**Matematická olympiáda**

**Planimetrické vlastnosti**

1. Rovnoramenný trojuholník, uhly pri základni. [Kurz](https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=162388&chapterid=4683)
2. Vlastnosť vonkajšieho uhla trojuholníka - Je rovný súčtu protiľahlých vnútorných uhlov. Applet.
3. Os vnútorného uhla v trojuholníku $ABC$ a os protiľahlej strany sa pretínajú na opísanej kružnici. Applet.
4. Obvodový a stredový uhol. [Kurz](https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=162397&chapterid=4611)
5. Tetivový štvoruholník. Súčty protiľahlých uhlov - Proposition 22, Book 3.
6. Body súmerné s ortocentrom podľa strany a stredu strany ležia na opísanej kružnici. MO kat. A, 19/20, U2, krok 1 +2 ... applet
7. Apolloniova kružnica

**Množiny bodov danej vlastnosti**

1. Daná je kružnica $k=(S,r)$ a jej tetiva $AB$. Určte množinu stredov všetkých tetív.
2. Daná je kružnica $k=(S,r)$ a vnútri nej bod $X$.
	* Určte množinu stredov všetkých tetív kružnice $k$, ktoré prechádzajú bodom $X$.
	* Určte množinu bodov, ktoré sú stredom nejakej jej tetivy, ktorá neobsahuje bod $X$.
3. V rovine je daný ostrouhlý trojuholník AKL. Uvažujme ľubovoľný pravouholník ABCD, ktorý je trojuholníku AKL opísaný tak, že bod K leží na strane BC a bod L leží na strane CD. Určte množinu priesečníkov S uhlopriečok AC, BD všetkých takých pravouholníkov ABCD.

 (Kat. A; 2004/2005; celoštátne kolo; úloha 4) [[[Tu](https://skmo.sk/dokument.php?id=244)](https://skmo.sk/dokument.php?id=161)](https://skmo.sk/dokument.php?id=161)

1. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník $KLM$ so základňou $KL$. Uvažujme ľubovoľné dve kružnice $k$ a $l$, ktoré majú vonkajší dotyk a ktoré sa dotýkajú priamok $KM$ a $LM$ postupne v bodoch $K$ a $L$. Určte množinu dotykových bodov $T$ všetkých takých kružníc $k$ a $l.$

(Kat. A; 2004/2005; celoštátne kolo; úloha 4) [[Tu](https://skmo.sk/dokument.php?id=158)](https://skmo.sk/dokument.php?id=244)

**Riešenie**:

Applet neriešený

1. V rovine sú dané dve kružnice $k\_{1}(S\_{1}, r\_{1}), k\_{2}(S\_{2}, r\_{2})$, pričom $|S\_{1}S\_{2}| > r\_{1}+ r\_{2}$. Nájdite množinu všetkých bodov $X$, ktoré neležia na priamke $S\_{1}S\_{2}$ a majú tú vlastnosť, že úsečky $S\_{1}X$, $S\_{2}X$ pretínajú postupne kružnice $k\_{1}, k\_{2}$ v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky $S\_{1}S\_{2}$ sa rovnajú.

(Kat. A; 2013/2014; krajské kolo; úloha 2) [[[Tu](https://skmo.sk/dokument.php?id=244)](https://skmo.sk/dokument.php?id=2154)](https://skmo.sk/dokument.php?id=997)

**Riešenie**:

Applet Tu

**Úlohy s použitím rovnoľahlosti**

1. Označme $I$ stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku $ABC$ s pravým uhlom pri vrchole $A$. Ďalej označme $M$ a $N$ stredy úsečiek $AB$ a $BI$. Dokážte, že priamka $CI$ je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku $BMN$.

(Kat. A; 2020/2021; celoštátne; úloha 2

**Riešenie**:

Applet + návodná úloha Tu

1. V rovine sú dané dva rôzne body $O$ a $A$. Určte množinu ortocentier všetkých trojuholníkov $ABC$, pre ktoré je bod $O$ stredom kružnice opísanej.

(Kat. A; 2019/2020; domáce kolo; úloha 2)

**Riešenie**:

Applet Tu

1. Dané sú dve rôznobežky $a, c$ prechádzajúce bodom $P$ a bod $B$, ktorý na nich neleží. Zostrojte pravouholník $ABCD$ s vrcholmi $A, C$ a $D$ postupne na priamkach $a, c$ a $PB$.

(Kat. B; 2011/2012; domáce kolo; úloha 4)

**Riešenie**: rovnoľahlosť $(P,κ)$ + súmernosť $σ$, riešenie [Tu](https://skmo.sk/dokument.php?id=452)

Applet + návodná úloha Tu

1. Je daný́ lichobežník $ABCD$ so základňami 𝐴𝐵 a 𝐶𝐷. Označme 𝑘 a 𝑙 kružnice s priemermi 𝐵𝐶 a 𝐴𝐷. Ďalej označme 𝑃 priesečník priamok 𝐵𝐶 a 𝐴𝐷. Dokážte, že dotyčnice z bodu 𝑃 ku kružnici 𝑘 zvierajú́ rovnaký́ uhol ako dotyčnice z bodu 𝑃 ku kružnici 𝑙.

(Kat. A; 2021/2022; ; domáce kolo; úloha 2)

Návodné úlohy - odkaz na web MO [Tu](https://skmo.sk/dokument.php?id=3912)

* + Uhlopriečky lichobežníka 𝐴𝐵𝐶𝐷 so základňami 𝐴𝐵, 𝐶𝐷 sa pretínajú́ v bode 𝑃 a priamky 𝐴𝐷, 𝐵𝐶 v bode 𝑄. Dokážte, že stredy základní́ 𝐴𝐵, 𝐶𝐷 ležia na priamke 𝑃𝑄.

**Riešenie**:

Bod 𝑃 je vnútorným stredom rovnoľahlosti úsečiek 𝐴𝐵 a 𝐶𝐷, bod 𝑄 je vonkajším stredom ich rovnoľahlosti. V oboch rovnoľahlostiach si stredy úsečiek 𝐴𝐵, 𝐶𝐷 zodpovedajú́, takže ležia so stredmi rovnoľahlostí́ 𝑃, 𝑄 na tej istej priamke.

1. V rovine ω sú dané dva rôzne body $O$ a $T$. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode $T$ a stred opísanej kružnice v bode $O$.

(Kat. A; 2008/2009; celoštátne kolo; úloha 6)

**Riešenie**:

Applet Tu

1. V rovine je daný ostrouhlý trojuholník $AKL$. Uvažujme ľubovoľný pravouholník $ABCD$, ktorý je trojuholníku $AKL$ opísaný tak, že bod $K$ leží na strane $BC$ a bod $L$ leží na strane $CD$. Určte množinu priesečníkov $S$ uhlopriečok $AC, BD$ všetkých takých pravouholníkov $ABCD$.

(Kat. A; 2004/2005; celoštátne.; úloha 4)

**Riešenie**: [Tu](http://oi.sk/rocenky/rocenka54.pdf)

Applet + návodná úloha Tu