Strategie řešení problémů, vytváření hroznů problémů, výzkumný přístup při výuce matematiky

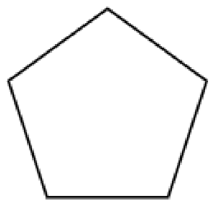
Jan Kopka

Následující text a ukázky problémů jsou převzaté z knížek [2] , [3] a publikovaných článků autora.

Strategie řešení problémů

Pokud matematikové řeší problémy, používají při tom určité strategie. Tyto strategie jsou vlastně nástroje, které jim pomáhají při hledání cesty k cíli. Těchto strategií je celá řada. Vyjmenujme zde několik nejzákladnějších. Mezi výzkumné strategie můžeme zařadit: pokus – omyl, pokus – ověření – korekce, systematické experimentování. Z dalších strategií uveďme alespoň tyto: analogie, zobecnění, specializace, konkretizace, cesta zpět, vypuštění podmínky, určení bližšího cíle, využití náčrtku (geometrická cesta), sestavení rovnice či soustavy rovnic (algebraická cesta), opakování určitého postupu. Více se čtenář o těchto strategiích může dočíst např. v [2] nebo [3]. My se zde budeme zabývat ještě jinou užitečnou strategií, která se nazývá **přeformulování problému**.

Strategie přeformulování problému není nikterak nová. Abychom o tom čtenáře přesvědčili, začneme příkladem až z antického Řecka a to dokonce ze samotných počátků tohoto období, tj. z doby pythagorejců. Matematici pythagorejské školy byli mistry ve využívání této strategie. Možná víte, že jejich znakem byl pravidelný pětiúhelník (viz obr.1). Byl to znak tajné moudrosti (viz knížka [4] od prof. Vopěnky). Dokonce i ve středověku, tedy mnohem později, byl pětiúhelník znakem různých čarodějů, i když pravděpodobně netušili, jakou moudrost a jakou tajnost tento znak představuje.



Obr. 1

Ale vraťme se do starověku. Je samozřejmé, že pythagorejci chtěli svůj znak, tedy pravidelný pětiúhelník, zkonstruovat. Nedařilo se jim to až do chvíle, dokud neobjevili jeho skryté tajemství. V pravidelném pětiúhelníku je důmyslně ukryt poměr zlatého řezu a to takto: Je to poměr délky úhlopříčky a strany.

Tak byl původní problém zkonstruování pravidelného pětiúhelníka přeformulován na problém nový (viz schéma).

Problém 1: Sestrojte pravidelný pětiúhelník.
↓ Přeformulování
Problém 2: Sestrojte zlatý řez.

Pokud umíme sestrojit zlatý řez, pak konstrukce pravidelného pětiúhelníka je již triviální záležitostí..

Řešení problému 1 tak velmi názorně demonstruje použití strategie přeformulování problému. Toto řešení však demonstruje i **strategii určení bližšího cíle**. Konstrukce zlatého řezu je bližším cílem pro původní cíl, kterým je konstrukce pravidelného pětiúhelníka. Při řešení problému se však využívá i strategie **grafického znázornění.**

Druhý příklad:
Problém 3: Nechť p a q jsou nesoudělná přirozená čísla. Dokažte, že platí:

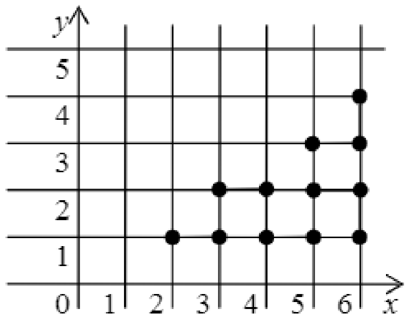
$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2} \qquad (1)$$

Aby bylo trochu jasnější, o co v tomto problému jde, zvolíme nejprve zcela náhodně nějaký konkrétní příklad (strategie konkretizace): Zvolíme-li čísla $p = 5$ a $q = 7$, jsou tato čísla nesoudělná a podle zadaného vzorce prý platí, že pokud sečteme termy na levé straně formule (1), dá se tento výsledek rozložit způsobem popsaným na pravé straně této formule. Pro naší volbu dostaneme:

$$\left[\frac{5}{7}\right]+\left[\frac{2.5}{7}\right]+\left[\frac{3.5}{7}\right]+\left[\frac{4.5}{7}\right]+\left[\frac{5.5}{7}\right]+\left[\frac{6.5}{7}\right]=0+1+2+2+3+4=12=\frac{4.6}{2}=$$
$$=\frac{(5-1)(7-1)}{2}$$

Zdá se, že důkaz uvedené číselně – teoretické věty nebude snadný. Pokud si však uvědomíme, že termy $\left[\frac{ip}{q}\right]$ můžeme interpretovat v souřadnicové soustavě dimenze 2, situace se podstatně změní. Interpretaci můžeme provést takto:

Jestliže p, q jsou nesoudělná čísla, pak $\left[\frac{ip}{q}\right]$ představuje počet bodů s celočíselnými souřadnicemi (i, y), kde $0 < y < ip/q$ pro všechna $i = 1, 2, 3, \ldots, q$-1.
Aby bylo to, co jsme právě napsali zřejmější, vraťme se opět k první výše uvedené konkretizaci. Položili jsme $p = 5$ a $q = 7$. Pokud budeme např. term $\left[\frac{4.5}{7}\right]$ interpretovat pomocí bodů, dostaneme množinu bodů (i, y), kde $i = 4$ a y jsou celá čísla, pro něž platí: $0 < y < 4.5/7$, tzn. $y = 1, 2$. Hledanou množinou bodů je tak množina $\{(4, 1), (4, 2)\}$. Pokud takovouto interpretaci uděláme pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a získané body znázorníme v kartézském grafu, dostaneme "trojúhelník" na obr. 4:



Obr. 4

Nás nyní zajímá, kolik bodů získaný „trojúhelník" má. Tento výpočet však již popíšeme obecně.
Problém 4: Určete počet bodů, které dostanete výše popsanou interpretací levé strany formule (1).
Řešení:………..

Ale vraťme se ke strategiím. Problém 3 jsme tak převedli pomocí kartézské soustavy souřadnic na problém 4, tj. do geometrie a tam jsme ho vyřešili. Použili jsme nejen strategii **přeformulování problému**, ale i **strategii grafického znázornění**.

Čtenáři je jistě známo, že klasické problémy geometrie (trisekce úhlu, rektifikace kružnice, atd.) byly pomocí analytické metody přeformulovány do algebry a tam vyřešeny. Autor se také přizná k tomu, že před lety přeformuloval některé netriviální věty z teorie grup do teorie orientovaných grafů a tam se mu je podařilo dokázat. To však již silně překračuje rámec tohoto článku.

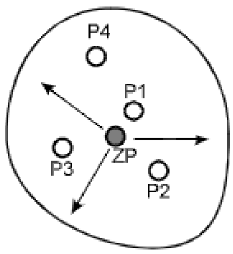
Hrozny problémů

Metoda, o které budeme v této kapitole pojednávat, a to především v praktické rovině, se někdy nazývá **metoda generovaných problémů**. Jde o metodu, při níž postupně vytváříme hrozen navzájem příbuzných problémů. Proto budeme často místo výše uvedeného názvu používat "češtější" označení **metoda vytváření hroznů problémů**, což je jistě název přijatelný i pro školskou matematiku. Tato metoda dala také název knížce [2], kousek jejíž druhé kapitoly právě čtete. Úvodem pár teoretických slov o uvedené metodě:

Metoda spočívá v tom, že v probírané oblasti matematiky vytipujeme vhodný výchozí problém, který budeme s žáky řešit. Samozřejmě, že při jeho řešení využijeme heuristické strategie, o nichž jsme hovořili v předchozí kapitole a poskytneme žákům pouze tolik pomoci, kolik je nezbytně nutné. Když jsme společně problém vyřešili a žáci měli dostatek času, aby metodu řešení problému skutečně pochopili, můžeme začít vytvářet nové problémy, které jsou podobné původnímu problému. Pokud se nám podaří, po určitém tréninku, vtáhnout do procesu vytváření problémů i studenty, je to jenom dobře. Nesmíme však svojí netrpělivostí tuto činnost studentů uspěchat.

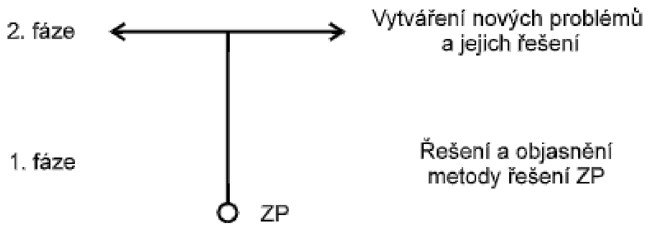
První nové problémy se obvykle ve slovním vyjádření nebudou příliš lišit od původního problému a současně i metoda řešení těchto problémů bude obvykle stejná nebo velmi podobná metodě řešení původního problému. Po vyřešení několika nových problémů se však studovaná oblast stane pro účastníky mnohem známější, dalo by se říci přímo familiernější, a začnou pak vytvářet problémy, které se od původního problému budou víc a víc vzdalovat (viz obr.1). Také metody řešení těchto problémů mohou vyžadovat stále větší úpravy metody řešení prvního problému.

Poznamenejme ještě, že nové problémy obvykle tvoříme pomocí zobecňování, specializování, analogie, obměňování atd. Svým kantorským citem musíme odhadnout, jak dlouho budeme nové problémy vytvářet. Pokud se žáci začnou nudit, je dobré skončit.



Obr. 2

Při použití této metody můžeme rozlišit dvě fáze (viz obr. 2). **První fáze** spočívá v tom, že vyřešíme úvodní problém a poskytneme žákům dostatek času, aby dobře pochopili metodu jeho řešení. V této fázi obvykle použijeme jednu nebo více heuristických strategií, o nichž jsme pojednali výše. **Druhá fáze** spočívá v tom, že začneme vytvářet pomocí prvního problému nové problémy a že se snažíme vyřešit je pomocí metody, kterou jsme objevili při řešení tohoto prvního problému. Výchozí problém je tak nejen nositelem určité metody řešení, ale zároveň slouží k vytváření nových problémů. Proto tento problém nazveme **základní problém**. Základní problém spolu se všemi problémy, které jsme pomocí něho vytvořili (a obvykle i vyřešili), budeme nazývat **hrozen problémů.**



Obr. 3

Vrátíme-li se k obrázku 1, vidíme, že bychom mohli metodu vytváření hroznů problémů popsat populárně ještě jednou například takto: Po vyřešení základního problému vytváříme a řešíme nejprve jeho “nejbližší sousedy“ a potom se od základního problému v různých směrech vzdalujeme a vytváříme a řešíme i “vzdálenější sousedy“.

Samozřejmě se může stát, že vytvoříme problém, který nebudeme schopni vyřešit. Je známo, že někdy podobně znějící problémy mají rozdílné metody řešení. Při používání metod vedoucích k rozvoji tvůrčích schopností člověka a k jeho samostatnosti je to však zcela přirozený jev. Naše zkušenosti ze školské praxe však ukazují, že takovéto situace nevznikají příliš často. Ještě bychom rádi upozornili na to, že vytváření každého hroznu bychom měli vhodně **motivovat**, aby studenti měli zájem se práce v rámci daného hroznu aktivně zúčastnit. Někdy je však samotný základní problém natolik zajímavý, že sám představuje i motivaci. Nyní budeme metodu demonstrovat pomocí problému z rekreační matematiky.

Hra u kulatého stolu

Hrozen je motivován přímo základním problémem a nepožaduje téměř žádné předběžné matematické znalosti.

Hra: Dva hráči A a B mají dostatek mincí stejné velikosti, aby mohli hrát hru u kulatého stolu. Hra má tato pravidla:

1. Hráči pokládají mince střídavě na stůl tak, aby se nepřekrývaly.
2. Hráč, který jako první nemůže položit svoji minci na stůl, prohrává.

Než začneme hrát, bylo by vhodné dohodnout se (definovat), co znamená *položit minci* na stůl. V podstatě jsou možné dvě definice:

a) celá jedna strana mince leží na ploše stolu,
b) mince na stole “drží“ (může trochu přesahovat i přes okraj stolu).

Přijměme v celé další části definici a). Obecnější definice b) samozřejmě může vést na některých místech k jiným závěrům. Na tuto rozdílnost čtenáře upozorníme.

Studenti si mohou hru zahrát a pak jim sdělíme, že ***existuje vítězná strategie*** pro hráče, který první pokládá minci na stůl. Dohodněme se, že označení první hráč a hráč A znamená totéž. Vzhledem k přijaté definici a) bychom však měli dodat, že vítězná strategie pro prvního hráče může existovat pouze tehdy, když stůl je dostatečně velký, aby se na něj vešla

4. Pokud provádí zkoumání profesionální matematik, pak nejčastěji ze všeho končí v situaci - žádný objev nebo neúspěch. I ve školské matematice by se to mohlo stát a nebylo by to na škodu. Nemělo by to však být příliš často. Pokud studenti delší dobu nic neobjeví, ztrácejí zájem.

Mnoho učebnic a také mnoho vyučovacích hodin školské matematiky obsahuje pouze část B našeho schématu. V praxi se to projevuje tak, že věty i problémy „padají z nebe“. Není zde téměř nic, co by žáky k probírané problematice přivedlo. V superčisté formě se tento přístup projevuje v mnohých vysokoškolských přednáškách, ale především ve většině odborných matematických knih. Tam se dokonce hypotéza nazývá větou ještě před tím, než se provede její důkaz. Pokud by před část B (kde je to vhodné) byla zařazena část A, dospějeme k větám a problémům přirozenou cestou. Žáci pak do problematiky vidí a navíc objevené problémy a hypotézy mohou považovat za své. Připojme proto ještě jeden bod:

5. Část B uvedeného diagramu představuje velmi dobrý trénink deduktivního myšlení. Objevování je zde však poměrně málo. Chceme-li tedy, aby žáci a studenti objevovali, musíme na vhodných místech organizovat exkurse do části A, a to i na vysokých školách. V žádném případě nelze matematické myšlení redukovat pouze na deduktivní myšlení.[3]

Původně jsme se domnívali, že metoda zkoumání je aplikovatelná až na druhém a třetím stupni škol a samozřejmě i na vysokých školách. Několik výzkumů prováděných na prvním stupni ZŠ nás však přesvědčilo, že tato metoda je dobře použitelná i na prvním stupni a že se pomocí ní dá pracovat dokonce i s mentálně retardovanými žáky.

Na tomto místě bychom měli zdůraznit ještě jednu důležitou skutečnost. Výzkumný přístup je nejen **metoda pomocí které může učitel matematiku učit**, ale je to **metoda pomocí které se žák nebo student může matematiku učit**. Tuto metodu by mohl učitel použít téměř v celé školské matematice. Ve školské praxi je však vhodné ji kombinovat s dalšími výukovými metodami tak, abychom dosáhli co největšího pokroku. Žákům a studentům při jejich učení umožní tato metoda proniknout do matematiky mnohem hlouběji než jim to umožní metody jiné.

Výzkumný přístup budeme demonstrovat na následujícím příkladu zkoumání číselné tabulky:

Číselná tabulka

Co z matematiky předpokládáme? Předpokládáme znalost trojúhelníkových čísel, tj. čísel 1, 3, 6, 10, 15, … a vzorce pro výpočet n-tého trojúhelníkového čísla, tj. $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tento vzorec můžeme objevit např. experimentováním.

Problematiku můžeme využít např. při probírání aritmetických posloupností nebo při úpravách algebraických výrazů.

[3] Více o tom v kapitole 2.

Problém : Uvažujme číselnou tabulku 1.

1	2	3	4	5	6 . . . . . .
2	4	6	8	10	12 . . . . .
3	6	9	12	15	18 . . . . .
4	8	12	16	20	24 . . . . .
5	10	15	20	25	30 . . . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Tabulka 1

Úkol: Nejprve si pozorně prohlédněte, jak tabulka vznikla a potom pokračujte ve čtení.

a) Zkoumejte součty čísel v takových čtvercích jako jsou vyznačené v tabulce 1.

Např. součet v druhém nejmenším čtverci je 1 + 2 + 2 + 4 = 9

b) Zkoumejte součty čísel v „koridorech“ mezi čtverci.

Např. součet čísel v koridoru za druhým čtvercem je 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27.

Problém a): Experimentování (systematické)**:**
Součty čísel ve čtvercích (od nejmenšího) jsou po řadě:

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = (1 + 2) + (2 + 4) = 3 + 6 = 9$$
$$C_3 = (1 + 2 + 3) + (2 + 4 + 6) + (3 + 6 + 9) = 6 + 12 + 18 = 36$$
$$C_4 = (1 + 2 + 3 + 4) + \ldots + (4 + 8 + 12 + 16) = 10 + 20 + 30 + 40 = 100$$

Je vidět, že jako součty dostáváme některá čtvercová čísla

$$C_1 = 1 = 1^2,\ C_2 = 9 = 3^2,\ C_3 = 36 = 6^2,\ C_4 = 100 = 10^2.$$

Jsou to druhé mocniny trojúhelníkových čísel. Pomocí induktivní úvahy proto můžeme tedy vyslovit hypotézu:

Hypotéza: Pro libovolné přirozené číslo n platí: Součet čísel v n-tém čtverci je druhou mocninou n-tého trojúhelníkového čísla.

Důkaz hypotézy**:** Uvažujme n-tý čtverec. Čísla v tomto čtverci sečteme po řádcích. Platí:

Součet čísel v prvním řádku je $R_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = T_n$.

Součet čísel ve druhém řádku $R_2 = 2R_1 = 2T_n$.

……..

Součet čísel v řádku n $R_n = nR_1 = nT_n$.

Součet všech čísel ve čtverci C_n:

$$C_n = T_1 + 2T_2 + 3T_3 + \ldots + nT_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)T_n = T_n^{\,2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \square$$

C_n je tedy skutečně druhou mocninou n-tého trojúhelníkového čísla. Vyslovená hypotéza se tak stává větou. Vyslovme ji ještě jednou:

Věta 1: Uvažujme číselnou tabulku 1 a v ní vyznačený typ čtverců. Pro libovolné nenulové přirozené číslo n platí, že součet čísel ve čtverci n je $C_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Analogickým způsobem můžeme získat následující větu:

Věta 2: Uvažujme číselnou tabulku 1 a v ní vyznačené koridory. Pro libovolné přirozené číslo n platí, že součet čísel v koridoru n je $K_n = n^3$.

Obě výše uvedené věty jsme objevili pomocí indukce. Nyní však vzniká nová situace.

Protože platí:

$$K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n = C_n\,,$$

je jednoduchým důsledkem tohoto vztahu a vět 1 a 2 následující věta:

Věta 3: Pro libovolné nenulové přirozené číslo n platí, že součet prvních n kubických čísel je roven čtverci n-tého trojúhelníkového čísla.

Zapišme větu 3 ještě přehledněji:

$$(\forall n \in \mathrm{N})\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = T_n^{\,2} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

Věty 1 a 2 jsme objevili pomocí indukce, větu 3 pomocí dedukce. Pokud alespoň trochu pracujeme ve školské matematice naznačeným způsobem, pak můžeme říci, že se svými žáky a studenty děláme skutečnou matematiku.

Literatura:

[1] Cofmann, J.: What to solve? Oxford, Oxford University Press, 1991.
[2] Kopka, J.: Hrozny problémů ve školské matematice. Ústí nad Labem, UJEP, 1999.
[3] Kopka, J.: Výzkumný přístup při výuce matematiky. Ústí nad Labem, UJEP, 2004.
[3] Kopka, J.: Strategie přeformulování problému. Matematika Informatika, Fyzika č.28 ročník XV, Prešov 2006
[4] Vopěnka, P.: Rozpravy s geometrií. Praha, Panorama, 1989.