PROMETHEUS

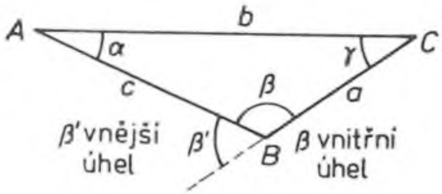
Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Trojúhelníky a čtyřúhelníky

Jč
m+f

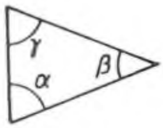
TROJÚHELNÍKY



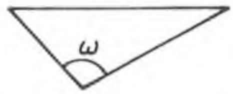
$$\boxed{o = a + b + c}$$

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$$

$$\boxed{\beta + \beta' = 180^\circ}$$

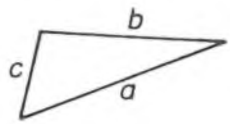


ostroúhlý trojúhelník
$\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$

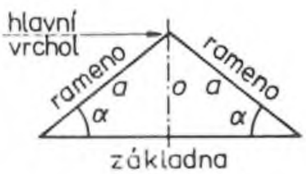


tupoúhlý trojúhelník
$\omega > 90^\circ$

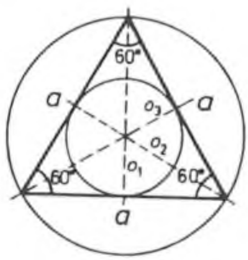
pravoúhlý trojúhelník



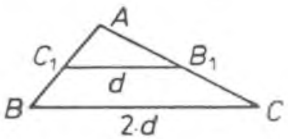
různostranný trojúhelník
$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$



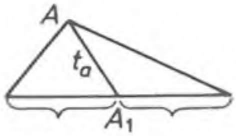
rovnoramenný trojúhelník



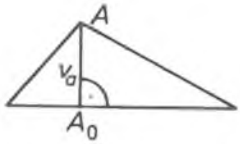
rovnostranný trojúhelník



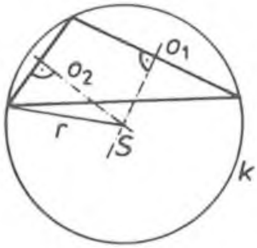
střední příčka B_1C_1



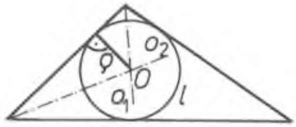
těžnice t_a



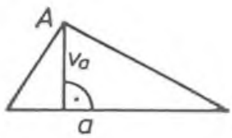
výška v_a



kružnice $k(S; r)$
trojúhelníku opsaná

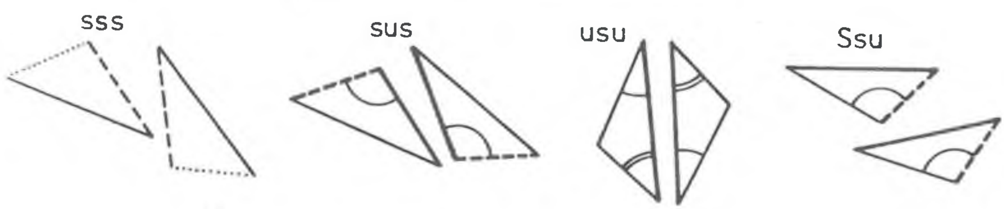


kružnice $l(O; \varrho)$
trojúhelníku vepsaná



obsah trojúhelníku $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$

Shodnost trojúhelníků podle vět



RNDr. Jiří HERMAN
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima

Sekunda

Tercie

Matematika

Trojúhelníky a čtyřúhelníky

PROMETHEUS

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc. a RNDr. Milan Ryšavý

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií
doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR dne 17. 3. 1995, č. j. 11768/95–26,
k zařazení do seznamu učebnic pro víceletá gymnázia a základní školy

Dotisk 1. vydání

© Jiří Herman za kol., 1995

ISBN 80-85849-86-0

OBSAH

Na vysvětlenou . . .

Pátý sešit z řady učebnic matematiky pro nižší třídy gymnázií, případně výběrové třídy základních škol, který právě dostáváte do rukou, je věnován zkoumání důležitých rovinných útvarů – *trojúhelníků* a *čtyřúhelníků*.

Připomínáme, že cílem našeho projektu je vytvořit ve formě řady asi 15 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních třech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestaveny tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Zmíněné cíle ovlivnily rozsah i formu textu. Zopakujme stručně, jakým způsobem:

Výklad nového učiva je zpravidla uveden motivující otázkou (značenou otazníkem na okraji stránky). Nové pojmy, poznatky a pravidla jsou pak podrobně vysvětlovány a zdůvodňovány tak, aby je žák v případě potřeby mohl zvládnout samostatným studiem. Nezakrýváme, že naše učebnice jsou psány pro žáky s hlubším zájmem o matematiku a další přírodovědné předměty. Především těm jsou určeny i drobnějším písmem (petitem) tištěné pasáže, které přesahují standardní rámec učiva. Jsme si plně vědomi toho, že některé z těchto dodatků, v nichž *dokazujeme* geometrická tvrzení, budou pro většinu žáků příliš obtížné. Zařadili jsme je s ohledem na „tematický“ princip, podle kterého je naše řada učebnic sestavena. Spoléháme na rozhodnutí učitelů, které pasáže je ve výuce účelné „pominout“, „odložit“ do vyššího ročníku či využít při práci matematických kroužků.

U řešených příkladů někdy uvádíme více různých postupů vedoucích k cíli, aby je žáci mohli sami porovnat. Tak se je pokoušíme naučit tomu, co je pro práci v matematice zásadní: umět se podívat na jednu situaci z různých hledisek. Rovněž považujeme za důležité, aby se žáci naučili vlastní řešení srozumitelně a přehledně zapisovat. Proto jsme do učebnice zařadili ukázky „opsané“ ze žákovských sešitů, které by mohly žákům posloužit jako vzory takových zápisů.

Abychom podtrhli spjatost geometrie s realitou, požadujeme od žáků u některých příkladů a cvičení, aby něco vystřihli z papíru a získané útvary posunovali, překládali apod. V těchto místech je na okraji stránek znak nůžek.

Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve *větách*, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Neměl by to být v žádném případě signál k bezduchému memorování, ale výzva, aby se žáci nad obsahem těchto vět důkladně zamysleli a správně je pochopili. To lze kontrolovat *průběžnými úkoly*, značenými v textu ➡. Ke kontrole zvládnutí větších celků jsou určena *cvičení* uváděná vždy za dvěma, popř. třemi kapitolami. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k tématu celého sešitu. K většině úkolů, cvičení i souhrnných cvičení jsou na konci sešitu uvedeny výsledky, případně návody k řešení. V případech, kdy popisujeme postup, jak dojít k cíli, uvádíme zpravidla jedinou z několika možností. Kvůli značnému rozsahu obrázků jsme vynechali výsledky u takových jednoduchých úloh, v nichž se pouze procvičují základní konstrukce. Příklady určené k samostatné práci žáků označujeme někdy (pro lepší orientaci) těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
* – obtížnější příklad
** – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Na závěr připojíme přehled předchozích sešitů naší řady:

Úvodní opakování
Kladná a záporná čísla
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost
Racionální čísla. Procenta

ÚVOD

Nelze asi nic namítat proti tvrzení, že nejjednodušší útvar, který má *délku*, je *úsečka*. Podobně snad obstojí tvrzení o tom, že nejjednodušší útvar, který má *plochu*, je *trojúhelník*. Jak už víme, je to část roviny omezená třemi úsečkami, které spojují tři body, zvané vrcholy trojúhelníku.

První praktické poznatky o trojúhelníku si lidé osvojili již ve starověku. Obyvatelé staré Číny, Mezopotámie a Egypta uměli vypočítat *obsah* libovolného trojúhelníku. Věděli také, že trojúhelník, jehož strany mají délku 3, 4 a 5 jednotek, má pravý úhel proti nejdelší straně. Tento poznatek využívali například staří Egypťané. Pomocí napnutých lan vytyčovali pravé úhly při zemních a stavebních pracích.

Skutečný rozkvět zaznamenala geometrie trojúhelníku v období starého Řecka zásluhou takových matematiků, jakými byli *Pythagoras*, *Eukleides* a *Archimedes*. Od té doby víme, že k libovolnému trojúhelníku můžeme sestrojit řadu význačných bodů, úseček, přímek a kružnic, které mají pozoruhodné vlastnosti. S nejdůležitějšími z nich se v tomto sešitě seznámíme. Zdůrazněme, že „seznam" vlastností trojúhelníku není patrně dodnes úplný. I v našem století totiž vycházejí matematické práce věnované novým vlastnostem trojúhelníků a odpovídajícím konstrukcím. Úkolem matematiků není jen takové zákonitosti objevovat (např. přesným rýsováním), ale i přísně logicky odůvodňovat. Takovýmto zdůvodněním říkáme v matematice *důkaz*. Několik důkazů najdete i v tomto sešitě.

Poznatky o trojúhelnících využijeme při studiu útvarů, které je možné z trojúhelníků „složit". Složením dvou „vhodných" trojúhelníků vznikne útvar se čtyřmi vrcholy, stranami a vnitřními úhly. Nazývá se *čtyřúhelník*. Mezi čtyřúhelníky patří i takové, které již dobře znáte – např. *čtverec* a *obdélník*. Podrobnému výkladu o čtyřúhelnících věnujeme několik závěrečných kapitol této učebnice.

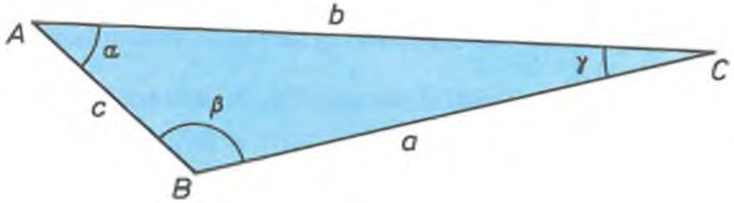
1 TROJÚHELNÍK

Jaký geometrický útvar nazýváme *trojúhelníkem*, již velmi dobře víte. Znáte také jeho základní vlastnosti. Proto je nyní pouze stručně zopakujeme.

Co již víme o trojúhelníku?

?

Na obrázku je vybarvena množina bodů v rovině, které říkáme *trojúhelník* ABC (zkráceně píšeme $\triangle ABC$).



Připomeňme si, že u trojúhelníku pojmenováváme:

body A, B, C	**vrcholy** $\triangle ABC$
úsečky AB, BC, CA	**strany** $\triangle ABC$
úhly CAB, ABC, BCA	**vnitřní úhly** $\triangle ABC$

Strany trojúhelníku ABC označujeme také malými písmeny (v souhlasu s protějšími vrcholy):

$$a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB$$

Vnitřní úhly trojúhelníku ABC značíme řeckými písmeny:

$$\alpha = \sphericalangle CAB, \quad \beta = \sphericalangle ABC, \quad \gamma = \sphericalangle BCA$$

Dohodněme se, že malá písmena a, b, ... budeme používat nejen k označení úseček, ale i jejich délek (např. $a = |BC|$). Podobně řecká písmena α, β, ... budou značit nejen úhly (tj. množiny bodů), ale i jejich velikosti (např. $\alpha = |\sphericalangle CAB|$). Kvůli stručnosti někdy slova *délka* a *velikost* vynecháváme, např. ve spojení „trojúhelník se stranami *délek* 3 cm, 4 cm a 5 cm“. Také často mluvíme o *součtu stran* a *součtu úhlů*, i když máme vlastně na mysli součet jejich délek či velikostí.

1. Sestrojte libovolný trojúhelník ABC, popište jeho vrcholy, strany a vnitřní úhly.

2. Zapište trojúhelník ABC pomocí symbolu $\triangle$ všemi možnými způsoby.

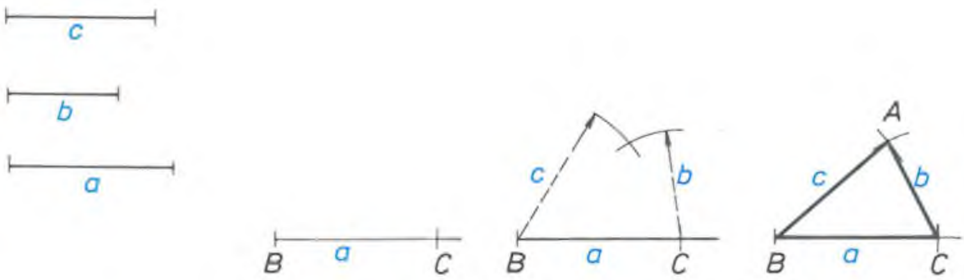
3. Změřte a zapište velikosti stran a vnitřních úhlů trojúhelníku, který jste sestrojili v úloze 1.

Jak sestrojíme trojúhelník?

Trojúhelník považujeme za sestrojený, jestliže jsou narýsovány všechny tři jeho strany. Pak totiž dobře vidíme, které body roviny trojúhelníku patří a které ne.

Snadná je konstrukce trojúhelníku ABC, jsou-li zadány všechny tři jeho vrcholy A, B, C. Mohou to být libovolné tři body roviny, nesmějí však ležet na jedné přímce.

Podle obrázku si připomeňte konstrukci trojúhelníku v případě, že známe délky všech tří jeho stran. Umístění jedné strany zvolíme libovolně a určíme polohu třetího vrcholu:



Ne vždy lze sestrojit trojúhelník ABC, jehož strany by měly dané délky a, b, c. Víme totiž, že pro strany trojúhelníku platí **trojúhelníková nerovnost**:

Součet každých dvou stran trojúhelníku je *větší* než strana třetí.

Obecně to zapíšeme nerovnostmi:

$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad c + a > b$$

4. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $|AB| = |BC| = |CA| = 6\,\text{cm}$

b) $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 2\,\text{cm}$

c) $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|BC| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|AC| = 3{,}5\,\text{cm}$

?

Co je *obvod* trojúhelníku?

Na obrázku jsou modře vyznačeny strany trojúhelníku ABC.

Tato „uzavřená" čára, která trojúhelník ohraničuje, má určitou délku. Nazýváme ji **obvodem trojúhelníku**. Je to tedy součet délek všech tří stran trojúhelníku. Obvod značíme zpravidla o.

Například trojúhelník XYZ o stranách

$$|XY| = 5\,\text{cm}, \quad |YZ| = 3\,\text{cm}, \quad |ZX| = 2{,}5\,\text{cm}$$

má obvod

$$o = |XY| + |YZ| + |ZX| = 5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} + 2{,}5\,\text{cm} = 10{,}5\,\text{cm}.$$

Postup při *grafickém* určení obvodu $\triangle XYZ$ si zopakujte samostatně.

5. Určete obvod trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = b = c = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ b) $a = b = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $c = 4\,\mathrm{cm}$

c) $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 4{,}5\,\mathrm{cm}$

6. Vypočtěte délku strany PQ trojúhelníku OPQ s obvodem 16 cm, mají-li ostatní dvě strany stejnou délku 6 cm.

7. Sestrojte trojúhelník EFG, je-li $|EF| = 3{,}4\,\mathrm{cm}$, $|FG| = 2{,}8\,\mathrm{cm}$, $|GE| = 4{,}2\,\mathrm{cm}$, a graficky určete jeho obvod.

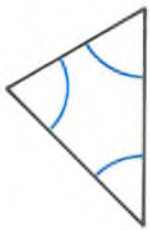
?

Jak dělíme trojúhelníky podle velikostí vnitřních úhlů?

Podle velikostí vnitřních úhlů rozdělujeme trojúhelníky do tří skupin:

trojúhelníky

↙ ↓ ↘

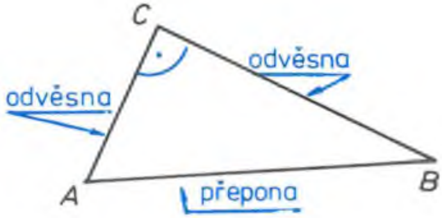
ostroúhlé	pravoúhlé	tupoúhlé
		
všechny tři vnitřní úhly jsou **ostré**	*právě jeden* vnitřní úhel je **pravý**	*právě jeden* vnitřní úhel je **tupý**

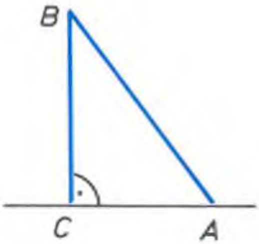
8. Narýsujte libovolný ostroúhlý $\triangle KLM$, pravoúhlý $\triangle RST$ a tupoúhlý $\triangle XYZ$. V pravoúhlém a tupoúhlém trojúhelníku vyznačte barevně největší stranu a největší vnitřní úhel.

Tím naše opakování končí. Doplníme ho ještě o několik nových pojmů a poznatků.

Jak se jmenují strany pravoúhlého trojúhelníku?

Strany pravoúhlého trojúhelníku mají speciální názvy. **Přepona** se „přepíná“ proti pravému úhlu, je to tedy strana, která leží *proti pravému úhlu*. Zbylé dvě strany se nazývají **odvěsny**, neboť „odvisejí“ od pravého úhlu, tzn. leží na jeho ramenech. V každém pravoúhlém trojúhelníku je přepona nejdelší stranou.





Poslední tvrzení zdůvodníme takto: Délka odvěsny BC pravoúhlého $\triangle ABC$ je vzdálenost bodu B od přímky AC. Úsečka BC je tedy nejkratší ze všech úseček BX, kde X leží na přímce AC. Proto $|BC| < |AB|$. Podobně se vysvětlí, proč $|AC| < |AB|$.

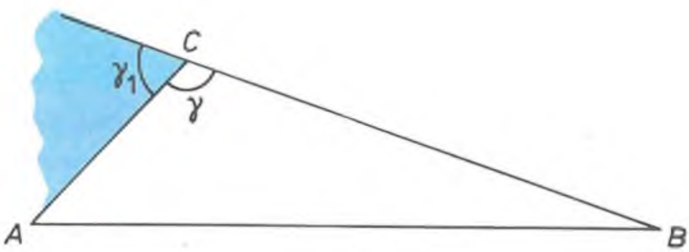
9. Pojmenujte strany pravoúhlého trojúhelníku KLM, znáte-li jejich délky:

a) $|KL| = 3\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 5\,\mathrm{cm}$, $|KM| = 4\,\mathrm{cm}$

b) $|KL| = 13\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 5\,\mathrm{cm}$, $|KM| = 12\,\mathrm{cm}$

Co je *vnější úhel* trojúhelníku?

Na následujícím obrázku trojúhelníku ABC je „prodloužena“ jeho strana BC za vrchol C. Při tomto vrcholu je vyznačen vnitřní úhel γ a vybarven úhel γ_1.

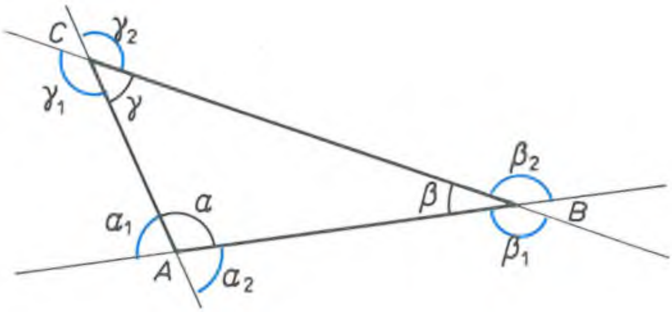


Úhel γ_1 se nazývá **vnější úhel** trojúhelníku ABC při vrcholu C.

Protože úhly γ a γ_1 jsou *vedlejší*, platí:

$$\gamma + \gamma_1 = 180°$$

Každý trojúhelník má tři vnitřní úhly a šest vnějších úhlů (po dvou při každém vrcholu). Prohlédněte si je na obrázku:



Protože každé dva vnější úhly při tomtéž vrcholu jsou vrcholové, platí:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \beta_2, \qquad \gamma_1 = \gamma_2$$

Vedlejší úhel k vnitřnímu úhlu trojúhelníku se nazývá **vnější úhel** tohoto trojúhelníku.
Součet vnějšího a vnitřního úhlu při tomtéž vrcholu je 180°.

10. Narýsujte libovolný trojúhelník MNO. Změřte jeho vnitřní i vnější úhly.

11. Vnější úhly trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, C mají po řadě velikosti 170°, 150° a 40°. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

?

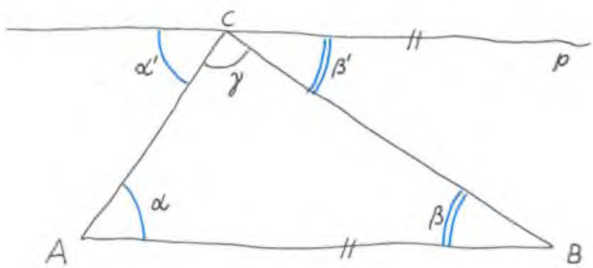
Čemu je roven součet vnitřních úhlů trojúhelníku?

Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a změřte velikosti jeho vnitřních úhlů. Budete-li pracovat přesně, zjistíte zajímavý výsledek:

Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°.

Vysvětlíme, proč toto tvrzení skutečně platí pro *každý* trojúhelník:

Načrtněte si libovolný trojúhelník ABC a „pomocnou“ přímku p, která prochází bodem C a je rovnoběžná se stranou AB. Vyznačte úhly α' a β' jako na obrázku:



Úhly α, α' a β, β' tvoří dvojice střídavých úhlů, takže jsou shodné:

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta'$$

Proto se součet $\alpha + \beta + \gamma$ rovná součtu $\alpha' + \beta' + \gamma$. Podíváme-li se na obrázek, vidíme, že přímý úhel při vrcholu C je rozdělen na tři části: úhly α', β' a γ. Proto platí

$$\alpha' + \beta' + \gamma = 180°,$$

a tedy také

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

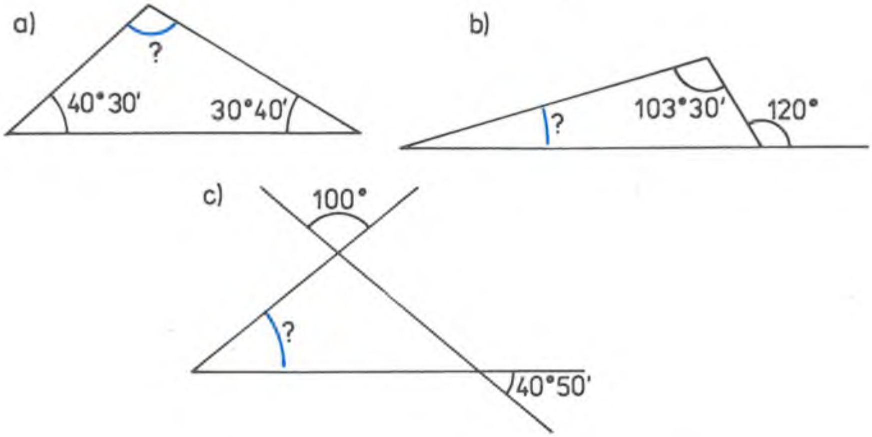
Uvědomte si, že náš postup i závěr vůbec nezáležel na tom, jaký trojúhelník jsme si načrtli.

Předchozí postup je příkladem logického vyvozování, kterému se v matematice říká *důkaz*. V jeho průběhu nelze využívat výsledky sebepřesnějších měření narýsovaných útvarů. Vycházíme při něm pouze z poznatků, které jsme již dříve dokázali.

12. Rozhodněte, zda existuje trojúhelník
   a) s dvěma pravými vnitřními úhly,
   b) s dvěma tupými vnitřními úhly.

13. Určete součet ostrých vnitřních úhlů v libovolném pravoúhlém trojúhelníku.

14. Určete velikost úhlu vyznačeného v náčrtku:



∗15. Zdůvodněte, proč v libovolném trojúhelníku ABC platí: Vnější úhel při vrcholu A je roven součtu vnitřních úhlů při vrcholech B a C.

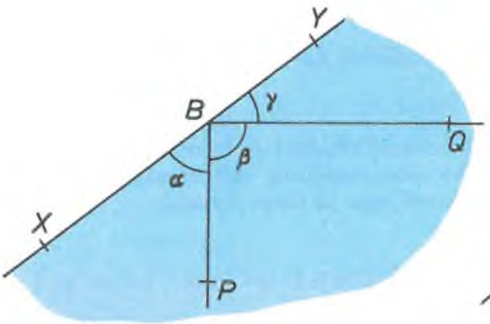
Možná vás napadla otázka, zda platí následující tvrzení:

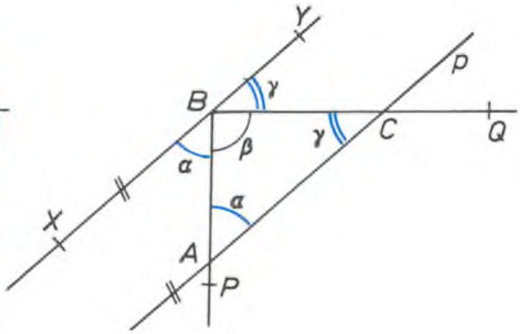
Jestliže jsou dány tři nenulové úhly α, β a γ, jejichž součet se rovná $180°$, pak existuje trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ.

Ukažme si, jak je možné toto tvrzení dokázat.

Splňují-li dané úhly α, β, γ podmínku $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, lze libovolný přímý úhel XBY rozdělit polopřímkami BP a BQ na tři části tak, aby

$$|\sphericalangle XBP| = \alpha, \qquad |\sphericalangle PBQ| = \beta, \qquad |\sphericalangle QBY| = \gamma$$



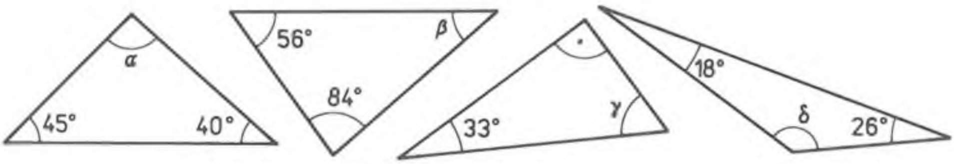


(obr. vlevo). Přímý úhel XBY je vlastně polorovina, ve které nyní sestrojíme libovolnou přímku p rovnoběžnou s přímkou XY. Její průsečíky s polopřímkami BP a BQ označíme A a C (obr. vpravo). Ze shodnosti vyznačených střídavých úhlů vyplývá, že vnitřní úhly trojúhelníku ABC jsou α, β a γ. Tím je důkaz proveden.

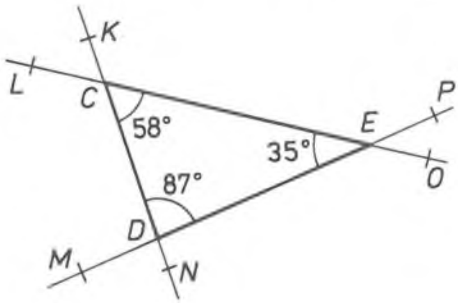
CVIČENÍ 1

1. Narýsujte pravý úhel s vrcholem V. Na jednom rameni tohoto úhlu zvolte bod X a na druhém bod Y tak, aby vznikl trojúhelník VXY. Pojmenujte jeho strany.

2. Vypočtěte velikosti neznámých úhlů z obrázku:



3. Podle obrázku zapište všechny dvojice shodných vnějších úhlů trojúhelníku CDE.



4. Trojúhelník ABC má vnitřní úhly o velikostech $\alpha = 32°$, $\beta = 83°$, $\gamma = 65°$. Vypočtěte velikosti všech jeho vnějších úhlů.

5. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, má-li vnější úhel při vrcholu A velikost $82°20'$ a vnější úhel při vrcholu B velikost $170°$.

6. Vnější úhly trojúhelníku ABC jsou jako obvykle označeny α_1, β_1 a γ_1. Připravte si tabulku podle vzoru v učebnici a doplňte ji údaji o čtyřech různých trojúhelnících ABC.

α	β	γ	α_1	β_1	γ_1
20°		130°			
	75°				110°
		18°		62°	
			51°	149°	

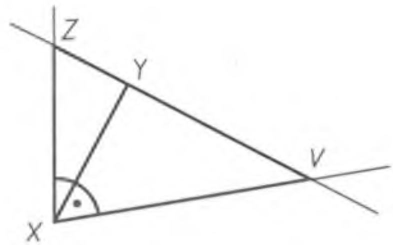
7. V trojúhelníku KLM je $|\sphericalangle MKL| = 65°30'$ a $|\sphericalangle KML| = 34°30'$. Vypočtěte velikosti vnitřního i vnějšího úhlu při vrcholu L.

8. V trojúhelníku PQR je velikost vnějšího úhlu při vrcholu P 113° a velikost vnitřního úhlu PRQ 15°. Vypočtěte velikosti zbývajících vnitřních úhlů trojúhelníku PQR.

9. Můžete narýsovat trojúhelník ABC, jehož vnější úhel při vrcholu C má velikost 100° a velikosti vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech jsou rovny:

   a) 80° a 30°, b) 50° a 50°, c) 14° a 86°?

*10. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků XYZ a XYV z náčrtku. Vnější úhel $\triangle XYZ$ při vrcholu Z má velikost 148°, úhel XYV měří 79° a trojúhelník XVZ je pravoúhlý s přeponou VZ.



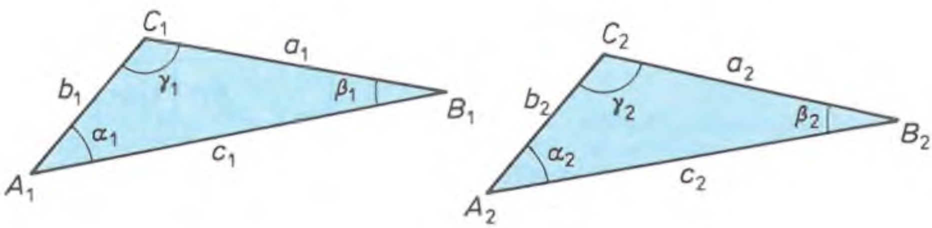
2 SHODNOST TROJÚHELNÍKŮ

V sešitě *Osová a středová souměrnost* jsme vysvětlili, kdy říkáme, že dva geometrické útvary jsou *shodné.* Znamená to, že je můžeme přemístit tak, aby se kryly. Umíme už také rozhodnout, kdy jsou shodné dvě úsečky, dva úhly, dva kruhy a dva čtverce. Shodné jsou také každé dva útvary, které jsou souměrně sdružené podle osy nebo podle středu.

Nyní se naučíme, jak poznávat shodné *trojúhelníky.* Je to velmi důležitá dovednost, ke které se budeme v hodinách geometrie neustále vracet.

? Co platí pro *shodné* trojúhelníky?

Na obrázku jsou dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. Přesvědčte se o jejich shodnosti průsvitkou.



Připomeňme, že shodnost trojúhelníků zapisujeme takto:

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$$

Tento zápis znamená, že oba trojúhelníky lze přemístit tak, aby vrchol A_1 splynul s vrcholem A_2, vrchol B_1 s vrcholem B_2, vrchol C_1 s vrcholem C_2. Pak také říkáme, že např. vrcholu A_1 odpovídá vrchol A_2, straně B_1C_1 odpovídá strana B_2C_2 apod.

Protože při přemístění se délky úseček ani velikosti úhlů nemění, platí:

$$a_1 = a_2 \qquad b_1 = b_2 \qquad c_1 = c_2$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \beta_1 = \beta_2 \qquad \gamma_1 = \gamma_2$$

> Jestliže jsou dva trojúhelníky shodné, pak jsou shodné i každé dvě odpovídající si strany i každé dva odpovídající si vnitřní úhly.

Odvodili jsme, že pro shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí šest rovností:

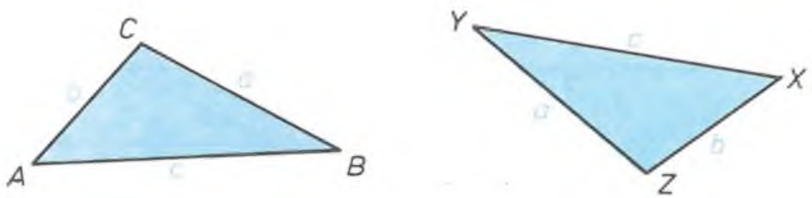
$$a_1 = a_2 \qquad b_1 = b_2 \qquad c_1 = c_2$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \beta_1 = \beta_2 \qquad \gamma_1 = \gamma_2$$

Představme si však opačnou situaci. Máme rozhodnout o shodnosti dvou daných trojúhelníků. Přitom víme pouze to, že pro ně platí *některé* z těchto šesti rovností. Kdy máme zaručeno, že jsou skutečně shodné? Ukážeme, že je to v případech, kdy platí *tři* vhodně vybrané rovnosti.

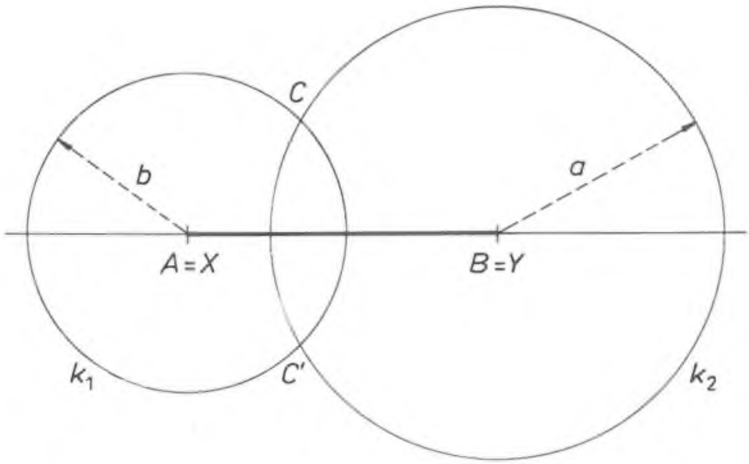
Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost stran?

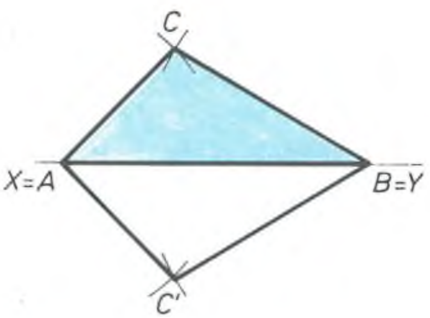
Vysvětlíme, proč jsou shodné dva trojúhelníky ABC a XYZ, jestliže platí:

$$|AB| = |XY|, \qquad |BC| = |YZ|, \qquad |CA| = |ZX|$$



Protože $|AB| = |XY|$, můžeme $\triangle XYZ$ přemístit tak, aby bod X splynul s bodem A a bod Y s bodem B. Podívejme se, kam se při tom přemístil třetí vrchol Z. Protože $|XZ| = b$ a $|YZ| = a$, leží bod Z na kružnicích $k_1(A; b)$ a $k_2(B; a)$. Ty se protínají ve dvou bodech C a C', které jsou souměrně sdružené podle přímky AB.





Bod Z se tedy přemístil buď do bodu C, nebo do bodu C'. Přemístěný trojúhelník XYZ je v prvním případě totožný s trojúhelníkem ABC. V druhém případě jsou tyto trojúhelníky souměrně sdružené podle osy AB. V obou případech jsou trojúhelníky ABC a XYZ shodné.

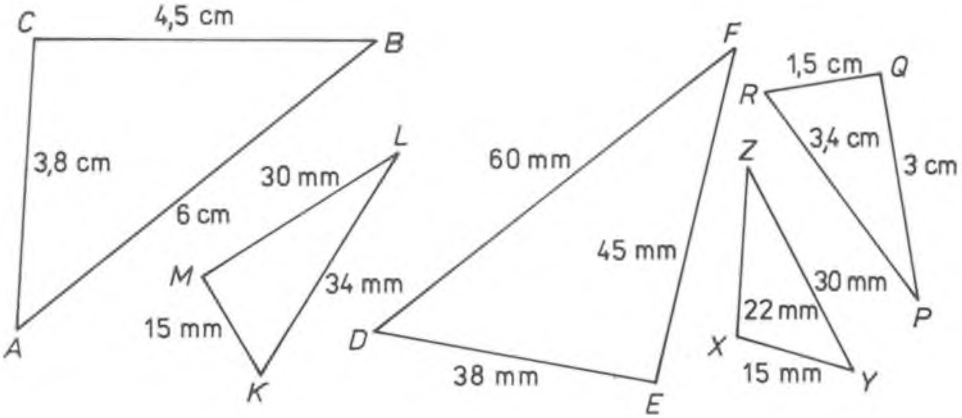
Jestliže pro trojúhelníky ABC a XYZ platí rovnosti

$$|AB| = |XY|, \quad |BC| = |YZ| \quad \text{a} \quad |CA| = |ZX|,$$

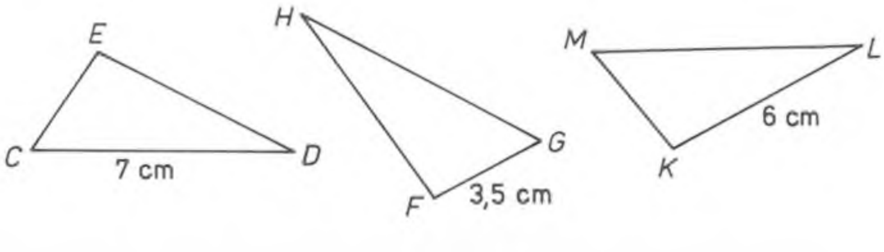
pak jsou tyto trojúhelníky shodné: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

Předchozí tvrzení se nazývá ***věta sss***. Tři písmena *s* připomínají, že trojúhelníky mají tři dvojice shodných stran.

1. Vyberte z obrázku dvojice shodných trojúhelníků a jejich shodnost zapište.

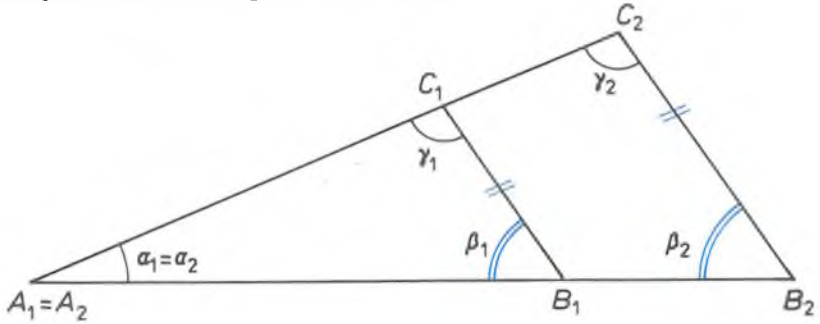


2. Na obrázku vidíte tři shodné trojúhelníky, které mají obvod 16,5 cm. Najděte délky jejich zbývajících stran.



? Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost úhlů?

Následující obrázek vás přesvědčí, že ne.



I když pro úhly trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \beta_2, \qquad \gamma_1 = \gamma_2,$$

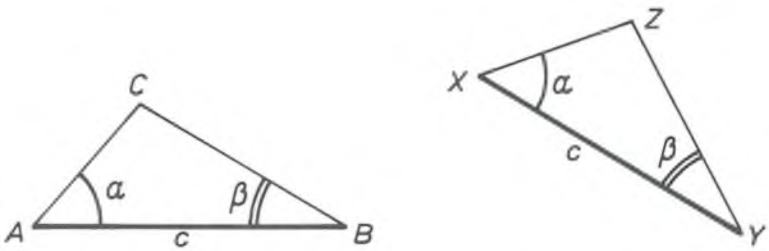
nemusí to znamenat, že trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou shodné.

? Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost jedné strany a dvou úhlů?

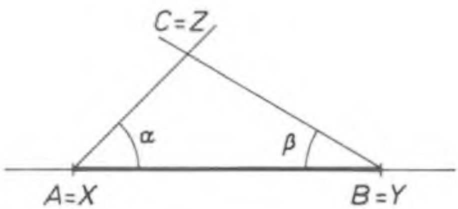
Pro trojúhelníky ABC a XYZ z obrázku platí:

$$|AB| = |XY|, \qquad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ZXY|, \qquad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$$

Přesvědčte se pomocí průsvitky, že oba trojúhelníky jsou shodné.



Tuto skutečnost vysvětlíme opět pomocí přemístění trojúhelníku XYZ do takové polohy, kdy vrchol X splyne s vrcholem A a vrchol Y s vrcholem B. Zjistíme, kam se přemístil bod Z. Jistě můžeme předpokládat, že přemístěný bod Z leží v téže polorovině s hraniční přímkou AB jako bod C. (Jinak totiž lze trojúhelník XYZ „překlopit" kolem strany XY do opačné poloroviny.) Protože $|\sphericalangle ZXY| = \alpha$, leží přemístěný bod Z na polopřímce AC. Protože $|\sphericalangle XYZ| = \beta$, leží bod Z i na polopřímce BC. Polopřímky AC a BC však mají jediný společný bod – bod C. Proto se přemístěný trojúhelník XYZ kryje s trojúhelníkem ABC.



Jestliže pro trojúhelníky ABC a XYZ platí rovnosti

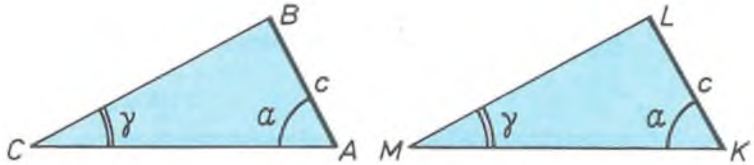
$$|AB| = |XY|, \quad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ZXY| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|,$$

pak jsou tyto trojúhelníky shodné: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

Tvrzení v rámečku se nazývá ***věta usu***. Písmena *u*, *s*, *u* připomínají, že trojúhelníky mají shodné dvě dvojice vnitřních úhlů a jednu dvojici stran.

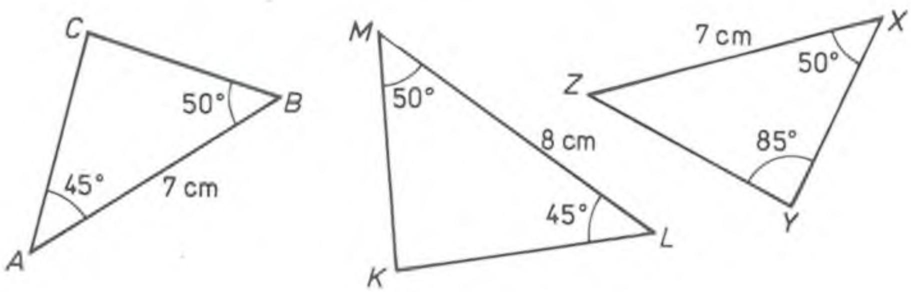
Někdy můžeme větu *usu* použít i v jiné situaci. Například o trojúhelnících ABC a KLM z obrázku víme, že

$$|AB| = |KL|, \qquad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle MKL|, \qquad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|.$$

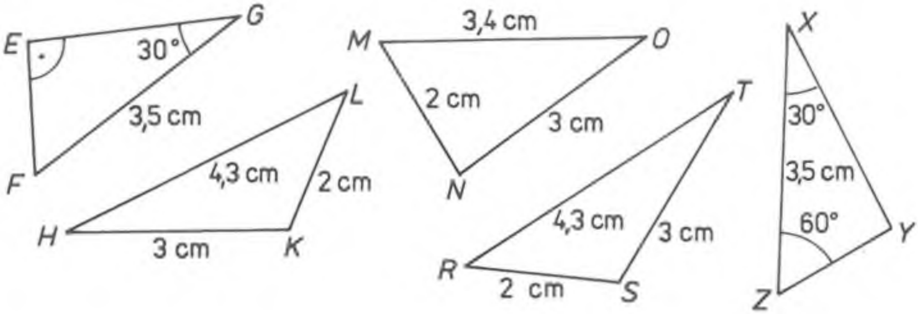


Protože součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku je 180°, shodují se oba trojúhelníky i ve vnitřních úhlech při vrcholech B a L. Proto jsou podle věty *usu* shodné.

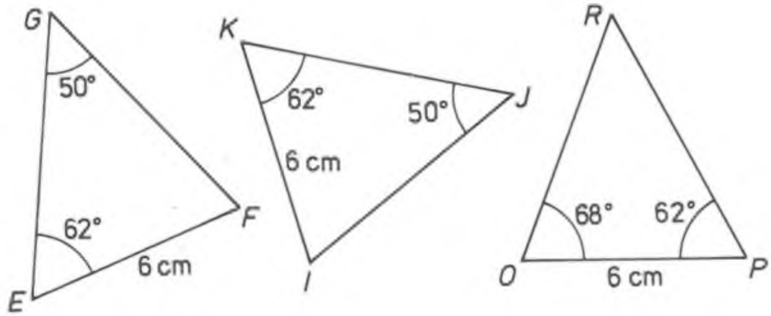
3. Které trojúhelníky na obrázku jsou shodné? Svou odpověď zdůvodněte.



4. Zapište shodné dvojice trojúhelníků z obrázku. Uveďte, podle které věty jsou shodné.



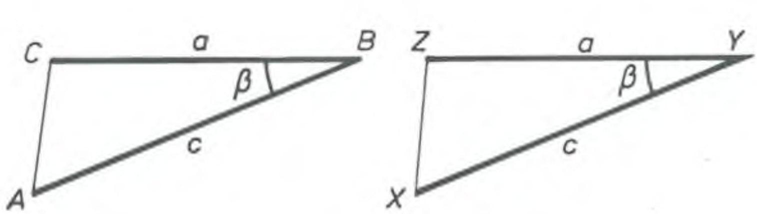
5. Jsou všechny tři trojúhelníky z obrázku shodné? Vysvětlete!



? Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnost dvou stran a jednoho úhlu?

Začneme opět pozorováním trojúhelníků ABC a XYZ, pro které platí:

$$|AB| = |XY|, \qquad |BC| = |YZ|, \qquad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|$$



Ověřte průsvitkou, že oba trojúhelníky jsou shodné. Při tom vás asi napadne, jak zdůvodnit jejich shodnost úvahami o přemístění trojúhelníku XYZ do „vhodné“ polohy. Dokážete tak, že platí:

Jestliže pro trojúhelníky ABC a XYZ platí rovnosti

$$|AB| = |XY|, \quad |BC| = |YZ| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle XYZ|,$$

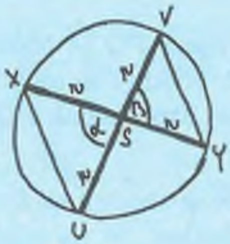
pak jsou tyto trojúhelníky shodné: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$.

Jistě sami vysvětlíte, proč se předchozí tvrzení nazývá ***věta sus***.

Nyní si prohlédněte, jak Eva využila větu *sus*.

Příklad 1. V kružnici k se středem S jsou sestrojeny dva průměry XY a UV. Dokažte, že trojúhelníky XSU a YSV jsou shodné.

Řešení z Evina sešitu



dokázat, že $\triangle XSU \cong \triangle YSV$

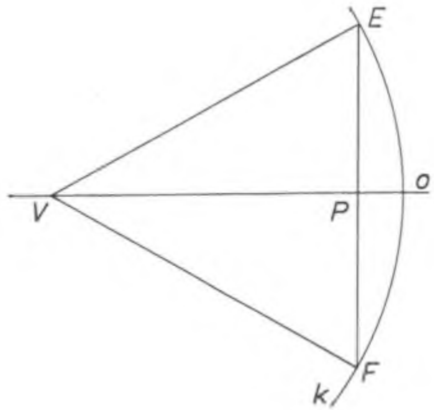
$|SX| = |SU| = |SY| = |SV|$ (poloměry)

$\alpha = \beta$ (vrcholové úhly)

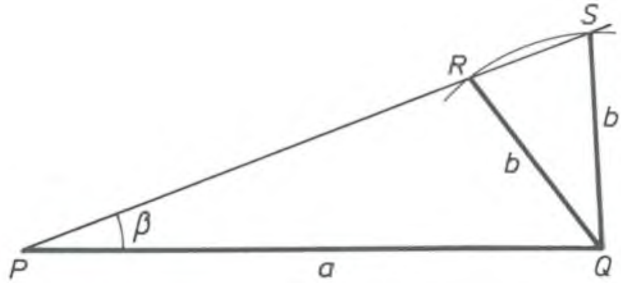
$\triangle XSU \cong \triangle YSV$ (sus)

Uměli byste dokázat shodnost trojúhelníků XSU a YSV i jinak? (Vzpomeňte si na vlastnosti středové souměrnosti.)

∗6. Na obrázku je narýsován úhel s vrcholem V, jeho osa o a část kružnice k se středem V, která protíná ramena úhlu v bodech E a F. Bod P je průsečík osy o s úsečkou EF. Rozhodněte, zda jsou trojúhelníky EVP a FVP shodné.



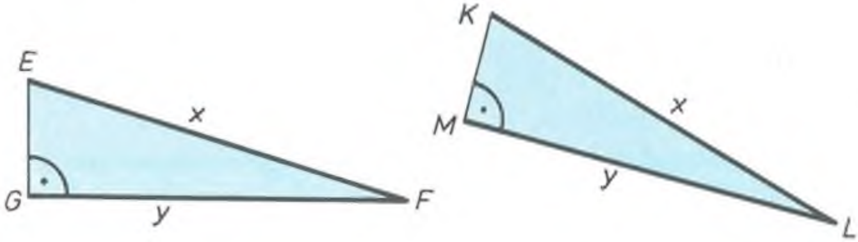
Ve větě *sus* se oba trojúhelníky ABC a XYZ shodovaly v tom úhlu, který svíraly odpovídající si shodné strany. Bude jejich shodnost zaručena i tehdy, když se budou shodovat v jiném úhlu? Následující obrázek napovídá, že tomu tak být nemusí:



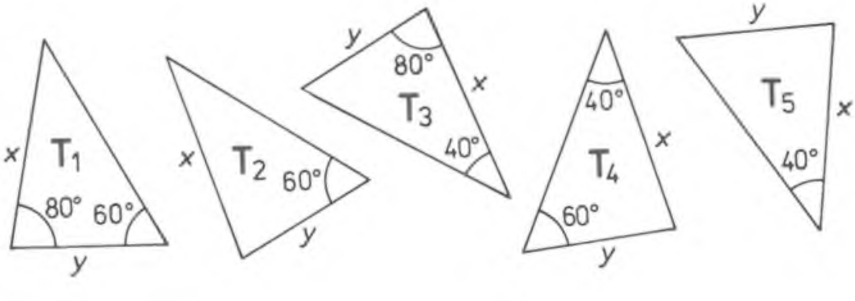
Pro trojúhelníky PQR a PQS platí $|QR| = |QS|$. Strana PQ je oběma trojúhelníkům společná, stejně jako vnitřní úhel QPR. Shodují se tedy ve dvou stranách a jednom úhlu, přesto však nejsou shodné. Trojúhelník PQR je totiž částí trojúhelníku PQS.

Přesto však existuje situace, kdy dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a „jimi nesevřeném“ úhlu, jsou zaručeně shodné. Je to tehdy, jestliže v obou trojúhelnících tento úhel leží proti **větší** z obou stran. Toto tvrzení se nazývá ***věta Ssu***. Velké písmeno S napovídá, že se ve větě mluví o větší straně trojúhelníku.

Podle věty *Ssu* rozhodneme například o shodnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků EFG a KLM z obrázku. Víme, že jsou shodné jejich přepony EF a KL i odvěsny FG a LM. Protože přepona je nejdelší stranou pravoúhlého trojúhelníku, leží shodné úhly EGF i KML proti delším stranám obou trojúhelníků.



7. O kterých trojúhelnících z obrázku můžete říci, že jsou shodné podle věty *Ssu*, víte-li, že $x \doteq 2{,}7\,\mathrm{cm}$, $y \doteq 2\,\mathrm{cm}$?



K čemu jsou věty o shodnosti trojúhelníků dobré?

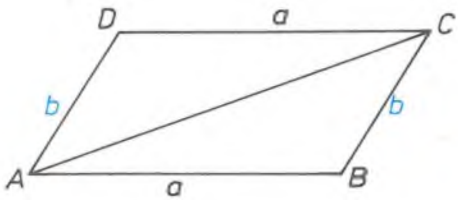
Vyložili jsme čtyři základní věty o shodnosti trojúhelníků. Dobře se je naučte, budete je často potřebovat. Jejich použití si ukážeme na třech řešených příkladech. Jsou obtížné, proto pozorně sledujte náš postup, abyste všemu důkladně porozuměli. Za každý příklad jsme zařadili ukázku zápisu ze žákovských sešitů. Také tyto zápisy pozorně prostudujte. Mohly by vám napovědět, jak stručně a přehledně zapisovat řešení podobných „důkazových" úloh, ve kterých je potřeba zachytit celý myšlenkový postup.

Příklad 2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$.

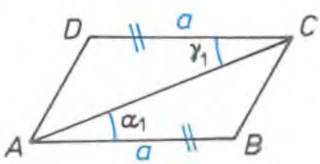
a) Sestrojte úsečku AC a zdůvodněte, proč platí $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

b) Vysvětlete, proč jsou protější strany AB a CD čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžné, stejně jako protější strany AD a BC.

Řešení



a) Načrtneme takový čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$. Úsečkou AC ho rozdělíme na dva trojúhelníky ABC a CDA. Ze zadání víme, že strana AB je shodná se stranou CD. Také strana BC je shodná se stranou AD. Trojúhelníky ABC a CDA se tedy jistě shodují ve dvou stranách. To však k jejich shodnosti ještě nestačí. Všimneme si, že strana AC je oběma trojúhelníkům společná. Oba trojúhelníky se tedy shodují ve všech třech stranách, jsou shodné podle věty *sss*: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.



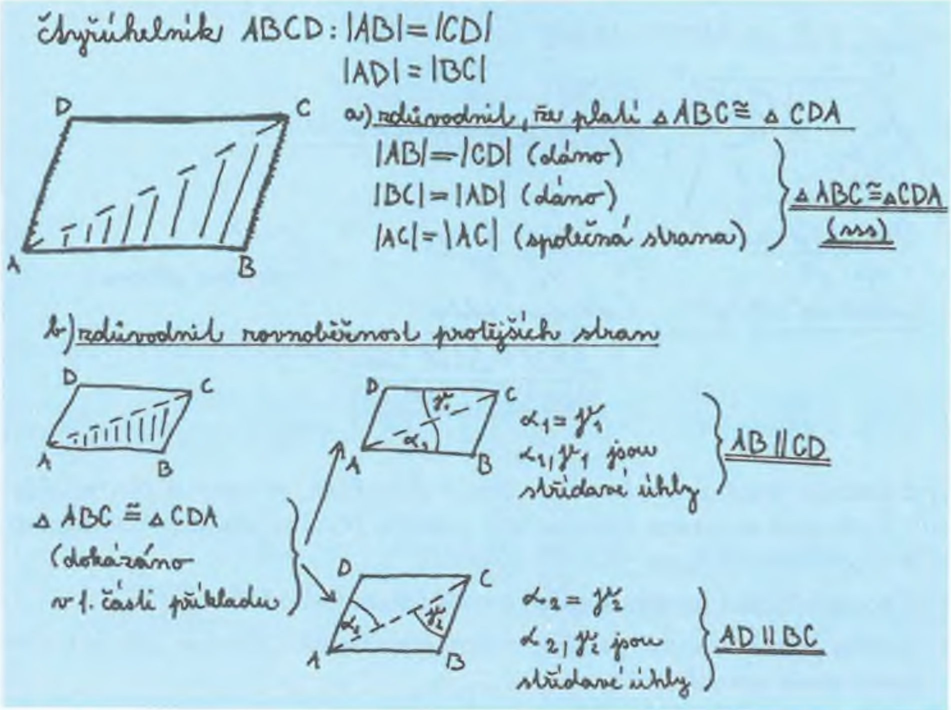
b) Rovnoběžnost protějších stran AB a CD vysvětlíme úvahou o úhlech $\alpha_1 = \sphericalangle CAB$ a $\gamma_1 = \sphericalangle ACD$. Tyto dva úhly jsou shodné, protože si odpovídají ve shodných trojúhelnících ABC a CDA:

$$\alpha_1 \cong \gamma_1$$

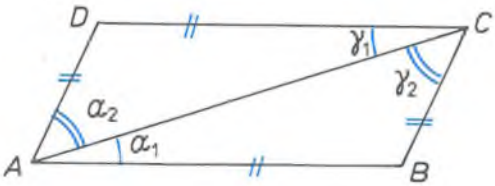
Úhly α_1 a γ_1 jsou ale střídavými úhly u přímek AB a CD proťatých příčkou AC. Protože jsou shodné, jsou podle věty o střídavých úhlech přímky AB a CD rovnoběžné.

Když provedete stejnou úvahu o shodných střídavých úhlech BCA a DAC, zdůvodníte, že také strany BC a AD jsou rovnoběžné.

Prohlédněte si ukázku z Martinina sešitu:



Příklad 3. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou obě dvojice protějších stran rovnoběžné. Dokažte, že $|AB| = |CD|$ a $|AD| = |BC|$.



Řešení. Žádné věty o shodnosti stran čtyřúhelníku neznáme. Zkusíme proto přejít k trojúhelníkům. Například tak, že čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme úhlopříčkou AC na trojúhelníky ABC a CDA. Co o těchto trojúhelnících můžeme říci? Všimněme si vyznačených úhlů α_1, γ_1, α_2 a γ_2. Protože přímky AD a BC jsou rovnoběžné, jsou střídavé úhly α_2 a γ_2 shodné. Podobně z rovnoběžnosti přímek AB a CD vyplývá, že střídavé úhly α_1 a γ_1 jsou shodné. Trojúhelníky ABC a CDA, které mají společnou stranu AC, se shodují v úhlech, které k ní přiléhají. Proto jsou shodné podle věty *usu*: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

Ze shodnosti trojúhelníků ABC a CDA už plyne i shodnost zbylých odpovídajících si stran: $|AB| = |CD|$ a $|AD| = |BC|$.

Petra zapsala řešení příkladu takto:

Čtyřúhelník $ABCD$: $AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

dokázat, že $|AB| = |CD|$ a $|AD| = |BC|$

$$\underbrace{\underbrace{AB \parallel CD \text{ (dáno)}}_{\substack{\alpha_1 = \gamma_1 \\ \text{(střídavé úhly)}}} \quad \underbrace{AD \parallel BC \text{ (dáno)}}_{\substack{\alpha_2 = \gamma_2 \\ \text{(střídavé úhly)}}} \quad \substack{AC = AC \\ \text{(společná strana)}}}_{\underbrace{\triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ (usu)}}_{|AB| = |CD| \quad |AD| = |BC|}}$$

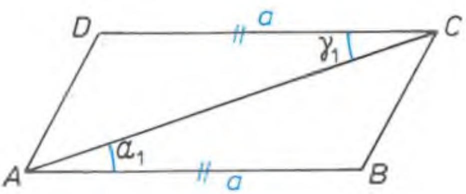
Čtyřúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné, se nazývá **rovnoběžník**. Podrobně se o něm budeme učit později. Nyní si jen připomeňme, co jsme v předchozích dvou úlohách dokázali:

- V rovnoběžníku jsou každé dvě protější strany shodné.
- Jestliže jsou každé dvě protější strany čtyřúhelníku shodné, pak je tento čtyřúhelník rovnoběžník.

V posledním příkladu této kapitoly uvidíme, že rovnoběžník lze rozpoznat i na základě vlastností jen jedné dvojice protějších stran.

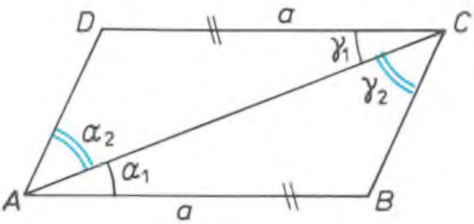
Příklad 4. O čtyřúhelníku $ABCD$ víme, že strany AB a CD jsou shodné a rovnoběžné. Dokažte, že také strany BC a AD jsou shodné a rovnoběžné.

Řešení. Po zkušenostech z řešení předchozích dvou příkladů rozdělíme čtyřúhelník $ABCD$ úhlopříčkou AC na dva trojúhelníky ABC a CDA. Pokusíme se opět zdůvodnit, proč jsou shodné.

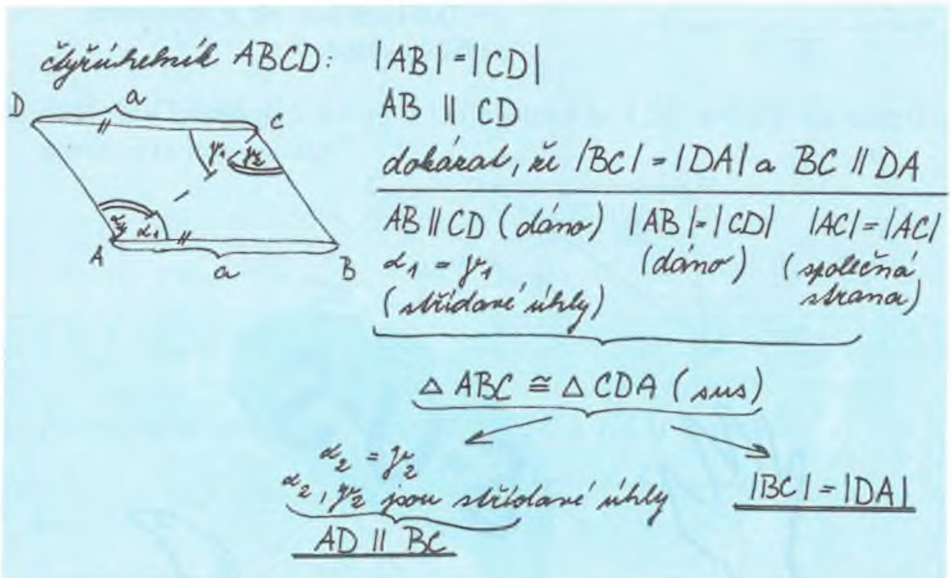


Protože podle zadání jsou přímky AB a CD rovnoběžné, jsou vyznačené úhly α_1 a γ_1 shodné. Podle zadání také platí $|AB| = |CD|$. Strana AC je oběma trojúhelníkům společná, proto platí $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ podle věty *sus*. To znamená, že odpovídající si strany BC a DA jsou shodné.

Zbývá ještě vysvětlit, proč jsou rovnoběžné. To vyplývá ze shodnosti odpovídajících si úhlů α_2 a γ_2:



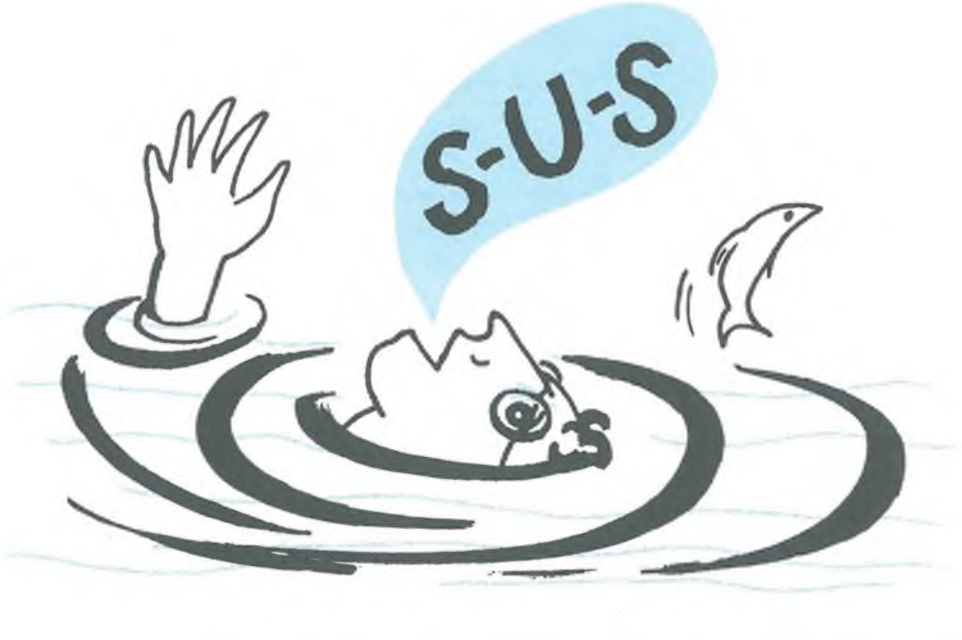
Nakonec připojíme Karolinino řešení:



Na břehu jsem jednou ležel
rybníku
o shodnosti přemítaje
trojúhelníků.
Že však velké horko bylo,
do vody jsem vlez,
křeč mě chytla, potápím se,
volám S – U – S !

Volání mé vzbudí všude
rozruch veliký:
Učitel se někde topí
matematiky!
Několik žáků do vody
vrhlo se
a plavalo směrem ke mně po hlase.
Brzy cítím pod nohama
pevný bod.
– Tak bych bez vět o shodnosti
přišel o život.

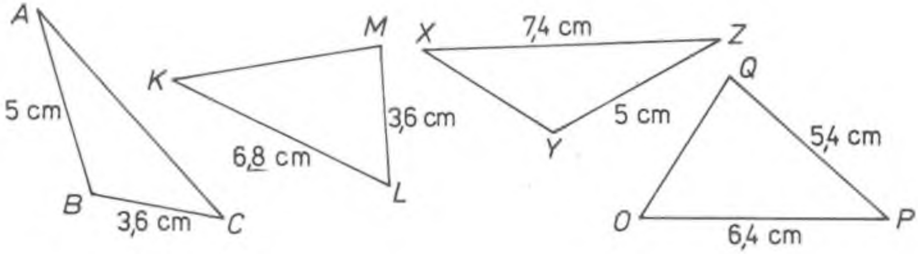
Emil Calda



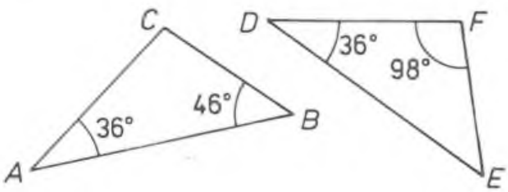
CVIČENÍ 2

1. Narýsujte dva shodné trojúhelníky. Označte jejich vrcholy a zapište shodnost narýsovaných trojúhelníků.

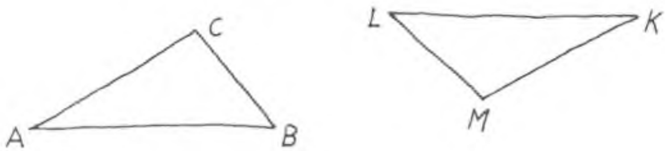
2. Každý z trojúhelníků na obrázku má obvod 16 cm. Nejsou však všechny shodné. Najděte shodné trojúhelníky a jejich shodnost zdůvodněte.



3. Můžete z uvedených údajů o trojúhelnících ABC a DEF na náčrtku zjistit, zda jsou shodné?



4. Načrtněte si do sešitu trojúhelníky ABC a KLM z obrázku:



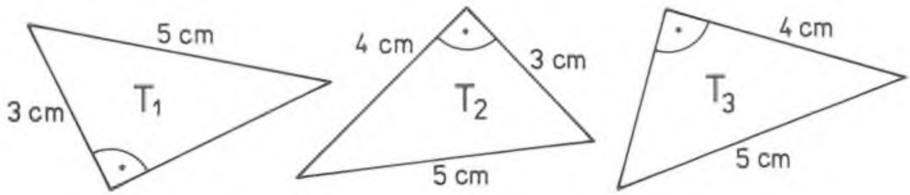
Doplňte do náčrtku délky jejich stran a velikosti všech vnitřních úhlů, víte-li, že platí $\triangle ABC \cong \triangle KLM$, $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|LM| = 2{,}1\,\text{cm}$, $|KM| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle MKL| \doteq 25°$, $|\sphericalangle ABC| \doteq 60°$.

5. Rozhodněte, zda trojúhelníky ABC a EFG jsou shodné. Jestliže ano, jejich shodnost zdůvodněte a zapište.

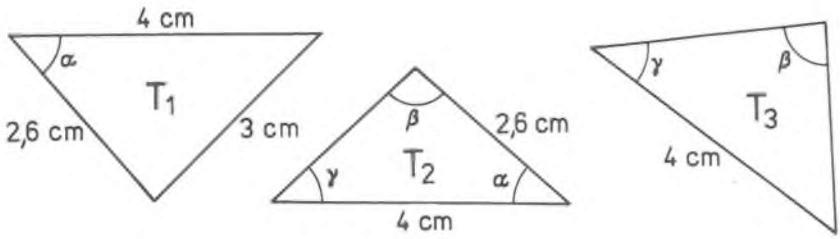
a) $|AB| = 60\,\text{mm}$, $|\sphericalangle CAB| = 56°$, $|\sphericalangle ABC| = 71°$
$|FG| = 60\,\text{mm}$, $|\sphericalangle EFG| = 56°$, $|\sphericalangle FGE| = 71°$

b) $|AC| = 9\,\text{cm}$, $|\sphericalangle CAB| = 80°$, $|\sphericalangle BCA| = 46°$
$|EF| = 9\,\text{cm}$, $|\sphericalangle EFG| = 46°$, $|\sphericalangle FGE| = 54°$

6. Najděte na obrázku všechny dvojice shodných trojúhelníků.

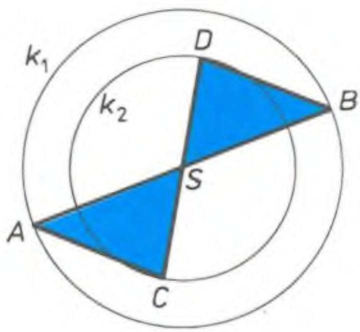


7. Podle které věty jsou shodné trojúhelníky T_1 a T_2? Podle které trojúhelníky T_2 a T_3?



8. Dokažte, že obdélník $ABCD$ je úhlopříčkou BD rozdělen na dva shodné trojúhelníky.

9. Kružnice k_1 a k_2 mají společný střed S. Úsečka AB je průměr kružnice k_1, úsečka CD je průměr kružnice k_2. Rozhodněte, zda jsou vybarvené trojúhelníky shodné. Jestliže ano, jejich shodnost zdůvodněte a zapište.



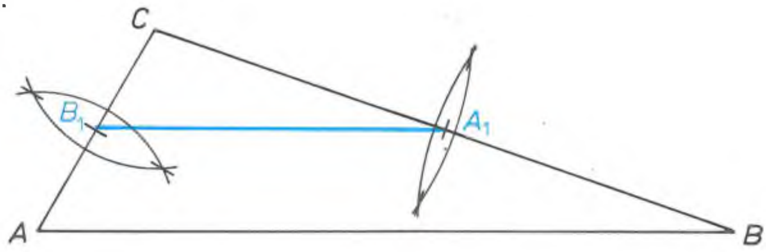
3 STŘEDNÍ PŘÍČKY TROJÚHELNÍKU

Následující kapitoly věnujeme *důležitým úsečkám* v trojúhelníku. Tyto úsečky mají řadu zajímavých vlastností, které budeme postupně objevovat.

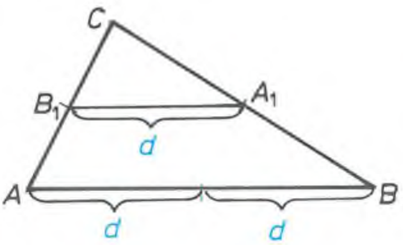
?

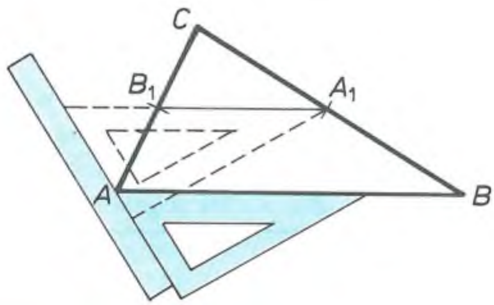
Co je *střední příčka* trojúhelníku?

Na obrázku trojúhelníku ABC je vyznačen střed A_1 strany BC a střed B_1 strany AC. Sestrojená úsečka A_1B_1 se nazývá **střední příčka** trojúhelníku ABC.



Narýsujte si podobný obrázek do sešitu a změřte délku střední příčky A_1B_1. Porovnejte ji s délkou strany AB. Jestliže jste rýsovali a měřili přesně, zjistili jste, že strana AB je dvakrát delší než střední příčka A_1B_1. Zkuste pomocí dvou pravítek odhadnout, jaká je vzájemná poloha přímek AB a A_1B_1.



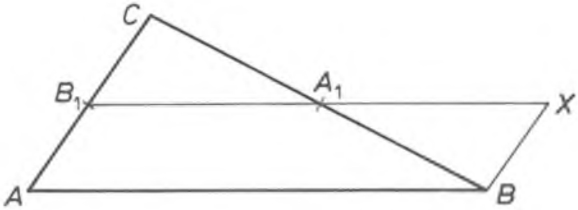


Střední příčka trojúhelníku je úsečka, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s jeho třetí stranou a její délka je rovna polovině délky této strany.

Dokážeme, že střední příčka A_1B_1 trojúhelníku ABC má obě uvedené vlastnosti. K tomu využijeme dva poznatky o *středové souměrnosti*, které už známe:

- souměrně sdružené trojúhelníky jsou shodné
- souměrně sdružené úsečky jsou shodné a rovnoběžné

Abychom dokázali vlastnosti střední příčky A_1B_1, sestrojíme nejprve obraz trojúhelníku A_1B_1C ve středové souměrnosti se středem A_1.



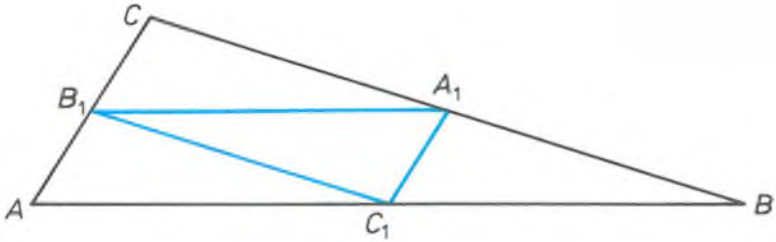
Tímto obrazem je trojúhelník A_1XB. Jak jsme připomněli, platí

$$\triangle A_1B_1C \cong \triangle A_1XB \quad \text{a} \quad B_1C \parallel XB.$$

Protože obě úsečky CB_1 i B_1A leží na jedné přímce, je úsečka BX rovnoběžná s úsečkou B_1A. Navíc mají úsečky BX a B_1A stejnou délku, protože jsou obě shodné s úsečkou B_1C.

Zopakujme si, co všechno jsme zjistili o čtyřúhelníku $ABXB_1$: Jeho protější strany BX a AB_1 jsou rovnoběžné a shodné. O takovém čtyřúhelníku jsme v závěru minulé kapitoly ukázali, že je rovnoběžník. Znamená to, že také protější strany AB a B_1X jsou shodné a rovnoběžné. Odtud plyne, že střední příčka A_1B_1 je rovnoběžná se stranou AB a má poloviční délku než tato strana, neboť bod A_1 je středem úsečky B_1X.

Každý trojúhelník má tři střední příčky.



1. Sestrojte trojúhelník ABC a vyznačte v něm střední příčky, podobně jako je tomu na předchozím obrázku. Vysvětlete, proč platí:

$$\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A_1C_1B_1 \cong \triangle C_1A_1B \cong \triangle B_1CA_1$$

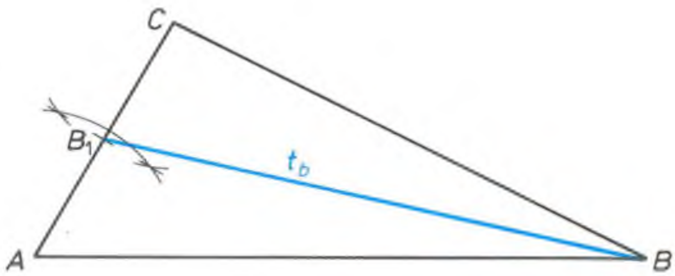
*2. Vysvětlete, proč k danému trojúhelníku $X_1Y_1Z_1$ lze sestrojit jediný trojúhelník XYZ, jehož středními příčkami jsou úsečky X_1Y_1, Y_1Z_1 a Z_1X_1. Popište, jak trojúhelník XYZ sestrojit.

4 TĚŽNICE TROJÚHELNÍKU

Dalšími důležitými úsečkami v trojúhelníku jsou *těžnice.*

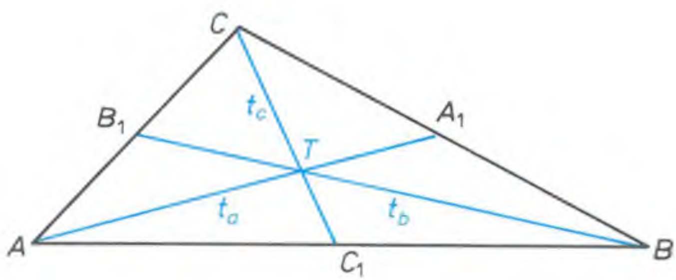
Co je *těžnice* trojúhelníku? ?

Na obrázku trojúhelníku ABC je vyznačen střed B_1 strany AC a úsečka BB_1. Tato úsečka se nazývá **těžnice** procházející vrcholem B (stručně „těžnice z vrcholu B“) trojúhelníku ABC. Často se označuje t_b (čti „té s indexem bé“ či stručně „té bé“). Tomuto označení odpovídá i další možný název „těžnice ke straně b“.



Každý trojúhelník má tři těžnice. Těžnice trojúhelníku ABC značíme t_a, t_b a t_c. Stejně značíme i jejich délky.

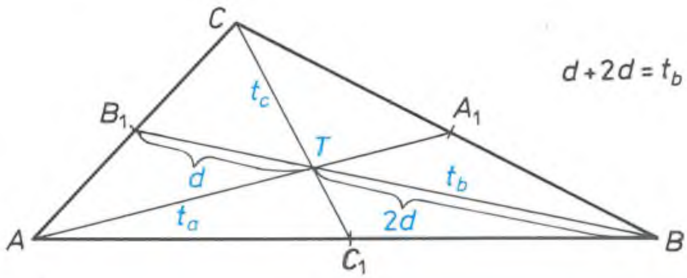
Narýsujte do sešitu trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $a = 6\,\text{cm}$, $b = 3{,}9\,\text{cm}$, $c = 8{,}1\,\text{cm}$. Sestrojte všechny tři jeho těžnice. Pokud budete rýsovat přesně, zjistíte, že se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá **těžiště** trojúhelníku ABC a označuje se písmenem T.



Každá těžnice je bodem T rozdělena na dvě úsečky různých délek. Delší z nich obsahuje vrchol trojúhelníku, kratší střed protější strany. Změřte a zapište délky těžnic i jejich částí do tabulky:

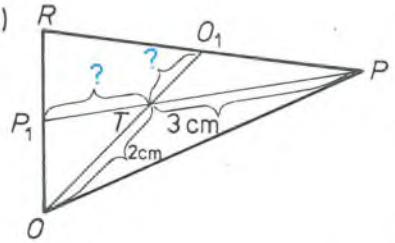
Těžnice	Délka		
	celé těžnice	kratší části	delší části
t_a			
t_b			
t_c			

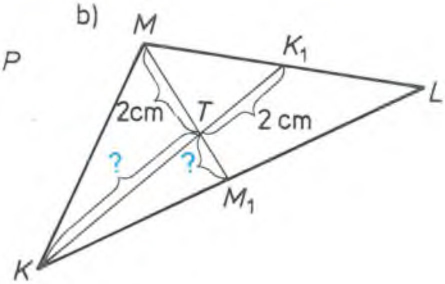
Delší část každé těžnice má **dvojnásobnou** délku než její kratší část.



Těžnice trojúhelníku je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany.
Všechny tři těžnice každého trojúhelníku se protínají v jednom bodě – **těžišti** trojúhelníku. Tento bod dělí těžnici na dvě úsečky. Delší část obsahuje vrchol a je dvakrát delší než kratší část.

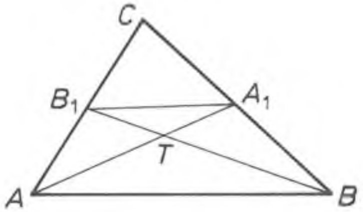
1. Doplňte chybějící údaje u náčrtku trojúhelníku s těžnicemi:

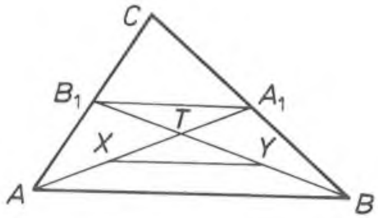
a) 

b) 

Zdůvodníme, proč se těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Na obrázku vlevo je trojúhelník ABC a jeho těžnice $t_a = AA_1$ a $t_b = BB_1$. Tyto těžnice se protínají v bodě T. (Zatím nemůžeme tvrdit, že tímto bodem prochází i těžnice t_c.)





Sestrojíme ještě střední příčku A_1B_1 trojúhelníku ABC a střední příčku XY trojúhelníku ABT (obrázek vpravo). Obě tyto úsečky jsou rovnoběžné se stranou AB a mají poloviční délku než tato strana, proto jsou shodné. Protože jsou i rovnoběžné, jsou podle věty *usu* trojúhelníky A_1B_1T a XYT shodné. Proto platí $|XT| = |TA_1|$ a $|YT| = |TB_1|$.

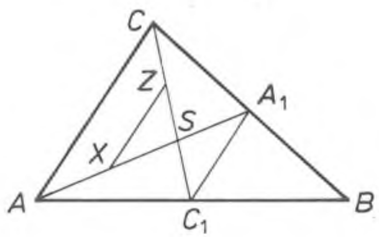
Podívejme se nyní např. na těžnici $t_a = AA_1$. Ta je body X a T rozdělena na tři stejné díly: Víme již, že $|XT| = |TA_1|$; rovnost $|AX| = |XT|$ platí, neboť bod X je v trojúhelníku ABT středem strany AT. Bod T dělí úsečku AA_1 na dvě úsečky AT a TA_1, přitom úsečka AT je dvakrát delší než úsečka TA_1.

Podobné tvrzení platí i o úsečce BB_1.

Tak jsme dokázali tvrzení o dělení těžnic t_a a t_b bodem T.

Jak je dokázat i pro těžnici t_c? Úplně stejnou úvahou o trojúhelnících XZS a A_1C_1S.

Tak navíc také dokážeme, že všechny tři těžnice procházejí jedním bodem, tedy že body T a S splynou: Na úsečce AA_1 existuje totiž *jediný* bod T, pro který platí $|AT| = 2 \cdot |TA_1|$.



Na závěr kapitoly dodejme, že slova *těžnice* a *těžiště* (odvozená od slova *tíha*) označují důležité praktické pojmy, se kterými se seznámíte ve fyzice. Ostatně tvrzení o tom, že těžnice trojúhelníku procházejí jedním bodem, dokázal poprvé řecký učenec *Archimedes* právě úvahou o místě, kde působí tíha tenké trojúhelníkové destičky.

CVIČENÍ 3

1. Sestrojte libovolný tupoúhlý trojúhelník. Narýsujte jeho střední příčky. Ověřte, že trojúhelník je středními příčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, které jsou také tupoúhlé. Dokážete to vysvětlit?

2. Určete délky stran trojúhelníku, znáte-li délky jeho středních příček: 2 cm, 3,5 cm a 3 cm.

3. Délky středních příček trojúhelníku RST jsou 5 cm, 3,4 cm a 6,7 cm. Vypočtěte obvod trojúhelníku RST.

$*$**4.** Zjistěte, zda existuje trojúhelník, jehož dvě strany mají délky 4 cm a 7 cm a střední příčka, která je spojuje, má délku:

a) 1 cm　b) 2 cm　c) 3 cm　d) 4 cm
e) 5 cm　f) 6 cm　g) 7 cm　h) 8 cm

5. Sestrojte libovolný tupoúhlý trojúhelník EFG. Narýsujte jeho těžnice a změřte jejich délky.

6. V trojúhelníku ABC jsme změřili délky stran b, c i všech tří těžnic: $b = 6{,}6$ cm, $c = 8{,}6$ cm, $t_a \doteq 8{,}1$ cm, $t_b \doteq 6{,}2$ cm, $t_c \doteq 6{,}6$ cm. Těžnice se protínají v těžišti T. Určete délky stran

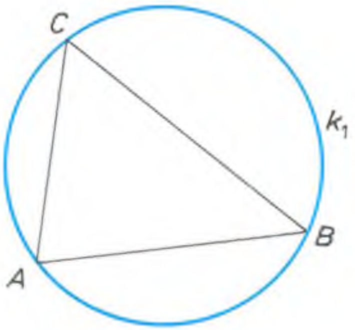
a) trojúhelníku ABT,　b) trojúhelníku ATC.

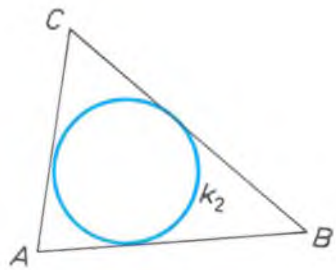
7. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník PQR s přeponou QR. Střed přepony označte S a sestrojte kružnici $k(S; |SP|)$. Budete-li rýsovat přesně, zjistíte, že na kružnici k leží také vrcholy Q a R. Porovnejte délku přepony QR s těžnicí z vrcholu P.

$*$**8.** Sestrojte trojúhelník ABT, je-li $|AB| = 8{,}7$ cm, $|BT| = 5$ cm, $|AT| = 4$ cm. Pak narýsujte trojúhelník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm.

5 KRUŽNICE OPSANÁ A VEPSANÁ

V této kapitole se budeme zabývat *kružnicemi*, které souvisejí s trojúhelníkem. Prohlédněte si následující obrázky:





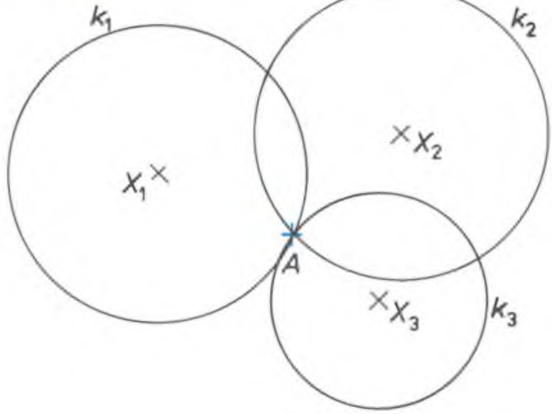
Kružnice k_1 má tu zajímavou vlastnost, že na ní leží všechny tři vrcholy trojúhelníku ABC. Taková kružnice se nazývá **opsaná** trojúhelníku ABC.

Kružnice k_2 leží celá v trojúhelníku ABC a má s jeho obvodem společné právě tři body. Každý z nich leží na jiné straně trojúhelníku ABC. Říkáme, že kružnice k_2 se dotýká každé strany trojúhelníku. Taková kružnice se nazývá **vepsaná** trojúhelníku ABC.

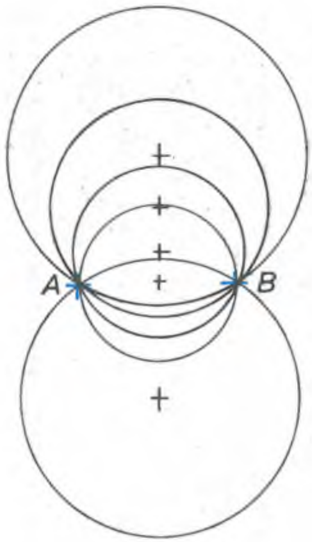
Lze každému trojúhelníku opsat kružnici?

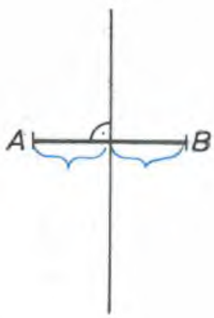
?

Je-li v rovině dán jeden bod A, můžeme sestrojit nekonečně mnoho kružnic, které tímto bodem procházejí. Libovolný bod X roviny různý od bodu A můžeme vybrat za střed kružnice s poloměrem $r = |XA|$. Na této kružnici jistě bod A leží.

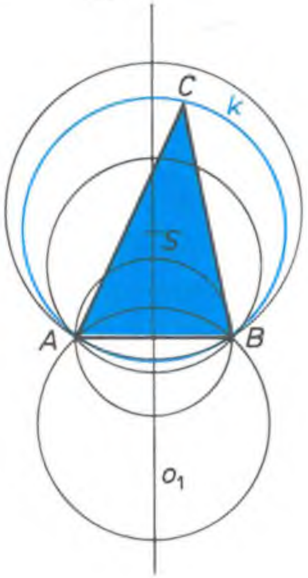


Jsou-li v rovině dány dva různé body A, B, pak také existují kružnice, které těmito dvěma body procházejí. Víme již, že jich je nekonečně mnoho, a známe také množinu, kterou vyplní středy takových kružnic. Protože jsou to právě ty body, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B, je touto množinou *osa úsečky* AB.

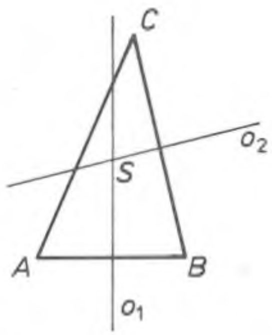




Představme si nyní, že úsečka AB je stranou trojúhelníku ABC. Máme zaručeno, že na některé z kružnic, které procházejí jeho dvěma vrcholy A, B, bude ležet také třetí vrchol C?



Připusťme, že taková kružnice existuje. Podívejme se, kde musí ležet její střed S. Protože bod S má stejnou vzdálenost od bodů A, B, usoudili jsme, že leží na ose o_1 strany AB. Provedeme nyní podobnou úvahu pro vrcholy B a C. Protože bod S má stejnou vzdálenost od bodů B, C, leží také na ose o_2 strany BC.

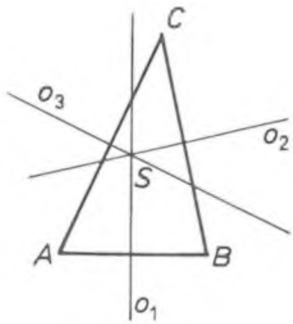


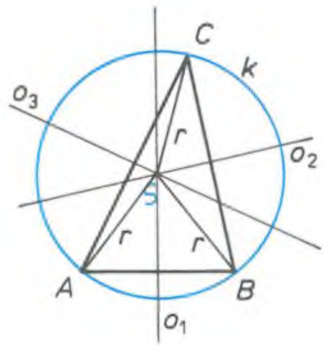
Přímky o_1 a o_2 na obrázku se protínají v bodě S.

Vysvětlíme, proč pro každý trojúhelník ABC jsou přímky o_1 a o_2 různoběžné. Kdyby byly osy o_1 a o_2 rovnoběžné, byly by rovnoběžné i úsečky AB a BC. Všechny tři „vrcholy“ trojúhelníku by ležely v jedné přímce. To však není možné.

Co jsme zjistili o bodu S? Je průsečíkem os stran AB a BC trojúhelníku ABC, takže platí $|AS| = |BS|$ a $|BS| = |CS|$. Odtud plyne $|AS| = |CS|$, tedy bod S leží i na ose o_3 třetí strany AC trojúhelníku ABC (podrobně vysvětlete sami). Osy všech tří stran trojúhelníku ABC se tedy protínají v jediném bodě S.

Sestrojíme-li nyní kružnici k se středem v bodě S a poloměrem $r = |SA|$, bude kružnice k procházet všemi třemi vrcholy A, B i C trojúhelníku ABC.

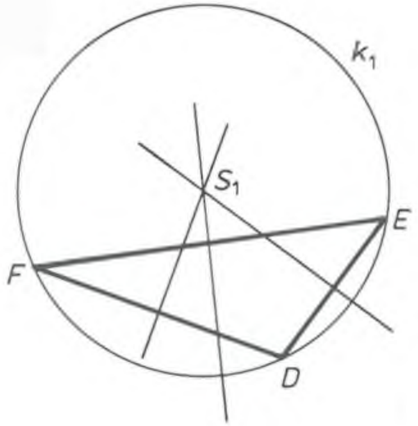


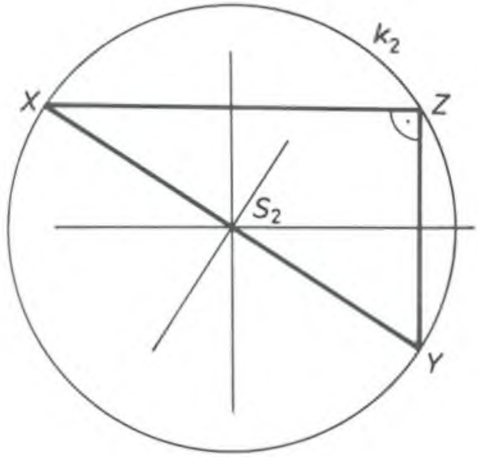


Kružnice, na které leží všechny tři vrcholy trojúhelníku, se nazývá kružnice **opsaná** tomuto trojúhelníku.

Každému trojúhelníku lze opsat jedinou kružnici. Její střed je průsečíkem os stran trojúhelníku. Její poloměr je roven vzdálenosti středu od libovolného vrcholu trojúhelníku.

Na obrázcích si prohlédněte kružnici k_1 opsanou tupoúhlému trojúhelníku DEF a kružnici k_2 opsanou pravoúhlému trojúhelníku XYZ.





Všimněte si, že střed kružnice opsané tupoúhlému trojúhelníku leží vně tohoto trojúhelníku a že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku leží ve středu jeho přepony.

1. Sestrojte trojúhelník ABC se stranami

a) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $b = c = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ b) $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$

a opište mu kružnici.

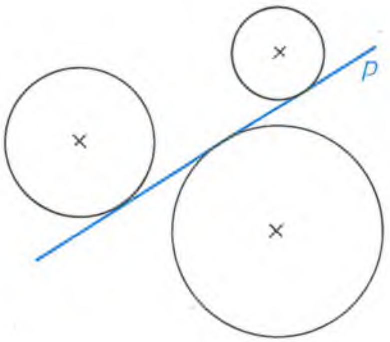
2. Narýsujte trojúhelník, jehož jeden vnitřní úhel měří

a) 95° b) 110° c) 130°

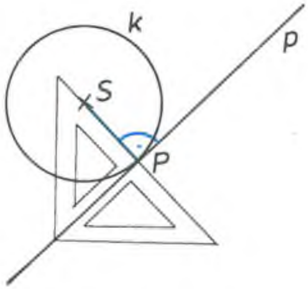
a opište mu kružnici.

? Lze každému trojúhelníku vepsat kružnici?

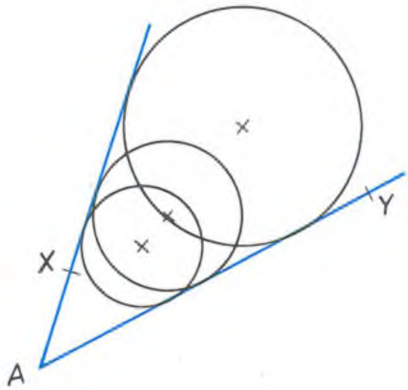
Je-li v rovině dána přímka p, můžeme sestrojit nekonečně mnoho kružnic, které se této přímky ***dotýkají***. Každá z nich má s přímkou p jediný společný bod, kterému říkáme ***bod dotyku***. Za střed takové kružnice můžeme vybrat libovolný bod roviny, který neleží na přímce p. Její poloměr bude roven vzdálenosti tohoto středu od přímky p.

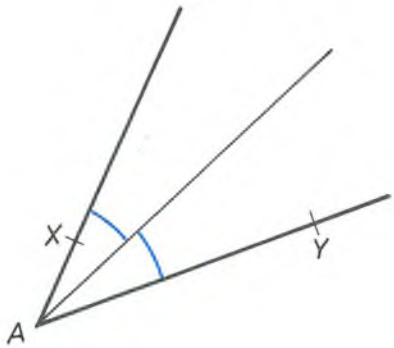


Na obrázku si prohlédněte, jak se prakticky poloměr kružnice k zjišťuje. Sestrojíme patu P kolmice vedené z bodu S k přímce p. Poloměr kružnice k je pak roven délce úsečky SP. Bod P je bodem dotyku kružnice k a přímky p.

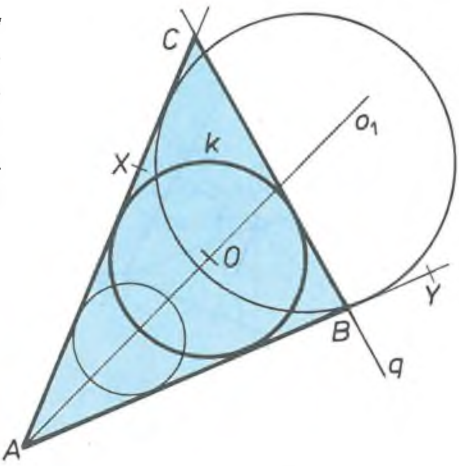


Je-li v rovině dán konvexní úhel XAY, pak je jistě možné sestrojit nekonečně mnoho kružnic, které se dotýkají obou ramen tohoto úhlu. Střed každé takové kružnice má od obou ramen AX a AY stejnou vzdálenost. Proto leží na polopřímce, která je osou úhlu XAY. Platí také naopak, že každý vnitřní bod osy úhlu XAY je středem některé kružnice, která se dotýká obou ramen tohoto úhlu.

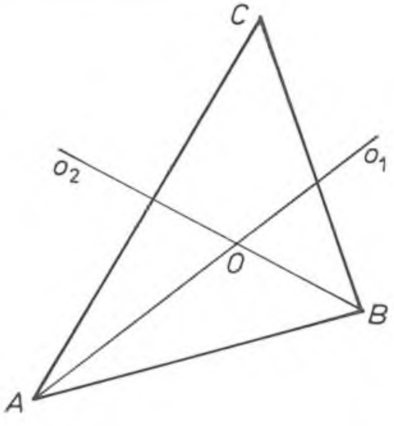


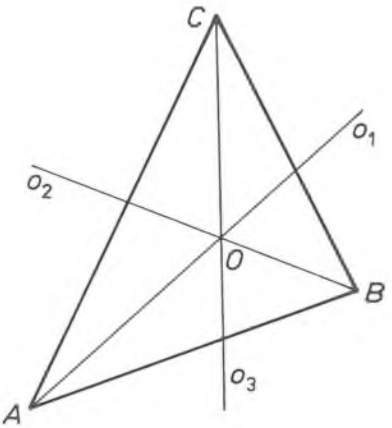


Představme si nyní, že přímkou q „odřízneme“ z úhlu XAY trojúhelník ABC. Máme zaručeno, že některá z kružnic uvnitř trojúhelníku ABC, které se dotýkají ramen úhlu XAY, se bude dotýkat také strany BC?

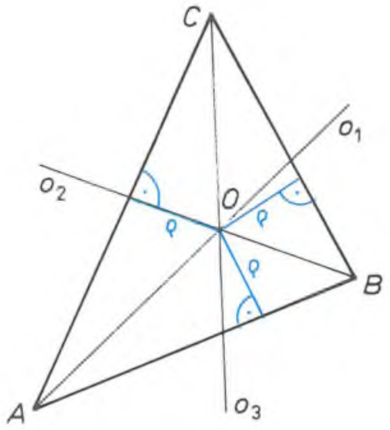


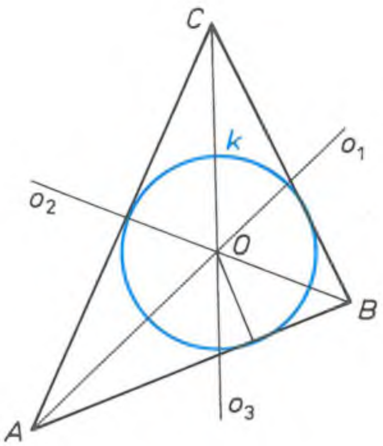
Ukážeme, že právě jedna taková kružnice existuje. Její střed označíme O. Víme již, že bod O leží na ose o_1 úhlu BAC. Má-li se kružnice dotýkat polopřímek BA a BC, musí bod O ležet také na ose o_2 úhlu ABC. Osa o_2 je totiž množinou všech bodů úhlu ABC, které mají stejné vzdálenosti od obou ramen BA, BC . Polopřímky o_1 a o_2 se protínají ve vnitřním bodě O trojúhelníku ABC. Protože vzdálenost bodu O od polopřímek CA a CB je stejná (je rovna vzdálenosti bodu O od strany AB), leží bod O také na ose o_3 úhlu ACB.





Zjistili jsme tedy, že osy všech tří vnitřních úhlů trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě O, který je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníku. Sestrojíme-li kružnici se středem v bodě O a poloměrem ϱ, který je roven vzdálenosti bodu O od libovolné strany trojúhelníku, bude mít tato kružnice s každou stranou trojúhelníku jediný společný bod. Sestrojíme tak kružnici *vepsanou* trojúhelníku ABC.





Kružnice, která se dotýká všech tří stran trojúhelníku, se nazývá kružnice **vepsaná** tomuto trojúhelníku.

Každému trojúhelníku lze vepsat jedinou kružnici. Její střed je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku. Její poloměr je roven vzdálenosti jejího středu od libovolné strany trojúhelníku.

3. Narýsujte trojúhelník TUV, jestliže $|TU| = 6\,\text{cm}$, $|UV| = 7\,\text{cm}$ a $|VT| = 8\,\text{cm}$. Vepište mu kružnici.

4. Narýsujte čtverec $ABCD$ o straně délky 8 cm. Průsečík jeho úhlopříček označte S. Sestrojte kružnice vepsané trojúhelníkům ABS a CDS a kružnice opsané trojúhelníkům BCS a ADS.

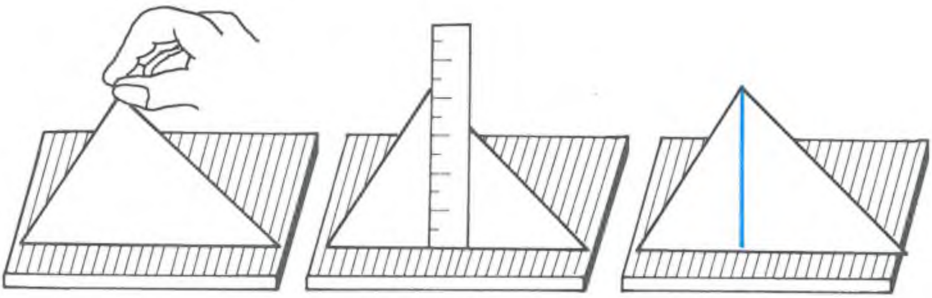
5. Na kružnici $k(S, 2\,\text{cm})$ zvolte tři různé body X, Y, Z tak, aby tvořily vrcholy ostroúhlého trojúhelníku. Sestrojte trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, která se dotýká strany AB v bodě X, strany BC v bodě Y a strany CA v bodě Z.

6 VÝŠKY TROJÚHELNÍKU

Slovo *výška* používáte v běžném životě často. Dobře víte, co je to výška člověka, výška domu, nadmořská výška vrcholu hory apod. V těchto případech je to nějaká, zpravidla *svislá vzdálenost*, která je vyjádřena v určitých jednotkách délky.

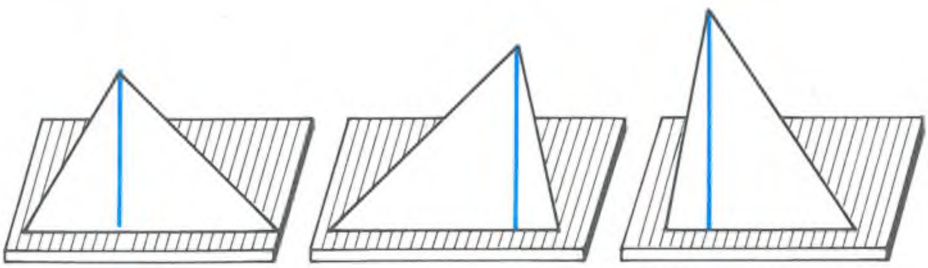
Co je *výška* trojúhelníku?

Zamyslíme se nad tím, jaký význam by mohla mít výška trojúhelníku. Vystřihneme z papíru libovolný trojúhelník a postavíme ho svisle, tj. kolmo na stůl tak, aby se stolu dotýkal jednou svou stranou. Nyní změříme, jak „vysoko“ nad stolem leží protější vrchol. Při tom mohou vzniknout potíže, protože měřítka na pravítku „nezačínají od kraje“. Můžeme si však pomoci tím, že v trojúhelníku narýsujeme úsečku, jejíž délka je rovna neznámé vzdálenosti.



Vyznačená úsečka se nazývá **výška trojúhelníku.**

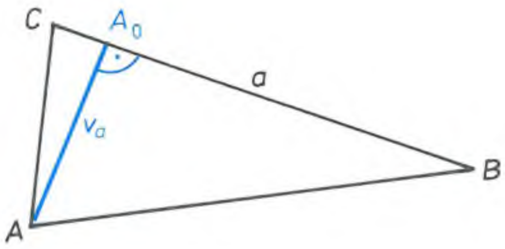
Trojúhelník má **tři** výšky; záleží na tom, kterou stranou ho na stůl postavíme.



Po pokusu s papírovým trojúhelníkem teď popíšeme výšky trojúhelníku přesně. Začneme s ostroúhlým trojúhelníkem.

? Co platí pro výšky v *ostroúhlém* trojúhelníku?

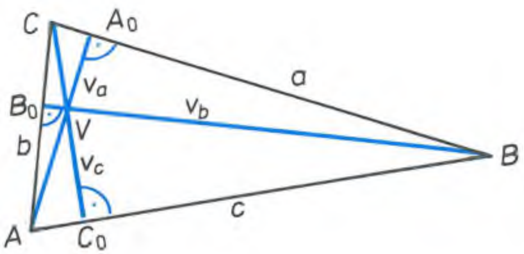
Narýsujte si libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC podobně jako na obrázku. Bodem A veďte kolmici ke straně BC a její patu označte A_0 (čti „á nula“).



Úsečka AA_0 se nazývá **výška příslušná ke straně** a (stručně „výška ke straně a“) trojúhelníku ABC a značí se v_a (čti „vé s indexem á“ či stručně „vé á“).

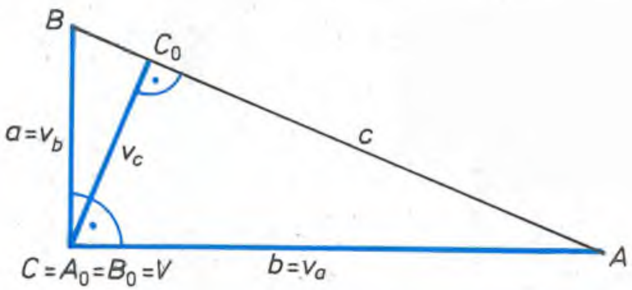
Výškou často rozumíme také *délku* této úsečky.

Sestrojte ještě výšky v_b a v_c příslušné ke stranám b a c. Budete-li rýsovat přesně, zjistíte, že všechny tři výšky se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá **průsečík výšek** trojúhelníku ABC. Zpravidla se značí písmenem V.



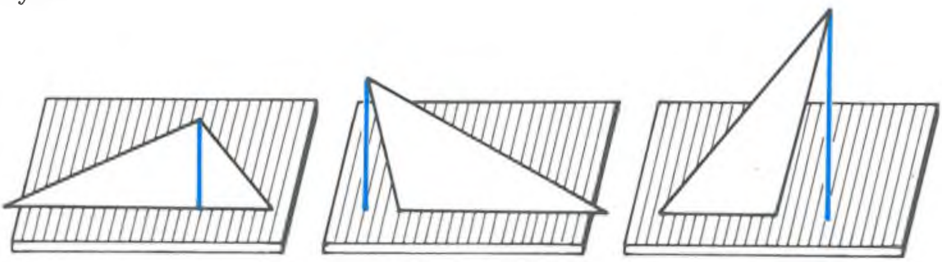
? Co platí pro výšky v *pravoúhlém* trojúhelníku?

Na obrázku pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB jsou vyznačeny jeho výšky. Všimněte si, že výška ke straně BC splývá s odvěsnou AC a výška ke straně AC splývá s odvěsnou BC. Společným bodem všech tří výšek je bod C – vrchol pravého úhlu trojúhelníku ABC.

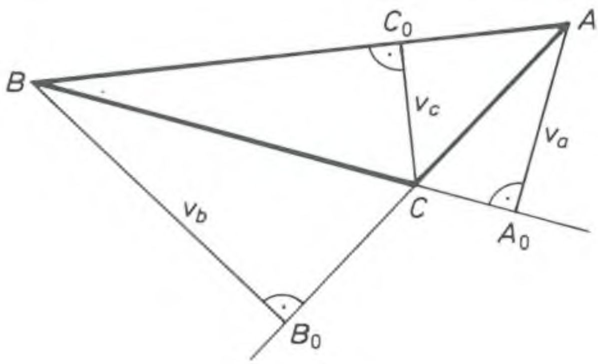


Co platí pro výšky v *tupoúhlém* trojúhelníku?

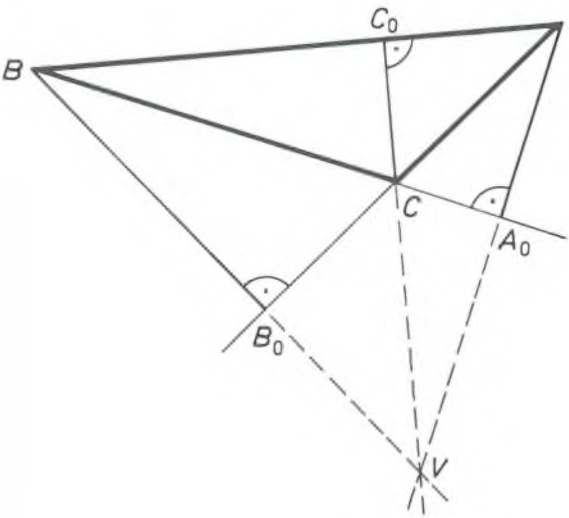
Vystřihněte si z papíru tupoúhlý trojúhelník a zopakujte pokus s hledáním výšek.



Všimněte si, že dvě z výšek nemůžeme do trojúhelníku vyznačit. Abychom je mohli narýsovat, musíme „prodloužit" strany trojúhelníku.



V tupoúhlém trojúhelníku tedy leží dvě z jeho výšek vně trojúhelníku. Jeho tři výšky nemají žádný společný bod. Proložíme-li však každou z výšek přímku, protnou se tyto tři přímky v jediném bodě. Označíme ho V. Také v tomto případě se bod V nazývá *průsečík výšek*.



Výškou trojúhelníku rozumíme úsečku (či *délku* této úsečky), která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené z tohoto vrcholu k přímce, na které leží protější strana.

Každý trojúhelník má tři výšky. Přímky, na kterých tyto výšky leží, se protínají v jediném bodě. Nazýváme ho **průsečíkem výšek**.

Poloha průsečíku výšek V vzhledem k trojúhelníku závisí na druhu trojúhelníku:

- V *ostroúhlém* trojúhelníku je bod V jeho *vnitřním* bodem.
- V *pravoúhlém* trojúhelníku splývá bod V s vrcholem pravého úhlu.
- V *tupoúhlém* trojúhelníku leží bod V vně trojúhelníku.

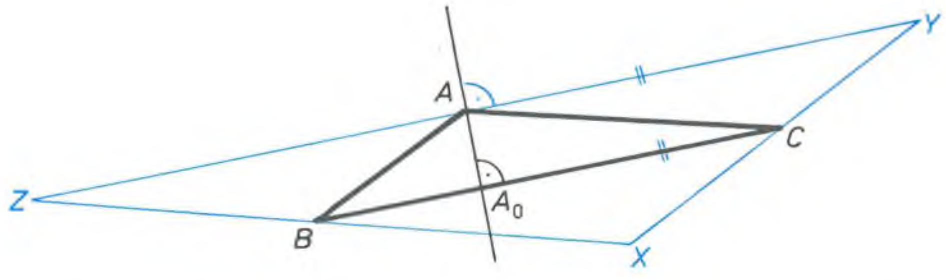
1. Narýsujte libovolný

a) ostroúhlý, b) pravoúhlý, c) tupoúhlý

trojúhelník ABC. Sestrojte jeho výšky a jejich průsečík. Změřte a zapište délky v_a, v_b, v_c.

Tvrzení o tom, že přímky, na kterých leží výšky každého trojúhelníku, se protínají v jednom bodě, jsme zatím uvedli bez důkazu. Podívejme se, jak je možné to dokázat.

Pro libovolný trojúhelník ABC sestrojíme nejprve pomocný trojúhelník XYZ tak, aby bod A byl středem strany YZ, bod B středem strany XZ a bod C středem strany XY. (To, že takový trojúhelník existuje, jsme zdůvodnili ve 2. úloze kapitoly o středních příčkách.)



Protože $BC \parallel YZ$, je výška AA_0 trojúhelníku ABC kolmá nejen ke straně BC, ale i k úsečce YZ, jejímž středem je právě bod A. Proto výška AA_0 leží na přímce, která je osou úsečky YZ. Zopakujeme-li předchozí úvahu i pro výšky ke stranám AB a AC, dostaneme tento výsledek:

Výšky trojúhelníku ABC leží na přímkách, které jsou osami stran trojúhelníku XYZ.

Osy stran trojúhelníku XYZ se protínají v jednom bodě – středu kružnice jemu opsané. Proto přímky, na kterých leží výšky trojúhelníku ABC, se skutečně protínají v jednom bodě.

CVIČENÍ 4

1. Sestrojte libovolný tupoúhlý trojúhelník CDE a opište mu kružnici k.

2. Sestrojte trojúhelník ABC o stranách $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ a $c = 7\,\text{cm}$. Vepište mu kružnici l.

3. Narýsujte přímku p a zvolte na ní dva různé body P, Q. Dále zvolte body C a D uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p. Narýsujte trojúhelníky PQC a PQD a každému z nich vepište kružnici.

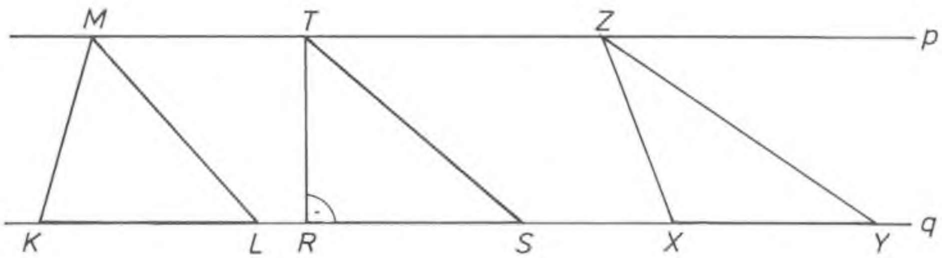
4. Sestrojte trojúhelník ABC o stranách $a = b = c = 6\,\text{cm}$. Opište mu kružnici k a vepište mu kružnici l. Jaká je vzájemná poloha středů obou kružnic?

5. Sestrojte libovolný trojúhelník KLM. Opište mu kružnici k se středem S. Pak sestrojte trojúhelník $K'L'M'$, který je obrazem trojúhelníku KLM ve středové souměrnosti se středem S. Porovnejte kružnice opsané trojúhelníkům KLM a $K'L'M'$.

6. Sestrojte trojúhelník EFG, v němž $|EF| = 6\,\text{cm}$, $|FG| = 8{,}5\,\text{cm}$, $|EG| = 4{,}5\,\text{cm}$. Sestrojte jeho výšky, změřte je a jejich délky zapište.

*7. Narýsujte přímku x, zvolte na ní dva různé body X, Y a mimo přímku x zvolte bod V. Sestrojte takový trojúhelník XYZ, aby bod V byl průsečíkem jeho výšek.

8. Sestrojte dvě rovnoběžky p, q a tři trojúhelníky podobně jako na obrázku. Trojúhelník KLM je ostroúhlý, trojúhelník RST pravoúhlý a trojúhelník XYZ tupoúhlý. Sestrojte jejich výšky příslušné ke stranám, které leží na přímce q. Změřte je a porovnejte jejich délky.



9. Sestrojte libovolný trojúhelník ABC a jeho střední příčky A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1. Vysvětlete, proč výška ke straně BC trojúhelníku ABC je rovnoběžná s výškou ke straně B_1C_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

10. Sestrojte obdélník $ABCD$ o stranách $a = 10\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$. Vyznačte v něm úhlopříčku AC, která ho rozdělí na trojúhelníky ABC a ADC. V trojúhelnících ABC a ADC sestrojte výšky příslušné ke straně AC. Změřte je a jejich délky porovnejte.

11. Sestrojte trojúhelník MNO, jehož všechny tři strany mají délku 7 cm. Narýsujte všechny jeho výšky a těžnice. Co zajímavého jste zjistili?

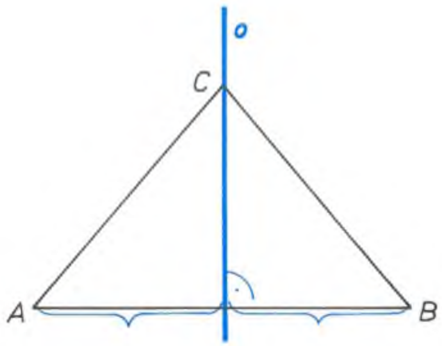
7 OSOVĚ SOUMĚRNÉ TROJÚHELNÍKY

V předchozích kapitolách jsme se dověděli, jaké vlastnosti mají střední příčky, těžnice, výšky, osy stran a úhlů *libovolného* trojúhelníku. Při řešení úloh jste však jistě zpozorovali, že trojúhelníky, které jsou nějak „pravidelné“, mají řadu dalších vlastností, jež „nepravidelné“ trojúhelníky postrádají. Zmíněná „pravidelnost“ spočívá v tom, že takové trojúhelníky jsou *osově souměrné.*

? Které trojúhelníky jsou osově souměrné?

S osově souměrnými útvary jsme se podrobně seznámili v sešitě *Osová a středová souměrnost.* Víme již, že pokud osa souměrnosti trojúhelníku existuje, prochází jedním z jeho vrcholů a zbylé dva vrcholy jsou podle této osy souměrně sdružené.

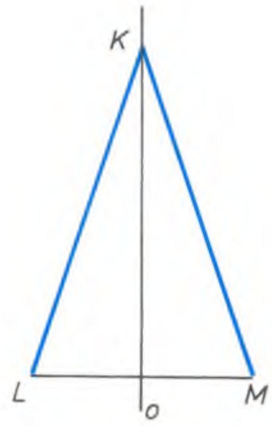
Na obrázku vidíte osově souměrný trojúhelník ABC s osou o, která prochází vrcholem C.



Úsečky AC a BC jsou souměrně sdružené podle osy o, proto mají stejnou délku:

$$|AC| = |BC|$$

Pokud naopak zjistíme, že některý trojúhelník KLM má dvě strany shodné, např. $|KL| = |KM|$, pak je tento trojúhelník osově souměrný (podle osy strany LM). Víme totiž, že osa úsečky LM je množinou *všech* bodů, které mají od jejích krajních bodů L, M stejnou vzdálenost. Proto na ní leží bod K.

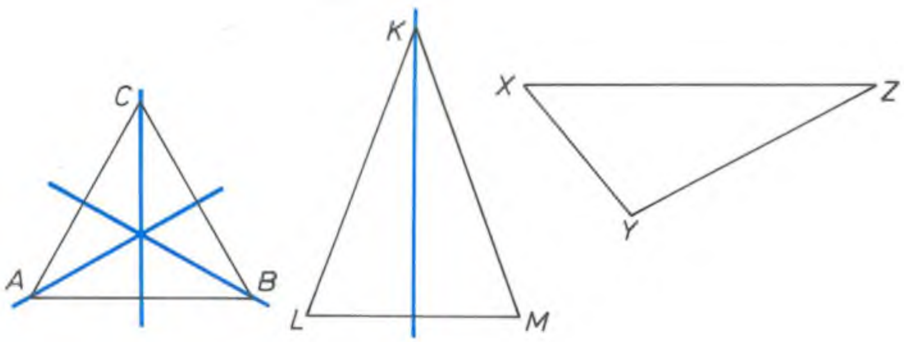


Každý osově souměrný trojúhelník má dvě shodné strany.
Každý trojúhelník, který má dvě shodné strany, je osově souměrný podle přímky, která prochází společným bodem shodných stran a je osou souměrnosti zbývající strany.

Jak třídíme trojúhelníky podle počtu shodných stran?

?

Na obrázku jsou trojúhelníky ABC, KLM a XYZ. Změřte délky jejich stran a zapište je do sešitu.



„Nejpravidelnější" je trojúhelník ABC. Je souměrný podle tří os a všechny tři jeho strany jsou shodné. Trojúhelník ABC je příkladem **rovnostranného** trojúhelníku.

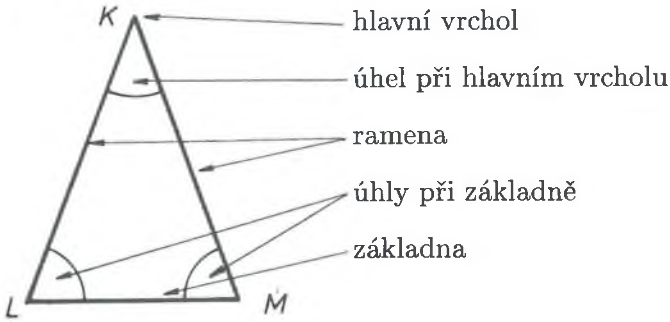
Méně „pravidelný“ je trojúhelník KLM. Je souměrný jen podle jedné osy, má tedy jedinou dvojici shodných stran KL a KM. Je to příklad **rovnoramenného** trojúhelníku.

Trojúhelník XYZ souměrný není. Délky jeho stran jsou různé. Takový trojúhelník se nazývá **různostranný**.

Trojúhelník, který nemá žádné dvě strany shodné, se nazývá **různostranný**.
Trojúhelník, který má některé dvě strany shodné, se nazývá **rovnoramenný**.
Trojúhelník, který má všechny tři strany shodné, se nazývá **rovnostranný**.

? Jak nazýváme strany a úhly rovnoramenného trojúhelníku?

Ještě jednou překreslíme trojúhelník KLM z předchozího obrázku. Jeho strany KL a KM jsou shodné.

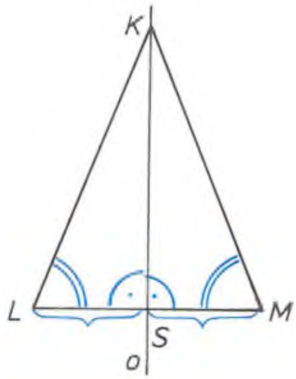


Shodné strany KL a KM se nazývají **ramena** trojúhelníku, zbylá strana LM je jeho **základna**. Vrchol K, ze kterého ramena vycházejí, se nazývá **hlavní vrchol**. Úhly KLM a KML přiléhají k základně, proto jim říkáme **úhly při základně**. Úhel MKL je tzv. **úhel při hlavním vrcholu**.

Jaké vlastnosti má *rovnoramenný* trojúhelník?

?

Na obrázku je nakreslen rovnoramenný trojúhelník KLM s hlavním vrcholem K. Bod S je středem jeho základny LM. Jak již víme, je přímka KS osou souměrnosti tohoto trojúhelníku. Tato přímka rozdělí trojúhelník KLM na dva pravoúhlé trojúhelníky KLS a KMS. Ty jsou souměrně sdružené podle osy KS, proto jsou shodné:

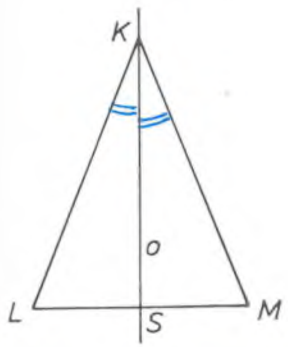


$$\triangle KLS \cong \triangle KMS$$

Z této shodnosti vyplývá shodnost úhlů při základně:

$$|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KML|$$

Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné.



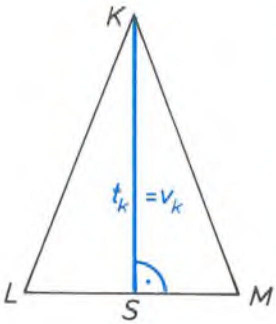
Ze shodnosti trojúhelníků KLS a KMS vyplývá také shodnost odpovídajících si úhlů LKS a MKS:

$$|\sphericalangle LKS| = |\sphericalangle MKS|$$

To však znamená, že polopřímka KS dělí úhel LKM při hlavním vrcholu K na dvě stejné části. Proto je osou tohoto úhlu.

Osa úhlu při hlavním vrcholu rovnoramenného trojúhelníku prochází středem základny a je k základně kolmá.

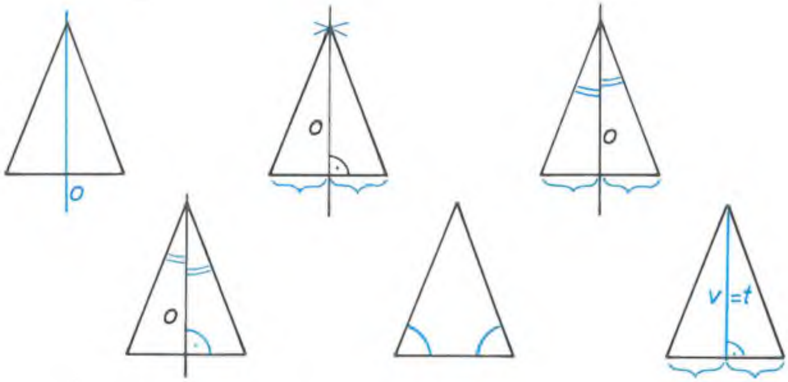
Úsečka KS prochází středem základny LM a je k ní kolmá. Proto je zároveň výškou k základně LM i těžnicí z hlavního vrcholu K.



V rovnoramenném trojúhelníku leží osa úhlu při hlavním vrcholu, výška k základně i těžnice z hlavního vrcholu na jedné přímce. Tato přímka je osou souměrnosti trojúhelníku.

Popsali jsme některé vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku. Platí však i obráceně, že pokud má trojúhelník některou z těchto vlastností, pak je rovnoramenný. Jinými slovy: neexistuje různostranný trojúhelník, který by měl některou z těchto vlastností. Pro přehlednost znaky „rovnoramennosti“ trojúhelníku ještě jednou zopakujeme:

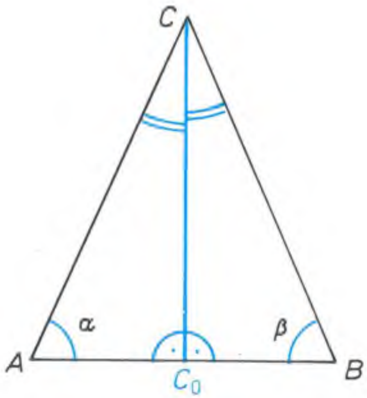
- Trojúhelník je osově souměrný.
- Osa některé strany prochází protějším vrcholem.
- Osa některého vnitřního úhlu prochází středem protější strany.
- Osa některého vnitřního úhlu je kolmá k protější straně.
- Trojúhelník má některé dva úhly shodné.
- Těžnice z některého vrcholu splývá s výškou k protilehlé straně.



První dva znaky jsme zdůvodnili v úvodu této kapitoly. Poslední dva zdůvodníme v následujících příkladech, zbylé dokážete sami ve cvičeních.

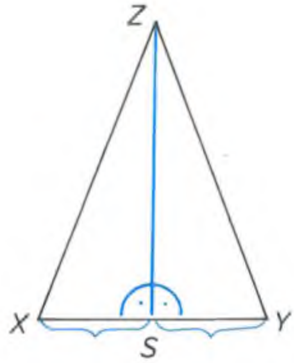
Příklad 1. V trojúhelníku ABC platí $\alpha = \beta$. Vysvětlete, proč ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB.

Řešení. V trojúhelníku ABC sestrojíme výšku CC_0 ke straně AB. Pro vnitřní úhly trojúhelníků AC_0C a BC_0C platí $\alpha = \beta$ a $|\sphericalangle AC_0C| = |\sphericalangle BC_0C| = 90°$, proto i $|\sphericalangle ACC_0| = |\sphericalangle BCC_0|$. Oba trojúhelníky mají společnou stranu CC_0, takže jsou shodné podle věty *usu*. Proto platí také $|AC| = |BC|$, takže trojúhelník ABC je rovnoramenný a strana AB je jeho základnou.



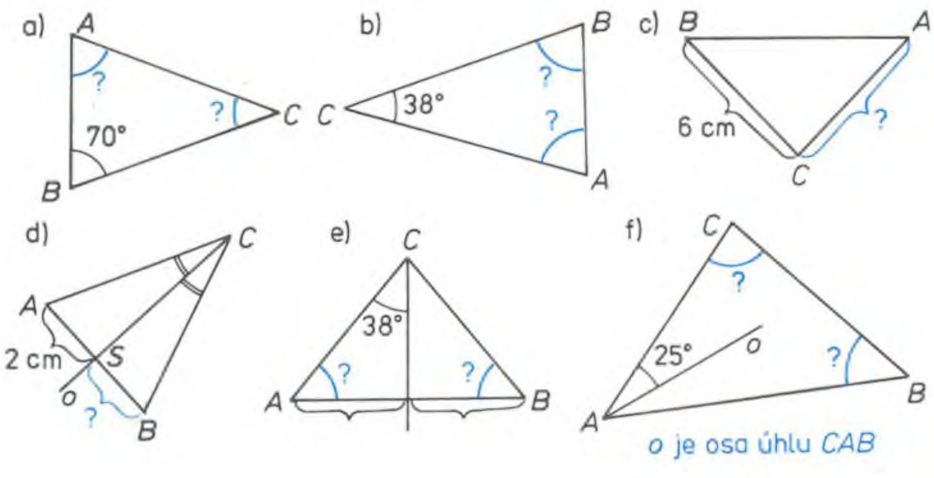
Příklad 2. V trojúhelníku XYZ těžnice z vrcholu Z splývá s výškou ke straně XY. Vysvětlete, proč je XYZ rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem Z.

Řešení. Označme S střed strany XY. Těžnice ZS je podle zadání také výškou trojúhelníku XYZ. Proto je přímka ZS kolmá ke straně XY. Oba úhly XSZ a YSZ jsou pravé, a proto shodné. Trojúhelníky XSZ a YSZ se navíc shodují ve dvou stranách ($|XS| = |YS|$, SZ je společná strana). Podle věty *sus* jsou shodné, takže $|XZ| = |YZ|$.



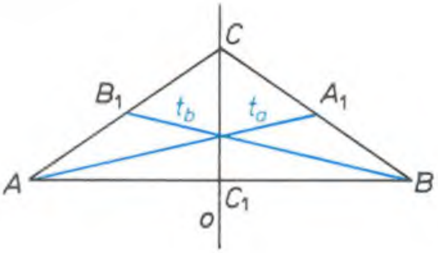
1. V trojúhelníku ABC platí: $\alpha = 40°$, $\beta = 100°$. Je to různostranný trojúhelník?

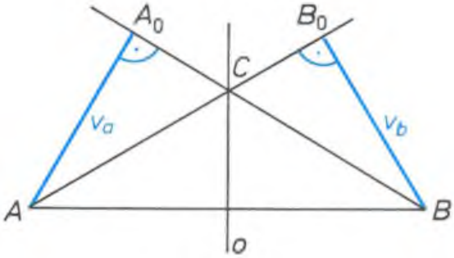
2. U rovnoramenného trojúhelníku ABC s hlavním vrcholem C určete chybějící údaje.



$*$**3.** V trojúhelníku PQR je osa o úhlu PQR kolmá ke straně PR. Dokažte, že trojúhelník PQR je rovnoramenný.

Vysvětlíme nyní, proč každý rovnoramenný trojúhelník má dvě shodné těžnice a dvě shodné výšky. U rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB vyznačíme střed A_1 ramena BC a střed B_1 ramena AC. Protože body A_1 a B_1 jsou souměrně sdružené podle osy o základny AB, jsou souměrně sdružené i úsečky AA_1 a BB_1. To znamená, že těžnice $t_a = AA_1$ a $t_b = BB_1$ jsou shodné (a protínají se na ose o). Podobně se vysvětlí shodnost výšek v_a a v_b.





4. Vysvětlete, proč v každém rovnoramenném trojúhelníku leží těžiště, průsečík výšek, střed kružnice opsané i střed kružnice vepsané na jedné přímce.

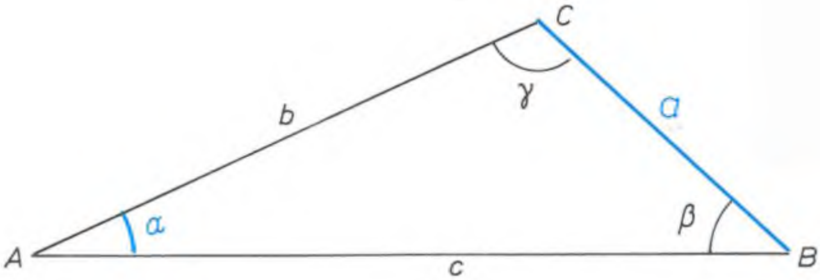
Jaké jsou vztahy mezi stranami a úhly v trojúhelníku?

Strany každého trojúhelníku i jeho vnitřní úhly můžeme uspořádat podle velikosti. Je mezi uspořádáním stran a uspořádáním úhlů nějaká souvislost?

Zopakujme nejdříve, co jsme již zjistili při výkladu o rovnoramenných trojúhelnících:

> V každém trojúhelníku leží proti shodným stranám shodné úhly.
> V každém trojúhelníku leží proti shodným úhlům shodné strany.

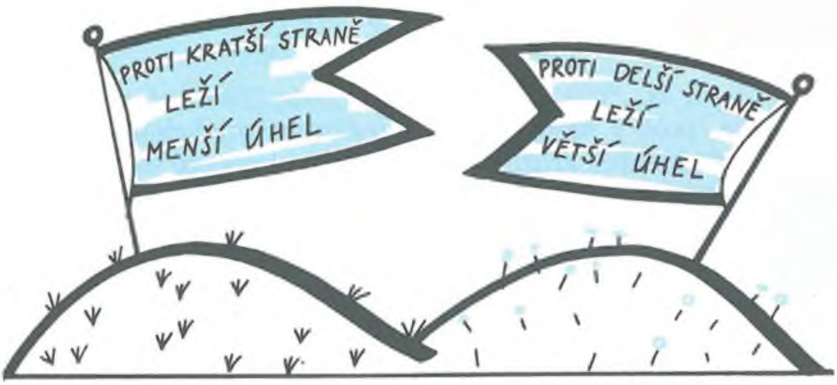
Narýsujte do sešitu trojúhelník ABC tak, aby pro jeho strany platilo $a < b < c$. Změřte velikosti jeho vnitřních úhlů a zapište je. Vyznačte jednou barvou nejdelší stranu a největší úhel, druhou barvou nejkratší stranu a nejmenší úhel.



Ať už jste narýsovali jakýkoli trojúhelník, vyšlo vám:

$$\alpha < \beta < \gamma$$

To znamená, že největší úhel γ leží proti nejdelší straně c. Nejmenší úhel α leží proti nejkratší straně a.



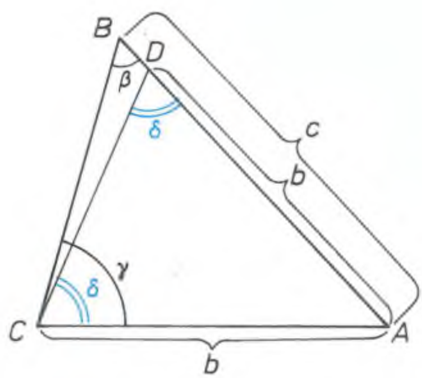
Uvědomte si, že předchozí pravidlo je možné vyslovit i takto:

V každém trojúhelníku leží proti většímu úhlu delší strana, proti menšímu úhlu leží kratší strana.

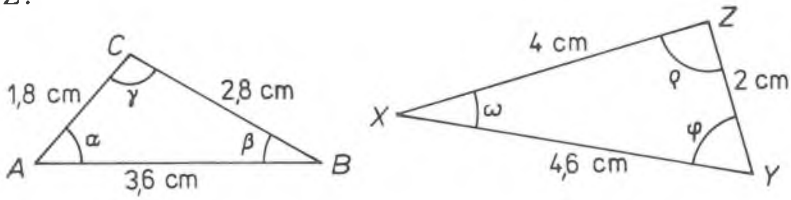
Vysvětlíme, proč v trojúhelníku ABC skutečně platí: Je-li $b < c$, potom $\beta < \gamma$. Na straně AB zvolíme bod D tak, aby $|AD| = |AC|$. (Vysvětlete, proč bod D je vnitřním bodem strany AB.) Tak vznikne rovnoramenný trojúhelník ACD se základnou CD. Vnitřní úhly ACD a ADC trojúhelníku ACD jsou shodné:

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADC| = \delta$$

Úhel ADC je vnějším úhlem trojúhelníku BDC, proto je větší než úhel β (o velikost úhlu BCD). Úhel ACD je jistě menší než úhel γ. Proto platí $\beta < \delta$ a $\delta < \gamma$, takže úhel β je menší než úhel γ.



5. Uspořádejte od nejmenšího k největšímu úhly v trojúhelnících ABC a XYZ.



6. Uspořádejte podle velikosti strany a, b, c trojúhelníku ABC, jestliže pro velikosti jeho vnitřních úhlů platí:

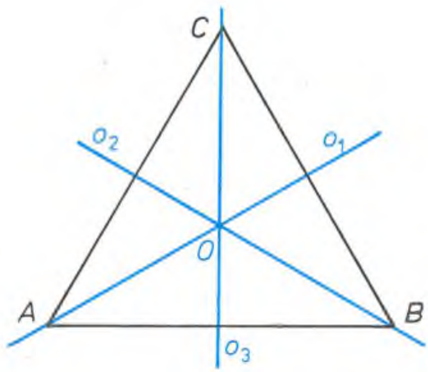
a) $\beta = 42°$, $\gamma = 75°$ b) $\alpha = 16°$, $\beta = 100°$

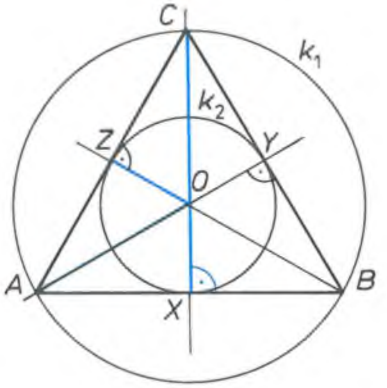
c) $\alpha = 61°$, $\gamma = 59°$ d) $\alpha = 40°$, $\beta = 70°$

7. Úhel při hlavním vrcholu rovnoramenného trojúhelníku má velikost 63°. Rozhodněte, zda je delší rameno nebo základna tohoto trojúhelníku.

Jaké vlastnosti má *rovnostranný* trojúhelník?

Už víme, že trojúhelník, který má tři shodné strany, se nazývá rovnostranný. Každý takový trojúhelník je zároveň rovnoramenný, a to „trojím způsobem“. Má totiž tři osy souměrnosti, takže každou jeho stranu můžeme považovat za základnu a zbylé dvě strany za ramena. Tyto osy jsou osami stran, proto se protínají v jediném bodě O, který je středem kružnice trojúhelníku opsané. Tento bod je však zároveň těžištěm, průsečíkem výšek i středem kružnice vepsané. To plyne z toho, že na osách o_1, o_2, o_3 leží těžnice, výšky i osy vnitřních úhlů trojúhelníku.



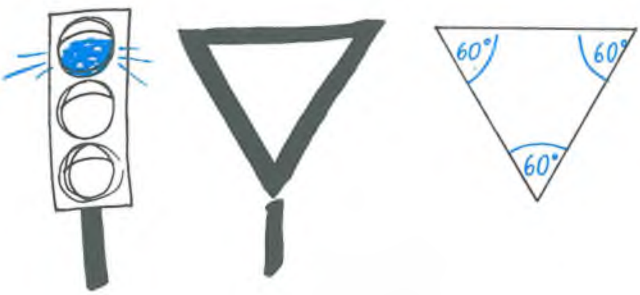


CX je výška ke straně AB
CX je těžnice z vrcholu C
AO je poloměr kružnice opsané
OZ je poloměr kružnice vepsané

Prohlédněte si předchozí obrázek. Je na něm narýsován rovnostranný trojúhelník ABC, jeho těžnice, výšky, kružnice opsaná i kružnice vepsaná. Všimněte si, že kružnice vepsaná se dotýká každé strany trojúhelníku ABC v jejím středu.

Určíme nyní velikosti vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku. Protože v libovolném trojúhelníku leží proti shodným stranám shodné úhly, jsou všechny tři vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku shodné. Velikost každého z nich je proto 60°.

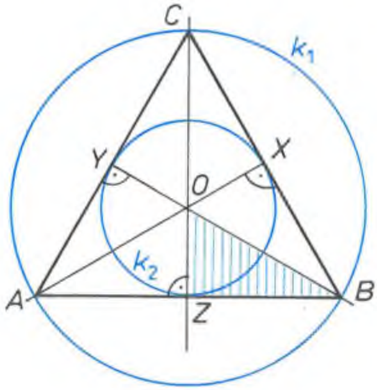
Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku má velikost 60°.



Vyjmenovali jsme několik důležitých vlastností rovnostranného trojúhelníku, které žádný jiný trojúhelník nemá. Ukážeme to na jednom příkladu.

Příklad 3. V trojúhelníku ABC splývá střed kružnice vepsané se středem kružnice opsané. Vysvětlete, proč je trojúhelník ABC rovnostranný.

Řešení. Na obrázku je narýsován trojúhelník ABC s opsanou kružnicí $k_1(O; r)$ a vepsanou kružnicí $k_2(O; \varrho)$. Kružnice k_2 se dotýká stran trojúhelníku v bodech X, Y a Z. Platí rovnosti:



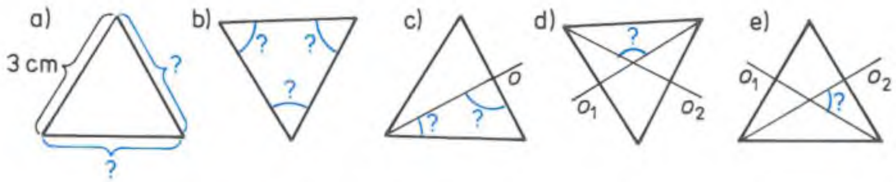
$$|AO| = |BO| = |CO| = r$$
$$|XO| = |YO| = |ZO| = \varrho$$

To znamená, že šest pravoúhlých trojúhelníků AZO, BZO, BXO, CXO, CYO a AYO je shodných podle věty *Ssu*. Proto platí:

$$|AZ| = |BZ| = |BX| = |CX| = |CY| = |AY|$$

Všechny strany trojúhelníku ABC mají tedy stejnou délku $2 \cdot |AZ|$.

8. U rovnostranného trojúhelníku určete chybějící údaje.



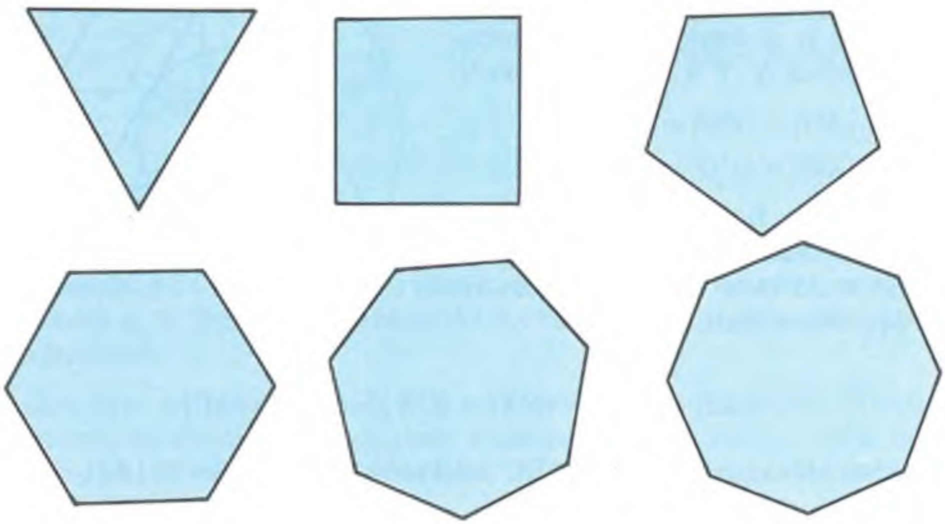
□**9.** Určete obvod trojúhelníku ABC, je-li:
a) $a = b = c = 4\,\text{cm}$ b) $a = b = 4\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$

10. Určete délku strany rovnostranného trojúhelníku s obvodem 33 cm.

∗**11.** Vysvětlete, proč trojúhelník, ve kterém splývá těžiště s průsečíkem výšek, je rovnostranný.

? Co je *pravidelný* mnohoúhelník?

V závěru kapitoly o souměrných trojúhelnících se zmíníme o pravidelných mnohoúhelnících. Prohlédněte si příklady některých z nich na následujících obrázcích:



Pravidelný mnohoúhelník je mnohoúhelník, jehož všechny strany jsou shodné i všechny vnitřní úhly jsou shodné.

Z této charakteristiky vyplývá, že pravidelný trojúhelník znamená totéž co rovnostranný trojúhelník. Správně také tušíte, že pravidelný čtyřúhelník je čtverec.

Naučíme se teď, jak se sestrojí pravidelný šestiúhelník a pravidelný osmiúhelník. Konstrukce pravidelného pětiúhelníku pravítkem a kružítkem, tedy bez použití úhloměru, je složitější, proto se jí zatím nebudeme zabývat.

Jak dokázal německý matematik *K. F. Gauss* (1777–1855), pravidelný sedmiúhelník *nelze* pravítkem a kružítkem *přesně* sestrojit.

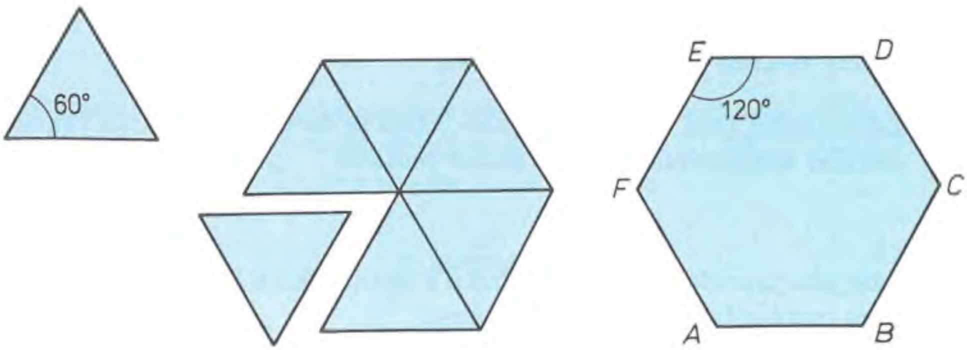
12. Na příkladech vysvětlete, proč neplatí tato tvrzení:

a) Každý mnohoúhelník, který má všechny strany shodné, je pravidelný.

b) Každý mnohoúhelník, který má všechny vnitřní úhly shodné, je pravidelný.

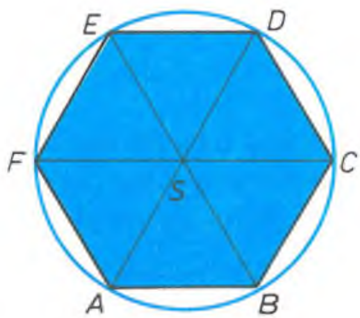
Jak sestrojíme pravidelný šestiúhelník?

Vystřihněte z papíru šest shodných rovnostranných trojúhelníků o straně délky 3 cm a sestavte je do útvaru, který je na obrázku.

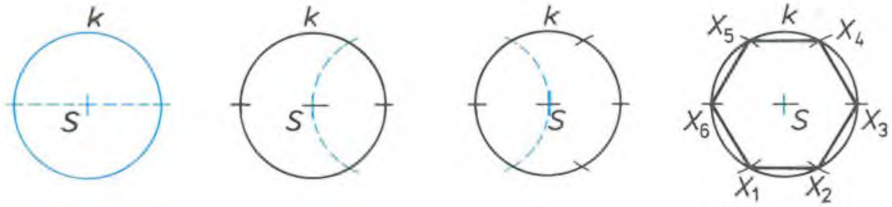


Takovým sjednocením šesti rovnostranných trojúhelníků vznikl šestiúhelník $ABCDEF$, jehož všechny strany jsou shodné. Každý vnitřní úhel tohoto šestiúhelníku vznikl „slepením“ dvou shodných úhlů o velikosti 60°, proto má velikost 120°. Všechny vnitřní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou tedy shodné.

Snadno zdůvodníme, že všechny vrcholy vzniklého pravidelného šestiúhelníku leží na kružnici se středem v bodě S, který je společný všem šesti rovnostranným trojúhelníkům. Všechny úsečky SA, SB, SC, SD, SE i SF jsou stranami shodných rovnostranných trojúhelníků. Proto jsou vzdálenosti všech bodů A, B, C, D, E i F od středu S stejné.



Ukážeme, jak tuto vlastnost využíváme při konstrukci pravidelného šestiúhelníku $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ o straně dané délky, např. 1 cm: Sestrojíme kružnici $k(S; 1\,\text{cm})$ a do ní šestiúhelník „vepíšeme“. Úsporný způsob je patrný z obrázků:



13. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně délky 4 cm a vyznačte všechny jeho osy souměrnosti.

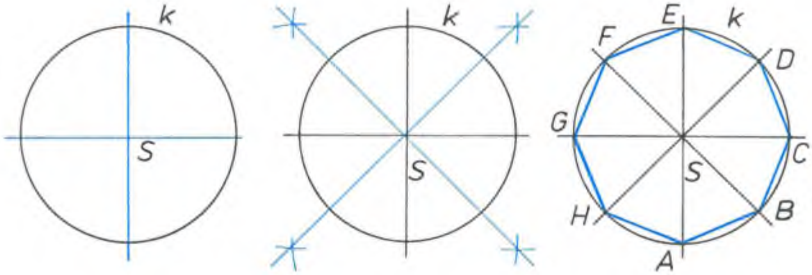
14. Zdůvodněte, proč existuje kružnice, která se dotýká všech stran pravidelného šestiúhelníku, tzv. kružnice *vepsaná*.

Podobně jako pravidelnému trojúhelníku a šestiúhelníku lze i ostatním pravidelným mnohoúhelníkům *opsat* kružnici.

Využijeme toho při konstrukci pravidelného osmiúhelníku.

Jak sestrojíme pravidelný osmiúhelník?

V kružnici $k(S; r)$ sestrojíme dva kolmé průměry. Další dva navzájem kolmé průměry sestrojíme tak, aby ležely na osách pravých úhlů, které svírají již narýsované průměry.



„Sousední" konce průměrů spojíme úsečkami. Vznikne tak osmiúhelník složený z osmi rovnoramenných trojúhelníků ASB, BSC, CSD, DSE, ESF, FSG, GSH, HSA. Ty jsou shodné podle věty *sus*.

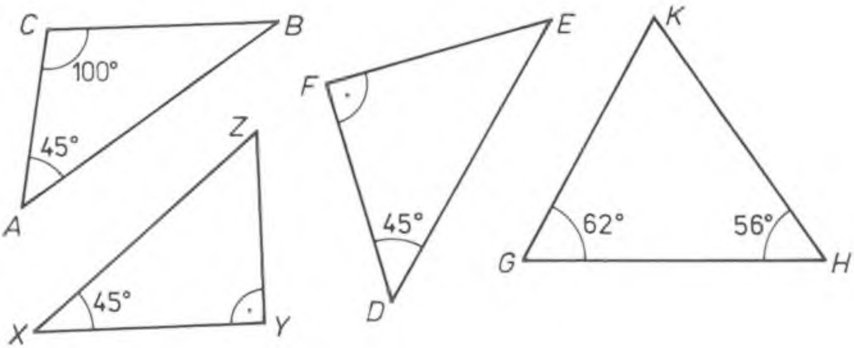
Z této shodnosti plyne, že všechny strany osmiúhelníku mají délku $|AB|$ a všechny jeho vnitřní úhly mají velikost $2 \cdot |\sphericalangle SAB|$. Proto je sestrojený osmiúhelník pravidelný. (Všimněte si, že jsme sestrojili pravidelný osmiúhelník s danou opsanou kružnicí, nikoliv s danou délkou strany.)

15. Sestrojte kružnici k s poloměrem 5 cm. Pak sestrojte pravidelný osmiúhelník tak, aby všechny jeho vrcholy ležely na kružnici k.

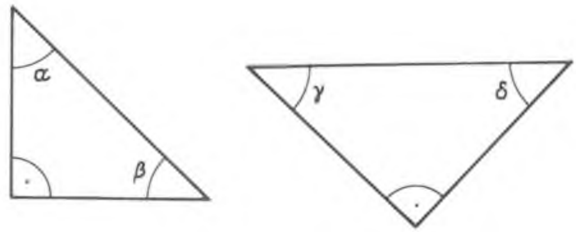
∗ **16.** Navrhněte postup, kterým lze sestrojit pravidelný šestnáctiúhelník, jehož všechny vrcholy leží na dané kružnici k. Pak kružnici k zvolte a takový šestnáctiúhelník sestrojte.

CVIČENÍ 5

1. Které trojúhelníky z náčrtku jsou rovnoramenné?



2. Na obrázku jsou rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Vypočtěte u každého z nich velikosti jeho vnitřních ostrých úhlů.



3. Základna rovnoramenného trojúhelníku má délku 10,2 cm a rameno 7 cm. Vypočítejte jeho obvod.

4. Rovnoramenný trojúhelník má obvod 16 cm. Vypočtěte délky jeho stran, jestliže jeho rameno je o 2 cm delší než základna.

5. Jeden úhel při základně rovnoramenného trojúhelníku má velikost $54°20'$. Určete velikosti jeho zbývajících vnitřních úhlů.

6. Úhel při hlavním vrcholu rovnoramenného trojúhelníku měří $96°$. Určete velikosti úhlů při základně tohoto trojúhelníku.

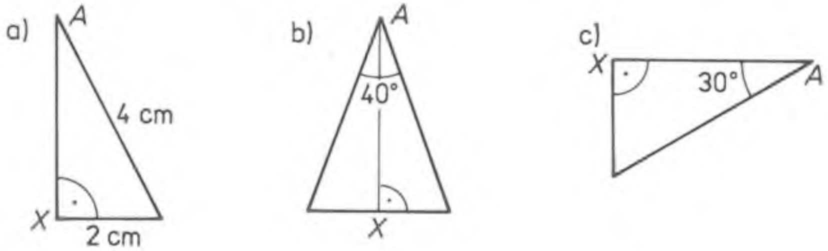
7. Obvod rovnostranného trojúhelníku je 13,2 cm. Sestrojte tento trojúhelník.

8. Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM o straně délky 7 cm a najděte jeho těžiště. Pak sestrojte kružnici k tomuto trojúhelníku vepsanou. Jaká je vzájemná poloha jejího středu a těžiště trojúhelníku KLM?

9. Do kružnice s poloměrem 3,5 cm vepište pravidelný šestiúhelník $PQRSTU$.

10. Sestrojte pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ tak, aby jemu opsaná kružnice měla poloměr 4 cm.

∗11. Načrtněte a vysvětlete, jak lze „doplnit“ trojúhelník na obrázku, aby vznikl rovnostranný trojúhelník ABC s výškou AX.

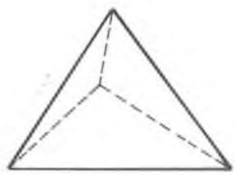


∗12. Vystřihněte z papíru čtyři shodné rovnostranné a čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky. Trojúhelníky z každé čtveřice přiložte k sobě tak, aby vznikly nové trojúhelníky. Ověřte, že první složený trojúhelník je rovnostranný a druhý rovnoramenný. Vysvětlete to pomocí vlastností středních příček.

∗13. V rovnoramenném trojúhelníku EFG se základnou EF jsou sestrojeny osy o_1 a o_2 vnitřních úhlů při vrcholech E a F. Osa o_1 protíná stranu FG v bodě X, osa o_2 protíná stranu EG v bodě Y. Vysvětlete, proč jsou úsečky EX a FY shodné.

∗14. Má-li trojúhelník dvě shodné těžnice, pak je rovnoramenný. Vysvětlete.

■15. Na výkres narýsujte rovnostranný trojúhelník a sestrojte jeho střední příčky. Pak trojúhelník vystřihněte, přeložte podél jeho středních příček a složte z něho těleso, které je na obrázku. (Toto těleso se nazývá *pravidelný čtyřstěn*.)



■16. Pavel narýsoval rovnostranný trojúhelník, opsal a vepsal mu kružnice. Poloměr opsané kružnice označil r, poloměr vepsané kružnice ϱ. Dále narýsoval jednu z výšek trojúhelníku a její délku označil v. Hledal zajímavé vztahy mezi oběma poloměry a délkou výšky. Objevil, že platí

$$\varrho = \tfrac{1}{3} \cdot v, \qquad r = \tfrac{2}{3} \cdot v, \qquad v = \varrho + r.$$

Dokážete tyto rovnosti vysvětlit?

8 KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKU

V předchozích kapitolách jsme se seznámili se základními vlastnostmi trojúhelníků. Nyní podrobně vysvětlíme, jak se trojúhelník sestrojí, známe-li jeho některé strany a vnitřní úhly. Rozlišíme čtyři případy podle toho, zda budou zadány:

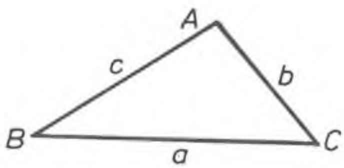
- délky všech tří stran
- délky dvou stran a velikost úhlu, který svírají
- délka strany a velikosti úhlů, které k ní přiléhají
- délka dvou stran a velikost úhlu proti větší z nich

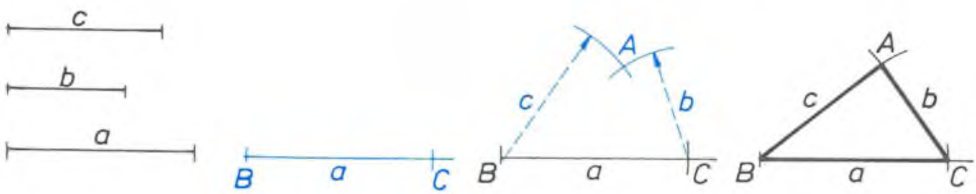
Známé věty o shodnosti trojúhelníků nám zaručují, že všechny trojúhelníky, které vyhovují témuž zadání, jsou shodné.

Podle druhu zadání budeme stručně říkat, že jsme trojúhelník sestrojili podle věty *sss*, *sus*, *usu* nebo *Ssu*.

? Jak sestrojíme trojúhelník podle věty *sss*?

Konstrukci trojúhelníku, jsou-li dány délky všech jeho stran, již znáte. Prohlédněte si ji znovu na obrázcích:





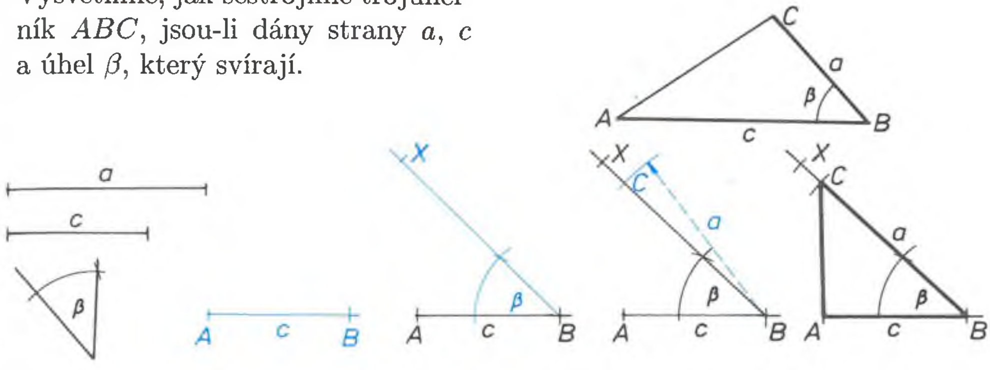
Nejprve jsme narýsovali jednu stranu trojúhelníku a pak jsme určili polohu třetího vrcholu.

Připomeňme, že trojúhelník se stranami a, b, c lze sestrojit jedině tehdy, platí-li trojúhelníkové nerovnosti:

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b$$

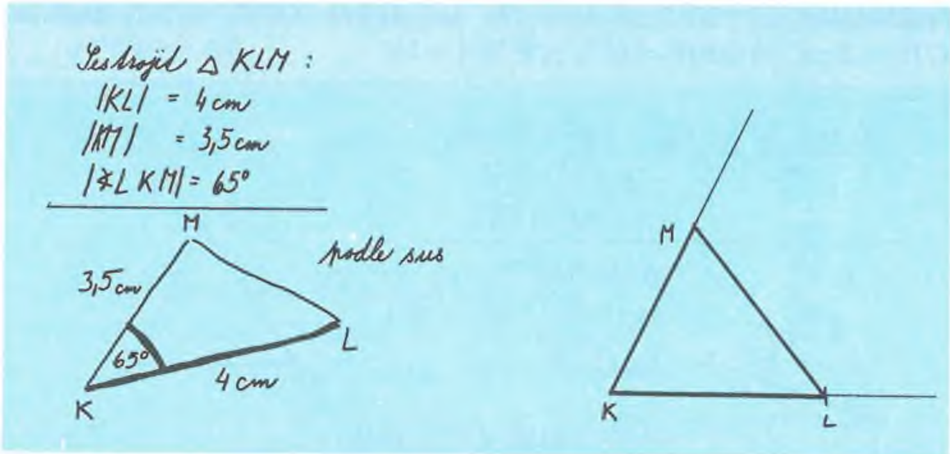
Jak sestrojíme trojúhelník podle věty *sus*?

Vysvětlíme, jak sestrojíme trojúhelník ABC, jsou-li dány strany a, c a úhel β, který svírají.



Nejprve zvolíme polohu úsečky AB délky c, pak sestrojíme úhel ABX velikosti β a na ramenu BX určíme bod C tak, aby $|BC| = a$.

Podívejte se, jak Martin sestrojil trojúhelník KLM.



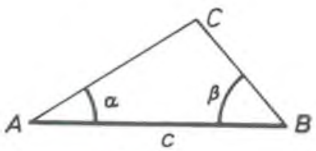
1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník XYZ, jehož základna XY má délku 5 cm a rameno YZ má délku 6 cm.

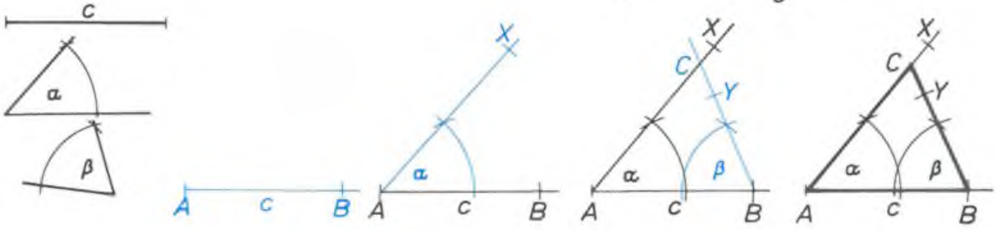
2. Sestrojte trojúhelník PQR, je-li dáno: $|PQ| = 5\,\text{cm}$, $|QR| = 7\,\text{cm}$, $|\sphericalangle PQR| = 105°$

3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník TUV, jehož ramena TU a TV měří 6 cm a úhel při hlavním vrcholu je pravý.

Jak sestrojíme trojúhelník podle věty *usu*?

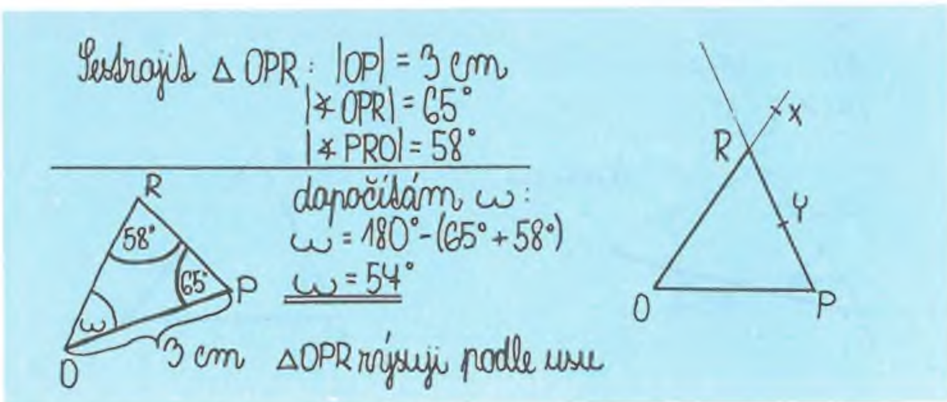
Vysvětlíme, jak sestrojíme trojúhelník ABC, je-li dána strana c a úhly α a β, které k ní přiléhají.





Nejprve narýsujeme stranu AB délky c. Pak polopřímky AX a BY v jedné polorovině s hraniční přímkou AB tak, aby platilo $|\sphericalangle XAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABY| = \beta$. Průsečík polopřímek AX a BY je vrcholem C hledaného trojúhelníku. Polopřímky AX a BY se protínají, jenom když $\alpha + \beta < 180°$.

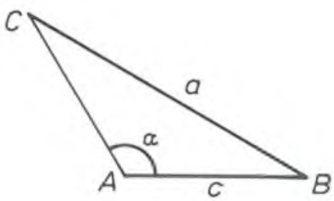
Prohlédněte si, jak Jana sestrojila trojúhelník OPR, bylo-li zadáno: $|OP| = 3\,\text{cm}$, $|\sphericalangle OPR| = 65°$, $|\sphericalangle PRO| = 58°$



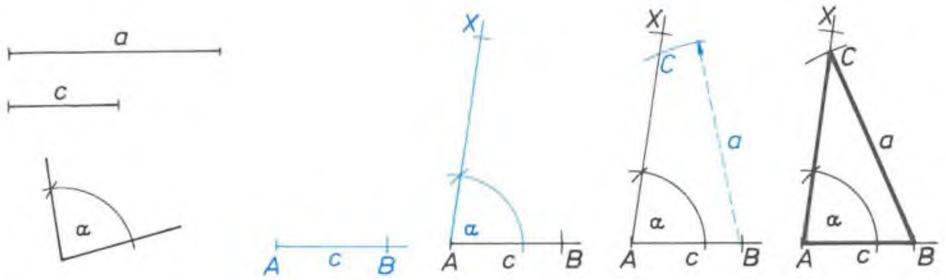
Jak sestrojíme trojúhelník podle věty *Ssu*?

Podle věty *Ssu* můžeme trojúhelník zadat dvěma stranami a úhlem, který leží proti větší z nich.

Jak sestrojíme trojúhelník ABC, je-li dáno a, c, α a přitom $a > c$?



Sestrojíme úsečku AB délky c a polopřímku AX tak, aby $|\sphericalangle XAB| = \alpha$. Vrchol C najdeme jako průsečík polopřímky AX s kružnicí $k(B; a)$.



4. Sestrojte trojúhelník XYZ, je-li dáno: $|XY| = 6,\text{cm}$, $|\sphericalangle ZXY| = 30°$, $|\sphericalangle XYZ| = 75°$

5. Sestrojte trojúhelník DEF, je-li dáno: $|EF| = 5{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle EFD| = 50°$, $|\sphericalangle FDE| = 100°$

6. Sestrojte trojúhelník EFG, je-li dáno: $|EF| = 6{,}5\,\text{cm}$, $|FG| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle FGE| = 60°$

CVIČENÍ 6

1. Sestrojte trojúhelník XYZ, je-li dáno:

a) $|XY| = 6\,\text{cm}$, $|YZ| = 8\,\text{cm}$, $|ZX| = 5{,}5\,\text{cm}$
b) $|XY| = 6\,\text{cm}$, $|YZ| = 8\,\text{cm}$, $|\sphericalangle XYZ| = 60°$
c) $|XY| = 6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ZXY| = 30°$, $|\sphericalangle XYZ| = 60°$
d) $|XY| = 6\,\text{cm}$, $|YZ| = 8\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ZXY| = 60°$

2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník KLM s přeponou KL, jestliže $|KM| = 5\,\text{cm}$ a $|ML| = 5{,}5\,\text{cm}$.

3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník PQR se základnou PQ, je-li:

a) $|PR| = 5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle PRQ| = 50°$ b) $|PR| = 5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle PQR| = 50°$

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li dáno: $|AC| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle CAB| = 30°$

5. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník IJK s hlavním vrcholem I, je-li:
a) $|JK| = 6{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle IJK| = 40°$ b) $|JK| = 6{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle KIJ| = 40°$

6. V rovnoramenném trojúhelníku RST má základna RT délku 6 cm a k ní příslušná výška je 5 cm. Sestrojte tento trojúhelník.

7. V rovnoramenném trojúhelníku RST má rameno ST délku 6 cm a výška k základně RT je 5 cm. Sestrojte tento trojúhelník.

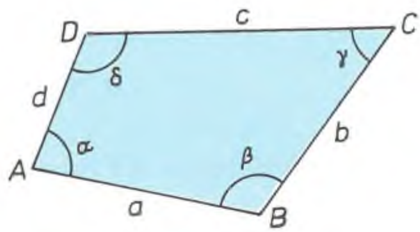
8. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník UVX s přeponou UV délky 5 cm a odvěsnou UX délky 4 cm.

9 ČTYŘÚHELNÍK

Následující kapitoly věnujeme zkoumání rovinných útvarů, které mají čtyři vrcholy, čtyři strany a čtyři vnitřní úhly. Jsou to *čtyřúhelníky*, o nichž již něco víte. Nejprve si však základní poznatky stručně připomeneme.

?

Co víme o čtyřúhelníku?
Na obrázku je vybarvena množina bodů v rovině, která je ohraničena úsečkami AB, BC, CD a DA. Říkáme jí čtyřúhelník $ABCD$.



Připomeňme si, co u čtyřúhelníku pojmenováváme:

body A, B, C, D	**vrcholy** čtyřúhelníku $ABCD$
úsečky AB, BC, CD, DA	**strany** čtyřúhelníku $ABCD$
úhly DAB, ABC, BCD, CDA	**vnitřní úhly** čtyřúhelníku $ABCD$

Strany čtyřúhelníku $ABCD$ označujeme také malými písmeny:

$$a = AB, \quad b = BC, \quad c = CD, \quad d = DA$$

Podle toho, zda dvě strany čtyřúhelníku mají společný vrchol či nikoli, nazývají se *sousední*, nebo *protější*. Například strany a, b jsou sousední, strany a, c protější. Krajní body téže strany se nazývají *sousední* vrcholy. Vrcholy, které nejsou sousední, se nazývají *protější*.

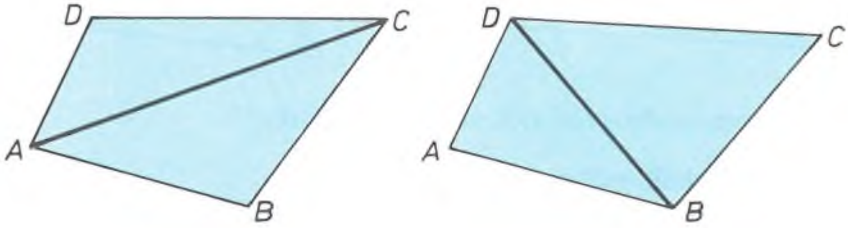
Vnitřní úhly čtyřúhelníku $ABCD$ značíme řeckými písmeny:

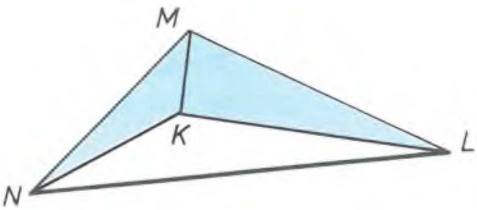
$$\alpha = \sphericalangle DAB, \quad \beta = \sphericalangle ABC, \quad \gamma = \sphericalangle BCD, \quad \delta = \sphericalangle CDA$$

Úhly α a β jsou příkladem *sousedních* úhlů, úhly β a δ příkladem *protějších úhlů* čtyřúhelníku.

Podobně jako u trojúhelníků malými písmeny $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ značíme nejen strany a úhly čtyřúhelníků, ale i jejich délky a velikosti (např. $a = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle DAB|$). Často mluvíme o *součtu* vnitřních *úhlů* čtyřúhelníku, i když máme na mysli *součet* jejich *velikostí*.

Úsečky, které spojují protější vrcholy čtyřúhelníku, se nazývají *úhlopříčky*. Čtyřúhelník $ABCD$ má dvě úhlopříčky AC a BD. Úhlopříčka AC rozděluje čtyřúhelník $ABCD$ na dva trojúhelníky ABC a ACD, úhlopříčka BD na trojúhelníky ABD a BCD.





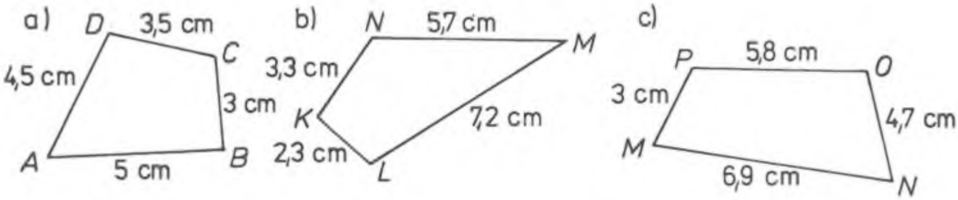
Čtyřúhelník $KLMN$ z vedlejšího obrázku lze na trojúhelníky rozdělit jediným způsobem – podél úhlopříčky KM. Úhlopříčka LN leží „vně“ tohoto čtyřúhelníku. Vnitřní úhel LKN je nekonvexní. Čtyřúhelník $KLMN$ je příkladem čtyřúhelníků, které se nazývají *nekonvexní*. Dále se jimi nebudeme zabývat.

? Co je *obvod* čtyřúhelníku?

Každý čtyřúhelník je ohraničen svými čtyřmi stranami. Součet jejich délek se nazývá *obvod čtyřúhelníku.* Používá se pro něj značka o. Pro obvod o čtyřúhelníku $ABCD$ platí:

$$o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = a + b + c + d$$

1. Určete obvod čtyřúhelníku z náčrtku:

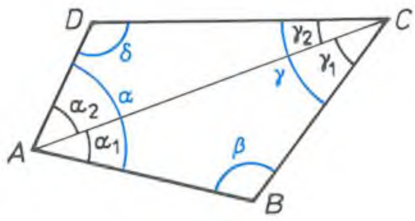


2. Určete délky všech stran čtyřúhelníku $KLMN$, je-li jeho obvod 28 cm a strana KL má poloviční délku než každá ze zbývajících stran.

3. Narýsujte libovolný čtyřúhelník $RSTU$. Změřte velikosti jeho vnitřních úhlů a zapište je. Vypočtěte jejich součet.

? Čemu je roven součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku?

Každý čtyřúhelník můžeme úhlopříčkou rozdělit na dva trojúhelníky. Na obrázku je čtyřúhelník $ABCD$ rozdělen úhlopříčkou AC na trojúhelníky ABC a ACD. Jejich vnitřní úhly označíme podle obrázku.



V trojúhelníku ABC platí

$$\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°,$$

v trojúhelníku ACD platí

$$\alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180°.$$

Sečtením dostaneme

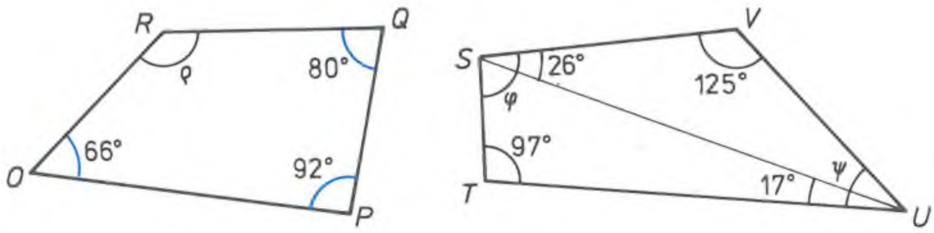
$$\alpha_1 + \beta + \gamma_1 + \alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 360°.$$

Protože $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ a $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, můžeme psát

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$

Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je roven 360°.

4. Určete velikosti vyznačených úhlů ϱ, φ a ψ:



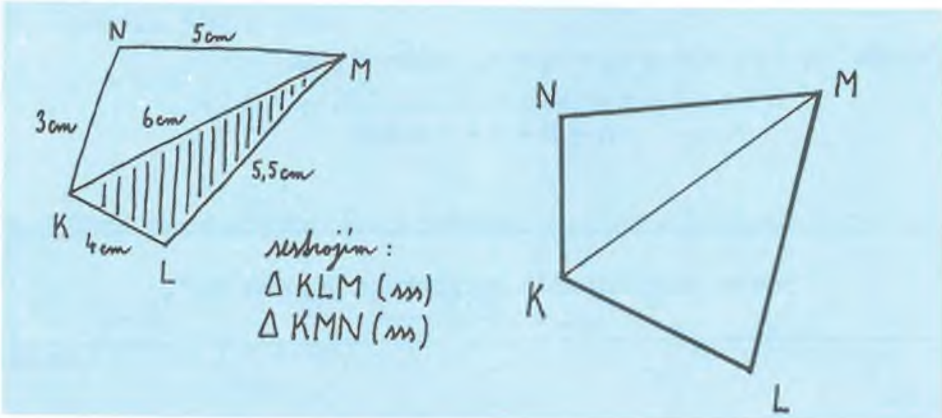
Jak sestrojíme čtyřúhelník?

?

Čtyřúhelník můžeme určit mnoha způsoby. Například tak, že zadáme délky některých stran nebo úhlopříček či velikosti některých vnitřních úhlů (zpravidla *pět* údajů). V tomto sešitě uvedeme jen několik jednodušších konstrukcí čtyřúhelníku. Budou založeny na rozdělení čtyřúhelníku úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Tyto trojúhelníky sestrojíme podle známých vět.

Příklad 1. Sestrojte čtyřúhelník $KLMN$, je-li dáno: $|KL| = 4\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $|MN| = 5\,\mathrm{cm}$, $|NK| = 3\,\mathrm{cm}$, $|KM| = 6\,\mathrm{cm}$

Řešení z Michalova sešitu:



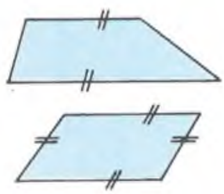
5. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 5\,\mathrm{cm}$, $|DA| = 6\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 90°$

10 LICHOBĚŽNÍK

Některé čtyřúhelníky mají zajímavý tvar, takže je snadno rozeznáme na první pohled. To tehdy, jsou-li některé jejich strany rovnoběžné nebo kolmé. Pro takové čtyřúhelníky máme zvláštní názvy – např. rovnoběžník, čtverec, obdélník, lichoběžník, které jste již určitě slyšeli. Budeme je nyní podrobně zkoumat. Nejprve rozlišíme čtyřúhelníky podle toho, jsou-li jejich protější strany rovnoběžné.

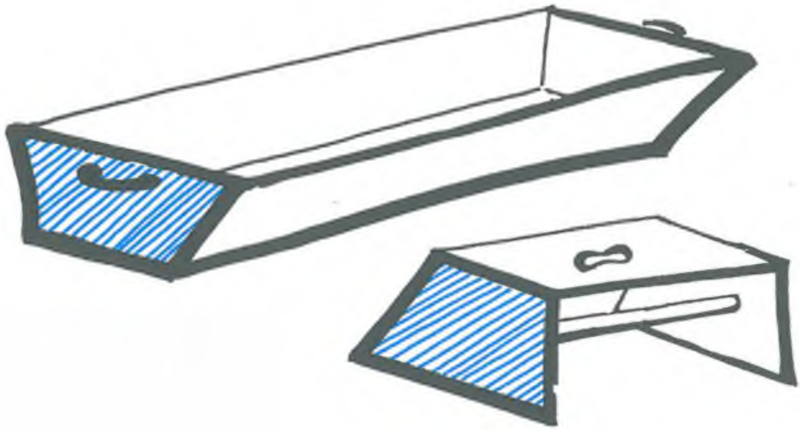
? Jak třídíme čtyřúhelníky podle polohy protějších stran?

Jsou-li některé dvě protější strany čtyřúhelníku rovnoběžné, pak můžeme čtyřúhelník zařadit do jedné ze dvou skupin:



- Má-li jedinou dvojici rovnoběžných protějších stran, nazývá se *lichoběžník*.
- Má-li dvě dvojice rovnoběžných protějších stran, nazývá se *rovnoběžník*.

Nejprve se budeme zabývat lichoběžníky. Prohlédněte si jejich příklady na obrázku.

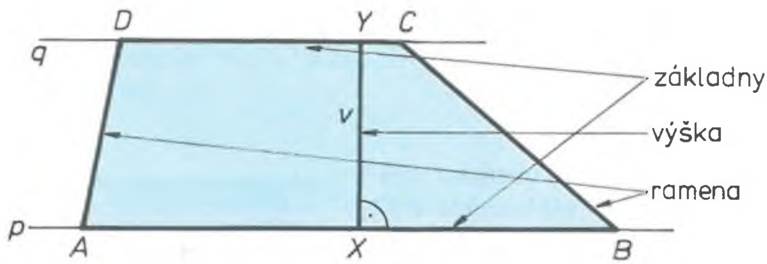


Čtyřúhelník, který má právě jednu dvojici rovnoběžných protějších stran, se nazývá **lichoběžník**.

Co pojmenováváme v lichoběžníku?

?

Na obrázku je nakreslen lichoběžník $ABCD$.

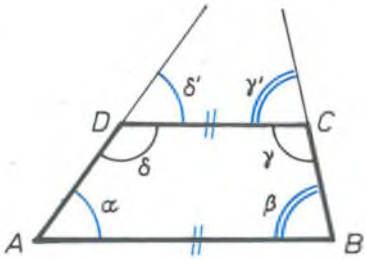


Narýsujte si podobný lichoběžník do sešitu. Postupujte například takto: Nejprve sestrojte dvě rovnoběžné přímky p a q a pak zvolte vrcholy A, B na přímce p a vrcholy D, C na přímce q. Nakonec doplňte zbývající strany AD a BC. Ty však nesmějí být rovnoběžné.

Rovnoběžné strany AB a CD se nazývají **základny** lichoběžníku $ABCD$, strany AD a BC **ramena**. Vzdálenost přímek p a q se nazývá **výška** lichoběžníku. Každý lichoběžník má jedinou výšku. Vzdálenost přímek p a q však můžeme vyznačit nekonečně mnoha úsečkami. Na našem obrázku je jedna z nich – úsečka XY.

? Jaké vlastnosti má lichoběžník?

Na obrázku lichoběžníku $ABCD$ jsou „prodloužena" jeho ramena AD a BC a vyznačeny úhly δ' a γ'. Protože základny AB a CD lichoběžníku $ABCD$ jsou rovnoběžné, jsou souhlasné úhly α a δ' shodné. Podobně jsou shodné i úhly β a γ'. Úhly δ, δ' i γ, γ' jsou vedlejší:



$$\delta + \delta' = 180°, \qquad \gamma + \gamma' = 180°$$

Proto pro úhly α, δ u ramena AD i pro úhly β, γ u ramena BC platí:

$$\alpha + \delta = 180°, \qquad \beta + \gamma = 180°$$

Součet velikostí vnitřních úhlů u téhož ramena lichoběžníku je roven 180°.

? Co je *pravoúhlý* lichoběžník?

Lichoběžník $EFGH$ na obrázku má rameno EH kolmé k základnám EF a GH. Je příkladem **pravoúhlého lichoběžníku**.

Co je *rovnoramenný* lichoběžník? ?

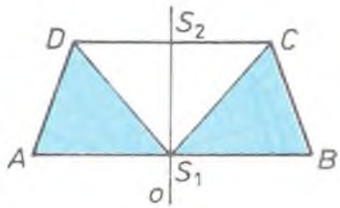
Lichoběžník, jehož ramena jsou shodná, se nazývá **rovnoramenný**. Prohlédněte si rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ na obrázku.

Jsou na něm navíc narýsovány úsečky DX a CY kolmé k oběma základnám. Obě úsečky jsou shodné, neboť délka každé z nich je rovna výšce lichoběžníku $ABCD$. Tyto úsečky dělí lichoběžník na obdélník (nebo čtverec) $XYCD$ a dva pravoúhlé trojúhelníky AXD a BYC, které jsou shodné podle věty *Ssu* (podrobně vysvětlete sami). Proto platí

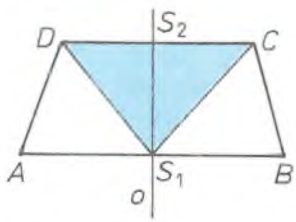
$$|\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle CBY| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BCD|.$$

Úhly při každé základně rovnoramenného lichoběžníku jsou shodné.

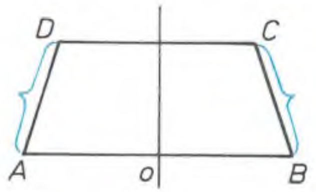
Sestrojme nyní přímku o, která prochází středem S_1 základny AB, i středem S_2 základny CD rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$. Trojúhelníky AS_1D a BS_1C jsou shodné podle věty *sus*.



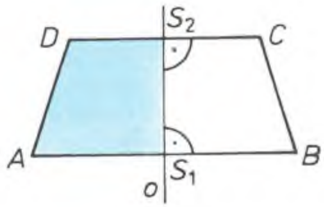
Proto $|CS_1| = |DS_1|$ a také trojúhelníky DS_1S_2 a CS_1S_2 jsou shodné, tentokrát podle věty *sss*. Platí tedy $|\sphericalangle DS_2S_1| = |\sphericalangle CS_2S_1| = 180° : 2 = 90°$, proto je přímka o k oběma základnám kolmá.



Přímka o je společnou osou úseček AB a CD, takže ramena AD a BC jsou podle ní souměrně sdružená. Přímka o je jedinou osou souměrnosti lichoběžníku $ABCD$.

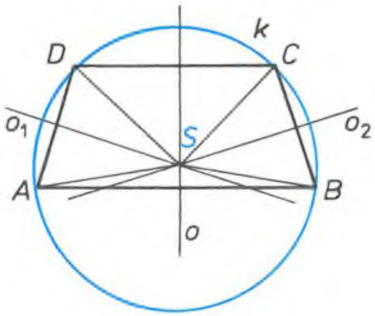


Osa souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku ho dělí na dva shodné pravoúhlé lichoběžníky.



Rovnoramenný lichoběžník je souměrný podle osy, která prochází středy jeho základen.

Souměrnost rovnoramenného lichoběžníku využijeme při zdůvodnění toho, že existuje kružnice, na které leží všechny čtyři jeho vrcholy. Načrtněme rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ a jeho osu souměrnosti o. Protože obrazem ramena AD v osové souměrnosti s osou o je rameno BC, je také obrazem osy o_1 úsečky AD osa o_2 úsečky BC. Souměrně sdružené přímky o_1 a o_2 se protínají v bodě S, který leží na přímce o. Protože $S \in o_1$, platí $|SA| = |SD|$. Podobně z toho, že $S \in o_2$, plyne $|SB| = |SC|$. Konečně z toho, že $S \in o$, vyplývá $|SA| = |SB|$. Platí tedy $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$, takže bod S má stejnou vzdálenost od všech vrcholů lichoběžníku $ABCD$. Proto body A, B, C, D leží na kružnici $k(S; |SA|)$. Říkáme jí kružnice *opsaná* lichoběžníku $ABCD$.

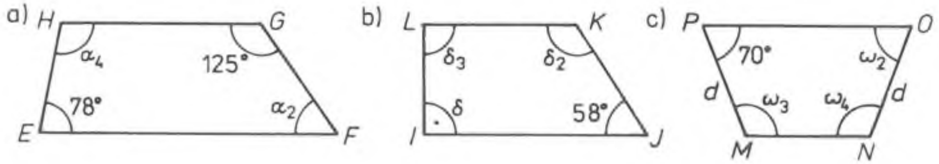


Rovnoramennému lichoběžníku lze opsat kružnici.

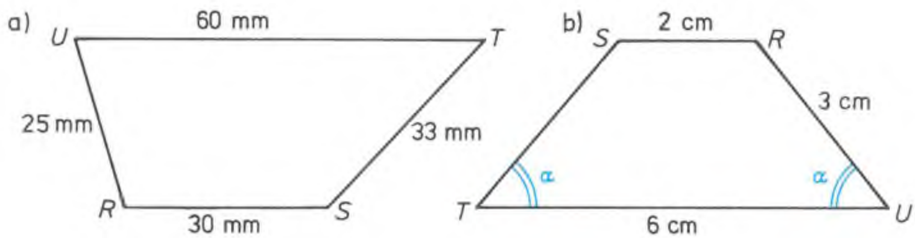
Uvedli jsme několik vlastností rovnoramenného lichoběžníku. Tyto vlastnosti žádný jiný lichoběžník nemá. Ještě jednou si znaky „rovnoramennosti“ lichoběžníku zopakujme:

- Vnitřní úhly při základně lichoběžníku jsou shodné.
- Lichoběžník je osově souměrný.
- Lichoběžníku lze opsat kružnici.

1. Určete velikosti neznámých vnitřních úhlů lichoběžníku z náčrtku:



2. Určete obvod lichoběžníku $RSTU$:



3. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a DC platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$. Vysvětlete, proč je tento lichoběžník rovnoramenný.

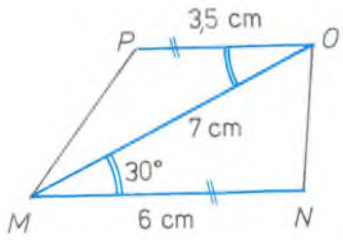
?

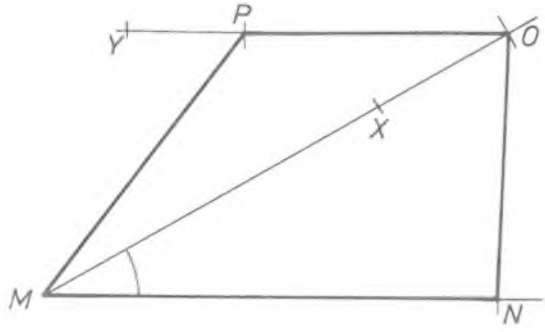
Jak sestrojíme lichoběžník?

Podobně jako u čtyřúhelníku se omezíme jen na takové konstrukce, kdy se nám podaří lichoběžník rozdělit úhlopříčkou na dva trojúhelníky, které je možné sestrojit podle známých vět.

Příklad 1. Sestrojte lichoběžník $MNOP$ se základnami MN a OP, je-li dáno: $|MN| = 6\,\text{cm}$, $|OP| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|MO| = 7\,\text{cm}$, $|\sphericalangle OMN| = 30°$

Řešení. Nejprve si lichoběžník načrtneme a vyznačíme v něm dané údaje. Pak si uvědomíme, že z rovnoběžnosti základen MN a OP plyne shodnost střídavých úhlů OMN a MOP. Proto i úhel MOP má velikost 30°. Můžeme tedy sestrojit trojúhelník MNO podle věty *sus* a trojúhelník MOP podle téže věty.





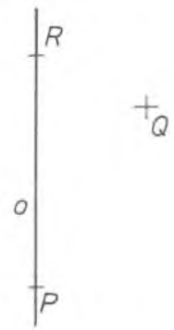
Sestrojíme-li nejdříve trojúhelník MNO, můžeme nalézt bod P, aniž bychom „počítali" úhel MOP. Stačí využít toho, že přímky MN a OP jsou rovnoběžné. Proto bod P leží na polopřímce OY rovnoběžné se stranou MN ve vzdálenosti 3,5 cm od bodu O.

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se shodnými rameny AD a BC délky 5 cm, je-li $|AB| = 7\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle DAB| = 60°$.

CVIČENÍ 7

1. Narýsujte libovolný čtyřúhelník $KLMN$ tak, aby jeden jeho vnitřní úhel měřil 60°. Zapište dvojice sousedních a protějších stran a sousedních a protějších vnitřních úhlů.
2. Určete velikost zbývajícího vnitřního úhlu čtyřúhelníku $ABCD$, je-li dáno:

   a) $\alpha = 75°$, $\beta = 42°$, $\gamma = 105°$ b) $\beta = 63°$, $\gamma = \delta = 90°$
3. Zvolte přímku o, vyznačte na ní body P, R a mimo ni bod Q podobně jako na obrázku. Sestrojte bod O, který je obrazem bodu Q v osové souměrnosti s osou o. Narýsujte čtyřúhelník $OPQR$. (Tento čtyřúhelník se nazývá *deltoid*. Má jedinou osu souměrnosti.)



4. Sestrojte čtyřúhelník $MNOP$, jestliže je dáno: $|MN| = 3\,\mathrm{cm}$, $|NO| = 4{,}4\,\mathrm{cm}$, $|MO| = 5{,}4\,\mathrm{cm}$, $|MP| = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $|OP| = 4{,}2\,\mathrm{cm}$

5. Sestrojte libovolný
   a) pravoúhlý lichoběžník $MNOP$ ($MN \parallel OP$),
   b) rovnoramenný lichoběžník $KLMN$ ($KL \parallel MN$).

6. Sestrojte libovolný lichoběžník, změřte jeho vnitřní úhly a určete
   a) součet všech vnitřních úhlů,
   b) součet obou úhlů u každého ramena.

   Bylo vaše měření přesné?

7. Narýsujte libovolný
   a) pravoúhlý, b) rovnoramenný, c) rovnostranný

   trojúhelník ABC. Najděte bod D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl lichoběžník se základnami AB a CD.

8. Lichoběžník $ABCD$ má ramena AD a BC. Vypočítejte velikosti zbývajících vnitřních úhlů, je-li:
   a) $\alpha = 65°$, $\gamma = 115°$ b) $\alpha = 38°$, $\beta = 104°$

   Je tento lichoběžník rovnoramenný?

9. Sestrojte libovolný rovnoramenný lichoběžník $EFGH$ a opište mu kružnici.

10. Sestrojte lichoběžník $DEFG$ ($DE \parallel FG$), je-li dáno:
    a) $|DE| = 6{,}4\,\mathrm{cm}$, $|DF| = 4{,}4\,\mathrm{cm}$, $|GF| = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle FDE| = 40°$
    b) $|DE| = 3{,}7\,\mathrm{cm}$, $|EF| = 4{,}7\,\mathrm{cm}$, $|GD| = 5{,}4\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DEF| = 118°$

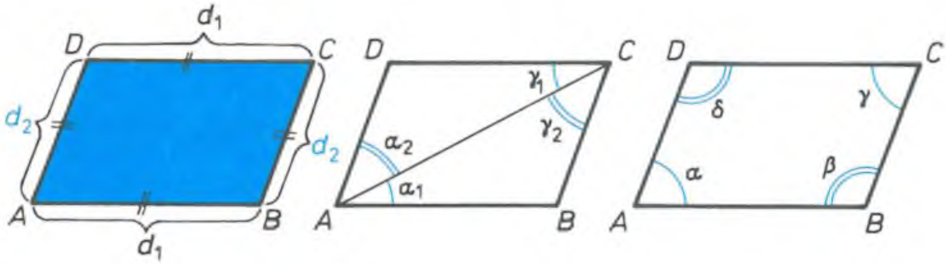
11. Sestrojte libovolný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Najděte středy jeho ramen a označte je S_1 a S_2. Narýsujte úsečku S_1S_2. Přesvědčte se, že je rovnoběžná se základnami a že její délka je rovna polovině součtu délek obou základen. (Úsečka S_1S_2 se nazývá *střední příčka* lichoběžníku $ABCD$.)

11 ROVNOBĚŽNÍK

V této kapitole se budeme zabývat čtyřúhelníky s rovnoběžnými protějšími stranami. Víme již, že se nazývají *rovnoběžníky*. Také známe jejich některé vlastnosti. Nalistujte si v učebnici strany 28–31 a připomeňte si je.

? Co je rovnoběžník a jaké má vlastnosti?

Na obrázku je čtyřúhelník $ABCD$. Pro jeho strany platí $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Z toho vyplývá, že také platí $|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$. Ze shodnosti střídavých úhlů α_1, γ_1 a střídavých úhlů α_2, γ_2 plyne též shodnost úhlů α a γ. Podobně se zdůvodní shodnost úhlů β a δ.



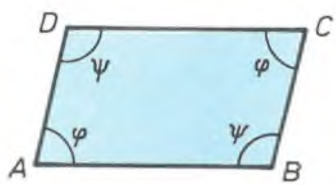
Čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné, se nazývá **rovnoběžník**.
Každé dvě protější strany rovnoběžníku jsou shodné.
Každé dva protější úhly rovnoběžníku jsou shodné.

Na obrázku je rovnoběžník $ABCD$, shodné úhly při vrcholech A a C jsou označeny φ, shodné úhly při vrcholech B a D jsou označeny ψ. Protože součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je roven 360°, platí

$$2 \cdot \varphi + 2 \cdot \psi = 360°.$$

Po dělení dvěma vychází

$$\varphi + \psi = 180°.$$



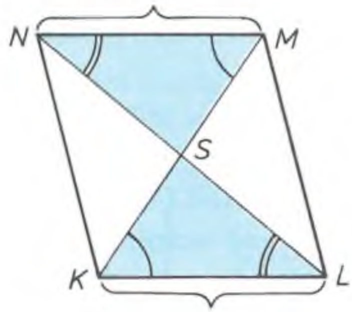
Součet každých dvou sousedních úhlů rovnoběžníku je 180°.

Co platí pro *úhlopříčky* rovnoběžníku?

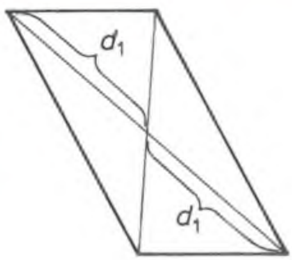
Na obrázku rovnoběžníku $KLMN$ je vyznačen průsečík S jeho úhlopříček KM a LN. Dokážeme, že trojúhelníky KSL a MSN jsou shodné podle věty *usu*: Strany KL a MN jsou shodné, shodné jsou i střídavé úhly SKL a SMN, stejně jako střídavé úhly KLS a MNS. Ze shodnosti trojúhelníků KSL a MSN odvodíme, že platí:

$$|KS| = |MS| \quad \text{a} \quad |LS| = |NS|$$

Bod S tedy dělí každou úhlopříčku na dvě stejné části.



V každém rovnoběžníku je průsečík úhlopříček středem každé z nich.



Je jasné, že bod S je také středem souměrnosti rovnoběžníku $KLMN$. Ve středové souměrnosti se středem S jsou totiž souměrně sdružené jak vrcholy K a M, tak i vrcholy L a N.

Každý rovnoběžník je středově souměrný.

1. Tvrzení o součtu sousedních úhlů rovnoběžníku vysvětlete užitím vlastností střídavých a vedlejších úhlů.

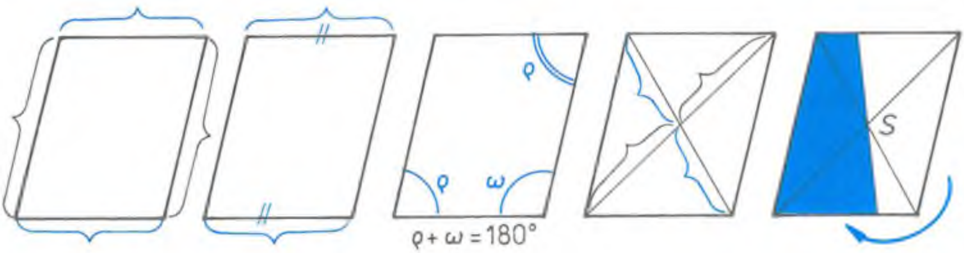
Jak poznáme rovnoběžník?

V kapitole o shodnosti trojúhelníků jsme vysvětlili, že rovnoběžníky mají některé vlastnosti, které žádné jiné čtyřúhelníky nemají. Opět si je stručně připomeneme:

- Čtyřúhelník, který má každé dvě protější strany shodné, je rovnoběžník.
- Čtyřúhelník, který má každé dva protější úhly shodné, je rovnoběžník.

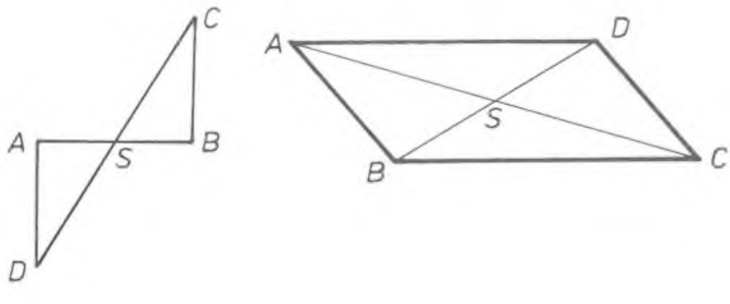
Připojíme k těmto „poznávacím" znakům rovnoběžníku ještě další:

- Čtyřúhelník, ve kterém součet vnitřního úhlu s každým z obou sousedních úhlů je 180°, je rovnoběžník.
- Čtyřúhelník, ve kterém je průsečík úhlopříček středem každé z nich, je rovnoběžník.
- Středově souměrný čtyřúhelník je rovnoběžník.



Vysvětlíme alespoň poslední tvrzení.

Předpokládejme, že čtyřúhelník $ABCD$ je souměrný podle nějakého středu S. (Zatím nevíme, že je to průsečík úhlopříček.) Pak obrazem jeho vrcholu A je některý ze zbylých vrcholů B, C nebo D (vysvětlete sami, proč žádný vrchol nemůže být samodružný). Kdyby byl jeho obrazem sousední vrchol, např. B, byly by souměrně sdružené vrcholy C a D a protější strany AB a CD by měly společný bod S (obrázek vlevo). Proto je obrazem vrcholu A vrchol C a obrazem vrcholu B vrchol D. Strany AB a CD jsou souměrně sdružené, tedy rovnoběžné. Podobné tvrzení platí i pro souměrně sdružené strany BC a DA. Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník (a střed souměrnosti S je průsečík jeho úhlopříček).



□ **2.** Může mít lichoběžník všechny vnitřní úhly pravé? Jestliže ne, kolik jich může mít?

□ **3.** Může mít lichoběžník obě základny shodné? Vysvětlete.

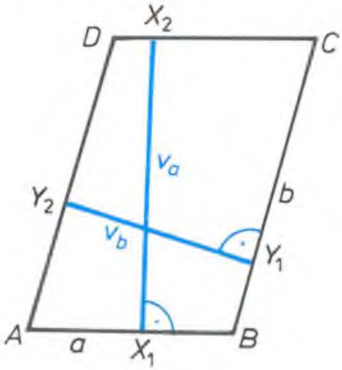
4. Vysvětlete, proč čtyřúhelník, ve kterém je průsečík úhlopříček středem každé z nich, je rovnoběžník.

∗ **5.** Vysvětlete, proč čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém pro vnitřní úhly platí $\alpha + \beta = 180°$ a $\beta + \gamma = 180°$, je rovnoběžník.

Co je *výška* rovnoběžníku?

Výška rovnoběžníku je vzdálenost jeho protějších rovnoběžných stran. Protože rovnoběžník má dvě dvojice rovnoběžných stran, má také dvě výšky. Na obrázku jsou znázorněny úsečky X_1X_2 a Y_1Y_2, jejichž délky jsou rovny těmto výškám:

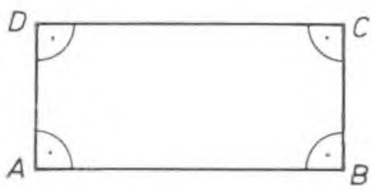
$$|X_1X_2| = v_a, \quad |Y_1Y_2| = v_b$$



6. Narýsujte libovolný rovnoběžník $ABCD$. Vyznačte výšku v_a ke straně a a výšku v_b ke straně b. Změřte a zapište délky stran a, b i výšky v_a a v_b. Vypočítejte součiny $a \cdot v_a$ a $b \cdot v_b$. Pokud budete rýsovat a měřit přesně, zjistíte, že se oba součiny rovnají.

Jak třídíme rovnoběžníky podle vnitřních úhlů?

Na obrázku je rovnoběžník $ABCD$, který má pravý úhel při vrcholu A. I protější shodný úhel při vrcholu C je tedy pravý. Protože součet sousedních úhlů rovnoběžníku je 180°, jsou pravé i úhly ABC a CDA.



Vysvětlili jsme, že platí:

Pokud je pravý některý vnitřní úhel rovnoběžníku, jsou pravé i ostatní tři vnitřní úhly.

Proto všechny rovnoběžníky můžeme rozdělit podle vnitřních úhlů do dvou skupin:

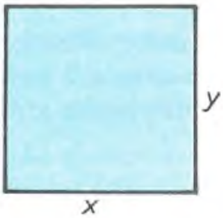
- Jsou-li všechny vnitřní úhly rovnoběžníku pravé, nazýváme tento rovnoběžník *pravoúhelníkem*.

- Není-li žádný vnitřní úhel rovnoběžníku pravý, nazýváme tento rovnoběžník *kosoúhelníkem*.

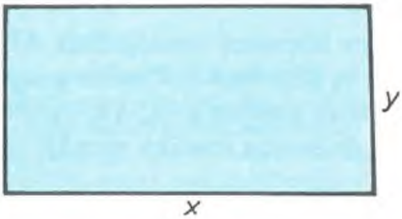
Kosoúhelník má tedy dva vnitřní úhly ostré a dva tupé.

? Jak třídíme pravoúhelníky?

Víme již, že sousední strany pravoúhelníku jsou kolmé a protější mají stejnou velikost. Rozlišíme je podle toho, zda jsou jejich sousední strany shodné, nebo nikoli, na *čtverce* a *obdélníky*.



$x = y$

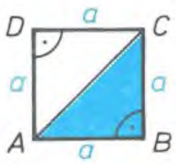


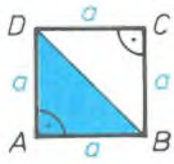
$x \neq y$

Čtyřúhelník, jehož vnitřní úhly jsou pravé, se nazývá **pravoúhelník**.
Pravoúhelník, jehož sousední strany jsou shodné, se nazývá **čtverec**.
Pravoúhelník, jehož sousední strany nejsou shodné, se nazývá **obdélník**.

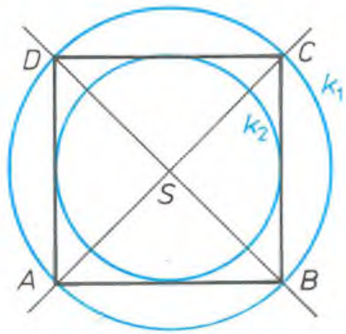
Jaké vlastnosti má *čtverec*?

Čtverec je tedy čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou shodné a všechny vnitřní úhly pravé. Každá úhlopříčka ho dělí na dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky.

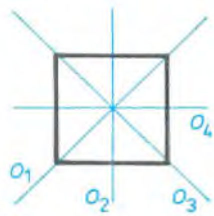




Na dalším obrázku je vyznačen průsečík S úhlopříček čtverce $ABCD$. Snadno sami zdůvodníte, že všechny čtyři pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABS, BCS, CDS a DAS jsou shodné. Bod S je také středem souměrnosti čtverce $ABCD$ i středem kružnic k_1 a k_2, z nichž k_1 je čtverci opsaná a k_2 čtverci vepsaná.
Bod S se nazývá **střed** čtverce.

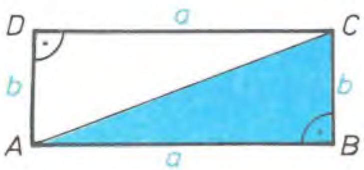


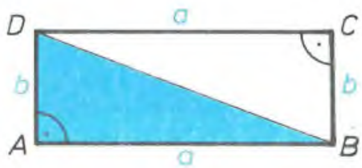
Připomeňme také, že čtverec je osově souměrný podle čtyř os.



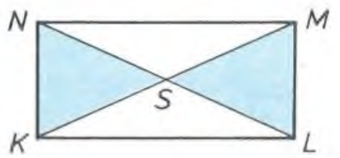
Jaké vlastnosti má *obdélník*?

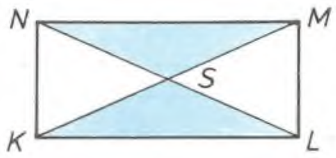
Obdélník je čtyřúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé, protější strany jsou shodné a sousední strany shodné nejsou. Každá úhlopříčka ho dělí na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.



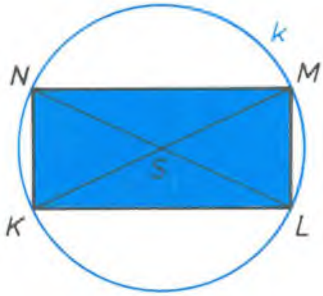


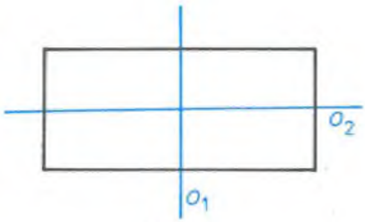
Na dalším obrázku je vyznačen průsečík S úhlopříček obdélníku $KLMN$. Trojúhelníky KSL a MSN jsou shodné (např. podle věty *sss*), podobně jako trojúhelníky LSM, NSK.





Bod S je také středem souměrnosti obdélníku a zároveň středem kružnice k, která je mu opsána. Každý obdélník je osově souměrný podle dvou os.





□ **7.** Lze obdélníku vepsat kružnici?

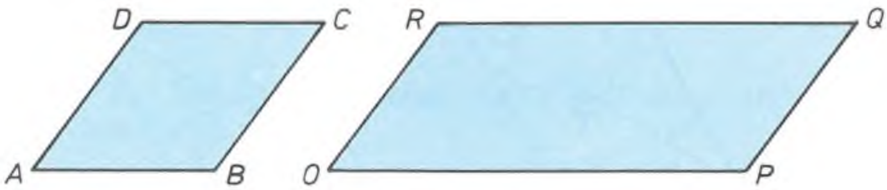
8. Obdélník $ABCD$ má strany délek $|AB| = a$, $|BC| = b$. Určete jeho výšky v_a a v_b.

? Jak třídíme *kosoúhelníky*?

Podobně jako pravoúhelníky lze i kosoúhelníky rozdělit do dvou skupin podle toho, zda jsou shodné jejich sousední strany.

Jsou-li některé dvě sousední strany kosoúhelníku shodné, pak jsou shodné všechny jeho strany. Takový kosoúhelník se nazývá *kosočtverec*. Také snadno sami vysvětlíte, proč platí: Jestliže některé dvě sousední strany kosoúhelníku nejsou shodné, pak nejsou shodné žádné dvě sousední strany. V takovém případě jde o *kosodélník*.

Na obrázku si prohlédněte kosočtverec $ABCD$ a kosodélník $OPQR$.

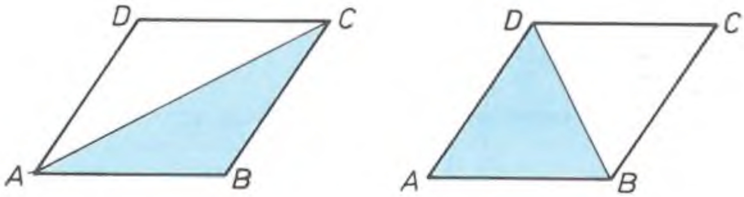


Rovnoběžník, jehož dva vnitřní úhly jsou ostré a dva tupé, se nazývá **kosoúhelník**.
Kosoúhelník, jehož sousední strany jsou shodné, se nazývá **kosočtverec**.
Kosoúhelník, jehož sousední strany nejsou shodné, se nazývá **kosodélník**.

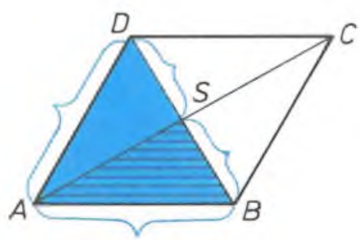
Jaké vlastnosti má *kosočtverec*?

?

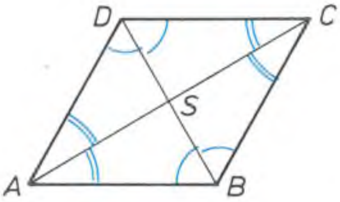
Kosočtverec je rozdělen každou z úhlopříček na dva shodné rovnoramenné trojúhelníky.

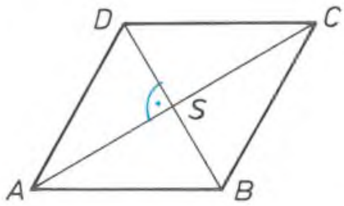


Sestrojme obě úhlopříčky kosočtverce $ABCD$ a jejich průsečík označme S. Jako v každém rovnoběžníku, platí $|BS| = |DS|$. Strany AB a AD jsou shodné, úsečka AS je společnou stranou trojúhelníků ABS a ADS. Podle věty *sss* jsou proto tyto trojúhelníky shodné. Z jejich shodnosti vyplývá jednak shodnost úhlů BAS a DAS, jednak shodnost úhlů ASB a ASD. Shodnost $\sphericalangle BAS \cong \sphericalangle DAS$ znamená, že polopřímka AS je osou vnitřního úhlu DAB kosočtverce $ABCD$.



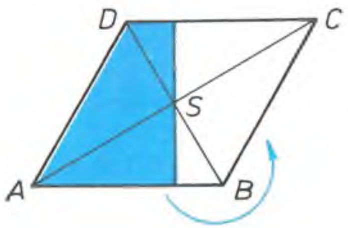
Z rovnosti $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASD|$ vyplývá, že úhlopříčky AC a BD jsou k sobě kolmé.

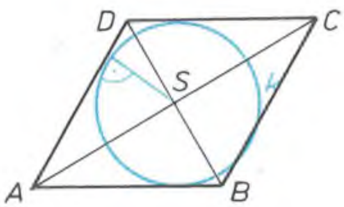




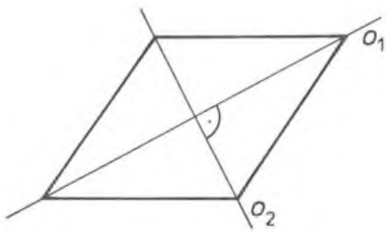
Úhlopříčky kosočtvece jsou navzájem kolmé.
Každá úhlopříčka kosočtverce půlí jeho protější úhly.

Průsečík úhlopříček S je také středem souměrnosti kosočtverce i středem kružnice k, která mu je vepsána.





Každý kosočtverec je osově souměrný podle dvou os.



9. Vysvětlete, proč výška příslušná ke straně AB kosočtverce $ABCD$ se rovná výšce příslušné ke straně BC.

□ **10.** Lze kosočtverci opsat kružnici?

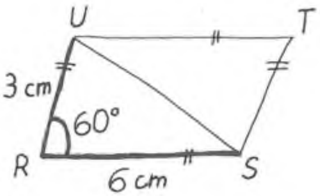
Jak sestrojíme rovnoběžník?

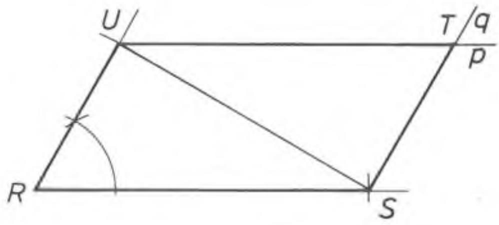
?

Na závěr našeho seznámení s rovnoběžníky uvedeme ještě několik úloh na jejich konstrukci.

Příklad 1. Sestrojte rovnoběžník $RSTU$, je-li dáno: $|RS| = 6\,\text{cm}$, $|RU| = 3\,\text{cm}$, $|\sphericalangle URS| = 60°$.

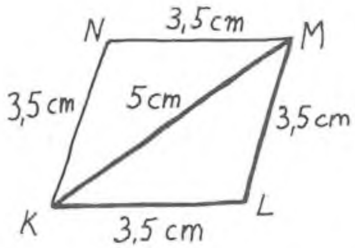
Řešení. Sestrojíme nejprve trojúhelník RSU podle věty *sus* a pak určíme polohu zbylého vrcholu T. Například tak, že bodem U vedeme přímku p rovnoběžnou se stranou RS a bodem S přímku q rovnoběžnou se stranou RU. Průsečík těchto přímek je hledaný vrchol T.

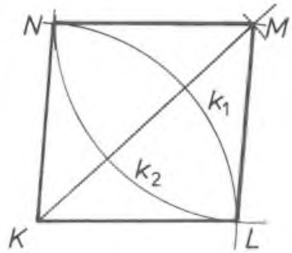




Příklad 2. Sestrojte kosočtverec $KLMN$ o straně délky 3,5 cm, jehož úhlopříčka KM má délku 5 cm.

Řešení. Nejrychleji kosočtverec $KLMN$ sestrojíme, vyjdeme-li od úhlopříčky KM. Vrcholy L a N najdeme jako průsečíky kružnic $k_1(K; 3{,}5\,\text{cm})$ a $k_2(M; 3{,}5\,\text{cm})$.





11. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|BC| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|BD| = 4\,\text{cm}$.

12. Sestrojte obdélník $EFGH$ o straně 4 cm a úhlopříčce 5 cm.

13. Sestrojte kosočtverec $VXYZ$ o straně 5 cm, jehož vnitřní úhel XYZ měří 110°.

CVIČENÍ 8

1. Sestrojte rovnoběžník $DEFG$ se stranou EF délky 4 cm, aby to byl
   a) čtverec, b) obdélník, c) kosodélník, d) kosočtverec.

2. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a doplňte ho na rovnoběžníky $ABCD$, $ABEC$, $CAFB$. Strany trojúhelníku ABC jsou známé úsečky v trojúhelníku DEF. Jak se nazývají?

3. Vypočtěte zbývající vnitřní úhly rovnoběžníku $ABCD$, jestliže:
   a) $\beta = 112°$ b) $\gamma = 75°20'$

□ 4. Které rovnoběžníky mají shodné úhlopříčky?

□ 5. Kterým rovnoběžníkům lze opsat a kterým vepsat kružnici?

□ 6. Kolik os souměrnosti má
   a) čtverec, b) obdélník, c) kosočtverec?

7. Načrtněte a pojmenujte rovnoběžník, jehož úhlopříčky
   a) jsou stejně dlouhé a navzájem kolmé,
   b) jsou stejně dlouhé a nesvírají pravý úhel,
   c) nejsou stejně dlouhé a svírají pravý úhel.

8. Sestrojte kosodélník $MNOP$, je-li dáno:
   a) $|MN| = 4\,\text{cm}$, $|MP| = 2{,}8\,\text{cm}$, $|\sphericalangle PMN| = 112°$
   b) $|MN| = 6\,\text{cm}$, $|MO| = 5{,}4\,\text{cm}$, $|NO| = 3\,\text{cm}$

9. Sestrojte obdélník $TUVX$, je-li $|VX| = 5{,}6\,\text{cm}$ a $|VT| = 6{,}7\,\text{cm}$.

10. Sestrojte čtverec, jehož obvod je 15,2 cm.

11. Sestrojte čtverec,
    a) jehož strana měří 5 cm, b) jehož úhlopříčka měří 5 cm.
    Před rýsováním rozhodněte, v kterém případě dostanete čtverec o větším obsahu.

12. Sestrojte kosočtverec $JKLM$, pro který platí $|JK| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle MJK| = 94°$.

12 OBSAHY

Potřebujeme-li popsat, „kolik místa" v rovině zaujímá daný geometrický útvar, vyjádříme to veličinou, které říkáme **obsah** tohoto útvaru. Obsah se zpravidla značí S a udává se v jednotkách, které už znáte: m^2, cm^2, mm^2, km^2, ... Pro lepší přehlednost někdy obsah trojúhelníku ABC značíme S_{ABC}, obsah čtyřúhelníku $KLMN$ značíme S_{KLMN} apod.

Dobře už víte, jak se vypočítá obsah *čtverce* a *obdélníku*:

- Pro obsah čtverce o straně a platí: $S = a \cdot a = a^2$.
- Pro obsah obdélníku o stranách a, b platí: $S = a \cdot b$.

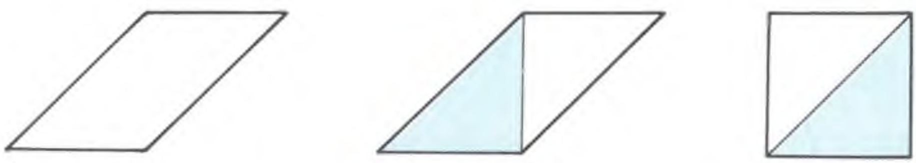
Nyní se naučíme počítat obsahy rovnoběžníku, trojúhelníku a lichoběžníku. Nejdříve však vysvětlíme, co platí o obsazích rovinných útvarů obecně.

Přemístíme-li útvar v rovině z jednoho místa na druhé, „velikost plochy", kterou zaujímal, se nezmění. Protože každé dva shodné útvary můžeme přemístit tak, aby se kryly, platí:

Shodné útvary mají stejné obsahy.

Víme také, že při určování obsahu „složitějšího" útvaru je vhodné tento útvar rozdělit na několik jednodušších částí. Určíme-li obsahy těchto částí a sečteme-li je, dostaneme obsah celého útvaru.

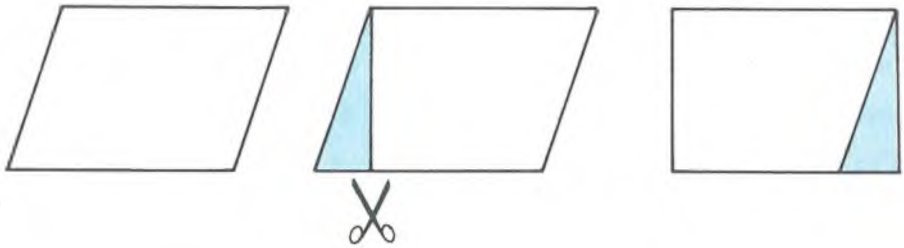
Někdy je v takových příkladech výhodné útvar „rozstřihnout", vzniklé části přemístit a nakonec znovu „slepit" do jednoduššího útvaru. Na obrázku je znázorněna taková „přeměna" jednoho rovnoběžníku na čtverec.



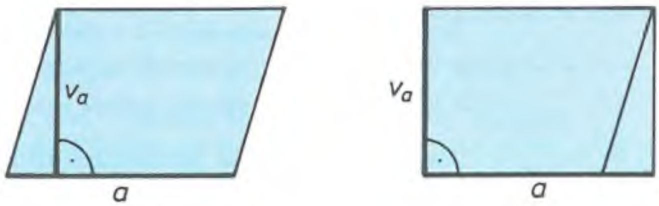
Protože obsah čtverce vypočítat umíme, umíme zjistit i obsah původního rovnoběžníku.

Jak určíme obsah *rovnoběžníku*?

Vystřihněte si z papíru libovolný rovnoběžník. Pokuste se ho stříháním „přeměnit“ na pravoúhelník se stejným obsahem. Zjistíte, že to je možné, když odstřihnete jeho „roh“ a ten pak vhodně přilepíte ke „zbytku“ rovnoběžníku. Prohlédněte si tento postup na obrázcích.



Jedna strana vzniklého pravoúhelníku je shodná se stranou a původního rovnoběžníku. Druhá strana pravoúhelníku má délku rovnou výšce rovnoběžníku ke straně a.

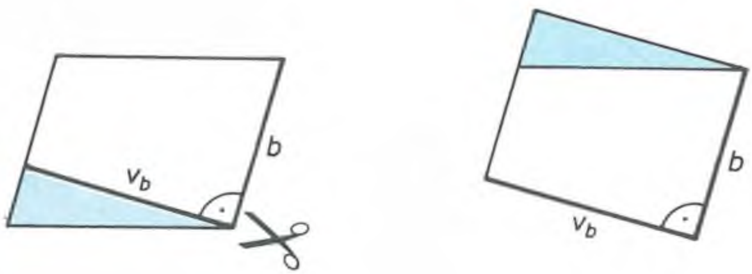


Proto obsah S rovnoběžníku $ABCD$ se stranou a a k ní příslušnou výškou v_a vypočteme podle vzorce

$$S = a \cdot v_a.$$

Jiným rozstřižením rovnoběžníku $ABCD$ odvodíme, že obsah rovnoběžníku $ABCD$ lze určit také podle vzorce

$$S = b \cdot v_b.$$



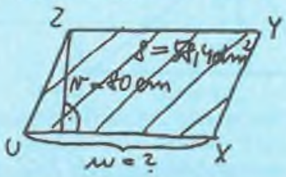
Obsah rovnoběžníku je roven součinu jeho strany a k ní příslušné výšky.

Pokud známe obsah rovnoběžníku a výšku příslušnou k jedné z jeho stran, můžeme délku této strany vypočítat.

Příklad 1. Vypočtěte délku strany UX rovnoběžníku $UXYZ$, který má obsah $58{,}4\,\mathrm{dm}^2$ a ve kterém výška ke straně UX měří 80 cm.

Řešení. Eva počítala délku strany UX takto:

rovnoběžník UXYZ:



80 cm = 8 dm

$S = a \cdot v$

$58{,}4\,\mathrm{dm}^2 = a \cdot 8\,\mathrm{dm}$

$a = 58{,}4\,\mathrm{dm}^2 : 8\,\mathrm{dm}$

$\underline{\underline{a = 7{,}3\,\mathrm{dm}}}$

Zk.: $a \cdot v = 7{,}3\,\mathrm{dm} \cdot 8\,\mathrm{dm} = 58{,}4\,\mathrm{dm}^2$

Strana UX má délku 7,3 dm.

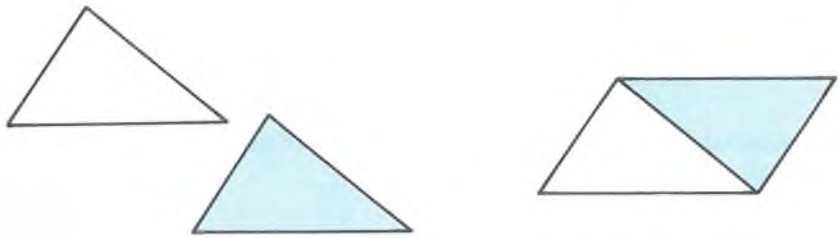
1. Vypočtěte obsah rovnoběžníku $KLMN$, má-li strana KL délku 5 cm a je-li výška k této straně rovna 3 cm.

2. Vypočtěte výšku ke straně BC rovnoběžníku $ABCD$, je-li jeho obsah $14{,}08\,\mathrm{cm}^2$ a má-li strana BC délku 4,4 cm.

Jak určíme obsah *trojúhelníku*?

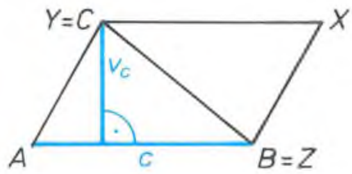
K odvození obsahu trojúhelníku budeme opět potřebovat papír a nůžky. Vystřihneme z papíru libovolný trojúhelník. Abychom snadno určili jeho obsah, vystřihneme ještě jeden shodný trojúhelník a z obou „slepíme“ rovnoběžník.

Možný postup je patrný z obrázků:



Obsah vystřiženého trojúhelníku je roven polovině obsahu vzniklého rovnoběžníku. Ten vypočítáme, pokud známe některou jeho stranu a k ní příslušnou výšku.

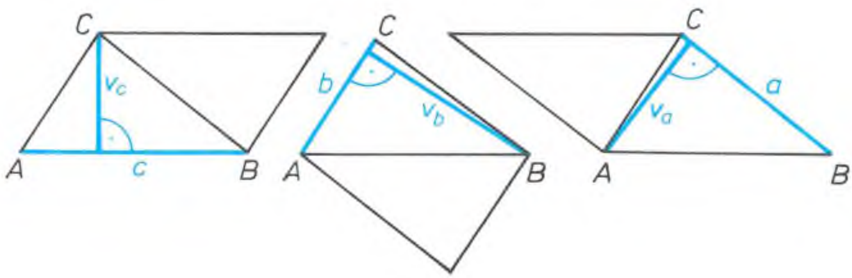
Na obrázku je rovnoběžník $ABXC$ který vznikl slepením dvou shodných trojúhelníků ABC a XYZ.



Všimněte si, že trojúhelník ABC a „slepený" rovnoběžník $ABXC$ mají společnou jednak stranu $c = AB$, jednak výšku v_c příslušnou k této straně. Proto je obsah rovnoběžníku $ABXC$ roven $c \cdot v_c$ a jeho polovina je rovna obsahu S trojúhelníku ABC:

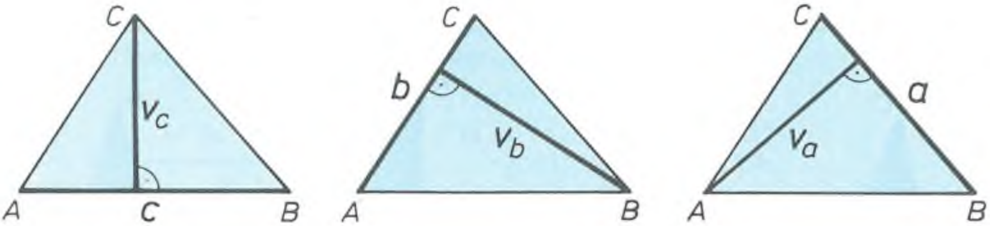
$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$$

Trojúhelníky ABC a XYZ můžeme „slepit" podél libovolné shodné strany:



Proto pro obsah trojúhelníku ABC máme tři vzorce:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$$

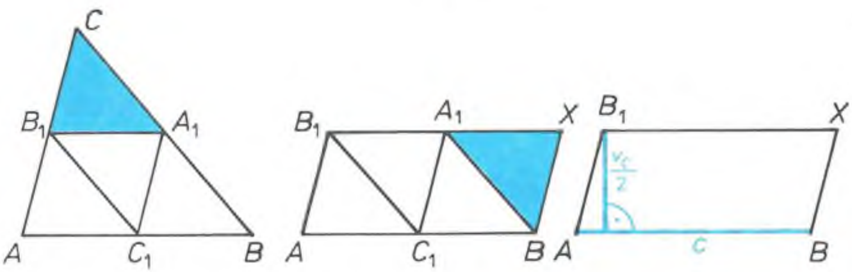


$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} \qquad S = \frac{b \cdot v_b}{2} \qquad S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Obsah trojúhelníku je roven polovině součinu strany a k ní příslušné výšky.

Vzpomenete-li si na vlastnosti středních příček, vystačíte při odvození vzorce pro obsah s vystřižením jediného trojúhelníku ABC. Vyznačíme v něm střední příčky, které jej rozdělí na čtyři shodné trojúhelníky. Odstřihnete-li jeden z těchto trojúhelníků a přilepíte-li jej ke „zbytku" trojúhelníku ABC podobně jako na obrázku, vznikne rovnoběžník $ABXB_1$, jehož výška ke straně AB je polovinou výšky v_c v původním trojúhelníku ABC. Proto pro obsah $\triangle ABC$ platí vzorec:

$$S = c \cdot \frac{v_c}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$$



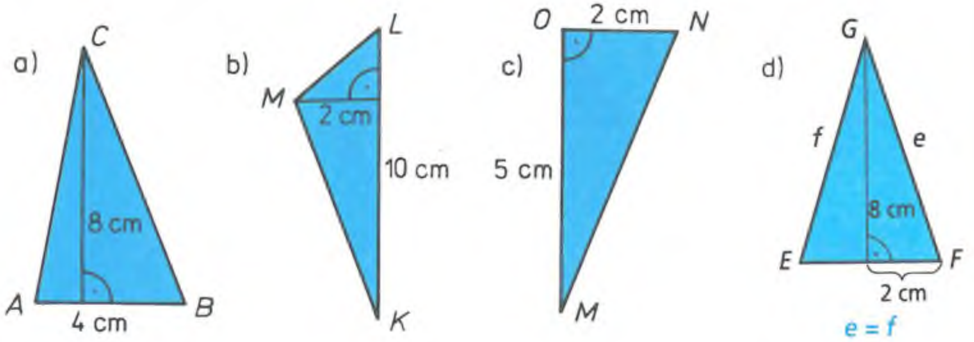
3. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 5\,\text{cm}$, $v_a = 3\,\text{cm}$ b) $b = 3\,\text{cm}$, $v_b = 10\,\text{cm}$

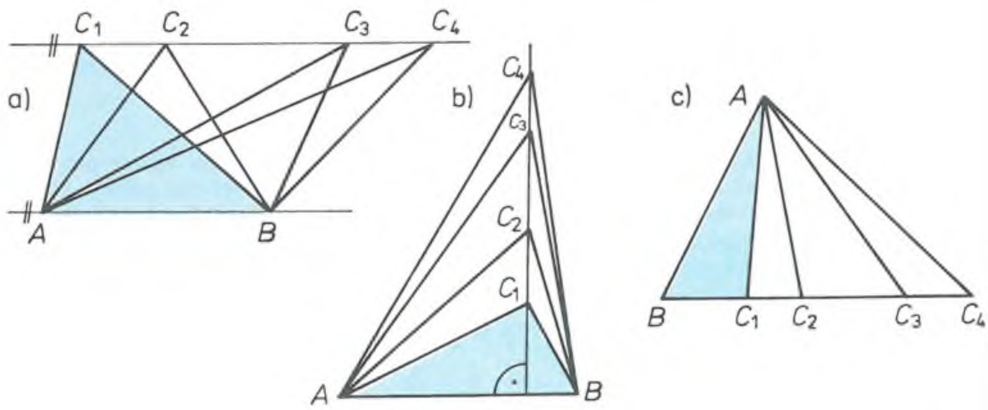
c) $c = 22\,\text{mm}$, $v_c = 1\,\text{cm}$

4. Vypočtěte obsah trojúhelníku XYZ se stranami $3\,\text{cm}$, $4\,\text{cm}$ a $5\,\text{cm}$, víte-li, že je to pravoúhlý trojúhelník.

□ **5.** Určete obsah trojúhelníku z náčrtku.



□ **6.** Porovnejte obsahy trojúhelníků ABC_1, ABC_2, ABC_3 a ABC_4.



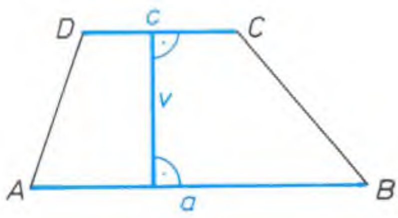
∗ **7.** Vypočtěte výšku v_a trojúhelníku ABC, který má obsah $10\,\mathrm{cm}^2$ a stranu BC délky $5\,\mathrm{cm}$.

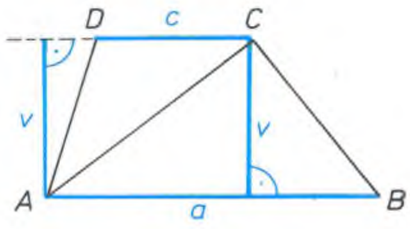
∗ **8.** Trojúhelník XYZ má obsah $12{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Výška ke straně YZ měří $6\,\mathrm{cm}$. Určete délku této strany.

? Jak určíme obsah *lichoběžníku*?

Obsah lichoběžníku určíme vhodným „rozložením“ tohoto lichoběžníku na dva útvary, jejichž obsahy umíme určit.

Na obrázku je lichoběžník $ABCD$ se základnami a, c a výškou v rozdělen úhlopříčkou AC na dva trojúhelníky ABC a ACD.





Obsah lichoběžníku $ABCD$ je roven součtu obsahů obou trojúhelníků:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$

Obsahy těchto trojúhelníků už umíme vypočítat:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v}{2} \qquad \text{a} \qquad S_{ACD} = \frac{c \cdot v}{2}$$

Proto pro obsah lichoběžníku $ABCD$ platí:

$$S_{ABCD} = \frac{a \cdot v}{2} + \frac{c \cdot v}{2}$$

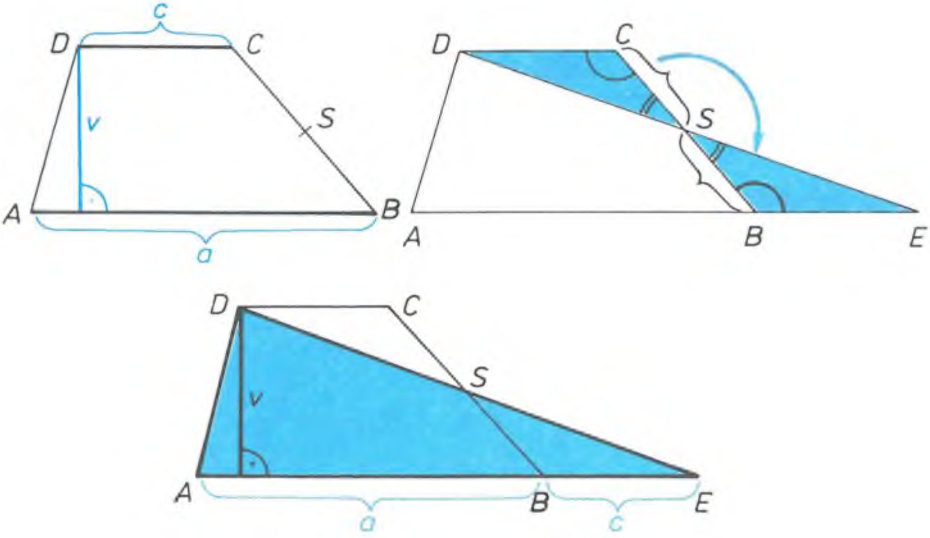
Předchozí vzorec se častěji zapisuje ve tvaru s jediným násobením:

$$S_{ABCD} = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Přesvědčte se, že oba vzorce znamenají totéž.

Obsah lichoběžníku vypočítáme, vynásobíme-li součet délek jeho základen výškou a výsledek vydělíme dvěma.

Předchozí pravidlo lze zdůvodnit šikovným „rozstřižením“ papírového lichoběžníku. Vystřihněte si lichoběžník $ABCD$, na rameni BC vyznačte jeho střed S a lichoběžník rozstřihněte podél úsečky DS. Přilepíte-li trojúhelník SCD ke čtyřúhelníku $ABSD$ podle obrázku, získáte trojúhelník AED se stranou $a + c$ a k ní příslušnou výškou v.



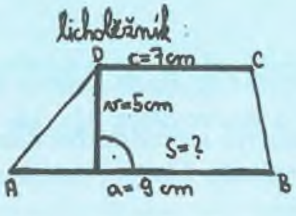
Výpočet obsahu lichoběžníku procvičíme ještě na dvou příkladech.

Příklad 2. Určete obsah lichoběžníku $ABCD$ se základnami 9 cm a 7 cm a výškou 5 cm.

Řešení jsme převzali z Davidova a Barbořina sešitu:

David

lichoběžník:



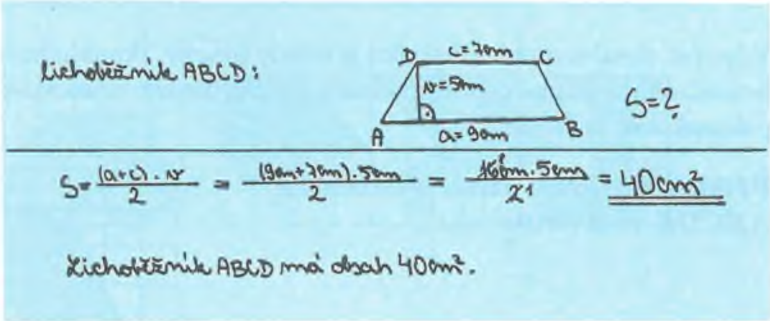
počítám v cm:

$S = \frac{1}{2} \cdot (a+c) \cdot v$

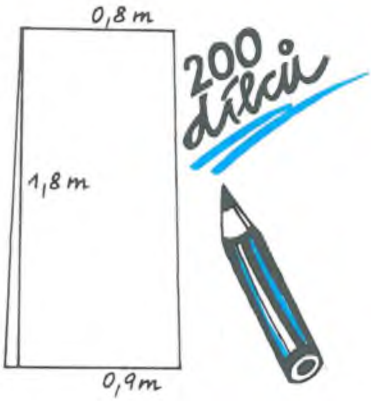
$S = \frac{1}{2} \cdot (9+7) \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = \underline{\underline{40}}$

Obsah lichoběžníku ABCD je 40 cm².

Barbora



Příklad 3. V dílně dostali zakázku na ušití 200 stanových dílců pro vojenský útvar. Dílec má tvar rovnoramenného lichoběžníku. Mistr si udělal náčrt a připsal k němu požadované rozměry. Kolik čtverečných metrů celtoviny budou potřebovat na zhotovení zakázky, jestliže mistr celkem počítá s $30\,\mathrm{m}^2$ celtoviny navíc na švy a odpad?



Řešení. Každý dílec má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami 0,8 m a 0,9 m a výškou 1,8 m. Proto na výrobu jednoho dílce bude třeba

$$\frac{(0{,}8\,\mathrm{m} + 0{,}9\,\mathrm{m}) \cdot 1{,}8\,\mathrm{m}}{2} = 1{,}53\,\mathrm{m}^2.$$

Na ušití 200 dílců bude tedy třeba $200 \cdot 1{,}53\,\mathrm{m}^2 = 306\,\mathrm{m}^2$ látky. Přidáme-li $30\,\mathrm{m}^2$ na odpad, bude celková spotřeba celtoviny $336\,\mathrm{m}^2$.

9. Vypočtěte obsah lichoběžníku se základnami a, c a výškou v:

a) $a = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $c = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $v = 4\,\mathrm{m}$

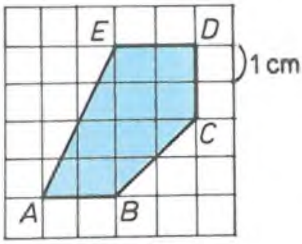
b) $a = 20\,\mathrm{mm}$, $c = 100\,\mathrm{mm}$, $v = 60\,\mathrm{mm}$

c) $a = 3\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$, $v = 0{,}8\,\mathrm{cm}$

? Jak určíme obsah *mnohoúhelníku*?

Výpočet obsahu mnohoúhelníku je někdy pracný. Pomáháme si tak, že mnohoúhelník rozdělíme na trojúhelníky, jejichž obsahy dokážeme vypočítat. Ty pak nakonec sečteme.

Příklad 4. Určete obsah pětiúhelníku $ABCDE$ ve čtvercové síti:

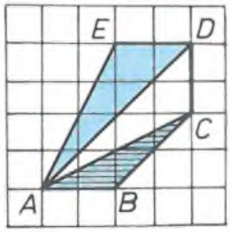


Řešení. Pětiúhelník $ABCDE$ rozdělíme úhlopříčkami z vrcholu A na trojúhelníky ABC, ACD a ADE. Platí:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$$

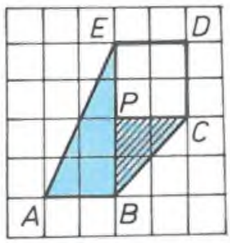
$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$$



Obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je roven součtu těchto obsahů:

$$S_{ABCDE} = 2\,\text{cm}^2 + 4\,\text{cm}^2 + 4\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$$

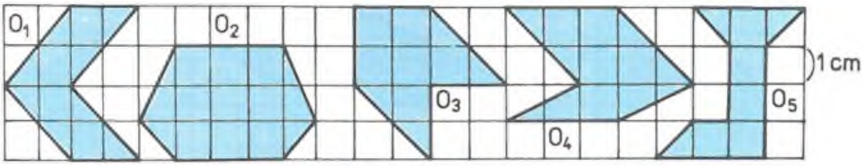
K témuž výsledku dospějeme i jinak, rozdělíme-li pětiúhelník $ABCDE$ na dva trojúhelníky a čtverec podle obrázku.



Tak počítala tuto úlohu Jarka:

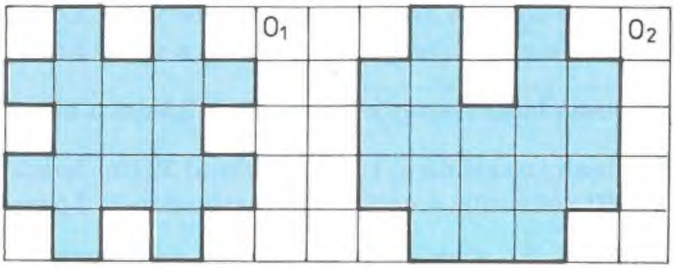
$$S = S_{ABE} + S_{BCP} + S_{PCDE} = \frac{2\,cm \cdot 4\,cm}{2} + \frac{2\,cm \cdot 2\,cm}{2} + 2\,cm \cdot 2\,cm = 4\,cm^2 + 2\,cm^2 + 4\,cm^2 = \underline{\underline{10\,cm^2}}$$

10. Vypočtěte obsahy útvarů ve čtvercové síti:

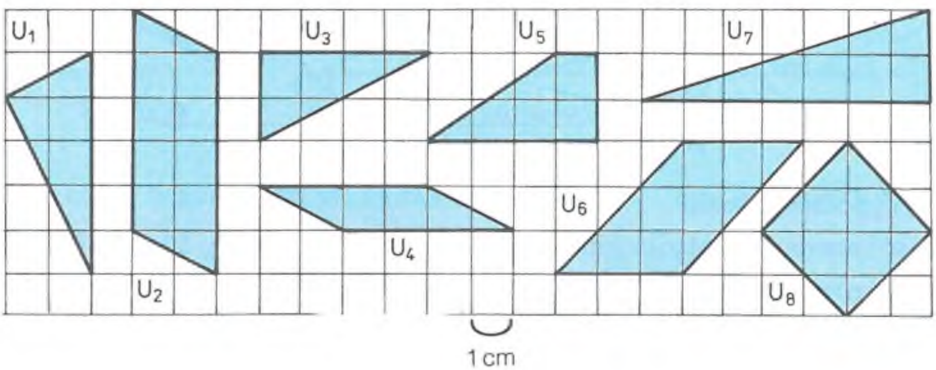


CVIČENÍ 9

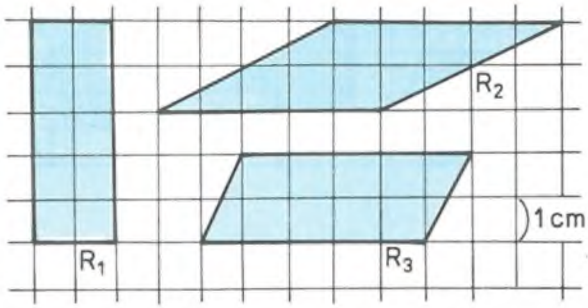
□ **1.** Na obrázku jsou útvary O_1 a O_2. Který z nich má větší obvod a který obsah?



□ **2.** Určete obsahy útvarů ve čtvercové síti:



□**3.** Určete obsahy rovnoběžníků R_1, R_2 a R_3.



4. Vypočtěte obsah

a) rovnoběžníku o straně 5,6 cm a k ní příslušné výšce 2,4 cm,

b) trojúhelníku o straně 8,4 cm a k ní příslušné výšce 3,2 cm,

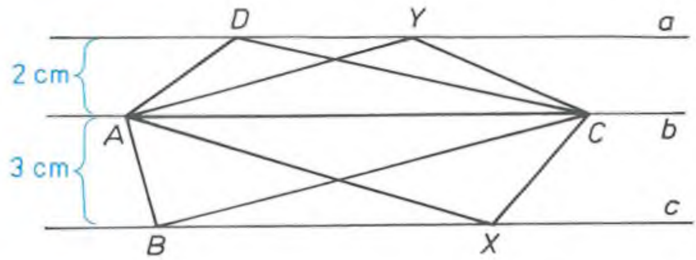
c) kosočtverce o straně 4,8 cm a k ní příslušné výšce 2,8 cm,

d) lichoběžníku o základnách 10 cm a 6,8 cm a výšce 1,6 cm.

5. Vypočtěte obsah kosočtverce, jehož výška je 3,8 dm a obvod 1,8 m.

6. Vypočtěte obsah kosodélníku, který má obvod 32 cm. Jedna jeho strana je třikrát delší než druhá a výška k delší straně měří 3,5 cm.

7. Na obrázku jsou rovnoběžky a, b, c s vyznačenými vzdálenostmi. Určete obsahy čtyřúhelníků $ABCD$ a $AXCY$, je-li $|AC| = 12\,\text{cm}$.



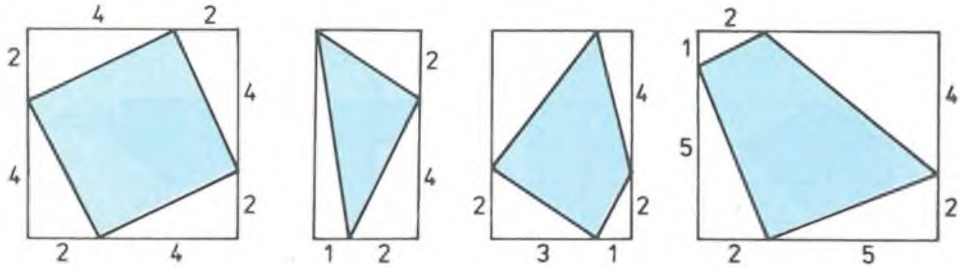
8. Vypočtěte obsah

a) pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky 12 cm a 6 cm,

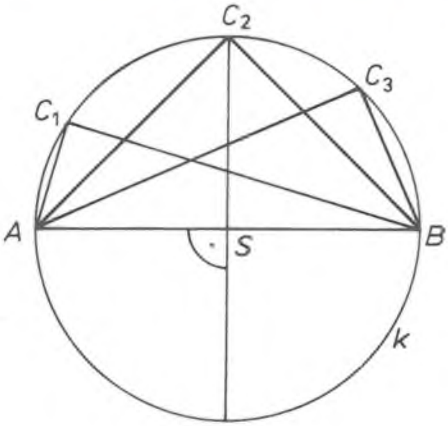
b) rovnoramenného trojúhelníku, jehož ramena mají délku 10 cm a k nim příslušné výšky měří 8 cm.

9. Rovnoramenný trojúhelník má obsah 13,5 cm^2 a základnu 4,5 cm. Určete výšku příslušnou k základně.

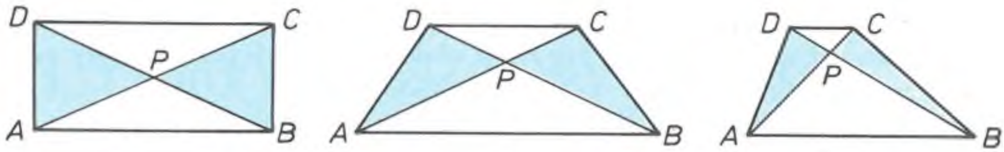
10. Vyjádřete zlomkem, jaká část čtverce nebo obdélníku je vybarvena. (Rozměry jsou v centimetrech).



□**11.** Který z trojúhelníků ABC_1, ABC_2, ABC_3 má největší obsah?



****12.** V kterých čtyřúhelnících mají trojúhelníky APD a BPC stejné obsahy?

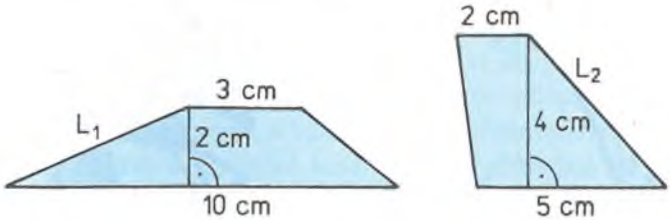


obdélník

rovnoramenný lichoběžník

lichoběžník

13. Který z lichoběžníků L_1, L_2 má větší obsah?

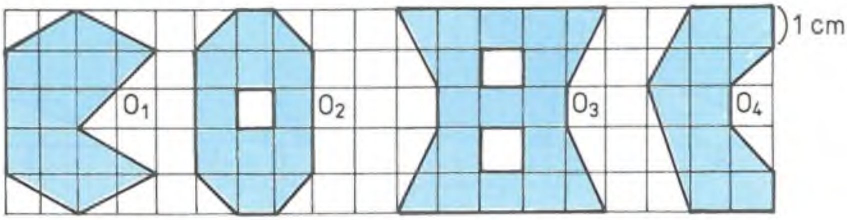


14. Lichoběžník má základny a, c a výšku v. Vypočtěte jeho obsah, je-li:

a) $a = 12{,}6\,\text{cm}$, $c = 3{,}4\,\text{cm}$, $v = 8\,\text{cm}$

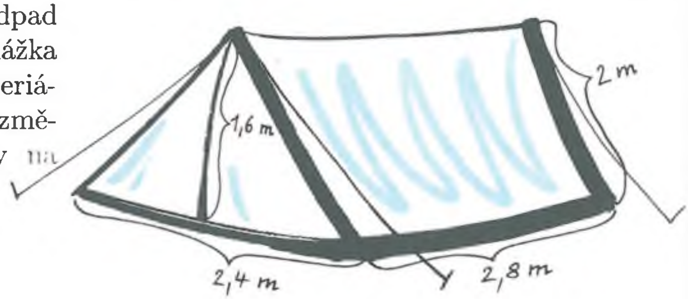
b) $a = 5{,}8\,\text{cm}$, $c = 10{,}2\,\text{cm}$, $v = 4\,\text{cm}$

15. Určete obsahy vybarvených útvarů ve čtvercové síti:

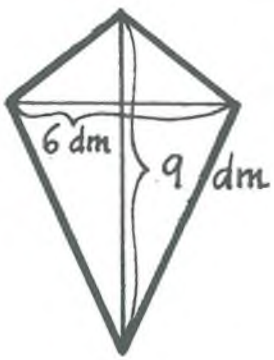


* **16.** Rovnoramenný lichoběžník má obsah $30\,\text{cm}^2$. Jeho základny mají délky 12 cm a 3 cm. Vypočtěte jeho výšku.

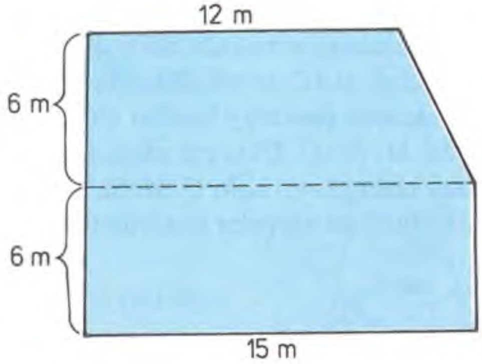
■ **17.** Kolik čtverečných metrů stanového plátna je třeba na výrobu stanu z obrázku? (Odpad zanedbejte, podlážka je z jiného materiálu.) Potřebné rozměry jsou uvedeny na obrázku.



■ **18.** Honza s Vojtou si vyrábějí papírového draka. Nejprve si udělali náčrtek, kam si vyznačili plánované rozměry, a spočítali si, kolik papíru budou potřebovat. Vědí, že na ocas spotřebují poloviční množství papíru než na hlavu. Bude jim stačit obdélníkový arch papíru, který má rozměry 1 m a 0,8 m?



19. Školní pozemek má rozměry uvedené na plánku. Vypočtěte jeho obsah.



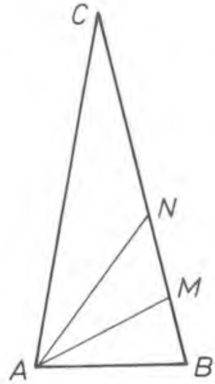
■ **20.** Čalounická dílna má zakázku na přečalounění 50 židlí. Na opěradle je třeba látkou potáhnout lichoběžník o základnách 18 cm a 30 cm a výšce 40 cm. Také sedadlo má tvar rovnoramenného lichoběžníku o základnách 38 cm a 30 cm a výšce 35 cm. Kolik m^2 látky je potřeba ke splnění zakázky, zanedbáme-li odpad a přehnutí přes okraje lichoběžníků?

13 ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Tato kapitola i následující cvičení jsou věnovány obtížnějším úlohám o trojúhelnících a čtyřúhelnících, s nimiž se vaši starší spolužáci setkali v minulých ročnících *matematické olympiády.*

Jako v předchozích sešitech jsou všechny zde zařazené úlohy opatřeny odkazy na ročník soutěže, kdy byly zadány. Zopakujme, že například zápis „36. r., Z6–I–3“ znamená, že úloha byla zadána ve 36. ročníku v kategorii Z6 v I. (tzn. školním) kole jako úloha číslo 3. Tyto odkazy vám pomohou srovnat vaše vlastní řešení nejen s tím, které publikujeme zde v učebnici, ale také s autorským řešením, které je uvedeno v příslušné *ročence* matematické olympiády.

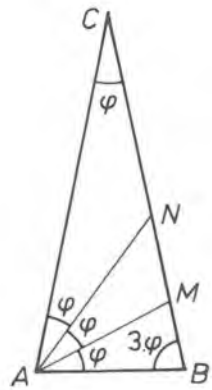
Úloha 1 (44. r., Z6–I–2)
O rovnoramenném trojúhelníku ABC z obrázku víme, že úhel BAC je rozdělen na tři shodné úhly. Jejich ramena protínají úsečku BC postupně v bodech B, M, N, C. Úhel při základně AB je trojnásobkem úhlu při vrcholu C. Kolik rovnoramenných trojúhelníků na obrázku pozorujete? Které to jsou?



Řešení. Velikost úhlu MAB označíme φ. Pak také $\sphericalangle MAN = \varphi$ a $\sphericalangle NAC = \varphi$. Protože ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB, platí $\sphericalangle ABC = 3 \cdot \varphi$. Protože úhel při základně je trojnásobkem úhlu při hlavním vrcholu, platí $\sphericalangle ACB = \varphi$. Součet úhlů v trojúhelníku ABC je 180°:

$$3 \cdot \varphi + 3 \cdot \varphi + \varphi = 180°, \quad \text{tzn.} \quad 7 \cdot \varphi = 180°$$

Přesnou hodnotu φ, která nevychází v celých stupních, nebudeme počítat. Všechny potřebné úhly totiž vyjádříme jako násobky φ.



Dopočítáme zbylé úhly v trojúhelnících AMB, ANC a ANB.

V trojúhelníku AMB platí:

$$|\sphericalangle AMB| = 180° - (\varphi + 3 \cdot \varphi) = 7 \cdot \varphi - 4 \cdot \varphi = 3 \cdot \varphi$$

V trojúhelníku ANC platí:

$$|\sphericalangle ANC| = 180° - (\varphi + \varphi) = 7 \cdot \varphi - 2 \cdot \varphi = 5 \cdot \varphi$$

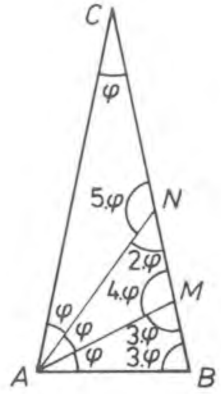
Z vlastností vedlejších úhlů vyplývá, že

$$|\sphericalangle AMN| = 180° - 3 \cdot \varphi = 7 \cdot \varphi - 3 \cdot \varphi = 4 \cdot \varphi,$$
$$|\sphericalangle ANB| = 180° - 5 \cdot \varphi = 7 \cdot \varphi - 5 \cdot \varphi = 2 \cdot \varphi.$$

Všechna zjištění zapíšeme do obrázku. Protože ze shodnosti úhlů plyne i shodnost protilehlých stran, jsou na obrázku kromě trojúhelníku ABC pouze tyto rovnoramenné trojúhelníky:

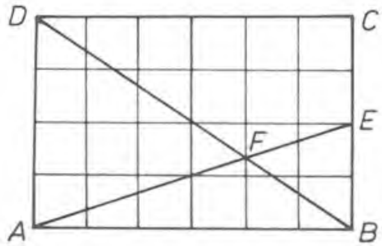
$$\triangle ABM \quad (\text{základna } BM)$$
$$\triangle ABN \quad (\text{základna } AN)$$
$$\triangle ACN \quad (\text{základna } AC)$$

Na obrázku jsou tedy čtyři rovnoramenné trojúhelníky.



Úloha 2 (36. r., Z6–I–3)

Vypočtěte, jakou část obsahu obdélníku $ABCD$ tvoří obsah
a) trojúhelníku ABF,
b) trojúhelníku BFE,
c) čtyřúhelníku $DFEC$,
d) trojúhelníku AFD.



Řešení. Jednotkami, ve kterých budeme vyjadřovat obsahy hledaných útvarů, budou *čtverečky* čtvercové sítě. Celý obdélník $ABCD$ má obsah

$$S = (6 \cdot 4) \text{ čtverečků} = 24 \text{ čtverečků}.$$

Z obrázku vidíme, že bod F, který je určen jako průsečík úseček AE a BD, leží na svislé čáře sítě. (V tercii dokážeme vysvětlit, že nás neklame zrak: Trojúhelník BFE je totiž „poloviční kopií“ trojúhelníku AFD, takže vzdálenost bodu F od úsečky AD je dvojnásobkem jeho vzdálenosti od úsečky BE.) Proto můžeme určit nejprve obsahy trojúhelníků AFD a BFE:

$$S_{AFD} = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\right) \text{ čtverečků} = 8 \text{ čtverečků}, \quad \text{tj. } S_{AFD} = \tfrac{1}{3} \cdot S$$
$$S_{BFE} = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \text{ čtverečků} = 2 \text{ čtverečky}, \quad \text{tj. } S_{BFE} = \tfrac{1}{12} \cdot S$$

Trojúhelník AEB má obsah $S_{AEB} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\right)$ čtverečků $= 6$ čtverečků a vznikl „slepením“ trojúhelníků ABF a BEF podél společné strany BF, proto

$$S_{ABF} = S_{ABE} - S_{BFE} = (6-2) \text{ čtverečků} = 4 \text{ čtverečky}, \quad \text{tj. } S_{ABF} = \tfrac{1}{6} \cdot S.$$

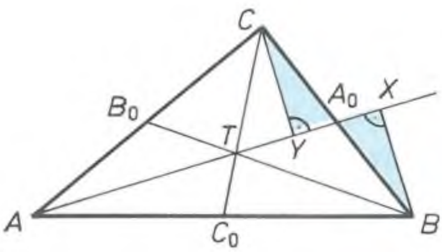
Obsah čtyřúhelníku $DFEC$ zjistíme, když od obsahu obdélníku $ABCD$ odečteme obsahy trojúhelníků AFD a AEB:

$$S_{DFEC} = S - S_{AFD} - S_{AEB} = (24 - 8 - 6) \text{ čtverečků} = 10 \text{ čtverečků},$$
$$\text{tj.} \quad S_{DFEC} = \tfrac{5}{12} \cdot S$$

Obsah trojúhelníku ABF je tedy $\frac{1}{6}$ obsahu obdélníku $ABCD$, obsah trojúhelníku BFE je $\frac{1}{12}$ tohoto obsahu, obsah čtyřúhelníku $DFEC$ je $\frac{5}{12}$ tohoto obsahu a obsah trojúhelníku AFD je $\frac{1}{3}$ tohoto obsahu.

Úloha 3 (31. r., Z6–I–8)
Je dán trojúhelník ABC. Označte A_0, B_0, C_0 středy stran BC, AC, AB a T průsečík úseček AA_0, BB_0 a CC_0. (Bod T je těžištěm trojúhelníku ABC.) Dokažte, že obsahy trojúhelníků ABT, BCT a CAT se rovnají.

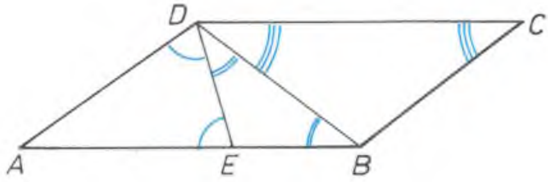
Řešení. Nejprve ukážeme, že se rovnají obsahy trojúhelníků ABT a CAT. Oba trojúhelníky mají společnou stranu AT. Pokusíme se proto zdůvodnit, že i výšky příslušné ke straně AT jsou shodné. Na obrázku jsou paty těchto výšek označeny X a Y. Trojúhelníky BXA_0 a CYA_0 jsou pravoúhlé a úhly BA_0X a CA_0Y jsou vrcholové, a tedy shodné. Proto jsou shodné i úhly XBA_0 a YCA_0. Podle věty *usu* platí $\triangle BXA_0 \cong \triangle CYA_0$, neboť $|BA_0| = |CA_0|$. Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne i shodnost odpovídajících si stran BX a CY. Proto mají trojúhelníky ABT a CAT shodné výšky ke společné straně AT, takže platí



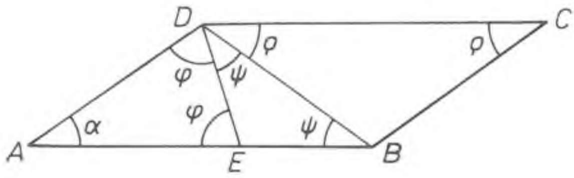
$$S_{ABT} = S_{CAT}.$$

Podobně se zdůvodní, že např. trojúhelník ABT má stejný obsah jako trojúhelník BCT. Proto se obsahy všech tří trojúhelníků ABT, BCT a CAT rovnají.

Úloha 4 (32. r., Z6–I–8)
Rovnoběžník $ABCD$ je složen ze tří rovnoramenných trojúhelníků ADE, BDE a BCD (viz obrázek). Zjistěte velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku $ABCD$.



Řešení. Označme úhly podle obrázku. Protější úhly rovnoběžníku jsou shodné, proto $\alpha = \varrho$. Úhel AED je vnější úhel trojúhelníku EDB, tedy $\varphi = \psi + \psi = 2 \cdot \psi$. Úhly



ABD a BDC jsou střídavé, proto platí $\psi = \varrho$, tedy i $\psi = \alpha$. Nyní sečteme vnitřní úhly v trojúhelníku AED:

$$\alpha + 2 \cdot \varphi = 180°$$

Dosadíme-li sem ψ za α a $2 \cdot \psi$ za φ, dostaneme rovnost

$$\psi + 2 \cdot 2 \cdot \psi = 180°, \quad \text{tzn.} \quad 5 \cdot \psi = 180°.$$

Proto $\psi = 36°$, tedy i $\alpha = 36°$. Vnitřní úhel při vrcholu B proto měří $180° - 36° = 144°$.

Velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku $ABCD$ jsou $36°$ a $144°$.

CVIČENÍ 10

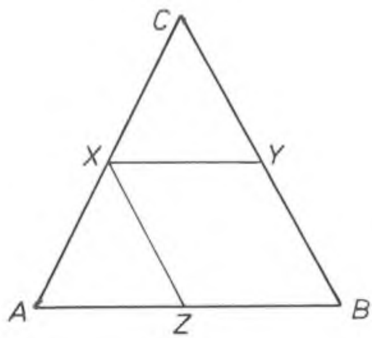
1. (30. r., Z6–I–3)
Je dáno pět úseček s délkami 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm a 9 cm. Kolik různých trojúhelníků je možné sestrojit z těchto úseček?

2. (40. r., Z6–II–1)
V daném trojúhelníku je největší úhel o $4°$ menší než součet ostatních dvou. Nejmenší úhel je čtyřikrát menší než součet ostatních dvou. Určete úhly daného trojúhelníku.

3. (40. r., Z6–I–6)
V trojúhelníku ABC platí:

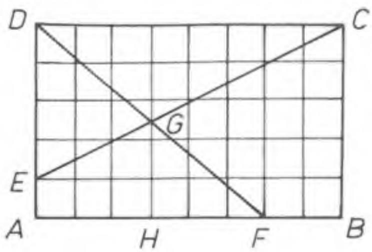
$|\sphericalangle ZBY| = 61°$, $|\sphericalangle XCY| = 55°$,
$|\sphericalangle ZXY| = 53°$, $|AZ| = |ZX|$

Zjistěte, zda jsou rovnoběžné
a) přímky AB a XY,
b) přímky BC a XZ.

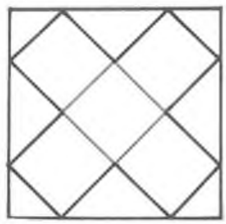


4. (36. r., Z6–II–4)
Jakou část obsahu obdélníku $ABCD$ tvoří obsah

a) čtyřúhelníku $AFGE$,
b) čtyřúhelníku $FBCG$,
c) trojúhelníku GCD,
d) trojúhelníku EGD?



5. (40. r., Z6–II–2)
Ze čtverce byl vystřižen kříž, který je složen z 5 shodných čtverců. Odpad tvořily rovnoramenné trojúhelníky. Součet jejich obsahů byl $48\,\text{cm}^2$. Určete obsah původního čtverce.



6. (38. r., Z6–I–2)
Nechť A, B, C, D, E, F jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku.

a) Kolik existuje trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech?
b) Kdybychom tyto trojúhelníky rozdělili do skupin tak, že v jedné skupině budou trojúhelníky se stejnými obsahy, kolik skupin by vzniklo?

7. (30. r., Z7–I–4)
Je dán obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 3\,\text{cm}$, $|BC| = 2\,\text{cm}$, S je střed souměrnosti obdélníku. Označme S_1 obraz bodu S ve středové souměrnosti se středem v bodě A a S_2 obraz bodu S ve středové souměrnosti se středem v bodě B. Vypočítejte obsah trojúhelníku SS_1S_2.

8. (37. r., Z6–I–3)
Sestrojte pětiúhelník $ABCDE$, pro který platí: $|AB| = 4\,\text{cm}$, $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|CD| = 11\,\text{cm}$, $|DE| = 3\,\text{cm}$, $|EA| = 2\,\text{cm}$. Délky úhlopříček AC, AD jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly.

9. (31. r., Z6–I–5)
Nad úhlopříčkou AC daného obdélníku $ABCD$ sestrojte obdélník $ACKL$ tak, aby oba obdélníky měly stejné obsahy.

10. (37. r., Z6–II–3)
Je dán obdélník $ABCD$ se stranou AB délky 60 mm. Určete na straně CD bod X a na straně AB bod Y tak, aby úsečky AX, CY rozdělily obdélník na tři části se stejným obsahem. Jsou polohy bodů X, Y závislé na délce strany BC obdélníku $ABCD$?

14 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

1 Trojúhelník

1. Sestrojte úhly ABX a BAY v téže polorovině s hraniční přímkou AB tak, aby $|\sphericalangle ABX| = 65°$ a $|\sphericalangle BAY| = 50°$. Vybarvěte jejich průnik. Jaký je to útvar?

2. Bez rýsování rozhodněte, zda existuje trojúhelník s délkami stran x, y, z:
   a) $x = 6\,\text{cm},\ y = 7\,\text{cm},\ z = 3\,\text{cm}$ b) $x = y = 4\,\text{dm},\ z = 35\,\text{cm}$
   c) $x = y = 5\,\text{dm},\ z = 1\,\text{dm}$ d) $x = 30\,\text{cm},\ y = 2\,\text{dm},\ z = 1\,\text{dm}$
   e) $x = 5\,\text{dm},\ y = z = 35\,\text{cm}$

3. Narýsujte ostroúhlý, tupoúhlý a pravoúhlý trojúhelník. Změřte, jaké velikosti mají jejich vnitřní úhly.

4. Sestrojte trojúhelník se stranami 3 cm, 4 cm a 5 cm a druhý trojúhelník se stranami 4,5 cm, 6 cm a 7,5 cm. Ověřte měřením, že oba trojúhelníky jsou pravoúhlé. Jak se nazývají jejich strany?

5. Sestrojte dva trojúhelníky KLM a PQR, které nejsou shodné, mají však přibližně stejné obvody. Pak tyto obvody určete graficky a jejich délky porovnejte.

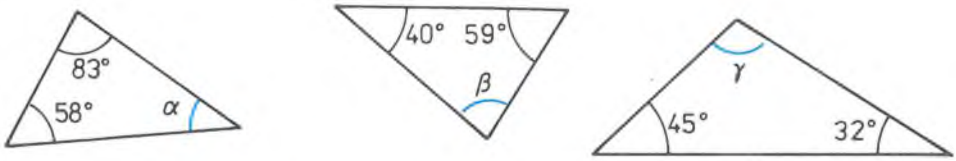
6. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a vyznačte v něm vnitřní úhly α, β a γ. Při každém vrcholu sestrojte jeden vnější úhel a označte je α_1, β_1 a γ_1. Změřte velikosti vnějších úhlů, zapište je a vypočtěte součet $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$.

7. Vypočtěte velikosti vnějších úhlů α_1, β_1 a γ_1 trojúhelníku ABC, jestliže jeho vnitřní úhly mají velikosti:
   a) $\alpha = 41°,\ \beta = 53°,\ \gamma = 86°$
   b) $\alpha = 35°,\ \beta = 49°,\ \gamma = 96°$
   c) $\alpha = 26°20',\ \beta = 73°15',\ \gamma = 80°25'$

8. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů α, β a γ trojúhelníku ABC, jestliže znáte velikosti jeho vnějších úhlů α_1, β_1 a γ_1:
   a) $\alpha_1 = 70°,\ \beta_1 = 150°,\ \gamma_1 = 140°$
   b) $\alpha_1 = 130°,\ \beta_1 = 102°,\ \gamma_1 = 128°$
   c) $\alpha_1 = 116°30',\ \beta_1 = 137°,\ \gamma_1 = 106°30'$

9. Sestrojte jeden ostroúhlý a jeden tupoúhlý trojúhelník. V každém z nich změřte velikosti vnitřních úhlů a určete jejich součet. Jaké výsledky dostanete, budete-li správně měřit a počítat?

10. Načrtněte si obrázky trojúhelníků podle vzoru v učebnici a pak vypočtěte velikosti úhlů α, β a γ.



11. Vypočtěte velikost zbývajícího vnitřního úhlu trojúhelníku ABC:

a) $\alpha = 62°$, $\beta = 28°$ b) $\alpha = 105°$, $\gamma = 41°$

c) $\beta = 63°10'$, $\gamma = 78°$

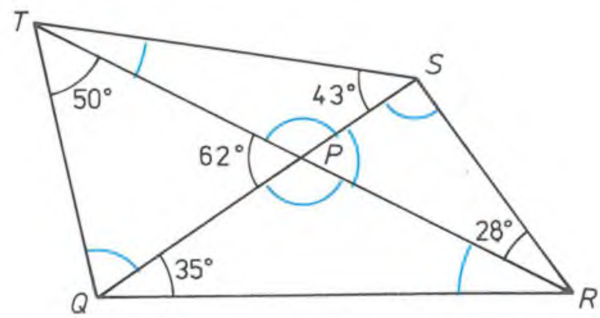
12. V trojúhelníku FGH má vnější úhel při vrcholu F velikost 132°. Vnitřní úhel při vrcholu H má velikost 69°. Vypočtěte velikosti zbývajících vnitřních a vnějších úhlů.

13. Sestrojte libovolný tupoúhlý trojúhelník KLM. Změřte velikosti jeho ostrých vnitřních úhlů a pak vypočtěte velikost jeho tupého úhlu. Výsledek zkontrolujte měřením.

14. Velikost jednoho vnitřního úhlu trojúhelníku je $75°40'$. Druhý úhel má velikost o $12°30'$ větší. Určete velikost zbývajícího vnitřního úhlu. Je tento trojúhelník tupoúhlý?

15. Sestrojte libovolný trojúhelník ABC. Označte jeho vnitřní úhly α, β, γ a vnější úhly α_1, β_1, γ_1. Graficky určete součty $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ a $\gamma+\alpha$. Pokud budete přesně rýsovat, vyjde vám $\alpha+\beta=\gamma_1$, $\beta+\gamma=\alpha_1$ a $\gamma+\alpha=\beta_1$. Ověřte měřením.

16. Na obrázku je čtyřúhelník $QRST$. Průsečík jeho úhlopříček je označen P. Načrtněte tento čtyřúhelník podle vzoru v učebnici a vypočtěte velikosti úhlů vyznačených obloučky.



∗**17.** Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku ABC, jestliže platí $\alpha = 2 \cdot \gamma$ a $\beta = 6 \cdot \gamma$.

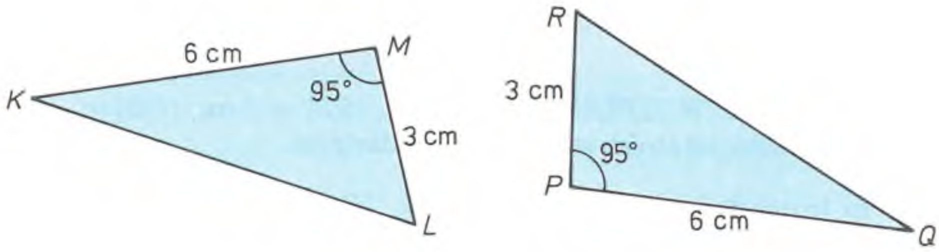
∗**18.** V trojúhelníku ABC je úhel α dvakrát větší než úhel β a úhel β je třikrát větší než úhel γ. Vypočtěte velikosti všech tří vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

2 Shodnost trojúhelníků

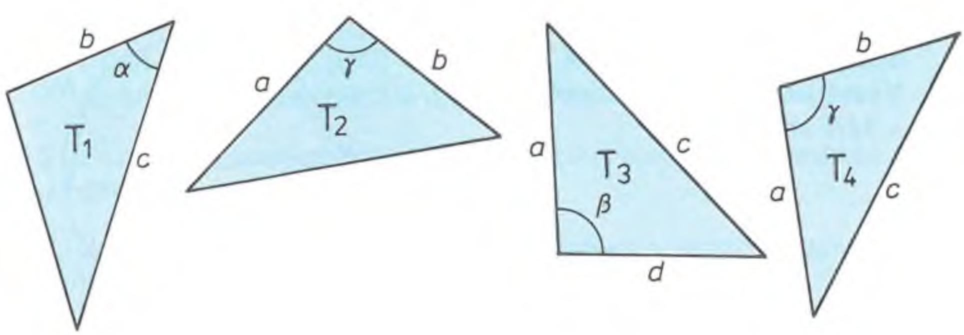
19. Sestrojte libovolný trojúhelník ABC. Pak sestrojte trojúhelník KLM shodný s trojúhelníkem ABC tak, aby vrchol K splynul s vrcholem A, vrchol L s vrcholem B a aby body M a C ležely v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB.

20. Na obrázku jsou dva shodné trojúhelníky. Které z následujících zápisů jsou správné?

a) $\triangle KLM \cong \triangle PQR$
b) $\triangle KLM \cong \triangle QRP$
c) $\triangle LMK \cong \triangle PQR$
d) $\triangle LMK \cong \triangle QRP$
e) $\triangle MLK \cong \triangle RPQ$
f) $\triangle MLK \cong \triangle PQR$



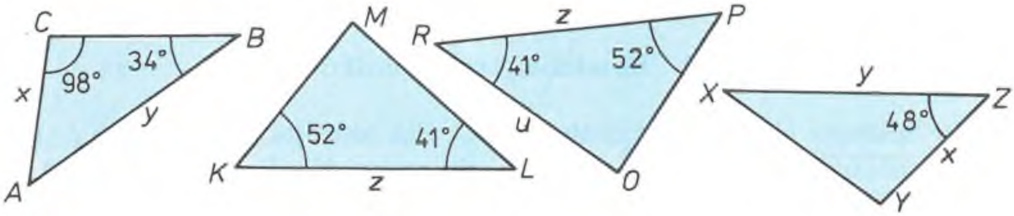
21. Na obrázku je jediná dvojice shodných trojúhelníků. Najděte ji. (Pouze ty strany a úhly, které jsou označeny stejnými písmeny, jsou zaručeně shodné.)



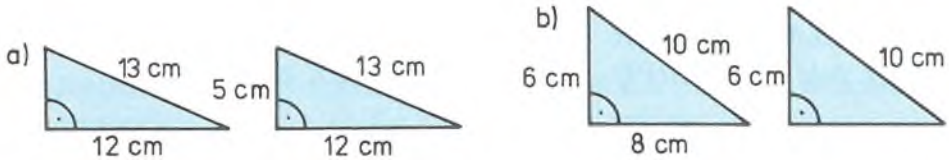
22. Vyberte z obrázku dvojice shodných trojúhelníků, jejichž shodnost plyne

a) z věty *sus*, b) z věty *usu*,

víte-li, že $x \doteq 2{,}5\,\mathrm{cm}$, $y \doteq 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $z \doteq 5\,\mathrm{cm}$, $u \doteq 4\,\mathrm{cm}$.



23. Podle které věty o shodnosti trojúhelníků jsou dané trojúhelníky shodné?



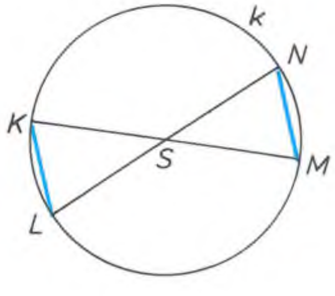
24. Platí: $\triangle RST \cong \triangle PQO$, $|RS| = 4\,\mathrm{cm}$, $|ST| = 5\,\mathrm{cm}$, $|PO| = 6\,\mathrm{cm}$. Určete délky ostatních stran obou trojúhelníků.

25. Pro trojúhelníky PQR a XYZ platí: $|PQ| = 4\,\mathrm{cm}$, $|PR| = 9\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle PQR| = 30°$, $|ZY| = 4\,\mathrm{cm}$, $|XZ| = 9\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ZYX| = 30°$. Jsou tyto trojúhelníky shodné? Jestliže ano, jejich shodnost zapište.

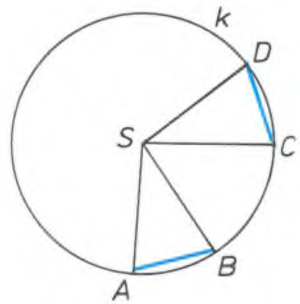
26. Je dán čtverec $KLMN$. Bod S je jeho střed. Vysvětlete, proč platí:

a) $\triangle KLM \cong \triangle MNK$ b) $\triangle KLS \cong \triangle MNS$

27. Na obrázku je kružnice k se středem S a její průměry LN a KM. Vysvětlete, proč jsou úsečky KL a MN shodné.



28. Na obrázku jsou dvě shodné úsečky AB a CD, jejichž krajní body leží na kružnici k se středem S. Vysvětlete, proč jsou úhly ASB a CSD shodné.



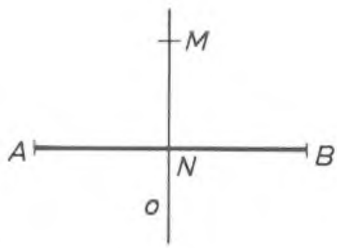
29. Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení o pravoúhlých trojúhelnících:

a) Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v obou odvěsnách.

b) Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v přeponě a jedné odvěsně.

c) Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné odvěsně a přilehlém ostrém úhlu.

∗**30.** Na ose o úsečky AB jsou dány dva různé body M a N. Bod N je středem úsečky AB. Zdůvodněte, proč jsou trojúhelníky MAN a MBN shodné.



3 Kružnice opsaná a vepsaná

31. Sestrojte trojúhelník ABC a opište mu kružnici.

a) $|AB| = 4\,\text{cm}$, $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|CA| = 4{,}5\,\text{cm}$

b) $|AB| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|BC| = 7{,}5\,\text{cm}$, $|CA| = 6\,\text{cm}$

c) $|AB| = 7{,}5\,\text{cm}$, $|BC| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|CA| = 5\,\text{cm}$

32. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník a opište mu kružnici. (Uvědomte si předem, kde leží její střed.)

33. Zvolte tři různé body E, F, G, které neleží v přímce. Sestrojte kružnici k, která prochází všemi třemi zvolenými body.

34. Sestrojte trojúhelník KLM a vepište mu kružnici.

a) $|KL| = 6\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 6{,}8\,\mathrm{cm}$, $|MK| = 6\,\mathrm{cm}$
b) $|KL| = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 8\,\mathrm{cm}$, $|MK| = 6\,\mathrm{cm}$
c) $|KL| = 10{,}5\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 6{,}8\,\mathrm{cm}$, $|MK| = 7{,}5\,\mathrm{cm}$

35. Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm. Úhlopříčkou AC ho rozdělte na dva trojúhelníky ABC a ADC. Každému trojúhelníku vepište kružnici. Jaká je vzájemná poloha těchto kružnic?

36. Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm. Úhlopříčkou BD ho rozdělte na dva trojúhelníky ABD a BCD. Každému trojúhelníku opište kružnici. Jaká je vzájemná poloha těchto kružnic?

■ **37.** Sestrojte libovolný trojúhelník BCD. Vepište mu kružnici k a označte S její střed. Dále sestrojte trojúhelník $B'C'D'$, který je obrazem trojúhelníku BCD ve středové souměrnosti se středem S. Musíte rýsovat kružnici k' vepsanou trojúhelníku $B'C'D'$?

4 Střední příčky, těžnice, výšky

38. Sestrojte libovolný pravoúhlý trojúhelník. Vyznačte v něm všechny tři střední příčky a měřením ověřte, že dvě z nich svírají pravý úhel.

39. Sestrojte střední příčky trojúhelníku KLM, ve kterém $|KL| = 6\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 4\,\mathrm{cm}$, $|KM| = 8\,\mathrm{cm}$. Změřte délky sestrojených příček a porovnejte je s délkami stran trojúhelníku. Vyjádřete celým číslem v milimetrech, jaké nepřesnosti jste se dopustili.

40. Body M_1, N_1 a O_1 jsou středy stran trojúhelníku MNO. Vypočtěte jeho obvod, je-li obvod trojúhelníku $M_1N_1O_1$ roven 22 cm.

41. Sestrojte libovolný tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem γ při vrcholu C. Sestrojte jeho střední příčky A_1B_1, B_1C_1 a C_1B_1. Vysvětlete, proč $\sphericalangle A_1C_1B_1 \cong \gamma$.

42. V trojúhelníku ABC vyznačíme středy stran A_1, B_1 a C_1. Vysvětlete, proč vnitřní úhly trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jsou shodné s vnitřními úhly trojúhelníku ABC.

43. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a sestrojte jeho těžnice t_a, t_b, t_c a těžiště T. Přesvědčte se měřením, že každá těžnice je bodem T rozdělena na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 1.

44. Sestrojte libovolný trojúhelník CDE a jeho těžnice z vrcholů D a E. Vyznačte těžiště T trojúhelníku CDE. Pak narýsujte polopřímku CT a její průsečík se stranou DE označte X. Určete, která z úseček DX a EX je delší. Jak se nazývá úsečka CX?

45. Narýsujte libovolný trojúhelník a sestrojte v něm jednu těžnici. Změřte její délku a po výpočtu vyznačte, kde podle vás leží těžiště trojúhelníku. Pak sestrojte zbývající dvě těžnice a zkontrolujte, zda se opravdu protínají ve vyznačeném bodě.

46. Sestrojte libovolný pravoúhlý trojúhelník XYZ s přeponou XY. Narýsujte jeho těžnici z vrcholu Z a porovnejte její délku s délkou přepony a průměrem kružnice opsané trojúhelníku XYZ.

***47.** Zvolte v rovině tři body X, S, T, které neleží v jedné přímce. Sestrojte trojúhelník XYZ tak, aby bod S byl středem strany XY a bod T těžištěm tohoto trojúhelníku.

48. Narýsujte libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte jeho výšky v_a, v_b, v_c a jejich průsečík V.

49. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $a = 6\,\text{cm}$ a $b = 8\,\text{cm}$. Určete délky výšek v_a a v_b.

50. Sestrojte libovolný trojúhelník PQR tak, aby $|\sphericalangle PQR| = 96°$. Najděte průsečík jeho výšek. Jakou má polohu vzhledem k trojúhelníku PQR?

■51. Z papíru vystřihněte tři shodné ostroúhlé trojúhelníky s různými délkami stran. V prvním vyznačte výšky, v druhém osy vnitřních úhlů a v třetím těžnice. Nesmíte při tom používat tužku, pravítko ani měřítko. Je pouze povoleno papír přehýbat.

5 Osově souměrné trojúhelníky

52. Narýsujte tři rovnoramenné trojúhelníky s různými úhly při hlavním vrcholu,

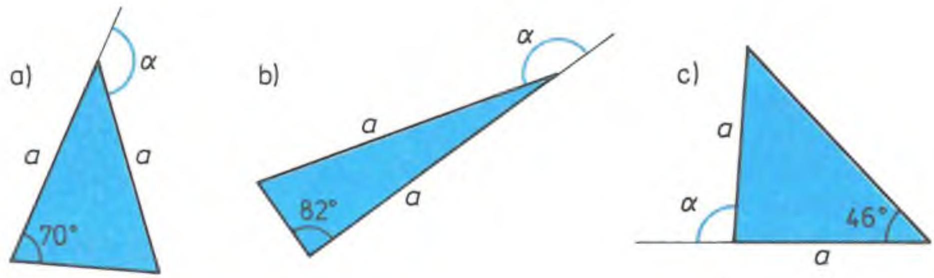
a) jejichž základny mají délku 4 cm,

b) jejichž ramena mají délku 4 cm.

53. Obvod rovnoramenného trojúhelníku je půl metru. Jeho rameno má délku 16 cm. Určete délku jeho základny.

54. Rovnoramenný trojúhelník má obvod 22 cm. Jeho základna je o 4 cm delší než rameno. Vypočtěte délky všech jeho stran.

55. Načrtněte si rovnoramenný trojúhelník podle obrázku a vypočtěte velikost úhlu α.

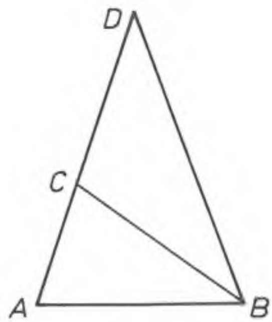


56. Jaký je vztah mezi vnějším úhlem při hlavním vrcholu rovnoramenného trojúhelníku a vnitřním úhlem při jeho základně?

57. O rovnoramenném trojúhelníku víme, že jeden jeho vnitřní úhel má velikost 40°. Vypočtěte velikosti ostatních vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku. Najděte všechna řešení.

58. Narýsujte libovolnou kružnici k a pak sestrojte libovolný rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, jehož vrcholy leží na kružnici k.

59. Na obrázku je rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AC a rovnoramenný trojúhelník ABD se základnou AB. Úhel ADB má velikost 30°. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.



60. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá:

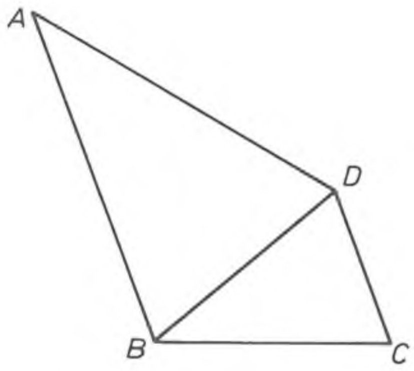
a) Rovnoramenné trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v ramenu a základně.

b) Rovnoramenné trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v ramenu a úhlu při hlavním vrcholu.

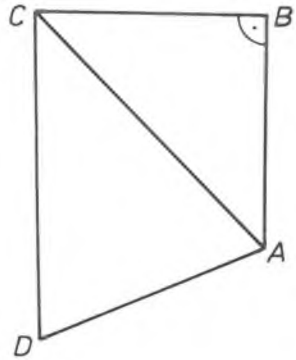
c) Rovnoramenné trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v základně a vnitřním úhlu při základně.

61. Vysvětlete, proč středy stran rovnostranného trojúhelníku tvoří vrcholy trojúhelníku, který je také rovnostranný.

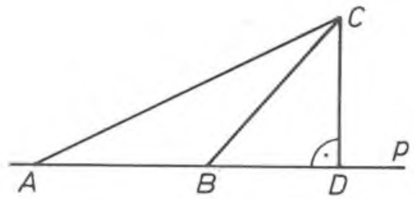
62. Čtyřúhelník $ABCD$ je složen ze dvou rovnoramenných trojúhelníků: trojúhelníku ABD se základnou BD a trojúhelníku BCD se základnou CD. Platí: $|\sphericalangle DBC| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 114°$. Určete velikosti vnitřních úhlů obou trojúhelníků.



63. Na náčrtku jsou dva rovnoramenné trojúhelníky ABC a ACD. Trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu B, trojúhelník ACD má základnu AD. Ramena AB a CD jsou rovnoběžná. Určete velikosti vnitřních úhlů obou trojúhelníků.



∗64. Na obrázku je rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AC a pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník BDC se základnou BC. Body A, B, D leží na přímce p. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ADC.

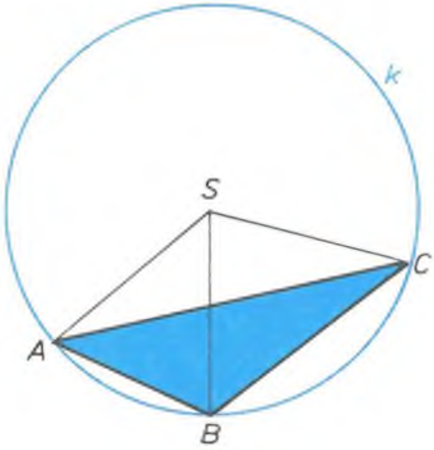


****65.** Na obrázku je trojúhelník ABC, jemuž je opsána kružnice k se středem S. Úhel ASB má velikost $50°$, úhel BSC má velikost α. Určete velikost úhlu ACB, je-li:

a) $\alpha = 78°$

b) $\alpha = 80°$

c) $\alpha = 82°$



***66.** Úhel při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABC je

a) dvojnásobkem, b) polovinou

úhlu při hlavním vrcholu C. Vypočtěte velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

***67.** Určete vnitřní úhly rovnoramenného trojúhelníku, jestliže

a) osa úhlu při hlavním vrcholu svírá s ramenem úhel $28°$,

b) osa úhlu při základně svírá s ramenem úhel $28°$.

****68.** Osa vnitřního úhlu při vrcholu P trojúhelníku PQR prochází středem S protější strany QR. Vysvětlete, proč platí $|PQ| = |PR|$. (Návod: Ukažte nejdříve, že pomocný trojúhelník $PP'R$, kde P' je obraz bodu P ve středové souměrnosti se středem S, je rovnoramenný.)

****69.** Vysvětlete, proč každý trojúhelník, ve kterém splývá střed kružnice vepsané s těžištěm, je rovnostranný.

****70.** Narýsujte kružnici $k(S; r = 2{,}5\,\text{cm})$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník PQR, jehož vrcholy leží na kružnici k.

71. Sestrojte kružnici $k(S; r = 3{,}2\,\text{cm})$. Vepište do ní pravidelný dvanáctiúhelník.

72. Na obrázku je pravidelný osmiúhelník $JKLMNOPR$ vepsaný do kružnice se středem S. Určete velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku JKS.

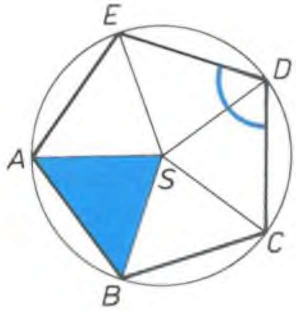
73. Vypočtěte velikost vnitřního úhlu pravidelného osmiúhelníku. Pak takový osmiúhelník narýsujte a velikost vnitřního úhlu změřte.

∗74. Vypočtěte velikost vnitřního úhlu pravidelného šestnáctiúhelníku.

75. Na obrázku je pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ vepsaný do kružnice se středem S.

a) Určete velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABS.

b) Vypočtěte velikost úhlu CDE.



∗76. Vysvětlete, jak vám následující obrázky pomohou k určení součtu vnitřních úhlů v pravidelném n-úhelníku. Určete součet velikostí vnitřních úhlů v pravidelném čtyřúhelníku, pětiúhelníku, šestiúhelníku, sedmiúhelníku i osmiúhelníku.

∗77. Musí být šestiúhelník, který je osově souměrný podle každé z os svých stran, pravidelný?

6 Konstrukce trojúhelníku

78. Narýsujte tři úsečky takové, aby mohly být shodné se stranami jednoho trojúhelníku. Potom tento trojúhelník sestrojte.

79. Narýsujte dvě úsečky a úhel ω menší než 180°. Sestrojte takový trojúhelník, aby narýsované úsečky byly shodné s jeho dvěma stranami a aby tyto strany svíraly úhel shodný s úhlem ω.

80. Sestrojte dva pravoúhlé trojúhelníky: jeden s odvěsnami 3 cm a 4 cm, druhý s odvěsnami 1,4 cm a 4,8 cm. Budete-li přesně rýsovat, zjistíte, že oba trojúhelníky mají shodné přepony.

81. Sestrojte trojúhelník ABC: $c = 7{,}3\,\text{cm}$, $\alpha = 31°$, $\beta = 41°$ a trojúhelník KLM: $|ML| = 7{,}3\,\text{cm}$, $|LK| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle MKL| = 118°$. Jsou trojúhelníky ABC a KLM shodné?

82. Emil si zapomněl zapsat zadání domácího úkolu. Zapamatoval si pouze to, že měl sestrojit rovnoramenný trojúhelník se stranami 4 cm a 5 cm. Pro jistotu narýsoval dva trojúhelníky. Narýsujte je také. Kolik trojúhelníků by měl Emil narýsovat, kdyby zadané strany rovnoramenného trojúhelníku byly 2 cm a 5 cm?

7 Čtyřúhelník

83. Jeden vnitřní úhel čtyřúhelníku má velikost 56°20′. Druhý úhel je dvakrát větší. Zbývající úhly jsou shodné. Vypočtěte jejich velikosti.

84. Sestrojte čtyřúhelník $KLMN$, jestliže je dáno: $|KL| = 1{,}5\,\text{cm}$, $|MK| = 4{,}7\,\text{cm}$, $|NK| = 6\,\text{cm}$, $|ML| = 4{,}3\,\text{cm}$, $|MN| = 4{,}4\,\text{cm}$

85. Sestrojte čtyřúhelník $PQRS$, je-li dáno: $|PQ| = 6\,\text{cm}$, $|QR| = 4\,\text{cm}$, $|RS| = 2\,\text{cm}$, $|PS| = 5{,}7\,\text{cm}$, $|\sphericalangle PQR| = 88°$

∗86. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ je $|AB| = 3\,\text{cm}$, $|BD| = 5\,\text{cm}$, $|BC| = 1\,\text{cm}$. Určete délky stran AD a CD, víte-li, že jsou shodné a jejich délka v centimetrech je vyjádřena celým číslem.

8 Lichoběžník

87. Obvod rovnoramenného lichoběžníku je 26,6 cm. Jedna jeho základna má délku 2,6 cm a druhá má stejnou délku jako jeho rameno. Určete délky stran lichoběžníku.

88. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD. Vypočtěte velikosti jeho zbývajících vnitřních úhlů, je-li:

a) $\gamma = 112°$, $AD \perp DC$ b) $\alpha = 100°$, $BC \perp CD$
c) $\beta = 92°$, $|BC| = |AD|$ d) $\delta = 64°20'$, $|BC| = |AD|$
e) $\alpha = 78°$, $\beta = 42°$ f) $\gamma = 102°$, $\delta = 73°15'$

89. Sestrojte lichoběžník $FGHI$ ($FG \parallel HI$), je-li dáno:

a) $|HI| = 5{,}4\,\text{cm}$, $|FI| = 4\,\text{cm}$, $|FG| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle HIF| = 52°$
b) $|FG| = 6\,\text{cm}$, $|FI| = 3\,\text{cm}$, $|IH| = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle HIF| = 90°$

9 Rovnoběžník

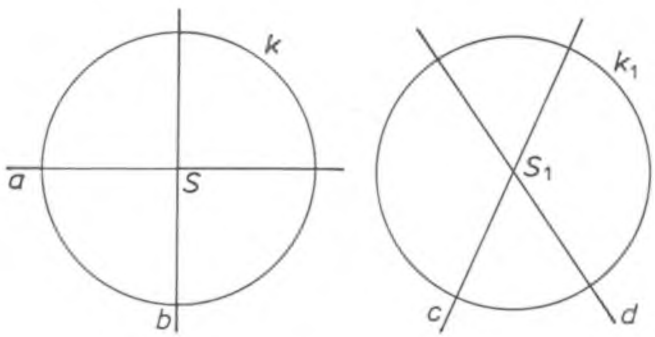
90. Sestrojte libovolný kosodélník $ABCD$ a kosodélník $A'B'C'D'$, který je s ním souměrně sdružený podle úhlopříčky AC.

91. Dokažte, že úhlopříčky rozdělují kosočtverec na čtyři shodné trojúhelníky.

92. Bez rýsování rozhodněte, zda existuje rovnoběžník, jehož strana má délku 5 cm a jehož úhlopříčky měří

a) 2 cm a 4 cm, b) 4 cm a 6 cm, c) 6 cm a 8 cm.

93. Na obrázku procházejí kolmice a, b středem kružnice k a různoběžky c, d středem kružnice k_1. Průsečíky přímek s kružnicemi jsou vrcholy dvou čtyřúhelníků. Jak se tyto čtyřúhelníky nazývají?



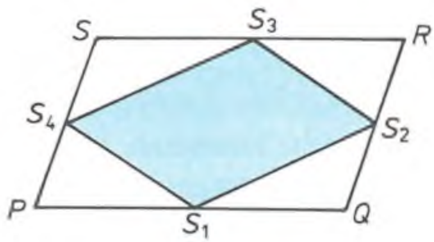
94. Zvolte tři různé body A, B, S neležící v přímce a sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem souměrnosti S.

95. Sestrojte čtverec a obdélník, které mají

a) stejné obvody, b) stejné obsahy.

96. Jak se nazývá rovnoběžník, kterému lze jednu kružnici opsat a druhou kružnici vepsat?

∗97. V rovnoběžníku $PQRS$ jsou vyznačeny středy jeho stran S_1, S_2, S_3 a S_4. Vysvětlete, proč čtyřúhelník $S_1S_2S_3S_4$ je rovnoběžník.



∗98. Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně délky 3 cm. Pak sestrojte vně tohoto čtverce rovnostranné trojúhelníky ABE, BCF, CDG, DAH. Vysvětlete, proč čtyřúhelník $EFGH$ je také čtverec.

10 Obsahy

99. Narýsujte dva kosodélníky tak, aby nebyly shodné, měly však přibližně stejné obsahy. Pak změřte potřebné údaje, vypočtěte obsahy obou kosodélníků a výsledky porovnejte.

100. Vypočtěte obsah rovnoběžníku $ABCD$, je-li:

a) $a = 11\,\text{cm}$, $v_a = 8{,}5\,\text{cm}$ b) $b = 3\,\text{dm}$, $v_b = 15\,\text{cm}$

c) $b = 4{,}3\,\text{m}$, $v_b = 3\,\text{m}$

101. Vypočtěte obsah kosočtverce, který má výšku 3,5 cm a obvod 16 cm.

102. Obsah rovnoběžníku je $3{,}42\,\text{dm}^2$, jeho strana má délku 1,8 dm. Vypočtěte výšku příslušnou k této straně.

103. Vypočtěte obvod rovnoběžníku, jehož obsah je $210\,\text{cm}^2$. Jedna jeho strana má délku 14 cm a výška příslušná k sousední straně je 10 cm.

104. Určete obsah pravoúhlého trojúhelníku PQR, znáte-li délky jeho odvěsen p a r:

a) $p = 5\,\text{cm}$, $r = 12\,\text{cm}$ b) $p = 36\,\text{cm}$, $r = 1{,}8\,\text{dm}$

c) $p = 9{,}6\,\text{dm}$, $r = 85\,\text{cm}$

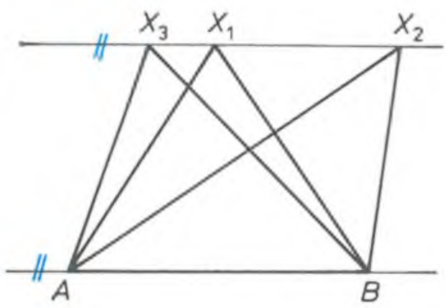
105. Trojúhelník MNK má strany m, n, k a příslušné výšky v_m, v_n, v_k. Vypočtěte jeho obsah, jestliže platí:

a) $m = 5\,\text{cm}$, $n = 4\,\text{cm}$, $v_m = 3{,}9\,\text{cm}$

b) $k = 7{,}8\,\text{dm}$, $v_n = 32\,\text{cm}$, $v_k = 43\,\text{cm}$

c) $n = 5\,\text{dm}$, $k = 4{,}2\,\text{dm}$, $v_n = 27\,\text{cm}$

106. Který z trojúhelníků ABX_1, ABX_2, ABX_3 má největší obsah?

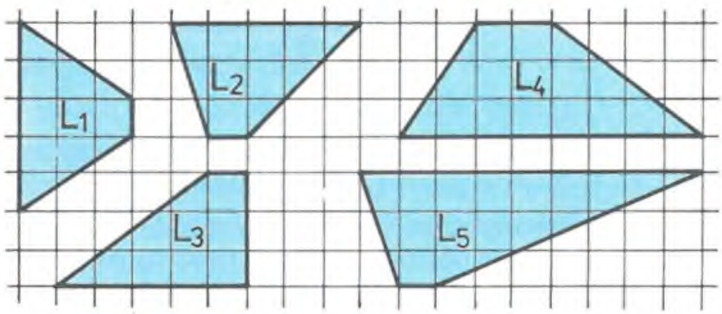


□ **107.** Mají lichoběžníky

a) L_1, L_2, L_3,

b) L_4, L_5

stejné obsahy?



108. Lichoběžník $ABCD$ má základny a, c a výšku v. Vypočtěte jeho obsah, je-li:

a) $a = 20\,\text{cm}$, $c = 10{,}4\,\text{cm}$, $v = 4\,\text{cm}$

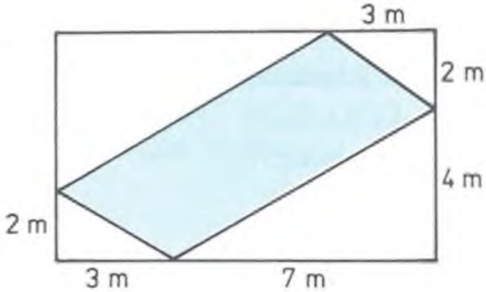
b) $a = 8\,\text{cm}$, $c = 2 \cdot a$, $v = \frac{1}{2} \cdot a$

109. Narýsujte lichoběžník s výškou 2 cm. Změřte potřebné údaje a vypočtěte jeho obsah.

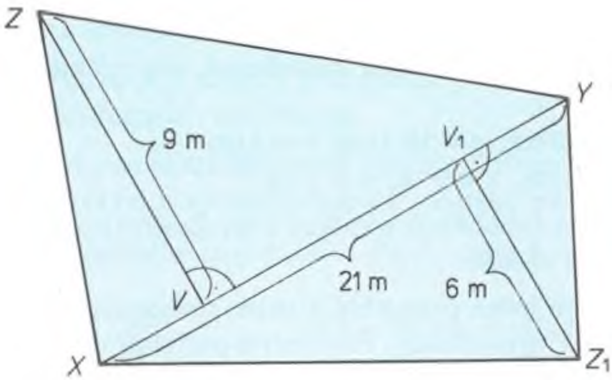
110. Narýsujte jeden pravoúhlý a jeden rovnoramenný lichoběžník s přibližně stejnými obsahy. Pak změřte potřebné údaje, obsahy vypočtěte a výsledky porovnejte.

111. Štít chalupy má tvar rovnoramenného trojúhelníku. Je třeba ho obložit dřevem. Kolik čtverečných metrů prken je třeba, je-li šířka chalupy 4 m, štít přesahuje na každé straně o 30 cm a vrchol štítu je 2,8 m nad horním okrajem zdi? Ke spotřebě připočtěte 10 % na odpad při řezání.

112. Obdélníkový záhon v zámecké zahradě je oset trávou a osázen růžemi. Na obrázku je plocha osázená růžemi vybarvena. Vypočtěte její výměru. (Potřebné údaje jsou na obrázku.)



113. Pan Bílý chce koupit pozemek. Prodávající pan Černý uvedl, že pozemek má výměru 1,6 aru. Pan Bílý se chtěl přesvědčit, zda je tento údaj správný. Pozemek přeměřil, nakreslil si jeho plánek (viz obrázek) a výměru pozemku vypočítal. Vyšlo mu totéž co panu Černému?



114. Překreslete si tabulku do sešitu a doplňte chybějící údaje o stranách a výškách trojúhelníku ABC.

Strana a	Výška v_a	Strana b	Výška v_b
6 cm	2 cm	5 cm	?
9 cm	5 cm	?	7,5 cm
7,5 cm	?	9 cm	2,5 cm
?	1,8 dm	2,34 dm	2 dm

∗115. Překreslete si tabulku do sešitu a doplňte chybějící údaje:

	Strana	Příslušná výška	Obsah
rovnoběžník	12 cm	5,2 cm	? cm^2
rovnoběžník	2,4 dm	? cm	336 cm^2
trojúhelník	6,8 cm	1,2 dm	? cm^2
trojúhelník	? dm	1,5 dm	270 cm^2
trojúhelník	2,7 dm	? cm	297 cm^2

116. Narýsujte dva trojúhelníky

a) s jednou shodnou stranou a různými obsahy,

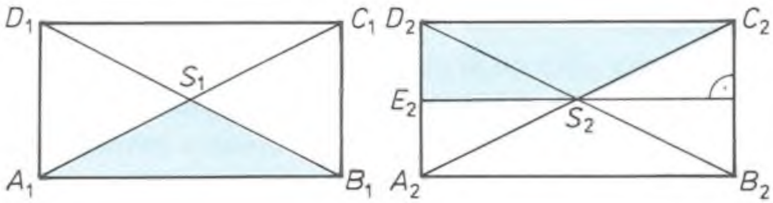
b) s jednou shodnou výškou a různými obsahy,

c) které nejsou shodné, ale mají stejné obsahy.

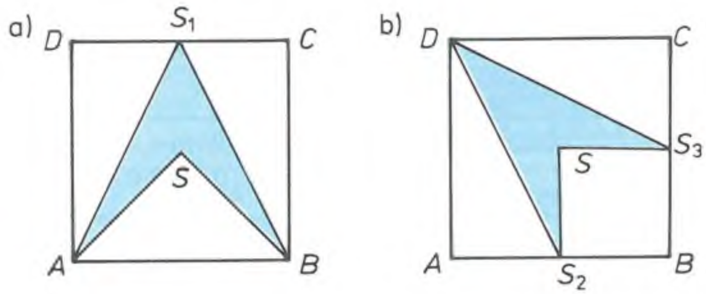
∗117. Lichoběžník má základny délek 4 cm a 7 cm, jeho obsah je 12,65 cm^2. Vypočtěte jeho výšku.

∗118. Narýsujte čtverec o straně 4 cm. Vypočtěte potřebné údaje a pak sestrojte nějaký obdélník, trojúhelník, kosodélník a lichoběžník o stejném obsahu jako narýsovaný čtverec.

∗119. Na obrázku jsou shodné obdélníky. Každý z nich má obvod 24 cm a jednu stranu dvakrát delší než druhou. Vypočtěte obsahy vybarveného trojúhelníku a lichoběžníku.



****120.** Vyjádřete zlomkem, jakou část obsahu čtverce $ABCD$ tvoří obsahy vybarvených obrazců. Bod S je střed čtverce, body S_1, S_2, S_3 jsou středy.



11 Různé úlohy

□121. Doplňte na místo teček „je menší než“, „je větší než“ nebo „rovná se“, aby tvrzení platilo:

a) Součet ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku ... 90°.

b) Součet ostrých úhlů v tupoúhlém trojúhelníku ... 90°.

c) Součet dvou vnitřních úhlů v rovnostranném trojúhelníku ... 90°.

d) Vnější úhel v rovnostranném trojúhelníku ... 90°.

□122. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, který je

a) rovnostranný,

b) pravoúhlý rovnoramenný,

c) pravoúhlý s jedním ostrým úhlem dvakrát větším než druhým.

123. Narýsujte nějaký pravoúhlý trojúhelník, který je

a) různostranný, b) rovnoramenný, c) rovnostranný.

■124. Úlohy z učebnice z roku 1934:

a) Jak velký je součet úhlů vnějších v trojúhelníku?

b) Jak velký je součet úhlů vnějších při přeponě v trojúhelníku pravoúhlém?

c) Srovnejte úhly vnější při základně rovnoramenného trojúhelníku.

d) Jak velké jsou vnější úhly v trojúhelníku rovnostranném?

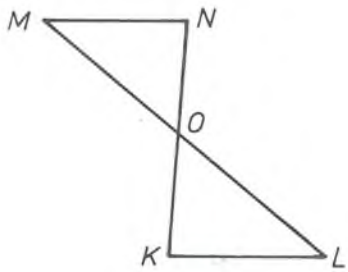
e) Vnější úhel při základně v trojúhelníku rovnoramenném jest 122°36′, vypočtěte úhly vnitřní.

f) Vnější úhel při přeponě v trojúhelníku pravoúhlém jest 148°29′, vypočtěte úhly vnitřní.

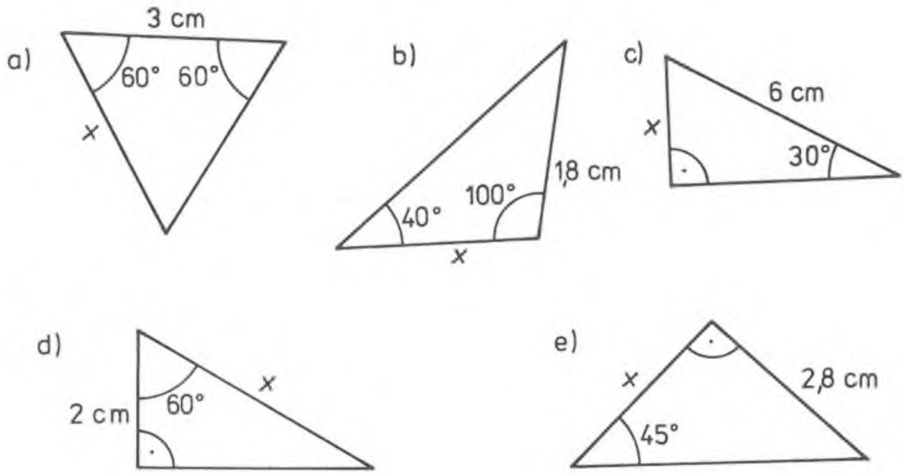
g) Je-li v trojúhelníku rovnoramenném rameno 6, stanovte, jak velkých hodnot může nabýt základna. (Vyjádřete celými čísly!)

h) Je-li v trojúhelníku rovnoramenném základna 6, stanovte, jak velkých hodnot může nabýt rameno. (Vyjádřete celými čísly!)

125. Na obrázku je bod O středem úseček ML a KN. Zdůvodněte, že úsečky KL a MN jsou shodné a rovnoběžné.



***126.** Určete stranu x trojúhelníku z obrázku:



***127.** Určete, jakou délku vyjádřenou v centimetrech celým číslem může mít strana trojúhelníku, jestliže ostatní dvě strany mají délky:

a) 7 cm a 1 cm b) 7 cm a 2 cm

c) 7 cm a 3 cm d) 7 cm a 4 cm

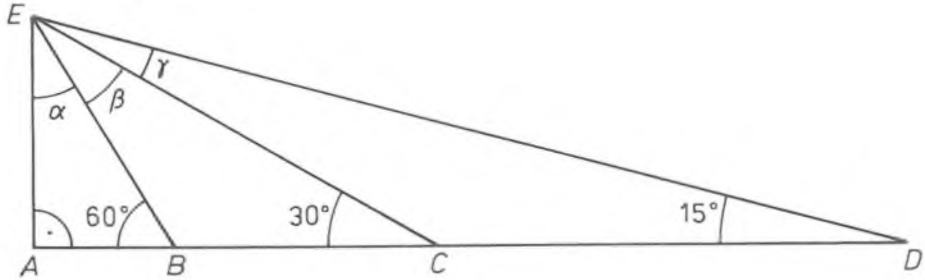
***128.** Dvě strany trojúhelníku mají délky 3 cm a 5 cm. Určete délku třetí strany v centimetrech vyjádřenou celým číslem tak, aby obvod trojúhelníku byl

a) co nejmenší, b) co největší.

$*$ **129.** Dvě strany trojúhelníku mají délky 62 mm a 54 mm. Určete délku třetí strany v milimetrech vyjádřenou celým číslem tak, aby obvod trojúhelníku byl

a) co nejmenší, b) co největší.

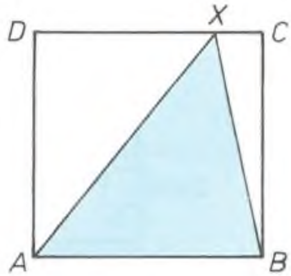
$*$ **130.** Určete velikosti úhlů α, β a γ z obrázku. Kolik pravoúhlých a kolik rovnoramenných trojúhelníků je na obrázku?



$*$ **131.** V rovině s kartézskou soustavou souřadnic je narýsován rovnoramenný trojúhelník KLM. Jaké souřadnice může mít hlavní vrchol M, jestliže $K[1; -1]$ a $L[1; 3]$?

$*$ **132.** V rovině s kartézskou soustavou souřadnic je narýsován pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník CDE s přeponou ED. Jaké souřadnice může mít vrchol C, jestliže $E[2; 1]$ a $D[6; -3]$?

133. Na obrázku je čtverec $ABCD$. Jakou část jeho obsahu tvoří obsah trojúhelníku ABX?



$*$ **134.** Narýsujte pravidelný šestiúhelník a rozdělte ho aspoň dvěma způsoby na šest shodných trojúhelníků.

■ **135.** Narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC o straně 4 cm. Dále narýsujte tři shodné kružnice se středy ve vrcholech trojúhelníku, jejichž poloměr je rovněž 4 cm. Nové průsečíky kružnic označte X, Y, Z. Narýsujte trojúhelník XYZ. Najděte v obrázku všechny skupiny shodných trojúhelníků.

■ **136.** Narýsujte libovolný obdélník $ABCD$. Vně obdélníku sestrojte čtyři rovnostranné trojúhelníky ABM, BCN, CDO, DAP. V každém z nich vyznačte průsečík výšek. Pojmenujte čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou vyznačeny body.

■ **137.** Narýsujte libovolný různostranný trojúhelník ABC. Dále sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABX, BCY a ACZ, které leží vně trojúhelníku ABC. Sestrojte úsečky AY, BZ a CX a přesvědčte se, že jsou shodné a že se protínají v jediném bodě.

■ **138.** Narýsujte libovolný rovnostranný trojúhelník ABC a jeho výšku ke straně AB. Její patu označte P. Sestrojte bod C', který je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem P. Sestrojte čtyřúhelník $AC'BC$ a pojmenujte ho.

VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Trojúhelník

2. $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle ACB$, $\triangle CBA$, $\triangle BAC$. **4.** Obr. A-1, v případě b) $\triangle ABC$ neexistuje. **5.** a) 13,5 cm; b) 15 cm; c) 13,5 cm. **6.** $|PQ| = 4\,\text{cm}$. **7.** Obr. A-2. **9.** a) LM přepona, KL a KM odvěsny; b) KL přepona, LM a LK odvěsny. **11.** $\alpha = 10°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 140°$. **12.** a) Ne; b) ne. **13.** 90°. **14.** a) 108°50′; b) 16°30′; c) 39°10′. **15.** Označme α_1 vnější úhel při vrcholu A. Pro vedlejší úhly α a α_1 platí $\alpha + \alpha_1 = 180°$. Pro vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníku ABC platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Proto $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

2 Shodnost trojúhelníků

1. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$, $\triangle KLM \cong \triangle RPQ$. **2.** $|CE| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|ED| = 6\,\text{cm}$, $|HG| = 7\,\text{cm}$, $|HF| = 6\,\text{cm}$, $|KM| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|LM| = 7\,\text{cm}$. **3.** Protože $|\sphericalangle YZX| = 45°$, podle věty *usu* platí $\triangle ABC \cong \triangle ZXY$. **4.** $\triangle EFG \cong \triangle YZX$ (*usu*), $\triangle HKL \cong \triangle TSR$ (*sss*). **5.** Ano, $\triangle EFG \cong \triangle POR$ (*usu*), $\triangle EFG \cong \triangle KIJ$ (*usu*). **6.** Protože $|VE| = |VF|$, $|\sphericalangle EVP| = |\sphericalangle FVP|$ a VP je společná strana, platí $\triangle EVP \cong \triangle FVP$ podle věty *sus*. **7.** T_1 a T_2, T_1 a T_3, T_1 a T_4, T_2 a T_3, T_2 a T_4, T_3 a T_4.

3 Střední příčky trojúhelníku

1. Každé dva trojúhelníky jsou shodné např. podle věty *sss*. **2.** Strany hledaného trojúhelníku musí ležet na těchto třech přímkách: přímce x ($x \parallel Y_1Z_1$, $X_1 \in x$), přímce y ($y \parallel X_1Z_1$, $Y_1 \in y$) a přímce z ($z \parallel X_1Y_1$, $Z_1 \in y$). Označme jejich průsečíky X, Y, Z jako na obr. A-3 a ukažme, že $\triangle XYZ$ má skutečně střední příčky X_1Y_1, Y_1Z_1 a Z_1X_1. Ze shodnosti střídavých úhlů vyznačených na obrázku můžeme podle věty *usu* usoudit, že trojúhelník $X_1Y_1Z_1$ je shodný s každým z trojúhelníků XZ_1Y_1, Z_1YX_1 a Y_1X_1Z (vrcholy jsou zapsány v odpovídajícím pořadí). Proto platí rovnosti $|X_1Y_1| = |XZ_1| = |Z_1Y|$ a $|Y_1Z_1| = |ZX_1| = |X_1Y|$ a $|Z_1X_1| = |ZY_1| = |Y_1X|$, takže bod Z_1 je střed úsečky XY, Y_1 je střed úsečky XZ a X_1 je střed úsečky YZ.

4 Těžnice trojúhelníku

1. a) $|P_1T| = 1{,}5\,\text{cm}$, $|TO_1| = 1\,\text{cm}$; b) $|TM_1| = 1\,\text{cm}$, $|TK| = 4\,\text{cm}$.

5 Kružnice opsaná a vepsaná

1. Obr. A-4. **3.** Obr. A-5. **4.** Obr. A-6. **5.** Nejprve sestrojte úsečky SX, SY a SZ. Strana AB trojúhelníku ABC leží na přímce, která je kolmá k SX a prochází bodem X, strana BC na přímce, která je kolmá k SY a prochází bodem Y, strana AC na přímce, která je kolmá k SZ a prochází bodem Z. Průsečíky těchto přímek jsou vrcholy hledaného trojúhelníku ABC.

6 Výšky trojúhelníku

1. Např. obr. A-7.

7 Osově souměrné trojúhelníky

1. Není. **2.** a) $|\sphericalangle BAC| = 70°$, $|\sphericalangle ACB| = 40°$; b) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 71°$; c) $|AC| = 6\,\text{cm}$; d) $|SB| = 2\,\text{cm}$; e) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 52°$; f) $|\sphericalangle ABC| = 50°$, $|\sphericalangle ACB| = 80°$. **3.** Označme X průsečík osy o a strany PR (obr. A-8). Trojúhelníky PXQ a RXQ jsou shodné podle věty *usu*, proto jsou shodné i strany PQ a RQ. **4.** Všechny uvedené body leží na ose souměrnosti trojúhelníku. **5.** $\beta < \alpha < \gamma$, $\omega < \varphi < \varrho$. **6.** a) $b < a < c$; b) $a < c < b$; c) $c < b < a$; d) $a < b = c$. **7.** Základna je delší než rameno. **8.** a) 3 cm; b) 60°; c) 30° a 90°; d) 120°; e) 60°. **9.** a) 12 cm; b) 14 cm. **10.** 11 cm. **11.** Předpokládejme, že v trojúhelníku ABC je bod T současně těžištěm i průsečíkem výšek (obr. A-9). Pak těžnice CC_1 z vrcholu C je zároveň výškou ke straně AB, proto je k ní kolmá. Trojúhelníky AC_1C a BC_1C jsou shodné podle věty *sus*, proto $|AC| = |BC|$. Podobnou úvahou pro těžnici BB_1 zjistíme, že $|AB| = |CB|$. Proto $|AB| = |BC| = |CA|$. **12.** Např. obr. A-10. **13.** Obr. A-11. **14.** Ano, obr. A-12. (Trojúhelníky SAB, SBC, SCD, SDE, SEF a SFA jsou shodné, takže mají shodné výšky vycházející z vrcholu S.) **16.** Pravidelný šestnáctiúhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_{16}$ s vrcholy na kružnici k sestrojíme takto: Nejprve sestrojíme libovolný čtverec $A_1A_5A_9A_{13}$ vepsaný do kružnice k, průsečíky os jeho stran s kružnicí k vhodně označíme A_3, A_7, A_{11} a A_{15}. Zbývající vrcholy A_2, A_4, A_6, …, A_{16} jsou průsečíky os úseček A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7, …, $A_{15}A_1$ s kružnicí k.

8 Konstrukce trojúhelníku

1. Postupujte podle věty *sss*. **2.** Postupujte podle věty *sus*. **3.** Postupujte podle věty *sus*. **4.** Postupujte podle věty *usu*. **5.** Nejprve vypočtěte $|\sphericalangle DEF|$ a pak postupujte podle věty *usu*. **6.** Postupujte podle věty *Ssu*.

9 Čtyřúhelník

1. a) 16 cm; b) 18,5 cm; c) 20,4 cm. **2.** $|KL| = 4\,\text{cm}$, $|LM| = |MN| = |NK| = 8\,\text{cm}$. **4.** $\varrho = 122°$, $\varphi = 92°$, $\psi = 46°$. **5.** Nejprve sestrojte $\triangle ABC$ podle věty *sus*, pak $\triangle ACD$ podle věty *sss*.

10 Lichoběžník

1. a) $\alpha_2 = 55°$, $\alpha_4 = 102°$; b) $\delta_2 = 122°$, $\delta_3 = 90°$; c) $\omega_2 = 70°$, $\omega_3 = \omega_4 = 110°$. **2.** a) 148 mm; b) 14 cm. **3.** Paty kolmic z vrcholů D a C k přímce AB označíme P, Q. Trojúhelníky APD a BQC jsou shodné podle věty *usu*, proto $|AD| = |BC|$. **4.** Nejprve sestrojte $\triangle ABD$ podle věty *sus*. Vrchol C najděte jako obraz bodu D v osové souměrnosti podle osy úsečky AB.

11 Rovnoběžník

1. Na obr. A-13 jsou φ a φ' souhlasné úhly, proto $\varphi = \varphi'$. Úhly ψ a φ' jsou vedlejší, tedy $\psi + \varphi' = 180°$. Odtud $\psi + \varphi = 180°$. **2.** Ne, obě dvojice protějších stran by byly rovnoběžné a čtyřúhelník by byl rovnoběžník. Počet pravých úhlů je buď 0, nebo 2. **3.** Ne (podle příkladu 4 ze str. 30). **4.** Na obr. A-14 je čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě S a platí $|SA| = |SC|$ a $|SB| = |SD|$. Trojúhelníky ASB a CSD jsou shodné podle věty *sus*, proto jsou shodné i střídavé úhly SAB a SCD, tzn. strany AB a CD jsou rovnoběžné. Ze shodnosti trojúhelníků BSC a DSA se odvodí, že také strany BC a AD jsou rovnoběžné. **5.** Jestliže $\alpha + \beta = 180°$, pak pro úhel φ vedlejší k úhlu β platí $\varphi = \alpha$ (obr. A-15). Ze shodnosti těchto souhlasných úhlů plyne rovnoběžnost stran AD a BC. Podobně z rovnosti $\beta + \gamma = 180°$ plyne rovnoběžnost stran AB a CD. **7.** Ne, neboť průměr vepsané kružnice by musel být roven oběma vzdálenostem protějších stran obdélníku. **8.** $v_a = b$, $v_b = a$. **9.** Obě výšky jsou rovny průměru vepsané kružnice. **10.** Ne, s ohledem na osovou souměrnost by obě úhlopříčky kosočtverce musely být jejími průměry, mají však různou délku. **11.** Sestrojte nejprve $\triangle ABD$ podle věty *sss*. **12.** Sestrojte nejprve $\triangle EFG$ podle věty *Ssu*. **13.** Sestrojte nejprve $\triangle XYZ$ podle věty *sus*.

12 Obsahy

1. 15 cm^2. **2.** 3,2 cm. **3.** a) 7,5 cm^2; b) 15 cm^2; c) 110 mm^2. **4.** 6 cm^2. **5.** a) 16 cm^2; b) 10 cm^2; c) 5 cm^2; d) 16 cm^2. **6.** a) $S_{ABC_1} = S_{ABC_2} = S_{ABC_3} = S_{ABC_4}$; b) $S_{ABC_1} < S_{ABC_2} < S_{ABC_3} < S_{ABC_4}$; c) $S_{ABC_1} < S_{ABC_2} < S_{ABC_3} < S_{ABC_4}$. **7.** 4 cm. **8.** 4,2 cm. **9.** a) 8 m^2; b) 3 600 mm^2; c) 3,2 cm^2. **10.** Obsahy jsou po řadě 8 cm^2; 12 cm^2; 8 cm^2; 9 cm^2; 6,5 cm^2.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. XY je přepona, VX a VY odvěsny. **2.** $\alpha = 95°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 57°$, $\delta = 136°$. **3.** $\sphericalangle DCL$ a $\sphericalangle ECK$, $\sphericalangle CDM$ a $\sphericalangle EDN$, $\sphericalangle DEO$ a $\sphericalangle CEP$. **4.** $\alpha_1 = 148°$, $\beta_1 = 97°$, $\gamma_1 = 115°$. **5.** $\alpha = 97°40'$, $\beta = 10°$, $\gamma = 72°20'$. **6.** První řádek: $\beta = 30°$, $\alpha_1 = 160°$, $\beta_1 = 150°$, $\gamma_1 = 50°$, druhý řádek: $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$, $\alpha_1 = 145°$, $\beta_1 = 105°$, třetí řádek: $\alpha = 44°$, $\beta = 118°$, $\alpha_1 = 136°$, $\gamma_1 = 162°$, čtvrtý řádek: $\alpha = 129°$, $\beta = 31°$, $\gamma = 20°$, $\gamma_1 = 160°$. **7.** Vnitřní úhel při vrcholu L má velikost 80°, vnější úhel 100°. **8.** $|\sphericalangle RPQ| = 67°$, $|\sphericalangle PQR| = 98°$. **9.** a) Ne; b) ano; c) ano. **10.** $|\sphericalangle ZXY| = 47°$, $|\sphericalangle XYZ| = 101°$, $|\sphericalangle YZX| = 32°$, $|\sphericalangle YXV| = 43°$, $|\sphericalangle XVY| = 58°$.

Cvičení 2

2. $\triangle ABC \cong \triangle ZYX$ (*sss*). **3.** Ne. **4.** $|BC| = 2{,}1$ cm, $|AC| = 4{,}5$ cm, $|\sphericalangle CAB| \doteq 25°$, $|\sphericalangle BCA| \doteq 95°$, $|KL| = 5$ cm, $|\sphericalangle KLM| \doteq 60°$, $|\sphericalangle LMK| \doteq 95°$. **5.** a) $\triangle ABC \cong \triangle FGE$ (*usu*); b) $\triangle ABC \cong \triangle EGF$ (*usu*). **6.** T_1 a T_2, T_1 a T_3, T_2 a T_3. **7.** T_1 a T_2 jsou shodné podle věty *sus*, T_2 a T_3 podle věty *usu*. **8.** V obdélníku jsou protější strany shodné: $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$. Trojúhelníky ABD a CDB jsou shodné např. podle věty *sss*, neboť strana BD je společná oběma trojúhelníkům. **9.** $\triangle ASC \cong \triangle BSD$ podle věty *sus*, neboť $|AS| = |BS|$, $|CS| = |DS|$ a úhly ASC a BSD jsou vrcholové.

Cvičení 3

2. 4 cm, 7 cm a 6 cm. **3.** 30,2 cm. **4.** a) Ne; b) ano; c) ano; d) ano; e) ano; f) ne; g) ne; h) ne. **6.** a) $|AB| = 8{,}6$ cm, $|BT| \doteq 4{,}1$ cm, $|AT| \doteq 5{,}4$ cm; b) $|AC| = 6{,}6$ cm, $|AT| \doteq 5{,}4$ cm, $|CT| \doteq 4{,}4$ cm. **7.** $|QR| = 2 \cdot |PS|$. **8.** Střed A_0 strany BC leží na polopřímce AT tak, že $|AA_0| = 6$ cm. Střed B_0 strany AC leží na polopřímce BT tak, že $|BB_0| = 7{,}5$ cm. Bod C je průsečík polopřímek AB_0 a BA_0.

Cvičení 4

2. Obr. B-1. **4.** Středy obou kružnic splynou. **5.** Vrcholy trojúhelníku $K'L'M'$ leží rovněž na kružnici k. **6.** $|EE_0| \doteq 3$ cm, $|FF_0| \doteq 5{,}7$ cm, $|GG_0| \doteq 4{,}3$ cm. **7.** Obr. B-2: Nejprve sestrojte přímky $p = VX$ a $q = VY$. Bodem Y veďte kolmici p' k přímce p, bodem X kolmici q' k přímce q. Průsečík přímek p' a q' je vrcholem Z trojúhelníku XYZ. Místo jedné z přímek p', q' lze využít i přímku, která prochází bodem V a je kolmá k přímce x. **8.** Sestrojené výšky mají stejnou délku. **9.** Obě výšky jsou kolmé k úsečce BC, neboť $B_1C_1 \parallel BC$. **10.** Délky obou výšek jsou stejné, neboť $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. **11.** Výška a těžnice vycházející z téhož vrcholu splynou.

Cvičení 5

1. $\triangle DEF$, $\triangle GKH$, $\triangle XYZ$. **2.** $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 45°$. **3.** 24,2 cm. **4.** Základna má délku 4 cm, ramena 6 cm. **5.** Druhý úhel při základně měří $54°20'$, úhel při hlavním vrcholu $71°20'$. **6.** $42°$. **7.** Sestrojte trojúhelník, jehož všechny strany mají délku 4,4 cm. **8.** Střed vepsané kružnice a těžiště splynou. **9.** Obr. B-3. **10.** Obr. B-4. **11.** Obr. B-5. **12.** Z daných čtyř shodných trojúhelníků lze sestavit pouze takový trojúhelník, jehož strany jsou dvojnásobky stran původních trojúhelníků. **13.** Úsečky EX a FY jsou souměrně sdružené podle osy základny EF, která je osou souměrnosti trojúhelníku EFG. **14.** Předpokládejme, že pro těžnice AA_1 a BB_1 trojúhelníku ABC platí $|AA_1| = |BB_1|$ (obr. B-6). Označme T těžiště trojúhelníku ABC. Z vlastností těžiště vyplývá, že $|AT| = |BT|$ i $|A_1T| = |B_1T|$. Oba trojúhelníky ABT i A_1B_1T jsou rovnoramenné, mají týž hlavní vrchol T i rovnoběžné základny AB a A_1B_1 (vzpomeňte si na vlastnosti střední příčky). Proto jsou souměrné podle téže osy o, která prochází bodem T a je kolmá k úsečkám AB a A_1B_1. V této osové souměrnosti jsou sdružené i přímky AB_1 a BA_1, proto jejich průsečík C leží na ose o. Přímka o je tedy osou souměrnosti trojúhelníku ABC, ten je proto rovnoramenný. **16.** Obr. B-7. (Uvědomte si, že v rovnostranném trojúhelníku splývá těžnice s výškou a střed opsané kružnice se středem kružnice vepsané, těžištěm i průsečíkem výšek.)

Cvičení 6

1. Postupujte podle věty: a) *sss*; b) *sus*; c) *usu*; d) *Ssu*. **2.** Postupujte podle věty *sus*. **3.** a) Postupujte podle věty *sus*; b) nejprve vypočtěte $|\sphericalangle QRP|$ a postupujte podle věty *usu* nebo *sus*. **4.** Postupujte podle věty *usu*. **5.** a) Postupujte podle věty *usu*; b) nejprve vypočtěte $|\sphericalangle IJK|$ a $|\sphericalangle JKI|$, pak postupujte podle věty *usu*. **6.** Označte O střed strany RT. Nejprve sestrojte pravoúhlý $\triangle SOR$ podle věty *sus*, pak nalezněte vrchol T. **7.** Označte O střed strany RT. Nejprve sestrojte $\triangle SOT$ podle věty *Ssu*, pak nalezněte vrchol R. **8.** Postupujte podle věty *Ssu*.

Cvičení 7

2. a) $\delta = 138°$; b) $\alpha = 117°$. **3.** Obr. B-8. **4.** Nejprve sestrojte $\triangle MNO$ a pak $\triangle MOP$, oba podle věty *sss*. **5.** a) Sestrojte libovolný pravoúhlý trojúhelník MNX s odvěsnou MN a lichoběžník $MNOP$ z něj „odřízněte" přímkou rovnoběžnou s MN; b) sestrojte libovolný rovnoramenný trojúhelník KLX se základnou KL a lichoběžník $KLMN$ z něj „odřízněte" přímkou rovnoběžnou s KL. **6.** a) 360°; b) 180°. **7.** Např. obr. B-9. **8.** a) $\beta = 65°$, $\delta = 115°$, je rovnoramenný; b) $\gamma = 76°$, $\delta = 142°$, není rovnoramenný. **10.** a) Nejprve sestrojte $\triangle DEF$ podle věty *sus*. Vrchol G leží na polopřímce FX (která je rovnoběžná s DE a leží v opačné polorovině s hraniční přímkou DF než bod E) ve vzdálenosti 2,5 cm od bodu F. b) Nejprve sestrojte $\triangle DEF$ podle věty *sus*. Vrchol G leží na polopřímce FX (která je rovnoběžná s DE a leží v opačné polorovině s hraniční přímkou DF než bod E) a na kružnici $k(D; 5{,}4\,\text{cm})$. Existují dvě řešení, která nejsou shodná. **11.** Obr. B-10.

Cvičení 8

2. Střední příčky. **3.** a) $\alpha = \gamma = 68°$, $\delta = 112°$; b) $\alpha = 75°20'$, $\beta = \delta = 104°40'$. **4.** Čtverec a obdélník. **5.** Kružnici lze opsat čtverci a obdélníku, vepsat čtverci a kosočtverci. **6.** a) 4; b) 2; c) 2. **7.** a) Čtverec; b) obdélník; c) kosočtverec. **8.** a) Sestrojte nejprve $\triangle MNP$ podle věty *sus*; b) sestrojte nejprve $\triangle MNO$ podle věty *sss*. **9.** Sestrojte nejprve pravoúhlý $\triangle VXT$ podle věty *Ssu*. **10.** Strana čtverce měří 3,8 cm. **11.** b) Využijte toho, že úhlopříčky jsou shodné, navzájem kolmé a půlí se. **12.** Sestrojte nejprve rovnoramenný $\triangle MJK$ podle věty *sus*.

Cvičení 9

1. O_1 má větší obvod, O_2 má větší obsah. **2.** 5 cm², 10 cm², 4 cm², 4 cm², 5 cm², 9 cm², 7 cm² a 8 cm². **3.** Všechny tři 10 cm². **4.** a) 13,44 cm²; b) 13,44 cm²; c) 13,44 cm²; d) 13,44 cm². **5.** 17,1 dm². **6.** 42 cm². **7.** Obsah každého čtyřúhelníku je 30 cm². **8.** a) 36 cm²; b) 40 cm². **9.** Výška k základně měří 6 cm. **10.** $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. **11.** $\triangle ABC_2$. **12.** Ve všech. Obsahy trojúhelníků ABC a ABD jsou stejné, odečtěte od nich obsah $\triangle ABP$. **13.** L_2. **14.** a) 64 cm²; b) 32 cm². **15.** 13 cm², 12 cm², 17 cm², 10,5 cm². **16.** 4 cm. **17.** 15,04 m². **18.** Ano. Na hlavu spotřebují 27 dm², na ocas 13,5 dm², celkem 40,5 dm². Arch má obsah 80 dm². **19.** 171 m². **20.** 10,75 m².

Cvičení 10

1. Tři trojúhelníky – první se stranami 9 cm, 7 cm a 5 cm, druhý se stranami 9 cm, 7 cm a 3 cm, třetí se stranami 7 cm, 5 cm a 3 cm. **2.** Označme největší úhel α, nejmenší γ, prostřední β. Platí $\alpha + 4° = \beta + \gamma$. Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, je $(\alpha + 4°) + (\beta + \gamma) = 184°$. Sčítanci v obou závorkách jsou stejní, proto $\alpha + 4° = 184° : 2$, tedy $\alpha + 4° = 92°$, $\alpha = 88°$. Dále platí $4 \cdot \gamma = \alpha + \beta$, tzn. $5 \cdot \gamma = 180°$. Odtud $\gamma = 180° : 5 = 36°$. Prostřední úhel β má velikost $180° - (88° + 36°) = 56°$. **3.** V trojúhelníku ABC vypočteme velikost třetího vnitřního úhlu: $|\sphericalangle CAB| = 64°$. Z rovnoramenného trojúhelníku AXZ určíme $|\sphericalangle AZX| = 180° - 2 \cdot 64° = 52°$. Přímky AB a XY nejsou rovnoběžné, neboť střídavé úhly AZX a ZXY nejsou shodné. Podobně nejsou rovnoběžné ani přímky BC a XZ, neboť souhlasné úhly AZX a ZBY nejsou shodné. **4.** a) $\frac{9}{40}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{3}{20}$. (Nejprve vysvětlete, proč bod G leží na straně čtverečku, a to v jejím středu.)

5. Označme S_0 obsah jednoho z pěti čtverečků, z nichž je kříž sestaven. Odpad je složen ze čtyř „rohových" rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků, z nichž každý má obsah $\frac{1}{4} \cdot S_0$, a čtyř „stranových" rovnoramenných trojúhelníků – obsah každého je $\frac{1}{2} \cdot S_0$. Celkový obsah odpadu je tedy $3 \cdot S_0 = 48\,\mathrm{cm}^2$. Proto $S_0 = 16\,\mathrm{cm}^2$. Obsah kříže je $5 \cdot S_0 = 80\,\mathrm{cm}^2$ a obsah původního čtverce je $80\,\mathrm{cm}^2 + 48\,\mathrm{cm}^2 = 128\,\mathrm{cm}^2$. **6.** Všechny hledané trojúhelníky lze rozdělit do tří skupin shodných trojúhelníků. V první skupině budou ty, jejichž dvě strany jsou sousedními stranami šestiúhelníku (takových je 6). Ve druhé skupině ty, jejichž jedna strana je stranou šestiúhelníku a zbylé dvě jeho úhlopříčkami – těch je 12. Ve třetí skupině jsou trojúhelníky se všemi stranami v úhlopříčkách šestiúhelníku. Takové trojúhelníky jsou 2. Shodné trojúhelníky mají shodné obsahy, obsahy dvou trojúhelníků vybraných z různých skupin jsou různé. Proto je celkový počet trojúhelníků 20 a podle velikostí obsahů tvoří tři skupiny. **7.** Označme P střed úsečky S_1S_2 (obr. B-11). Úsečky AP, BP a AB jsou středními příčkami trojúhelníku SS_1S_2, dělí jej proto na čtyři shodné trojúhelníky. Obsah jednoho z nich ($\triangle ABS$) je $\frac{3 \cdot 1}{2}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{3}{2}\,\mathrm{cm}^2$, proto obsah $\triangle SS_1S_2$ je $6\,\mathrm{cm}^2$. **8.** Z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle ABC$ zjistíme, že pro délku strany AC v centimetrech platí: $|AC| \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$, podobně z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle ADE$, že $|AD| \in \{2,3,4\}$. V trojúhelníku ACD musí platit $|AC| + |AD| > 11\,\mathrm{cm}$, proto $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 4\,\mathrm{cm}$. Sestrojíme tedy postupně trojúhelníky ABC, ACD a ADE (všechny podle věty *sss*). **9.** Dokážeme nejprve, že strana KL obdélníku $ACKL$ prochází některým z bodů B, D. Obsah obdélníku $ABCD$ je roven dvojnásobku obsahu $\triangle ACD$. Ten lze určit jako poloviční součin délky úsečky AC a výšky k této straně z vrcholu D. Proto má strana AL obdélníku $ACKL$ stejnou délku jako tato výška. Obdélník $ACKL$ sestrojíme tak, že nejprve vedeme bodem D nebo bodem B přímku p rovnoběžnou s AC. Paty kolmic z bodů C a A k přímce p jsou vrcholy K, L obdélníku $ACKL$. **10.** Označme $v = |AD| = |BC|$. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ADX a BCY $\left(\frac{1}{2} \cdot v \cdot |DX| = \frac{1}{2} \cdot v \cdot |BY|\right)$ plyne, že úsečky DX a BY mají tutéž neznámou délku x (obr. B-12). Obsah obdélníku $ABCD$ je $60 \cdot v$, takže obsah trojúhelníku ADX je $(60 \cdot v) : 3 = 20 \cdot v$. Z rovnosti $\frac{1}{2} \cdot v \cdot x = 20 \cdot v$ plyne $x = 40\,\mathrm{mm}$. Tato délka nezávisí na délce v strany BC.

VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

1 Trojúhelník

1. Trojúhelník ABC, kde bod C je průsečíkem polopřímek AY a BX. **2.** a) Ano; b) ano; c) ano; d) ne; e) ano. **6.** $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$. **7.** a) $\alpha_1 = 139°$, $\beta_1 = 127°$, $\gamma_1 = 94°$; b) $\alpha_1 = 145°$, $\beta_1 = 131°$, $\gamma_1 = 84°$; c) $\alpha_1 = 153°40'$, $\beta_1 = 106°45'$, $\gamma_1 = 99°35'$. **8.** a) $\alpha = 110°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 40°$; b) $\alpha = 50°$, $\beta = 78°$, $\gamma = 52°$; c) $\alpha = 63°30'$, $\beta = 43°$, $\gamma = 73°30'$. **9.** $180°$. **10.** $\alpha = 39°$, $\beta = 81°$, $\gamma = 103°$. **11.** a) $\gamma = 90°$; b) $\beta = 34°$; c) $\alpha = 38°50'$. **12.** $|\sphericalangle HFG| = 48°$, $|\sphericalangle FGH| = 63°$, vnější úhel při vrcholu G má velikost $117°$, vnější úhel při vrcholu H má velikost $111°$. **14.** $16°10'$, není tupoúhlý. **16.** Obr. C-1. **17.** $\alpha = 40°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 20°$. **18.** $\alpha = 108°$, $\beta = 54°$, $\gamma = 18°$.

2 Shodnost trojúhelníků

19. Např. obr. C-2. **20.** Pouze zápis b). **21.** T_2 a T_4. **22.** a) $\triangle ABC$ a $\triangle ZXY$; b) $\triangle KLM$ a $\triangle PRO$. **23.** a) *Ssu*; b) *Ssu*. **24.** $|TR| = 6\,\text{cm}$, $|PQ| = 4\,\text{cm}$, $|QO| = 5\,\text{cm}$. **25.** Ano, $\triangle RPQ \cong \triangle XZY$ podle věty *Ssu*. **26.** a) Platí $|KL| = |LM| = |MN| = |NK|$, trojúhelníky jsou tedy shodné podle věty *sss*; b) platí $|KL| = |MN|$, $|\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle MNS|$, $|\sphericalangle LKS| = |\sphericalangle NMS|$ (střídavé úhly u rovnoběžných stran), trojúhelníky jsou tedy shodné podle věty *usu*. **27.** Protože $|SK| = |SL| = |SM| = |SN|$ a úhly KSL a MSN jsou vrcholové, jsou trojúhelníky KSL a MSN shodné podle věty *sus*. (Jiné řešení: úsečka MN je obrazem úsečky KL ve středové souměrnosti se středem S.) **28.** Protože $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$ a $|AB| = |CD|$, jsou trojúhelníky ASB a CSD shodné podle věty *sss*. Proto jsou shodné i odpovídající si úhly ASB a CSD. **29.** a) Ano (použijte větu *sus*); b) ano (použijte větu *Ssu*); c) ano (použijte větu *usu*). **30.** Protože $|AN| = |BN|$ a $|AM| = |BM|$, jsou trojúhelníky shodné podle věty *sss*.

3 Kružnice opsaná a vepsaná

33. Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku EFG. **35.** Obr. C-3, kružnice mají společný právě jeden bod – průsečík úhlopříček čtverce. **36.** Obr. C-4, obě kružnice splynou. **37.** Ne; $k' = k$, neboť to jsou kružnice souměrně sdružené podle středu S.

4 Střední příčky, těžnice, výšky

40. 44 cm. **41.** Protože $B_1C_1 \parallel BC$, jsou souhlasné úhly ACB a AB_1C_1 shodné. Protože $A_1C_1 \parallel AC$, jsou střídavé úhly AB_1C_1 a $A_1C_1B_1$ shodné. Jsou tedy shodné i úhly ACB a $A_1C_1B_1$. Jiné řešení: Z vlastností středních příček plyne $A_1C_1 \cong B_1C$ a $B_1C_1 \cong A_1C$. Trojúhelníky A_1CB_1 a $B_1C_1A_1$ mají společnou stranu A_1B_1, jsou tedy shodné např. podle věty *sss*. Proto jsou shodné i odpovídající si úhly ACB a $A_1C_1B_1$. **42.** Jako v předchozí úloze využijte vlastností střídavých a souhlasných úhlů, nebo dokažte shodnost trojúhelníků AC_1B_1, $A_1B_1C_1$, C_1BA_1 a B_1A_1C (věta *sss*). **44.** $|DX| = |EX|$, úsečka CX je těžnice trojúhelníku CDE z vrcholu C. **46.** Těžnice z vrcholu Z má poloviční délku než přepona i než průměr opsané kružnice. **47.** Nejprve sestrojte bod Y na polopřímce opačné k SX tak, aby $|YS| = |XS|$. Pak sestrojte bod Z na polopřímce ST tak, aby $|SZ| = 3 \cdot |ST|$. **49.** $v_a = 8\,\text{cm}$, $v_b = 6\,\text{cm}$. **50.** Obr. C-5, průsečík výšek leží vně trojúhelníku. **51.** Obr. C-6.

5 Osově souměrné trojúhelníky

53. 18 cm. **54.** Základna má délku 10 cm, ramena 6 cm. **55.** a) 140°; b) 164°; c) 92°. **56.** Velikost vnějšího úhlu při hlavním vrcholu je dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu při základně. **57.** 40° a 100°, nebo 70° a 70°. **58.** Na kružnici k se středem S zvolte libovolný bod C za hlavní vrchol trojúhelníku ABC. Pak buď využijte toho, že základna AB je kolmá k CS, nebo toho, že ramena CA a CB jsou shodná. **59.** $|\sphericalangle CAB| = 75°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$, $|\sphericalangle ACB| = 75°$. **60.** a) Ano (použijte větu *sss*); b) ano (použijte větu *sus*); c) ano (použijte větu *usu*). **61.** Má-li rovnostranný trojúhelník stranu délky x, mají všechny jeho střední příčky stejnou délku $\frac{1}{2} \cdot x$. **62.** $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ADB| = 72°$, $|\sphericalangle BAD| = 36°$, $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDC| = 69°$. **63.** $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAC| = 45°$, $|\sphericalangle ACD| = 45°$, $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CAD| = 67°30'$. **64.** $|\sphericalangle CAD| = 22°30'$, $|\sphericalangle ADC| = 90°$, $|\sphericalangle DCA| = 67°30'$. **65.** a) 25°; b) 25°; c) 25°. (Srovnejte úhly při vrcholu C rovnoramenných trojúhelníků BSC a ASC.)

66. a) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = 72°$, $|\sphericalangle ACB| = 36°$; b) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = 45°$, $|\sphericalangle ACB| = 90°$. **67.** a) Úhel při hlavním vrcholu měří 56°, úhly při základně 62°; b) úhel při hlavním vrcholu měří 68°, úhly při základně 56°. **68.** Úsečky PQ a $P'R$ jsou souměrně sdružené podle středu S, takže jsou rovnoběžné a shodné (obr. C-7). Proto jsou shodné i střídavé úhly QPP' a $RP'P$, takže trojúhelník RPP' má shodné úhly při vrcholech P a P'. Odtud podle příkladu 1 ze str. 57 plyne, že RPP' je rovnoramenný trojúhelník. PQ, $P'R$ a PR jsou tedy shodné úsečky. **69.** Předpokládejme, že v trojúhelníku ABC je bod T současně těžištěm i středem kružnice vepsané (obr C-8). Pak těžnice CC_1 prochází středem vepsané kružnice, proto leží na ose o_1 úhlu ACB. Osa o_1 tedy prochází středem C_1 strany AB. Podle předchozí úlohy platí $|CA| = |CB|$. Podobnou úvahou pro těžnici BB_1 a osu o_2 úhlu ABC zjistíme, že $|BA| = |BC|$. Proto $|AB| = |BC| = |CA|$. **70.** Na kružnici k se středem S zvolte bod A a sestrojte polopřímku AS. Ta je osou vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu A, který má velikost 60°. Sestrojíte-li v opačných polorovinách s hraniční přímkou AS polopřímky AX a AY tak, aby $|\sphericalangle XAS| = |\sphericalangle YAS| = 30°$, protnou tyto polopřímky kružnici k ve zbývajících vrcholech B, C trojúhelníku ABC (obr C-9). Jiný postup: známým způsobem sestrojte pravidelný šestiúhelník $AXBYCZ$ s vrcholy na kružnici k. **71.** Výsledný dvanáctiúhelník dostaneme ze dvou pravidelných šestiúhelníků $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ a $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$. První z nich vepíšeme do kružnice k libovolně, druhý z nich tak, aby vrchol A_2 ležel na ose úhlu A_1SA_3. **72.** $|\sphericalangle JSK| = 45°$, $|\sphericalangle SJK| = |\sphericalangle SKJ| = 67°30'$. **73.** 135°. **74.** 157°30′. **75.** a) $|\sphericalangle ASB| = 72°$, $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA| = 54°$; b) $|\sphericalangle CDE| = 108°$. **76.** Každý n-úhelník je rozdělen na $n-2$ trojúhelníků. Proto je součet velikostí vnitřních úhlů v pravidelném n-úhelníku roven $(n-2)\cdot 180°$, tj. 360° pro $n = 4$, 540° pro $n = 5$, 720° pro $n = 6$, 900° pro $n = 7$ a 1 080° pro $n = 8$. **77.** Nemusí. Prohlédněte si šestiúhelník $KLMNOP$ z obr. C-10, který vznikl z rovnostranného trojúhelníku ABC „odříznutím“ tří shodných rovnostranných trojúhelníků AKL, BMN, COP.

6 Konstrukce trojúhelníku

81. Trojúhelník ABC sestrojte podle věty *usu*, trojúhelník KLM podle věty *Ssu*, trojúhelníky nejsou shodné. **82.** Sestrojte dva rovnoramenné trojúhelníky podle věty *sss*: první se základnou 5 cm a rameny 4 cm, druhý se základnou 4 cm a rameny 5 cm. V druhém případě existuje pouze rovnoramenný trojúhelník se základnou 2 cm a rameny 5 cm.

7 Čtyřúhelník

83. 95°30′. **84.** Sestrojte nejprve $\triangle KLM$ podle věty *sss*, pak $\triangle KMN$ také podle věty *sss*. **85.** Sestrojte nejprve $\triangle PQR$ podle věty *sus*, pak $\triangle PRS$ podle věty *sss*. **86.** 5 cm.

8 Lichoběžník

87. 8 cm. **88.** a) $\alpha = \delta = 90°$, $\beta = 68°$; b) $\beta = \gamma = 90°$, $\delta = 80°$; c) $\alpha = 92°$, $\gamma = \delta = 88°$; d) $\alpha = \beta = 115°40'$, $\gamma = 64°20'$; e) $\gamma = 138°$, $\delta = 102°$; f) $\alpha = 106°45'$, $\beta = 78°$. **89.** a) Nejprve sestrojte $\triangle HIF$ podle věty *sus*; b) nejprve sestrojte $\triangle HIF$ podle věty *sus*.

9 Rovnoběžník

90. Např. obr. C-11. **91.** Užijte např. větu *sss*. **92.** a) Ne; b) ne; c) ano. **93.** Čtverec a obdélník. **94.** Vrchol C sestrojte jako obraz bodu A ve středové souměrnosti se středem S, vrchol D jako obraz bodu B v této středové souměrnosti. **96.** Čtverec. **97.** Protější strany S_1S_2, S_3S_4 jsou rovnoběžné s úhlopříčkou PR, protější strany S_2S_3, S_4S_1 s úhlopříčkou QS. **98.** Např. takto: Úsečky EG a FH se protínají ve středu S čtverce $ABCD$, který je středem každé z nich. Navíc jsou kolmé a mají stejné délky.

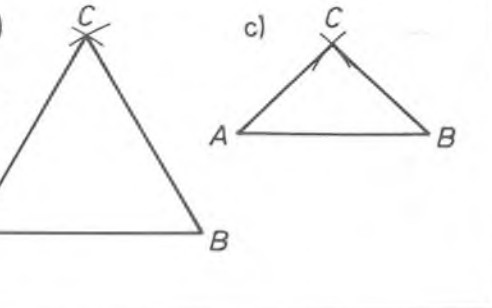
10 Obsahy

100. a) 93,5 cm^2; b) 4,5 dm^2, c) 12,9 m^2. **101.** 14 cm^2. **102.** 1,9 dm. **103.** 70 cm. **104.** a) 30 cm^2; b) 324 cm^2; c) 40,8 dm^2. **105.** a) 9,75 cm^2; b) 16,77 dm^2; c) 6,75 dm^2. **106.** Obsahy všech tří trojúhelníků jsou stejné. **107.** a) Ano; b) ano. **108.** a) 60,8 cm^2; b) 48 cm^2. **111.** Asi 7,1 m^2. **112.** 26 m^2. **113.** Pan Bílý vypočítal, že pozemek má výměru 1,575 aru, jeho výsledek je menší než údaj pana Černého. **114.** První řádek: 2,4 cm, druhý řádek: 6 cm, třetí řádek: 3 cm, čtvrtý řádek: 2,6 dm. **115.** První řádek: 62,4 cm^2, druhý řádek: 14 cm, třetí řádek: 40,8 cm^2, čtvrtý řádek: 3,6 dm, pátý řádek: 22 cm. **117.** 2,3 cm. **119.** Obsah trojúhelníku je 8 cm^2, obsah lichoběžníku 12 cm^2. **120.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4}$.

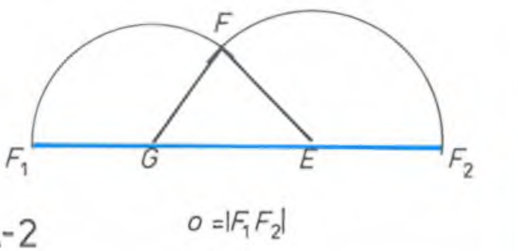
11 Různé úlohy

121. a) Rovná se; b) je menší než; c) je větší než; d) je větší než. **122.** a) 60°, 60° a 60°; b) 90°, 45° a 45°; c) 90°, 60° a 30°. **123.** a), b) např. obr. C-12, v případě c) takový trojúhelník neexistuje. **124.** a) 360°; b) 270°; c) jsou shodné; d) 120°; e) vnitřní úhly při základně mají velikosti 57°24′, při hlavním vrcholu 65°12′; f) vnitřní úhly při přeponě mají velikosti 31°31′ a 58°29′; g) každé z hodnot 1, 2, …, 10, 11; h) každé z hodnot 4, 5, … . **125.** $\triangle KLO \cong \triangle NMO$ podle věty *sus*. Jiné řešení: úsečky KL a NM jsou souměrně sdružené podle středu O. **126.** a) 3 cm; b) 1,8 cm; c) 3 cm; d) 4 cm; e) 2,8 cm. **127.** a) 7 cm; b) 6 cm, 7 cm nebo 8 cm; c) 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm nebo 9 cm; d) 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm nebo 10 cm. **128.** a) 3 cm; b) 7 cm. **129.** a) 9 mm; b) 115 mm. **130.** $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 15°$. Na obrázku jsou tři pravoúhlé trojúhelníky ($\triangle ABE$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$) a dva rovnoramenné trojúhelníky ($\triangle BCE$, $\triangle CDE$). **131.** $M[x; 1]$, kde $x \neq 1$. **132.** $C[6; 1]$ nebo $C[2; -3]$. **133.** Polovinu. **134.** Např. obr. C-13. **135.** Obr. C-14. Shodné jsou trojúhelníky ABX, BCY, CAZ a ABC. **136.** Např. obr. C-15, kosočtverec. **137.** Např. obr. C-16. **138.** Např. obr. C-17, kosočtverec.

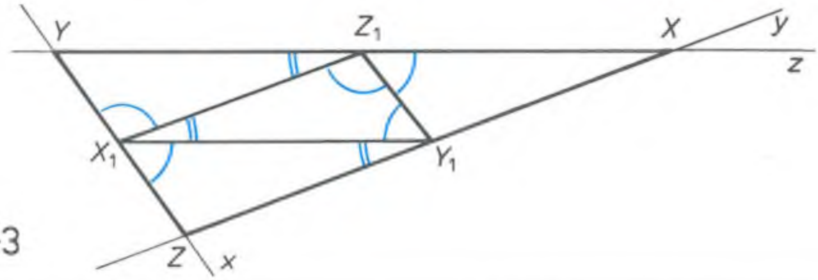
A-1



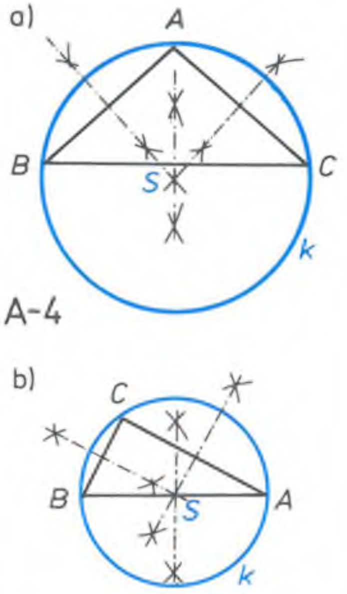
A-2



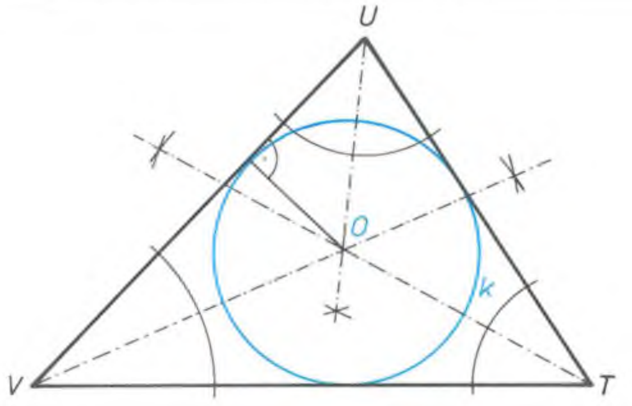
A-3



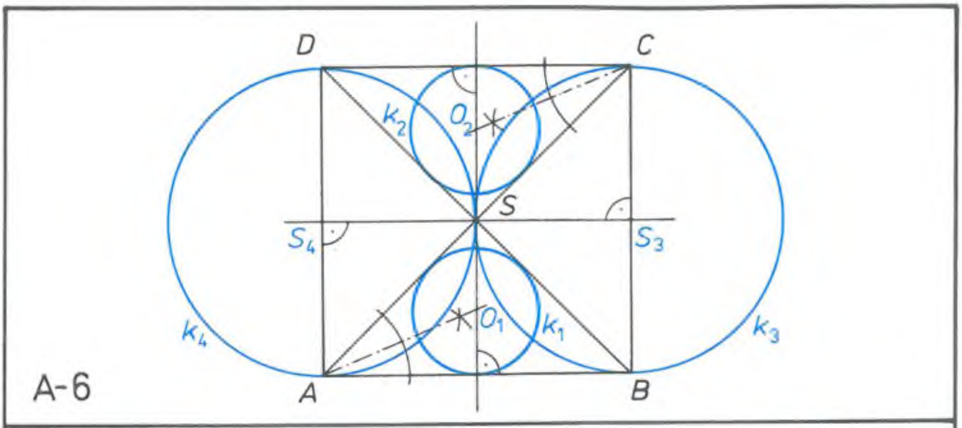
A-4



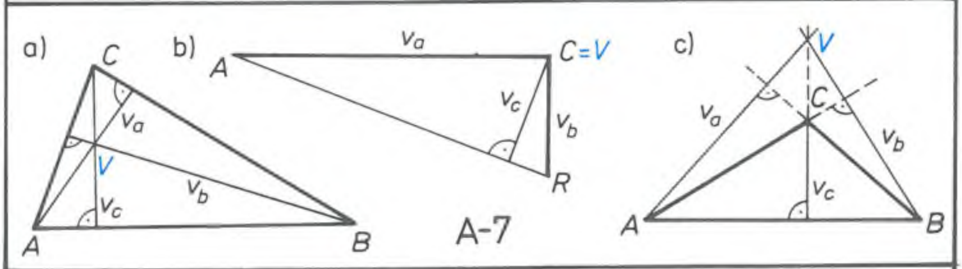
A-5



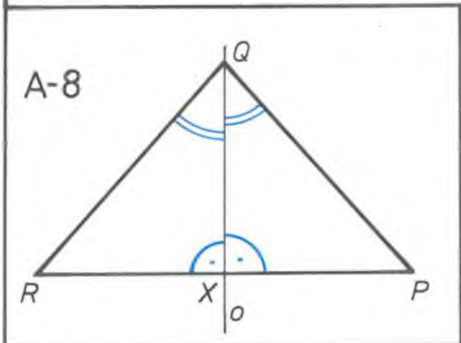
A-6



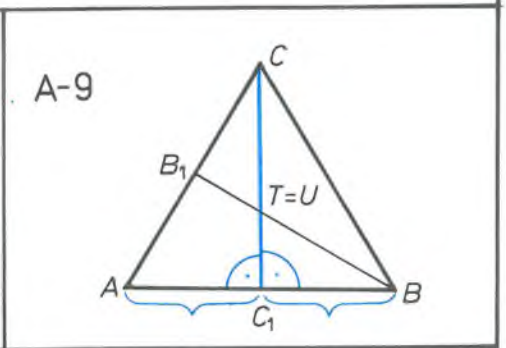
A-7



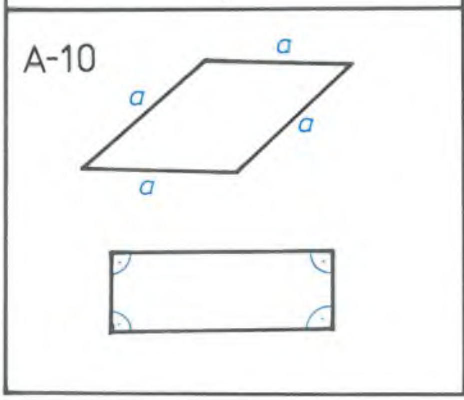
A-8



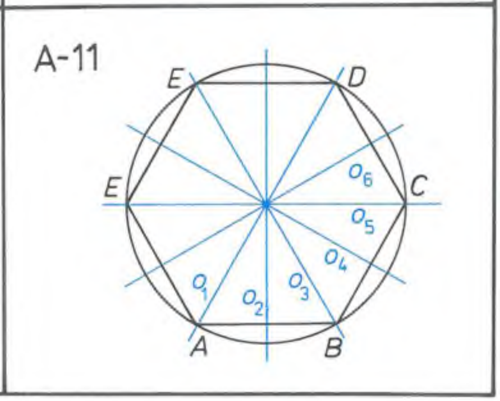
A-9

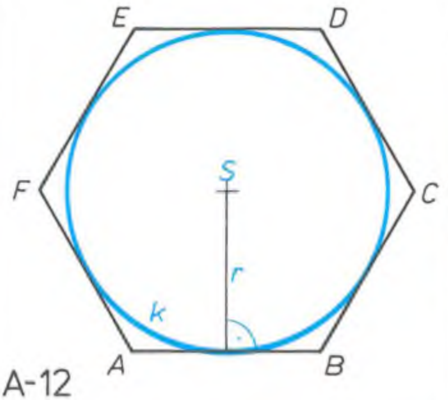


A-10

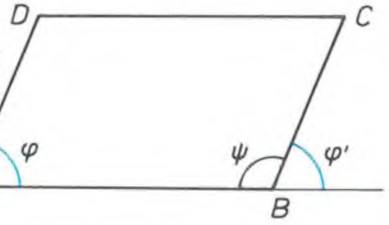


A-11

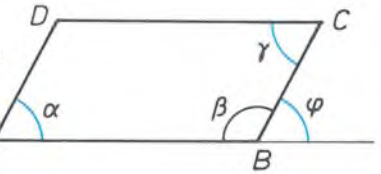




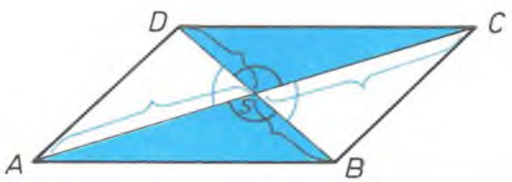
A-12



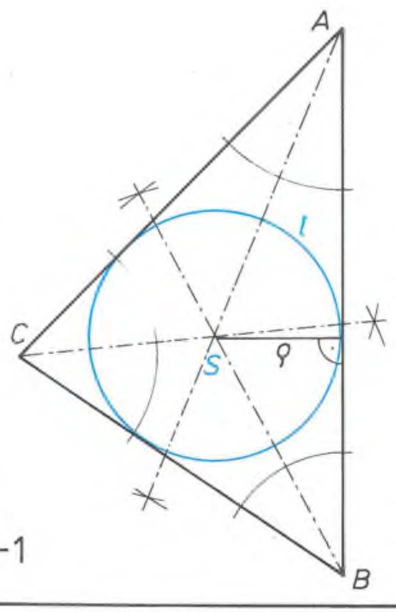
A-13



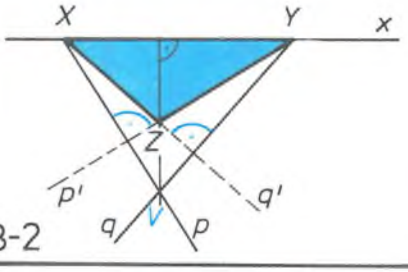
A-15



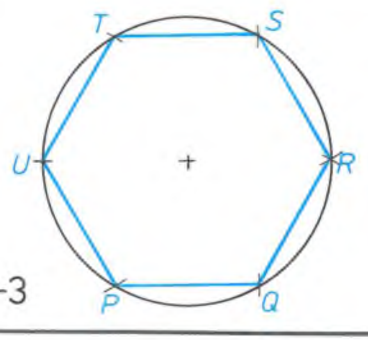
A-14



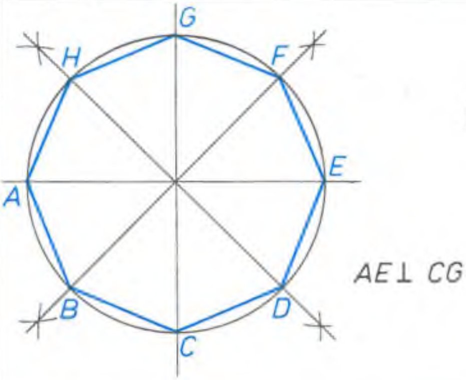
B-1



B-2

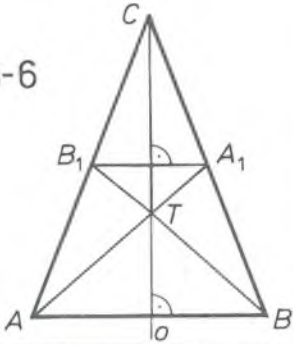


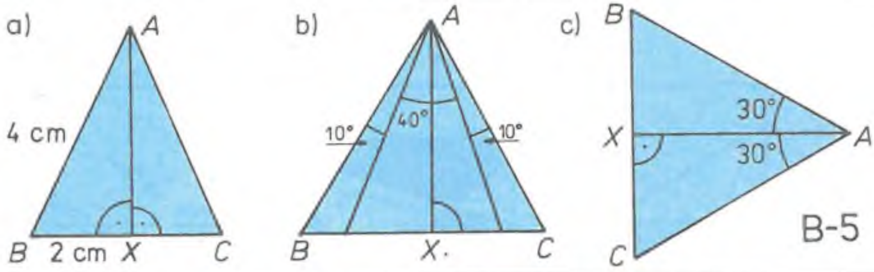
B-3



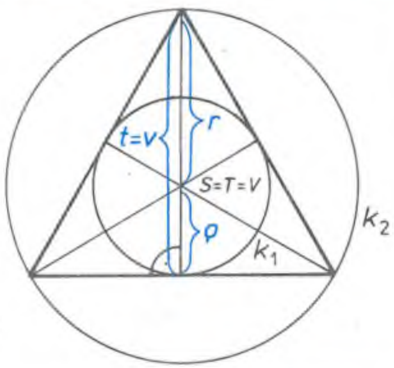
B-4

B-6

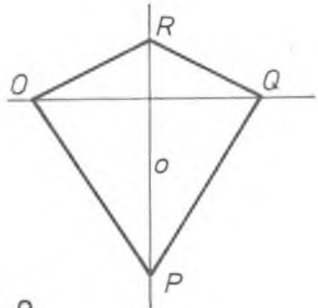




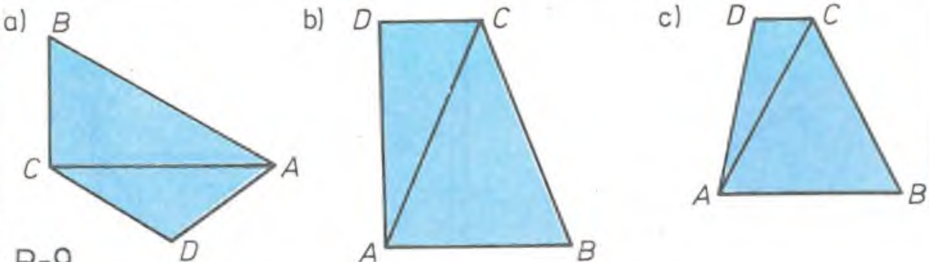
B-5



B-7

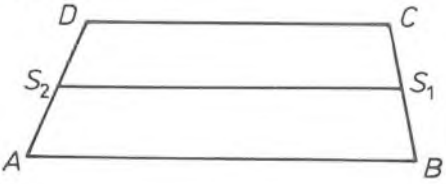


B-8

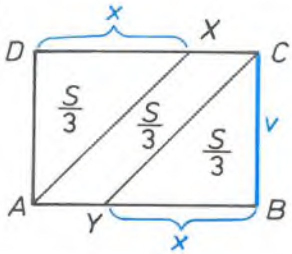


B-9

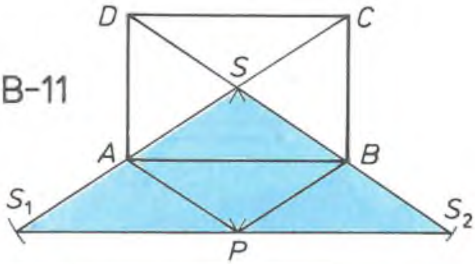
B-10

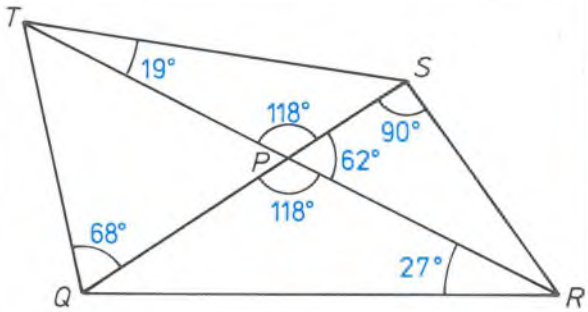


B-12

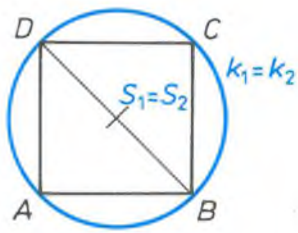


B-11

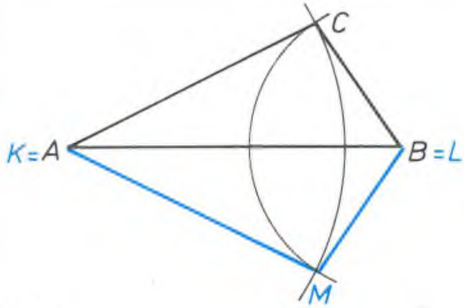




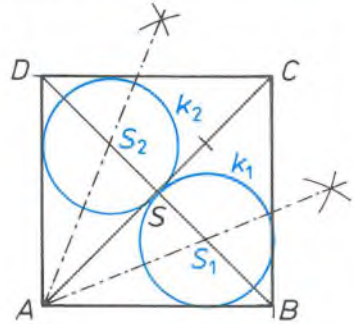
C-1



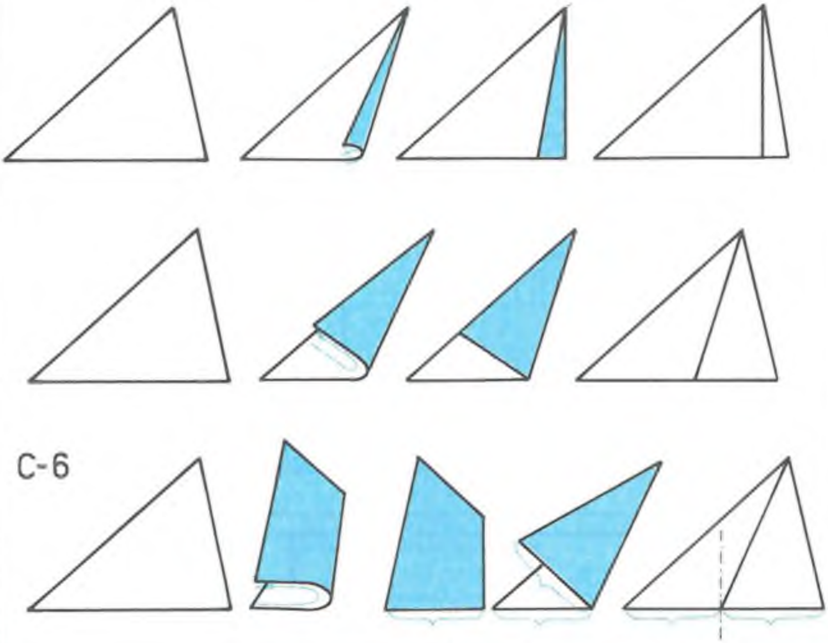
C-4



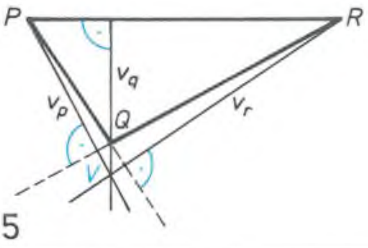
C-2



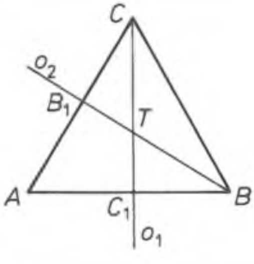
C-3



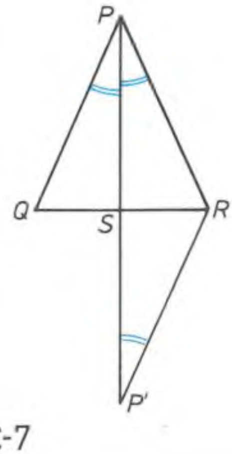
C-6



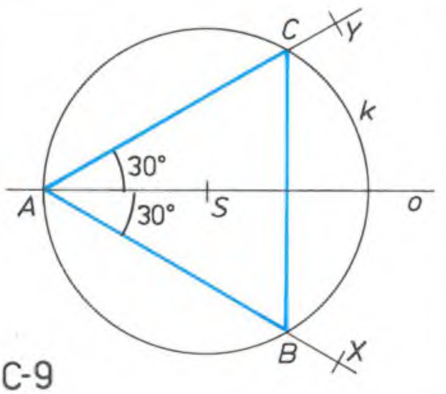
C-5



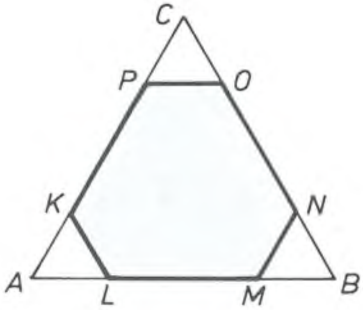
C-8



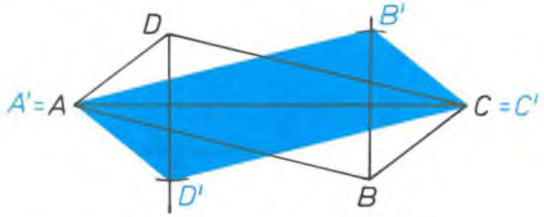
C-7



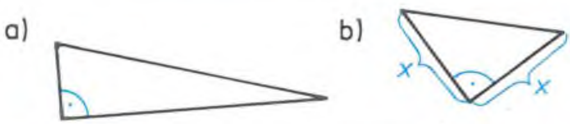
C-9



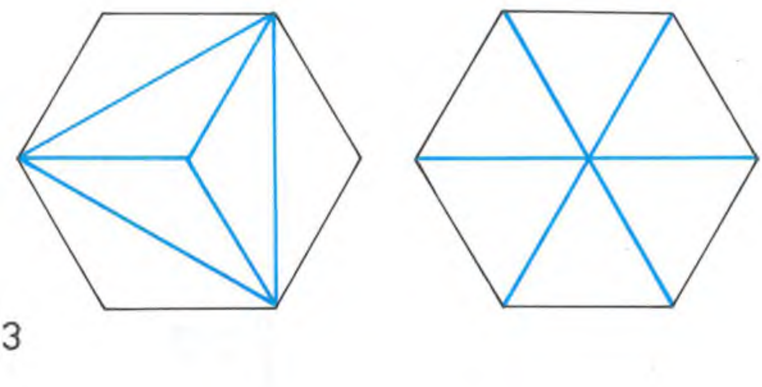
C-10



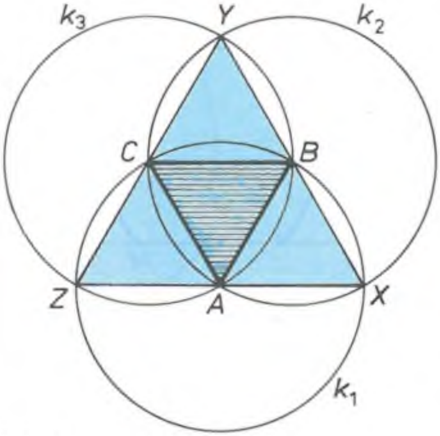
C-11



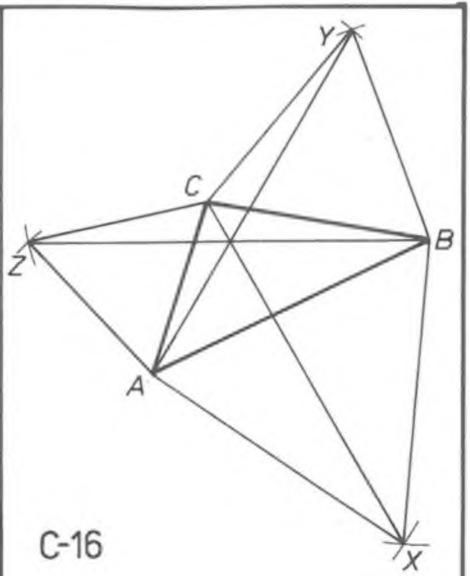
C-12



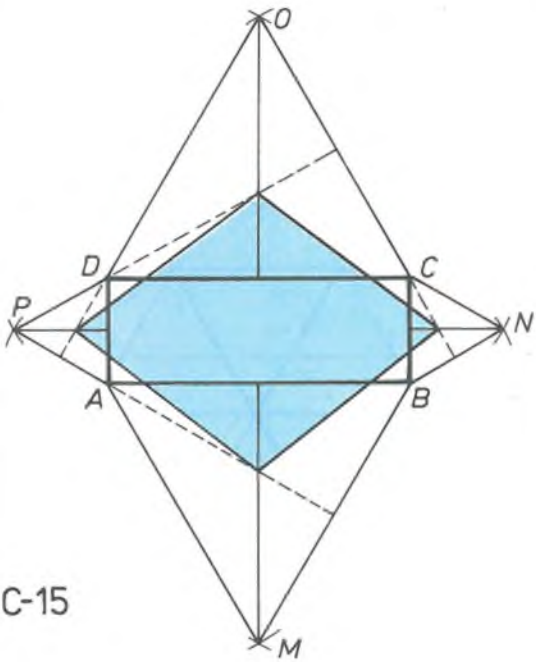
C-13



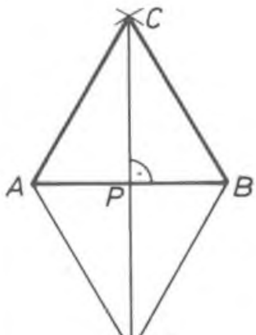
C-14



C-16



C-15



C-17

RNDr. Jiří Herman
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

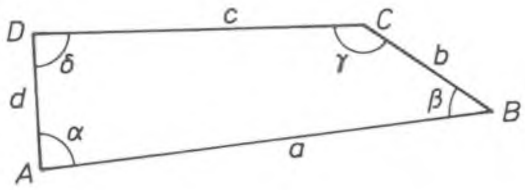
Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií
Trojúhelníky a čtyřúhelníky

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Pérové obrázky narýsoval
RNDr. Jiří Mikulčák, CSc.
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1, roku 2000
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Podle imprimované předlohy vysazené programem TEX
vytiskla LD, s. r. o. – TISKÁRNA PRAGER, Radlická 2, Praha 5
Dotisk 1. vydání

94 11 024

ISBN 80-85849-86-0

ČTYŘÚHELNÍKY



$$\boxed{o = a + b + c + d}$$

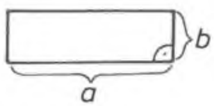
$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$$

Obsahy

čtverec

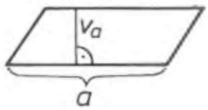
$$S = a^2$$

obdélník



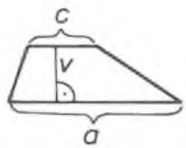
$$S = a \cdot b$$

rovnoběžník



$$S = a \cdot v_a$$

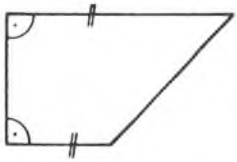
lichoběžník



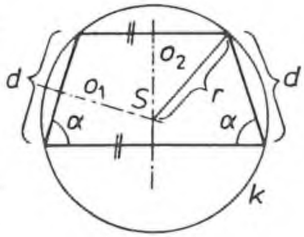
$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Lichoběžník

$\beta + \gamma = 180°$



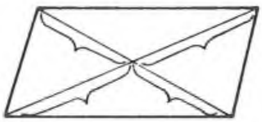
pravoúhlý lichoběžník

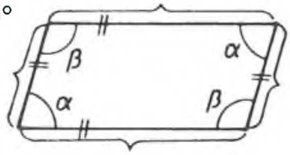


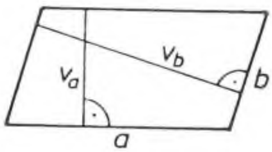
rovnoramenný lichoběžník

Rovnoběžník

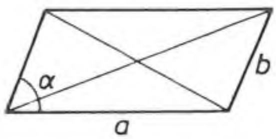
$\alpha + \beta = 180°$





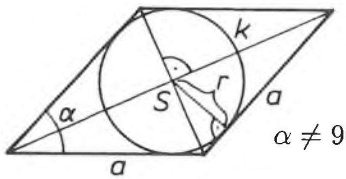


kosodélník:



$a \neq b, \quad \alpha \neq 90°$

kosočtverec:

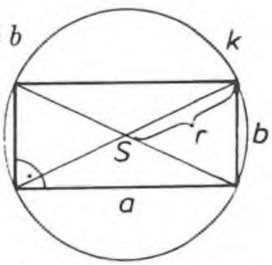


$\alpha \neq 90°$

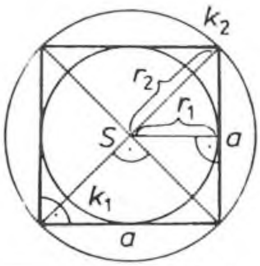
kosoúhelníky

obdélník:

$a \neq b$



čtverec:



pravoúhelníky

249 125

Univerzita Mateja Bela
Univerzitná knižnica
285000204185

PROMETHEUS

94 11 024

ISBN 80-85849-86-0