze symetrické úhlopříčky, tvoří skutečně dvojčata. Určitě vyhovují symetrické dvojice 35 a 53. Nahradíme-li například číslo 53 jiným číslem na téže úhlopříčce (rovnoběžné s hlavní úhlopříčkou), změní se číslo 53 o násobek čísla 11, např. můžeme vzít číslo 86, které je o 33 větší než 53. To, že čísla 35 a 86 jsou opět dvojčata, plyne z rovností na obr. 24.11.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\boxed{20}$	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	$\boxed{31}$	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	38	39
40	41	$\boxed{42}$	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	$\boxed{53}$	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	$\boxed{64}$	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	$\boxed{75}$	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	$\boxed{86}$	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	$\boxed{97}$	98	99

(a)

0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	$\boxed{13}$	14	15	16	17	18	19
$\boxed{20}$	21	22	23	$\boxed{24}$	25	26	27	28	29
30	$\boxed{31}$	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	38	39
40	41	$\boxed{42}$	43	44	45	$\boxed{46}$	47	48	49
50	51	52	$\boxed{53}$	54	55	56	$\boxed{57}$	58	59
60	61	62	63	$\boxed{64}$	65	66	67	$\boxed{68}$	69
70	71	72	73	74	$\boxed{75}$	76	77	78	$\boxed{79}$
80	81	82	83	84	85	$\boxed{86}$	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	$\boxed{97}$	98	99

(b)

Obr. 24.10

$$\underline{35 + 86} = 35 + (53 + 33) = 53 + (35 + 33) = \underline{53 + 68}$$

Obr. 24.11

Skutečnost, že „příbuzná“ dvojčata lze ve stovkové tabulce určovat pomocí rovnoběžných úhlopříček, které jsou souměrně položené podle hlavní diagonály, mohou objevit sami žáci. Myšlenkový proces, kterým došla skupina anglických dětí k tomuto výsledku, je podrobně popsán v práci (Littler; Koman 2003). Zde jej uvedeme pouze zkráceně. Východiskem úvah byla dvě symetrická číselná dvojčata $(36, 41)$ a $(63, 14)$ a jejich obrazy ve stovkové tabulce. Diskuse mezi žáky probíhala takto:

Shaun „Jestliže spojíš 14 a 36, je tato přímka rovnoběžná s hlavní diagonálou a to samé pro 63 a 41.“ (pauza) „Pro čísla 38 a 61 a pro symetrická čísla 83 a 16 platí totéž.“

Thea „Přímky jsou na opačných stranách od hlavní diagonály. A jedno číslo z každé dvojice leží na každé diagonále.“

Shaun „Hej! Čísla jsou na přímkách, které mají stejnou vzdálenost.“ (pauza) „Přímka $14 - 36$ je o 3 nad diagonálou a přímka $41 - 63$ o 3 pod.“

Olivia „Vezmu jedno číslo z libovolného páru přímek, které mají stejnou vzdálenost od diagonály, ale na jejích opačných stranách. To budou dvojčata.“

Shaun „Je to, jako když je diagonála balancující přímkou. Musíš počítat přímky od diagonály na jednu stranu a pak jít o stejné číslo na druhou stranu a vybrat libovolné číslo na každé z nich.“

Protože na každé z úhlopříček na obr. 24.10b leží 8 čísel, dostaneme tak $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$ číselných dvojčat (jedno dvojče leží na jedné úhlopříčce, druhé na druhé úhlopříčce). To dává možnost řešit následující kombinatorickou úlohu.

Úloha 6. Kolik můžeme celkem najít číselných dvojčat?

Odpověď: Netriviálních dvojčat, to je dvojčat, z nichž žádné není násobkem čísla 11, je celkem $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2$.

Předmětem dalšího zkoumání může být určení tohoto součtu bez sčítání druhých mocnin.

24.3.3 Součtová trojčata, čtyřčata, ...

Novým podnětem ke zkoumání se může stát otázka: *Co když budeme místo dvou čísel sčítat tři čísla?* Součtová dvojčata se začala zkoumat tak, že bylo zadáno jedno číslo a mělo se k němu přidat druhé tak, aby jejich součet i součet symetrických čísel byl stejný. Pro *součtová trojčata* jsou výchozí dvě čísla a hledá se číslo třetí. Součet těchto čísel musí být stejný jako součet čísel k nim symetrických.

0	1	$\boxed{2}$	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9
10	11	12	$\boxed{13}$	14	15	$\boxed{16}$	17	18	19
20	21	22	23	$\boxed{24}$	25	26	$\boxed{27}$	28	29
30	31	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	$\boxed{38}$	39
40	41	42	43	44	45	$\boxed{46}$	47	48	$\boxed{49}$
50	51	52	53	54	55	56	$\boxed{57}$	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	$\boxed{68}$	69
$\boxed{70}$	71	72	73	74	75	76	77	78	$\boxed{79}$
80	$\boxed{81}$	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	$\boxed{92}$	93	94	95	96	97	98	99

Obr. 24.12

Zde naznačíme jen výsledek, který je obdobou výsledku pro součtová dvojčata. Podíváme se na obr. 24.12. Na něm dvě krátké úhlopříčky leží nad hlavní úhlopříčkou a třetí pod hlavní úhlopříčkou. První dvě mají od hlavní úhlopříčky vzdálenosti 2 a 5. Třetí úhlopříčka, která leží pod hlavní úhlopříčkou, má od ní vzdálenost 7, což je součet vzdáleností $2 + 5$.

Vybereme-li nyní na každé z těchto úhlopříček jedno číslo, dostaneme součtové trojče. Příkladem je trojice $(36, 28, 90)$. Skutečně se součty $36+28+90$ a $63+82+09$ sobě rovnají.

Podívejme se nyní na ukázku z diskuse anglických dětí o trojčatech $(36, 28, 90)$ (Littler; Koman 2003).

Lois	„Vzdálenost 36 je od ‚centrální‘ přímky 3.“
Shaun	„Pro 28 je to 6.“
Thea	„90 je vzdáleno o 9.“
Olivia	„Ano, ale 36 a 28 jsou na jedné straně a 90 na druhé straně. Když sečteme 3 a 6, dostaneme 9. Stejně jako pro 90 na druhé straně od diagonály. Je to stejné jako před tím.“

Je užitečné zadat žákům neřešitelnou úlohu. Například najděte k číslům 63 a 81 třetí číslo tak, aby vznikla trojčata. Žáci brzy přišli na to, že v daných číslech je součet desítek $6+8 = 14$ a součet jednotek jen $3+1 = 4$. Ve třetím hledaném čísle by podle vertikálního pravidla musel být počet jednotek o 10 větší než počet desítek. A to není možné. Setkání s neřešitelnou úlohou přináší nový vhled do celé problematiky.

Počet trojčat, která získáme pomocí úhlopříček vyznačených na obr. 24.12, se tak rovná $8 \cdot 5 \cdot 3 = 120$. (Vynásobíme počty čísel na úhlopříčkách vyznačených na obr. 24.12.)

Od číselných trojčat je jen krůček k *součtovým čtyřčatům*. Podrobnosti přenecháme čtenáři. Zde uvedeme jen závěr diskuse anglických dětí (Littler; Koman 2003), která se týkala součtových čtyřčat $(13, 15, 32, 72)$.

Děti dospěly k tomuto závěru: „13 je na druhé přímce nad a 15 na čtvrté přímce nad diagonálou; to dělá dohromady 6 přímek nad. 32 je na první přímce pod a 72 na páté pod diagonálou, takže dohromady 6 přímek pod diagonálou. Takže tyto přímky balancují. Jsou to čtyřčata.“ Citujeme autentickou zkratkovitou formulaci žáků. Ti použili například několikrát slovo „nad“ ve smyslu „nad diagonálou“.

Další podnět ke zkoumání nabízí otázka: *Co když budeme sčítat troj- a víceciferná čísla?*

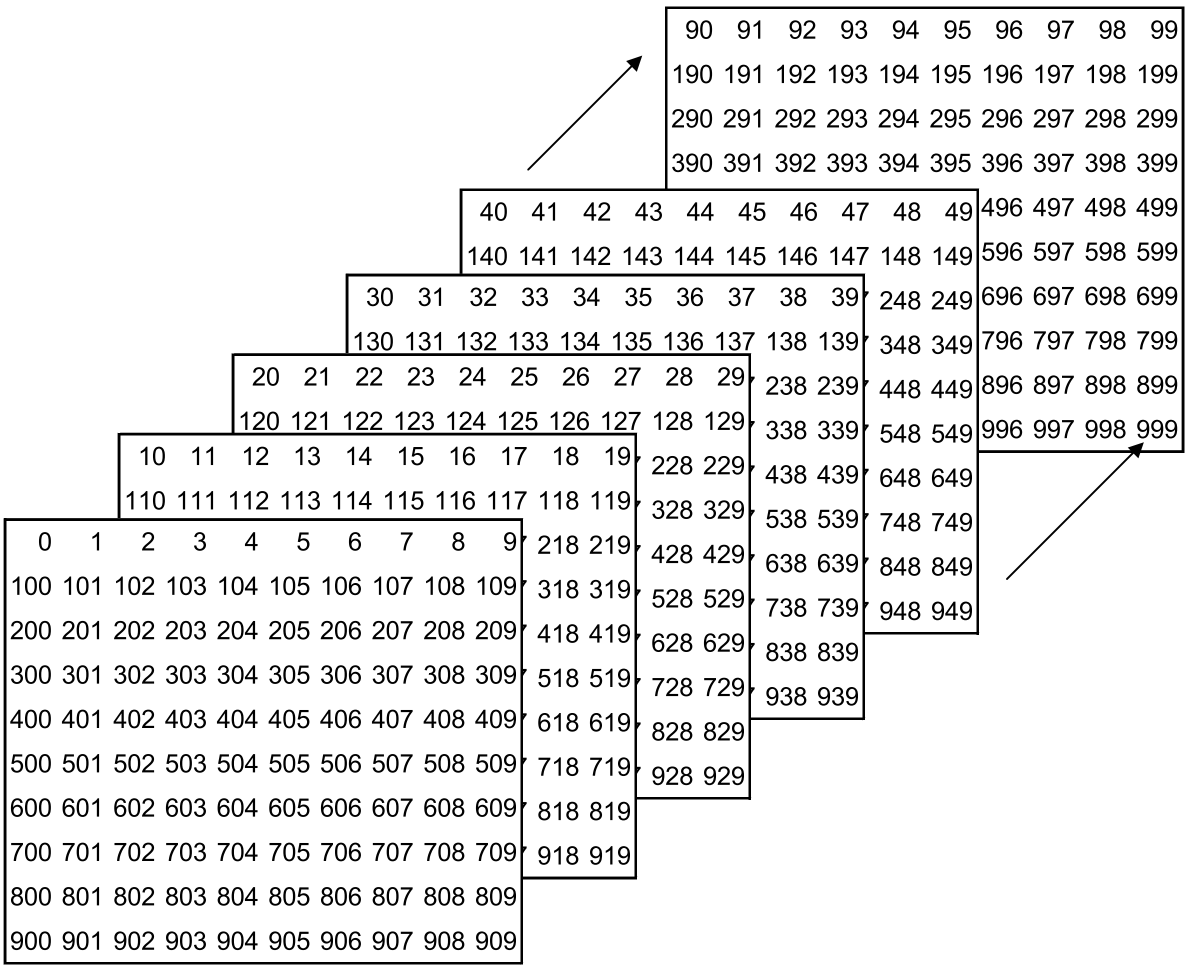
Některé zkušenosti se zkoumáním trojciferných dvojčat uvádíme v práci (Koman; Littler 2002), kde jsme se zaměřili na aritmetický pohled. Nabízí se přenést vertikální pravidlo pro dvojciferná dvojčata i na trojciferná dvojčata. Provedli jsme dva experimenty, jeden s českými a druhý s anglickými řešiteli, a zjistili jsme dvě různá řešení. V jednom případě aplikovali řešitelé vertikální pravidlo jen na krajní číslice (stovky a jednotky), v druhém případě na všechny číslice.

V prvním případě použili řešitelé vertikální pravidlo pro všechny číslice a dostali dvojici $(385, 836)$. Ve druhém případě použili vertikální pravidlo jen pro krajní číslice a dostali dvojici $(795, 618)$. V obou případech dostali dvojčata, ale rozdíl je v tom, že druhou dvojici pomocí prvního pravidla nemůžeme získat. První pravidlo tak nedává všechna řešení.

Závěr tedy je, že k tomu, *aby dvě trojciferná čísla byla součtová dvojčata, stačí, když se sobě rovnají součty jejich stovek a součty jejich jednotek.*

Čtenář může nyní snadno formulovat a ověřit vertikální pravidlo nejdříve pro čtyřciferná a pěticiferná dvojčata a nakonec pro n-ciferná dvojčata.

Od aritmetického pohledu přejděme nyní ke *geometrickému pohledu na trojciferná součtová dvojčata*. Omezíme se na trojciferná čísla. Klíčovou otázkou je, čím musíme nahradit stovkovou tabulku. Odpovědí je *tisícovková tabulka* (leporelo). Je to tabulka, která je slepena z deseti tabulek 10×10 (obr. 24.13). Slepením vznikne tabulka 10×100. V prvním řádku jsou čísla první stovky, tj. čísla 0 až 99. V druhém řádku jsou čísla 100 až 199 atd. S tabulkou je možné pracovat jako se skládankou (leporelem).

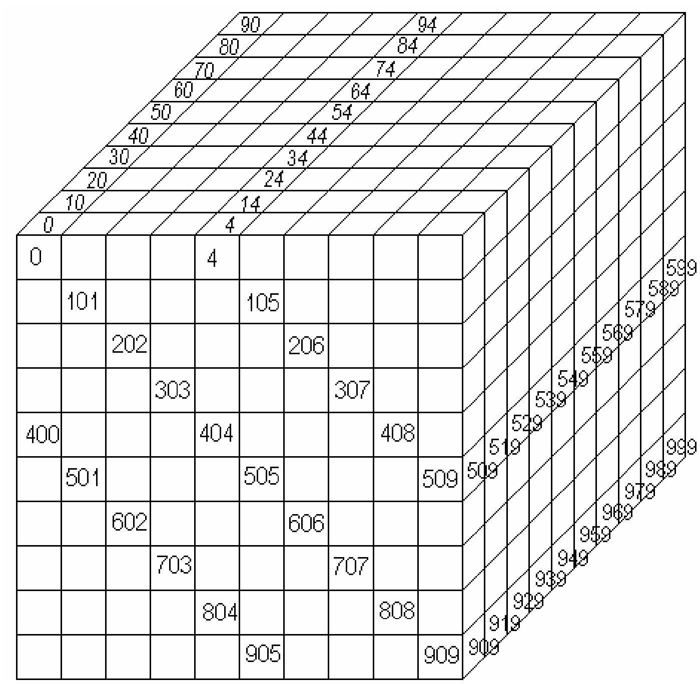


Obr. 24.13

Je myslitelná i trojrozměrná obdoba tisícovkové tabulky. Tou je *tisícovková krychle* (obr. 24.14). Jednotlivé tabulky z obr. 24.13 „zhmotníme“ do deseti vrstev z 10×10 jednotkových krychliček na obr. 24.14.

Doporučujeme čtenáři, aby si nejdříve „pohrál“ s tisícovkovou tabulkou a tisícovkovou krychlí podobně, jako jsme to učinili se stovkovou tabulkou. Můžeme si klást například otázky, na které budeme hledat odpovědi tím, že budeme volit konkrétní příklady trojciferných čísel. Odpovědi, které nalezneme například pro tisícovkou tabulku, interpretujeme v tisícovkové krychli a naopak.

- *Jak se zobrazují v obou případech symetrická čísla?*
- *Co je v obou případech obdobou hlavní diagonály? Který geometrický útvar dostaneme?*
- *Jak se mění v tisícovkové tabulce čísla, pohybujeme-li se po úhlopříčkách ve směru šikmo vpravo (vlevo) dolů?*
- *Jak se mění v tisícovkové krychli čísla, pohybujeme-li se po jednotlivých stěnových diagonálách? Například v přední stěně jsou to diagonály* 0, 101, 202, ..., 909 *a* 9, 108, 207, ..., 900.
- *Ve stovkové tabulce leží dvojčata na dvou rovnoběžných diagonálách. Jak je to v tisícovkové tabulce a v tisícovkové krychli?*



Obr. 24.14

24.4 Rozdílová dvojčata

Na „miniteorii" součtových dvojčat může navázat zkoumání *rozdílových dvojčat*. Žáky lze opět vyprovokovat otázkou typu „Co když ... ?". Tentokrát je to otázka: *Co když v našem zkoumání nahradíme sčítání jinou početní operací?* Navrhněte sami, kterou početní operaci si vyberete.

Když se žáci rozhodnou pro odčítání, dostaneme se k rozdílovým dvojčatům. Přitom asi sami brzy objeví, že rozdílová dvojčata jsou dvou typů. Ukážeme to na příkladech.

Rozdílová dvojčata 1. typu. Příkladem jsou čísla 97 a 53. Pro ně platí (podobně jako pro součtová dvojčata)

$$97 - 53 = 44 \text{ a } 79 - 35 = 44.$$

Zde čísla i k nim symetrická čísla odčítáme ve „stejném“ pořadí. Číslo 97 je menšencem prvního rozdílu a číslo 79 k němu symetrické je také menšencem v druhém rozdílu.

Rozdílová dvojčata 2. typu. Příkladem jsou čísla 75 a 48. Pro ně platí

$$75 - 48 = 27 \text{ a } 84 - 57 = 27.$$

V tomto případě si symetrická čísla při odčítání vymění role. V prvním rozdílu jsou například čísla 75 a 48 po řadě menšenec a menšitel. Čísla k nim symetrická, tj. čísla 57 a 84, si svou roli vymění, první z nich je tentokrát menšitel a druhé menšenec.

Oba typy rozdílových dvojčat znázorníme opět ve stovkové tabulce. Pro dvojčata 1. typu naznačuje výsledek obr. 24.15a. Vezmeme libovolnou úhlopříčku rovnoběžnou s hlavní úhlopříčkou. Na ní zvolíme dvě čísla, na obr. 24.15a například „šedá“ čísla 75 a 31. Ta tvoří rozdílová dvojčata 1. typu.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(a)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(b)

Obr. 24.15

Jejich rozdíl i rozdíl čísel k nim symetrických (viz obr. 24.15b) je násobkem 11, protože leží na úhlopříčkách rovnoběžných s hlavní úhlopříčkou. V obou případech je to stejný násobek 11 (číslo 44), neboť čísla obou dvojic mají na obou úhlopříčkách stejné vzdálenosti.

Totéž platí pro všechny dvojice čísel, které leží na úhlopříčkách rovnoběžných s hlavní úhlopříčkou.

Jak se zobrazí ve stovkové tabulce rozdílová dvojčata 2. typu, naznačuje obr. 24.16. Tato dvojčata leží na úhlopříčkách rovnoběžných s vedlejší diagonálou. Jejich rozdíl je, jak už víme, násobek devíti. Například dvojčata $(83, 65)$ mají rozdíl 18, stejně jako symetrická dvojice $(56, 38)$. Obě dvojice jsou položeny souměrně podle hlavní úhlopříčky. A opět totéž platí pro úhlopříčky s ní rovnoběžné.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	$\boxed{29}$
30	31	32	33	34	35	36	37	$\boxed{38}$	39
40	41	42	43	44	45	46	$\boxed{47}$	48	49
50	51	52	53	54	55	$\boxed{56}$	57	58	59
60	61	62	63	64	$\boxed{65}$	66	67	68	69
70	71	72	73	$\boxed{74}$	75	76	77	78	79
80	81	82	$\boxed{83}$	84	85	86	87	88	89
90	91	$\boxed{92}$	93	94	95	96	97	98	99

Obr. 24.16

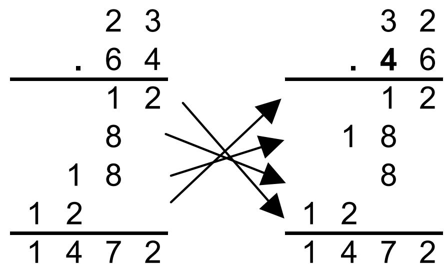
Podobně jako součtová dvojčata můžeme i pro rozdílová dvojčata formulovat vertikální, horizontální nebo křížová pravidla. Oproti součtovým dvojčatům lze však formulovat pro každý typ jen dvě z nich.

Jako už několikrát předtím, můžeme si nyní položit otázky: *Co když budeme studovat trojciferná rozdílová dvojčata? Jak budou rozmístěna v tisícovkové knize (tisícovkové krychli)?* Můžeme si samozřejmě položit i další otázky: *Kolik existuje dvojciferných (trojciferných) rozdílových dvojčat (1. a 2. typu)?*

24.5 Součinová dvojčata

Zkoumali jsme součtová a rozdílová dvojčata. *Co když zkusíme zkoumat ještě součinová dvojčata?* Zvládnutí „miniteorie“ součinových dvojčat je značně obtížnější, než zvládnutí „miniteorií“ součtových a rozdílových dvojčat. Historicky se však objevila součinová dvojčata jako první (viz Hejný; Koman 1997, Koman 1998). Jako první se součinovými dvojčaty zabývaly dvě studentky učitelství pro 1. stupeň základní školy. Jejich „mravenčí“ práce spočívající v systematickém prohledávání všech možností dvojciferných dvojčat bylo korunováno znamenitým výsledkem. Objevily obecné pravidlo pro hledání dvojciferných dvojčat, které lze beze změny použít i pro libovolná víceciferná dvojčata. Význam jejich objevu daleko lépe vynikne, když se nejdříve podíváme, jak mohou uvažovat žáci, kteří prošli zkušenostmi se součtovými dvojčaty (Koman; Littler 2002).

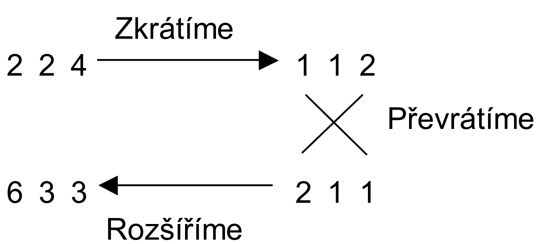
Anglická žákyně Thea měla nápad: „Možná, že nebudeme jednotky a desítky sčítat, ale násobit.“ Vyzkoušela to na dvojici $(23, 64)$. Správnost ověřila nejen výpočtem, ale i pomocí „dlouhého algoritmu násobení“ (obr. 24.17). Ten je obdobou „dlouhého algoritmu sčítání“, který poznala při zkoumání součtových dvojčat.



Obr. 24.17

Nevýhodou tohoto pravidla, které pro dvojciferná čísla objevila a ověřila Thea, je, že ho nelze použít na víceciferná čísla. Snadno to ověříme na konkrétních dvojicích čísel splňujících uvedené vertikální pravidlo, například dvojici $(253, 652)$ a na symetrické dvojici $(352, 256)$:

$$253 \cdot 654 = 165\,462,\; 352 \cdot 456 = 160\,512.$$



Obr. 24.18

Pravidlo, které platí jak pro dvojciferná, tak víceciferná součinová dvojčata a které objevily zmíněné studentky učitelství pro 1. stupeň základní školy, vysvětlíme na příkladu. Chceme najít dvojče k číslu 224. Postup ukazuje schéma, které můžeme nazvat „zobecněné křížové pravidlo“ (obr. 24.18):

Číslo „zkrátíme“ – jeho číslice dělíme jejich největším společným dělitelem.

Číslo „převrátíme“ – napíšeme k němu číslo symetrické.

Číslo „rozšíříme“ – jeho číslice násobíme libovolným celým čísle (aby součiny byly menší než 10).

Pořadí prvních dvou kroků není přitom závazné.

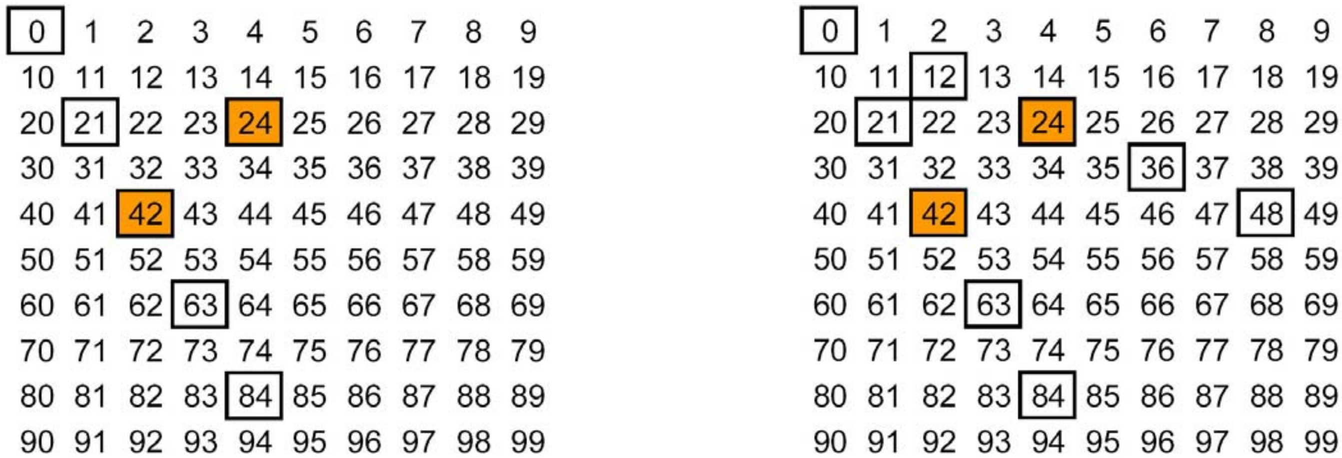
Křížové pravidlo pro součinová dvojčata můžeme znázorňovat také „geometricky“. Pro dvojciferná dvojčata to ukážeme na obr. 24.19a.

Máme najít k číslu 24 všechna dvojčata. Vyznačíme symetrické číslo 42. Pak vyznačíme všechna čísla, které spojuje přímka jdoucí z „hlavního“ pole 0 na pole 42. Na této přímce leží všechna dvojčata k číslu 24. Jsou to čísla 0, 21, 42, 63, 84. Ale také obráceně, ke všem číslům 21, 42, 63, 84 leží odpovídající dvojčata na přímce, která spojuje číslo 0 s daným číslem 24 (obr. 24.19b).

Všimněme si analogie mezi součtovými a součinovými dvojčaty.

Součtová dvojčata leží na přímkách souměrně položených podle hlavní diagonály a rovnoběžných s hlavní diagonálou.

Součinová dvojčata leží na přímkách souměrně položených podle hlavní diagonály a procházejících hlavním polem 0.



(a) (b)

Obr. 24.19

Správnost křížového pravidla pro součinové dvojice plyne z následujících výpočtů. Ačkoliv se výpočty týkají konkrétních čísel, má postup obecnou platnost:

$$224 \cdot 633 = (2 \cdot 112) \cdot (211 \cdot 3) = (2 \cdot 211) \cdot (112 \cdot 3) = 422 \cdot 336$$

Čtenář si opět může položit několik otázek typu *Co když. . . ?* navazujících na předešlý text. Jako první lze doporučit otázku: *Co když budeme zkoumat rozmístění trojciferných dvojčat v tisícovkové tabulce nebo knize?* Jinou otázkou může být: *Co když budeme zkoumat součinová trojčata?* U dvojciferných trojčat se výsledek může zdát málo zajímavý. Snadno sestrojíme trojčata, mezi kterými je jedno z čísel násobkem 11. To jsou triviální případy. Kromě nich však už žádná jiná dvojčata nelze najít. Pro tříciferná dvojčata existují netriviální případy, ale je jich málo. Jako příklad můžeme uvést trojčata:

$$210 \cdot 023 \cdot 384 = 012 \cdot 320 \cdot 483$$

O správnosti tohoto tvrzení se lze snadno přesvědčit.

24.6 Závěr

Představili jsme číselná dvojčata nejen jako podnětné a přitom velice bohaté a plodné prostředí pro rozvíjení dovedností hledat a objevovat nové poznatky a uvědomovat si, jaký význam hrají pro uchopování matematických situací pravidelnosti. Je to prostředí, které dává příležitost k realizaci *aktivně objevitelského a sociálního učení* („aktiv entdeckendes und soziales Lernen“, viz například Müller aj. 1997).

Kapitola 25

Triády jako prostředí výzkumu a výuky

Jana Kratochvílová

25.1 Formulace problému

Konstruktivistický přístup k vyučování matematice považujeme za přirozený způsob poznávání matematického světa (viz kap. 1). Učitel v roli průvodce předkládá žákovi různé problémové situace a ten sám procesem zobecňování a abstrakce vlastních zkušeností konstruuje poznatky obecnější a abstraktnější. Ovšem nalézt takové přiměřené úlohové prostředí pro žáky, aby je motivovalo k práci a zároveň aby v něm probíhal proces učení se, je jedním ze základních didaktických problémů. „Základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost. Nutným předpokladem toho je tvořivý učitel a dostatek vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy) na straně jedné a sociální klima třídy příznivé tvořivosti na straně druhé.“ (Hejný; Kuřina 2001.) Jeden takový podnět, který by mohl naznačit část cesty, jak výše uvedený problém řešit, nabízíme. Je jím netradiční prostředí nekonečné aritmetické struktury triád.

> *Cílem této kapitoly je popsat a analyzovat jeden konkrétní experiment, vložit výsledky tohoto experimentu do teoretického rámce a naznačit možné výukové aplikace tohoto prostředí.*

25.2 Přehled současného stavu

Naší snahou je nejen najít vhodné úlohové prostředí, které by motivovalo žáky, ale též rozvíjelo jejich kognitivní potence. Mnohdy si uvědomujeme první z uvedených cílů, ale druhý je opomenut nebo zúžen na trénink algoritmů či učení se zpaměti. Avšak z hlediska konstruktivistického přístupu k vyučování ve druhém cíli jde především o rozvoj žákovy osobnosti, zejména jeho intelektu (rozvoj kognitivních a metakognitivních schopností) (Hejný 2004). Oba cíle jsou splněny v případě prostředí triád, ve kterém je možné formulovat celou sérii úloh, vhodných především k rozvoji schopnosti strukturovat. Výzkumem této schopnosti se též zabývá N. Stehlíková (2004) v prostředí zúžené aritmetiky a M. Hejný (2001) v obecnější rovině.

Pojem strukturace ilustrujeme následujícím způsobem: Řeší-li žák poprvé úlohu jistého typu (například $3 + ? = 5$), používá metodu pokus – omyl. Řeší-li další podobné úlohy (například $5 + ? = 6, \ldots$), jeho práce se urychluje, žák nabývá vhled do situace a zkušenosti. Po jisté době objeví, že hledané číslo lze získat třeba metodou dopočítávání nebo dokonce metodou odčítání. Toto poznání mění původní strategii pokus – omyl na přímou strategii výpočtu. Vytvoření tohoto poznání je základní kámen tvorby struktury (v našem případě aritmetické). V dalším procesu pomocí jiných sérií úloh objevuje žák další souvislosti již ne toliko mezi objekty, ale i mezi vytvořenými poznatky. Soubor jednotlivých poznatků se stává provázanější, konzistentnější, a to je hlavním smyslem tohoto procesu, který chápeme jako strukturaci a jeho výsledek jako strukturu.

25.2.1 Prostředí triád

V roce 1994 zavedli E. Gray a D. Tall pojem procept a ukázali, že ty pojmy, které jsou ve vědomí uloženy spíše jako procesy bez náležitého konceptuálního ukotvení, nemají schopnost strukturace (Gray; Tall 1994). Ve slovenských učebnicích (Repáš aj. 1997) se objevily pojmy „sčítací rodinka“ a „odčítací rodinka“ jako důmyslně vymyšlený nástroj strukturálního propojení operací sčítání a odčítání. M. Hejný upozornil na možnost didakticky rozpracovat tuto myšlenku tak, aby vedla k vytvoření proceptu jak pro operaci sčítání, tak pro operaci odčítání u žáků na 1. stupni základní školy. Nový objekt, kterým je trojice přirozených čísel (a, b, c) splňující podmínky $a + b = c$, $0 < a$, $a \leqq b$, nazval triádou. Zavedl „operace“ následník ($f : (a, b, c) \to (a, c, a + c)$ nebo $(b, c, b + c)$) a částečnou operaci předchůdce ($f^{-1}(a, b, c) \to (a, b - a, b)$, když $2a \leqq b$; $g^{-1}(a, b, c) \to (b - a, a, b)$, když $2a > b$). Vzhledem k tomu, že lze přirozeně mluvit o následníku následníka (čtyři triády), následníku následníka následníka (osm triád) atd., lze přirozeným způsobem pomocí následníka vytvořit strukturu.

25.2.2 Výzkum

Experimentálnímu zkoumání tohoto prostředí jako nástroje strukturace se autorka začala věnovat v roce 1998. Tvorba struktury je základní úlohou triád a děti ve věku 10–11 let jsou většinou schopny tuto úlohu vyřešit samostatně. Kromě této úlohy byly v experimentech použity i další úlohy, z nichž některé se ukázaly pro žáky tohoto věku jako náročné. Žákovská řešení úloh a jejich následná analýza odhalila některé důležité jevy, jež jsou přítomny v procesu vytváření struktury, především těch, které charakterizují tento proces. Bohatý materiál s prvními výsledky tohoto výzkumu byly součástí autorčiny doktorské práce. Další výsledky byly publikovány v (Kratochvílová 2001, Dyková 2003, Littler; Kratochvílová 2003). Analýzy získaného materiálu daly ucelenější pohled na možnost didaktického využití struktury triád, mimo jiné i při aplikaci tohoto prostředí do výuky matematiky.

25.3 Metody práce

V letech 1998/99 byly uskutečněny experimenty s 54 deseti a jedenáctiletými žáky, z toho s 30 ve Velké Británii[1] a 24 v České republice, buď individuálně nebo ve skupinkách po dvou až třech v tichém prostředí kabinetu. Každý experiment ve Velké Británii trval asi tři hodiny. V České republice probíhal zpravidla ve třech setkáních, které trvaly asi hodinu, s týdenními přestávkami.

Experiment se skládal ze tří etap. První z nich se týkala porozumění novému objektu – triádě. Druhá se týkala porozumění operace následník a třetí etapa se už týkala „pohybu“ ve struktuře s grafickou pomocí – papír s očíslovanými řádkami 1–10. Scénář celého experimentu obsahoval sedm, resp. osm úloh.

I. Etapa

Po krátkém vysvětlení, co je triáda, byly žákům zadány následující úlohy:[2]

Ú1. Vyberte ty trojice, které jsou triádami: $(1, 5, 6)$; $(10, 10, 20)$; $(6, 4, 10)$; $(3, 2, 1)$; $(0, 2, 2)$; $(8, 10, 18)$; $(7, 5, 17)$.
Ú2. Doplňte chybějící čísla do trojic tak, abyste vytvořili triády: $(7, 9, \_)$; $(\_, 9, 10)$; $(14, 78, \_)$; $(7, \_, 12)$; $(75, \_, 74)$.[3]

II. Etapa

Druhá etapa experimentu byla věnována operaci následník. Místo pojmů „levý následník“ a „pravý následník“ byly používány pojmy „první triáda (dané triády)“ a „druhá triáda (dané triády)“ nebo „první syn“ a „druhý syn“, přičemž slova v závorkách byla často vynechávána. Operace byla žákům vysvětlena procedurou o pěti krocích:

Konstrukce první[4] triády (syna) z dané triády:

[1] Ve výzkumu se nejednalo o komparaci českých žáků s britskými.
[2] V pilotních experimentech byla žákům vysvětlena operace následník hned poté, co byl zaveden pojem triády. To se ukázalo jako nevhodné, protože mnozí žáci si nestačili tento pojem osvojit a v operaci se dopouštěli chyb. Proto byly zařazeny tyto dvě úlohy.
[3] Poslední dvě neexistující „triády“ slouží k testování, zda žák opravdu rozumí pojmu triáda.
[4] Používání adjektiv „první“ („druhá“) a „daná“ se zdá být nepřehledné, ale pro žáky bylo zcela jasné.

- Vezmi první číslo dané triády.
- Toto číslo umísti jako první číslo první triády (syna).
- Vezmi třetí číslo dané triády.
- Toto číslo umísti jako druhé číslo první triády (syna).
- Třetí číslo první triády (syna) dostaneš sečtením prvních dvou čísel.

Konstrukce druhé triády z dané triády lze analogicky popsat procedurou o pěti krocích. V zápisu byla používána šipka, např. $(1,3,4) \to (1,4,5)$ pro první triádu; $(1,3,4) \to$ $\to (3,4,7)$ pro druhou triádu.

Po zavedení operace byla žákům zadána následující úloha:

Ú3. Určete první a druhou triádu z triády $(1,5,6)$.

III. Etapa

Zobrazení, které dané triádě přiřadí první a druhou odvozenou triádu, bude graficky zobrazováno tak, že se daná triáda napíše na prvním řádku, z ní odvozené dvě triády na druhou řádku, dále pak čtyři další triády odvozené z těchto triád na třetí řádek atd. (viz obr. 25.1 a obr. 25.2).
Ú4. Najděte triády na 3., 4. a 5. řádku z triády $(1,5,6)$.
Ú5. Kolik triád je na 10. řádku?
Ú6. Určete nejmenší triádu na 10. řádku. Nejmenší triáda je taková triáda, která má nejmenší součet.
Ú7. Určete největší triádu na 10. řádku. Největší triáda je taková triáda, která má největší součet.

Žákům, kteří byli úspěšně a dříve hotovi s řešením výše uvedených úloh ve skupině, byla zadána úloha:

Ú8. Na 3. řádku na prvním místě zleva leží triáda $(4,16,20)$. Doplňte všechny chybějící triády na prvním, druhém a třetím řádku.

Průběh experimentu byl evidován jednak písemnými materiály od žáků, ale i magnetofonovým záznamem jejich reakcí a průběžných poznámek experimentátora. Magnetofonový záznam byl protokolován. Písemný materiál a protokol byl následně podroben atomární analýze (Hejný; Michalcová 2001; Stehlíková 2000). Při těchto analýzách byly navíc k doplnění a kontrole získaných informací využity tyto kognitivní teorie: APOS (Czarnocha aj. 1999), procept (Gray; Tall 1994), separované a generické modely (kap. 2). Například podíváme-li se na proces vzniku struktury přes APOS teorii (akce-proces-objekt-schéma), provedením akcí (tj. konstrukce první a druhé triády z dané triády a konstrukce první a druhé triády z první „nové“ triády atd.) vzniká schéma jako část struktury.

Případová studie – Andrew a Edward

Experiment se uskutečnil v příjemném prostředí studovny v květnu 1998 na jedné základní škole běžného typu v Anglii. Účastnili se ho tři žáci 5. ročníku (jedna dívka a dva chlapci). Po krátkém klimatickém rozhovoru (slouží k navázání sociálního kontaktu, většinou je zahájen vzájemným představením a může pokračovat například na téma diskuse žákovy oblíbenosti vyučovacích předmětů) a zavedení pojmu triád byly žákům postupně zadány úlohy Ú3 až Ú7. Protože oba chlapci byli hotovi s řešením úloh dříve než dívka, byla jim zadána úloha Ú8. Její řešení je evidováno jak písemným materiálem (obr. 25.1, obr. 25.2), tak protokolem, jehož část přeloženou do českého jazyka uvádíme. (Ex – experimentátor.)

Ex104 „Andrew, Edwarde, zde máte jednu triádu na 1. řádku. Zde máte dvě triády na 2. řádku a zde máte čtyři triády na 3. řádku.“ (experimentátor vyznačuje prázdná místa pro triády) „Zde máte triádu $(4, 16, 20)$“.
(experimentátor píše triádu $(4, 16, 20)$ jako první triádu zleva; vše je psáno dvakrát, pro každého chlapce zvlášť) „Můžete doplnit triády na vyznačená místa? Nezapomeňte se, prosím, podepsat.“
(pauza; experimentátor se po dobu asi 4 minut věnuje dívce; na závěr i dívce zadává Ú8 a přitom ukazuje na zadanou triádu; Andrew a Edward mají stejně zapsané dvě triády na 1. místě 2. řádku ($(12, 4, 16)$ a nad ní $(4, 20, 24)$); Edward má škrtnuté obě triády; Andrew škrtnul pouze triádu $(12, 4, 16)$)

Ed71 „My jdeme zpátky. Dostaneme 16, 4 a 8, možná. Ne!“

An70 „Vždycky bereme třetí číslo . . . “

Ed72 (otočený k exprimentátorovi) „A toto,“ (ukazuje na 12 u triády $(12, 4, 16)$) „potom vezmete druhé a třetí číslo. Toto je druhé číslo.“ (ukazuje na 4)

Ex114 „Vzpomeňte si, vždy bereme první a třetí číslo z triády, položíme je na první a druhé místo nové triády. Potom bereme druhé a třetí číslo triády a položíme je na první a druhé místo druhé nové triády.“

Ed73 „Ach,. . . “

An71 „Ach, . . . “ (pauza 50 vteřin)

Ed74 „Tam musí být 4.“ (Edward píše triádu $(4, 12, 16)$ jako první triádu na 2. řádku)

Ex115 „Ano.“
(pauza 1 minuta)

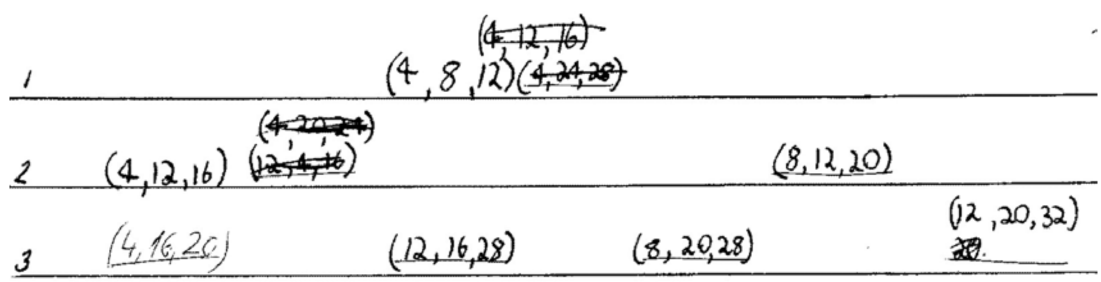
Ex116 „Andrew, mohla bych se podívat na tvoji práci?“ (měl zapsanou triádu $(4, 20, 24)$ jako první na 2. řádku a triádu $(4, 24, 28)$ na 1. řádku)

An72 „Ano.“

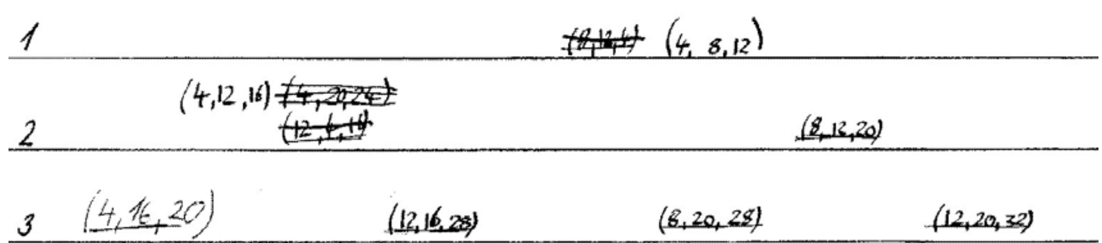
Ex117 „Zkusíme vzít první číslo z tvé triády $(4, 20, 24)$. To je 4 a položíme ji na první místo zadané triády. To je dobře. Potom musíme vzít třetí číslo, to je 24 zde“ (experimentátor ukazuje prstem) „a položíme ho na druhé místo zadané triády.“

An73 „Tam by měla být 16.“

Ex118 „Ano. Výborně." (mezitím Edward píše $(8, 12, 4)$ na 1. řádek; okamžitě to škrtá)
An74 „Potřebujeme znát tu nahoře."
Ex119 „Ano, máš pravdu."
Ed75 „4 plus něco musí být 12."
Ex120 „Ano." (Edward píše $(4, 8, 12)$ na 1. řádek)
An75 „4 musí být na prvním místě a 16 musí být na třetím místě."
Ex121 „Ano." (Andrew píše triádu $(4, 12, 16)$ na 2. řádek)
An76 „Myslím, že to mám." (škrtá triádu $(4, 24, 28)$ na 1. řádku a nad ní zapisuje novou triádu $(4, 12, 16)$; mezitím Edward správně doplnil všechny triády na zbývající volná místa)
An77 (podíval se k Edwardovi) „Na 1. řádku musí být $(4, 8, 12)$." (potom už další triády doplňuje bez problémů)



Obr. 25.1 Andrew



Obr. 25.2 Edward

Analýza

Z celého protokolu (i z této části) je patrné, že Edward řešil úlohu samostatně, kdežto Andrew, když nevěděl a měl možnost se podívat k Edwardovi, tak to učinil (viz An77). Proto se z hlediska analýzy myšlenkových procesů zaměříme na Edwarda.

Jak Edward objevil triádu $(12, 4, 16)$? Na základě předchozích zkušeností si intuitivně uvědomoval, že na druhém řádku budou použita první dvě čísla ze zadané triády a to nové číslo je jejich rozdílem. Tak dostal 12 a k tomu dopsal první dvě čísla ze zadané triády. Zpětnou kontrolou zjistil, že toto není triáda, a proto ji škrtl. Neuvědomil si vztah mezi objevenými čísly a jejich pořadím.

Poté vytvořil triádu $(4, 20, 24)$, tedy ze zadané triády vzal čísla 4 a 20. Hned ji škrtnul (a to dvakrát), z toho lze usoudit, že asi dopředu věděl, že tato triáda nebude správná, pouze se v tom chtěl utvrdit. Proto se vrátil ke své původní triádě, byť škrtnuté, a zvažoval jak z ní vytvořit triádu na prvním řádku. Věděl, že pokud se dostane na první řádek, pak bude úloha už jednoduchá.

Ve vstupu (Ed71) bylo patrné, že si začíná uvědomovat inverznost operace. Jeho mysl byla zaměřená na škrtnutou triádu $(4, 12, 16)$, to dokazoval zmíněním čísla 16. Číslo 4 bylo ještě součástí této triády, ale zároveň se stávalo objektem nové triády, která vznikne zjištěním rozdílu čísla 4 a 12, tj. 8. Tento objev Edwardovi spotřeboval veškerou energii, proto již číslo 12 nezmiňoval. Už neměl sílu, aby udělal zpětnou kontrolu. Proto o svém objevu zapochyboval a nakonec se rozhodl jej zamítnout.

Vstup (An70) nepřerušil Edwardův myšlenkový tok. Ve vstupu (Ed72) u triády $(12, 4, 16)$ poukazoval na 12 jako na číslo, které dostal z druhého a třetího čísla (jejich odečtením), ale zároveň na číslo, které bude potřebovat pro objev triády na prvním řádku. Dále poukazoval na číslo 4 jako na číslo, které též bude potřebovat pro objev triády na prvním řádku. Způsob artikulace jeho myšlenek nasvědčoval tomu, že vše se v jeho mysli odehrává v intuitivní hladině.

Experimentátor nerozuměl Edwardovi, domníval se, že chlapec neví, jak postupovat. Také nevěděl, jak dál reagovat. Nakonec se rozhodl, že zopakuje pravidlo pro operaci následník. To ovšem naštěstí asi Edwardovi nepomohlo a tudíž nezabránilo v dokončení jeho objevu, že 4 bude na prvním místě. V (Ex118) Edward pro objev triády na prvním řádku použil stejnou strategii jako v předchozím případě – je nutné najít číslo, které je rozdílem prvních dvou čísel z triády na druhém řádku. Jistota jeho počínání byla zřejmá v pořadí čísel v triádě (rozdíl, menšenec, menšitel). Uvědomoval si, že tato trojice není triádou. Tuto zkušenost si přinesl z předchozího případu, ale věděl, že členy této trojice budou členy hledané triády. Byl si vědom, že ale tímto proces nekončí, proto triádu okamžitě škrtl (tento škrt má charakter soukromého zápisu). Ve vstupu (Ed75) nalezl vztah mezi členy triády.

25.4 Výsledky

V uvedeném žákovském řešení byl identifikován fenomén „objev nestandardní inverzní operace“. Jeho analýza odhalila celý mechanizmus objevu této inverzní operace.

V dalších žákovských řešeních byly identifikovány tyto fenomény:

1. *Uchopení konceptu triád* (zápis triád může být redukován, např. triády kódované jako diády).

2. *Tvorba následníků bez poukazu na předchůdce* (řešitel nemá potřebu evidovat vztahy mezi prvky šipkami).
3. *Vhled do lokální struktury* určuje následnou schopnost tvorby globální struktury (lokální struktura obsahuje tři uspořádané prvky – triáda a její dva následníci ve stanoveném pořadí.
4. *Schopnost vytvoření substruktury (podle dané podmínky)* je ryze individuální. Například většina žáků při řešení úlohy Ú6 velmi rychle zjistila, že nejmenší triádu na následujícím řádku získají z nejmenší triády na daném řádku a tudíž není potřeba vypisovat všechny triády. Jinou ilustrací je, že pouze někteří žáci evidovali bifurkaci u struktury.
5. *Schopnost odhlédnout od orientace stromu reprezentujícího strukturu* (orientace řádků ze shora dolů nebo zdola nahoru neměla vliv na žákovu úspěšnost práce s triádami).
6. *Domnělý izomorfismus dvou substruktur* (generovaný vzor z „levé“ větve může být použit na „pravou“ větev).
7. *Domnělá pravidla o struktuře triád (vztah mezi adresami jako operátor pro vygenerování triády* (např. triáda na desátém řádku byla vytvořena zdvojnásobením čísel v triádě na pátém řádku).

Čtyři z uvedených fenoménů (viz 1, 3, 6, 7) byly podrobeny detailní analýze s cílem ukázat, jak se podílejí na procesu vytváření struktury (Kratochvílová 2001).

25.5 Aplikace

Jednou z předností triád je bohatost tohoto prostředí na úlohy. Můžeme zde formulovat úlohy s různou mírou obtížnosti – od elementární až po vysokoškolskou úroveň. U úloh elementární úrovně můžeme metaforicky využít podobnosti mezi strukturou triád a genealogickým stromem a motivovat tvořivé bádání žáků známými pojmy z příbuzenských vztahů (např. dědeček, otec, syn, bratr, bratranec, strýc). Uvádíme jedno z možných využití zkušeností z výše popsaného výzkumu do výuky matematiky základní školy. Jedná se o seznam úloh, z nichž některé jsou doplněny metodickým komentářem. Ten může být typu:

- Výzva ke zvážení, jak zareagovat v jisté situaci na žáka.
- Výzva (viz typ 1.) doplněná o úvahu.
- Upozornění na možné reakce žáka.
- Podstata obtížnosti řešení úlohy pro žáka.
- Podstata náročnosti řešení úlohy pro žáka doplněná o návrh úloh, které vedou k propedeutice náročného pojmu.

Zkušenosti s úlohami o triádách jako prostředím pro žáky ve věku 10–11 let ukazují, že nejvhodnější způsob zadávání úloh je s časovým odstupem alespoň jednoho týdne, aby žáci měli dost času na porozumění a upevnění pojmu triády a zobrazení.

Etapa I. Pojem triáda

Úloha 1. (a) Vytvořte triády z čísel 3, 7, 4. (b) Vytvořte triádu z čísel: 2, 5, 8.

Řešení: (a) $(3, 4, 7)$, (b) úloha nemá řešení.

Úloha 2. Vyberte ta čísla, z nichž lze vytvořit triádu, a zapište ji.
(a) 2, 3, 4, 5, (b) 5, 6, 94, 11, (c) 2, 4, 6, 8, (d) 20, 20, 40, 40.

Řešení: (a) $(2, 3, 5)$, (b) $(5, 6, 11)$, (c) $(2, 4, 6)$, (d) $(20, 20, 40)$.

Úloha 3. Napište čtveřici různých jednociferných čísel tak, aby se z nich nedala vytvořit ani jedna triáda.

Řešení: Např. 4, 5, 7, 8.

Komentář 1. Zvažte, jak zareagujete na tuto situaci:
Eva napíše na tabuli řešení: 0, 1, 2, 4
Anička: „0 *nelze dát do čtveřice, vždyt' nepatří do triády.“*
Eva: „Ale je to jednociferné číslo.“

Úloha 4. Vyberte ty trojice, které jsou triádami: $(1, 5, 6)$; $(10, 10, 20)$; $(6, 4, 10)$; $(3, 2, 1)$; $(0, 2, 2)$; $(8, 10, 18)$; $(7, 5, 17)$.

Řešení: $(1, 5, 6)$; $(10, 10, 20)$; $(8, 10, 18)$.

Komentář 2. Žáci nebudou pochybovat o trojici $(7, 5, 17)$. Není zde splněna hlavní podmínka, nebot' $7+5 \neq 17$. Ale u trojic $(3, 2, 1)$ a $(6, 4, 10)$ diskuse vzniknout může, protože v obou případech hlavní podmínka (tj. sečtením dvou členů dostaneme třetí) splněna je.

Úloha 5 (obdoba úlohy Ú2 v oddíle 25.3). (a) Podívejte se na neúplné trojice, v níž jedno číslo chybí, a uvažte, zda je lze doplnit tak, abyste vytvořili triády. (b) Dají-li se trojice doplnit, doplňte je.
$(7, 9, \_)$; $(\_, 9, 10)$; $(5, 4, \_)$; $(6, \_, 12)$; $(14, 78, \_)$; $(7, \_, 12)$;(_,2,15); $(75, \_, 74)$; $(0, 5, \_)$.

Řešení: $(7, 9, 16)$; $(1, 9, 10)$; $(6, 6, 12)$; $(14, 78, 92)$

Komentář 3. K didakticky zajímavé situaci dojde, když některý žák přijde s nápadem doplnit do neúplné trojice $(75, \_, 74)$ číslo -1. Takové řešení přináší dva důležité momenty:

1. objevení se záporného čísla,
2. narušení podmínky triády; první číslo není menší než druhé.

Vzniklou situaci může učitel předvídat – vždyť úlohu asi zadával s úmyslem, aby vznikla. Jak má reagovat? Podle našeho názoru zde rozhodující roli hraje to, jak třída vnímá záporné čísla. Jestliže již tato čísla nepředstavují pro žáky žádné překvapení, pak důležitější je moment druhý. Zde se stačí zeptat třídy, zda řešení přijímá. Žáci již sami odhalí nedostatek „triády“. Jestliže ale záporná čísla představují pro většinu žáků třídy překvapivý objekt, pak je nutné zaměřit diskusi třídy na číslo -1 a následně ocenit nápad objevitele.

Úloha 6. Doplňte chybějící čísla $(\_, \_, 8)$, abyste vytvořili triádu. Najděte všechny možnosti.

Řešení: $(1, 7, 8)$; $(2, 6, 8)$; $(3, 5, 8)$; $(4, 4, 8)$.

Úloha 7. Doplňte chybějící čísla podobně jako v úloze 6: $(\_, 6, \_)$.

Řešení: $(1, 6, 7)$; $(2, 6, 8)$; $(3, 6, 9)$; $(4, 6, 10)$; $(5, 6, 11)$; $(6, 6, 12)$.

Úloha 8. Doplňte chybějící čísla podobně jako v úloze 6: $(3, \_, \_)$.

Řešení: $(3, 3, 6)$; $(3, 4, 7)$; $(3, 5, 8)$; $\ldots$; $(3, n, n+3)$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 3$. Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Úloha 9. (a) Ze šesti číslic 1, 1, 1, 2, 2, 3 vytvořte tři dvouciferná čísla tak, aby tato čísla tvořila triádu.

(b) Z neomezeného počtu číslic 1, 2, 5, 7 vytvořte triádu složenou ze tří dvouciferných čísel. Najděte všechna řešení.

(c) Číslice 1, 2, 3 jsou v libovolném počtu. Sestrojujte triády.

Řešení: (a) $(11, 12, 23)$, (b) $(12, 15, 27)$; $(22, 55, 77)$; $(25, 52, 77)$, (c) např. $(111, 222, 333)$, takových triád je nekonečně mnoho.

Komentář 4. Obtížnost úlohy 9 je v pojmu číslice. Tato úloha pomáhá pochopení vazby číslo – číslice. Úloha 9c je také propedeutikou víceciferných čísel.

Jak žáky navést na řešení úlohy? Na magnetické tabuli je mnoho kartiček s číslicemi. Učitel vybere k sobě první dvě čísla a žák určí třetí číslo, aby daná trojice byla triáda. Např. učitel dá kartičku s číslicí 5 a kartičku s číslicí 8, žák najde kartičky s číslicí 1 a k ní přiloží kartičku s číslicí 3. Poté učitel ze všech kartiček na tabuli vybere pouze ty, co mají číslice 1, 5, 7, 8 a vyzve žáky, aby našli triádu složenou právě z těchto číslic. Učitel by se měl vyvarovat vysvětlování rozdílu mezi pojmy číslo a číslice, pokud se sami žáci nedotazují. V opačném případě učitel může říci, že číslice je znak a číslo vyjadřuje počet. Další úloha tohoto typu (mimo prostředí triád) je např.: Doplňte jeden z pojmů: číslice, číslo.

(a) Na dveřích mé kanceláře je .... 7.

(b) Právě včera natřeli .... novou černou barvou.

(c) Z .... 3, 7 jsem sestavil .... 37.

Úloha 10. Vytvořte co největší počet triád z následujících čísel tak, aby se žádná triáda neopakovala:

(a) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.
(b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.
(c) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 222.
(d) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37.

Řešení:

(a) $(3, 6, 9)$; $(3, 9, 12)$; $(3, 12, 15)$; $(3, 15, 18)$; $(3, 18, 21)$; $(3, 21, 24)$; $(3, 24, 27)$; $(3, 27, 30)$; $(6, 9, 15)$; $(6, 12, 18)$; $(6, 18, 24)$; $(6, 24, 30)$; $(9, 12, 21)$; $(9, 15, 24)$; $(9, 18, 27)$; $(9, 21, 30)$; $(12, 15, 27)$; $(12, 18, 30)$.

(b) Nelze vytvořit žádnou triádu.

(c) $(2, 5, 7)$; $(5, 7, 12)$; $(7, 12, 19)$; $(12, 19, 31)$; $(19, 31, 50)$; $(31, 50, 81)$; $(50, 81, 131)$; $(81, 131, 222)$.

(d) Nelze vytvořit žádnou triádu.

Úloha 11. Najděte triády, které mají všechna čísla (a) sudá, (b) lichá.

Řešení: (a) nekonečně mnoho řešení, např. $(2, 4, 6)$; $(2, 6, 8)$, (b) nelze vytvořit žádnou takovou triádu, neboť součet dvou lichých čísel je sudé číslo.

Etapa II. Přímí potomci

Operaci následník zavedeme v kontextu přímých potomků, což je pro žáky přístupnější. Triáda (a, b, c) má dva přímé potomky $(a, c, a + c)$ a $(b, c, b + c)$.

Úloha 12 (obdoba úlohy Ú3 z oddílu 25.3). Určete přímé potomky triády $(1, 5, 6)$.

Řešení: $(1, 6, 7)$ a $(5, 6, 11)$.

Úloha 13. Doplňte chybějící čísla tak, abyste vytvořili triádu a jejího potomka:

$(1, \_, \_) \to (1, \_, \_)$; $(\_, 6, \_) \to (\_, 10, \_)$; $(2, \_, \_) \to (\_, 4, \_)$; $(\_, \_, 15) \to (15, \_, \_)$.

Řešení: Např. $(1, 2, 3) \to (1, 3, 4)$, úloha má nekonečně mnoho řešení; $(4, 6, 10) \to$ $\to (4, 10, 14)$ nebo $(4, 6, 10) \to (6, 10, 16)$; $(2, 2, 4) \to (2, 4, 6)$; $(\_, \_, 15) \to (15, \_, \_)$ nemá řešení.

Úloha 14. $(\_, \_, \_) \to (\_, \_, \_)$ Vyberte šest z následujících osmi čísel: 2, 3, 5, 6, 8, 16, 18, 20 (mohou být použity dvakrát) a umístěte je do zadaného předpisu.

Řešení: $(2, 3, 5) \to (3, 5, 8)$; $(2, 16, 18) \to (2, 18, 20)$.

Etapa III. Genealogický strom

Úloha 15 (obdoba úlohy Ú4 z oddílu 25.3). V 1. generaci je dána triáda $(3, 5, 8)$. Najděte její potomky ve 2., 3. a 4. generaci.

Řešení: Ve 2. generaci $(3, 8, 11)$, $(5, 8, 13)$. Ve 3. generaci $(3, 11, 14)$, $(8, 11, 19)$, $(5, 13, 18)$, $(8, 13, 21)$. Ve 4. generaci $(3, 14, 17)$, $(11, 14, 25)$, $(8, 19, 27)$, $(11, 19, 30)$, $(5, 18, 23)$, $(13, 18, 31)$.

Úloha 16. V 1. generaci je pouze jedna triáda $(3, 5, 8)$. Kolik triád bude v 10. generaci?

Řešení: V 10. generaci bude 512 triád (tj. 2^9).

Úloha 17 (obdoba úlohy Ú6 z oddílu 25.3). V 1. generaci je dána triáda $(3, 5, 8)$. Určete nejmenší triádu v 10. generaci. Nejmenší triáda je triáda s nejmenším součtem svých členů.

Řešení: $(3, 32, 35)$.

Komentář 5. Řešení této úlohy spočívá v objevení dvou skutečností:

1. První číslo nejmenších triád se nemění, je stejné jako u zadané triády.
2. Druhá (resp. třetí) čísla nejmenší triád tvoří aritmetické posloupnosti s diferencí rovnou prvnímu číslu zadané triády.

Úloha 18 (obdoba úlohy Ú7 z oddílu 25.3). V 1. generaci je dána triáda $(3, 5, 8)$. Určete největší triádu v 10. generaci. Největší triáda je triáda s největším součtem svých členů.

Řešení: $(233, 377, 610)$

Komentář 6. Řešení této úlohy spočívá v objevení skutečnosti, že první (resp. druhá či třetí) čísla největších triád tvoři Fibonacciho posloupnosti.

Úloha 19. (a) Je dána triáda $(24, 40, 64)$. Určete Adama této triády. Adam je takový předchůdce triády, který nemá své předchůdce. (b) Najděte všechny Adamy.

Řešení: (a) $(8, 8, 16)$, (b) všechny triády typu $(a, a, 2a)$, kde $a \in \mathbf{N}$, jsou Adamové.

Úloha 20. Jsou dány triády $(14, 16, 30)$; $(17, 19, 36)$; $(26, 58, 84)$; $(29, 34, 63)$; $(34, 40, 74)$. Z kolika různých genealogických stromů tyto triády pocházejí? Určete příslušnost triád ke genealogickému stromu.

Řešení: Tyto triády pocházejí ze dvou genealogických stromů. Triády $(17, 19, 36)$; $(29, 34, 63)$ ze stromu s Adamem $(1, 1, 2)$ a triády $(14, 16, 30)$; $(26, 58, 84)$; $(34, 40, 74)$ ze stromu s Adamem $(2, 2, 4)$.

25.6 Výhledy

Na schopnosti strukturace se dost významně podílejí následující mentální schopnosti: schopnost klasifikovat, schopnost hierarchizovat, schopnost schematizovat, schopnost odhalovat příbuznosti (hledání izomorfismů). Všechny z uvedených schopností mohou být v prostředí triád zkoumány.

Literatura

ABERBACH, A. aj. *Factors influencing children's help-seeking styles.* A paper presented at the Annual Conference of the American Educational Research Association. Chicago, April 1991. [ERIC Document ED 335149.]

AHTEE, M.; PEHKONEN, E. Constructivistic viewpoints for school learning and teaching in mathematics and science. In *Research Report 131*. Helsinky : University of Helsinki, Department of Teacher Education, 1994, s. 13–18, 27–34.

ALEVEN, V.; STAHL, E.; SCHWORM, S. aj. Help seeking and help design in interactive learning environment. *Review of Educational Research*, 2003, č. 73, s. 277–320.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. That was not the intention! Communication in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* 1992, roč. 18, č. 2, s. 42–51.

AMBRUS, A. Problem posing in mathematics education. In *Research Report 175*. Helsinky : University of Helsinki, Department of Teacher Education, 1997, s. 5–17.

AMES, R. Help-seeking and achievement orientation: Perspectives from attribution theory. In DE PAULO, B.M.; NADLER, A.; FISCHER, J.D. (Eds.). *New directions in helping : Help-seeking.* Vol. 2. New York : Academic Press, 1983, s. 165–186.

ARROYO, I.; BECK, J.E.; BEAL, C.R. aj. Analyzing students' response to help provision in an elementary mathematics. *Intelligent Tutoring System* [online]. 2001. Dostupné na WWW: `<http://www.cogs.susx.ac.uk/users/bed/aied2001/arroyo.pdf>`, 15.11. 2002.

ASSER, E.S. Social class and help-seeking behavior. *American Journal of Community Psychology*, 1978, č. 6, s. 465–474.

BACK, J.; TRCH, M. Dice, routes and pathways : Developing geometric thinking and imagination in young children. *Primary Mathematics*, 2002, s. 3–6.

BARTONCOVÁ, L. *Communication between two students during problem solving in mathematics*. Praha, 2003. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

BASTOW, B. aj. *40 mathematical investigations.* Australia : The Mathematical Association of Western Australia. [Nedatováno.]

BERGE, C. *Těoria grafov i jeje primeněnija.* Moskva : Izdavatělstvo Inostranoj Litěratury, 1962.

BERTRAND, Y. *Soudobé teorie vzdělávání.* Praha : Portál, 1998.

Biblí Svatá (podlé posledniho vydáni kralického z roku 1613). Praha : Nákladem britické i zahraničné společnosti biblické, 1923.

BLACKMOREOVÁ, S. *Teorie memů.* Praha : Portál, 2001.

BLAŽKOVÁ, R.; VAŇUROVÁ, M.; MATOUŠKOVÁ, K. aj. *Matematika pro 3. ročník základní školy.* [3 díly.] Všeň : Alter, 1995.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects : State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 1991, č. 22, s. 37–68.

BOČEK, L.; ŠEDIVÝ, J. *Grupy geometrických zobrazení.* Praha : SPN, 1979.

BOERO, P.; PEDEMONTE, B.; ROBOTTI, E. aj. The "voices and echoes game" – the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a Vygotskian perspective: ongoing research. In *Proceedings of PME XXII.* Vol. 2. Stellenbosch, 1998, s. 120–127.

BOLGARSKIJ, B.V. *Očerki po istorii matěmatiki.* Minsk : Izdatělstvo „Vyšejšaja škola", 1974.

BONO DE, E. *Šest klobouků aneb jak myslet.* Praha : Argo, 1997.

BONO DE, E. *Pravdu mám já, určitě ne ty.* Praha : Argo, 1998.

BROIN, D. *Arithmétique et Algebre élémentaires scolaires.* Bordeaux : Université Bordeaux I., 2002.

BROUSSEAU, G. *Theory of didactical situations in mathematics.* [Edited and translated by Balacheff, N.; Cooper, M.; Sutherland, R.; Warfield, V.]. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1997.

BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques.* [Textes rassemblés et préparés par Balacheff, N.; Cooper, M.; Sutherland, R.; Warfield, V.] Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. *Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques.* Přednáška na konferenci Rallyes mathématiques, Jeux, compétitions, clubs. 2001.

BROWN, T. *Mathematics education and language, interpreting hermaneutics and post-structuralism.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.

BRUCKENHEIMER, M.; ARCAVI, A. A visual approach to some elementary number theory. *The Mathematical Gazette*, 1995, roč. 79, č. 486, s. 471–474.

BUHRMESTER, D. Intimacy of friendship, interpersonal competence, and adjustment during preadolescence and adolescence. *Child Development*, 1990, roč. 61, s. 1101–1111.

BURJAN, V.; BURJANOVÁ, L. *Matematické hry.* Bratislava : Pytagoras, 1991.

BUSSI, M.B. Verbal interaction in the mathematics classroom : A Vygotskian analysis. In STEINBRING, H.; BUSSI, M.B.; Sierpinska, A. (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom.* Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Reston, 1998, s. 65–84.

BYDŽOVSKÝ, B.; VOJTĚCH, J. *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek.* Praha : Nákladem Jednoty českých matematiků, 1912.

BYRNE, D. *Focus on the classroom.* Oxford : Modern English Publications, 1988.

CACHOVÁ, J. *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice a školní praxe*. Praha, 2003. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

CASTLE, E.B. *Ancient education and today.* England : Penguin Books, 1961.

CEDERBERG, J.N. *A course in modern geometries.* New York : Springer Verlag, 2001.

COBB, P. Information – Processing psychology and mathematics education – A constructivist perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 1987, roč. 6, č. 1, s. 3–40.

CONFREY, J. What constructivism implies for teaching. In DAVIS, R.B.; MAHER,C.A.; NODDINGS, N. (Eds.). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. USA : National Council of Teachers of Mathematics, 1990, s. 107–124.

CONWAY, J.H. *On numbers and games.* London : Academic Press, 1976.

COONEY, T.J.; KRAINER, K. Inservice mathematics teacher education : The importance of listening. In BISHOP, A.J. aj. (Eds.). *International handbook of mathematics education.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996, s. 1115–1186.

COOPER, C.R.; MARQUIS, A.; AYERS-LOPEZ, S. Peer learning in the classroom : Tracing developmental patterns and consequences of children's spontaneous interactions. In WILKINSON, L.C. (Ed.). *Communication in the classroom.* New York : Academic Press, 1982, s. 69–84.

CRESPO, S. Learning to pose mathematical problems : Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 2003, roč. 52, č. 3, s. 243–270.

CROWL, T.K.; KAMINSKY, S.; PODELL, D.M. *Educational psychology. Windows on teaching.* New York : Brown; Benchmark, 1997.

CZARNOCHA, B.; DUBINSKY, E.; PRABHU, V.; VIDAKOVIC, D. One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. In ZASLAVSKY, O. (Ed.). *Proceeding of PME23*. Vol. 1. Haifa, Izrael : Israel Institute of Technology, 1999, s. 95–110.

ČIŽMÁR, J. *Grupy geometrických transformácií.* Bratislava : Alfa, 1984.

ČERNJAK, V.S. *Istorija logika nauka*. Moskva : Nauka, 1986.

DAŇHELKOVÁ, J.; JIROTKOVÁ, D. Nejen hravé učení. *Učitel matematiky*, 1999, roč. 8, č. 1, s. 44–53.

DAVIS, R.B. Theory and practice. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 1987, roč. 6, č. 1, s. 97–126.

DAVIS, R.B.; MAHER, C.A.; NODDINGS, N. *Constructivist views on teaching and learning of mathematics.* USA : National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

DAWKINS, R. *The Selfish Gene.* Oxford : Oxford University Press, 1976.

DAWKINS, R. *Sobecký gen.* Praha : Mladá fronta, 1998.

DEANE, F.P.; WILSON, C.; CIARROCHI, J. Suicidal ideation and help-negation : Not just hopelessness or prior help. *Journal of Clinical Psychology*, 2001, roč. 57, č. 7, s. 901–914.

DECI, E.L.; RYAN, R.M. *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior.* New York : Plenum Press, 1985.

DEMBY, A.; SEMADENI, Z. *Matematyka 3, Podrecznik i ksiazka dla nauczyciela.* Warszawa : WSP, 1999.

DEWEY, J. *Demokracie a výchova.* Praha : Laichter, 1932.

DILLON, J.T. Theory and practice of student questioning. In KARABENICK, S.A. (Ed.). *Strategic help seeking. Implications for learning and teaching.* Mahwah : Lawrence Erbaum, 1998, s. 171–193.

DOMORADZKI, S.; HEJNÝ, M. Chyba v interakcii učiteľ – žiak. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky,* 2002, roč. 31, č. 3, s. 1–14.

DOMORADZKI, S.; HEJNÝ, M. Komentarz dydaktyczny do interakcji nauczyciel (student) – uczeń. In JANKOWSKI, K., SITARSKA, B.; TKACZUK, C. (Eds.). *Student jako wazne ogniwo jakości kształcenia*. Siedlece : Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, 2004, s. 177–189.

DORMOLEN VAN, J. Textual analysis. In CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A.G.; OTTE, M.; REIDEL, D. (Eds.). *Perspectives on mathematics education*. The Netherlands : Reidel Publishing Company, 1986, s. 141–171.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. London : Kluwer Academic Publishers, 1991, s. 25–41.

DREYFUS, T.; HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B.B. Abstraction in context II : The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly*, 2001, č. 1, s. 195–222.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In TALL, D.O. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht : Kluwer, 1991, s. 95-123.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Bern : Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. In *Discussion Group DG3 : Semiotics in Mathematics Education* [online]. Dostupné na WWW: `http://www.math.uncc.edu/~sae/`. 2001.

DYKOVÁ, E. *Triády jako netradiční prostředí.* Praha, 2003. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce J. Kratochvílová.

DŽIBRÁN, CH. *Prorok.* Praha : Vyšehrad, 1990.

ERDNIEV, P.M. *Prepodavanije matematiky v škole.* Moskva : Prosvěščenije, 1978.

ERNEST, P. *Constructing mathematical knowledge.* London : The Falmer Press, 1994.

EUKLEIDES. *Základy.* [Překlad F. Servít.] Praha : Jednota českých matematiků, 1907.

FIALA, J. *Regulae ad Directionen Ingenii.* Praha : Oikoymenh, 2000.

FOLTINOVÁ, K.; NOVOTNÁ, J. *Matematické hry a soutěže na druhém stupni základní školy.* Praha : Pedagogické centrum, 1997.

FRANK, K.; LESTER, J.R. Musings about Mathematics Problem Solving Research, 1970-1994. *Journal for Research in Mathematical Education*, 1994, roč. 25, č. 6, s. 660–675.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task.* Dodrecht : D. Reidel Publishing Company, 1973.

GANS, D. *Transformations and geometries*. New York : Appleton-Century-Crofts, Meredith Corporation, 1969.

GARDINER, A. „Problem-solving“? Or problem solving? *The Mathematical Gazette*, 1996, roč. 80, č. 487, s. 143–148.

GARDNER, H. *Dimenze myšlení.* Praha : Portál, 1999.

GARDNER, M. *Matěmatičeskije golovolomkii razvlečenija.* Moskva : Mir, 1971.

GARDNER, R.C. *Social psychology and language learning: The role of attitudes and motivation.* London, UK : Edward Arnold, 1985.

GATIAL, J.; HECHT, T.; HEJNÝ, M. *Hry takmer matematické. Škola mladých matematiků*. Praha : Mladá fronta, 1982.

GAVORA, P. *Úvod do pedagogického výzkumu.* Brno : Paido, 2000.

GIBBS, G.I. *Dictionary of gaming, modelling and simulation.* London : E&F N Spon Ltd., 1978.

GLASERSFELD VON, E. An Exposition of constructivism : Why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1990, č. 4, s. 7–18.

GLASERSFELD VON, E. *Radical constructivism.* London : The Falmer Press, 1995.

GOLDEBERG, E.P.; CUOKO, A.A.; MARK, J. Vytvářet spojení s geometrií. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1994, roč. 39, č. 5, s. 275–304.

GORGORIÓ, N.; PLANAS, N. Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, roč. 47, č. 1, s. 7–33.

GRAY, E.; TALL, D. Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1994, roč. 25, č. 2, s. 116–141.

GROW, G.O. Teaching learners to be self-directed. *Adult Education Quarterly*, 1991, roč. 41, č. 3, s. 125–149.

HALL, B.; ROWLAND, T. The classical form of Pythagorean triples. *The Mathematical Gazette*, 1997, roč. 81, č. 491, s. 270–272.

HAMER, J. *The practice of English language teaching.* London : Longman, 1989.

HARTL, P.; HARTLOVÁ, H. *Psychologický slovník.* Praha : Portál, 2000.

HEJNÝ, M. *Aj geometrie naučila človeka myslieť.* Bratislava : SPN, 1979.

HEJNÝ, M. Analysis of students' solutions of equations $x^2 = a^2$ and $x^2 - a^2 = 0$. *ADUC*, 1992, č. 1, s. 65–82.

HEJNÝ, M. The understanding of geometrical concepts. In BERO, P. (Ed.). *Proceedings of BISME-3*. Bratislava : Univerzita J. A. Komenského, 1993, s. 52–64.

HEJNÝ, M. Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika*, 1995, roč. XLV, s. 386–399.

HEJNÝ, M. Koncepce výuky analytické geometrie v učitelském studiu. In *Celostátní seminář kateder matematiky fakult připravující učitele matematiky.* Pec pod Sněžkou : MFF UK v Praze, 1996, s. 17–19.

HEJNÝ, M. Components of mathematical knowledge. In *Interakcija teorii i praktyki nauczania matematyki.* Rzeszow : WSP, 1997, s. 17–28.

HEJNÝ, M. Procept. In *Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovnia matematiky.* Bratislava : KZaDM, 1999, s. 40–61.

HEJNÝ, M. Štrukturovanie matematických vedomostí. In BURJAN, V.; HEJNÝ, M.; JÁNY, Š. (Eds.). *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2001, zborník príspevkov.* Kováčová pri Zvolene : EXAM, 2001, s. 13–24.

HEJNÝ, M. (2003a). Understanding and structure. In MARIOTTI, M. A. (Ed.). *Proceedings of CERME 03* [CD ROM]. Bellaria, Italy, 2003. [Dostupné též na WWW: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.]

HEJNÝ, M. (2003b). Diagnostika aritmetické struktury. In BURJAN, V.; HEJNÝ, M.; JÁNY, Š. (Eds.). *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2003, zborník príspevkov.* Kováčová pri Zvolene : EXAM, 2003, s. 22–42.

HEJNÝ, M. Dominanty matematické přípravy budoucího učitele. In UHLÍŘOVÁ, M. (Ed.). *Sborník z konference Cesty (k) poznávání v matematice primární školy.* Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2004, s. 112–118.

HEJNÝ, M. aj. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava : SPN, 1989.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D. *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou.* Praha : PedF UK, 1999.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D. Čtverečkovaný papír, trojúhelníky a Pickova formule. *Učitel matematiky*, 2000, roč. 8, č. 3, s. 129–135.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D. The key role of tasks for the development of future primary teachers'– teaching style. In *Proceedings of ICME 10* [online]. Bergen, Norsko, 2004. Dostupné na WWW: www.icme-10.dk.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. *Analytická geometrie.* Praha : Univerzita Karlova, Karolinum, 1996.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. *Geometrické transformace (metoda analytická).* Praha : PedF UK, 1997.

HEJNÝ, M.; KOMAN, M. *Samples of problem nets. (Creative approach to teaching – learning situations).* Praha : PedF UK, KMDM, 1993, č. 7. [Preprint KMDM PedF UK.]

HEJNÝ, M.; KOMAN, M. Mohou budoucí učitelky 1. stupně objevovat „matematiku"? In *Vyučování matematice a kultivace myšlení.* Hradec Králové : Vysoká škola pedagogická, 1997, s. 35–49.

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. *Matematika, fyzika, informatika*, 1998, č. 7, s. 385–395.

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. Tři světy Karla Poppera a vzdělávací proces. *Pedagogika*, 2000, roč. L, č. 1, s. 38–50.

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování k vyučování.* Praha : Portál, 2001.

HEJNÝ, M.; MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava : Metodické centrum, 2001.

HEJNÝ, M.; NÔTA, S. Metodika záporných čísel na základní škole. *Obzory*, 1990, roč. 35, s. 43–53.

HEJNÝ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí*. Praha : PedF UK, 1999.

HEJNÝ, V. *Pedagogický denník 1942/43.* [Nepublikovaný materiál.]

HEJNÝ, V. *Přednášky 1974–1977.* [Nepublikovaný materiál.]

HEJNÝ, V. *Kinetická psychologie*. 1953. [Nepublikovaný materiál.]

HEJNÝ, V.; HEJNÝ, M. *Pracovné materiály TMM.* Stredoslovenský kraj : Krajský pedagogický ústav, 1977.

HELUS, Z. *Pedagogicko-psychologické zdroje účinného vyučování.* Praha : Ústřední ústav pro vzdělávání pedagogických pracovníků, 1990.

HELUS, Z. Dítě jako zdroj proměn učitelského povolání. In *Hledání učitele.* Praha : Karlova univerzita, 1996, s. 16–25.

HIELE VAN, P.M. *Structure and insight.* New York : Accademy Press, 1986.

HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie* Praha : Pedagogické nakladatelství, [1902] 1979.

HITT, F. Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 1998, roč. 10, č. 2, s. 23–45.

HOŠPESOVÁ, A.; TICHÁ, M. (2003a). Self-reflection and improvement of mathematics classroom culture. In MARIOTTI, M. A. (Ed.). *Proceedings of CERME 03* [CD ROM]. Bellaria, Italy, 2003. [Dostupné též na WWW: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.]

HOŠPESOVÁ, A.; TICHÁ, M. (2003b). Zdokonalování kultury vyučování matematice cestou kolektivní reflexe učitelů. In COUFALOVÁ, J. (Ed.). *Sborník z konference „Od činnosti k poznatku".* Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2003, s. 99–106.

JANVIER, C. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

JAWORSKI, B. *Investigating mathematics teaching*. London : The Falmer Press, 1994.

JAWORSKI, B. Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development : Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 2003, roč. 54, [special issue], s. 249–282.

JIROTKOVÁ, D. Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1998, roč. 43, č. 4, s. 326–334.

JIROTKOVÁ, D. Didaktické hry v geometrii. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 1999, s. 48–50.

JIROTKOVÁ, D. (2000a). Odhalování geometrických závislostí s využitím čtverečkovaného papíru. In AUSBERGEROVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Mariánské Lázně : JČMF, 2000, s. 95–100.

JIROTKOVÁ, D. (2000b). Geometrie v přípravě učitelů. In *Matematika v přípravě učitelů elementární školy.* Ústí nad Labem : UJEP, Acta Universites Purkynianae 53, 2000, s. 128–130.

JIROTKOVÁ, D. (2001a). *Zkoumání geometrických představ.* Praha, 2001. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

JIROTKOVÁ, D. (2001b). Das Ja – Nein Spiel. Nicht nur spielendes Lehrnen. *Sache-Wort-Zahl, Lehren und Lernen in der Grundschule*, 2001, č. 38, s. 50–53.

JIROTKOVÁ, D. (2002a). Hra ANO-NE a čtverečkovaný papír. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2002, s. 28–34.

JIROTKOVÁ, D. (2002b). Využití geoboardu ve vyučování geometrii. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2002, s. 98–102.

JIROTKOVÁ, D.; KRATOCHVÍLOVÁ, J.; SWOBODA, E. Jak se učíme rozumět svým žákům. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2002, s. 102–108.

JIROTKOVÁ, D.; LITTLER, G. (2002a). Geometri ar mer an monster. *Nämnaren*, 2002, č. 4/29, s. 16–24. [Dostupné též na WWW: <http://namnaren.ncm.gu.se>.]

JIROTKOVÁ, D.; LITTLER, G. (2002b). Investigating cognitive processes through children's handling with solids. In COCKBURN, A., NARDI, E. (Eds.). *Proceedings of PME 26.* Vol. 3. Norwich, UK : UEA, 2002, s. 145–152.

JIROTKOVÁ, D.; LITTLER, G. (2003a). Mer om geometri och monster. *Nämnaren*, 2003, č. 1/30, s. 24–27.

JIROTKOVÁ, D.; LITTLER, G. (2003b). Komunikace v geometrii. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2003, s. 72–76.

JIROTKOVÁ, D.; LITTLER, G. (2003c). Insight into pupil's structure of mathematical thinking through oral communication. In MARIOTTI, M. A. (Ed.). *Proceedings of CERME 03* [CD ROM]. Bellaria, Italy, 2003. [Dostupné též na WWW: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.]

JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. Constructivist approaches in the mathematical education of future teachers. In PATEMAN, N.A.; DOGHERTY, B.J.; ZILLIOX, J. (Eds.). *Proceedings of PME 27+PME-NA 25.* [Poster] Vol. 1. Honolulu : University of Hawaii, 2003, s. 295.

JIROTKOVÁ, D.; SWOBODA, E. Kto kogo nie rozumie. *NIM, Naucziele i Matematika*, 2001, č. 36, s. 9–12.

JODELET, D. Réflexions sur le traitement de la notion de représentation sociale en psychologie sociale. *Communication Information*, 1984, roč. 6, č. 2–3, s. 15–42.

KALHOUS, Z.; OBST, O. aj. *Školní didaktika*. Praha : Portál, 2002.

KARABENICK, S.A. (Ed.). *Strategic help seeking. Implications for learning and teaching.* Mahwah : Lawrence Erbium, 1998.

KARABENICK, S.A.; KNAPP, J.R. Relationship of academic help-seeking to the use of learning strategies and other instrumental achievement behavior in college students. *Journal of Educational Psychology*, 1991, roč. 83, s. 221–230.

KASÍKOVÁ, H. *Kooperativní učení, koperativní škola.* Praha : Portál, 1997.

KLINE, M. *The Loss of Certainty*. New York : Oxford University Press, 1980.

KOMAN, M. Das Problem der Zahlenzwillinge, In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1998.* Neubrand, Hildesheim : Franzbecker Verlag, 1998, s. 378–381.

KOMAN, M.; LITTLER, G.H. Wie die Kinder und die Lehramtsstudenten die additiven und multiplikativen Zahlenzwillinge entdecken. In PESCHEK, W. (Ed.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002.* Hildesheim : Franzbecker Verlag, 2002, s. 279–282.

KOMAN, M.; TICHÁ, M. Jak pomocí pravidelností a závislostí získávat vhled do situací. In *5. setkání učitelů matematiky všech stupňů a typů škol. Sborník příspěvků.* Plzeň : JČMF, 1995, s. 50–53. [Editor neuveden.]

KOMAN, M.; TICHÁ, M. Grasping of situations and the development of activity and cognitive abilities. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of ERCME 97.* Praha : Prometheus, 1997, s. 94–97.

KOMAN, M.; TICHÁ, M. Jak v matematice zvládají žáci zkoumání situací z praxe – I. (Cestování – čas – peníze). *Matematika, fyzika, informatika*, 1997/98, roč. 7, s. 2–12.

KOMAN, M.; TICHÁ, M. How the children form phenomenon of dependence from their everyday experience. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'99.* Praha : PedF UK, 1999, s. 63–67.

KOMAN, M.; TICHÁ, M. Von der spielerischen Untersuchung der Situation zum Rechnen. In *Festschrift für Gerhard N. Müller.* Leipzig : Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, s. 100–111.

KORDEMSKIJ, B.A. *Hra, hlavolamy, triky.* Bratislava : SPN, 1976.

KOŠKINA, M.D. Celye i drobnye čisla. In BLOCH, A.J.; GUSEV, V.A.; DOROFEEV, G.V. aj. (Eds.). *Metodika prepadavanija matematiki v srednej škole.* Moskva : Prosveščenie, 1987, s. 5–29.

KRATOCHVÍLOVÁ, J. Pupils' strategies in abracadabra problem. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'95.* Praha : PedF UK, 1995, s. 103–105.

KRATOCHVÍLOVÁ, J. Budování nekonečné aritmetické struktury. In BURJAN, V.; HEJNÝ, M.; JÁNY, Š. (Eds.). *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2001, zborník príspevkov.* Kováčová pri Zvolene : EXAM, 2001 s. 58–64.

KRATOCHVÍLOVÁ, J. Příklad dialogické přístupové strategie – jev „nedorozumění". In UHLÍŘOVÁ, M. (Ed.). *Podíl matematiky na přípravě učitele primární školy.* Olomouc : Pedagogická fakulta UP, 2002, s. 92–96.

KRATOCHVÍLOVÁ, J. Strategie komplementu a mechanismus jejího vynoření. In *Disputaciones scientificae.* Ružomberok : Katolická Univerzita, 2003, s. 45–50.

KRATOCHVÍLOVÁ, J.; JIROTKOVÁ, D. Skládání z papíru – symetrie a podobnost. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2003, s. 80–83.

KRATOCHVÍLOVÁ, J.; SWOBODA, E. Analiza interakcji zachodzacych podczas badaň z dydaktyki matematyki. *Dydaktyka matematyki*, 2002, č. 24, s. 7–39.

KRATOCHVÍLOVÁ, J.; SWOBODA, E. (2003a). Analýza nedorozumění při komunikaci se žákem. In BURJAN, V.; HEJNÝ, M.; JÁNY, Š. (Eds.). *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2003, zborník príspevkov.* Kováčová pri Zvolene : EXAM, 2003, s. 49–55

KRATOCHVÍLOVÁ, J.; SWOBODA, E. (2003b). Aspects affecting pupil's thinking in mathematics during interaction researcher – pupil. In MARIOTTI, M. A. (Ed.). *Proceedings of CERME 03* [CD ROM]. Bellaria, Italy, 2003. [Dostupné též na WWW: `<http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>`.]

KREJČOVÁ, E.; VOLFOVÁ, M. *Didaktické hry.* Hradec Králové : Gaudeamus, 1994.

KRYGOWSKA, Z. *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa : WsiP, 1977.

KUBÍNOVÁ, M. *Projekty ve vyučování matematice, cesta k tvořivosti a samostatnosti.* Praha : PedF UK, 2002.

KUBÍNOVÁ, M.; LITTLER, G. (Eds.). *Empowering mathematics teachers for the improvement of school mathematics.* Praha : PedF UK, 2003.

KUBÍNOVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. Strategie žákovských řešení slovních úloh, jejichž základem je dělení celku na části. In *XIII kolokvium řízení osvojovacího procesu.* Vyškov : VVŠPV, 1995, s. 76–90.

KUBÍNOVÁ, M.; NOVOTNÁ, J.; LITTLER, G.H. Projects and mathematical puzzles – a tool for development of mathematical thinking. In SCHWANK, I. (Ed.). *Proceedings of CERME I.* Vol. 2. Osnabrück : Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1998, s. 53–63.

KUHL, J.; JARKON-HORLICK, L.; MORRISSEY, R.F. Measuring barriers to help-seeking behavior in adolescents. *Journal of Youth and Adolescence*, 1997, roč. 26, č. 6, s. 637–650.

KUHN, T.S. *Štruktúra vedeckých revolúcií*. Bratislava : Pravda, 1982.

KUJAL, B. aj. *Pedagogický slovník.* Praha : SPN, 1965.

KULIČ, V. *Chyba a učení.* Praha : SPN, 1971.

KULIČ, V. *Psychologie řízeného učení.* Praha : Academia, 1992.

KUŘINA, F. *Problémové vyučování v geometrii*. Praha : SPN, 1976.

KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice.* Praha : SPN, 1989.

KUŘINA, F. *Deset pohledů na geometrii.* Praha : Albra, MÚ AV ČR, 1996.

KUŘINA, F. Perspektivy vyučování geometrie. In AUSBERGEROVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Mariánské Lázně : JČMF, 2000, s. 31–38.

KUŘINA, F. (2002a). *Deset geometrických transformací*. Praha : Prometheus, 2002.

KUŘINA, F. (2002b). O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, 2002, roč. 31, č. 1, s. 1–8.

KUŘINA, F.; ŠTRYNCLOVÁ, P.; CACHOVÁ, J. Škola tvořivosti nebo škola přizpůsobení. *Komenský*, 1999, roč. 123, č. 9, 10, s. 184–185.

KVASZ, L. *Gramatika zmeny.* Bratislava : Chronos, 1999.

KVASZ, L. On linguistic aspects of structure building. In *Proceedings of CERME 4*. [V tisku.]

LAWREL, R.W. Constructing knowledge from interactions. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 1990, roč. 9, č. 2, s. 177–192.

LEE, W.R. *Language teaching games and contents.* Oxford : Oxford University Press, 1982.

LEE, V.E.; SMITH, J.B. Social support and achievement for young adolescents in Chicago : The role of school academic press. *American Educational Research Journal*, 1999, č. 36, s. 907–945.

LE MARE, L.; SOHBAT, E. Perception of teacher characteristics that support or inhibit help seeking. *The Elementary School Journal,* 2002, roč. 102, č. 3, s. 239–254.

LIND, G. *How is morale helping behavior?* A paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Chicago, March 1997.

LITTLER, G.; JIROTKOVÁ, D. Learning about solids. In CLARKE, B. aj. (Eds.). *International perspectives on learning and teaching mathematics.* Göteborg : National Center for Mathematics Education, 2004, s. 51–66.

LITTLER, G.; KOMAN, M. Challenging activities for students and teachers. In NOVOTNÁ, J.; HEJNÝ, M. (Eds.). *Proceedings of SEMT'01.* Praha : PedF UK, 2001, s. 113–118.

LITTLER, G.; KOMAN, M. A new approach to number twins – using 100-square. In NOVOTNÁ, J. (Ed.). *Proceedings of SEMT'03.* Praha : PedF UK, 2003, s. 99–103.

LITTLER, H.; KRATOCHVÍLOVÁ, J. Patterns and conjecture. In NOVOTNÁ, J. (Ed.). *Proceedings of SEMT'03.* Praha : PedF UK, 2003, s. 104–108.

LOKŠOVÁ, I.; LOKŠA, J. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole.* Praha : Portál, 1999.

MAŇAS, M. *Teorie her a optimální rozhodování.* Praha : MS SNTL, 1974.

MAREŠ, J. Učení z obrazového materiálu. *Pedagogika*, 1995, roč. XLV, č. 4, s. 319–327.

MAREŠ, J. *Styly učení žáků a studentů.* Praha : Portál, 1998.

MAREŠ, J. (2002a). Žákovo vyhledávání pomoci ve školních zátěžových situacích. In WALTEROVÁ, E. (Ed.). *Výzkum školy a učitele. Sborník z 10. konference České asociace pedagogického výzkumu.* [CD ROM.] Praha : PedF UK, 2002.

MAREŠ, J. (2002b). Nové pohledy na vztahy mezi učitelem a žáky. In BRADA, J.; SOLFRONK, J.; TOMÁŠEK, F. (Eds.). *Vedení školy.* Praha : Raabe, 2002, D 2.3 : s. 1–45.

MAREŠ, J. Necitlivě poskytovaná sociální opora – obtěžující opora. In MAREŠ, J. aj. (Eds.). *Sociální opora u dětí a dospívajících III.* Hradec Králové : Nukleus, 2003, s. 34–45.

MAREŠ, J.; JEŽEK, S.; LUDVÍČEK, J. Ochota pomáhat spolužákům a žákovský pocit odpovědnosti. In MAREŠ, J. aj. (Eds.). *Sociální opora u dětí a dospívajících III.* Hradec Králové : Nukleus, 2003, s. 220–229.

MAREŠ, J.; KŘIVOHLAVÝ, J. *Komunikace ve škole.* Brno : Masarykova univerzita, 1995.

MCCALLUM, G.P. *101 word games.* Oxford : Oxford University Press, 1980.

MIDDLETON, M.J.; MIDGLEY, C. Beyond motivation : Middle school students' perceptions of press for understanding in math. *Contemporary Educational Psychology*, 2002, roč. 27, s. 373–391.

MILLEROVÁ, S. *Psychologie hry.* Praha : Panorama, 1978.

MONITOR – pilotné testovanie maturantov, matematika, test M2. Bratislava : Štátny pedagogický ústav a EXAM, 2000.

MÜLLER, G.N.; STEINBRING, H.; WITTMANN, E.CH. *10 Jahre „Mathe 2000", Bilanz und Perspektiven.* Leipzig : Ernst Klett Grundschulverlag, 1997.

NADLER, A. Personality and help seeking. Autonomous versus dependent seeking of help. In PIERCE, G.R.; LAKEY, B.; SARASON, I.G.; SARASON, B.R. (Eds.). *Sourcebook of social support and personality.* New York : Plenum Press, 1997, s. 379–407.

NELSON-LE GALL, S. Help-seeking : An understudied problem-solving skill in children. *Developmental Review*, 1981, roč. 1, s. 224–246.

NELSON-LE GALL, S.A. *Necessary and unnecessary help-seeking in children* [online]. 1984. [ERIC Document ED 247013.]

NELSON-LE GALL, S.A.; JONES, E. Cognitive-motivational influences on the task-related help-seeking behavior of black children. *Child Development*, 1990, roč. 61, s. 581–589.

NELSON-LE GALL, S.A.; RESNICK, L. Help seeking, achievement motivation, and the social practice of intelligence in school. In KARABENICK, S.A (Ed.). *Strategic help seeking. Implications for learning and teaching.* Mahwah : Lawrence Erbaum, 1998, s. 39–60.

NEWMAN, R.S. Children's help seeking in the classroom : The role of motivational factors and attitudes. *Journal of Educational Psychology*, 1990, roč. 82, s. 71–80.

NEWMAN, R.S. Adaptive help-seeking : A strategy of self-regulated learning. In SCHUNK, D.; ZIMMERMAN, B. (Eds.). *Self-regulation of learning and performance : Issues and educational applications.* Hillsdale : Lawrence Erlbaum, 1994, s. 283–301.

NEWMAN, R.S. Social influences on the development of children's adaptive help seeking : The role of parents, teachers, and peers. *Developmental Review*, 2000, roč. 20, s. 350–404.

NEWMAN, R.S.; MURRAY, B.; LUSSIER, C. Confrontation with aggressive peers at school : Students' reluctance to seek help from the teacher. *Journal of Educational Psychology*, 2001, roč. 93, č. 2, s. 398–410.

NEWMAN, R.S.; SCHWAGER, M.T. Student's perceptions of the teacher and classmates in relation to reported help seeking in math class. *The Elementary School Journal*, 1993, roč. 94, č. 1, s. 3–17.

NODDINGS, N. Constructivism in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1990, č. 4, s. 7–18.

NOVOTNÁ, J. (1997a). Using geometrical models and interviews as diagnostic tools to determine students' misunderstandings in mathematics. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'97.* Praha : Prometheus, 1997, s. 61–67.

NOVOTNÁ, J. (1997b). Geometrical models in solving word problems that include the division of a whole into parts (theory and practice). In *Proceedings Interakcja teorii i praktyki nauczania matematyki w szkole podstawowej i sredniej.* Rzeszów : VSP, 1997, s. 109–119.

NOVOTNÁ, J. Cognitive mechanisms and word equations. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1998. Vorträge auf 32. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Hildesheim : Berlin Verlag Franzbecker, 1998, s. 34–41.

NOVOTNÁ, J. (2000a). *Analýza řešení slovních úloh.* Praha : PedF UK, 2000.

NOVOTNÁ, J. (2000b). Objevujeme v matematice. Pracovní dílna. In JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky.* Praha : PedF UK, 2000, s. 49–53.

NOVOTNÁ, J. *Etude de la résolution des "problemes verbaux" dans l'enseignement des mathématiques. De l'analyse atomique a l'analyse des situations.* Bordeaux : Université Victor Segalen Bordeaux 2, 2003.

NOVOTNÁ, J.; HANUŠOVÁ, J. Mathematics for all. In AHMED, A.; KRAEMER, J.M.; WILLIAMS, H. (Eds.). *Cultural diversity in mathematics (education). Proceedings of CIEAEM 51.* Chichester : Horwood Publishing Limited, 2000, s. 355–360.

NOVOTNÁ, J.; HOFMANNOVÁ, M.; PETROVÁ, J. Using games in teaching mathematics through a foreign language. In *Proceedings of CIEAEM 53. Mathematical literacy in the digital era.* Verbania : Ghisetti e Corvi Editori, 2002, s. 353-359.

NOVOTNÁ, J.; KUBÍNOVÁ, M. Wie beeinflusst eine Visualisierung der Aufgabenstellung den Prozess der Lösung einer Textaufgabe. In *In Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Vorträge auf 33. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Hildesheim : Berlin Verlag Franzbecker, 1999, s. 397–400.

ODVÁRKO, O. aj. *Metody řešení matematických úloh.* Praha : SPN, 1990.

PEHKONEN, E. Use of problem fields as a method for educational change. In PEHKONEN, E. (Ed.). *Use of open-ended problems in mathematics classroom, Research Report 176.* Helsinki : Department of Teacher Education, University of Helsinki, 1997.

PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1996, roč. 28, č. 4, s. 101–108.

PEIRCE, C.S. *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* [Volumes I–VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiss, 1931–1935, Volumes VII–VIII, ed. by Arthur W. Burks, 1958, quotations according to volume and paragraph.] Cambridge : Harvard University Press.

PERENČAJ, J. *Analýza stereometrických predstáv.* Bratislava, 1989. Kandidátská práce. MFF UK.

PERNÝ, J. Space imagination. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'99*. Praha : PedF UK, 1999, s. 195–196.

PESCOSOLIDO, B. Beyond rational choice : The social dynamics of how people seek help. *American Journal of Sociology*, 1992, roč. 97, s. 1096–1138.

PETROVÁ, J. *CLIL : Using games in teaching mathematics through the English language.* Praha 2002. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce J. Novotná.

PETTY, G. *Moderní vyučování.* Praha : Portál, 1996.

PHILIPS, M. What makes schools effective? A comparison of the relationships of communitarian climate and academic climate to mathematics achievement and attendance during middle school. *American Educational Research Journal*, 1997, roč. 34, s. 633–662.

PIAGET, J. *The equilibrium of cognitive structures.* Cambridge, MA : Harvard University Press, 1985.

PIRIE, S.E.B. Crossing the gulf between thought and symbol : language as (slippery) stepping stones. In STEINBRING, H. aj. (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom.* Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Reston, 1998, s. 7–29.

POLYA, G. *How to solve it.* Princeton : Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning.* Princetown : Princetown University Press, 1954.

POLYA, G. *Mathematical discovery.* New York, USA : John Wiley & Sons, 1966.

POLECHOVÁ, P. *Inkluzivní a kooperativní strategie – přehled.* Praha : PedF UK, ÚVRŠ a PAU, 2000.

Prove di esame di fine studi secondari superiori in Europa 1999. Italy : Ministero della Publica Instruzione, 1999.

PRŮCHA, J.; WALTEROVÁ, E.; MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha : Portál, 2001.

REPÁŠ, V.; ČERNEK, P.; PYTLOVÁ, Z.; VOJTELA, I. *Matematika pre 5. ročník základných škol. Prirodzené čísla.* Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, 1997.

RICHTER, V. *Školní perličky 2.* Olomouc : FIN, 1994.

ROGLER, L.; CORTES, D. Help-seeking pathways. A unifying concept in mental health care. *American Journal of Psychiatry*, 1993, roč. 150, s. 554–561.

ROGOFF, B. Cognition as a collaborative process. In DAMON, W. (Ed.). *Handbook of child psychology. Vol. 2. Cognition, perception, and language.* New York : Wiley, 1998, s. 679–744.

ROSS, J.A.; HOGABOAM-GRAY, A.; ROLHEISER, C. *Student self-evaluation in grade 5–6 mathematics effects on problem solving achievement.* A paper presented at the Annual Conference of the American Educational Research Association. Seattle, April 2001. [Dostupné na WWW: <http://www.oise.utoroto.ca/~fieldce/ross/math.56.htm>]

ROUBÍČEK, F. *Sémiotické reprezentace ve vyučování geometrii.* Praha, 2002. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

ROUBÍČEK, F. Semiotic approach as a methodological basis in the didactics of mathematics. In HEJNÝ, M. aj. (Eds.). *The Autumn Conference in Mathematics Education (Proceedings).* Praha : PedF UK, 2003, s. 59–66.

RUSSELL, B. *History of Western Philosophy*. London : Georg Allen, 1965.

RYAN, A.M.; PINTRICH, P.R.; MIDGLEY, C. Avoiding seeking help in the classroom : Who and why? *Educational Psychology Review*, 2001, roč. 13, č. 2, s. 93–114.

SEKANINA, M.; BOČEK, L.; KOČANDRLE, M.; ŠEDIVÝ, J. *Geometrie II*. Praha : SPN, 1988.

SEMADENI, Z. Trojaka natura matematyki. *Dydaktyka Matematyki*, 2002, č. 24, s. 41–92.

SENECA, L.A. *Výbor z listů Luciliovi.* Praha : Svoboda, 1969

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 1991, roč. 22, s. 1–36.

SHOUSE, R.C. Academic press and sense of community : Conflict and congruence in American high schools. *Research in Sociology of Education and Socialization*, 1996, roč. 11, s. 173–202.

SCHERER, P.; STEINBRING, H. The professionalisation of mathematics teachers' knowledge – teachers commonly reflect feedbacks to their own instruction activity. In MARIOTTI, M. A. (Ed.). *Proceedings of CERME 03* [CD ROM]. Bellaria, Italy, 2003. [Dostupné též na WWW: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.]

SIERPINSKA, A. *Understanding in mathematics.* London : The Falmer Press, 1994.

SIMONS, P.R. Metacognition. Metacognitive strategies – teaching and assessing. In DE CORTE, E.; WEINERT, F.E. (Eds.). *International encyclopaedia of developmental psychology and instructional psychology.* Oxford : Elsevier Science, 1996, s. 436–444.

SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika*. Praha : ISV nakladatelství, 1999.

SKINNER, E.A.; WELLBORN, J.G. Coping during childhood and adolescence : A motivational perspective. In FEATHERMAN, D.; LERNER, R.; PERLMUTTER, M. (Eds.). *Life-span development and behavior.* Hillsdale : Erbaum, 1994, s. 91–133.

SLAVÍK, J. Problém chyby v tvořivě výrazové výchově. *Pedagogika*, 1994, roč. 44, č. 2, s. 129–137.

SOFOKLÉS. Antigoné. In *Řecká dramata.* [Překlad F. Stiebitz.] Praha : Máj, 1976, s. 242.

SPAULDING, C.L. *Motivation in the Classroom.* New York : McGraw-Hill, 1992.

SPILKOVÁ, V. *Jakou školu potřebujeme?* Praha : Agentura Strom, 1997.

STEHLÍKOVÁ, N. Analýza písemného řešení žáka, jedna z možných technologií. In NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha : PedF UK, 2000, s. 98–117.

STEHLÍKOVÁ, N. (2002a). Geometrical transformations – constructivist analytic approach. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level).* [CD ROM.] Greece : Wiley, 2002.

STEHLÍKOVÁ, N. (2002b). Geometrické transformace – konstruktivistický přístup. In AUSBERGEROVÁ, M.; NOVOTNÁ, J.; SÝKORA, V. (Eds.). *8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Praha : JČMF, 2002, s. 281–287.

STEHLÍKOVÁ, N. Ilustrace konstruktivistických přístupů k vyučování na vysoké škole. In BURJAN, V.; HEJNÝ, M.; JÁNY, Š. (Eds.). *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2003, zborník príspevkov.* Kováčová pri Zvolene : EXAM, 2003, s. 83–88.

STEHLÍKOVÁ, N. *Structural understanding in advanced mathematical thinking.* Praha : PedF UK, 2004.

STEINBRING, H. Epistemological constraints of mathematical knowledge in social learning settings. In SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (Eds.). *Mathematics education as the research domain: A search for identity*. Great Britain : Kluwer Academic Publishers, 1998, s. 513–526.

STEINER-OETTERER, H.; TRCH, M.; ZAPOTILOVÁ, E. Parkettierungen in der Grunschule. *Grundschulmagazin : Impulse für kreativ Unterricht,* 1999, roč. 14, č. 4, s. 39–42.

SWOBODA, E. Miedzy intuicja a definicja, czyli proba okreslenia kompetencji uczniow 11–12 letnich w definiowaniu figur podobnych. *Dydaktyka Matematyki*, 1997, č. 19, s. 75–112.

ŠIMERKA, V. *Síla přesvědčení.* Praha : b.n., 1881.

ŠTECH, S. *Škola stále nová*. Praha : Karolinum, 1992.

THAGARD, P. *Úvod do kognitivní vědy. Mysl a myšlení.* Praha : Portál, 2001.

TICHÁ, M. Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In AUSBERGEROVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Plzeň : JČMF, 1998, s. 133–138.

TICHÁ, M. (2003a). Following the path of discovering fractions, In NOVOTNÁ, J. (Ed.). *Proceedings of SEMT'03*. Praha : PedF UK, 2003, s. 17–26.

TICHÁ, M. (2003b). Development problem posing capability of students aged 9 years. In *CIEAEM 55 – Oral presentations in Working Groups. Proceedings of abstracts.* Plock, 2003, s. 15–17.

TONUCCI, R. *Vyučovat nebo naučit?* Praha : PedF UK, 1991.

TÖRNER, G.; PEHKONEN, E. On the structure of mathematical belief system. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1996, roč. 28, č. 4, s. 109–112.

TRCH, M. Use of grids : Covering of the plane with congruent tiles. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'99.* Praha : PedF UK, 1999, s. 111–115.

TRCH, M. Nestandardní úlohy a utváření pozitivního klimatu při vyučování matematice. In *Mezinárodní konference kateder matematiky připravující učitele matematiky.* Liberec : TU, Liberec, 2000, s. 101–104.

TRCH, M.; ZAPOTILOVÁ, E. The means of development of thinking and geometric imagination at the lowest school age. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'95.* Praha : PedF UK, 1995, s. 62–65.

TRCH, M.; ZAPOTILOVÁ, E. (1997a). Graded sets of non-standard tasks in mathematics teaching : A way of developing a pupil's personality. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceeding of ERCME 97.* Praha : PedF UK, 1997, s. 165–167.

TRCH, M.; ZAPOTILOVÁ, E. (1997b). Non-traditional mathematical tasks as a means of developing mathematical thinking of younger children and problems with their evaluation. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'97.* Praha : PedF UK, 1997, s. 74–78.

TRCH, M.; ZAPOTILOVÁ, E. Creating of tetromino patterns. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'99.* Praha : PedF UK, 1999, s. 116–119.

TRCH, M.; ZAPOTILOVÁ, E. Creating of positive climate in teaching mathematics. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'01.* Praha : PedF UK, 2001, s. 162–166.

TURNER, J.C.; MIDGLEY, C.; MEYER, D.K. The classroom environment and students' reports of avoidance strategies in mathematics : A multimethod study. *Journal of Educational Psychology*, 2002, roč. 94, č. 1, s. 88–98.

UR, P.; WRIGHT, A. *Five-minute activities.* Cambridge : Cambridge University Press, 1992.

URBANOVÁ, J. aj. *Matematika pro 5. ročník základní školy, II díl.* Praha : SPN, 1985.

Velká kniha citátů. Místo neuvedeno : Tempo, 1998.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; DE CORTE, E. *Making sense of word problems.* Lisse : Sweets & Zeitlinger Publ., 2000.

VOGELI, B.R. *Special secondary schools for the mathematically scientifically talented, an international panorama.* New York : Columbia University, 1997.

VOLKERT, K. Die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik – historisch und systematisch betrachtet. In *Anschauliches Beweisen. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18.* Wien : Hölder – Pichler – Tempsky; Stuttgart : B.G. Teubner, 1989, s. 9–31.

VOPĚNKA, P. *Rozpravy s geometrií.* Praha : Vesmír, 1989.

VOPĚNKA, P. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci : Souborné vydání Rozprav s geometrií.* [3. vydání.] Praha : Práh, 2003.

VRBA, A. *Grafy pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku, na matematiku a fyziku a pro semináře a cvičení z matematiky ve IV. ročníku gymnázií.* Praha : SPN, 1989.

VYGOTSKIJ, L.S. *Myšlení a řeč.* Praha : SPN, 1970.

VYGOTSKIJ, L.S. *Vývoj vyšších psychických funkcí.* Praha : SPN, 1976.

VYŠÍN, J. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha : SPN, 1972.

WEBB, M. *Peer helping relationships in urban schools.* ERIC Clearinghouse on Urban Education, New York. [ERIC Digest 1987. ED 289949.]

WEBB, N.M. *Group collaboration in assessment : Competing objectives, processes, and outcomes.* Los Angeles : National Center for Research on Evaluation, Standards, and Students Testing, 1994.

WEBB, N.M.; FARIVAR, S.H.; MASTERGEORGE, A.M. Productive helping in cooperative groups. *Theory into practice*, 2002, roč. 41, č. 1, s. 13–20.

WEBB, N.M.; TROPER, J.D.; FALL, R. Constructive activity and learning in collaborative small groups. *Journal of Educational Psychology*, 1995, roč. 87, s. 406–423.

WITTMANN, E.CH. *10 Jahre „mathe 2000". Bilanz und Perspektiven.* Dortmund : Universität Dortmund, Projekt „Mathe 2000", Klett, 1997.

WITTMANN, E. CH.; MÜLLER, G. N. *Handbuch produktiver Rechenübungen.* [Bd. 1 (1990), Bd. 2 (1992).] Stuttgart-Düsseldorf : E. Klett Schulbuchverlag, 1990, 1992.

WOLLRING, B. Working environments for the geometry of paper holding in primary grades. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *Proceedings of SEMT'01.* Praha : PedF UK, 2001, s. 177-178.

WOLLRING, B. Linking pre-service and in-service in teacher training : Cooperative design and dissemination of working environmets for primary mathematics. In NOVOTNÁ, J. (Ed.). *Proceedings of SEMT'03.* Praha : PedF UK, 2003, s. 35–41

ZAPLETAL, M. *Pokladnice her.* Praha : Olympia, 1977.

ZAPLETAL, M. *Velká encyklopedie her.* Praha : Olympia, 1986.

ZAPOTILOVÁ, E. Sebereflexe – prostředek změny postoje studentů k matematice. In BURJAN, V.; HEJNÝ, M.; JÁNY, Š. (Eds.). *Letná škola z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2003, zborník príspevkov.* Kováčová pri Zvolene : EXAM, 2003, s. 96–100.

ZAPOTILOVÁ, E.; KRATOCHVÍLOVÁ, J. Tvorba projektů ve studiu učitelství pro speciální školy. In *Mezinárodní konference kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky.* Liberec : TU, Liberec, 2000, s. 121–124.

ZHOUF, J. *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice.* Praha, 2001. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.

ZHOUF, J.; STEHLÍKOVÁ, N. Budoucí učitelé matematiky a souvislá pedagogická praxe. In AUSBERGEROVÁ, M.; NOVOTNÁ, J. (Eds.). *9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Srní : JČMF, 2004, s. 349–357.

Rejstřík

Název:	Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky
Editoři:	Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Stehlíková
Vydává:	Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta
Práce vznikla s podporou	VZJ13/98:114100004
Formát:	A5
Počet stran:	244
Rok vydání:	2004

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.

ISBN 80-7290-189-3 (2. sv.)