PROMETHEUS

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Rovnice a jejich soustavy

Jč
m+f

ROVNICE $\boxed{ax + b = 0}$

$a \neq 0$	jde o lineární rovnici s jediným kořenem $x = -\frac{b}{a}$
	$2x + 3 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$
$a = 0$ $b \neq 0$	rovnice nemá řešení
	$0 \cdot x - 1 = 0 \implies$ takové x neexistuje
$a = 0$ $b = 0$	rovnice má nekonečně mnoho řešení
	$0 \cdot x + 0 = 0 \implies$ řešením je každé číslo x

ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

Vyloučíme hodnoty neznámé,
pro které rovnice nemá smysl:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{3}{5}, \qquad x \neq 2$$

Rovnici vynásobíme společným jmenovatelem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} &= \frac{3}{5} \qquad / \cdot 5(x-2) \\ 5 &= 3 \cdot (x-2) \\ x &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Rovnice a jejich soustavy

RNDr. Jiří HERMAN
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Rovnice a jejich soustavy

PROMETHEUS

Publikace byla připravena ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc., a RNDr. Milan Ryšavý.

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR, č. j. 11274/99–22, dne 2. 3. 1999 k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy a víceletá gymnáza jako součást ucelené řady učebnic pro vyučovací předmět matematika s dobou platnosti šest let.

1. vydání

ISBN 80-7196-137-X

OBSAH

Na vysvětlenou ... 6
Úvod ... 8
1 Rovnice a jejich úpravy ... 10
Cvičení 1 ... 18
2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli ... 20
Cvičení 2 ... 25
3 Kvadratické rovnice ... 26
Cvičení 3 ... 44
4 Slovní úlohy 1 ... 47
Cvičení 4 ... 57
5 Úlohy o společné práci ... 59
Cvičení 5 ... 64
6 Úlohy o směsích ... 66
Cvičení 6 ... 73
7 Rovnice s více neznámými ... 75
Cvičení 7 ... 98
8 Slovní úlohy 2 ... 101
Cvičení 8 ... 109
9 Úlohy z matematické olympiády ... 110
Cvičení 9 ... 114
10 Souhrnná cvičení ... 116
Výsledky průběžných úkolů ... 133
Výsledky cvičení ... 135
Výsledky souhrnných cvičení ... 139

Na vysvětlenou ...

Čtrnáctý sešit z řady učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií a pro třídy základních škol s rozšířenou výukou matematiky, který právě dostáváte do rukou, je věnován řešení *rovnic* a jejich *soustav*.

Připomínáme, že cílem našeho projektu je vytvořit ve formě řady 17 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních čtyřech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestaveny tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Zmíněné cíle ovlivnily rozsah i formu textu. Zopakujme stručně, jakým způsobem:

Výklad nového učiva je zpravidla uveden motivující otázkou (značenou otazníkem na okraji stránky). Nové pojmy, poznatky a pravidla jsou pak podrobně vysvětlovány a zdůvodňovány tak, aby je žák v případě potřeby mohl zvládnout samostatným studiem. Nezakrýváme, že naše učebnice jsou psány pro žáky s hlubším zájmem o matematiku a další přírodovědné předměty. Těm jsou určeny i drobnějším písmem (petitem) tištěné pasáže, které přesahují standardní rámec učiva.

U řešených příkladů někdy uvádíme více různých postupů vedoucích k cíli, aby je žáci mohli sami srovnat. Tak se je pokoušíme naučit tomu, co je pro práci v matematice zásadní: umět se podívat na jednu situaci z různých hledisek. Rovněž považujeme za důležité, aby se žáci naučili vlastní řešení srozumitelně a přehledně zapisovat. Proto jsme do učebnice zařadili ukázky „opsané“ z žákovských sešitů, které by mohly žákům posloužit jako vzory takových zápisů.

Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve *větách*, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Nejedná se nám v žádném případě o signál k bezduchému memorování, ale o výzvu, aby se žáci nad obsahem těchto vět důkladně zamysleli a správně je pochopili. To lze kontrolovat *průběžnými úkoly*, v textu značenými ➡ . Ke kontrole zvládnutí probraného učiva jsou určena *cvičení* uváděná za každou kapitolou. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k tématu celého sešitu.

Řešení rovnic a jejich soustav někdy doplňujeme *zkouškou* správnosti. Domníváme se totiž, že je užitečné, když si žáci zvyknou výsledky svých výpočtů kontrolovat. U některých příkladů vyžadujeme provedení zkoušky přímo v textu zadání. V ostatních případech necháváme na uvážení učitele, kdy bude zkoušky po žácích požadovat.

Většina úkolů, cvičení i souhrnných cvičení je na konci sešitu opatřena výsledky. Příklady určené k samostatné práci žáků označujeme někdy (pro lepší orientaci) těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
$*$ – obtížnější příklad
$**$ – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Na závěr připojujeme přehled titulů všech sešitů naší řady:

Prima
Úvodní opakování
Kladná a záporná čísla
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost

Sekunda
Racionální čísla. Procenta
Trojúhelníky a čtyřúhelníky
Hranoly
Výrazy 1

Tercie
Rovnice a nerovnice
Kruhy a válce
Úměrnosti
Geometrické konstrukce
Výrazy 2

Kvarta
Rovnice a jejich soustavy
Funkce
Podobnost a funkce úhlu
Jehlany a kužely

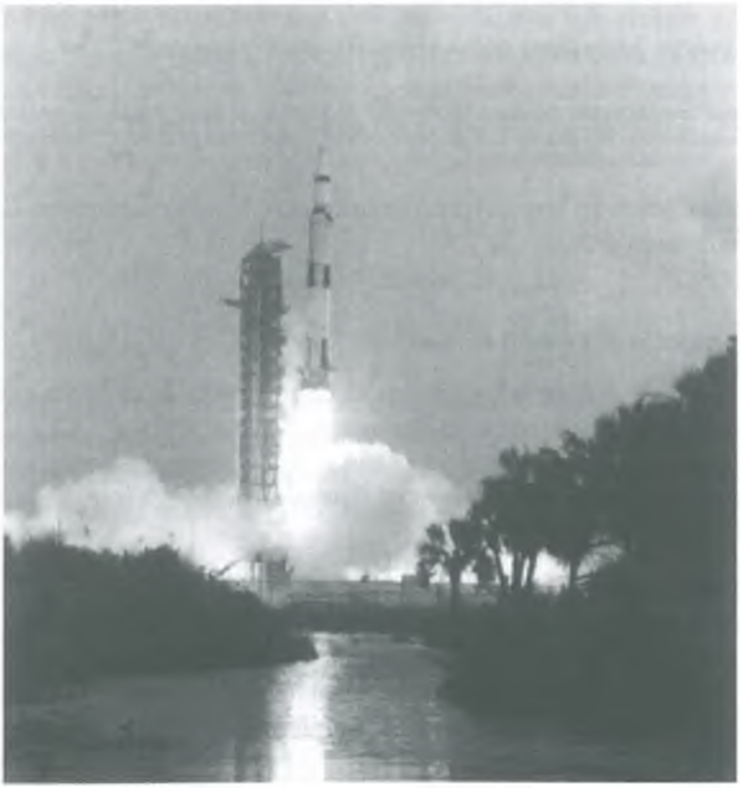
ÚVOD

Matematická disciplína zvaná *algebra* se historicky utvářela jako nauka o řešení rovnic. S jejími základy jsme se seznámili už dříve: poznali jsme „jazyk“ mnohočlenů a jeho pravidla, která nám umožnila zapisovat a řešit jednoduché rovnice s jednou neznámou, pokud je bylo možné převést ekvivalentními úpravami na *lineární* rovnice. V této dovednosti se nyní nejprve zdokonalíme. Pak začneme řešit složitější rovnice, které znali a řešili již staří Babylóňané a které se dnes nazývají *kvadratické* rovnice s jednou neznámou.

Staročečtí učenci spojovali kvadratické rovnice s důležitými geometrickými úlohami. Jednu z nich, tzv. problém zlatého řezu, uvádí Eukleides (4. stol. př. Kr.) ve své knize *Základy* takto: „Rozdělit úsečku délky a tak, aby obdélník sestrojený z celé úsečky a z jedné z obou částí měl týž obsah jako čtverec sestrojený ze zbývající části úsečky.“ Označíme-li x stranu neznámého čtverce, pak citovaná úloha se vlastně ptá na řešení rovnice $a(a-x)=x^2$, která obsahuje „čtverec“ neboli „kvadrát“ x^2 neznámé x. Dodejme pro zajímavost, že uvedenou kvadratickou rovnici můžeme rovněž zapsat jako úměru $(a-x):x=x:a$ a přečíst: „Jedna část úsečky se má ke druhé části stejně, jako se má druhá část k celé úsečce.“ Příčinou, proč se matematikové zabývali zlatým řezem, byl předpoklad, že úsečky dělené v tomto poměru jsou základem krásy v architektuře a ve výtvarném umění a že se zlatý řez vyskytuje v proporcích lidského těla, rostlin i v uspořádání vesmírných těles.

V tomto sešitě budeme také poprvé řešit rovnice, ve kterých vystupuje ne jedna, ale více neznámých. K určení jejich hodnot obvykle jedna taková rovnice nestačí, zpravidla je zapotřebí znát tolik „navzájem nezávislých“ rovnic, kolik je neznámých. I když se v našem textu omezíme pouze na soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými, metody řešení, které si osvojíme, lze uplatnit i při řešení soustav s velkým počtem rovnic a neznámých. Vysvětleme v posledním odstavci, proč je řešení „rozsáhlých“ soustav rovnic v současné matematické praxi tak časté a významné.

Proměnné veličiny, které popisují průběh mnoha přírodních jevů nebo technických procesů, se řídí zákony, vyjádřenými tzv. diferenciálními rovnicemi. Takové rovnice nelze algebraicky (tj. pomocí aritmetických operací a konečného počtu známých a neznámých hodnot) vůbec zapsat a k výpočtu jejich řešení v naprosté většině případů neexistuje žádný vzorec. Přesto je možné vypočítat alespoň *přibližné* hodnoty těchto řešení, a to tak, že zkoumanou diferenciální rovnici zaměníme vhodnou soustavou algebraických rovnic. Přitom často platí, že takové „přiblížení“ má tím menší chybu, čím početnější soustavu rovnic k výpočtu zvolíme. Při praktických výpočtech jsme ovšem vždy omezeni tím, jak velké soustavy jsme schopni v „přijatelném“ čase vyřešit. Dnes už to samozřejmě nezávisí na počtářských schopnostech lidí, ale na operační rychlosti dostupné výpočetní techniky. (Zdůrazněme však, že jsou to lidé, kteří tvorbou programů počítačům celý postup výpočtů přesně předepisují.) Současné nejvýkonnější počítače umožňují v potřebném čase řešit například soustavy rovnic s desetitisíci neznámými, kterými se vyhodnocují aktuální údaje o průběhu kosmického letu, a podle jejich výsledků se rozhoduje o dalším řízení letu. Přemýšlíme-li proto někdy o vzniku a rozvoji kosmonautiky, nezapomeňme, že lety do vesmíru se staly skutečností díky dvěma vynálezům: raketovému motoru a počítači.



1 ROVNICE A JEJICH ÚPRAVY

Postupům řešení rovnic jsme věnovali podstatnou část sešitu *Rovnice a nerovnice*. Naučili jsme se nejprve řešit rovnice metodou ekvivalentních úprav a pak jsme ukázali, jak lze rovnice využít při řešení slovních úloh. Získané „teoretické“ poznatky o rovnicích si nyní stručně zopakujeme.

? Co již víme o *rovnicích*?

Zápisy

$$x - 17 = 7, \qquad 35 = 4x + 7, \qquad 3x + 5 = 2x - 7$$

jsou příklady **rovnic**. Na jedné nebo na obou stranách každé rovnice se objevuje *výraz s proměnnou*. Proměnná zastupuje neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se **neznámá**; nejčastěji se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.

Řešit rovnici znamená určit *všechna čísla*, která je možné dosadit za neznámou, aby se rovnice „přeměnila“ v platnou rovnost. Každé takové číslo nazýváme **kořenem** nebo **řešením** dané rovnice.

Slovo „řešení“ se u rovnic používá ve dvojím významu: jednak znamená *postup*, kterým určujeme neznámou, jednak se jím pojmenovává i „správná hodnota“ neznámé – *kořen*.

Připomeňme ještě, že levou stranu rovnice označujeme písmenem L, pravou stranu písmenem P.

? Jak postupujeme při řešení rovnic?

V sešitě *Rovnice a nerovnice* jsme podrobně vysvětlili metodu *ekvivalentních úprav*. Nyní ji stručně připomeneme.
Postup, kterým z jedné rovnice získáme jinou rovnici se stejnou množinou kořenů, se nazývá **ekvivalentní úprava** rovnice. Víme, že k takovým úpravám patří:

- výměna levé a pravé strany rovnice
- přičtení téhož čísla nebo mnohočlenu k oběma stranám rovnice
- odečtení téhož čísla nebo mnohočlenu od obou stran rovnice
- vynásobení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem
- vydělení obou stran rovnice týmž nenulovým číslem

Při řešení rovnice $4x - 7 = 29 - 2x$ zopakujeme, jak se ekvivalentní úpravy provádějí a jak se podrobně zapisují:

$$\begin{aligned}
4x - 7 &= 29 - 2x && / + 2x\\
4x - 7 + 2x &= 29 - 2x + 2x &&\\
6x - 7 &= 29 && / + 7\\
6x - 7 + 7 &= 29 + 7 &&\\
6x &= 36 && / : 6\\
6x : 6 &= 36 : 6 &&\\
x &= 6 &&
\end{aligned}$$

Kvůli přehlednosti píšeme znaky rovnosti pokud možno pod sebe. Zamýšlenou úpravu rovnice zapisujeme vpravo za lomítko do sloupce, který je od zápisu rovnice dostatečně daleko.

Po vyřešení rovnice je užitečné zkontrolovat, zda je nalezený výsledek správný. Této kontrole říkáme *zkouška*. Provádíme ji tak, že vypočtenou hodnotu neznámé dosadíme do levé strany výchozí rovnice a vypočteme její hodnotu. Pak dosadíme do pravé strany a vypočteme její hodnotu. Vyjdou-li nám dvě stejná čísla, je výsledek správný (pokud jsme při zkoušce správně dosadili a počítali). Vyjdou-li nám různá čísla, musíme najít chybu, které jsme se dopustili v průběhu řešení rovnice nebo při provádění zkoušky.

$$L = 4x - 7 = 4 \cdot 6 - 7 = 24 - 7 = 17$$
$$P = 29 - 2x = 29 - 2 \cdot 6 = 29 - 12 = 17$$
$$L = P$$

Stručnější řešení rovnice dostaneme, *převádíme-li členy z jedné strany rovnice na druhou* – členy s neznámou na jednu stranu, členy bez neznámé, tj. čísla, na stranu druhou. Nezapomeňte, že pokud přejde člen z jedné strany rovnice na druhou, změní při tom znaménko.

$$\begin{aligned}
4x - 7 &= 29 - 2x &&\\
4x + 2x &= 29 + 7 &&\\
6x &= 36 && / : 6\\
x &= 6 &&
\end{aligned}$$

1. Vysvětlete, proč mají rovnice $5x + 4 = 9x - 12$, $5x + 12 = 9x - 4$ a $12 - 9x = -5x - 4$ stejné kořeny.

2. Zjistěte, které z rovnic $14x - 36 = 6x$, $7x - 18 = 4x$, $35x - 90 = 15x$ a $7x - 18 = 3x$ mají stejné kořeny, aniž byste je řešili.

3. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $28m - 21 = 7m - 63$ b) $13m - 61 = -m + 23$

c) $5m - 17 + 3m = -4m - 65$ d) $3{,}4m - 2{,}6m = -0{,}8m + 0{,}64$

Jak řešíme rovnice se závorkami?

Někdy se setkáváme s rovnicemi, v nichž vystupují složitější výrazy zapsané pomocí *závorek*. Jejich řešení zpravidla začínáme tím, že závorky odstraníme.

Příklad 1. Řešte rovnici s neznámou t:

$$2 \cdot (t - 1) + 3 \cdot (1 - t) = 4 \cdot (t - 2) - 1$$

Řešení

$$\begin{aligned} 2 \cdot (t - 1) + 3 \cdot (1 - t) &= 4 \cdot (t - 2) - 1 \\ 2t - 2 + 3 - 3t &= 4t - 8 - 1 \\ -t + 1 &= 4t - 9 \\ 1 + 9 &= 4t + t \\ 10 &= 5t \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Předtím, než jsme převedli členy z jedné strany rovnice na druhou, zjednodušili jsme levou i pravou stranu rovnice. Zkoušku proveďte sami.

4. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $6(x - 4) = 10 + 4(x + 1)$ b) $4(x - 5) = 7 - (x + 3) - 3x$

c) $3 - 7(x - 2) = -3(x + 1)$ d) $5x - (2x - 3) - 4(x - 9) = x + 11$

5. Přesvědčte se, že obě rovnice mají stejný kořen:

$$3(y - 1) - 2(y + 1) - 7(-y - 9) - 5(y + 8) = -3(y + 6)$$
$$-(-2 - y) - 3(2y - 5) = -y + 2(2y + 33) - 16 - y - (y - 3)$$

Jak řešíme rovnice se zlomky?

?

Jestliže rovnice obsahuje zlomky, začínáme její řešení zpravidla tak, že vynásobíme obě strany rovnice společným jmenovatelem všech zlomků (nejlépe nejmenším).

Příklad 2. Řešte rovnici s neznámou y a proveďte zkoušku:

$$\frac{y}{2} - \frac{y}{3} + \frac{y}{4} - \frac{y}{6} = 9 - \frac{y}{8}$$

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} - \frac{y}{3} + \frac{y}{4} - \frac{y}{6} &= 9 - \frac{y}{8} && / \cdot 24 \\ 12y - 8y + 6y - 4y &= 216 - 3y \\ 6y &= 216 - 3y && / + 3y \\ 9y &= 216 && / : 9 \\ y &= 24 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$L = \frac{y}{2} - \frac{y}{3} + \frac{y}{4} - \frac{y}{6} = \frac{24}{2} - \frac{24}{3} + \frac{24}{4} - \frac{24}{6} = 12 - 8 + 6 - 4 = 6$$

$$P = 9 - \frac{y}{8} = 9 - \frac{24}{8} = 9 - 3 = 6$$

$$L = P$$

Příklad 3. Řešte rovnici s neznámou z a proveďte zkoušku:

$$5 - \frac{z+6}{2} = z - \frac{3z+1}{5} + \frac{2z-7}{2}$$

Řešení, které jsme převzali z Rudova sešitu, je na str. 14.

$$5-\frac{a+6}{2}=a-\frac{3a+1}{5}+\frac{2a-7}{2} \qquad /\cdot 10$$
$$50-5(a+6)=10a-2(3a+1)+5(2a-7)$$
$$50-5a-30=10a-6a-2+10a-35$$
$$-5a+20=14a-37$$
$$57=19a \qquad /:19$$
$$\underline{a=3}$$

Zk.: $L=5-\frac{a+6}{2}=5-\frac{3+6}{2}=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$

$P=a-\frac{3a+1}{5}+\frac{2a-7}{2}=3-\frac{3\cdot 3+1}{5}+\frac{2\cdot 3-7}{2}=$

$=3-2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$L=P$

Jistě jste si všimli, že je užitečné, když jednotlivé kroky při řešení rovnic provádíme ve vhodném pořadí, které je pro většinu rovnic společné:

1. Odstraníme v rovnici zlomky a závorky.
2. Zjednodušíme levou i pravou stranu rovnice.
3. Převedeme členy s neznámou na jednu a čísla na druhou stranu rovnice.
4. Levou i pravou stranu rovnice znovu zjednodušíme.
5. Vydělíme obě strany rovnice koeficientem u neznámé.
6. Provedeme zkoušku dosazením do levé a pravé strany *původní* rovnice.

6. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $x-\frac{2}{7}x+1-\frac{2}{3}x=0$

b) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{6}+\frac{2}{3}-\frac{4x}{15}=1$

c) $7-\frac{13x}{3}=\frac{8x}{3}$

d) $\frac{11x-1}{6}=\frac{11x-5}{8}$

e) $\frac{3x+10}{4}-\frac{19x-10}{7}=0$

f) $-\frac{5x}{9}-\frac{x+4}{6}=\frac{7x-2}{18}$

g) $\frac{4}{3}x+x-1=\frac{2}{3}(x-14)$

h) $\frac{1}{3}(x-4)-1\frac{1}{5}=\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}x$

i) $1-\frac{x+2}{5}=2x-\frac{2x-1}{3}+\frac{x}{15}$

j) $\frac{1-x}{2}-\frac{x+1}{8}=\frac{x-1}{2}+\frac{-1+x}{4}$

Co je *lineární* rovnice?

?

Všechny rovnice, se kterými jsme se v této kapitole setkali, jsme dokázali pomocí ekvivalentních úprav převést do tvaru s „osamostatněnou“ neznámou:

$$a \cdot x = b$$

(Písmeno x označuje neznámou, písmena a, b daná reálná čísla.)

Takový tvar mají například rovnice

$$6x = -10, \qquad 2x = 2, \qquad x = -\frac{2}{3}\,.$$

Dosud jsme každou rovnici $ax = b$ „dořešili“ tak, že jsme obě její strany vydělili číslem a. To je možné provést, pokud je číslo a různé od nuly. Tehdy rovnici $ax = b$ nazýváme **lineární**. Její kořen je číslo

$$x = \frac{b}{a}\,.$$

Jiné řešení lineární rovnice $ax = b$ nemá.

Na lineární rovnice lze pomocí ekvivalentních úprav převést i některé rovnice, které jste dosud neřešili. V následujícím příkladu uvedeme jednu z nich.

Příklad 4. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$(x-2)^2 = (x+1)\cdot(x-3)$$

Řešení. Nejprve upravíme zvlášť levou a zvlášť pravou stranu:

$$\begin{aligned} x^2-4x+4 &= x^2+x-3x-3 \\ x^2-4x+4 &= x^2-2x-3 \end{aligned}$$

Na obou stranách rovnice je člen x^2. Takový člen se nám dosud při řešení žádné rovnice neobjevil. U naší rovnice se ho naštěstí můžeme „zbavit", a to tak, že ho od obou stran odečteme. Získáme rovnici

$$-4x+4 = -2x-3,$$

s kterou si již víme rady:

$$\begin{aligned} -4x+2x &= -3-4 \\ -2x &= -7 \\ x &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Nakonec připojíme zkoušku:

$$\begin{aligned} L &= (x-2)^2 = \left(\tfrac{7}{2}-2\right)^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4} \\ P &= (x+1)\cdot(x-3) = \left(\tfrac{7}{2}+1\right)\cdot\left(\tfrac{7}{2}-3\right) = \tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{4} \\ L &= P \end{aligned}$$

7. Řešte rovnici s neznámou z a proveďte zkoušku:

a) $(z-1)\cdot(z+1) = (z+2)^2$

b) $(z+2)^2-(z-1)^2 = 0$

c) $(4z-3)\cdot(z+2) = (2z-1)^2$

d) $(2z-10)\cdot(3z-3) = (z-2)\cdot(6z-26)$

? Kdy rovnice nemá *žádné* řešení? A kdy jich má *nekonečně mnoho*?

Některé rovnice vypadají „na první pohled" jako lineární, avšak lineární nejsou. Při jejich úpravách totiž zjistíme, že se členy s neznámou navzájem „vyruší". Prohlédněte si následující dva příklady:

Příklad 5. Řešte rovnici:

$$4(x-2) = 4x - 7$$

Řešení

$$\begin{aligned} 4(x-2) &= 4x-7 \\ 4x-8 &= 4x-7 \\ 4x-4x &= -7+8 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Na posledním řádku je vlastně rovnice $0 \cdot x = 1$. Ta nemá žádné řešení. Ať dosadíme za x jakékoliv číslo, vždy vyjde *neplatná rovnost* $0 = 1$.

Příklad 6. Řešte rovnici:

$$2(x+1) - 4x = -2(x-1)$$

Řešení

$$\begin{aligned} 2(x+1)-4x &= -2(x-1) \\ 2x+2-4x &= -2x+2 \\ -2x+2 &= -2x+2 \\ -2x+2x &= 2-2 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice $0 \cdot x = 0$ má *nekonečně mnoho* řešení. Dosadíme-li do ní za x libovolné reálné číslo, vyjde vždy *platná rovnost* $0 = 0$. Proto je řešením této rovnice ***každé reálné číslo***.

Rovnice s neznámou x, kterou můžeme ekvivalentními úpravami převést do tvaru $0 \cdot x = 0$, má nekonečně mnoho řešení. Jejím řešením je dokonce *každé* reálné číslo.
Rovnice s neznámou x, kterou můžeme ekvivalentními úpravami převést do tvaru $0 \cdot x = b$, kde b je číslo různé od nuly, nemá žádný kořen.

Zopakujeme ještě, jak je to se ***zkouškami*** u předchozích rovnic:

Jestliže rovnice nemá žádný kořen, není co zkoušet.

Má-li rovnice nekonečně mnoho kořenů, zkoušku neprovádíme. Není totiž v našich silách dosazovat do rovnice nekonečně mnoho konkrétních hodnot.

Zpravidla se spokojíme s tím, že původní rovnici „otestujeme" dosazením jednoho zvoleného čísla. Tak někdy zjistíme, že v našem řešení je chyba.

Například rovnici $2(x+1)-4x=-2(x-1)$ z příkladu 6 „otestujeme" dosazením $x=0$:

$$L = 2(x+1)-4x = 2\cdot(0+1)-4\cdot 0 = 2\cdot 1-0 = 2$$
$$P = -2(x-1) = -2\cdot(0-1) = -2\cdot(-1) = 2$$
$$L = P$$

8. Řešte rovnici s neznámou d:

a) $8d+1=3(d+1)+5d$

b) $5d-6(d+2)-9(d-1)=0$

c) $-1-2[-7d-3(1-d)]=4(2d+1)+1$

d) $13d-[(5d-8)-(8-5d)]=-(8+d)\cdot(-3)$

e) $2\cdot\left(\dfrac{2d}{5}-1\right)-\dfrac{d-3}{2}=\dfrac{d-1}{2}$

f) $1+\dfrac{3d+1}{4}-\dfrac{2d}{3}=1-\dfrac{d-1}{4}+\dfrac{d}{3}$

CVIČENÍ 1

1. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $7x-16=64-3x$

b) $18{,}2-0{,}6x=1{,}7+2{,}1$

c) $7{,}2-0{,}2\cdot 0{,}3x-2{,}8=0{,}6\cdot 0{,}8x-1$

d) $1{,}28x+1+42x-0{,}27=0{,}73+56{,}48x$

2. Zjistěte, které z daných rovnic mají stejné kořeny:

a) $b+3(b+1)=0$

b) $b-3(-b+1)=0$

c) $b-3(b-1)=0$

d) $b-3(1-b)=0$

e) $b+3(1-b)=0$

f) $b-3(-1-b)=0$

g) $b+3(-b+1)=0$

h) $b+3(b-1)=0$

3. Řešte rovnici s neznámou c a proveďte zkoušku:

a) $4(c+1)+3(c-5)=10$
b) $7(2-c)-2(7-c)=0$
c) $2(c-6)=3(c-8)$
d) $-1-(2c+4)\cdot 5=7-(4c+4)\cdot 7$
e) $10c-100(c-1)=0$
f) $11c-2(c-3)=-c$
g) $3c-(c-3)-(3-c)=2$
h) $0{,}3\cdot(2c-0{,}2)=(0{,}8c-0{,}2)\cdot 3$

4. Řešte rovnici, a pokud vyjde jediné řešení, proveďte zkoušku:

a) $2\cdot[6\cdot(y-3)-2\cdot(y-5)]=(y-2)\cdot 3-5\cdot(2-y)$
b) $2y-4\cdot[5-2\cdot(8-3y)]=[4\cdot(y+2)]\cdot 3+20$
c) $7+4\cdot[2y-5\cdot(y-1)]=-9-(2y-1)\cdot 6$
d) $(y-4)\cdot(y+5)-2\cdot(4y-15)=(y-2)^2$

5. Řešte rovnici, a pokud vyjde jediné řešení, proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{u}{4}-\dfrac{5}{3}-u=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3u}{4}-2$

b) $2u-\dfrac{3}{8}-\dfrac{5u}{6}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{2u}{3}-u$

c) $u-\dfrac{2+3u}{7}=\dfrac{1+u}{3}-3$

d) $4\cdot\left(\dfrac{u}{6}+\dfrac{3}{8}\right)=1-\dfrac{5-2u}{3}+\dfrac{3}{4}$

e) $u-\left(\dfrac{u}{5}-1\right)=\left(\dfrac{u}{5}+\dfrac{1}{10}\right)\cdot 2$

f) $u-4\cdot\left(u-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{5}-3\cdot\left(-2u-\dfrac{2}{5}\right)$

6. Přesvědčte se, že každé reálné číslo je řešením rovnice

$$\frac{3x}{8}+0{,}25-\left(\frac{x}{4}-3\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{7x}{16}-\frac{1}{8}\cdot(x-8)\,.$$

7. Zdůvodněte, proč daná rovnice nemá žádný kořen:

$$\frac{5}{6}x-\frac{(x+1)\cdot(3-2x)}{2}-\frac{x\cdot(3x+1)}{3}=0$$

2 ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

Dosud jste neřešili takové rovnice, jako jsou například

$$\frac{6}{x} = 2, \qquad \frac{y}{y-1} = \frac{1}{7}, \qquad \frac{3t}{2t-1} = \frac{3t+1}{2t}.$$

V těchto rovnicích se neznámé vyskytují ve *jmenovatelích* zlomků. Takové rovnice se nyní naučíme řešit.

? Jak řešíme rovnice s neznámou ve jmenovateli?

Jistě uhodnete, že rovnice

$$\frac{6}{x} = 2$$

má jediný kořen $x = 3$.

Uhodnout kořen rovnice

$$\frac{x-1}{x+2} + 2 = 0$$

však snadné není. Při řešení této rovnice ukážeme, jak rovnice s neznámou ve jmenovateli upravujeme, abychom se „zbavili" zlomku. Vynásobíme obě strany rovnice

$$\frac{x-1}{x+2} + 2 = 0$$

dvojčlenem $x + 2$:

$$\frac{x-1}{x+2} \cdot (x+2) + 2 \cdot (x+2) = 0 \cdot (x+2)$$

$$x - 1 + 2x + 4 = 0$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

V prvním kroku řešení jsme násobili obě strany rovnice výrazem $x + 2$. Protože tento výraz nabývá pro různá x různých hodnot, zjistíme, zda jsme pro některé x nenásobili rovnici nulou.

Proč je úprava „násobení nulou" zakázaná? Protože například rovnici $x = 4$ převádí na rovnici $0 \cdot x = 0$, jejímž řešením je každé reálné číslo (a nikoliv pouze číslo 4). Tutéž rovnici $0 \cdot x = 0$ dostaneme po vynásobení nulou i z rovnice $0 \cdot x = 4$, která, jak víme, nemá žádný kořen. Násobení nulou tedy „ruší" tu informaci o neznámé, kterou daná rovnice vyjadřovala.

Výraz $x+2$ nabývá hodnoty nula jedině pro $x=-2$. Tato hodnota x je však pro původní rovnici „zakázaná", neboť výraz $\dfrac{x-1}{x+2}$ na její levé straně není pro $x=-2$ vůbec definován.

Budeme říkat, že rovnice

$$\frac{x-1}{x+2}+2=0$$

pro $x=-2$ *nemá smysl*. Pro všechna ostatní čísla x tato rovnice smysl má. Pro ně je vynásobení obou stran rovnice dvojčlenem $x+2$ ekvivalentní úpravou.

Dohodneme se, že při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli nejprve zjistíme, pro které hodnoty neznámé nemá rovnice smysl. Vyloučíme je tak, že stanovíme podmínky, za kterých jsou všechny výrazy v rovnici definovány. Obvykle je zapíšeme do závorek napravo od rovnice. Za těchto podmínek je pak odstraňování zlomků ekvivalentní úpravou.

Zápis celého řešení naší rovnice pak vypadá takto:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+2}+2&=0 && (x\neq-2)\\
\frac{x-1}{x+2}+2&=0 && /\cdot(x+2)\\
x-1+2\cdot(x+2)&=0\\
x-1+2x+4&=0\\
3x&=-3\\
x&=-1
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$L=\frac{x-1}{x+2}+2=\frac{-1-1}{-1+2}+2=\frac{-2}{1}+2=0,\qquad P=0,\qquad L=P$$

Příklad 1. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$$

Řešení. Zlomek na levé straně rovnice nemá smysl pro $x=1$, zlomek na pravé straně pro $x=-1$. Proto budeme hledat kořeny mezi těmi čísly x, pro která platí $x \neq 1$ a zároveň $x \neq -1$. Pro taková x je společný jmenovatel $(x-1)\cdot(x+1)$ obou zlomků různý od nuly, a proto jím můžeme obě strany rovnice vynásobit:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} &= \frac{2}{x+1} \qquad\qquad / \cdot (x-1)\cdot(x+1)\\
1\cdot(x+1) &= 2\cdot(x-1)\\
x+1 &= 2x-2\\
3 &= x\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Zkouška:

$$L = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}, \qquad P = \frac{2}{x+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad L = P$$

Příklad 2. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$3 + \frac{2}{x+5} = \frac{x+7}{x+5}$$

Řešení

$$
\begin{aligned}
3 + \frac{2}{x+5} &= \frac{x+7}{x+5} \qquad\qquad (x \neq -5)\\
3 + \frac{2}{x+5} &= \frac{x+7}{x+5} \qquad\qquad / \cdot (x+5)\\
3\cdot(x+5)+2 &= x+7\\
3x+15+2 &= x+7\\
3x+17 &= x+7\\
2x &= -10\\
x &= -5
\end{aligned}
$$

Výpočtem nám vyšla právě ta hodnota neznámé x, pro kterou rovnice nemá smysl. Proto daná rovnice nemá žádný kořen.

Podívejte se, co by se stalo, kdybychom podmínku $x \neq -5$ přehlédli a prováděli zkoušku dosazením $x = -5$:

$$L = 3 + \frac{2}{x+5} = 3 + \frac{2}{-5+5} = 3 + \frac{2}{0} \quad \ldots \text{ nemá smysl}$$

$$P = \frac{x+7}{x+5} = \frac{-5+7}{-5+5} = \frac{2}{0} \quad \ldots \text{ nemá smysl}$$

Zkouška by nás tedy na přehlédnutí upozornila.

1. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $7 + \frac{3}{x} = \frac{20}{x} - 1{,}5$

b) $\frac{11}{3x} - \frac{2}{x} = 1\frac{2}{3}$

c) $-1 - \frac{5}{2x} = \frac{7}{x} + \frac{3}{2x}$

d) $\frac{1}{3x} + 3 + \frac{1}{6x} = -\frac{7}{6x} - \left(3 - \frac{2}{3x}\right)$

2. Řešte rovnici s neznámou y a proveďte zkoušku:

a) $\frac{y+4}{y-4} = 9$

b) $\frac{5y-7}{7y+5} = \frac{5}{7}$

c) $\frac{2y-4}{y-6} = \frac{2y}{y-5}$

d) $\frac{y+3}{y-5} - 2 = \frac{y+5}{3-y}$

Příklad 3. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{3}{x+2}$$

Řešení. Násobit společným jmenovatelem $(x^2+2x)\cdot(x+2)$ obou zlomků není vhodné. Z rozkladu

$$x^2+2x = x\cdot(x+2)$$

totiž zjistíme, že jmenovatel zlomku z levé strany rovnice je násobkem jmenovatele zlomku z pravé strany, takže je společným jmenovatelem obou zlomků. Vidíme, že oba zlomky mají smysl za podmínek $x \neq 0$ a $x \neq -2$ a že k jejich odstranění stačí obě strany rovnice vynásobit výrazem $x\cdot(x+2)$:

$$\frac{x-2}{x\cdot(x+2)} = \frac{3}{x+2} \qquad /\cdot x\cdot(x+2)$$

$$x-2 = 3x$$

$$-2 = 2x$$

$$x = -1$$

Zkouška:

$$L = \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{-1-2}{(-1)^2+2\cdot(-1)} = \frac{-3}{1-2} = 3$$

$$P = \frac{3}{x+2} = \frac{3}{-1+2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$L = P$$

Rovnice s neznámou ve jmenovateli má někdy nekonečně mnoho kořenů. Potvrzuje to ukázka z Vláďova sešitu:

$$\frac{1+x}{x} - 1 = \frac{1}{x} \qquad /\cdot x \qquad \boxed{\text{podm. } x \neq 0}$$

$$1+x-x = 1$$

$$0 = 1-1$$

$$\boxed{0 = 0} \qquad \text{každé } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

Zk: např. pro $x = 1$

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1+x}{x} - 1 = \frac{1+1}{1} - 1 = 2-1 = 1 \\ P &= \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} \boxed{L = P}$$

Vláďa nezapomněl na konci řešení vyloučit z množiny kořenů hodnotu $x = 0$, pro kterou daná rovnice nemá smysl.

3. Řešte rovnici, a pokud je to možné, proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{2x+1}{3x-1} = \dfrac{4x-5}{6x-2}$ b) $\dfrac{7x}{4(3x-2)} + \dfrac{9x}{2(6x-4)} = 4$

4. Řešte rovnici s neznámou y a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{y^2+y} = \dfrac{17}{y+1} - \dfrac{2}{y}$ b) $\dfrac{2y}{y-1} - \dfrac{10y-4}{y^2-y} = 2$

CVIČENÍ 2

1. Řešte rovnici a v případě jediného řešení proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{3}{2x} = \dfrac{11}{3} - \dfrac{1}{3x}$ b) $\dfrac{7-5x}{5x} = \dfrac{3}{2x} - 1$ c) $\dfrac{4+6x}{2x} = \dfrac{3x+2}{x}$

2. Řešte rovnici s neznámou y a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{y+4}{y-3} = 0$ b) $\dfrac{y-5}{y+7} = 4$ c) $\dfrac{y-1}{y+1} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{y-3}{y+2} = -\dfrac{3}{5}$ e) $\dfrac{2y-8}{3y-1} = 2$ f) $\dfrac{9y+4}{9y-4} = \dfrac{1}{2}$

3. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{2}{6-x} + \dfrac{5}{x+6} = 0$ b) $\dfrac{3x}{6-x} + \dfrac{2x-30}{x-6} = 0$

c) $\dfrac{x}{-6-x} + \dfrac{x}{x-6} = 0$

4. Řešte rovnici s neznámou z:

a) $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{6}{3z+3} + \dfrac{1}{z^2-1} = 0$

b) $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{6}{3z+3} + \dfrac{4}{z^2-1} = 0$

c) $\dfrac{2}{z-1} - \dfrac{6}{3z+3} - \dfrac{4}{z^2-1} = 0$

$*$**5.** Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{5}{1-x}$

b) $\frac{4}{3} + \frac{2x}{5x-4} = \frac{2x}{4-5x}$

c) $\frac{2}{x+3} - \frac{5}{x-3} = \frac{3x-1}{x^2-9}$

d) $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} + \frac{3}{2+x} = 0$

e) $\frac{x-2}{x+2} - 1 = \frac{1-x}{x^2+4x+4}$

f) $\frac{2}{x-6} + \frac{1}{6-x} = \frac{6-x}{x^2-12x+36}$

$*$**6.** Zjistěte, zda rovnice

$$\frac{1}{2(2c-4)} - 4 = \frac{1}{4(c-2)} - \frac{c-2}{c^2-4}$$

s neznámou c má řešení.

3 KVADRATICKÉ ROVNICE

I když jsme již řešili rovnice, ve kterých se neznámá vyskytovala nejen v první, ale i ve druhé mocnině, v průběhu jejich řešení se členy s druhou mocninou neznámé „navzájem vyrušily". Proto jsme po úpravách vždy dospěli k rovnici tvaru

$$ax = b$$

s neznámou x a konkrétními čísly a, b.

Nyní se naučíme řešit takové rovnice, ve kterých členy s druhou mocninou neznámé hrají „podstatnou roli". Říkáme jim *kvadratické* rovnice. Takové rovnice se většinou nedají řešit metodou „členy s neznámou na jednu stranu rovnice, členy bez neznámé na stranu druhou", se kterou jsme dosud při řešení rovnic vystačili.

? Co je kvadratická rovnice?

V rovnicích s neznámou x

$$x^2 = 2x, \qquad 4x^2 = 9, \qquad 2x^2 + 3x = 10$$

vystupují členy bez neznámé (tj. čísla 9 ve druhé a 10 ve třetí rovnici), členy s neznámou v první mocnině ($2x$ v první a $3x$ ve třetí rovnici) a členy s neznámou ve druhé mocnině (x^2, $4x^2$ a $2x^2$). Jsou to příklady rovnic, které můžeme upravit na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde x je neznámá a a, b a c jsou čísla, kterým říkáme *koeficienty*.

Původní rovnice	Upravená rovnice	Koeficienty
$x^2 = 2x$	$x^2 - 2x = 0$	$a = 1,\ b = -2,\ c = 0$
$4x^2 = 9$	$4x^2 - 9 = 0$	$a = 4,\ b = 0,\ c = -9$
$2x^2 + 3x = 10$	$2x^2 + 3x - 10 = 0$	$a = 2,\ b = 3,\ c = -10$

Podle mocniny neznámé, kterou daný člen rovnice obsahuje, mluvíme o *absolutním* členu, *lineárním* členu a *kvadratickém* členu.

Je-li koeficient a kvadratického členu rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

roven nule ($a = 0$), můžeme člen ax^2 v rovnici „vynechat“. Tak dostaneme rovnici bez kvadratického členu

$$bx + c = 0,$$

kterou již umíme řešit. Proto se dále budeme zabývat pouze rovnicemi

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ve kterých $a \neq 0$. Říkáme jim **kvadratické rovnice**. Patří k nim například rovnice

$$4x^2 + 7x - 12 = 0, \qquad 3x^2 - 15 = 0, \qquad x^2 + 3x = 0.$$

Všimněte si, že ve druhé rovnici není zastoupen lineární člen, ve třetí rovnici chybí člen absolutní. Jsou to příklady kvadratických rovnic, kterým říkáme *neúplné*. Právě tyto rovnice, tj.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{kde} \quad b = 0 \quad \text{nebo} \quad c = 0,$$

se naučíme řešit nejdříve.

? Jak řešíme kvadratickou rovnici bez absolutního členu?

Postup řešení rovnic tvaru $ax^2 + bx = 0$ vysvětlíme na příkladu řešení rovnice $2x^2 + 5x = 0$. Její levou stranu rozložíme na součin vytknutím neznámé x:

$$x \cdot (2x + 5) = 0$$

Kdy je součin dvou čísel roven nule? Jedině tehdy, je-li nule roven některý z činitelů. V našem případě proto musí platit $x = 0$ nebo $2x + 5 = 0$, tedy $x = 0$ nebo $x = -\frac{5}{2}$.

Zkouškou se přesvědčíme, že obě nalezená čísla jsou kořeny původní rovnice:

$$\begin{aligned} x = 0: \qquad & L = 2x^2 + 5x = 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 = 0 \\ x = -\tfrac{5}{2}: \qquad & L = 2x^2 + 5x = 2 \cdot \left(-\tfrac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\tfrac{5}{2}\right) = \\ & = 2 \cdot \tfrac{25}{4} - \tfrac{25}{2} = \tfrac{25}{2} - \tfrac{25}{2} = 0 \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že kvadratická rovnice $2x^2 + 5x = 0$ má právě dva kořeny. Budeme je rozlišovat indexy:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{5}{2}$$

Mohli jsme také napsat

$$x_1 = -\frac{5}{2}, \qquad x_2 = 0,$$

neboť na pořadí kořenů zpravidla nezáleží.

Na str. 29 uvádíme řešení rovnice $4x^2 - 12x = 0$ ze Šárčina sešitu.

$$4x^2 - 12x = 0$$
$$4x(x-3) = 0$$
$$4x = 0 \qquad x - 3 = 0$$
$$\underline{x_1 = 0} \qquad \underline{x_2 = 3}$$

Zk: $x_1 = 0$

$L = 4x^2 - 12x = 4 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 = 0$

$P = 0$

$L = P$

$x_2 = 3$

$L = 4x^2 - 12x = 4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 36 - 36 = 0$

$P = 0$

$L = P$

Není náhoda, že obě předchozí rovnice bez absolutního členu měly stejný kořen $x = 0$. Číslo 0 je totiž kořenem každé rovnice $ax^2 + bx = 0$. Na její levé straně lze totiž vždy vytknout činitele x:

$$ax^2 + bx = x \cdot (ax + b)$$

Poslední součin je pro $x = 0$ roven nule (bez ohledu na hodnotu druhého činitele $ax + b$).

Nyní vyřešíme ještě jednu rovnici, ze které po úpravě „zmizí“ absolutní člen.

Příklad 1. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$(2x + 1) \cdot (x + 4) = (x + 2)^2$$

Řešení

$$\begin{aligned}
(2x + 1) \cdot (x + 4) &= (x + 2)^2 \\
2x^2 + x + 8x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\
2x^2 + 9x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\
x^2 + 5x &= 0 \\
x \cdot (x + 5) &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -5$$

Zkouška:

$x = 0$

$L = (2x + 1) \cdot (x + 4) = (2 \cdot 0 + 1) \cdot (0 + 4) = 1 \cdot 4 = 4$

$P = (x + 2)^2 = (0 + 2)^2 = 4$

$L = P$

$x = -5$

$L = (2x+1)\cdot(x+4) = [2\cdot(-5)+1]\cdot(-5+4) = (-9)\cdot(-1) = 9$

$P = (x+2)^2 = (-5+2)^2 = (-3)^2 = 9$

$L = P$

□ **1.** Určete zpaměti nenulový kořen dané rovnice:

a) $x\cdot(x+1) = 0$ b) $x\cdot(x-4) = 0$

c) $2x\cdot(x+2) = 0$ d) $x\cdot(2x+2) = 0$

□ **2.** Řešte rovnici:

a) $(x+1)\cdot(x-1) = 0$ b) $(x+2)\cdot(x-1) = 0$

c) $(x-1)\cdot(x+4) = 0$ d) $(2x-4)\cdot(3x+15) = 0$

3. Řešte rovnici s neznámou z a proveďte zkoušku:

a) $z^2 - 3z = 0$ b) $z^2 + 7z = 0$

c) $3z^2 - 15z = 0$ d) $4z^2 - 100z = 0$

e) $2z^2 + 3z = 0$ f) $5z^2 - 6z = 0$

? Jak řešíme kvadratickou rovnici bez lineárního členu?

Zabývejme se nejprve rovnicí $x^2 = 4$. Všichni asi uhodnete její kořen $x = 2$. Někteří z vás si však možná neuvědomí, že jejím kořenem je také číslo $x = -2$. Platí totiž $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$. Existuje ještě jiný kořen rovnice $x^2 = 4$? Asi tušíte, že nikoliv. Vysvětlíme nyní proč; využijeme při tom vzorec $A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$:

$$x^2 = 4$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)\cdot(x+2) = 0$$

Pro každý kořen x rovnice $x^2 = 4$ tedy musí platit

$$x - 2 = 0 \quad \text{nebo} \quad x + 2 = 0.$$

V prvním případě vychází $x_1 = 2$, ve druhém $x_2 = -2$. Vysvětlili jsme, že žádné jiné řešení daná rovnice nemá.

Podívejme se nyní na rovnici $x^2 = 3$. Neznámá x v ní označuje číslo, jehož druhá mocnina je rovna 3. Víte již, že takové *kladné* číslo existuje a značí se $\sqrt{3}$. Také víte, že toto číslo

$$1{,}732\,050\,8\ldots$$

není racionální. Jeho desetinný zápis je nekonečný a nemá žádnou periodu. Proto taková čísla při praktických výpočtech zaokrouhlujeme.

Při řešení rovnic se „spokojíme“ se zápisy výsledků pomocí znaku $\sqrt{}$, např. $x = \sqrt{3}$, $x = 2 + \sqrt{7}$ apod. Jsou to totiž přesné zápisy, ze kterých lze příslušná čísla určovat pro praktické účely na potřebný počet desetinných míst.

Má rovnice $x^2 = 3$ kromě kladného kořene $\sqrt{3}$ ještě jiný kořen? Zkusme ji řešit jako rovnici $x^2 = 4$. Po převedení absolutního členu na levou stranu dostaneme rovnici

$$x^2 - 3 = 0.$$

Vzorec pro $A^2 - B^2$ nyní využijeme takto:

$$x^2 - 3 = x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(x + \sqrt{3}\right)$$

Proto rovnost $x^2 - 3 = 0$ platí, právě když $x - \sqrt{3} = 0$ nebo $x + \sqrt{3} = 0$. Tak vycházejí kořeny $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$. Jiné kořeny rovnice $x^2 = 3$ nemá.

Dvojčlen $x^2 - 3$ jsme dříve v hodinách matematiky na součin nerozkládali, neboť jsme počítali jen s mnohočleny, jejichž koeficienty byla *celá* čísla.

Prohlédněte si zápis řešení rovnice $3x^2 - 21 = 0$ z Luciina sešitu.

$$3x^2 - 21 = 0$$
$$3 \cdot (x^2 - 7) = 0$$
$$3 \cdot \underbrace{(x + \sqrt{7}) \cdot (x - \sqrt{7}) = 0}$$
$$\underline{x_1 = -\sqrt{7}}$$
$$\underline{x_2 = \sqrt{7}}$$

Zk.: pro $x = -\sqrt{7}$

$L = 3x^2 - 21 = 3 \cdot (-\sqrt{7})^2 - 21 =$
$= 3 \cdot 7 - 21 = 0$
$P = 0$
$L = P$

pro $x = \sqrt{7}$

$L = 3x^2 - 21 = 3 \cdot (\sqrt{7})^2 - 21 =$
$= 3 \cdot 7 - 21 = 0$
$P = 0$
$L = P$

Kvadratická rovnice bez lineárního členu někdy nemá žádný kořen. Příkladem je rovnice $x^2 + 6 = 0$. Její levá strana je totiž kladná (dokonce větší nebo rovna 6) pro každé reálné číslo x.

4. Řešte rovnici:

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $2x^2 - 18 = 0$

c) $3x^2 - 3 = 0$ d) $5x^2 - 20 = 0$

e) $x^2 - 2 = 0$ f) $3x^2 - 15 = 0$

g) $x^2 + 1 = 0$ h) $2x^2 + 5 = 0$

?

Jak řešíme další jednoduché kvadratické rovnice?

Přestože kvadratická rovnice $x^2 - 2x + 1 = 0$ má jak lineární, tak absolutní člen, dokážeme ji snadno vyřešit. Její levou stranu lze rozložit pomocí vzorce pro druhou mocninu rozdílu, tj. vzorce $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Máme tedy řešit rovnici

$$(x - 1)^2 = 0, \qquad \text{neboli} \qquad (x - 1) \cdot (x - 1) = 0.$$

Odtud vyplývá, že $x - 1 = 0$, a tedy $x = 1$. Toto číslo je vlastně kořenem rovnice $(x - 1)^2 = 0$ „dvakrát“, neboť je kořenem obou (stejných) činitelů na levé straně. Říkáme, že daná rovnice má *dvojnásobný* kořen, a píšeme $x_1 = x_2 = 1$.

Pomocí vzorců pro mocniny $(A - B)^2$ a $(A + B)^2$ zjistíme, že i rovnice v levém sloupci následující tabulky mají dvojnásobné kořeny:

Původní rovnice	Upravená rovnice	Kořeny
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$(x + 1)^2 = 0$	$x_1 = x_2 = -1$
$x^2 - 10x + 25 = 0$	$(x - 5)^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 5$
$4x^2 - 4x + 1 = 0$	$(2x - 1)^2 = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$
$25x^2 + 40x + 16 = 0$	$(5x + 4)^2 = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{4}{5}$

5. Napište kvadratickou rovnici, která má celočíselné koeficienty a dvojnásobný kořen rovný číslu:

a) 7 b) -10 c) $-\frac{8}{3}$

6. Může mít rovnice $x^2 + bx = 0$ dvojnásobný kořen? Pro kterou hodnotu koeficientu b? (Stejnou otázku posuďte pro rovnici $x^2 + c = 0$.)

7. Řešte rovnici:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
c) $x^2 + 49 = 14x$
d) $9x^2 = 6x - 1$
e) $3x^2 = 0$

8. Do rámečku doplňte kladné číslo tak, aby vzniklá kvadratická rovnice měla dvojnásobný kořen:

a) $x^2 + 4x + \square = 0$
b) $100x^2 - 20x + \square = 0$
c) $x^2 - \square x + 64 = 0$
d) $25x^2 + \square x + 4 = 0$

Shrňme, co jsme se dosud při řešení (jednoduchých) kvadratických rovnic naučili. Měla-li daná rovnice nenulové členy na obou stranách, upravili jsme ji nejdříve na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

s *nulovou* pravou stranou. Protože víme, že součin dvou čísel je roven nule, jen když je roven nule aspoň jeden z obou činitelů, hledali jsme dále rozklad levé strany $ax^2 + bx + c$ na součin.

Připomeňme, jaké druhy rozkladů jsme dosud využívali:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x \cdot (x + 2) \\ 4x^2 - 9 &= (2x - 3) \cdot (2x + 3) \\ x^2 + 2x + 1 &= (x + 1) \cdot (x + 1) \\ 4x^2 - 4x + 1 &= (2x - 1) \cdot (2x - 1) \end{aligned}$$

Ve všech příkladech šlo o rozklad mnohočlenu druhého stupně na součin dvou mnohočlenů prvního stupně.

Připomeňme, že s pojmem *stupeň mnohočlenu* jsme se seznámili, když jsme se učili dělit mnohočlen mnohočlenem.

Mnohočlen $ax^2 + bx + c$ proměnné x s koeficienty a, b, c je druhého stupně (má stupeň 2), pokud $a \neq 0$. Jak víme, příslušná rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ se nazývá kvadratická.

Mnohočlen $dx + e$ proměnné x s koeficienty d, e je prvního stupně (má stupeň 1), pokud $d \neq 0$. Příslušná rovnice $dx + e = 0$ (neboli $dx = -e$) se nazývá lineární.

Zatím umíme řešit jen některé kvadratické rovnice. Pokud bychom i pro další kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dovedli rozložit levou stranu na součin dvou mnohočlenů prvního stupně, převedli bychom řešení každé z nich na řešení dvou rovnic lineárních. Lineární rovnice již řešit umíme.

Proto se nyní budeme samostatně zabývat otázkou rozkladů mnohočlenů.

? Jak rozkládáme mnohočleny druhého stupně?

Abychom objevili novou metodu rozkladu mnohočlenů $ax^2 + bx + c$ s koeficientem $a = 1$, zvolíme nejprve cestu „od výsledku k zadání".

Který mnohočlen je součinem dvojčlenů $x + 2$ a $x + 5$? Zjistíme to násobením:

$$(x + 2) \cdot (x + 5) = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

Jak vznikly koeficienty 7 a 10 výsledného trojčlenu? Je to vidět z následujícího zápisu:

$$(x + 2) \cdot (x + 5) = x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5$$

Kdybychom naopak k zadání $x^2 + 7x + 10$ chtěli najít výsledný rozklad $(x + 2) \cdot (x + 5)$, hledali bychom dvě čísla, jejichž součet je 7 a součin je 10.

Pokusme se touto metodou rozložit na součin trojčlen $x^2 + 5x + 6$. Tentokrát hledáme dvě čísla, jejichž součet je 5 a součin je 6. Asi uhodnete, že jde o čísla 2 a 3:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

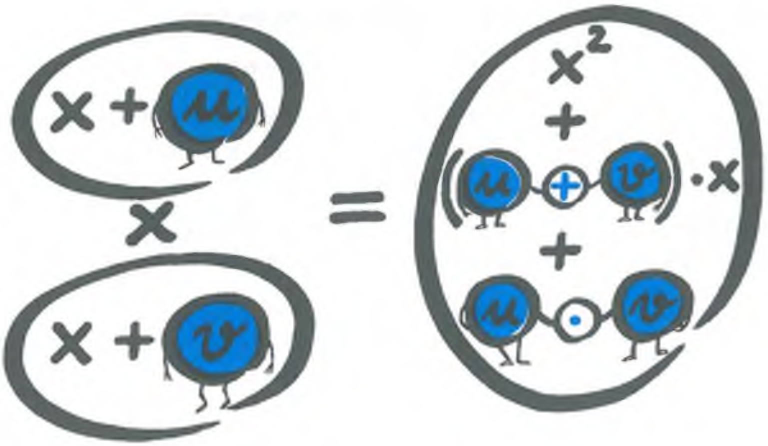
Správnost rozkladu ověřte zpaměti roznásobením pravé strany.

9. Rozložte na součin dvojčlenů:

a) $x^2 + 6x + 8$	b) $x^2 + 7x + 12$	c) $x^2 + 9x + 20$
d) $x^2 + 3x + 2$	e) $x^2 + 5x + 4$	f) $x^2 + 7x + 6$
g) $x^2 + 8x + 15$	h) $x^2 + 12x + 20$	i) $x^2 + 9x + 18$

Metodu rozkladu, kterou jsme právě vysvětlili, lze vyjádřit vzorcem

$$x^2 + (u + v) \cdot x + u \cdot v = (x + u) \cdot (x + v).$$



Zatím jsme metodu používali pouze pro trojčleny s kladnými koeficienty, kdy hledaná čísla u a v byla kladná.

Zkusme nyní rozložit trojčlen $x^2 - 5x + 6$.

Podle předchozího výkladu hledáme čísla u a v tak, aby platilo $u + v = -5$ a $u \cdot v = +6$. *Záporné* číslo -5 napovídá, že nevystačíme s rozkladem čísla 6 na součin dvou *kladných* činitelů: $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. *Kladné* číslo 6 zase říká, že hledaná čísla u, v musí mít stejná znaménka. Tak uhodneme, že $u = -2$ a $v = -3$. Rozklad

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

je správný, jak se sami přesvědčíte roznásobením.

Podobně lze uhodnout i následující rozklady:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2) \qquad (u + v = -3,\ \ u \cdot v = +2)$$
$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2) \cdot (x - 5) \qquad (u + v = -7,\ \ u \cdot v = +10)$$
$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3) \cdot (x - 5) \qquad (u + v = -8,\ \ u \cdot v = +15)$$

10. Rozložte na součin dvojčlenů:

a) $x^2 - 4x + 3$ b) $x^2 - 6x + 8$ c) $x^2 - 12x + 20$
d) $x^2 - 6x + 5$ e) $x^2 - 10x + 24$ f) $x^2 - 16x + 63$

Dosud jsme rozkládali na součin pouze takový trojčlen $x^2 + bx + c$, jehož absolutní člen c byl *kladný*. Znamenalo to, že ve vzorci

$$x^2 + (u + v) \cdot x + u \cdot v = (x + u) \cdot (x + v)$$

měla hledaná čísla u a v *stejná* znaménka. Nyní budeme rozkládat takové trojčleny, jejichž absolutní členy jsou *záporné*. Pro každý z nich budeme hledat čísla u a v s *různými* znaménky.

Například při rozkladu trojčlenu $x^2 - 3x - 4$ nejprve rozložíme všemi způsoby číslo -4 na součin dvou celých čísel různých znamének:

$$-4 = 1 \cdot (-4) = 2 \cdot (-2) = 4 \cdot (-1)$$

Protože $-3 = 1 + (-4)$, vychází rozklad

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1) \cdot (x - 4).$$

Prohlédněte si ještě několik podobných příkladů:

$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 6)$$
$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5) \cdot (x - 2)$$
$$x^2 + x - 12 = (x + 4) \cdot (x - 3)$$

11. Rozložte na součin dvojčlenů:

a) $x^2 - x - 2$	b) $x^2 + 2x - 3$	c) $x^2 + 3x - 4$
d) $x^2 - 4x - 5$	e) $x^2 + x - 2$	f) $x^2 - 10x - 11$
g) $x^2 + 4x - 12$	h) $x^2 + 5x - 6$	i) $x^2 - 8x - 20$

Naučili jsme se, jak některé mnohočleny $x^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty b a c rozkládat na součiny tvaru $(x + u) \cdot (x + v)$, kde u a v jsou neznámá celá čísla. Vede naše metoda vždy k cíli? Na příkladu trojčlenu $x^2 + x - 1$ ukážeme, že nikoliv. Číslo -1 lze rozložit na součin dvou celých čísel jediným způsobem: $-1 = 1 \cdot (-1)$. Součet čísel 1 a -1 je však roven nule, a ne číslu 1. Proto trojčlen $x^2 + x - 1$ naším postupem rozložit nelze.

Podobně sami vysvětlete, proč uvedenou metodou nedokážeme rozložit ani trojčlen $x^2 + 2x + 2$.

? Jak pomocí rozkladů řešíme kvadratické rovnice?

Vraťme se nyní od hledání rozkladů k řešení kvadratických rovnic. Víme již, že pokud umíme rozložit mnohočlen z levé strany rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

na součin, je nalezení kořenů snadné – stačí pak vyřešit dvě lineární rovnice.

Příklad 2. Řešte rovnici:

a) $x^2-5x+4=0$ b) $x^2-5x-6=0$ c) $x^2+6x+8=0$

Řešení

a)
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)\cdot(x-4)=0$$
$$x_1=1,\qquad x_2=4$$

b)
$$x^2-5x-6=0$$
$$(x+1)\cdot(x-6)=0$$
$$x_1=-1,\qquad x_2=6$$

c)
$$x^2+6x+8=0$$
$$(x+2)\cdot(x+4)=0$$
$$x_1=-2,\qquad x_2=-4$$

Zkoušky proveďte sami.

12. Řešte rovnici:

a) $x^2-7x+10=0$ b) $x^2+x-2=0$ c) $x^2+9x+18=0$
d) $x^2-x-20=0$ e) $x^2+x-30=0$ f) $2x^2-2x-4=0$

13. Určete, pro která čísla x má daný zlomek smysl:

a) $\dfrac{1}{x^2-2x-24}$ b) $\dfrac{x-3}{x^2+2x-15}$ c) $\dfrac{x^2+x}{x^2-5x-6}$

14. Čitatele i jmenovatele zlomku rozložte na součin a pak kraťte:

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ b) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-9}$ c) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+4x+4}$

d) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}$ e) $\dfrac{2x^2+4x}{x^2-5x-14}$ f) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2}$

15. Napište kvadratickou rovnici s kořeny:

a) $x_1=3,\ x_2=4$ b) $x_1=3,\ x_2=-2$
c) $x_1=-1,\ x_2=8$ d) $x_1=-7,\ x_2=-2$

Kdy má kvadratická rovnice řešení a kolik?

?

Setkali jsme se již s kvadratickými rovnicemi, které měly:

- dva různé kořeny (např. $x^2-x=0,\ x^2-x-2=0$)
- jeden dvojnásobný kořen (např. $x^2-2x+1=0,\ 4x^2+4x+1=0$)
- žádný kořen (např. $x^2+1=0,\ 4x^2+3=0$)

V příštím školním roce budete zkoumat kvadratické rovnice podrobněji. Zjistíte, že jiný počet řešení (než jsme uvedli) žádná kvadratická rovnice nemá. Už teď prozraďme, že o počtu kořenů rozhoduje znaménko jistého čísla, vypočteného z koeficientů dané kvadratické rovnice. Toto číslo se nazývá její **diskriminant**.

Název diskriminant má původ v latinském slovese *discriminare* (čti „diskrimináre"), které znamená *rozdělovat* nebo *rozlišovat*.
V našem případě znaménka diskriminantů rozdělují kvadratické rovnice do tří skupin podle počtu kořenů.

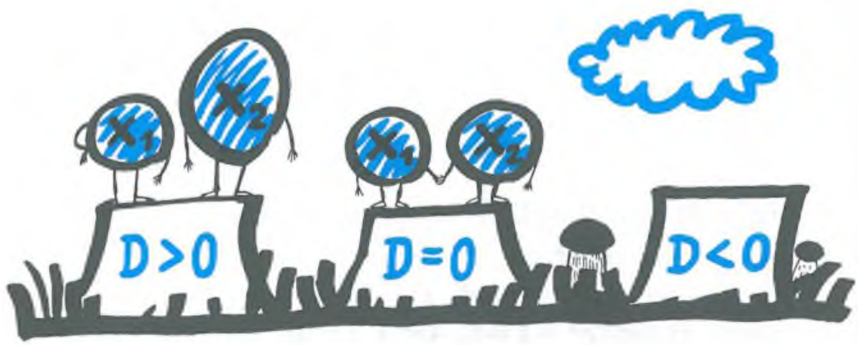
Diskriminant rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ označujeme obvykle písmenem D a vypočteme ho podle vzorce

$$D = b^2 - 4ac.$$

Rovnice	Diskriminant $b^2 - 4ac$	Počet řešení
$x^2 - x = 0$	$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1 - 0 = 1$	2; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$
$x^2 - x - 2 = 0$	$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$	2; $x_1 = 2$, $x_2 = -1$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$	1; $x_1 = x_2 = 1$
$4x^2 + 4x + 1 = 0$	$4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$	1; $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$
$x^2 + 1 = 0$	$0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 - 4 = -4$	0
$4x^2 + 3 = 0$	$0^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0 - 48 = -48$	0

Předchozí tabulka ilustruje následující pravidlo:

- Je-li diskriminant *kladný*, má kvadratická rovnice *dva různé* kořeny.
- Je-li diskriminant *roven nule*, má kvadratická rovnice *jeden dvojnásobný* kořen.
- Je-li diskriminant *záporný*, nemá kvadratická rovnice *žádný* kořen.



16. Podle diskriminantu rozhodněte, kolik kořenů má kvadratická rovnice:

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $x^2 + 3x + 2 = 0$
c) $x^2 - 3x + 4 = 0$ d) $x^2 + 3x - 4 = 0$
e) $x^2 - 14x + 49 = 0$ f) $2x^2 - 6x - 10 = 0$
g) $36x^2 + 60x + 25 = 0$ h) $14x^2 - 15x + 4 = 0$

Jak nalézt kořeny libovolné kvadratické rovnice?

?

Víme již, že pokud je diskriminant kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nezáporný, má tato rovnice jeden nebo dva kořeny. Ve vyšších ročnících dokážete, že tyto kořeny lze vypočítat podle následujících vzorců:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$$

Je jasné, že pokud $D = 0$, „splývají" oba vzorce v jediný:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Použití těchto vzorců ukážeme v následujících příkladech, kdy už nevystačíme se zkusmou metodou rozkladu na součin.

Příklad 3. Řešte rovnici $12x^2 + 17x - 7 = 0$ a proveďte zkoušku.

Řešení. Nejprve vypočteme diskriminant dané rovnice:

$$D = b^2 - 4ac = 17^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-7) = 289 + 336 = 625$$

Protože je diskriminant kladný, má daná rovnice dva různé kořeny:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-17 + \sqrt{625}}{2 \cdot 12} = \frac{-17 + 25}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-17 - \sqrt{625}}{2 \cdot 12} = \frac{-17 - 25}{24} = \frac{-42}{24} = -\frac{7}{4}$$

Zkouška:

$$x = \tfrac{1}{3}$$
$$L = 12x^2 + 17x - 7 = 12 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 17 \cdot \tfrac{1}{3} - 7 =$$
$$= 12 \cdot \tfrac{1}{9} + \tfrac{17}{3} - 7 = \tfrac{1}{9}\,(12 + 51 - 63) = 0$$
$$P = 0, \qquad L = P$$

$$x = -\tfrac{7}{4}$$

$$L = 12x^2 + 17x - 7 = 12 \cdot \left(-\tfrac{7}{4}\right)^2 + 17 \cdot \left(-\tfrac{7}{4}\right) - 7 =$$

$$= 12 \cdot \tfrac{49}{16} - 17 \cdot \tfrac{7}{4} - 7 = \tfrac{1}{16}(588 - 476 - 112) = 0$$

$$P = 0, \qquad L = P$$

K předchozímu příkladu dodejme, že číslo $x_1 = \frac{1}{3}$ je kořenem rovnice $3x - 1 = 0$, číslo $x_2 = -\frac{7}{4}$ kořenem rovnice $4x + 7 = 0$. Přesvědčte se roznásobením, že je správný rozklad

$$12x^2 + 17x - 7 = (3x - 1) \cdot (4x + 7).$$

Kdybychom ho znali, bylo by možné řešit danou rovnici bez použití vzorců. Uhodnout nebo jinak najít takový rozklad však vůbec není snadné. Po chvilce neúspěšného hádání proto raději přejděte k výpočtu kořenů „přes diskriminant".

Příklad 4. Řešte rovnici $x^2 + x - 1 = 0$ a proveďte zkoušku.

Řešení

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Zkouška:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$L = x^2 + x - 1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - 1 =$$

$$= \frac{5 - 2 \cdot \sqrt{5} + 1}{4} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - 1 = \frac{6 - 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} - 2 - 4}{4} = 0$$

$$P = 0, \qquad L = P$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned}
L = x^2 + x - 1 &= \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 1 = \\
&= \frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \\
&= \frac{6+2\cdot\sqrt{5}-2-2\cdot\sqrt{5}-4}{4} = 0
\end{aligned}$$

$$P = 0, \qquad L = P$$

Přesvědčili jsme se, že v případě, kdy kořeny kvadratické rovnice jsou iracionální čísla, vede *zkouška dosazením* k poměrně náročným výpočtům. Proto ji obvykle neprovádíme.

Nalezené kořeny však můžeme vyzkoušet jinak; a to tak, že vypočteme jejich součet a součin. V našem příkladě platí:

$$x_1 + x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{(-1+\sqrt{5})\cdot(-1-\sqrt{5})}{4} = \\
&= \frac{(-1)^2-(\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1-5}{4} = -1
\end{aligned}$$

Tyto dva výpočty potvrzují, že je správný rozklad

$$x^2 + x - 1 = (x - x_1)\cdot(x - x_2),$$

takže čísla x_1, x_2 jsou skutečně kořeny rovnice $x^2 + x - 1 = 0$.

Příklad 5. Řešte rovnici $121x^2 + 154x + 49 = 0$.

Řešení. Nejprve vypočteme diskriminant dané rovnice:

$$D = b^2 - 4ac = 154^2 - 4\cdot 121\cdot 49 = 23\,716 - 23\,716 = 0$$

Protože je diskriminant roven nule, má rovnice jeden dvojnásobný kořen:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-154}{2\cdot 121} = -\frac{154}{242} = -\frac{7}{11}$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli i bez použití vzorce, kdybychom objevili rozklad

$$121x^2 + 154x + 49 = (11x + 7)^2.$$

Oba vzorce pro kořeny kvadratické rovnice zpravidla spojujeme do jediného:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Tento vzorec použil Ondra při řešení rovnice $2x^2 - 5x + 2 = 0$:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 . 2 . 2 = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{2 . 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = \underline{\underline{2}} \\ \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

17. Pomocí vzorců s diskriminantem řešte rovnici:

a) $x^2 - 2x - 63 = 0$

b) $x^2 - x + 3 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $x^2 + 50x + 225 = 0$

e) $x^2 + 4x + 5 = 0$

f) $x^2 - 13x + 42 = 0$

18. Řešte rovnici s neznámou y:

a) $y^2 - y - 1 = 0$

b) $2y^2 - 3y - 2 = 0$

c) $y^2 - 23y - 24 = 0$

d) $3y^2 - 11y - 4 = 0$

e) $4y^2 + 11y + 8 = 0$

f) $5y^2 + 5y + 1 = 0$

g) $6y^2 - y - 1 = 0$

h) $8y^2 - 9y + 2 = 0$

Na závěr kapitoly vyřešíme ještě několik rovnic, o nichž teprve po úpravách zjistíme, že vedou na rovnice kvadratické.

Příklad 6. Řešte rovnici s neznámou d:

$$\frac{2d - 5}{3d + 3} - \frac{2d + 4}{d \cdot (d + 1)} = \frac{-2d - 3}{d^2 + d}$$

Řešení. Protože $3d+3=3\cdot(d+1)$ a $d^2+d=d\cdot(d+1)$, má daná rovnice smysl, jen když $d\neq 0$ a $d\neq -1$. Za těchto podmínek vynásobíme danou rovnici společným jmenovatelem všech zlomků – tedy výrazem $3d\cdot(d+1)$:

$$\frac{2d-5}{3d+3}-\frac{2d+4}{d\cdot(d+1)}=\frac{-2d-3}{d^2+d} \qquad /\cdot 3d\cdot(d+1)$$
$$(2d-5)\cdot d-(2d+4)\cdot 3=(-2d-3)\cdot 3$$
$$2d^2-5d-6d-12=-6d-9$$
$$2d^2-5d-3=0$$

Nyní vypočteme diskriminant D vzniklé kvadratické rovnice:

$$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25+24=49$$

Protože diskriminant je kladný, má tato rovnice dva různé kořeny:

$$d_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3$$
$$d_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Pro $d_1=3$ i pro $d_2=-\frac{1}{2}$ má původní rovnice smysl, proto jsou tato dvě čísla (a žádná jiná) jejími kořeny.

Řešení následujících dvou rovnic jsme převzali z Andreina sešitu.

Příklad 7. Řešte rovnici s neznámou y:

a) $3y+6\cdot(y+1)\cdot(y-1)-5\cdot(2y+1)=2y\cdot(2y-1)-2\cdot(4y+3)$

b) $\dfrac{2y+3}{6y+12}+\dfrac{2}{3y}-\dfrac{1}{2y+4}=\dfrac{y}{4y+8}$

a) $3y+6\cdot(y+1)\cdot(y-1)-5(2y+1)=2y\cdot(2y-1)-2\cdot(4y+3)$
$$3y+6y^2-6-10y-5=4y^2-2y-8y-6$$
$$6y^2-7y-11=4y^2-10y-6$$
$$2y^2+3y-5=0$$
$$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$
$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 7}{4}=\begin{cases}\frac{-3+7}{4}=\frac{4}{4}=\underline{1}\\[4pt] \frac{-3-7}{4}=-\frac{10}{4}=\underline{-2{,}5}\end{cases}$$

a) $\frac{2y+3}{6y+12}+\frac{2}{3y}-\frac{1}{2y+4}=\frac{y}{4y+8}$ $\quad(y\neq-2,\ y\neq0)$

$\frac{2y+3}{6\cdot(y+2)}+\frac{2}{3y}-\frac{1}{2\cdot(y+2)}=\frac{y}{4\cdot(y+2)}$ $\quad/\cdot 12y\cdot(y+2)$

$(2y+3)\cdot 2y+2\cdot 4\cdot(y+2)-6y=3y^2$

$4y^2+6y+8y+16-6y=3y^2$

$y^2+8y+16=0$

$(y+4)^2=0$

$\underline{\underline{y_1=y_2=-4}}$

19. Řešte rovnici s neznámou m:

a) $m-6\cdot\left(5m-m^2\right)=10m^2+8m\cdot(2m-1)+1$

b) $2\cdot\left[2-m\cdot(3-m)+3m^2\right]=1-\left[6m-2\cdot(m+2)\cdot(3m+2)-7\cdot(m-5)\right]$

20. Řešte rovnici:

a) $5-\frac{x+7}{3}-\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\cdot(x+7)-\frac{2x+8}{6}$

b) $\frac{x}{2-x}+\frac{3x-3}{2(x-2)}=\frac{10+5x}{2}+\frac{4}{2-x}-\frac{7(x+4)}{4-2x}$

c) $\frac{4}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}-\frac{6}{x+2}$

d) $\frac{4x-8}{(x+2)^2}+\frac{2x}{x+2}=\frac{16}{x^2+4x+4}-\frac{6(x-2)}{(x+2)\cdot(x+2)}$

e) $\frac{5}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1}$

CVIČENÍ 3

□ **1.** Určete zpaměti kořeny rovnice:

a) $x\cdot(x-7)=0$

b) $x\cdot(2x-9)=0$

c) $(x-5)\cdot(x+6)=0$

d) $(2x+3)\cdot(x+4)=0$

e) $3x\cdot(3x+1)=0$

f) $(5x-1)\cdot(6x-6)=0$

2. Řešte rovnici s neznámou y:

a) $y^2 - 8y = 0$ b) $y^2 + 8y = 0$
c) $4y^2 - 36y = 0$ d) $7y^2 + 63y = 0$
e) $11y^2 = 121y$ f) $9y^2 = -108y$

□ **3.** Určete zpaměti kořeny rovnice s neznámou m:

a) $m^2 - 9 = 0$ b) $m^2 - 6 = 0$ c) $m^2 + 5 = 0$
d) $m^2 = 169$ e) $m^2 = -25$ f) $-m^2 = -196$

4. Řešte rovnici s neznámou d:

a) $d^2 - 64 = 0$ b) $7d^2 - 28 = 0$ c) $2d^2 - 22 = 0$
d) $4d^2 = 16$ e) $-d^2 = -1$ f) $5d^2 + 4 = 0$

5. Řešte rovnici s neznámou f:

a) $(f + 6)^2 = 0$ b) $4f^2 + 20f + 25 = 0$
c) $49f^2 - 14f = -1$ d) $16f^2 - 46f + 100 = 50f - 44$

6. Přesvědčte se, že kořeny rovnice

$$(x + 8)^2 - (x + 7) \cdot (x + 8) = (x - 7)^2 + 5 \cdot (3x - 11)$$

nejsou racionální čísla.

7. Rozložte na součin dvojčlenů:

a) $x^2 + 4x + 3$ b) $x^2 + 7x + 10$ c) $x^2 + 11x + 30$
d) $x^2 + 101x + 100$ e) $x^2 - 8x + 12$ f) $x^2 - 10x + 9$
g) $x^2 - 11x + 28$ h) $x^2 - 21x + 110$ i) $x^2 - x - 12$
j) $x^2 + x - 12$ k) $x^2 + 2x - 63$ l) $x^2 - 3x - 88$

8. Pomocí rozkladu na součin určete, pro které hodnoty y je daný trojčlen roven nule:

a) $y^2 + 15y + 44$ b) $y^2 - 6y - 7$ c) $y^2 - 12y + 35$

9. Upravte a určete podmínky, za kterých je daný výraz definován:

a) $\dfrac{x^2 - 18x + 81}{x^2 - x - 72}$ b) $\dfrac{3x^2 - 48}{x^2 + 8x - 48}$ c) $\dfrac{27 - 3x^2}{3x^2 - 15x - 72}$

10. Vypočtěte:

a) $\dfrac{1}{x^2 + 8x + 16} + \dfrac{2}{x^2 - 16} + \dfrac{3}{x^2 + 3x - 4}$

b) $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} - \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$

11. Vypočtěte:

$$\left(\frac{z-1}{z^2-2z-3}-\frac{1}{z^2+4z+3}\right):\frac{z^2-z-6}{z^2-9}$$

12. Řešte rovnici s neznámou n:

a) $n^2+10n+21=0$ b) $n^2-4n-21=0$
c) $n^2-10n+21=0$ d) $n^2+4n-21=0$
e) $n^2-20n-21=0$ f) $n^2+22n+21=0$
g) $n^2-22n+21=0$ h) $n^2+20n-21=0$

13. Napište kvadratickou rovnici s kořeny:

a) $x_1=x_2=3$ b) $x_1=x_2=-1$
c) $x_1=0,\ \ x_2=-5$ d) $x_1=8,\ \ x_2=0$
e) $x_1=-3,\ \ x_2=4$ f) $x_1=6,\ \ x_2=11$

14. Řešte rovnici s neznámou z a proveďte zkoušku:

a) $(z-3)^2=(2z+3)^2$
b) $2z^2-5+(z-2)\cdot(-3)=(z-1)^2$
c) $(3z-2)\cdot(3z+8)=(z-4)\cdot(z+4)$
d) $z^2-[5z-(z+2)\cdot z+3]=(z+3)\cdot(3z-1)$

15. Podle diskriminantu rozhodněte, kolik má daná rovnice s neznámou m řešení:

a) $4m^2-4m+1=0$ b) $m^2=2m+5$
c) $3m^2-7=9m$ d) $2m^2+9m=-10$

16. Řešte rovnici s neznámou p:

a) $p^2-14p-51=0$ b) $2p^2-11p+5=0$
c) $3p^2-4p+12=0$ d) $3p^2-8p+4=0$
e) $3p^2-6p+3=0$ f) $2p^2+4p+1=0$

17. Řešte rovnici:

a) $(x+8)^2+16-(x+2)^2=(x+4)^2$
b) $7\cdot\left(x^2-5x+11\right)=\left(x^2-7x+17\right)\cdot 5$
c) $(x-2)\cdot x+3\cdot(x+2)=(x-2)\cdot(2x-3)$
d) $(x+2)\cdot(x-2)-4\cdot(-x-1)=5+x\cdot(6+x)-(x-5)^2$
e) $x-[3x-2\cdot(x-9)-(x-1)\cdot(x+2)]=0$

$*$**18.** Řešte rovnici:

a) $\frac{3x+2}{x} - \frac{3}{x-1} = 1$

b) $\frac{x-1}{2x-10} + \frac{x+3}{2x-6} = 2$

c) $\frac{x+5}{x+4} = \frac{x}{x^2-16} + \frac{4}{x-4} - \frac{1}{x+4}$

d) $x \cdot \frac{2x-3}{x^2-4x+3} = \frac{3}{x-3} + \frac{1}{x-1}$

e) $-\frac{4+x}{3+x} = \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{x+3}{3-x}$

f) $1 - \frac{2x-4}{x^2-x-2} + \frac{3x-6}{x^2-4x+4} + \frac{2x+2}{x^2+2x+1} = 0$

4 SLOVNÍ ÚLOHY 1

Již v sešitě *Rovnice a nerovnice* jsme poznali, že mnohé *slovní úlohy* dokážeme řešit tak, že nejprve sestavíme a potom vyřešíme *rovnice*, které vystihují situace ze zadání úloh. Až dosud každá taková rovnice obsahovala jednu neznámou – písmeno, kterým jsme označili hledaný údaj.

I když v některých úlohách bylo hledaných údajů více, byly mezi sebou „svázány" tak, že jsme vystačili s jedinou neznámou. V tomto sešitě se setkáme také se složitějšími slovními úlohami, u nichž se vyplatí označit několik neznámých údajů různými písmeny. Vztahy mezi nimi pak zachytíme několika rovnicemi. Takovým úlohám se budeme věnovat později, až se naučíme jednoduché *soustavy rovnic* řešit.

V této kapitole budeme řešit slovní úlohy, jež vedou na rovnice s jednou neznámou, které jste loni možná ještě řešit neuměli. Sestavené rovnice totiž budou někdy obsahovat neznámou ve jmenovatelích zlomků, někdy po úpravách dojdeme k rovnicím kvadratickým.

Příklad 1. Když jsme od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{3}{4}$ odečetli totéž číslo, vyšel nám zlomek rovný zlomku $\frac{4}{3}$. Určete číslo, které jsme odčítali.

Řešení. Pro odčítané číslo x snadno sestavíme rovnici:

$$\frac{3-x}{4-x} = \frac{4}{3} \qquad (x \neq 4)$$

Nyní tuto rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} \frac{3-x}{4-x} &= \frac{4}{3} \qquad / \cdot 3(4-x) \\ 3(3-x) &= 4(4-x) \\ 9-3x &= 16-4x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Provedeme ještě zkoušku:
Odečteme-li od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{3}{4}$ číslo 7, dostaneme zlomek

$$\frac{3-7}{4-7} = \frac{-4}{-3},$$

který je opravdu roven $\frac{4}{3}$.
Odčítali jsme číslo 7.

Příklad 2. Malíř pokojů při přípravě růžové barvy smíchal červenou a bílou barvu v poměru objemů $2:3$. Aby získal sytější tón, přilil do hotové směsi ještě 9 litrů červené a 9 litrů bílé barvy. Tak se poměr červené a bílé barvy ve směsi změnil na $5:6$. Kolik litrů červené a kolik litrů bílé barvy malíř původně smíchal?

Řešení. Původní poměr $2:3$ znamená, že malíř nejdříve smíchal 2 díly červené a 3 díly bílé barvy. Objem jednoho takového dílu v litrech označíme x. V konečné směsi bylo tedy $(2x+9)$ l červené barvy a $(3x+9)$ l bílé barvy. Podle zadání platí úměra

$$(2x+9):(3x+9) = 5:6.$$

Přepíšeme ji jako rovnici:

$$\frac{2x+9}{3x+9} = \frac{5}{6}$$

Protože $3x+9=3(x+3)$, vynásobíme tuto rovnici výrazem $6(x+3)$. Tento výraz je jistě kladný, neboť $x>0$ podle významu neznámé x.

$$\begin{aligned} \frac{2x+9}{3x+9} &= \frac{5}{6} \qquad\qquad / \cdot 6(x+3) \\ 2(2x+9) &= 5(x+3) \\ 4x+18 &= 5x+15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Protože $2x=6$ a $3x=9$, zjistili jsme, že malíř původně smíchal 6 l červené a 9 l bílé barvy. Po přilití 9 l každé barvy vznikla směs z 15 l červené a 18 l bílé barvy, v níž jsou barvy opravdu zastoupeny v poměru $5:6$. Tím je provedena zkouška správnosti.

Malíř původně smíchal 6 l červené a 9 l bílé barvy.

Příklad 3. Obdélník má obsah $384\,\mathrm{cm}^2$. Jeho délka je o 8 cm větší než jeho šířka. Určete rozměry obdélníku.

Řešení. Za neznámou x zvolíme číslo, které udává délku obdélníku v centimetrech. Šířka obdélníku je pak $(x-8)$ cm. Protože obsah obdélníku je součinem jeho délky a šířky, platí

$$x \cdot (x-8) = 384.$$

Sestavenou rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} x \cdot (x-8) &= 384 \\ x^2 - 8x &= 384 \\ x^2 - 8x - 384 &= 0 \end{aligned}$$

Vypočteme diskriminant D této kvadratické rovnice:

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot (-384) = 64 + 1\,536 = 1\,600$$

Protože $\sqrt{D} = \sqrt{1\,600} = 40$, platí pro kořeny x_1, x_2:

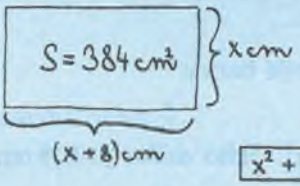
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{8+40}{2} = \frac{48}{2} = 24 \\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{8-40}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \end{aligned}$$

Je jasné, že délka strany každého obdélníku je vyjádřena kladným číslem. Proto záporný kořen x_2 nemá pro naši úlohu význam. (Je to sice kořen sestavené rovnice, ale neodpovídá žádné délce.)

Pro kladný kořen $x_1 = 24$ provedeme zkoušku. Délka daného obdélníku je 24 cm, jeho šířka je $(24 - 8)$ cm, tj. 16 cm. Obsah obdélníku je roven $24 \cdot 16\ \text{cm}^2$, což je skutečně $384\ \text{cm}^2$.

Obdélník má rozměry 24 cm a 16 cm.

Prohlédněte si, jak tuto úlohu řešil Vláďa. V čem se jeho postup liší od našeho?



$S = x(x+8)\ \text{cm}^2$

$384 = x^2 + 8x$

$\boxed{x^2 + 8x - 384 = 0}$

$D = b^2 - 4ac = 64 - 4\cdot(-384) = 64 + 1536 = 1600$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm 40}{2} = -4 \pm 20 = \begin{cases} 16 \\ \cancel{-24} \end{cases}$ nemá význam

šířka .... x cm = 16 cm

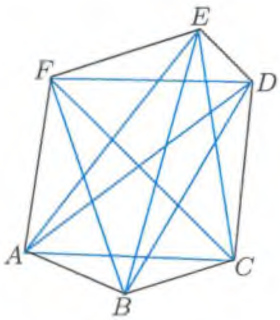
délka .... (x + 8) cm = 24 cm

zk.: $S = 16 \cdot 24\ \text{cm}^2 = 384\ \text{cm}^2$

Obdélník má rozměry 16 cm a 24 cm.

1. Které číslo musíme přičíst k čitateli i ke jmenovateli zlomku $\frac{4}{9}$, aby vyšel zlomek rovný číslu $2\frac{1}{4}$?
2. Je dán zlomek, jehož základní tvar je $\frac{5}{3}$. Odečteme-li od jeho čitatele i od jeho jmenovatele číslo 6, vyjde zlomek, který je roven číslu 3. Určete původní zlomek.
3. Součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích celých čísel je 85. Určete tato čísla.
4. Obsah pravoúhlého trojúhelníku je $0{,}96\ \text{dm}^2$. Jedna jeho odvěsna je o 4 cm delší než druhá. Určete délky obou odvěsen.

Vyřešíme nyní jednu zajímavou úlohu o počtu *úhlopříček* mnohoúhelníku. Na obrázku jsou modře vyznačeny všechny úhlopříčky šestiúhelníku $ABCDEF$. Každá z nich je úsečka, která „spojuje“ takové dva vrcholy šestiúhelníku, které nejsou sousední.



Podle obrázku jistě určíte, že šestiúhelník má právě 9 úhlopříček. Můžeme to zdůvodnit takto:

Z každého vrcholu vycházejí 3 úhlopříčky, proto ze všech 6 vrcholů vychází $3 \cdot 6$, tj. 18 úhlopříček. V tomto počtu je však každá úhlopříčka XY započítána dvakrát – jednou u vrcholu X, podruhé u vrcholu Y. Proto je počet úhlopříček roven $18 : 2$, tedy 9.

Sami podobně vysvětlete, proč v mnohoúhelníku s n vrcholy $(n > 3)$ je počet úhlopříček roven

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Příklad 4. Kolik vrcholů má mnohoúhelník, který má právě 27 úhlopříček?

Řešení. Hledaný počet n vrcholů mnohoúhelníku musí splňovat rovnici

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 27.$$

Tuto rovnici vyřešíme:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 27 \qquad / \cdot 2$$

$$n^2 - 3n = 54$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot (-54) = 9 + 216 = 225$$

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + 15}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - 15}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Záporný kořen n_2 nemá pro naši úlohu význam.

Zkouška: $\quad (9 \cdot (9 - 3)) : 2 = 54 : 2 = 27$

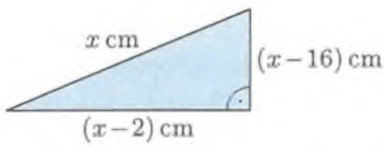
Mnohoúhelník má 9 vrcholů.

5. Který mnohoúhelník má právě tolik stran jako úhlopříček?

Při řešení dalších dvou příkladů využijeme Pythagorovu větu. Připomeňme, že trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu C, právě když délky jeho stran a, b, c splňují rovnost $a^2 + b^2 = c^2$.

Příklad 5. Přepona pravoúhlého trojúhelníku je o 2 cm delší než jedna odvěsna a o 16 cm delší než druhá odvěsna. Určete obvod tohoto trojúhelníku.

Řešení. I když se zadání ptá na obvod trojúhelníku, bude vhodnější vybrat za neznámou jednu jeho stranu – například přeponu. Měří-li přepona x cm, vyplývá ze zadání, že odvěsny mají délky $(x-2)$ cm a $(x-16)$ cm. Podle Pythagorovy věty platí:



$$
\begin{aligned}
(x-2)^2 + (x-16)^2 &= x^2 \\
x^2 - 4x + 4 + x^2 - 32x + 256 &= x^2 \\
x^2 - 36x + 260 &= 0
\end{aligned}
$$

Diskriminant této rovnice je $D = (-36)^2 - 4 \cdot 260 = 1\,296 - 1\,040 = 256$. Pro její kořeny platí:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{36 + 16}{2} = \frac{52}{2} = 26 \\
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{36 - 16}{2} = \frac{20}{2} = 10
\end{aligned}
$$

Pro kořen $x_1 = 26$ vycházejí délky stran 26 cm, 24 cm a 10 cm (sami se přesvědčte, že jsou to opravdu délky stran pravoúhlého trojúhelníku).

Kořen $x_2 = 10$ však žádnému trojúhelníku neodpovídá, neboť „délka" nejkratší strany vychází −6 cm.

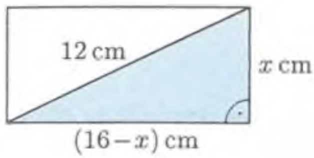
Nakonec vypočteme obvod o trojúhelníku se stranami 26 cm, 24 cm a 10 cm:

$$
o = (26 + 24 + 10)\,\text{cm} = 60\,\text{cm}
$$

Obvod trojúhelníku je 60 cm.

Příklad 6. Určete délky stran obdélníku, který má obvod 32 cm a jehož úhlopříčka měří 12 cm.

Řešení. Za neznámou x zvolíme délku jedné strany obdélníku v centimetrech. Protože obvod obdélníku (32 cm) je dvojnásobkem součtu jeho stran, měří druhá strana $(16 - x)$ cm. Pomocí Pythagorovy věty sestavíme rovnici:



$$x^2 + (16 - x)^2 = 12^2$$

Sestavenou rovnici vyřešíme:

$$x^2 + 256 - 32x + x^2 = 144$$
$$2x^2 - 32x + 112 = 0$$
$$x^2 - 16x + 56 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 56 = 256 - 224 = 32$$

$$x_1 = \frac{16 + \sqrt{32}}{2} = \frac{16}{2} + \frac{\sqrt{32}}{2} = 8 + \sqrt{\frac{32}{4}} = 8 + \sqrt{8}$$

$$x_2 = \frac{16 - \sqrt{32}}{2} = \frac{16}{2} - \frac{\sqrt{32}}{2} = 8 - \sqrt{\frac{32}{4}} = 8 - \sqrt{8}$$

Všimněte si, že $x_1 + x_2 = 8 + \sqrt{8} + 8 - \sqrt{8} = 16$, tedy $x_1 = 16 - x_2$ a $x_2 = 16 - x_1$. Proto kořen x_1 vyjadřuje (v cm) délku jedné strany obdélníku, kořen x_2 délku druhé strany (na pořadí stran obdélníku nezáleží).

Nakonec ještě délky obou stran zaokrouhlíme a vyjádříme pomocí desetinných čísel. Protože $8 + \sqrt{8} \doteq 10{,}8$ a $8 - \sqrt{8} \doteq 5{,}2$, měří strany obdélníku asi 10,8 cm a 5,2 cm.

Zkoušku provedeme s původními nezaokrouhlenými hodnotami. Sami vysvětlete, proč obvod obdélníku se stranami $\left(8 + \sqrt{8}\right)$ cm a $\left(8 - \sqrt{8}\right)$ cm je skutečně roven 32 cm. Zbývá ověřit, že úhlopříčka tohoto obdélníku je 12 cm. To vyplývá z následujícího výpočtu:

$$\left(8 + \sqrt{8}\right)^2 + \left(8 - \sqrt{8}\right)^2 = 64 + 16 \cdot \sqrt{8} + 8 + 64 - 16 \cdot \sqrt{8} + 8 = 144 = 12^2$$

Strany hledaného obdélníku měří přibližně 10,8 cm a 5,2 cm.

6. Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníku, jehož delší odvěsna je o 3 cm kratší než přepona a o 3 cm delší než kratší odvěsna.

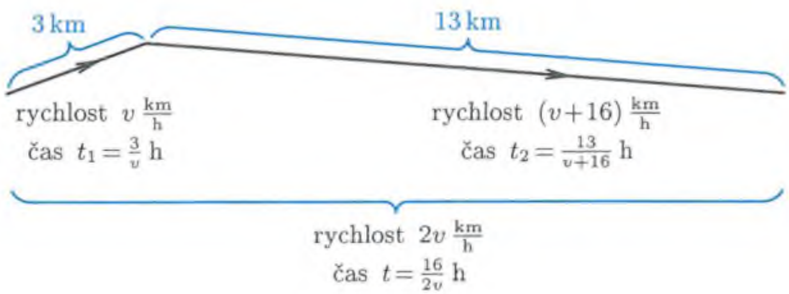
7. Rameno rovnoramenného trojúhelníku měří $\sqrt{52}$ cm, jeho základna je o 2 cm delší než k ní příslušná výška. Vypočtěte obsah tohoto trojúhelníku.

Už loni jste poznali, že oblíbeným námětem slovních úloh je rozmanité cestování různými dopravními prostředky, popisované fyzikálními veličinami *dráha*, *rychlost* a *čas*. Na dvou příkladech nyní ukážeme, jaké druhy rovnic se mohou při řešení *úloh o pohybu* také objevit.

Příklad 7. První část cyklistické trasy tvoří stoupání dlouhé 3 km, zbylou část klesání dlouhé 13 km. Pavlova průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti na první části trasy, jež byla o 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ menší než na druhé části trasy. Za jak dlouho ujel Pavel celou trasu?

Řešení. Za neznámou zvolíme číslo v, které vyjadřuje v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Pavlovu rychlost na prvních 3 km trasy. Zbylých 13 km Pavel projel rychlostí $(v + 16)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jeho průměrná rychlost na celé trase dlouhé 16 km byla $2v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Při sestavování rovnice vyjádříme dvěma způsoby *čas*, který Pavel k ujetí celé trasy potřeboval. První část trasy Pavel urazil za dobu $t_1 = \frac{3}{v}$ h, druhou část za dobu $t_2 = \frac{13}{v+16}$ h. Protože celou trasu jel průměrnou rychlostí $2v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, urazil ji za dobu $t = \frac{3+13}{2v}$ h.



Platí:

$$t_1 + t_2 = t$$

Do této rovnice dosadíme za t_1, t_2, t (bez jednotek času) a vzniklou rovnici ihned vyřešíme:

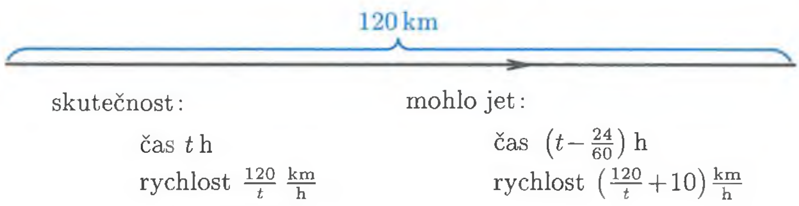
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{v} + \frac{13}{v+16} &= \frac{16}{2v} \qquad / \cdot 2v \cdot (v+16) \\
6 \cdot (v+16) + 26v &= 16 \cdot (v+16) \\
6v + 96 + 26v &= 16v + 256 \\
16v &= 160 \\
v &= 10
\end{aligned}
$$

Pavel jel první část trasy rychlostí $10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a urazil ji za $\frac{3}{10}$ hod. Druhou část trasy jel rychlostí $26\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a trvalo mu to $\frac{13}{26}$ h, tedy $\frac{1}{2}$ h. Protože $\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3+5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ a $\frac{4}{5}\,\mathrm{h} = 48\,\mathrm{min}$, celá cesta mu trvala 48 minut. Kdyby jel celou trasu dlouhou 16 km rychlostí $20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, trvala by mu cesta $\frac{16}{20}$ h, tj. $\frac{4}{5}$ h. Tak jsme zkontrolovali, že náš výsledek je správný.

Pavel ujel celou trasu za 48 minut.

Příklad 8. Auto ujelo vzdálenost 120 km. Kdyby zvýšilo svou průměrnou rychlost o $10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, doba jeho cesty by byla o 24 minut kratší. Jak dlouho auto skutečně jelo?

Řešení. Za neznámou zvolíme číslo t, které vyjadřuje v hodinách čas, po který auto skutečně jelo. Jeho průměrná rychlost byla $\frac{120}{t}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kdyby jelo rychlostí o $10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ větší, tj. $\left(\frac{120}{t} + 10\right)\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, trvala by mu cesta $\left(t - \frac{2}{5}\right)$ h, neboť $24\,\mathrm{min} = \frac{2}{5}$ h. Tehdy by jeho rychlost byla $\frac{120}{t-\frac{2}{5}}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.



Proto platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{120}{t} + 10 &= \frac{120}{t - \frac{2}{5}} \qquad / \cdot t \cdot \left(t - \tfrac{2}{5}\right) \\
120\left(t - \tfrac{2}{5}\right) + 10t \cdot \left(t - \tfrac{2}{5}\right) &= 120t \\
120t - 48 + 10t^2 - 4t &= 120t \\
10t^2 - 4t - 48 &= 0 \\
5t^2 - 2t - 24 &= 0
\end{aligned}
$$

Vypočteme diskriminant této kvadratické rovnice:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-24) = 4 + 480 = 484 = 22^2$$

Její kořeny jsou:

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 22}{10} = \frac{12}{5}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 22}{10} = -2$$

Záporný kořen t_2 nemá pro naši úlohu význam. Kladný kořen t_1 vede k řešení: Doba jízdy automobilu byla $\frac{12}{5}$ h, tj. 2 hodiny a 24 minut.

Auto jelo 2 hodiny a 24 minut.

Místo zkoušky uvedeme jiný postup, který při řešení této úlohy zvolila Petra. Ta nejprve vypočítala rychlost, kterou se automobil pohyboval:

$24\ \text{min} = \frac{24}{60}\ \text{h} = \frac{2}{5}\ \text{h}$

skutečná rychlost $v_1 = x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zvýšená rychlost $v_2 = (x+10)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

skutečná doba $t_1 = \frac{120}{x}\ \text{h}$ kratší doba $t_2 = \frac{120}{x+10}\ \text{h}$

$$\underbrace{t_1 = t_2 + \frac{2}{5}}$$

počítám v km, h, $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} + \frac{2}{5} \qquad / \cdot 5x(x+10)$$

$$120 \cdot 5 \cdot (x+10) = 120 \cdot 5x + 2x(x+10)$$

$$600 \cdot (x+10) = 600x + 2x^2 + 20x$$

$$600x + 6000 = 600x + 2x^2 + 20x$$

$$0 = 2x^2 + 20x - 6000 \qquad /:2$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 10^2 + 4 \cdot 3000 = 100 + 12000 = 12100$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{12100}}{2} = \frac{-10 \pm 110}{2} = \begin{cases} \boxed{50} \\ \cancel{-60} \text{ nemá význam} \end{cases}$$

$$x = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$t_1 = \frac{120}{x}\ \text{h} = \frac{120}{50}\ \text{h} = \frac{12}{5}\ \text{h} = 2\frac{2}{5}\ \text{h} = \underline{\underline{2\ \text{h}\ 24\ \text{min}}}$$

Zk.: $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{12}{5}\ \text{h} = 120\ \text{km}$

Auto jelo 2 hodiny a 24 minut.

8. Po setkání na moři se první loď vydala stálou rychlostí na jih, druhá rychlostí o 6 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ větší na západ. Po dvou hodinách plavby byly lodi od sebe vzdáleny 60 km. Jakými rychlostmi pluly?

9. Lyžař měl uběhnout trasu 30 km. Protože vyběhl o 3 minuty později, než plánoval, musel by zvýšit svou rychlost o 1 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, aby dorazil do cíle v plánovaný okamžik. Určete, jakou rychlostí lyžař zamýšlel běžet.

∗10. Z opačných konců trasy dlouhé 28 km vyjeli proti sobě ve stejný okamžik dva cyklisté. Každý z nich projel celou trasu stálou rychlostí, rychlejší byl v cíli o 35 minut dříve. Na trase se cyklisté minuli právě po 1 hodině jízdy. Jakou rychlostí jel pomalejší z nich?

CVIČENÍ 4

1. Trojnásobek neznámého čísla zvětšený o 200 a dvojnásobek téhož čísla jsou v poměru 7 : 4. Určete neznámé číslo.

2. Jsou dána dvě kladná čísla. První číslo je o 176 větší než dvojnásobek druhého. Podíl většího a menšího čísla je 13. Určete tato čísla.

3. Součet dvou čísel je 63. Dělíme-li větší číslo menším, dostaneme neúplný podíl 3 a zbytek také 3. Určete obě čísla.

4. Jestliže dvojciferné číslo, jehož číslice na místě jednotek má hodnotu o 3 větší než číslice na místě desítek, vydělíme jeho ciferným součtem, vyjde číslo 4. Které číslo jsme dělili?

5. Maminka usušila jahodové listí a lipový květ na bylinný čaj. Zvážila si potřebná množství a smíchala je v poměru 7 : 2. Pak si vzpomněla, že loni míchala směs v poměru 11 : 4. Aby tento poměr zachovala i letos, přidala do směsi ještě 21 g jahodového listí a 12 g květu. Jaké množství každé byliny výsledná směs obsahovala?

6. Součin dvou celých čísel, z nichž jedno je o 19 větší než druhé, je roven číslu 416. Najděte oba činitele.

7. Součet druhých mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je o 60 menší než druhá mocnina součtu těchto čísel. Určete obě čísla.

8. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích celých čísel je 110. Určete prostřední z těchto tří čísel.

9. Obvod pravoúhlého trojúhelníku je 56 cm, jeho delší odvěsna měří 24 cm. Vypočtěte obsah tohoto trojúhelníku.

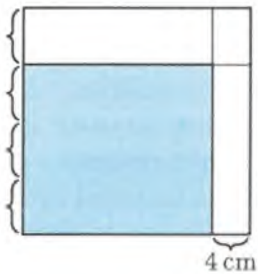
10. V pravoúhlém trojúhelníku je jedna odvěsna o 1 cm kratší než přepona. Druhá odvěsna je o 32 cm kratší než přepona. Vypočtěte délky všech stran tohoto trojúhelníku.

11. Obdélník má rozměry 4 cm a 10 cm. Zvětšíme-li každý z nich o stejnou délku, zvětší se obsah obdélníku o 32 cm^2. Vypočtěte strany zvětšeného obdélníku.

12. V trojúhelníku ABC je strana BC o 5 cm kratší než výška z vrcholu A. Vypočtěte tuto výšku, víte-li, že obsah trojúhelníku ABC je 42 cm^2.

13. Jestliže jednu stranu daného čtverce zkrátíme o 4 cm a sousední stranu prodloužíme o 24 cm, dostaneme rozměry obdélníku, který má dvojnásobný obsah než daný čtverec. Určete stranu daného čtverce.

14. Daný čtverec „přeměníme“ na obdélník tak, že jednu dvojici protějších stran zkrátíme o čtvrtinu a druhou dvojici stran zkrátíme o 4 cm. Vznikne obdélník, jehož obsah bude o 40 % menší než obsah původního čtverce. Určete obvod a obsah tohoto obdélníku.



15. Počet úhlopříček daného mnohoúhelníku je o 88 větší, než počet jeho stran. Kolik má tento mnohoúhelník stran?

16. Existuje mnohoúhelník, který má úhlopříček o 8 více než kolik má stran?

17. V turnaji družstev, který se hrál systémem „každý s každým jeden zápas“, bylo odehráno všech 120 plánovaných zápasů. Kolik družstev se turnaje zúčastnilo?

18. Tomáš si na kole vyjel zahrát fotbal s kamarády na hřiště vzdálené 13,5 km od domu. Zpět se vracel unavený průměrnou rychlostí o 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ menší, než jel při cestě tam. Proto mu cesta zpět trvala o 9 minut déle. V kolik hodin se Tomáš vrátil domů, jestliže od hřiště vyrazil o půl osmé večer?

19. Turista chtěl ujít trasu 16 km za určitý čas. Vyšel proto potřebnou stálou rychlostí. Po 4 km chůze se však neplánovaně zastavil na 20 minut u jezírka, které ho zlákalo ke koupání. Aby došel do cíle včas, musel pak na zbytku trasy trochu přidat – zvýšit rychlost o 0,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jakou rychlostí šel na začátku?

20. Ivan urazil na kole trať dlouhou 96 km v čase o 2 hodiny kratším, než původně předpokládal. Přitom za každou hodinu ujel o 1 km více, než měl původně urazit za 1 h 15 min. Jakou rychlostí Ivan skutečně jel?

∗21. Luboš ujel na loďce 90 km a pěšky ušel 10 km. Cesta pěšky mu trvala o 4 hodiny méně než jízda na loďce. Kdyby šel Luboš pěšky tak dlouho, jako jel na loďce, ušel by stejnou vzdálenost, jakou by ujel na loďce za dobu, po kterou skutečně šel. Kolik hodin šel Luboš skutečně pěšky? (Předpokládejte, že rychlosti obou druhů pohybů byly stálé.)

5 ÚLOHY O SPOLEČNÉ PRÁCI

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, ve kterých se skupina lidí, strojů či jiných zařízení (budeme jim říkat *účastníci*) podílí na jednom úkolu (několik zedníků omítá stěny domu, několik čerpadel přivádí vodu do nádrže, několik kombajnů sklízí úrodu z pole apod.).

Při řešení takových úloh budeme společnou činnost účastníků poněkud „idealizovat“. Budeme totiž předpokládat, že:

- Každý účastník pracuje rovnoměrně, tj. s výkonností, která se v čase nemění.
- Jednotliví účastníci se při práci neovlivňují, tedy výkonnost každého účastníka nezávisí na tom, zda pracuje sám, nebo společně s jinými.
- Vykonaná práce se dá měřit čísly v určitých jednotkách (např. obsah omítnuté plochy, objem přiteklé vody, rozloha sklizeného pole apod.), takže části celkového úkolu lze vyjadřovat zlomky (menšími než 1).

V naší učebnici najdete jen takové úlohy, při kterých uvedená zjednodušení neovlivní hodnověrnost výsledku. Nebudeme tedy řešit úlohy typu:

Dva zedníci omítnou zeď za 6 hodin. Za jak dlouho by stejnou zeď omítlo 100 zedníků? (Sami posuďte, nakolik je taková situace reálná.)

Úlohy o společné práci jste již dříve v hodinách matematiky řešili. Předpokládalo se v nich, že všichni účastníci mají stejnou výkonnost. Na takové úlohy nám stačila *trojčlenka*. Nyní nás však budou zajímat situace, kdy účastníci pracují s *různou* výkonností.

Příklad 1. Jeden kopáč by vykopal příkop pro telefonní vedení za 6 hodin. Druhý by vykopal tentýž příkop za 3 hodiny. Jak dlouho by jim vykopání příkopu trvalo, kdyby pracovali společně?

Řešení. První kopáč by vykopal za 1 hodinu $\frac{1}{6}$ příkopu, druhý kopáč $\frac{1}{3}$ příkopu. Při společné práci by dohromady vykopali za 1 hodinu část příkopu rovnou součtu $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$. Protože $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, vykopali by kopáči za 1 hodinu $\frac{1}{2}$ příkopu. Celý příkop by tedy vykopali za 2 hodiny.

Úlohu jsme vyřešili „úsudkem“. Nyní ji vyřešíme znovu – tentokrát pomocí rovnice. Při řešení složitějších úloh se totiž bez rovnic neobejdeme.

Označme x neznámý počet hodin, po který by oba kopáči museli pracovat společně. Protože první kopáč by za hodinu vykopal $\frac{1}{6}$ příkopu, za x hodin by vykopal x-krát tolik, tedy $\frac{1}{6}x$ příkopu. Podobně druhý kopáč by za x hodin vykopal $\frac{1}{3}x$ příkopu. Oba společně by za x hodin vykopali $(\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x)$ příkopu. Tak docházíme k rovnici

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}=1.$$

Tato rovnice vyjadřuje, že 1 celek (tj. celý příkop) je rozdělen na dvě části, které by vykopali jednotliví kopáči.

Sestavenou rovnici nyní vyřešíme:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{6} + \frac{x}{3} &= 1 \qquad\qquad / \cdot 6 \\
x + 2x &= 6 \\
3x &= 6 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Oběma kopáčům by společná práce trvala 2 hodiny.

Zkoušku jsme již vlastně provedli při řešení této úlohy „úsudkem“.

Příklad 2. Rybník se vypustí větším stavidlem za 10 dní, menším za 12 dní. Letos vypouštěli rybník tak, že první čtyři dny otevřeli jen větší stavidlo, teprve pak otevřeli také stavidlo menší. Určete dobu, kterou vypouštění rybníku letos trvalo.

Řešení. Zkuste úlohu vyřešit „úsudkem“. My ji budeme řešit tak, že sestavíme rovnici pro neznámý počet x dnů, kdy se rybník vypouštěl. Větší stavidlo bylo otevřeno x dnů, menší stavidlo $(x-4)$ dnů.

Větším stavidlem se za 1 den vypustí $\frac{1}{10}$ rybníku, za x dnů $\frac{1}{10}x$ rybníku. Menším stavidlem se za 1 den vypustí $\frac{1}{12}$ rybníku, za $(x-4)$ dnů $\frac{1}{12}(x-4)$ rybníku. Podle zadání platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{10} + \frac{x-4}{12} &= 1 \qquad\qquad / \cdot 60 \\
6x + 5 \cdot (x-4) &= 60 \\
6x + 5x - 20 &= 60 \\
11x &= 80 \\
x &= \frac{80}{11}
\end{aligned}
$$

S odpovědí „Rybník se vyprázdnil za $\frac{80}{11}$ dne“ asi nejste spokojeni, i když je správná. „Názornější“ informaci dostaneme, vyjádříme-li výsledek $\frac{80}{11}$ smíšeným číslem $7\frac{3}{11}$. Z jeho zápisu vidíme, že vypouštění trvalo déle než 7 a méně než 8 celých dnů. U necelé části se asi spokojíme s odhadem $\frac{3}{11} \doteq \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Tak dospějeme k „praktičtější“ odpovědi:

Rybník se vypouštěl asi sedm a čtvrt dne.

Příklad 3. Mistr společně s učedníkem postaví zeď za 20 hodin. Mistr sám by tuto práci vykonal za 30 hodin. Jak dlouho by zeď stavěl samotný učedník?

Řešení. Za neznámou x zvolíme počet hodin, které by k postavení zdi potřeboval učedník. Za 1 h učedník postaví $\frac{1}{x}$ celé zdi. Mistr za 1 h postaví $\frac{1}{30}$ zdi. Protože oba společně za 1 h postaví $\frac{1}{20}$ zdi, platí:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{30} = \frac{1}{20} \qquad / \cdot 60x$$
$$60 + 2x = 3x$$
$$x = 60$$

Učedník by sám stavěl zeď 60 hodin.

Připojíme ještě Ondrovo řešení této úlohy:

	celá práce:	za 1 hod:
mistr	30 h	$\frac{1}{30}$
učedník	x h	$\frac{1}{x}$
dohromady	20 h	$\frac{1}{20}$

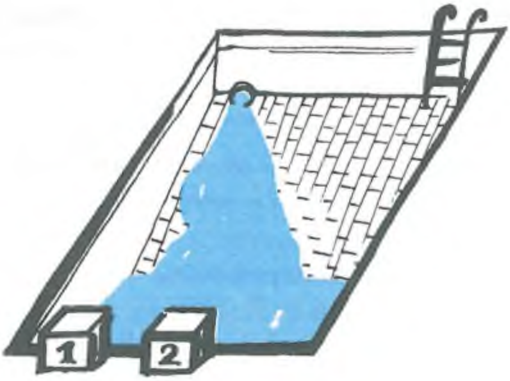
platí: $\frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \qquad / \cdot 60x$

$$2x + 60 = 3x$$
$$60 = x$$
$$\underline{\underline{x = 60}}$$

Zk.: za 1h oba: $\frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{2+1}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$

Učedník sám by stavěl zeď 60 hodin.

Příklad 4. Bazén se naplní vodou za 6 hodin, jsou-li otevřeny oba přívody. Jedním z nich by se bazén naplnil o 5 hodin dříve než druhým. Za jak dlouho se bazén naplní, otevřeme-li pouze výkonnější přívod?



Řešení. Předpokládejme, že výkonnějším přívodem se bazén naplní za x hodin. Pak druhým přívodem se naplní za $(x+5)$ hodin. Nyní určíme, jaká část bazénu se naplní za 1 hodinu: prvním přívodem $\frac{1}{x}$, druhým $\frac{1}{x+5}$, oběma současně $\frac{1}{6}$. Proto platí:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

Sestavenou rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} &= \frac{1}{6} \qquad\qquad / \cdot 6x \cdot (x+5) \\ 6 \cdot (x+5) + 6x &= x \cdot (x+5) \\ 6x + 30 + 6x &= x^2 + 5x \\ x^2 - 7x - 30 &= 0 \\ (x-10) \cdot (x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme dva kořeny: $x_1 = 10$ a $x_2 = -3$. Je jasné, že záporný kořen x_2 nemá význam. Pro kořen $x_1 = 10$ provedeme zkoušku:

Výkonnějším přívodem se bazén naplní za 10 h, za hodinu se proto naplní $\frac{1}{10}$ bazénu. Druhým přívodem trvá naplnění $(10+5)$ h, tj. 15 h; za hodinu se naplní $\frac{1}{15}$ bazénu. Protože $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$, naplní se bazén oběma přívody vskutku za 6 hodin.

Výkonnějším přívodem se bazén naplní za 10 hodin.

1. První traktorista zorá pole za 4 hodiny, druhý za 6 hodin. Za jak dlouho zorají pole, budou-li pracovat společně?
2. Danou zakázku splní automat A za 10 hodin, automat B za 12 hodin, automat C za 15 hodin. Jak dlouho budou na této zakázce pracovat všechny automaty současně?

3. Jeden zedník potřebuje na omítnutí domu 40 hodin, druhý 30 hodin. Zpočátku pracovali společně, pak byl druhý zedník odvolán a první dokončil práci sám za 5 hodin. Kolik hodin pracovali společně a v jakém poměru by si měli rozdělit odměnu za omítnutí domu?
4. Dvěma čerpadly se nádrž naplní za 10 hodin. Jedním čerpadlem by se naplnila za 15 hodin. Za jak dlouho by se nádrž naplnila druhým čerpadlem?
5. Prvním kombajnem by se úroda z pole sklidila za 7 hodin, druhým kombajnem za 6 hodin. Kdyby se k nim oběma přidal ještě třetí kombajn, trvala by sklizeň 2 hodiny. Za jak dlouho by sklidil úrodu třetí kombajn, kdyby pracoval sám?
6. Dělník a jeho pomocník by splnili jistý úkol společně za 3 dny. Dělník sám by potřeboval dobu o 8 dní kratší než samotný pomocník. Kolik dní by to bylo?

CVIČENÍ 5

1. V zahradnictví mají přesázet sazenice rajčat ze skleníku na pole. Vyučená zahradnice by tuto práci sama zvládla za 12 hodin, její pomocnice by k tomu potřebovala dvakrát delší dobu. Udělají tuto práci za 1 směnu, tj. za 8 hodin, budou-li pracovat společně?
2. Dva horolezci natírali plechovou střechu věže. Jak dlouho jim práce trvala, jestliže šikovnější z nich by sám střechu natřel za 10 hodin a druhému by tato práce trvala 15 hodin?
3. Pepík se Zdeňkem občas pomáhají tatínkovi v dílně montovat svítidla. Tatínek potřeboval odeslat větší zakázku, a tak o víkendu pracovali všichni tři společně. Montáž by trvala samotnému tatínkovi 12 hodin, samotnému Pepíkovi 18 hodin a samotnému Zdeňkovi 14 hodin. Za jak dlouho byli s prací hotovi?
4. V nábytkářském podniku dostali zakázku na výrobu židlí. V první dílně na ní začali pracovat již v pondělí ráno. Ve druhé dílně ještě dokončovali předchozí práci, a proto na této zakázce začali pracovat až ve středu ráno. Kolik dnů pak budou obě dílny pracovat společně, jestliže v první dílně by na splnění celé zakázky potřebovali 6 dnů a ve druhé dílně 9 dnů?
5. Dvě písařky napsaly dohromady 65 stránek strojopisu. I když první z nich psala o hodinu déle než druhá, napsala o 5 stránek méně, neboť druhá písařka píše za hodinu o 2 stránky více než první. Kolik stránek za hodinu napíšou obě písařky dohromady?

6. Voda do kašny s vodotryskem se může napouštět dvěma přívody. Prvním by to trvalo 1,5 hodiny. Když zjara po vyčištění znovu kašnu napouštěli, otevřeli oba přívody, takže napouštění trvalo jen 36 minut. Za jak dlouho by se kašna naplnila, kdyby byl otevřen jen druhý přívod?

7. K naplňování i vyprazdňování palivové nádrže o objemu 2 400 m^3 slouží stejné čerpadlo. Při vyprazdňování je jeho výkonnost o 10 m^3 za minutu vyšší než při naplňování. Proto vyprázdnění nádrže trvá o 8 minut méně než její naplnění. Určete, kolik m^3 nádrže naplní čerpadlo za 1 minutu.

***8.** Správce rekreačního střediska při střídání turnusů měnil vodu v bazénu. Věděl, že jedním čerpadlem se bazén naplní za 8 hodin, druhým za 12 hodin. Počítal, že pokud použije obě čerpadla současně, bazén se naplní za méně než 5 hodin. Napouštění však trvalo celých 6 hodin. Teprve pak správce zjistil, že po vypuštění zapomněl zavřít jeden z odtoků. Jaká část objemu bazénu mu zbytečně unikla?

9. Kvůli velké úrodě brambor letos přikoupili na statku ke staré třídičce novou, výkonnější. Nyní pracují oba stroje současně, a proto je denní sklizeň zpracována za 12 hodin. Kdyby pracoval pouze starý stroj, potřeboval by ke zpracování denní sklizně o 10 hodin více než samotný nový stroj. Jak dlouho by to staré třídičce trvalo?

10. V chemické továrně se skladuje kyselina sírová ve velkých nádržích. Jednoho dne chtěli kyselinu z jedné takové nádrže rozvážet cisternami do pobočných závodů. Nádrž se měla vyprázdnit dvěma ventily za $5\frac{5}{11}$ hodiny. Protože však neměli dostatek cisteren, otevřeli pouze jeden ventil. Tímto ventilem trvalo vypouštění nádrže o dvě hodiny méně, než kdyby byl otevřen jen druhý ventil. Jak dlouho vypouštění nádrže trvalo?

***11.** V malířské dílně porcelánky se vyrobené hrníčky popisují jmény. Jednou měly paní Květa, Jarka a Zdena takto ozdobit celkem 1 080 hrníčků. Protože Zdena onemocněla, musely se o všechny hrníčky rovným dílem podělit Květa s Jarkou. Květa ozdobí za každou hodinu o 3 hrníčky více než Jarka. Na zakázce odpracovaly dohromady 66 hodin, než ji splnily. Kolik hodin odpracovala každá z nich?

6 ÚLOHY O SMĚSÍCH

Dosud jsme se nezabývali úlohami o „celcích“, které jsou složeny z „částí“ několika různých druhů. Například:

- Obnos, který máte v peněžence, je složen z určitého počtu bankovek a mincí různé hodnoty.
- Balíček *Studentské směsi* obsahuje oříšky několika různých druhů, rozinky a sušené ovoce.
- Do vany napouštíte vodu, která je smíchána z teplé a studené vody.
- Potravinářský ocet je směsí kyseliny octové a vody.

V takových situacích nás může například zajímat:

– jaká je cena směsi bonbónů, známe-li množství a cenu jednotlivých druhů, které ji tvoří,
– kolik studené vody je třeba přilít k danému množství vroucí vody, abychom ji ochladili na potřebnou teplotu,
– jak se změní tučnost zpracovávané dávky mléka po odstředění jistého množství tuku.

Námětem první úlohy je ubytovací zařízení, které je „směsí“ pokojů o různém počtu lůžek.

Příklad 1. Hotel Merkur může současně ubytovat až 308 hostů ve svých 131 dvoulůžkových nebo třílůžkových pokojích. Kolik je kterých pokojů?

Řešení. Označme x počet dvoulůžkových pokojů. V nich může být ubytováno $2x$ hostů. Třílůžkových pokojů je v hotelu $131 - x$. V nich lze ubytovat $3 \cdot (131 - x)$ hostů. Pro celkovou kapacitu hotelu dostáváme:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot (131 - x) &= 308 \\ 2x + 393 - 3x &= 308 \\ 85 &= x \end{aligned}$$

Protože $131 - 85 = 46$, zjistili jsme, že v hotelu je 85 dvoulůžkových a 46 třílůžkových pokojů.

Zkouška: $2 \cdot 85 + 3 \cdot 46 = 170 + 138 = 308$

Příklad 2. Jirka střádá do pokladničky pouze pětikoruny a dvoukoruny. Včera z ní peníze vysypal a spočítal, že tak našetřil 178 korun. Když chtěl na každou pětikorunu položit dvě dvoukoruny, zjistil, že mu jedna dvoukoruna chybí. Kolik kterých mincí nastřádal?

Řešení. Za neznámou zvolíme počet x pětikorun, které Jirka nastřádal. Ze zadání vyplývá, že počet našetřených dvoukorun byl $2x - 1$. Pro celkovou částku sestavíme rovnici, kterou ihned vyřešíme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2x - 1) + 5x &= 178 \\ 4x - 2 + 5x &= 178 \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Protože pro $x = 20$ je $2x - 1 = 2 \cdot 20 - 1 = 39$, vypočetli jsme, že Jirka nastřádal 20 pětikorun a 39 dvoukorun.

Zkoušku správnosti proveďte sami.

Příklad 3. Kilogram jednoho druhu oříšků se prodává za 130 Kč, kilogram druhého druhu oříšků za 250 Kč. V jakém poměru jsou oba druhy oříšků smíchány ve směsi, jejíž cena je 220 Kč za kilogram?

Řešení. Předpokládejme, že 1 kg zmíněné směsi je složen z x kg lacinějších a $(1 - x)$ kg dražších oříšků (uvědomte si, že neznámé číslo x je větší než 0 a menší než 1). Cena 1 kg směsi pak vede k rovnici

$$x \cdot 130 + (1 - x) \cdot 250 = 1 \cdot 220.$$

Tuto rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} 130x + 250 \cdot (1 - x) &= 220 \\ 130x + 250 - 250x &= 220 \\ 30 &= 120x \\ x &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Vypočítali jsme, že v 1 kg směsi je $\frac{1}{4}$ kg lacinějších a $\frac{3}{4}$ kg dražších oříšků. Proto je jejich poměr ve směsi $1 : 3$.

Skutečně, za $\frac{1}{4}$ kg oříšků po 130 Kč zaplatíme $(130 : 4)$ Kč, tedy 32,50 Kč. Za $\frac{3}{4}$ kg oříšků po 250 Kč zaplatíme $\left(250 \cdot \frac{3}{4}\right)$ Kč, tj. 187,50 Kč. Kilogram směsi bude stát $(32{,}50 + 187{,}50)$ Kč a to je právě 220 Kč.

Poměr dražších a lacinějších oříšků ve směsi je $1 : 3$.

Ondra tuto úlohu řešil jinak:

Smíchám: 1 kg .... po 130 Kč
x kg ..... po 250 Kč } v jakém poměru?
Získám: (1 + x) kg ... po 220 Kč

platí: $1 \cdot 130 + x \cdot 250 = (1 + x) \cdot 220$
$130 + 250x = 220 + 220x$
$30x = 90$
$x = 3$

poměr: 1 : 3
Zk: $130 + 3 \cdot 250 = 130 + 450 = 880$
$4 \cdot 220 = 880$
Oba druhy oříšků jsou ve směsi smíchány v poměru 1 : 3.

1. Jana na výletě koupila 10 pohlednic dvou druhů. Lacinější byly po 3 Kč, dražší po 5 Kč. Zaplatila za ně celkem 42 Kč. Kolik lacinějších a kolik dražších pohlednic koupila?
2. K vyplacení částky 960 Kč použila pokladní 17 bankovek – čtyři stokoruny, několik padesátikorun a několik dvacetikorun. Jakými bankovkami částku vyplatila?
3. Do prázdných plechovek bylo rozlito 410 litrů oleje. Některé plechovky byly třílitrové, ostatní pětilitrové, přitom pětilitrových plechovek bylo o 10 více než třílitrových. Kolik pětilitrových plechovek bylo použito? (Všechny použité plechovky byly zaplněny).

Přejdeme nyní k úlohám, ve kterých se míchají dvě látky o různých teplotách t_1, t_2. Ze zkušenosti víte, že po určité době se teploty smíchaných látek vyrovnají na jisté teplotě t, která leží mezi hodnotami t_1 a t_2.
Ve fyzice tento jev vysvětlujeme tak, že látka o vyšší teplotě t_1 předá teplo látce o nižší teplotě t_2. Vyjadřujeme to rovností

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot c_2 \cdot (t - t_2),$$

kde m_1, m_2 jsou příslušné hmotnosti obou látek a c_1, c_2 jsou konstanty, jejichž význam vysvětlíme.

Zapsaná rovnost říká, že předané nebo přijaté teplo je přímo úměrné jak hmotnosti, tak změně teploty látky. Konstanty úměrnosti c_1 a c_2 se nazývají *měrné tepelné kapacity* látek a jejich hodnoty jsou pro různé látky uvedeny v tabulkách.

V našich úlohách tyto konstanty nebudou hrát roli, neboť vždy budeme míchat dvě různá množství *téže* tekutiny o různých teplotách. Pak platí $c_1 = c_2$, takže se naše rovnost zjednoduší do tvaru:

$$\boxed{m_1 \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot (t - t_2)}$$

Někdy budeme místo hmotností m_1 a m_2 znát objemy V_1 a V_2 obou množství tekutiny. Protože $m_1 = V_1 \cdot \varrho$ a $m_2 = V_2 \cdot \varrho$, kde ϱ je hustota tekutiny, můžeme místo předchozí rovnosti psát:

$$\boxed{V_1 \cdot (t_1 - t) = V_2 \cdot (t - t_2)}$$

Příklad 4. Nádoba na 30 litrů vody se má naplnit vodou o teplotě 30 °C. Kolik litrů vody o teplotě 80 °C a kolik litrů vody o teplotě 20 °C se musí smíchat?

Řešení. Předpokládejme, že smícháme x litrů vody o teplotě 80 °C a $(30 - x)$ litrů vody o teplotě 20 °C. Ze zadání vyplývá, že po vyrovnání teplot klesne teplota teplejší vody o $(80 - 30)$ °C, tj. o 50 °C, zatímco teplota chladnější vody vzroste o $(30 - 20)$ °C, tedy o 10 °C. Proto platí:

$$\begin{aligned} x \cdot 50 &= (30 - x) \cdot 10 \\ 50x &= 300 - 10x \\ 60x &= 300 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Je nutno smíchat 5 l vody o teplotě 80 °C s 25 l vody o teplotě 20 °C.

Příklad 5. Smícháme 5 kg vroucí vody a 11 kg vody o teplotě 20 °C. Jaká bude výsledná teplota vody?

Řešení. Za neznámou zvolíme číslo t, které vyjadřuje výslednou teplotu ve stupních Celsia. Změna teploty vroucí vody je $(100 - t)$ °C, změna teploty chladnější vody je $(t - 20)$ °C. Platí tedy:

$$
\begin{aligned}
5 \cdot (100 - t) &= 11 \cdot (t - 20) \\
500 - 5t &= 11t - 220 \\
720 &= 16t \\
t &= 45
\end{aligned}
$$

Voda bude mít teplotu 45 °C.

4. Zemanovi mají doma bazén, do kterého napouštějí 25 m^3 vody. Přejí si, aby měla teplotu 24 °C. Proto míchají vodu z vodovodu o teplotě 11 °C s vodou ohřátou v kotli na teplotu 76 °C. Kolik které vody takto spotřebují?
5. Tři litry vroucí vody jsme ochladili jistým množstvím vody o teplotě 20 °C tak, že jsme dostali vodu o teplotě 50 °C. Kolik litrů chladnější vody jsme použili?
6. K 20 litrům vody o teplotě 80 °C jsme přilili 10 litrů vody neznámé teploty. Teplota vody se ustálila na 60 °C. Určete teplotu vody, kterou jsme přilili.

Závěr kapitoly věnujeme úlohám o *koncentracích* látek v roztocích. Z hodin chemie víte, že koncentrací vyjadřujeme míru, v jaké je rozpuštěná látka zastoupena v roztoku. Uveďme dva příklady:

- Ve 100 ml 30procentního roztoku lihu ve vodě (stručně se mu říká „30procentní líh“) je 30 ml čistého lihu a 70 ml čisté vody.
- Ve 100 g mořské vody s 5procentním obsahem soli je 5 g soli a 95 g čisté vody.

V prvním případě je vyjádřeno, jak jsou rozpouštěná látka (čistý líh) a rozpouštědlo (čistá voda) v roztoku zastoupeny *objemově*, ve druhém případě jde o jejich *hmotnostní* zastoupení. Domluvíme se totiž, že v našich příkladech bude koncentrace vždy vyjadřovat buď objemové, nebo hmotnostní zastoupení látek podle toho, zda budou jejich množství uvedena v objemových či hmotnostních jednotkách. Podle zadání příkladu tedy vždy poznáme, o který „druh“ koncentrace se jde. V našich úvodních příkladech bylo množství lihu dáno v *mililitrech*, množství mořské vody v *gramech*.

Příklad 6. Smícháním 6 litrů 50procentní kyseliny octové a 3 litrů 8procentní kyseliny octové vznikl nový roztok této kyseliny. Určete jeho koncentraci.

Řešení. Jako u všech dalších úloh budeme sledovat množství čisté látky (v našem případě objem kyseliny octové) v původních i konečných roztocích:

roztok		čistá látka
6 l 50%	....	$6 \cdot \frac{50}{100}\ \mathrm{l} = 3\ \mathrm{l}$
3 l 8%	....	$3 \cdot \frac{8}{100}\ \mathrm{l} = \frac{24}{100}\ \mathrm{l}$
(6+3) l x%	....	$9 \cdot \frac{x}{100}\ \mathrm{l} = \frac{9x}{100}\ \mathrm{l}$

Nyní zapíšeme rovnicí, že výsledné množství čisté látky je součtem množství čisté látky v obou „složkách“:

$$3 + \frac{24}{100} = \frac{9x}{100}$$
$$300 + 24 = 9x$$
$$9x = 324$$
$$x = 36$$

Výsledný roztok má koncentraci 36 %.

Zkoušku lze provést jedině tak, že znovu porovnáme množství čisté kyseliny octové. V 9 litrech 36procentního roztoku je $9 \cdot \frac{36}{100}$ l, tj. $\frac{324}{100}$ l čisté látky, což je skutečně $(3 + 0{,}24)$ litru.

U dalších řešených příkladů tento druh zkoušky již uvádět nebudeme.

Příklad 7. Kolik kg 96procentního roztoku kyseliny sírové musíme přilít k 9 kg 8procentního roztoku této kyseliny, abychom dostali její 60procentní roztok?

Řešení. Má-li hledané množství hmotnost x kg, pak bilance čisté kyseliny vede k rovnici:

$$x \cdot \frac{96}{100} + 9 \cdot \frac{8}{100} = (x + 9) \cdot \frac{60}{100}$$

Na její levé straně je hmotnost v kilogramech čisté kyseliny sírové v jednotlivých složkách, na pravé straně pak ve výsledné směsi.

$$
\begin{aligned}
x \cdot \frac{96}{100} + 9 \cdot \frac{8}{100} &= (x+9) \cdot \frac{60}{100} \qquad / \cdot 100 \\
96x + 9 \cdot 8 &= 60 \cdot (x+9) \\
96x + 72 &= 60x + 540 \\
36x &= 468 \\
x &= 13
\end{aligned}
$$

Musíme přilít 13 kg 96procentního roztoku kyseliny sírové.

Příklad 8. Kolika gramy vody musíme zředit 300 g 40procentní kyseliny dusičné, aby zředěná kyselina měla koncentraci 15 %?

Řešení. Za neznámou x zvolíme číslo, které udává potřebnou hmotnost vody v gramech. V původním 40procentním roztoku kyseliny dusičné je $300 \cdot \frac{40}{100}$ g čisté kyseliny, ve zředěném roztoku je pak $(300 + x) \cdot \frac{15}{100}$ g čisté kyseliny. Protože smícháním se hmotnost čisté kyseliny dusičné nezmění, platí:

$$
\begin{aligned}
300 \cdot \frac{40}{100} &= (300 + x) \cdot \frac{15}{100} \qquad / \cdot 100 \\
300 \cdot 40 &= (300 + x) \cdot 15 \\
12\,000 &= 4\,500 + 15x \\
15x &= 7\,500 \\
x &= 500
\end{aligned}
$$

Kyselinu je třeba zředit 500 gramy vody.

Příklad 9. V mlékárně vyrábějí polotučné mléko (s obsahem 1,5 % tuku) tak, že z tučného mléka (s obsahem 4 % tuku) odstředěním část tuku odeberou. Z kolika kilogramů tučného mléka vyrobí 1 tunu mléka polotučného?

Řešení. Předpokládejme, že při výrobě 1 tuny, tj. 1 000 kg polotučného mléka bylo z tučného mléka odebráno x kg tuku. Neodstředěné tučné mléko tedy mělo hmotnost $(1\,000 + x)$ kg. Srovnání čistého tuku pak vypadá takto:

$$(1\,000 + x) \cdot \frac{4}{100} - x = 1\,000 \cdot \frac{1{,}5}{100}$$

Tuto rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned}
(1\,000 + x) \cdot \frac{4}{100} - x &= 1\,000 \cdot \frac{1{,}5}{100} \qquad / \cdot 100\\
4 \cdot (1\,000 + x) - 100x &= 1{,}5 \cdot 1\,000\\
4\,000 + 4x - 100x &= 1\,500\\
2\,500 &= 96x\\
x &\doteq 26
\end{aligned}$$

Při výrobě 1 tuny polotučného mléka bylo odebráno asi 26 kg tuku, proto při ní zpracovali asi 1 026 kg tučného mléka.

7. Maminka připravila Vojtovi na výlet nápoj tak, že do lahve o objemu 1,5 litru nalila 4 decilitry 50procentního džusového koncentrátu a zbytek dolila vodou. Jakou koncentraci měl Vojtův nápoj?

8. Tři litry 96procentního lihu jsme zředili jistým množstvím destilované vody tak, že vznikl 54procentní líh. Kolik litrů destilované vody jsme použili?

9. Kolik gramů pevného síranu měďnatého musíme přidat do 250 g 10procentního vodného roztoku síranu měďnatého, aby vznikl 40procentní roztok?

CVIČENÍ 6

1. Sekretářka zaplatila za 130 poštovních známek 870 Kč. Koupila známky dvou druhů – v hodnotě 4,60 Kč a 8 Kč. Kolik kterých známek koupila?

2. Na závěr školního výletu koupil učitel svým žákům za zbytek vybraných peněz čokolády. Každá dívka dostala jogurtovou čokoládu za 14,80 Kč, každý chlapec oříškovou čokoládu za 13,40 Kč. Za všechny čokolády učitel zaplatil celkem 408,20 Kč. Kolik žáků bylo na výletě, jestliže dívek bylo o 1 méně než hochů?

3. Prodavačka na trhu měla navečer ještě zbytky tří druhů meruněk různých jakostí. Nejvíce jí zbylo meruněk 3. jakosti, které prodávala po 24 Kč za 1 kilogram. Bylo jich dvakrát více než meruněk 2. jakosti, které prodávala po 32 Kč za kilogram. Nejkvalitnějších meruněk (1 kilogram za 36 Kč) jí zbylo dvakrát méně než meruněk druhé jakosti. Prodavačka se rozhodla všechny zbylé meruňky smíchat a prodala je jako jeden druh. Utržila za ně 490 Kč. Byla to přesně ta částka, kterou by získala, kdyby prodávala meruňky rozdělené do původních jakostních tříd. Za kolik korun prodávala „směs“?

4. Doporučená teplota vody pro koupání nemluvňat je mezi 35 °C a 37 °C. Paní Jana připravila pro malého Tomáška do vaničky 12 litrů vody o teplotě 42 °C. Kolik litrů vody z vodovodu (o teplotě 16 °C) musí do vaničky přilít, aby teplota lázně byla v doporučeném rozmezí?

5. Mlékárna vykoupí od zemědělců mléko jedině tehdy, má-li předepsanou teplotu 4 °C. Farmář při kontrolním měření zjistil, že jeho 60 litrů mléka má teplotu jen 3,6 °C. Pomůže mu 10 litrů mléka o teplotě 6,5 °C, které původně zamýšlel uschovat pro potřeby své rodiny? Zbude mu nějaké mléko aspoň na snídani? Anebo mu mlékárna mléko vůbec nevykoupí?

6. První slitina je směsí dvou kovů v poměru 1 : 2, druhá je směsí stejných kovů v poměru 2 : 3. V jakém poměru máme tyto dvě slitiny dát do tavicí pece, abychom po vytavení získali novou slitinu kovů v poměru 17 : 27? (Všechny tři poměry odpovídají témuž pořadí obou kovů.)

7. Dva odlitky mají dohromady hmotnost 60 kg. První z nich obsahuje 10 kg mědi, druhý 8 kg mědi. Kolik procent mědi obsahuje první odlitek, jestliže u druhého odlitku je počet procent mědi o 15 větší?

8. Kolik gramů čisté kyseliny borité je třeba k namíchání 250 gramů tříprocentního roztoku borové vody?

9. Kolika gramy borové vody je nutné doplnit 8 g čistého efedrinu, abychom dostali nosní kapky, které jsou 1,2procentním roztokem efedrinu v borové vodě?

10. Před sázením se česnek máčí ve 2,3procentním roztoku Fundazolu. Maminka potřebovala 7 l tohoto roztoku. V drogerii zjistila, že prodávají pouze 35procentní roztok Fundazolu ve čtvrtlitrových lahvích. Kolik takových lahví musela koupit?

11. Pan Brabec připravil pro postřik vinice 4procentní roztok skalice modré. Jaké množství roztoku to bylo, když vzniklo rozředěním 65procentního roztoku skalice modré 305 litry vody?

12. V nemocniční ambulanci dezinfikují přístroje ve vaně, do které se vlévá 25 litrů dezinfekčního roztoku o koncentraci 1,5 %. Sestra má k dispozici šestilitrový kanystr se 100procentním koncentrátem dezinfekčního prostředku. Na kolik lázní jí takový kanystr vystačí?

13. Na pokyn lékaře má sestra pro pacienta připravit 10 ml 2procentního roztoku léku. Na oddělení však tento lék mají pouze v koncentracích 1 % a 4 %. Poraďte sestře, jak má úkol splnit.

7 ROVNICE S VÍCE NEZNÁMÝMI

Každá rovnice, kterou jsme dosud řešili, obsahovala jedinou neznámou. Přesvědčili jsme se, že pomocí takových rovnic lze řešit rozmanité úlohy. Patřily k nim i situace, ve kterých bylo neznámých údajů více. Vztahy mezi nimi jsme však dokázali popsat jednou rovnicí s jednou vhodně vybranou neznámou. Ještě v tomto sešitě budeme řešit úlohy, kdy je takový postup nevýhodný, či dokonce téměř nemožný. Tehdy si pomůžeme tak, že dva (nebo více) údajů označíme za neznámé a sestavíme pro ně dvě (nebo více) rovnic, které pak „zároveň" řešíme. V této kapitole se na řešení takových úloh „teoreticky" připravíme. Naučíme se řešit jednoduché *soustavy* rovnic.

Co je *soustava rovnic* a co její *řešení*?

?

Položme si nejprve otázku, zda dokážeme zjistit cenu jedné čokolády a jednoho balíčku oříšků z těchto údajů:

- Tři čokolády a dva balíčky oříšků stojí 46 Kč.
- Dvě čokolády a tři balíčky oříšků stojí 49 Kč.

(Všechny čokolády jsou samozřejmě téhož druhu, mají proto stejnou cenu. Totéž platí i pro balíčky oříšků.)

K řešení takové úlohy je vhodné zvolit *dvě* neznámé x a y: Jedna čokoláda stojí x Kč, jeden balíček oříšků stojí y Kč. Známé údaje pak vyjádříme dvěma rovnicemi:

$$3x + 2y = 46$$

$$2x + 3y = 49$$

Každá z nich je příkladem **rovnice se dvěma neznámými**. Naším úkolem je najít čísla x a y tak, aby po jejich dosazení do obou rovnic vznikly dvě platné rovnosti.

Obě rovnice

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

vystihují jednu situaci (nákupy ve stejném obchodě), proto k sobě „patří“. Říkáme, že tvoří **soustavu** dvou rovnic se dvěma neznámými.

Možná uhodnete, že oběma rovnicím naší soustavy vyhovují čísla $x = 8$ a $y = 11$. Skutečně:

$$3 \cdot 8 + 2 \cdot 11 = 46$$
$$2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 = 49$$

Takovou *dvojici* čísel nazveme **řešením** dané soustavy. Hodnoty $x = 8$ a $y = 11$ proto nejsou dvě řešení naší soustavy, ale „spolu nerozlučně“ tvoří *jedno* řešení.

Řešením soustavy rovnic se dvěma neznámými je tedy *dvojice čísel*.

Víte již, že u rovnic s jednou neznámou má slovo *řešení* dva významy. Označujeme jím jednak postup, který vede k výsledku, jednak výsledek samotný. Tento výsledek (číslo) se také nazývá *kořen* rovnice.

Také u soustav rovnic budeme slovem *řešení* označovat jak postup, tak výsledek. Pro dvojici čísel, která je řešením dané soustavy, se slovo *kořen* nepoužívá.

V této kapitole se naučíme základům toho, jak řešení soustav rovnic počítat, a ne pouze „hádat“. Při těchto výpočtech se zároveň vždy ujistíme, zda je vypočtené řešení *jediné*. Tak například vysvětlíme, proč soustava

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

nemá jiné řešení než $x = 8$ a $y = 11$.

1. Rozhodněte, zda dvojice čísel $x = 1$ a $y = 2$ je řešením soustavy:

a) $7x + 2y = 11$
$7x - 6y = -5$

b) $2x - 7y = -12$
$3x + 9y = 13$

c) $4x - 5y = 6$
$5x - 4y = -1$

Jak z rovnice vyjádříme jednu neznámou pomocí druhé neznámé?

Vraťme se k nákupům oříšků a čokolád z úvodu kapitoly. Zdůrazněme, že k určení neznámých cen 1 čokolády a 1 balíčku oříšků by nám jedna rovnice, například

$$3x + 2y = 46,$$

nestačila. Ověřte, že této rovnici vyhovuje nejen dvojice čísel $x = 8$ a $y = 11$, ale také dvojice $x = 2$ a $y = 20$, dvojice $x = 10$ a $y = 8$ apod. Z této jedné rovnice však můžeme jednu neznámou vyjádřit pomocí druhé neznámé, například y pomocí x:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 46 \\ 2y &= 46 - 3x \\ y &= \frac{46 - 3x}{2} \end{aligned}$$

Při výpočtu neznámé y jsme na chvíli „zapomněli“, že x je neznámá. Rovnici $3x + 2y = 46$ jsme tak považovali za rovnici s jednou neznámou y. Tu jsme známým postupem vyřešili. Jako „řešení“ y jsme však nedostali konkrétní číslo, ale výraz s proměnnou x. Z něho pro různé hodnoty x dostaneme různé hodnoty y:

$$\begin{aligned} x = 8: \qquad & y = \frac{46 - 3 \cdot 8}{2} = 11 \\ x = 2: \qquad & y = \frac{46 - 3 \cdot 2}{2} = 20 \\ x = 10: \qquad & y = \frac{46 - 3 \cdot 10}{2} = 8 \end{aligned}$$

Z rovnice $3x + 2y = 46$ jsme vyjádřili neznámou y pomocí neznámé x. Můžeme z ní však také vyjádřit neznámou x pomocí neznámé y:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 46 \\ 3x &= 46 - 2y \\ x &= \frac{46 - 2y}{3} \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření můžeme nyní k libovolné hodnotě y vypočítat odpovídající hodnotu x. Udělejme to pro ty hodnoty y, které jsme dříve vypočítali:

$$\begin{aligned} y = 11: \qquad & x = \frac{46 - 2 \cdot 11}{3} = 8 \\ y = 20: \qquad & x = \frac{46 - 2 \cdot 20}{3} = 2 \\ y = 8: \qquad & x = \frac{46 - 2 \cdot 8}{3} = 10 \end{aligned}$$

Vyšly nám „zpětně“ ty hodnoty x, které jsme dříve zvolili.

V následujícím příkladu vyjádříme jednu ze dvou neznámých pomocí druhé v případě, kdy je jejich „vzájemná závislost“ vyjádřena složitější rovnicí.

Příklad 1. Z rovnice

$$3 \cdot \left(x - \frac{y}{2}\right) - 4 = 1 - 2 \cdot \frac{x - 2y}{3}$$

vyjádřete

a) neznámou x pomocí y, b) neznámou y pomocí x.

Řešení

a) Z dané rovnice nejprve odstraníme závorky a zlomky:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(x - \frac{y}{2}\right) - 4 &= 1 - 2 \cdot \frac{x - 2y}{3} \\ 3x - \frac{3y}{2} - 4 &= 1 - \frac{2 \cdot (x - 2y)}{3} \qquad / \cdot 6 \\ 18x - 9y - 24 &= 6 - 4 \cdot (x - 2y) \\ 18x - 9y - 24 &= 6 - 4x + 8y \end{aligned}$$

Naším úkolem je vyjádřit neznámou x pomocí neznámé y. Proto členy s x „osamostatníme“ na jedné straně rovnice:

$$\begin{aligned} 18x + 4x &= 8y + 9y + 6 + 24 \\ 22x &= 17y + 30 \\ x &= \frac{17y + 30}{22} \end{aligned}$$

b) Nebudeme opakovat počáteční úpravy z části a). Opíšeme z ní až rovnici

$$22x = 17y + 30$$

a výpočet snadno dokončíme:

$$y = \frac{22x - 30}{17}$$

2. Z dané rovnice vyjádřete neznámou x pomocí neznámé y:

a) $x - 2y = 3$ b) $2x + 6y = 18$

c) $-x + 3y = 15$ d) $5x + 7y = -3$

3. Z dané rovnice vyjádřete neznámou v pomocí neznámé u:

a) $3u - v = 12$ b) $2u + 4v = 3$

c) $-\frac{1}{2}u - 2v = 3$ d) $-2u + \frac{7}{3}v = 15$

4. Z rovnice

$$4 \cdot \left(x - \frac{y+1}{4}\right) + 1 = 2 - \frac{y}{2} + \frac{1-x}{8}$$

vyjádřete

a) neznámou y pomocí neznámé x,

b) neznámou x pomocí neznámé y.

V dalších částech této kapitoly vysvětlíme, jakými metodami se soustavy rovnic řeší. Každý nový postup vždy vysvětlíme nejprve na soustavě

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49,$$

kterou jsme popsali nákupy čokolád a oříšků v úvodu kapitoly.

?

Jak řešíme soustavy rovnic *srovnávací metodou*?

Z první i druhé rovnice soustavy

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

vyjádříme neznámou y pomocí neznámé x:

$$y = \frac{46 - 3x}{2}, \qquad y = \frac{49 - 2x}{3}$$

Hledáme takovou hodnotu x, pro kterou mají oba výrazy stejnou hodnotu y:

$$\frac{46 - 3x}{2} = \frac{49 - 2x}{3}$$

Dostali jsme tak jednu rovnici s jednou neznámou x. Tu nyní vyřešíme:

$$\frac{46 - 3x}{2} = \frac{49 - 2x}{3} \qquad / \cdot 6$$
$$3 \cdot (46 - 3x) = 2 \cdot (49 - 2x)$$
$$138 - 9x = 98 - 4x$$
$$40 = 5x$$
$$x = 8$$

I když jsme našli hodnotu neznámé x, není to celé řešení. Musíme ještě určit hodnotu neznámé y, například tak, že $x = 8$ dosadíme do vyjádření $y = \dfrac{46 - 3x}{2}$:

$$y = \frac{46 - 3x}{2} = \frac{46 - 3 \cdot 8}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

Stejně tak jsme mohli využít i druhé vyjádření:

$$y = \frac{49 - 2x}{3} = \frac{49 - 2 \cdot 8}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Soustava má tedy jediné řešení $x = 8$, $y = 11$.

Prohlédněte si, jak Markéta použila srovnávací metodu při řešení soustavy

$$2x + 3y = 4,$$
$$-x - 2y = 5.$$

$$2x + 3y = 4$$
$$-x - 2y = 5$$

$$2x + 3y = 4 \qquad\qquad -x - 2y = 5$$
$$2x = 4 - 3y \qquad\qquad -x = 5 + 2y$$
$$\underbrace{\boxed{x = \frac{4 - 3y}{2}} \qquad\qquad \boxed{x = -5 - 2y}}$$

$$\frac{4 - 3y}{2} = -5 - 2y$$
$$4 - 3y = -10 - 4y$$
$$4y - 3y = -10 - 4$$
$$\underline{\underline{y = -14}}$$

$$x = -5 - 2y = -5 - 2 \cdot (-14) = -5 + 28 = 23$$
$$\underline{\underline{x = 23}}$$

Zk.: $L_1 = 2x + 3y = 2 \cdot 23 + 3 \cdot (-14) = 46 - 42 = 4 \quad P_1 = 4 \quad L_1 = P_1$

$L_2 = -x - 2y = -23 - 2 \cdot (-14) = -23 + 28 = 5 \quad P_2 = 5 \quad L_2 = P_2$

Všimněte si Markétiny zkoušky. Jako obvykle strany řešených rovnic označila písmeny L a P. Protože řešila soustavu dvou rovnic, připojila k písmenům L a P indexy (index 1 pro první rovnici, index 2 pro druhou).

Při řešení soustavy dvou rovnic s dvěma neznámými *srovnávací metodou* vyjádříme z obou rovnic stejnou neznámou pomocí druhé neznámé a pak z obou vyjádření sestavíme rovnici.

5. Řešte srovnávací metodou soustavu rovnic:

a) $x + 2y = 4$
$x - 3y = -1$

b) $3x - y = -3$
$2x + y = -2$

c) $x - 3y = -2$
$2x + 6y = 8$

d) $x - \frac{1}{2}y = 4$
$2x - 3y = 0$

e) $5x - 2y = 8$
$-4x + 3y = -12$

f) $4x - 2y = 5$
$10x + 16y = 2$

Jak řešíme soustavy rovnic *dosazovací metodou*?

Vyjádříme-li z první rovnice soustavy

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 46, \\ 2x + 3y &= 49 \end{aligned}$$

neznámou y pomocí neznámé x,

$$y = \frac{46 - 3x}{2},$$

nemusíme tuto neznámou vyjadřovat i z druhé rovnice, jako tomu bylo u srovnávací metody. Uvedené vyjádření můžeme ihned *dosadit* za neznámou y do rovnice druhé:

$$2x + 3 \cdot \frac{46 - 3x}{2} = 49$$

Získali jsme tak jednu rovnici s jednou neznámou x, kterou vyřešíme obvyklým způsobem:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot \frac{46 - 3x}{2} &= 49 \qquad / \cdot 2 \\ 4x + 3 \cdot (46 - 3x) &= 98 \\ 4x + 138 - 9x &= 98 \\ -5x &= -40 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Hodnotu neznámé y „dopočítáme“ například tak, že $x = 8$ dosadíme do toho vyjádření neznámé y, kterým jsme řešení začali:

$$y = \frac{46 - 3x}{2} = \frac{46 - 3 \cdot 8}{2} = \frac{46 - 24}{2} = 11$$

Dosazovací metodou řešila Markéta tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ x - 3y &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ x - 3y &= -2 \end{aligned}$$

$$x - 3y = -2$$

$$\boxed{x = 3y - 2} \qquad 3x - 5y = 2$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3y - 2) - 5y &= 2 \\ 9y - 6 - 5y &= 2 \\ 4y &= 8 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 2}} \end{aligned}$$

$$x = 3y - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

$$\begin{aligned} \text{Zk.: } L_1 &= 3x - 5y = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2 \qquad P_1 = 2 \qquad L_1 = P_1 \\ L_2 &= x - 3y = 4 - 3 \cdot 2 = -2 \qquad P_2 = -2 \qquad L_2 = P_2 \end{aligned}$$

Markétu napadlo, že bude výhodné, když z druhé rovnice soustavy vyjádří neznámou x pomocí neznámé y. V této rovnici je u neznámé x koeficient 1. Proto se Markéta při výpočtu obešla bez zlomků.

Dosazovací metodou vyřešíme ještě jednu složitější soustavu rovnic se zlomky. U takových soustav se vyplatí nejprve zlomky odstranit.

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic s neznámými r a s:

$$\begin{aligned} \frac{r}{3} + \frac{s}{2} &= -4 \\ \frac{r}{2} - \frac{s}{3} &= 7 \end{aligned}$$

Řešení

$$\frac{r}{3}+\frac{s}{2}=-4 \qquad /\cdot 6$$
$$\frac{r}{2}-\frac{s}{3}=7 \qquad /\cdot 6$$

$$2r+3s=-24$$
$$3r-2s=42$$

$$r=\frac{-24-3s}{2}$$

$$3\cdot\frac{-24-3s}{2}-2s=42 \qquad /\cdot 2$$
$$3\cdot(-24-3s)-4s=84$$
$$-72-9s-4s=84$$
$$-13s=156$$
$$s=-12$$

$$r=\frac{-24-3s}{2}=\frac{-24-3\cdot(-12)}{2}=\frac{-24+36}{2}=6$$

$$r=6, \qquad s=-12$$

Zkouška:

$$L_1=\frac{r}{3}+\frac{s}{2}=\frac{6}{3}+\frac{-12}{2}=2-6=-4, \quad P_1=-4, \quad L_1=P_1$$
$$L_2=\frac{r}{2}-\frac{s}{3}=\frac{6}{2}-\frac{-12}{3}=3+4=7, \quad P_2=7, \quad L_2=P_2$$

Pro přehlednost jsme vodorovnými čarami oddělili jednotlivé kroky řešení:

- zjednodušení dané soustavy
- vyjádření r pomocí s
- dosazení a výpočet s
- výpočet r

Budete-li takto přehledně členit svá řešení i vy, oceníte to například tehdy, když zjistíte, že jste při řešení příkladu udělali chybu, a budete hledat kde.

Při řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými *dosazovací* metodou vyjádříme z jedné rovnice jednu neznámou pomocí druhé neznámé a pak toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice.

6. Dosazovací metodou řešte soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 3y &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 3x - 4y &= -6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x - 3y &= 1 \\ 5x - y &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 1 \\ 5x + 4y &= 2 \end{aligned}$

7. Dosazovací metodou řešte soustavu rovnic s neznámými p a q:

a) $\begin{aligned} p + \frac{q}{2} &= 5 \\ \frac{2p}{3} - \frac{q}{4} &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4p - \frac{q}{3} &= 3 \\ 3p + \frac{q}{2} &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \frac{4p}{3} - \frac{q}{2} &= 7 \\ \frac{5p}{3} + \frac{q}{6} &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \frac{p+1}{2} - \frac{q+4}{6} &= 0 \\ \frac{p-4}{3} + \frac{q}{2} &= 0 \end{aligned}$

8. Dosazovací metodou řešte soustavu rovnic s neznámými u a v:

a) $\begin{aligned} 3 \cdot (u+1) - 2v &= 4 \cdot (u - v) \\ u - 2 \cdot (3 - v) &= 1 - 3u + 5 \cdot (1 - 2v) \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} v - u &= 2 \cdot \left(1 - \frac{2v}{3}\right) + \frac{u+2}{6} \\ 2u - \frac{u+v}{2} &= 3 \cdot (u - v) \end{aligned}$

Jak řešíme soustavy rovnic *sčítací metodou*?

Připomeňme, že naše soustava

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

vznikla matematickým zápisem údajů ze dvou nákupů:

- Tři čokolády a dva balíčky oříšků stojí 46 Kč.
- Dvě čokolády a tři balíčky oříšků stojí 49 Kč.

Situace by byla jednodušší, kdyby v obou nákupech byl například stejný počet čokolád. Dosáhneme toho tak, že budeme uvažovat *dvojnásobek* prvního nákupu a *trojnásobek* druhého nákupu. Protože $46 \cdot 2 = 92$ a $49 \cdot 3 = 147$, platí:

- Šest čokolád a čtyři balíčky oříšků stojí 92 Kč.
- Šest čokolád a devět balíčků oříšků stojí 147 Kč.

Proč je druhý nákup dražší? Koupíme při něm o 5 balíčků oříšků více a zaplatíme o $(147 - 92)$ Kč, tedy o 55 Kč více. Tak zjistíme, že 1 balíček oříšků stojí $(55 : 5)$ Kč, tj. 11 Kč. (Dopočítat cenu jedné čokolády je již nyní snadné.)

Pokusme se předchozí úvahu zapsat „jazykem rovnic“:
Výchozí soustavu

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49$$

jsme nejprve upravili. První rovnici jsme vynásobili dvěma a druhou rovnici třemi:

$$6x + 4y = 92$$
$$6x + 9y = 147$$

Další postup spočíval v tom, že jsme od druhé rovnice „odečetli“ rovnici první, abychom se „na chvíli zbavili“ neznámé x:

$$\begin{aligned} (6x + 9y) - (6x + 4y) &= 147 - 92 \\ 5y &= 55 \\ y &= 11 \end{aligned}$$

„Dopočítejme“ ještě neznámou x. Protože ji nemáme vyjádřenu výrazem s neznámou y, využijeme jednu z rovnic původní soustavy:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 49 \\ 2x + 3 \cdot 11 &= 49 \\ 2x &= 49 - 33 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Znovu jsme zjistili, že naše soustava má jediné řešení: $x = 8$, $y = 11$.

Zamysleme se nad tím, co bylo nejdůležitějším krokem v předchozím postupu. Byla to úprava, se kterou jsme se dosud nesetkali. Ze dvou rovnic

$$6x + 4y = 92,$$
$$6x + 9y = 147,$$

které neznámé x, y musí splňovat, jsme odčítáním levých a pravých stran „vytvořili" další rovnici

$$(6x + 9y) - (6x + 4y) = 147 - 92,$$

kterou musí neznámé x, y splňovat také. Tato rovnice má tu výhodu, že z ní po zjednodušení neznámá x „zmizí". To by se nestalo, kdybychom odčítali původní (neupravené) rovnice

$$3x + 2y = 46,$$
$$2x + 3y = 49.$$

Proto jsme každou z nich před odečtením vynásobili vhodným číslem (první číslem 2, druhou číslem 3).

Jistě uhodnete, že kdybychom uvedeným postupem chtěli vyloučit neznámou y, odečetli bychom následující „násobky" původních rovnic:

$$3 \cdot (3x + 2y) = 3 \cdot 46$$
$$2 \cdot (2x + 3y) = 2 \cdot 49$$

Vysvětlili jsme podstatu *sčítací metody*. I když jsme rovnice vlastně *odčítali*, mohli jsme při vyloučení neznámé x *sečíst* rovnice

$$-6x - 4y = -92,$$
$$6x + 9y = 147.$$

(První rovnice vznikla z původní vynásobením číslem -3.)

Záleží jen na vás, budete-li při sčítací metodě rovnice sčítat nebo odčítat.

Přednosti sčítací metody oceníte při řešení následujících příkladů, které uvádíme bez zkoušek.

Příklad 3. Řešte soustavu rovnic:

$$4x + 2y = 6$$
$$3x - 2y = 8$$

Řešení. Dobře je vidět, že se vyplatí obě rovnice sečíst, neboť tak „zmizí" neznámá y:

$$4x + 3x = 6 + 8$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

Zbývá „dopočítat“ neznámou y. Použijeme k tomu například první rovnici:

$$2y = 6 - 4x = 6 - 4 \cdot 2 = -2, \qquad y = -1$$

Soustava má tedy jediné řešení: $x = 2$, $y = -1$

Příklad 4. Řešte soustavu rovnic s neznámými p, q:

$$\begin{aligned} 4p - 3q &= 13 \\ 2p + q &= -1 \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve vynásobíme druhou rovnici číslem -2 a pak obě rovnice sečteme:

$$\begin{aligned} 4p - 3q &= 13 \\ 2p + q &= -1 \qquad / \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4p - 3q &= 13 \\ -4p - 2q &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5q &= 15 \\ q &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p &= -1 - q = -1 - (-3) = 2 \\ p &= 1 \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení: $p = 1$, $q = -3$

Příklad 5. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= \tfrac{13}{6} \\ 3x - 2y &= \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

Řešení. Při řešení této soustavy je výhodné uplatnit sčítací metodu dvakrát, neboť po sečtení rovnic „zmizí“ neznámá y, po odečtení neznámá x:

$$6x = \tfrac{13}{6} + \tfrac{5}{6} = \tfrac{18}{6} = 3, \qquad \text{tedy} \qquad x = \tfrac{1}{2}$$

$$4y = \tfrac{13}{6} - \tfrac{5}{6} = \tfrac{8}{6} = \tfrac{4}{3}, \qquad \text{tedy} \qquad y = \tfrac{1}{3}$$

Soustava má jediné řešení: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$

Příklad 6. Řešte soustavu rovnic s neznámými v a w:

$$\frac{v}{2} + 25 = -7w$$
$$2w - \frac{v}{6} = -9$$

Řešení jsme převzali z Karolínina sešitu:

$$\frac{v}{2} + 25 = -7w$$
$$2w - \frac{v}{6} = -9$$

$$\frac{v}{2} + 7w = -25 \quad /\cdot 2$$
$$-\frac{v}{6} + 2w = -9 \quad /\cdot 6$$

$$v + 14w = -50$$
$$-v + 12w = -54$$

$$26w = -104 \quad /:26$$
$$\underline{\underline{w = -4}}$$

$$v = -50 - 14w = -50 - 14\cdot(-4) = -50 + 56 = 6$$
$$\underline{\underline{v = 6}}$$

$$\text{Zk}:\ \left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{v}{2} + 25 = \frac{6}{2} + 25 = 3 + 25 = 28 \\ P_1 &= -7w = -7\cdot(-4) = 28 \end{aligned}\right\} L_1 = P_1$$
$$\left.\begin{aligned} L_2 &= 2w - \frac{v}{6} = 2\cdot(-4) - \frac{6}{6} = -8 - 1 = -9 \\ P_2 &= -9 \end{aligned}\right\} L_2 = P_2$$

Při řešení soustavy rovnic *sčítací* metodou postupujeme tak, že nejprve (je-li to nutné) každou z rovnic vynásobíme vhodným číslem a pak takto upravené rovnice sečteme nebo odečteme.

9. Řešte soustavu rovnic s neznámými a, b sčítací metodou:

a) $a + b = -3$
$a - b = 15$

b) $a - b = -3$
$-a - b = -15$

c) $-a + b = 15$
$-a - b = -3$

10. Řešte soustavu rovnic sčítací metodou:

a) $\begin{aligned} 2x - 7y &= -29 \\ -2x + 9y &= 39 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 10x + 3y &= 48 \\ 8x - 3y &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x - 4y &= -38 \\ 6x + 7y &= 17 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x - 11y &= 54 \\ 2x - 11y &= 60 \end{aligned}$

11. Řešte soustavu rovnic sčítací metodou:

a) $\begin{aligned} 27x + 4y &= -58 \\ 3x - 5y &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 8x - 3y &= -3 \\ 3x + 9y &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x + 11y &= -21 \\ 8x - 13y &= 55 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 11x - 12y &= 81 \\ -6x - 16y &= 46 \end{aligned}$

12. Řešte soustavu rovnic s neznámými c, d sčítací metodou:

a) $\begin{aligned} 5c - 6d &= -50 \\ 5c + 6d &= 70 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 7c + 4d &= -101 \\ -7c + 4d &= -59 \end{aligned}$

13. Řešte soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned} &3 \cdot (x - y) - 4 \cdot (x + y) = -19 \\ &(x + 6)^2 = (x - 3) \cdot (x + 1) - (x - 3y) \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} &\frac{1 - x}{3} - \frac{y + 24}{18} = 0 \\ &\frac{x - 2}{10} + 2y + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} &3 \cdot \left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{5y - 2}{3} = \frac{2x + 5y}{2} \\ &-\frac{y - x}{5} + \left(2y - \frac{4x}{5}\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{5} + x \end{aligned}$

Co je soustava *lineárních* rovnic a kolik má řešení?

?

Při řešení soustav rovnic jsme se prozatím setkali jen s takovými rovnicemi, které bylo možno upravit na tvar

$$ax + by = c,$$

kde x, y byly neznámé a a, b, c konkrétní čísla. Každou takovou rovnici, ve které je aspoň jedno z čísel a, b různé od nuly, nazýváme **lineární rovnicí** se dvěma neznámými x a y.

Každá soustava lineárních rovnic, kterou jsme dosud řešili, měla právě jedno řešení. Je tomu tak vždy? Zápornou odpověď na tuto otázku nám dávají následující příklady.

Příklad 7. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6x - 9y &= 10 \\ 4x - 6y &= 9 \end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu budeme řešit dosazovací metodou. Z první rovnice vyjádříme neznámou x, tedy

$$x = \frac{10 + 9y}{6},$$

a dosadíme do druhé rovnice soustavy:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{10 + 9y}{6} - 6y &= 9 \\ 4 \cdot (10 + 9y) - 36y &= 54 \\ 40 + 36y - 36y &= 54 \\ 40 &= 54 \end{aligned}$$

Dostali jsme *neplatnou* rovnost. Zjistili jsme, že daná soustava *nemá žádné řešení*. Prokážeme to ještě jinak.

Vynásobíme první rovnici číslem 2 a druhou rovnici číslem 3:

$$\begin{aligned} 6x - 9y &= 10 \qquad / \cdot 2 \\ 4x - 6y &= 9 \qquad\ / \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x - 18y &= 20 \\ 12x - 18y &= 27 \end{aligned}$$

Nyní je znovu vidět, proč daná soustava nemá řešení. Nelze totiž najít žádná dvě čísla x a y tak, aby výraz $12x - 18y$ byl roven jak 20, tak 27.

Říkáme, že rovnice soustavy

$$\begin{aligned} 6x - 9y &= 10, \\ 4x - 6y &= 9 \end{aligned}$$

si odporují

Příklad 8. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ x - \tfrac{3}{2}y &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. Z druhé rovnice vyjádříme neznámou x, tedy

$$x = 2 + \tfrac{3}{2}y,$$

a dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(2 + \tfrac{3}{2}y\right) - 3y &= 4 \\ 4 + 3y - 3y &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Dostali jsme *platnou* rovnost. Znamená to, že daná soustava rovnic má *nekonečně mnoho* řešení.

Ještě lépe si to uvědomíme, když druhou rovnici soustavy vynásobíme číslem 2. Dostaneme rovnici

$$2x - 3y = 4,$$

která je shodná s první rovnicí soustavy. Říkáme, že obě rovnice soustavy

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4, \\ x - \tfrac{3}{2}y &= 2 \end{aligned}$$

vypovídají totéž.

Řešením dané soustavy je každá dvojice x a y, pro kterou je výraz $2x - 3y$ roven 4. I když je takových dvojic nekonečně mnoho, jsou mezi všemi dvojicemi reálných čísel x, y spíše „výjimečné“, neboť hodnoty x a y z téhož řešení jsou navzájem „závislé“. Jak ty „správné“ dvojice x, y zapsat? Jedna z neznámých (například x) může mít libovolnou hodnotu. Označíme ji písmenem t. Hodnotu y pak vyjádříme pomocí t z rovnice $2t - 3y = 4$. Vyjde nám $y = \dfrac{2t - 4}{3}$. Výsledek pak zapisujeme takto:

$$x = t, \quad y = \frac{2t - 4}{3}, \quad \text{kde} \quad t \in \mathsf{R}$$

Jaká je úloha písmena t v takovém zápise? Na rozdíl od písmen x a y, jež označují *neznámé*, označuje písmeno t *proměnnou*, která může nabývat libovolných reálných hodnot. Budeme-li za t dosazovat různá reálná čísla, vyjdou nám různé dvojice x, y. Každá z nich je řešením dané soustavy.

Protože pro volbu proměnné t máme nekonečně mnoho možností, má daná soustava nekonečně mnoho řešení. Pět z nich (pro $t \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$) je uvedeno v následující tabulce:

t	x	y
-1	-1	-2
0	0	$-\frac{4}{3}$
1	1	$-\frac{2}{3}$
2	2	0
3	3	$\frac{2}{3}$

Kdybychom vyšli z toho, že hodnota neznámé y může být libovolná a její hodnotu označili písmenem t, dostali bychom výsledek ve tvaru

$$x = \frac{3t + 4}{2}, \quad y = t, \quad \text{kde} \quad t \in \mathsf{R}.$$

Ukázali jsme, že nekonečnou množinu řešení soustavy rovnic lze pomocí výrazů s proměnnou zapsat více způsoby.

Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými
- nemá žádné řešení, pokud si rovnice odporují,
- má nekonečně mnoho řešení, pokud rovnice vypovídají totéž,
- má jediné řešení v ostatních případech.

□ **14.** Určete, kolik řešení má soustava rovnic:

a) $x + y = 7$
$4x + 4y = 28$

b) $x - y = 4$
$5x - 4y = 20$

c) $3(x + y) = 33$
$x + y = 11$

d) $6x + 5y = 15$
$2x + \frac{5}{3}y = 3$

e) $-x + 4 = 7y$
$40 - 10x = 70y$

f) $5(3 - x) = 5y$
$3 - x = y$

15. Přesvědčte se, že daná soustava rovnic nemá řešení:

a) $3(x + 2) = 14 - 3y$
$3(y - 1) = 1 - 3x$

b) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 1$
$\frac{1}{6}x - \frac{1}{5}y = 1 - \frac{1}{15}y$

16. Všechna řešení dané soustavy rovnic zapište pomocí výrazů s proměnnou:

a) $3x + y = 2$
$3(2x + 1) + 2y = 7$

b) $x + 2y = 1$
$1 - 5x = 2(5y - 2)$

c) $3(x + y) = 7(y + 1)$
$3(x - 7) = 2(2y - 7)$

d) $2y + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}y + 2$
$\frac{1}{5}y + x = 4 + \frac{6}{5}y$

Jaké další soustavy rovnic dokážeme řešit?

?

V této kapitole jsme se naučili postupy, které používáme při řešení soustav rovnic. Zatím jsme je uplatnili pouze při řešení soustav dvou rovnic se dvěma neznámými, přitom každá rovnice byla (po případné úpravě) lineární. Nyní se přesvědčíme, že tyto dovednosti můžeme využít i při řešení složitějších soustav.

Příklad 9. Řešte soustavu rovnic:

$$(x + 1) \cdot (y + 3) = (x - 1) \cdot (y + 8)$$
$$(x + 6) \cdot (y + 2) = (x + 3) \cdot (y + 4)$$

Řešení. V každé rovnici obě strany roznásobíme. Po jednoduchých úpravách zjistíme, že „smíšené“ členy xy v každé z obou rovnic „zmizí“:

$$(x + 1) \cdot (y + 3) = (x - 1) \cdot (y + 8)$$
$$(x + 6) \cdot (y + 2) = (x + 3) \cdot (y + 4)$$

$$xy + 3x + y + 3 = xy + 8x - y - 8$$
$$xy + 2x + 6y + 12 = xy + 4x + 3y + 12$$

$$-5x + 2y = -11$$
$$-2x + 3y = 0$$

Obě rovnice upravené soustavy jsou lineární. Z druhé vyjádříme

$$x = \frac{3y}{2}$$

a dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned} -5\cdot\frac{3y}{2}+2y &= -11 \qquad /\cdot 2\\ -15y+4y &= -22\\ -11y &= -22\\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vypočítáme ještě neznámou x:

$$x=\frac{3y}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3$$

Soustava má jediné řešení: $x=3,\ y=2$. Zkoušku proveďte sami. Nezapomeňte, že při ní dosazujeme do původní (neupravené) soustavy.

Příklad 10. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+2}+\frac{1}{y-3} &= \frac{4}{3}\\ \frac{1}{x+2}-\frac{3}{y-3} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Řešení. Jistě bychom mohli nejprve z obou rovnic odstranit zlomky. Tak bychom ale dostali soustavu „složitých" rovnic. Místo toho si pozorněji všimneme tvaru obou původních rovnic. Zjistíme, že obě rovnice jsou lineární pro neznámé $\frac{1}{x+2}$ a $\frac{1}{y-3}$. Proto označíme

$$u=\frac{1}{x+2},\qquad v=\frac{1}{y-3}$$

a přejdeme k soustavě

$$\begin{aligned} 2u+v &= \tfrac{4}{3},\\ u-3v &= -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu snadno vyřešíme např. sčítací metodou. Zjistíme, že má jediné řešení $u=\frac{1}{2}$ a $v=\frac{1}{3}$. Nyní určíme hodnoty původních neznámých. Z rovnic

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\qquad\text{a}\qquad\frac{1}{y-3}=\frac{1}{3}$$

snadno plyne, že $x=0$ a $y=6$.

Závěr: Soustava má jediné řešení $x=0,\ y=6$.

Proveďme ještě zkoušku:

$$L_1 = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{y-3} = \frac{2}{0+2} + \frac{1}{6-3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = P_1$$
$$L_2 = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{y-3} = \frac{1}{0+2} - \frac{3}{6-3} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = P_2$$

17. Řešte soustavu rovnic:

a) $2x - 3y = 5$
$x \cdot (y-2) = (x+2) \cdot y$

b) $x \cdot (y-1) = (x-2) \cdot (y+1)$
$(x+2) \cdot y = (x-4) \cdot (y-3)$

c) $(x+2) \cdot (y-2) = (x-2) \cdot (y+2)$
$(x-1) \cdot (y+4) = (x+3) \cdot (y-2)$

d) $(2x+3) \cdot (y-1) = (x-3) \cdot (2y-8)$
$(3x-1) \cdot (2y-7) = (2x+1) \cdot (3y-8)$

18. Řešte soustavu rovnic:

a) $\frac{2}{x} - \frac{6}{y} = -1$
$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 7$

b) $\frac{2}{3x+1} - \frac{1}{y+3} = 1$
$\frac{8}{3x+1} - \frac{2}{y+3} = 1$

c) $\frac{3}{x-4} + y = 5$
$\frac{5}{x-4} - 2y = 1$

d) $\frac{2}{x+3} - \frac{3y}{8} = 1$
$\frac{4}{x+3} + \frac{y}{4} = 1$

Příklad 11. Řešte soustavu rovnic:

$$x + y - xy = 7$$
$$2x - y = 9$$

Řešení. Všimneme si, že druhá rovnice soustavy je lineární. Vyjádříme z ní například neznámou y,

$$y = 2x - 9,$$

a dosadíme do první rovnice soustavy:

$$
\begin{aligned}
x + (2x - 9) - x \cdot (2x - 9) &= 7 \\
x + 2x - 9 - 2x^2 + 9x - 7 &= 0 \\
-2x^2 + 12x - 16 &= 0 \\
x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
(x - 2) \cdot (x - 4) &= 0 \\
x_1 = 2, \qquad x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

K nalezeným hodnotám neznámé x vypočteme z vyjádření $y = 2x - 9$ odpovídající hodnoty neznámé y:

$$y_1 = -5, \qquad y_2 = -1$$

Daná soustava má dvě řešení: $x_1 = 2,\ y_1 = -5$ a $x_2 = 4,\ y_2 = -1$. (Zkoušku proveďte sami.)

Příklad 12. Řešte soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 2xy &= 20 \\
2x + y + 3xy &= 31
\end{aligned}
$$

Řešení. Žádná z rovnic soustavy není lineární, proto nelze postupovat tak snadno jako v předchozím příkladu. Pokusíme se sčítací metodou získat rovnici bez „smíšeného“ členu xy. Od dvojnásobku druhé rovnice odečteme trojnásobek první rovnice:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (2x + y + 3xy) - 3 \cdot (x + 2y + 2xy) &= 2 \cdot 31 - 3 \cdot 20 \\
4x + 2y + 6xy - 3x - 6y - 6xy &= 62 - 60 \\
x - 4y &= 2
\end{aligned}
$$

Odtud vychází $x = 4y + 2$. Toto vyjádření dosadíme do kterékoliv z původních rovnic, například do rovnice první, a upravíme:

$$
\begin{aligned}
(4y + 2) + 2y + 2 \cdot (4y + 2) \cdot y &= 20 \\
4y + 2 + 2y + 8y^2 + 4y - 20 &= 0 \\
8y^2 + 10y - 18 &= 0 \\
4y^2 + 5y - 9 &= 0
\end{aligned}
$$

Diskriminant získané kvadratické rovnice je roven

$$5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9) = 25 + 144 = 169,$$

proto pro její kořeny $y_{1,2}$ platí

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{8},$$

tedy $y_1 = 1$ a $y_2 = -\frac{9}{4}$. Z rovnice $x = 4y + 2$ „dopočítáme“ příslušná x:

$$x_1 = 6, \qquad x_2 = -7$$

Sami se přesvědčte, že dvojice $x_1 = 6$, $y_1 = 1$ a $x_2 = -7$, $y_2 = -\frac{9}{4}$ jsou skutečně dvě řešení původní soustavy. Jiná řešení soustava nemá.

19. Řešte soustavu rovnic:

a) $(x+1)\cdot(y+4) = 0$
$2x - y = 6$

b) $(x-2)\cdot(y+1) = -3$
$x + 3y = -1$

c) $xy - x + 2y = 10$
$3x - y = 3$

d) $x^2 - y^2 = 15$
$x - 2y = 2$

20. Řešte soustavu rovnic s neznámými u, v:

a) $3u - 2v + uv = 6$
$-u + 3v - uv = 0$

b) $2u - 3v + uv = 4$
$u - 4v - 2uv = 7$

V závěru kapitoly ještě ukážeme, jak můžeme postupy, které jsme poznali při řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, použít pro soustavy *tří lineárních rovnic se třemi neznámými*, například pro soustavu

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 19, \\ 2x + y - z &= 0, \\ x + 4y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

s neznámými x, y a z. Vyřešíme ji *dosazovací* i *sčítací* metodou.

1. způsob (dosazovací metoda)
Ze třetí rovnice vypočteme $x = 7 - 4y - 3z$ a dosadíme do první a druhé rovnice soustavy:

$$\begin{aligned} 3\cdot(7 - 4y - 3z) + 2y + 5z &= 19 \\ 2\cdot(7 - 4y - 3z) + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Po úpravách dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 5y + 2z &= 1, \\ y + z &= 2, \end{aligned}$$

která má řešení $y = -1$, $z = 3$. Nakonec „dopočteme“ $x = 7 - 4y - 3z = 2$.

2. způsob (sčítací metoda)

„Vyloučíme" neznámou y, nejprve z první a druhé rovnice,

$$(3x + 2y + 5z) - 2 \cdot (2x + y - z) = 19 - 2 \cdot 0, \quad \text{tedy} \quad -x + 7z = 19,$$

a pak z druhé a třetí rovnice,

$$(x + 4y + 3z) - 4 \cdot (2x + y - z) = 7 - 4 \cdot 0, \quad \text{tedy} \quad -x + z = 1.$$

Soustava rovnic

$$\begin{aligned} -x + 7z &= 19, \\ -x + z &= 1 \end{aligned}$$

má řešení $x = 2$, $z = 3$. Z libovolné rovnice původní soustavy nakonec „dopočteme" $y = -1$.

Sami vyřešte oběma vyloženými metodami soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - 4y - z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 15 \\ x + 5y + z &= 16 \end{aligned}$$

Budete-li postupovat a počítat správně, vyjde vám $x = 5$, $y = 2$, $z = 1$.

CVIČENÍ 7

1. Rozhodněte, zda dvojice čísel $a = 2$, $b = 5$ je řešením soustavy rovnic:

a) $3a - 4b = -14$, $a + 7b = 37$ b) $3a + 4b = 26$, $2a - 6b = -26$ c) $5a - 2b = 0$, $-8a + 3b = 1$

2. Z dané rovnice vyjádřete neznámou x pomocí neznámé y:

a) $3x + 7y = 12$ b) $5x - 10y = 20$

c) $-x + 16y = 0$ d) $-9x - 3y = 51$

3. Z dané rovnice vyjádřete neznámou q pomocí neznámé p:

a) $p - 3q - 1 = 0$ b) $2(q - p) = 7$

c) $(p - 4) \cdot 3 = 5(q + 4)$ d) $6p = 9(3q - 2)$

4. Řešte srovnávací metodou soustavu rovnic:

a) $10x + y = 76$, $11x - y = 71$ b) $x + 5y = 25$, $2x - 7y = -18$

c) $5x - 9y + 9 = 9(y - 1) - x$, $4(x - 3y) - y = 2(3y - 14) + y$

d) $1 - \dfrac{5x - y}{3} = \dfrac{8y + 11x}{6}$, $\dfrac{2y + 3}{5} - \dfrac{5y - 3x}{10} = \dfrac{1}{2}$

5. Řešte dosazovací metodou soustavu rovnic:

a) $3x + 4y = -18$
$x - 5y = 13$

b) $9x - y = -28$
$4x + 5y = -7$

c) $3(6y - x) = 9x - 6(5y + 12)$
$2(3x + y) - 11 = 7 - 8(x + y)$

d) $\dfrac{y}{3} = 1 - \dfrac{2x}{3}$
$\dfrac{x + y}{2} - \dfrac{2y - x}{8} = x - \dfrac{1}{8}$

6. Řešte dosazovací metodou soustavu rovnic s neznámými a, b:

a) $15a - 7b = 61$
$-9a + 14b = -17$

b) $-15a - 7b = -61$
$-4a - 7b = -6$

c) $-15a + 7b = -89$
$-5a - 13b = 1$

d) $15a + 7b = -61$
$10a + 9b = -32$

7. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{2x - y}{2} = 1 - \dfrac{10x + y}{4}$
$\dfrac{y - 3x}{5} - 1 = \dfrac{y - 6x}{10}$

b) $\dfrac{1}{2} - 3 \cdot \left(x + \dfrac{y}{10}\right) = -\dfrac{2x + y}{4}$
$2 \cdot \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5}\right) - \dfrac{7x}{20} = 3 + \dfrac{y}{10}$

□ **8.** Určete počet řešení soustavy rovnic:

a) $2x - y = 7$
$2x - 7 = y$

b) $3x - 4y = 5$
$3x + 5 = 4y$

c) $35x - 10y = 15$
$7x - 2y = 3$

d) $6(2x - y) = 1$
$4x - y = \frac{1}{6}$

9. Zapište všechna řešení soustavy rovnic:

a) $3x + y = 4y - 15$
$2 - y = 2(x + 6) - 3y$

b) $\dfrac{x - 1}{6} = \dfrac{2y - x}{3}$
$\frac{1}{10}(6x - y) - \frac{1}{2}y = \frac{1}{5}(y + 1)$

10. Řešte soustavu rovnic s neznámými a, b:

a) $3a + b = 7$
$5a - 3b = -7$

b) $3a + b = 7$
$4a + b = 7$

c) $3a + b = 7$
$\dfrac{a}{7} + \dfrac{b}{21} = \dfrac{1}{3}$

d) $3a + b = 7$
$\dfrac{2a}{7} + \dfrac{b}{21} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{b}{21}$

11. Přesvědčte se, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{6}x - \tfrac{1}{3}y &= \tfrac{4}{3} + x, \\ x - \tfrac{4}{5}(y+4) &= \tfrac{3}{5}x \end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení, a určete

a) hodnotu x, je-li $y = -3$, b) hodnotu y, je-li $x = 16$.

12. Řešte soustavu rovnic s neznámými r, s:

a) $3(r-2) = r(s+3) - s(r+3)$
$r(s-4) = s(r-14)$

b) $(r+2)\cdot(s+1) = (r+5)\cdot(s-1)$
$(r+3)\cdot(s+1) = (r+1)\cdot(s+5)$

c) $(r-3)\cdot(s+1) = (r-5)\cdot(s+6)$
$(r-2)\cdot(s+2) = (r+3)\cdot(s-1)$

13. Řešte soustavu rovnic:

a) $\dfrac{4x+2y}{3} = 6$, $\dfrac{3x+4}{y} = 2$ b) $\dfrac{x+1}{2y} = -1$, $\dfrac{3-2y}{x+2} = \dfrac{7}{5}$

14. Řešte soustavu rovnic:

a) $\dfrac{12}{x+2} = \dfrac{16}{y-2}$, $\dfrac{5}{1+x} = \dfrac{7}{y-3}$ b) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{3}{5-y} = 0$, $\dfrac{1}{5-2x} - \dfrac{1}{y-1} = 0$

$*$**15.** Řešte soustavu rovnic s neznámými p, q:

a) $\dfrac{6}{p+2} - 2q = -8$, $\dfrac{9}{p+2} + 5q = 28$ b) $\dfrac{3}{p+4} + \dfrac{q}{7} = 2$, $\dfrac{6}{p+4} - \dfrac{3q}{7} = -1$

c) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{3}{q} = \dfrac{11}{12}$, $\dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{12}$ d) $\dfrac{5}{3p-2} + \dfrac{3}{q+1} = 2$, $\dfrac{10}{3p-2} - \dfrac{2}{q+1} = 0$

16. Řešte soustavu rovnic:

a) $x^2 - y^2 = 5$
$x - 2y = -1$

b) $3y - 4x = -3$
$y^2 - 2x^2 = 7$

c) $x + y = 12$
$(x+1) \cdot (y-8) = 6$

d) $x^2 - 2xy + y^2 = 9$
$3x - y = 1$

17. Řešte soustavu rovnic s neznámými a, b a proveďte zkoušku:

$$2a - b + 4ab = 25$$
$$3a + b - 3ab = -9$$

8 SLOVNÍ ÚLOHY 2

V minulé kapitole jsme se seznámili se základními postupy, které používáme při řešení soustav rovnic. Nyní ukážeme, jak jsou soustavy rovnic užitečné při řešení složitějších slovních úloh, v nichž vystupuje více neznámých údajů.

Pomocí rovnic s více neznámými můžeme „zvládnout“ i mnohé slovní úlohy, které jsme dříve řešili rovnicemi s jednou neznámou; k sestavení těchto rovnic však bylo zapotřebí více úsudku. Jednou takovou úlohou náš výklad začneme.

Příklad 1. Jsou dána dvě kladná čísla. První číslo je o 176 větší než dvojnásobek druhého. Podíl většího a menšího čísla je 13. Určete tato čísla.

Řešení. Větší číslo označíme x, menší číslo y. Podmínky ze zadání vyjádříme dvěma rovnicemi:

$$x = 2y + 176$$
$$\frac{x}{y} = 13$$

Tuto soustavu upravíme a vyřešíme:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 176 \\ x &= 13y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13y - 2y &= 176 \\ 11y &= 176 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

$$x = 13 \cdot y = 13 \cdot 16 = 208$$

Hledaná čísla jsou 208 a 16.

Dříve jsme tuto úlohu mohli řešit například takto:
Označme menší číslo y. Podle zadání je větší číslo 13násobkem menšího čísla, je tedy rovno $13y$. Toto číslo je o 176 větší než $2y$. Proto platí:

$$13y = 2y + 176, \quad \text{neboli} \quad 13y - 2y = 176$$

Pro neznámou y jsme tak dostali stejnou rovnici, jako když jsme soustavu rovnic dříve řešili dosazovací metodou.

Příklad 2. Pět kilogramů jablek a tři kilogramy banánů stojí 146 Kč, dva kilogramy jablek a pět kilogramů banánů stojí 142 Kč. Kolik stojí 1 kg jablek a kolik 1 kg banánů?

Řešení. Předpokládejme, že 1 kg jablek stojí x Kč a 1 kg banánů y Kč. Podle zadání platí:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 146 \\ 2x + 5y &= 142 \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme sčítací metodou:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (5x + 3y) - 5 \cdot (2x + 5y) &= 2 \cdot 146 - 5 \cdot 142 \\ -19y &= -418 \\ y &= 22 \end{aligned}$$

$$x = \frac{142 - 5y}{2} = \frac{142 - 110}{2} = 16$$

1 kg jablek stojí 16 Kč, 1 kg banánů stojí 22 Kč.

Zkouška: $5 \cdot 16 + 3 \cdot 22 = 146, \ 2 \cdot 16 + 5 \cdot 22 = 142$

Příklad 3. Dvojciferné číslo je sedminásobkem svého ciferného součtu. Zaměníme-li pořadí jeho číslic, dostaneme číslo o 27 menší. Určete původní číslo.

Řešení. Předpokládejme, že původní číslo je složeno z x desítek a y jednotek. Je to tedy číslo $10x + y$ a jeho ciferný součet se rovná $x + y$. Při záměně pořadí číslic dostaneme číslo $10y + x$. Podle zadání platí:

$$\begin{aligned} 10x + y &= 7 \cdot (x + y) \\ 10y + x &= (10x + y) - 27 \end{aligned}$$

Získanou soustavu vyřešíme:

$$\begin{array}{rcll} 3x - 6y &=& 0 & / : 3 \\ 9x - 9y &=& 27 & / : 9 \\ \hline x - 2y &=& 0 & \\ x - y &=& 3 & \end{array}$$

Soustava má jediné řešení $x = 6$, $y = 3$, takže $10x + y = 63$.

Hledané číslo je 63.

Zkouška: $63 = 7 \cdot (6 + 3)$, $36 = 63 - 27$

Příklad 4. Když délku obdélníku o 1 cm zvětšíme a jeho šířku o 2 cm zmenšíme, zmenší se obsah obdélníku o $16\,\text{cm}^2$. Když však délku zmenšíme o 2 cm a šířku zvětšíme o 1 cm, zmenší se obsah obdélníku o $4\,\text{cm}^2$. Jaké jsou rozměry původního obdélníku?

Řešení. Nechť původní obdélník má délku a cm a šířku b cm. Z daných údajů sestavíme soustavu rovnic:

$$(a + 1) \cdot (b - 2) = ab - 16$$
$$(a - 2) \cdot (b + 1) = ab - 4$$

Soustavu zjednodušíme a vyřešíme sčítací metodou:

$$\begin{array}{rcl} ab - 2a + b - 2 &=& ab - 16 \\ ab + a - 2b - 2 &=& ab - 4 \\ \hline -2a + b &=& -14 \\ a - 2b &=& -2 \\ \hline 2 \cdot (-2a + b) + (a - 2b) &=& 2 \cdot (-14) - 2 \\ -3a &=& -30 \\ a &=& 10 \\ \hline b = -14 + 2a &=& -14 + 20 = 6 \end{array}$$

Zjistili jsme, že původní obdélník má délku 10 cm a šířku 6 cm.

Provedeme ještě zkoušku. Obsah původního obdélníku je $60\,\text{cm}^2$. Po první „proměně“ vznikne obdélník s rozměry 11 cm a 4 cm a obsahem $44\,\text{cm}^2$. Po druhé „proměně“ vznikne obdélník s rozměry 8 cm a 7 cm a obsahem $56\,\text{cm}^2$.

1. V dílně potřebovali uskladnit 200 l barvy do kanystrů. K dispozici měli pětilitrové a sedmilitrové kanystry. Kolik kterých použili, když barvou naplnili právě 30 kanystrů?
2. Jana koupila 3 role balicího papíru a 8 metrů stuhy. Petra koupila 5 rolí téhož papíru a 12 metrů stejné stuhy. Kolik stála jedna role papíru a kolik jeden metr stuhy, jestliže Jana zaplatila 73,60 Kč a Petra 118,40 Kč?
3. Sečteme-li třetinu prvního čísla a čtvrtinu druhého čísla, dostaneme 50. Odečteme-li od poloviny prvního čísla osminu druhého, vyjde 37. Určete obě čísla.
4. Dvojciferné číslo vznikne z jiného čísla záměnou pořadí jeho číslic. Součet obou čísel je 121, jejich rozdíl je 27. Která jsou to čísla?
5. Je dán součin dvou čísel. Zvětšíme-li prvního činitele o 2 a druhého činitele o 2 zmenšíme, zvětší se součin o 4. O kolik se součin změní, když prvního činitele o 3 zmenšíme a druhého činitele o 3 zvětšíme?

Ve zbývající části kapitoly se vrátíme k úlohám o pohybu, společné práci a směsích. Tentokrát je budeme řešit pomocí rovnic s více neznámými.

Příklad 5. Součástí světelné reklamy na střeše domu je kružnice dlouhá 8 metrů, po které se pohybují stálými rychlostmi dva svítící body. Když se oba body pohybují v opačných směrech, setkají se každé 2 sekundy. Když se body pohybují ve stejném směru, dohoní rychlejší bod pomalejší bod každé 4 sekundy. Určete rychlosti obou bodů.

Řešení. Rychlost rychlejšího bodu (v $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) označíme x, rychlost pomalejšího bodu (v $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) označíme y.

Pohybují-li se oba body opačnými směry, pak součet délek úseků, které urazí za 2 s, je roven délce celé kružnice:

$$2x + 2y = 8$$

Pohybují-li se oba body stejným směrem, pak dráha, kterou za 4 s urazí rychlejší bod, je o délku kružnice, tj. o 8 m, delší než dráha, kterou urazí bod pomalejší:

$$4x = 4y + 8$$

Vyřešíme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rl} 2x + 2y = 8 & / : 2 \\ 4x - 4y = 8 & / : 4 \\ \hline x + y = 4 & \\ x - y = 2 & \\ \hline 2x = 6 & \\ x = 3 & \\ \hline y = 4 - x = 4 - 3 = 1 & \end{array}$$

Zkoušku proveďte sami.
Rychlejší bod se pohybuje rychlostí $3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, pomalejší bod rychlostí $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Příklad 6. Osobní auto projelo dálniční úsek stálou rychlostí. Při rychlosti o $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ větší by mu jízda trvala o 12 minut méně, při rychlosti o $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nižší o 18 minut více. Vypočtěte délku dálničního úseku.

Řešení jsme převzali z Jakubova sešitu.

$12\ \text{min} = \frac{12}{60}\ \text{h} = \frac{1}{5}\ \text{h}$ $\qquad$ $18\ \text{min} = \frac{18}{60}\ \text{h} = \frac{3}{10}\ \text{h}$

rychlost v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$: $\qquad$ čas v h: $\qquad$ dráha v km:

původní .... v .... t .... $v \cdot t$
rychlejší .... $v+20$ .... $t-\frac{1}{5}$ .... $(v+20)(t-\frac{1}{5})$
pomalejší .... $v-20$ .... $t+\frac{3}{10}$ .... $(v-20)(t+\frac{3}{10})$

dráha stále stejná:

$$\begin{array}{l} vt = (v+20)(t-\frac{1}{5}) \\ vt = (v-20)(t+\frac{3}{10}) \\ \hline vt = vt - \frac{v}{5} + 20t - 4 \\ vt = vt + \frac{3v}{10} - 20t - 6 \\ \hline \frac{v}{5} - 20t = -4 \\ \frac{3v}{10} - 20t = 6 \\ \hline \frac{v}{5} - \frac{3v}{10} = -4 - 6 \\ 2v - 3v = -100 \\ \boxed{v = 100} \end{array}$$

$$100 \cdot t = (100+20)\left(t - \frac{1}{5}\right)$$
$$100t = 120t - 24$$
$$24 = 20t$$
$$\boxed{t = \frac{6}{5}}$$
$$s = v \cdot t = 100 \cdot \frac{6}{5} = \underline{\underline{120}}$$

Zk: rychlejší jízda:

$$s = (100+20)\left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}\right) = 120$$

pomalejší jízda:

$$s = (100-20)\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{10}\right) =$$
$$= 80 \cdot \frac{12+3}{10} = 8 \cdot 15 = 120$$

Dálniční úsek měří 120 km.

Příklad 7. Dvě pracovnice lesního podniku mají v oboře rozsázet mladé smrčky. Když první z nich na tomto úkolu odpracovala 2 hodiny a druhá 5 hodin, zjistily, že mají hotovou právě polovinu celé práce. Když pak společně pracovaly ještě 3 hodiny, zůstalo jim na další den jen 5 % celého úkolu. Kolik hodin by všechny smrčky rozsazovala každá pracovnice samostatně?

Řešení. Předpokládejme, že první pracovnice by sama musela pracovat x hodin, druhá y hodin. První pracovnice tedy za 1 hodinu vykoná $\frac{1}{x}$ úkolu, za 2 hodiny $\frac{2}{x}$ úkolu a za 5 hodin $\frac{5}{x}$ úkolu. Druhá pracovnice vykoná za hodinu $\frac{1}{y}$ úkolu, za 5 hodin $\frac{5}{y}$ úkolu a za 8 hodin $\frac{8}{y}$ úkolu. Podle zadání platí:

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{x} + \frac{8}{y} = 1 - \frac{5}{100}$$

Všimneme si, že obě rovnice jsou lineární pro neznámé $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{y}$ (které vyjadřují, jakou část úkolu vykoná za 1 hodinu každá pracovnice samostatně). Proto označíme $u = \frac{1}{x}$ a $v = \frac{1}{y}$ a vyřešíme soustavu:

$$2u + 5v = \tfrac{1}{2}$$
$$5u + 8v = \tfrac{19}{20}$$

$$4u + 10v = 1$$
$$100u + 160v = 19$$

$$100u + 160v - 16 \cdot (4u + 10v) = 19 - 16 \cdot 1$$
$$100u - 64u = 3$$
$$36u = 3$$
$$u = \tfrac{1}{12}$$

„Dopočítáme“ ještě neznámou v:

$$v = \frac{1-4u}{10} = \frac{1-4\cdot\frac{1}{12}}{10} = \frac{\frac{2}{3}}{10} = \frac{1}{15}$$

Protože $u = \frac{1}{x}$ a $u = \frac{1}{12}$, platí $x = 12$. Z rovností $v = \frac{1}{y}$ a $v = \frac{1}{15}$ dostáváme $y = 15$.

Zkouška:
První pracovnice vykoná za 2 hodiny $\frac{2}{12}$ celé práce, druhá za 5 hodin $\frac{5}{15}$ celé práce. Za 3 hodiny společně vykonají $\frac{3}{12} + \frac{3}{15}$ celé práce.

$$\frac{2}{12} + \frac{5}{15} + \frac{3}{12} + \frac{3}{15} = \frac{10+20+15+12}{60} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}\,.$$

Na další den jim zůstala $\frac{1}{20}$ úkolu, což je jeho 5 %.

První pracovnice by sama rozsazovala smrčky 12 hodin, zatímco druhá pracovnice 15 hodin.

Příklad 8. Kovový odlitek byl složen ze stříbra a mědi. Kdybychom ho přetavili s 3 kg čistého stříbra, dostali bychom slitinu obsahující 70 % stříbra. Místo toho jsme odlitek přetavili s 1 kg čisté mědi, a tak výsledná slitina obsahovala pouze 50 % stříbra. Určete hmotnost odlitku před přetavením.

Řešení. Předpokládejme, že původní odlitek obsahoval x kg stříbra a y kg mědi, měl tedy celkovou hmotnost $(x+y)$ kg. Kdybychom ho přetavili s 3 kg stříbra, obsahoval by $(x+3)$ kg stříbra a jeho hmotnost by byla $(x+y+3)$ kg. Pro poměr hmotností stříbra a celého odlitku by pak podle zadání platilo

$$\frac{x+3}{x+y+3} = \frac{70}{100}\,.$$

Jestliže jsme původní odlitek přetavili s 1 kg mědi, obsahoval pak x kg stříbra a jeho celková hmotnost byla $(x+y+1)$ kg. Podle zadání platí:

$$\frac{x}{x+y+1} = \frac{50}{100}$$

Získanou soustavu rovnic vyřešíme:

$$\frac{x+3}{x+y+3} = \frac{7}{10}$$
$$\frac{x}{x+y+1} = \frac{1}{2}$$

$$10x + 30 = 7x + 7y + 21$$
$$2x = x + y + 1$$

$$3x - 7y = -9$$
$$x - y = 1$$

Z poslední rovnice plyne $x = y + 1$, z předposlední pak dostáváme:

$$3 \cdot (y+1) - 7y = -9$$
$$3y + 3 - 7y = -9$$
$$-4y = -12$$
$$y = 3$$

Proto $x = y + 1 = 3 + 1 = 4$.
Původní odlitek obsahoval 4 kg stříbra a 3 kg mědi, měl tedy hmotnost 7 kg.

Provedeme ještě zkoušku:
Kdybychom takový odlitek přetavili s 3 kg čistého stříbra, obsahoval by nový odlitek 7 kg stříbra a jeho hmotnost by byla 10 kg. Proto by obsah stříbra v této slitině byl skutečně roven 70 %. Jestliže jsme takový odlitek přetavili s 1 kg mědi, obsahoval nový odlitek 4 kg stříbra a jeho celková hmotnost byla 8 kg. Obsah stříbra v takové slitině byl opravdu 50 %.

6. Bohouš putoval z místa A do místa C přes místo B. Úsek mezi A a B šel rychlostí 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, úsek mezi B a C rychlostí 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Na celé trase z A do C tak dosáhl průměrné rychlosti 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Celou zpáteční cestu mezi C a A udržoval Bohouš rychlost 7,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a tak úsek mezi C a B ušel v čase o 25 minut kratším než úsek mezi B a A. Určete délky obou úseků.

7. Z opačných konců trasy dlouhé 336 km vyjela současně dvě osobní auta. Setkala se po 2 hodinách a 24 minutách jízdy. Kdyby jedno auto vyjelo o 42 minut dříve než auto druhé, setkala by se auta právě uprostřed celé trasy. Vypočítejte rychlosti obou aut za předpokladu, že byly stálé.

8. Dva dělníci mají vykonat určitou práci. Budou-li pracovat společně, potrvá jim to 12 dnů. Vykoná-li nejdříve první dělník právě polovinu celé práce a ihned po něm druhý dělník práci dokončí, potrvá jim to 25 dnů. Za jak dlouho by celou práci vykonal každý dělník samostatně?

9. Macecha dala Popelce přebrat pytel čočky smíchané s hrachem. Hmotnosti čočky a hrachu byly v poměru 5 : 6. Maceše se zdálo čočky málo, a tak jí přidala ještě 1,1 kg. Tím se změnil poměr čočky k hrachu na takový, jako byl předtím poměr hrachu k čočce. Jaké množství čočky a hrachu měla Popelka přebrat původně?

CVIČENÍ 8

1. Otec je o 24 let starší než jeho syn. Před 6 lety byl otec třikrát tak starý jako syn. Kolik let je letos otci a kolik synovi?

2. Ve dvou místnostech bylo dohromady 85 osob. Když z první místnosti přešlo 10 osob do druhé, bylo ve druhé místnosti o tolik osob více než v první, kolik jich bylo původně v první místnosti. Kolik to bylo?

3. Vašek má dvakrát více sester než bratrů. Každá z jeho sester má tolik bratrů, kolik má sester. Kolik má Vašek sourozenců?

4. Reklamní oddělení firmy objednalo před Vánocemi za 4 600 Kč několik stolních a několik nástěnných kalendářů pro své obchodní partnery. Stolní kalendář stál 58 Kč, nástěnný 130 Kč. Když došel balík s kalendáři a účet na 5 176 Kč, zjistilo se, že objednávka byla vyřízena nesprávně – nástěnných kalendářů bylo tolik, kolik mělo být stolních, a naopak. Kolik kterých kalendářů bylo původně objednáno?

5. Součet dvojciferného čísla a čtyřnásobku jeho ciferného součtu je 122. Součet čísla zapsaného stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí, a čtyřnásobku jeho ciferného součtu je 68. Určete původní číslo.

6. Při chemickém praktiku studenti míchali dva různé roztoky kyseliny sírové. Když smíchali 3 l silnějšího a 2 l slabšího roztoku, dostali 42procentní roztok. Smícháním 2 l silnějšího a 4 l slabšího roztoku vyrobili 30procentní roztok. Určete koncentrace původních roztoků.

7. Po okruhu dlouhém 2 500 m jezdí dva motocykly. Potkávají se každou minutu, jezdí-li proti sobě, a míjejí se každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti za předpokladu, že jsou stálé a nezávislé na směru jízdy.

8. Autobus jezdí mezi místy A a B. Jestliže zvýší svoji průměrnou rychlost o $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, zkrátí se jízdní doba o 20 minut. Sníží-li svou původní rychlost o $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, prodlouží se doba jízdy o 20 minut. Jaká je průměrná rychlost autobusu? Jaká je jízdní doba autobusu? Jaká je délka jeho trasy?

**9. Z města A vyjel ráno do města B osobní vlak. Ve stejný okamžik vyjel po stejné trati z města B do města A nákladní vlak. Oba vlaky projely celou trasu stálými rychlostmi. Na trati se minuly v 9.45 h, osobní vlak dojel do cíle v 11.45 h, nákladní vlak ve 14.15 h – téhož dne, kdy ráno vyjely. V kolik hodin to bylo?

10. Z města M do města N vyjel v 6 hodin ráno cyklista. Po 20 minutách se za ním vydal stejnou rychlostí druhý cyklista. Chodec, který šel z N do M, vykročil v 6.40 h. Po 9 minutách potkal prvního cyklistu a 18 minut nato druhého cyklistu. Vzdálenost obou měst je 30 km. Určete (stálé) rychlosti cyklistů a chodce.

11. Auta A, B, C vyjela zároveň na stejnou trasu. Auto C dorazilo do cíle o 1 hodinu později než auto B, auto A o 2 hodiny později než auto C. Auta A, B jela celou trasu stálými rychlostmi, auto B rychlostí o $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ vyšší než auto A. Auto C v prvním „poločase“ své jízdy jelo stejně rychle jako auto A, ve druhém „poločase“ stejně rychle jako auto B (obě fáze jeho jízdy tedy trvaly stejně dlouho). Vypočtěte délku celé trasy.

**12. Honza vyšel na pochod z místa A do místa B o 2 hodiny dříve, než na opačný pochod z místa B do místa A vyšel Vojta. Když se na trase míjeli, měl Honza „v nohou“ o 4 km více než Vojta. Honza pak pochod dokončil za 2 hodiny a 40 minut, Vojta za 3 hodiny. Určete rychlosti obou chlapců (za předpokladu, že byly stálé).

9 ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Tato kapitola i následující cvičení jsou věnovány obtížnějším úlohám, které byly zadány v minulých ročnících *matematické olympiády*. Tak jako v předchozích sešitech jsou všechny úlohy opatřeny odkazy na ročník soutěže, kdy je soutěžící řešili. Zopakujme, že například zápis „47. r., Z9–I–2“ znamená, že úloha byla zadána ve 47. ročníku v kategorii Z9 v I. (tzn. školním) kole jako úloha číslo 2. Tyto odkazy vám pomohou srovnat vlastní řešení nejen s tím, které publikujeme zde v učebnici, ale také s autorským řešením, které najdete v příslušné *ročence* matematické olympiády. Doporučujeme vám také, abyste u každé úlohy sami provedli zkoušku. Slovní úlohy řešitelné pomocí rovnic a jejich soustav byly vděčným tématem této soutěže zejména v jejím prvním období. Proto jsme řadu úloh vybrali ze starších ročníků olympiády, kdy pro žáky vašeho věku byla určena kategorie D, později Z (bez čísla třídy).

Úloha 1 (47. r., Z9–I–2)
Anička a Zdenka měly odčítat dvě kladná desetinná čísla. Anička omylem posunula v menšenci desetinnou čárku o 1 místo. Tím dostala výsledek třináctkrát menší, než byl správný výsledek. Zdenka omylem posunula desetinnou čárku o 1 místo v menšiteli, a tak dostala číslo o 14,58 menší než správný výsledek. Zjistěte, jaký byl správný výsledek.

Řešení. Menšence označíme x, menšitele y. Obě dívky měly zjistit rozdíl $x - y$. Protože obě dostaly menší výsledek, posunula Anička desetinnou čárku menšence doleva, zatímco Zdenka posunula desetinnou čárku menšitele doprava. Anička tedy počítala rozdíl $0{,}1x - y$, Zdenka rozdíl $x - 10y$. Podle zadání platí:

$$13 \cdot (0{,}1x - y) = x - y$$

$$x - 10y = (x - y) - 14{,}58$$

Každou z těchto rovnic upravíme; dostaneme tak soustavu:

$$0{,}3x = 12y$$

$$9y = 14{,}58$$

Z druhé rovnice vychází $y = 1{,}62$, z první rovnice pak $x = 64{,}8$.
Správný výsledek byl $64{,}8 - 1{,}62 = 63{,}18$.

Úloha 2 (42. r., Z8,9–I–2)
Král Rudolf měl prapodivnou zálibu. Choval čtyřicetinožky obrovské a trojhlavé minidraky. Jeho smíšené stádo mělo 53 hlav a 622 nohou. Zjistěte, kolik nohou má trojhlavý minidrak. (Čtyřicetinožka má jednu hlavu.)

Řešení. Označme c počet čtyřicetinožek, d počet minidraků a n počet nohou jednoho minidraka. Sečtením hlav a nohou stáda získáme soustavu rovnic:

$$c + 3d = 53$$

$$40c + n \cdot d = 622$$

Z první rovnice vypočítáme $c = 53 - 3d$ a dosadíme do rovnice druhé:

$$40 \cdot (53 - 3d) + n \cdot d = 622$$

$$d \cdot (120 - n) = 1\,498$$

Zjistili jsme, že číslo 1 498 je součinem dvou neznámých přirozených čísel d a $120 - n$. Proto nejdříve rozložíme číslo 1498 na prvočinitele:

$$1\,498 = 2 \cdot 7 \cdot 107$$

Abychom nemuseli zkoumat všechny možné rozklady čísla 1 498 na součin dvou přirozených činitelů, uvědomíme si, že z první rovnice soustavy plyne $3d \leqq 53$, tj. $d < 18$. Má-li být $n \geqq 0$, musí být $120 - n \leqq 120$. Oběma podmínkám současně vyhovuje pouze jediný rozklad $d = 2 \cdot 7 = 14$ a $120 - n = 107$, tedy $n = 13$.

Pro $d = 14$ dostaneme z první rovnice soustavy $c = 11$. Dosazením se přesvědčíme, že i druhá rovnice soustavy je splněna.

Trojhlavý minidrak má 13 nohou.

Úloha 3 (13. r., D–I–5)
Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 % cínu. Smíšením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu. Kolik kilogramů každého druhu pájky musíme při tom použít?

Řešení. Předpokládejme, že smícháme x kg pájky prvního druhu a y kg pájky druhého druhu (a přidáme 2 kg čistého olova). Porovnáním hmotností dostaneme rovnici

$$x + y + 2 = 10.$$

Dále porovnáme hmotnosti čistého cínu v obou použitých pájkách a ve výsledné slitině:

$$x \cdot \tfrac{25}{100} + y \cdot \tfrac{60}{100} = 10 \cdot \tfrac{30}{100}$$

Vyřešíme proto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 25x + 60y &= 300 \\ \hline 25x + 60y - 25 \cdot (x + y) &= 300 - 25 \cdot 8 \\ 35y &= 100 \\ y &= \tfrac{20}{7} \doteq 2{,}86 \\ \hline x = 8 - y &= \tfrac{36}{7} \doteq 5{,}14 \end{aligned}$$

Musíme použít asi 5,14 kg pájky prvního druhu a asi 2,86 kg pájky druhého druhu.

Úloha 4 (30. r., C–II–1)
Voda v řece teče rychlostí $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Cesta od přístavu k mostu a zpět trvá malému člunu 33 minut a velkému člunu, který má (ve stojaté vodě) dvojnásobnou rychlost, 16 minut. Jak daleko je od přístavu k mostu?

Řešení. Předpokládejme, že vzdálenost od přístavu k mostu měří x metrů a malý člun se (ve stojaté vodě) pohybuje rychlostí $v\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Celá plavba mu trvá 33 minut, tedy 1 980 sekund. Po proudu pluje rychlostí $(v+2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po dobu $\frac{x}{v+2}$ s. Proti proudu pluje rychlostí $(v-2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po dobu $\frac{x}{v-2}$ s. Proto platí:

$$\frac{x}{v+2}+\frac{x}{v-2}=1\,980$$

Podobně vyjádříme dobu plavby většího člunu. Jeho rychlost ve stojaté vodě je $2v\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po proudu pluje rychlostí $(2v+2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po dobu $\frac{x}{2v+2}$ s. Proti proudu pluje rychlostí $(2v-2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po dobu $\frac{x}{2v-2}$ s. Plavba trvá 16 minut, tj. 960 sekund. Odtud vyplývá:

$$\frac{x}{2v+2}+\frac{x}{2v-2}=960$$

Vyřešíme soustavu rovnic:

$$\frac{x}{v+2}+\frac{x}{v-2}=1\,980$$
$$\frac{x}{2v+2}+\frac{x}{2v-2}=960$$

$$x\cdot(v-2)+x\cdot(v+2)=1\,980\cdot(v+2)\cdot(v-2)$$
$$x\cdot(2v-2)+x\cdot(2v+2)=960\cdot(2v+2)\cdot(2v-2)$$

$$2xv=1\,980\cdot\left(v^2-4\right)$$
$$4xv=960\cdot\left(4v^2-4\right)$$

$$xv=990\cdot\left(v^2-4\right)$$
$$xv=960\cdot\left(v^2-1\right)$$

$$990\cdot\left(v^2-4\right)=960\cdot\left(v^2-1\right)$$
$$33\cdot\left(v^2-4\right)=32\cdot\left(v^2-1\right)$$
$$33v^2-132=32v^2-32$$
$$v^2=100$$
$$v_{1,2}=\pm10$$

Záporný kořen pro naši úlohu nemá význam, proto $v=10$.

Neznámou x určíme například z rovnice $xv=990\cdot\left(v^2-4\right)$, odkud $x=9\,504$.

Vzdálenost od přístavu k mostu je 9 504 m.

CVIČENÍ 9

1. (35. r., Z8–II–4)
Adam, Bořek a Cyril měli poštovní známky, každý v jiném množství. Když dal Adam Cyrilovi sedminu ze svého počtu, měli Adam a Cyril stejný počet známek. Když pak ještě Bořek dostal od obou (Adama a Cyrila) po třiceti známkách, měli všichni stejný počet známek. Kolik kusů známek měl původně každý z chlapců, jestliže na začátku měli Bořek s Cyrilem dohromady o 110 kusů známek více než Adam?

2. (10. r., D–II–2)
V továrně pracovalo 1 440 zaměstnanců (mužů a žen). Za dobrou práci obdrželo prémie $18\frac{3}{4}\,\%$ ze všech mužů a $22\frac{1}{2}\,\%$ ze všech žen. Vedení továrny vyhlásilo, že prémiemi bylo odměněno 20 % zaměstnanců. Kolik mužů a kolik žen bylo zaměstnáno v továrně?

3. (44. r., Z8,9–I–3)
Máme dvě dvojciferná čísla, druhé dostaneme přemístěním číslic prvního. Dělíme-li větší číslo menším, dostaneme podíl 3 a zbytek 5. Která jsou to čísla?

4. (31. r., Z–III–1)
Najděte všechny trojice přirozených čísel, jejichž součet je 42, přičemž jedno z čísel se rovná druhé mocnině součtu obou zbývajících.

5. (13. r., D–II–3)
Máme dva kusy klempířské pájky (slitiny olova a cínu) o hmotnostech 5 kg a 7,5 kg. Obsah cínu v prvním kusu je čtvrtina jeho hmotnosti, ve druhém kusu třetina jeho hmotnosti. Od každého kusu oddělíme části stejné hmotnosti. Část oddělenou od prvního kusu slijeme se zbytkem druhého kusu a část oddělenou od druhého kusu slijeme se zbytkem prvního kusu. Dostaneme tak opět dva kusy pájky o hmotnostech 5 kg a 7,5 kg. Vypočtěte, jakou hmotnost musí mít oddělené části, aby oba nově slité kusy pájky obsahovaly stejné procento cínu.

6. (4. r., C–I–1)
Do nádrže stále přitéká rovnoměrným proudem voda. Jestliže se v určitém okamžiku otevřou tři stejné odtokové trubice, vyprázdní se plná nádrž za 18 hodin. Kdybychom v témže okamžiku otevřeli jen dvě ze tří odtokových trubic, vyprázdnila by se nádrž za 30 hodin. Za kolik hodin by se vyprázdnila nádrž, kdybychom ve zmíněném okamžiku otevřeli jen jednu ze tří odtokových trubic?

7. (30. r., C–P–1)
Veslaři trvá projetí jistého úseku řeky na loďce proti proudu s veslováním a po proudu bez veslování stejnou dobu. V kolik hodin se musí otočit, jestliže vystartuje proti proudu v 15 hodin, v 18 hodin se má vrátit zpět a rozhodl se veslovat i na zpáteční cestě? (Předpokládáme, že rychlost proudu řeky i vlastní rychlost veslaře jsou stálé.)

8. (30. r., C–I–3)
Dva veslaři na dvou člunech vystartovali ve 14.55 h z přístaviště a veslovali proti proudu řeky. K lesu dopluli společně, pak jeden vesloval zpět a vrátil se v 17.55 h, druhý se nechal zpět dovézt proudem a vrátil se v 19.07 h. Jak dlouho jim trvala plavba z přístaviště k lesu? (Předpokládáme, že rychlost proudu i vlastní rychlosti veslařů byly stálé.)

9. (3. r., D–I–9)
Rychlík délky 200 m jede rychlostí 16 $\frac{m}{s}$. Na druhé koleji trati přejíždí opačným směrem nákladní vlak. Strojvůdce rychlíku zjistil, že nákladní vlak minul čelo lokomotivy rychlíku za 12 sekund; dále zjistil, že od okamžiku, kdy se setkala čela lokomotiv obou vlaků, až do okamžiku, kdy se minuly konce obou posledních vagonů vlaků, uplynulo 20 sekund. Jak dlouhý byl nákladní vlak a jakou jel rychlostí?

10. (45. r., Z8–II–1)
Dva cyklisté vyjeli současně ze stejného místa na výlet. Oba ujeli stejnou vzdálenost a vrátili se domů ve stejný okamžik. Cestou oba odpočívali. První jel dvakrát déle, než druhý odpočíval, a druhý jel čtyřikrát déle, než odpočíval první. Který z nich jel rychleji a kolikrát?

11. (33. r., Z–I–3)
Na tramvajové lince je doba jízdy mezi konečnými stanicemi 45 minut. Na obou konečných stanicích tramvaje čekají 5 minut. Přidáním pěti tramvajových souprav na linku se interval mezi tramvajemi zmenšil o 1 minutu. Kolik souprav nyní jezdí na lince a v jakých intervalech? (Délka intervalu v minutách je celé číslo.)

12. (23. r., Z–II–1)
Petr a Milan jeli společně tramvají do kina, které je v ulici na trati tramvaje mezi stanicemi A a B. Poměr vzdáleností vchodu do kina od stanic A a B je $3:2$. Petr vystoupil na stanici A, Milan na stanici B. Šli stejnou průměrnou rychlostí a ke vchodu do kina přišli oba ve stejném okamžiku. Vypočítejte, kolikrát byla průměrná rychlost jejich chůze menší než průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A a B. (Dobu stání tramvaje ve stanicích a dobu vystupování obou chlapců zanedbejte.)

10 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

□ **1.** Do rámečků v druhé rovnici doplňte čísla tak, aby vzniklá rovnice měla stejné kořeny jako rovnice první:

a) $3x + 7 = 2x - 4$

$-12x + \square = -8x + 16$

b) $\dfrac{7x - 1}{5} = 9x - 5$

$\dfrac{\square x - 1}{15} = 3x - \dfrac{5}{3}$

□ **2.** Uhodněte některý kořen dané rovnice:

a) $\dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{x + 7}$

b) $\dfrac{12}{14x} = \dfrac{3}{7}$

c) $\dfrac{7}{9 - x} = \dfrac{49}{56}$

d) $\dfrac{2}{x} + x = 5\dfrac{2}{5}$

3. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $2x - 2 + 0{,}3x - 4 \cdot 0{,}7x = -x + 0{,}4 + 0{,}3x - x$

b) $0 = -4 \cdot (x + 1) + 2 - 2 \cdot (x - 1) + 4x + 3 \cdot (2x - 12)$

c) $1 + \frac{1}{2}(22 - 4x) - 1{,}2x = (1 : 0{,}2) - (21x - 15) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 0{,}8(1{,}5x + 7{,}5)$

4. Řešte rovnici:

a) $(2x + 3) \cdot (x - 4) = (2x + 1) \cdot (x - 3)$

b) $-x + 8 + x^2 \cdot (x + 2) + 2x \cdot (2 - x) - 4 \cdot (2 - x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot x$

c) $(x - 2) \cdot (-8) - [3 - (2 - 3x)] \cdot 10 = [3 \cdot (1 - 5x) - 4x] \cdot 2$

d) $2 \cdot \{4 \cdot [3 \cdot (2x - 4) - 2 \cdot (3x + 1)] - 5x\} - 20 = (11 + x) \cdot (-10)$

5. Řešte rovnici s neznámou m:

a) $(m + 9) \cdot (m - 7) = (m - 3)^2$

b) $(m - 2) \cdot (m - 1) - (m + 1)^2 = (m - 2)^2 - (m - 1)^2$

c) $(2m - 3) \cdot (2m + 3) - (3m - 2)^2 + 5 \cdot (m - 1)^2 - 2 \cdot (m - 4) = 0$

d) $(m - 5)^2 - (m - 2) \cdot (m + 5) = (m - 3)^2 - (m + 3) \cdot (m - 7)$

6. Řešte rovnici s neznámou b a proveďte zkoušku:

a) $14 - \left\{2b - \left[(4b - 20) \cdot \frac{1}{2} - (9b + 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2b\right] \cdot 2 - 16\right\} = 0$

b) $2b - 3 \cdot \{2b - 5 \cdot [2b - 5 \cdot (2b - 1)] - 30b\} = 25 - 8 \cdot [b - (3b + 1) \cdot (-2)]$

7. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $5 - x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = x - \frac{x}{6} - \frac{5}{6}$

b) $x - \frac{3}{2}x - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} + \frac{x}{15} - \frac{5}{6}x - \frac{6}{5}x$

c) $\frac{1-2x}{3} - \frac{2x}{15} - \frac{4-7x}{5} = \frac{4x-1}{5} - \frac{4}{15}$

d) $\frac{7x+1}{4} - \frac{7x-1}{5} + \frac{7x}{10} = x - \frac{x-7}{20}$

e) $\frac{2}{3}x + 3 - \frac{2}{9} \cdot \frac{x}{2} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{6}$

8. Řešte rovnici s neznámou r:

a) $9r - 2 \cdot (2 + 3r) = 1 - \frac{5r-6}{2} + 2 \cdot (1 - r) + 5 \cdot \frac{3r-4}{2}$

b) $3r - \frac{2}{3} \cdot (2 + 3r) = \frac{1}{3} - \frac{5r-6}{6} + \frac{2 \cdot (1-r)}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3r-4}{2}$

c) $\frac{15}{2}r - 2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{5r}{2}\right) = \frac{5}{6} - \frac{25r-30}{12} + \frac{5}{3} \cdot (1 - r) + 5 \cdot \frac{15r-20}{12}$

9. Rozhodněte, zda kořen dané rovnice leží v některém z intervalů $(-2, -1)$ a $\langle -3, -2 \rangle$:

a) $\dfrac{2 - \frac{4-x}{2}}{\frac{x}{2}} + \dfrac{\frac{x}{2}}{2 - \frac{4-x}{2}} = \frac{4x+3}{2} - \frac{5x-7}{7}$

b) $\dfrac{\frac{9x}{5} + 1}{3} + \dfrac{\frac{2x}{15}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{x+5}{2}}{\frac{2x+10}{2}} + \frac{x-5}{3}$

■ **10.** *Úloha ze starší učebnice*

Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $\frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right) - 1\right] - 1\right\} + 1 = 2$

b) $\frac{1}{3} \cdot \left\{\frac{5}{6} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x+2}{3} + 3\right) + 3\right) + 10\right] - 1\right\} = 3$

11. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{27}{x} - 3 = \dfrac{15}{x} + 3$ b) $3 - \dfrac{3}{2x} - \dfrac{12x - 6}{4x} = 0$

c) $-\dfrac{9x + 21}{3x} - 2 = -\dfrac{5x + 7}{x}$ d) $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{9}$

12. Řešte rovnici s neznámou t:

a) $\dfrac{3t - 1}{3t + 1} = \dfrac{13}{11}$ b) $\dfrac{2}{3t} - \dfrac{6}{5t - 4} = 0$

c) $\dfrac{16}{t - 7} - \dfrac{4}{t - 3} = 0$ d) $\dfrac{4t}{3t - 15} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{t - 5} + 1$

e) $\dfrac{5}{t - 1} = \dfrac{3}{1 - t} - 4$ f) $1 - \dfrac{2}{5 - 2t} - \dfrac{3}{2t - 5} = 0$

13. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $x - 2 - \dfrac{x^2 - 4}{x + 8} = 0$ b) $\dfrac{20}{x + 2} - \dfrac{22}{x - 2} = 0$

c) $\dfrac{14}{3x - 27} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{9 - x}$ d) $\dfrac{x - 3}{(x - 5)^2} - \dfrac{x - 2}{5 - x} = \dfrac{x - 1}{x - 5}$

14. Řešte rovnici s neznámou z a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{3}{z + 4} - \dfrac{1}{z - 4} = \dfrac{2}{z}$ b) $\dfrac{3}{z - 4} - \dfrac{1}{4 - z} = \dfrac{2}{z}$

c) $\dfrac{3z}{z - 1} - 3 = \dfrac{2z}{z^2 - 1}$ d) $\dfrac{1 - z}{2z + 3} - \dfrac{z}{3 - 2z} = \dfrac{10 - z}{9 - 4z^2}$

□ **15.** Určete zpaměti nenulový kořen rovnice:

a) $3x^2 - 12x = 0$ b) $8x^2 + 20x = 0$ c) $28x^2 = 7x$

d) $39x^2 = -13x$ e) $15x^2 + 225x = 0$ f) $15x^2 = 225x$

□ **16.** Určete zpaměti kořeny rovnice:

a) $(x - 9)^2 = 0$ b) $(x + 11)^2 = 0$

c) $(2x - 7)^2 = 0$ d) $(5x + 1)^2 = 0$

e) $(x - 4) \cdot (x + 1) = 0$ f) $x^2 - 36 = 0$

17. Řešte rovnici s neznámou s a proveďte zkoušku:

a) $s^2 = 81$ b) $7s^2 - 7 = 0$ c) $7s^2 = 175$ d) $2s^2 - 98 = 0$

e) $5s^2 = 320$ f) $s^2 = -144$ g) $3s^2 = -108$ h) $-2s^2 = 32$

18. Řešte rovnici s neznámou p vytknutím společného činitele:

a) $(p-2)\cdot(p+2)-(p-2)^2=0$

b) $-(p-1)^2+(p+1)\cdot(p-1)=0$

c) $(p+2)^2+(p-2)\cdot(p+2)=0$

d) $(p-1)^2-(p+2)\cdot(p-1)=0$

19. Rozložte na součin dvojčlenů:

a) $x^2+21x+20$ b) $x^2-4x-77$ c) $x^2+51x+50$

d) $x^2-22x+120$ e) $x^2+102x+200$ f) $x^2+13x+12$

g) $x^2-5x-50$ h) $x^2-15x+50$ i) $x^2+5x-50$

20. Pomocí rozkladu na součin určete kořeny rovnice:

a) $x^2+14x-15=0$ b) $x^2+10x+16=0$ c) $x^2-2x-15=0$

d) $x^2+5x-14=0$ e) $x^2-9x+20=0$ f) $x^2+3x-18=0$

21. Zjednodušte a určete podmínky, za kterých je daný a zjednodušený výraz definován:

a) $\dfrac{x^2+10x+16}{x^2+16x+64}$ b) $\dfrac{5x-35}{42+x-x^2}$

c) $\dfrac{x^2+19x-20}{x^2+17x-60}$ d) $\dfrac{x^2-9x+14}{2x^2-14x+20}$

e) $\dfrac{x^2-30x+29}{3x-87}$ f) $\dfrac{24x-x^2-144}{x^2-8x-48}$

22. Zjednodušte:

a) $\dfrac{\dfrac{3b-33}{b^2+4b+4}}{\dfrac{b^2-9b-22}{b+2}}$ b) $\dfrac{\dfrac{b^2-2b+1}{b^2-6b+5}-\dfrac{b^2-1}{}}{\dfrac{b+1}{b+3}\cdot(b^2+8b+15)}$

23. Do zápisu $x^2+\boxed{}\,x+16=0$ doplňte celé číslo tak, aby vzniklá kvadratická rovnice měla

a) dvojnásobný kořen, a tento kořen určete,

b) dva různé celočíselné kořeny, a tyto kořeny určete.

Najděte všechna řešení.

24. Řešte rovnici s neznámou b a proveďte zkoušku:

a) $3b - 4b \cdot (b - 2) + 9b = 0$

b) $0 = 36 - b \cdot (9 + b) + 12 \cdot (b - 3)$

c) $1 - (b - 3)^2 + b \cdot (b - 4) + 10 = 0$

d) $\dfrac{b-3}{b-5} + \dfrac{b+3}{2} = \dfrac{b-21}{2b-10}$

25. Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

a) $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)^2 + 2x$

b) $3x \cdot (1 - x) = x \cdot (x - 5) + 5$

c) $3 \cdot \left(x^2 + 4\right) - 7x = 2x^2 - 10 \cdot (6 - x)$

d) $2x \cdot (2x + 3) + x \cdot (x - 3) = 4x^2 + 2 \cdot (3x + 5)$

e) $4x \cdot (x - 1) - 3 \cdot (2x - 5) = 3x^2 - 2 \cdot (2x - 3)$

f) $(x + 2)^2 - (2x - 1)^2 = 4 \cdot (3x - 1)$

26. Řešte rovnici:

a) $\dfrac{2x^2-1}{5} - \dfrac{x-1}{15} = 1 - \dfrac{1-x^2}{3}$

b) $2 + \dfrac{5x+4}{5} - \dfrac{x^2}{10} = x - \dfrac{1}{5} - \dfrac{2x+1}{5}$

c) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{5}{1+x}$

d) $\dfrac{x+1}{3x-2} + \dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{-14}{8-18x^2}$

e) $\dfrac{1}{x^2-x-6} + \dfrac{2}{x^2-4} + 2 = \dfrac{2}{x+2} \cdot \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-5x+6}$

27. Rozdíl dvou čísel je 74. Dělíme-li větší číslo menším, dostaneme neúplný podíl 7 a zbytek 2. Určete obě čísla.

28. Dvojciferné číslo má číslici na místě jednotek o 2 větší než číslici na místě desítek. Vynásobíme-li toto číslo jeho ciferným součtem, vyjde 144. Které číslo to je?

29. Jitka je letos dvakrát starší než Alena. Za 4 roky bude jejich věk v poměru 5 : 3. Kolik let jim pak bude?

30. Honzovi je letos 13 let a Petrovi 21 let. Za kolik let budou jejich věky v poměru 7 : 9?

31. V zemědělském družstvu sklízeli obilí pomocí kombajnů z 360 ha polí. Kdyby měli o 2 kombajny více, skončili by práci o 4 dny dříve. Kolik měli kombajnů, když každý kombajn sklidil denně úrodu z 12 ha?

■∗ **32.** Určete číslo p z následujícího příběhu:
Poctivý obchodník umístil ráno do své výlohy k vystavenému páru bot cedulku: „Dnes o p % levnější než včera.“ Další ráno přelepil číslo p číslem dvakrát větším. Po chvíli však usoudil, že účinnější bude cedulka s nápisem: „Dnes o 62,5 % levnější než předevčírem.“

33. Jestliže zvětšíme jednu stranu čtverce o 20 cm a sousední stranu zmenšíme o 6 cm, dostaneme rozměry obdélníku, jehož obsah je o 40 % větší než obsah původního čtverce. Určete délku jeho strany.

34. Obdélník má pětkrát větší délku než šířku. Zmenšíme-li oba jeho rozměry o 4 cm, dostaneme obdélník, jehož obsah je roven 55,2 % obsahu původního obdélníku. Určete, kolik procent obvodu původního obdélníku je obvod obdélníku zmenšeného.

35. Rozhodněte, zda existuje mnohoúhelník, který má právě

a) 275 úhlopříček,
b) 250 úhlopříček,
c) dvakrát tolik úhlopříček jako stran.

■∗ **36.** Na večírku maturantů „po dvaceti letech“ byl počet žen o 3 větší než počet mužů. Při příchodu si každé dvě osoby téhož pohlaví podaly ruce, zatímco každé dvě osoby různého pohlaví se políbily. Kolik bylo polibků, bylo-li 258 podání rukou?

37. Druhá mocnina součtu dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je o 1 menší než dvojnásobek součtu jejich druhých mocnin. Najděte tato čísla.

38. Druhá mocnina součtu dvou po sobě jdoucích celých čísel je o 4 menší než součet druhých mocnin dalších dvou po nich následujících celých čísel. Najděte tato čtyři čísla.

39. Hlediště kina o kapacitě 500 míst je rozděleno do řad o stejném počtu křesel. Po rekonstrukci se jeho kapacita snížila o 10 %, pět řad ubylo, zato v každé řadě 5 křesel přibylo. Kolik řad mělo původní hlediště?

$*$**40.** Do obchodu přivezli celkem 64 čajových konvic dvou velikostí. Větší konvice je o 200 Kč dražší než menší konvice. Celková cena větších konvic je 20 000 Kč, menší konvice dohromady stojí 7 200 Kč. Kolik je kterých konvic?

$*$**41.** Motorová loď má na klidné vodní hladině rychlost 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Když jsme v ní bez přestávky ujeli 45 km po proudu řeky a 45 km zpět, trvalo nám to přesně 8 hodin. Jakou (stálou) rychlostí tekla řeka?

42. Kvůli poruše na semaforu ztratil vlak na trati za Brnem 16 minut stáním. Toto zpoždění „zlikvidoval“ tak, že po rozjezdu jel úsek dlouhý 80 km rychlostí o 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší, než měl v plánu. Jaká rychlost to byla a jaká měla být?

$**$**43.** Dvě auta vyjela ve stejný okamžik na stejnou trasu stálými rychlostmi 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Půl hodiny nato je ze stejného místa vyjelo „pronásledovat“ třetí auto. První auto bylo dostiženo o 90 minut dříve než druhé auto. Vypočtěte (stálou) rychlost třetího auta.

44. Adam se vydal na cestu z místa A do místa B. Bedřich v tutéž chvíli vyrazil na stejnou cestu z místa B do místa A. Oba chlapci šli stálými rychlostmi; Bedřichova rychlost byla o 1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší než Adamova. Po 30 minutách chůze se chlapci na cestě potkali, krátce spolu promluvili a pak ve svém putování pokračovali tak rychle jako dříve. Adam došel do místa B 11 minut poté, co Bedřich dorazil do místa A. Jak dlouhá je cesta z místa A do místa B?

$**$**45.** Mirek a Karel se mají setkat na horské chatě. Aby tam došli současně, dohodli se, že Mirek, který má ujít 14 km, vyrazí na cestu o půl hodiny dříve a půjde průměrnou rychlostí o 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ větší než Karel, který má ujít jen 7,5 km. Plán chlapců nevyšel jedině v tom, že Mirek dokázal jít pouze rychlostí 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak dlouho na něj Karel čekal?

∗46. Na stejnou trasu vyjeli současně dva cyklisté. První z nich ukončil jízdu po 42 minutách, když mu do cíle chyběl 1 km. Druhý cyklista se zastavil o 10 minut později, a to 2 km před cílem. Kdyby první cyklista ujel tolik kilometrů, co druhý, a ten zase tolik, co cyklista první, trvalo by to druhému cyklistovi o 17 minut déle než prvnímu. Jak dlouhá byla celá trasa? (Rychlosti obou cyklistů považujte za stálé.)

∗∗47. Cyklistický okruh má tvar pravoúhlého trojúhelníku. Jeho přepona je tvořena polní cestou, zatímco obě odvěsny, z nichž jedna je o 2 km delší než druhá, jsou tvořeny asfaltovou silnicí. Závodník projel okruh tak, že na polní cestě dosáhl rychlosti 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, na silnici 42 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a přitom po silnici i polní cestě jel stejně dlouho. Vypočtěte délku okruhu.

∗∗48. V určitý okamžik hodinky A ukazují o 2 minuty méně a hodinky B o 3 minuty méně, než mají. Přitom se však oboje hodinky předcházejí. Za 24 hodin je to u hodinek B o půl minuty více než u hodinek A. Po zmíněném okamžiku ukážou hodinky A správný čas právě o 24 hodiny později než hodinky B. O kolik minut se hodinky A předcházejí za 24 hodin?

49. V balírně balí čočku na dvou strojích. Přivezená dávka by byla na pomalejším stroji zabalena za 7,5 hodiny, na výkonnějším stroji za 5 hodin. Jak dlouho bude balení této dávky trvat, budou-li oba stroje pracovat současně?

50. Na koupališti je možné napouštět vodu do bazénu třemi přítoky. Prvním z nich by napouštění trvalo 24 hodin, druhým 30 hodin a třetím 40 hodin. Den před zahájením letní sezony otevřel správce všechny tři přítoky současně. Jak dlouho napouštění bazénu trvalo?

51. V automobilce vyrobí nyní denně o 4 nové vozy více než loni, takže při výrobě 360 vozů ušetří právě jeden celý pracovní den. Kolik pracovních dnů k výrobě 360 vozů potřebovali loni?

52. Dva dělníci by jistý úkol společně splnili za 5 dnů. Kdyby první dělník svoji výkonnost dvakrát zvýšil a druhý dvakrát snížil, trvalo by jim to jen 4 dny. Za kolik dnů by celý úkol zvládl první dělník sám (při výkonnosti, které skutečně dosáhl)?

53. Při stavbě tunelu odvážela přebytečnou zeminu dvě nákladní auta s různou nosností. Aby byla veškerá zemina odvezena, muselo by první auto jet 36krát a druhé auto 54krát. Zpočátku jezdilo pouze druhé auto. Po jeho 9 jízdách přijelo i první auto a zbytek zeminy odvezla obě auta společně, přičemž vyjížděla a vracela se současně. Kolik společných jízd to bylo?

54. Hajný počítal, že zásoba krmiva mu pro jeden krmelec vystačí na 56 dnů. Po týdnu krmení však musel krmivo dodávat i do nového, většího krmelce v sousedním lese. Pro ten by původní zásoba vystačila na 42 dnů. Na kolik dnů vystačila hajnému zásoba krmiva pro oba krmelce?

55. Po vyčištění rybníka do něj opět začala přitékat voda z potoka. Zároveň bylo otevřeno stavidlo, kterým část vody z rybníka odtékala. Kdyby se rybník pouze napouštěl, trvalo by to 14 dnů. Kdyby do rybníka žádná voda nepřitékala a naplněný rybník se pouze vypouštěl otevřeným stavidlem, trvalo by to 32 dnů. Za jakou dobu bude rybník naplněn ve skutečnosti?

56. Prázdná chladicí nádrž v továrně musela být co nejrychleji naplněna chladicí kapalinou. Proto byla použita současně dvě čerpadla, takže napouštění trvalo $3\frac{3}{4}$ hodiny. Kdyby bylo spuštěno pouze výkonnější čerpadlo, trvalo by napouštění o 4 hodiny méně, než kdyby bylo použito jen druhé čerpadlo. Za jak dlouho by byla nádrž naplněna výkonnějším čerpadlem?

57. Správce zámeckého parku zaměstnává 3 dělníky, kteří sečou trávu motorovými sekačkami. Zbývá jim ještě posekat 2 ha pole. Podle výkazů práce z předešlého dne správce zjistil, že pan Dvorský posekal za 6 hodin 1 ha trávníku, pan Zubák za 3 hodiny 60 arů a pan Řehák za 2 hodiny $2\,500\,\mathrm{m}^2$ trávníku. Správce předpokládá, že i příští den budou pracovat se stejnou výkonností. Chce, aby všichni tři pracovali společně a byli s prací hotovi nejpozději v poledne. V kolik hodin musí začít pracovat?

58. První dělník by ke splnění daného úkolu potřeboval o 4 hodiny méně než druhý dělník. Ve skutečnosti na tomto úkolu pracovali nejprve oba dělníci 2 hodiny společně, zbylou práci pak zvládl za 1 hodinu první dělník sám. V jakém poměru by měly být výše odměn dělníků podle vykonané práce?

**59. Dva kopáči mají vykopat příkop. Kdyby každý z nich pracoval právě třetinu té doby, kterou by k výkopu potřeboval druhý kopáč, vykopali by dohromady $\frac{13}{18}$ příkopu. Určete, v jakém poměru jsou výkonnosti obou kopáčů.

60. V první krejčovské dílně měli ušít 810 obleků, ve druhé dílně měli za stejné období ušít 900 obleků. První dílna splnila úkol 3 dny před termínem, druhá 6 dnů před termínem. Kolik obleků ušili průměrně denně v první dílně, bylo-li to o 21 obleků méně než ve druhé dílně?

61. Náklad transoceánské lodi byl dvěma jeřáby vyložen za 15 hodin. První jeřáb pracoval po celou dobu vykládky, druhý jeřáb po dobu o 7 hodin kratší. Vypočtěte, za jak dlouho by celý náklad vyložil každý z obou jeřábů samostatně, víte-li, že prvnímu jeřábu by to trvalo o 5 hodin déle než druhému jeřábu.

***62.** Do bazénu ústí dvě potrubí, jedno pro přítok a jedno pro odtok. Je-li odtok uzavřen, naplní se prázdný bazén o 2 hodiny dříve, než se plný bazén při zavřeném přítoku vyprázdní. Jednou, když byl bazén napuštěn ze dvou třetin, správce bazénu současně otevřel obě potrubí. Bazén se pak naplnil za 8 hodin. Trvalo to déle, než trvá naplnění prázdného bazénu při zavřeném odtoku?

***63.** Osádka rybářské lodi vyplula na moře s úkolem vylovit 1 800 q ryb za určitý počet dní, počítali denně se stejnou „normou“. Kvůli špatnému počasí v první třetině plánované doby pobytu na moři rybáři denně vylovili o 20 q ryb méně, než určovala norma. Ve zbylém období normu denně o 20 q překročili, takže celý úkol splnili o 1 den dříve, než plánovali. Kolik q ryb měli rybáři denně vylovit?

64. Jana poslala z letního tábora svým známým celkem 23 dopisů a pohlednic. Za známky tak utratila 100,40 Kč. Známka na dopis stojí 4,60 Kč, na pohlednici 4 Kč. Kolik dopisů a kolik pohlednic Jana poslala?

65. Na týdenní sportovní kurs do Prudké přijelo 90 žáků tří kvart A, B, C s pěti učiteli tělocviku. Vedoucí rekreačního střediska měl pro jejich ubytování připraveno 24 třílůžkových a pětilůžkových pokojů. Při rozdělování pokojů se zjistilo, že pokud ubytují dívky do třílůžkových a hochy do pětilůžkových pokojů, všechna lůžka ve využitých pokojích budou obsazena a ještě dva pokoje zbudou pro učitele. Kolik dívek a kolik hochů přijelo na kurs?

66. Tatínek s Tomášem přivezli ze stáčírny 30 litrů jablečného moštu. Maminka jeden a půl litru moštu odlila do džbánu k okamžité spotřebě a zbytek plnila do láhví tří druhů – litrových, dvoulitrových a láhví s objemem 0,7 litru. Nejprve naplnila všechny dvoulitrové láhve, co měla, pak všechny litrové, kterých měla čtyřikrát více. Zbylým moštem naplnila několik nejmenších láhví, bylo jich o 3 více než litrových. Kolik láhví maminka původně připravila, jestliže jí 3 prázdné láhve zbyly?

67. Lék v želatinových tabletách obsahuje kofein a benzoan sodný v poměru 2 : 3. Lékárnice má pro jeho přípravu k dispozici dvě směsi. V první z nich je směs kofeinu a benzoanu sodného v poměru 1 : 1, ve druhé je tento poměr 1 : 2. Kolik gramů které směsi potřebuje lékárnice k výrobě 125 g léku?

68. První slitina je složena z mědi a zinku v hmotnostním poměru 5 : 2, u druhé slitiny je tento poměr 3 : 4. Kolik kilogramů každé z obou slitin musíme vzít, abychom po jejich společném přetavení získali 28 kg nové slitiny, ve které je stejně zinku jako mědi?

69. Radim dává do akvária převařenou vodu. Jednou se rozhodl akvárium vyčistit a vodu v něm vyměnit. Z předchozího dne měl v barelu na balkoně 50 l převařené vody ochlazené na teplotu 15 °C. Do akvária se vejde 60 l vody, proto musí ještě 10 l vody převařit. Na jakou teplotu pak musí tuto vodu ochladit, aby teplota vody v akváriu byla 21 °C?

70. Po skončení písemné práce si Hanka s Andreou kontrolovaly výsledky jedné úlohy. Hance vyšlo po zaokrouhlení 12,3 °C, Andree 33,7 °C. Zjistěte, zda některá z nich počítala správně, jestliže zadání úlohy znělo: „Do 40 litrů vody bylo přilito 30 litrů vody o 25 °C chladnější. Získaná voda měla výslednou teplotu 48 °C. Jakou teplotu měla chladnější voda?“

71. Milan slíbil vedoucímu, že do lékárničky na prázdninový putovní tábor přiveze peroxid vodíku k dezinfekci ran. Doma zjistil, že mají pouze 27procentní peroxid. K dezinfekci je však potřeba 3procentní roztok peroxidu. Kolik destilované vody a kolik 27procentního peroxidu musel smíchat, aby připravil čtvrtlitrovou lahvičku peroxidu se správnou koncentrací?

72. V laboratoři se připravuje 34procentní vodný roztok kyseliny sírové. Kolik litrů destilované vody musí technik použít, má-li ke zpracování připraveno 6 dvacetilitrových kanystrů 96procentní kyseliny sírové?

73. Na letním táboře se vyskytlo infekční onemocnění, a proto hygienik nařídil zpřísněná opatření. Před každým jídlem si děti musely umývat ruce v 8procentním roztoku hypermanganu. Kuchařky musely ovoce omývat ve 3procentním roztoku hypermanganu. Táborová služba dostala za úkol připravit 10 litrů každého z obou těchto roztoků. Vedoucí jim přivezl kanystr s 65procentním roztokem hypermanganu. Kolik pitné vody a kolik roztoku z kanystru služba potřebovala?

74. Lékárnice má připravit 5procentní borovou mast. K dispozici má posledních 40 g 3procentní borové masti a větší množství 10procentní borové masti. Jaké množství 10procentní masti musí do zbytku 3procentní masti přidat, aby splnila úkol?

75. Učitel chemie potřeboval k pokusu 2 dm^3 45procentního roztoku kyseliny sírové. V kabinetě má k dispozici pouze roztoky s koncentrací 96 % a 34 %. Kolik kterého roztoku musí smíchat?

76. Rozhodněte, zda dvojice čísel $x = -2$, $y = 1$ je řešením soustavy rovnic:

a) $13x - 14y = -40$
$14x - 13y = -42$

b) $-13x - 14y = -12$
$-14x - 13y = -15$

c) $-13x + 14y = 40$
$14x + 13y = -15$

d) $13x + 14y = -12$
$-14x + 13y = 42$

77. Z rovnice

$$\frac{1}{5}(x-2) + \frac{1}{3}(y+3) = -\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{5}y$$

vyjádřete

a) neznámou x pomocí neznámé y,

b) neznámou y pomocí neznámé x.

78. Řešte soustavu rovnic

$$2x - 5y = 1,$$
$$7x + 3y = 24$$

a) srovnávací metodou,

b) dosazovací metodou,

c) sčítací metodou.

79. Řešte soustavu rovnic s neznámými a, b:

a) $7a - 4b = 1$
$2a + b = 11$

b) $15a + 15b = 8$
$15a - 15b = 2$

c) $a + 5b = -2$
$3a - 10b = -11$

d) $6a - 2b + 8 = 0$
$-3a + 4b - 13 = 0$

e) $3a - 2b + 10 = 0$
$7a + 3b - 15 = 0$

f) $5a - 7b = b + 2$
$10a + 3b - 4 = 0$

80. Řešte soustavu rovnic s neznámými y, z a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{y+1}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot (z+1)$

$2y - 7 = \dfrac{3}{4} \cdot (3z - 31)$

b) $\dfrac{2z}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2} - \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{7z+y}{3} = 6y + 4z - \dfrac{1}{3}$

81. Přesvědčte se, že soustava rovnic

$$(m+n) \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{3} \cdot (4m-2) - \tfrac{4}{5},$$
$$4m + 3n + 4 = 7 \cdot (m+1) + 2 \cdot (2m-7)$$

s neznámými m, n má nekonečně mnoho řešení, a určete

a) hodnoty m pro $n \in \{1, -20\}$,

b) hodnoty n pro $m \in \{2, 5\}$.

82. Ukažte, že daná soustava rovnic nemá řešení:

a) $3x - y = 7$

$6x - 2y = 15$

b) $2(2x - 3y) = 5(1 - x)$

$2(2y - 3x) = -3$

c) $2(x - y) - 3(x + y) = 9$

$5(x + 3y) - 2x = 30$

d) $2(10y - 7x) - (24y - x) = 7 - 14x$

$-5 - 8(x + y) = 13 - 5(2x + 1)$

83. Určete počet řešení soustavy rovnic s neznámými u, v:

a) $2(3u - 1) = -5v$

$5v - 3 = -6u$

b) $7u - \dfrac{24}{5} + \dfrac{u}{6} = -6v - \dfrac{u}{3}$

$\dfrac{3}{4}u + \dfrac{5}{8}v = \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{6u}{5} - 2 = 22 - \dfrac{3v}{2}$

$\dfrac{3u}{5} - 2 + \dfrac{3v}{4} = 10$

d) $12u + \dfrac{4}{3}(u - 5v) = 4\left(\dfrac{2}{3} + 3u\right)$

$\dfrac{v}{2} - 5\left(v - \dfrac{u}{25}\right) = 2\left(\dfrac{1}{5} - v\right)$

84. Řešte soustavu rovnic:

a) $2x - \dfrac{4}{5}y = -4$

$\dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{2}y = 2$

b) $x + \dfrac{y}{10} = -\dfrac{x}{4} - 2$

$-\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{y}{10} + \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} - \dfrac{7}{4} = 0$

$\dfrac{x-7}{2} - \dfrac{y-6}{3} = 1$

d) $\dfrac{2y}{3} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{y}{2} = \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{3x-2}{2} + \dfrac{3y-4}{6} = 1$

$\dfrac{1}{2}(3x+y) - 1 = \dfrac{5}{3}$

f) $\dfrac{x+2y-2}{4} = \dfrac{y-1+2x}{2}$

$\dfrac{1}{15}(y-x) = \dfrac{x}{10} - \dfrac{1}{10}(y-5)$

85. Řešte soustavu rovnic s neznámými a, b a proveďte zkoušku:

$$(a+8)\cdot(b+3) = (a+3)\cdot(b+11)$$
$$(a+6)\cdot(b-2) = (a+4)\cdot(b-1)$$

86. Řešte soustavu rovnic s neznámými m, o a proveďte zkoušku:

a) $\dfrac{m}{m-1} + \dfrac{o}{o+2} = \dfrac{8}{3}$

$\dfrac{m}{m-1} - \dfrac{2o}{o+2} = \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{3m}{m+2} - \dfrac{o}{2o-3} = -\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{m}{m+2} + \dfrac{2o}{2o-3} = \dfrac{23}{5}$

87. Řešte soustavu rovnic:

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{11}{12}$

$\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{4}{y} = -\dfrac{7}{12}$

b) $\dfrac{3}{2x+7} - \dfrac{10}{y-5} = 1$

$\dfrac{4}{2x+7} + \dfrac{5}{y-5} = 5$

88. Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku:

a) $x + y - xy = -1$

$2x - y + 2xy = 13$

b) $2x + y + xy = 7$

$x + 2y - 2xy = 0$

$*$**89.** V místnosti jsou čtyřnohé židle, trojnohé verpánky a všechny jsou obsazeny lidmi (po jednom). Spočítali jsme všechny nohy v místnosti a bylo jich celkem 39. Kolik je tam židlí, verpánků a lidí?

90. Dvojciferné číslo vynásobíme číslem 23. Výsledek je čtyřciferné číslo, které má na prvním a posledním místě jedničku a uprostřed je zapsáno původní dvojciferné číslo. Určete je.

$*$**91.** Změníme-li pořadí číslic ve dvojciferném čísle, dostaneme číslo o 1 menší, než je dvojnásobek původního čísla. Které je to číslo?

∗∗92. Bendovi mají syna Marka. Jeho věk dostaneme, sečteme-li obě číslice věku jeho otce. Matce je nyní tolik let, kolik bylo otci v roce, kdy se jim Marek narodil. Letos je to naposledy, kdy součet věků všech tří Bendových je menší než 100 let. Kolik let je každému z nich?

93. Smícháním polotučného a plnotučného mléka v poměru $1:2$ získáme mléko, které obsahuje 30 g tuku v každém litru, kdežto smícháním v poměru $2:1$ získáme mléko s 25 g tuku v jednom litru. Kolik gramů tuku obsahuje jeden litr plnotučného mléka?

94. Mladá hospodyně solí tři stejné hrnce polévky. Do prvního hrnce dala soli málo a musela polévku hodně přisolit. Do druhého hrnce tedy dala nejdřív třikrát více soli než původně do prvního hrnce, ale i to bylo málo; na dosolení však stačilo už jen třikrát méně soli než na dosolení prvního hrnce. Hospodyně by nyní ráda polévku ve třetím hrnci osolila rovnou správným množstvím soli (bez dosolování), ale nějak to nemůže spočítat. Poraďte jí.

∗95. Dva řidiči vyjeli na svých motocyklech současně, jeden z místa A do místa B, druhý z místa B do místa A. Jeli navzájem různými, ale stálými rychlostmi a po dosažení cílové stanice se okamžitě vydali původními rychlostmi na cestu zpět. Poprvé se minuli ve vzdálenosti 3 km od místa B, podruhé až byli na cestě zpět, a to ve vzdálenosti 1 km od místa A. Určete vzdálenost míst A, B.

∗∗96. Tři plavci mají uplavat dvě délky bazénu dlouhého 55 metrů. Startují postupně po 5 sekundách ze stejného startovního bloku. Ještě před obrátkou je první plavec ve stejný okamžik dostižen druhým i třetím plavcem. Třetí plavec po obrátce uplave ještě 9 metrů, než mine druhého plavce, a ještě dalších 6 metrů, než mine prvního plavce. Předpokládejte, že rychlosti všech tří plavců jsou stálé, a vypočtěte největší z nich.

97. Z opačných konců trasy dlouhé 50 km vyšli ve stejný okamžik dva dálkoví chodci a pohybovali se stálými rychlostmi. Setkali se po 5 hodinách chůze. Pak pokračovali v původních směrech pochodu tak, že první chodec snížil svou rychlost o $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, druhý chodec naopak svou rychlost o $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zvýšil. První chodec dorazil do cíle o 2 hodiny dříve než druhý chodec. Určete rychlosti obou chodců do okamžiku setkání.

98. Cesta z A do B dlouhá 11,5 km nejdříve stoupá vzhůru, pak chvíli vede po rovině a nakonec klesá dolů. Chodec ušel celou cestu z A do B za 2 hodiny a 54 minut, cestu zpět za 3 hodiny a 6 minut. V obou směrech šel do kopce stálou rychlostí $3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, po rovině $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a z kopce rychlostí $5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Vypočtěte délku stoupání a délku klesání na cestě z A do B.

■ **99.** Řešte úlohu, která pochází z ruského rukopisu ze 17. století:
Lev sežere ovci za hodinu, vlk za dvě hodiny a pes za tři hodiny. Za kolik hodin sežerou ovci všichni tři společně?

■ **100.** Řešte úlohu indického matematika *Bhaskary* (1114-1185):
Osmina stáda opic, povýšena na druhou, dovádí rozpustile v háji a těší se ze hry, dvanáct ostatních opic vřeští na protějším kopci. Kolik opic čítá toto stádo?

VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Rovnice a jejich úpravy

2. První, třetí a čtvrtá rovnice. První rovnice je dvojnásobkem čtvrté, třetí je pětinásobkem čtvrté. **3.** a) $m = -2$; b) $m = 6$; c) $m = -4$; d) $m = 0{,}4$. **4.** a) $x = 19$; b) $x = 3$; c) $x = 5$; d) $x = 14$. **5.** $y = -6$. **6.** a) $x = -21$; b) $x = -10$; c) $x = 1$; d) $x = -1$; e) $x = 2$; f) $x = -\frac{1}{2}$; g) $x = -5$; h) $x = \frac{19}{6}$; i) $x = \frac{1}{6}$; j) $x = \frac{9}{11}$. **7.** a) $z = -\frac{5}{4}$; b) $z = -\frac{1}{2}$; c) $z = \frac{7}{9}$; d) $z = 11$. **8.** a) Žádné řešení; b) $d = -\frac{3}{10}$; c) řešením je každé reálné číslo; d) žádné řešení; e) $d = 0$; f) řešením je každé reálné číslo d.

2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

1. a) $x = 2$; b) $x = 1$; c) $x = -11$; d) $x = -\frac{1}{6}$. **2.** a) $y = 5$; b) žádné řešení; c) $y = 10$; d) $y = 4$. **3.** a) Žádné řešení; b) $x = 1$. **4.** a) $y = 1$; b) $y = \frac{1}{2}$.

3 Kvadratické rovnice

1. a) $x = -1$; b) $x = 4$; c) $x = -2$; d) $x = -1$. **2.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; c) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$. **3.** a) $z_1 = 0$, $z_2 = 3$; b) $z_1 = 0$, $z_2 = -7$; c) $z_1 = 0$, $z_2 = 5$; d) $z_1 = 0$, $z_2 = 25$; e) $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{3}{2}$; f) $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{6}{5}$. **4.** a) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; c) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; e) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$; f) $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$; g) žádné řešení; h) žádné řešení. **5.** a) $x^2 - 14x + 49 = 0$; b) $x^2 + 20x + 100 = 0$; c) $9x^2 + 48x + 64 = 0$. **6.** Ano, pokud $b = 0$. (Ano, pokud $c = 0$.) **7.** a) $x_1 = x_2 = 2$; b) $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$; c) $x_1 = x_2 = 7$; d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$; e) $x_1 = x_2 = 0$. **8.** a) 4; b) 1; c) 16; d) 20. **9.** a) $(x+2)\cdot(x+4)$; b) $(x+3)\cdot(x+4)$; c) $(x+4)\cdot(x+5)$; d) $(x+1)\cdot(x+2)$; e) $(x+1)\cdot(x+4)$; f) $(x+1)\cdot(x+6)$; g) $(x+3)\cdot(x+5)$; h) $(x+2)\cdot(x+10)$; i) $(x+3)\cdot(x+6)$. **10.** a) $(x-1)\cdot(x-3)$; b) $(x-2)\cdot(x-4)$; c) $(x-2)\cdot(x-10)$; d) $(x-1)\cdot(x-5)$; e) $(x-4)\cdot(x-6)$; f) $(x-7)\cdot(x-9)$. **11.** a) $(x+1)\cdot(x-2)$; b) $(x+3)\cdot(x-1)$; c) $(x+4)\cdot(x-1)$; d) $(x+1)\cdot(x-5)$; e) $(x+2)\cdot(x-1)$; f) $(x-11)\cdot(x+1)$; g) $(x+6)\cdot(x-2)$; h) $(x+6)\cdot(x-1)$; i) $(x+2)\cdot(x-10)$. **12.** a) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; c) $x_1 = -6$, $x_2 = -3$; d) $x_1 = 5$, $x_2 = -4$; e) $x_1 = 5$, $x_2 = -6$; f) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. **13.** a) $x \neq 6$ a $x \neq -4$; b) $x \neq -5$ a $x \neq 3$; c) $x \neq 6$ a $x \neq -1$. **14.** a) $\dfrac{x+1}{x-2}$ $(x \neq 1,\ x \neq 2)$; b) $\dfrac{x-5}{x+3}$ $(x \neq \pm 3)$; c) $\dfrac{x-5}{x+2}$ $(x \neq -2)$; d) $\dfrac{x-3}{x-1}$ $(x \neq 1,\ x \neq 3)$; e) $\dfrac{2x}{x-7}$ $(x \neq 7,\ x \neq -2)$; f) $\dfrac{x-1}{x^2}$ $(x \neq 0,\ x \neq -3)$. **15.** Např. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $x^2 - x - 6 = 0$; c) $x^2 - 7x - 8 = 0$; d) $x^2 + 9x + 14 = 0$. **16.** a) $D = 5$, 2 kořeny; b) $D = 1$, 2 kořeny; c) $D = -7$, žádný kořen; d) $D = 25$, 2 kořeny; e) $D = 0$, 1 dvojnásobný kořen; f) $D = 116$, 2 kořeny; g) $D = 0$, 1 dvojnásobný kořen; h) $D = 1$, 2 kořeny. **17.** a) $x_1 = 9$, $x_2 = -7$; b) žádné řešení; c) žádné řešení; d) $x_1 = -5$, $x_2 = -45$; e) žádné řešení; f) $x_1 = 6$, $x_2 = 7$. **18.** a) $y_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $y_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$; b) $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$; c) $y_1 = 24$, $y_2 = -1$; d) $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{1}{3}$; e) žádné řešení; f) $y_1 = \frac{1}{10}(-5 + \sqrt{5})$, $y_2 = \frac{1}{10}(-5 - \sqrt{5})$; g) $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$; h) $y_1 = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{17})$, $y_2 = \frac{1}{16}(9 - \sqrt{17})$. **19.** a) $m_1 = -\frac{1}{20}$, $m_2 = -1$; b) $m_1 = 10$, $m_2 = \frac{3}{2}$. **20.** a) $x_1 = 7$, $x_2 = -5$; b) žádné řešení; c) $x = -9$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -9$; e) $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

4 Slovní úlohy 1

1. Hledané číslo je -13. **2.** Původní zlomek je $\frac{15}{9}$. **3.** Dvě řešení: hledaná čísla jsou 6 a 7, nebo -7 a -6. **4.** Odvěsny mají délky 12 cm a 16 cm. **5.** Pětiúhelník. **6.** Obsah trojúhelníku je $54\,\mathrm{cm}^2$. **7.** Obsah trojúhelníku je $24\,\mathrm{cm}^2$. **8.** Rychlosti lodí byly $18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a $24\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. **9.** Lyžař zamýšlel běžet rychlostí $24\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. **10.** Pomalejší cyklista jel rychlostí $12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

5 Úlohy o společné práci

1. Společně zorají pole za 2 hodiny a 24 minut. **2.** Všechny tři automaty budou pracovat 4 hodiny. **3.** Společně pracovali 15 hodin a odměnu by si měli rozdělit v poměru 1 : 1. **4.** Druhým čerpadlem by se nádrž naplnila za 30 hodin. **5.** Třetí kombajn sám by pole sklidil za $5\frac{1}{4}$ hodiny. **6.** Dělník sám by pracoval 4 dny.

6 Úlohy o směsích

1. Jana koupila 4 levnější a 6 dražších pohlednic. **2.** Pokladní vyplatila 4 stokoruny, 10 padesátikorun a 3 dvacetikoruny. **3.** Bylo použito 55 pětilitrových plechovek. **4.** Spotřebují $20\,\mathrm{m}^3$ vody z vodovodu a $5\,\mathrm{m}^3$ ohřáté vody z kotle. **5.** Použili jsme 5 l chladnější vody. **6.** Přilili jsme vodu o teplotě 20 °C. **7.** Koncentrace Vojtova nápoje byla asi 13,3 %. **8.** Potřebovali jsme $2\frac{1}{3}$ l destilované vody. **9.** Musíme přidat 125 g pevného síranu měďnatého.

7 Rovnice s více neznámými

1. a) Ano; b) ne; c) ne. **2.** a) $x = 3 + 2y$; b) $x = 9 - 3y$; c) $x = 3y - 15$; d) $x = \frac{1}{5}(-3 - 7y)$. **3.** a) $v = 3u - 12$; b) $v = \frac{1}{4}(3 - 2u)$; c) $v = \frac{1}{4}(-u - 6)$; d) $v = \frac{1}{7}(45 + 6u)$. **4.** a) $y = \frac{1}{4}(33x - 17)$; b) $x = \frac{1}{33}(4y + 17)$. **5.** a) $x = 2$, $y = 1$; b) $x = -1$, $y = 0$; c) $x = 1$, $y = 1$; d) $x = 6$, $y = 4$; e) $x = 0$, $y = -4$; f) $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$. **6.** a) $x = -1$, $y = 2$; b) $x = 2$, $y = 3$; c) $x = 1$, $y = 1$; d) $x = -2$, $y = 3$. **7.** a) $p = 3$, $q = 4$; b) $p = \frac{1}{2}$, $q = -3$; c) $p = 3$, $q = -6$; d) $p = 1$, $q = 2$. **8.** a) $u = 3$, $v = 0$; b) $u = 10$, $v = 6$. **9.** a) $a = 6$, $b = -9$; b) $a = 6$, $b = 9$; c) $a = -6$, $b = 9$. **10.** a) $x = 3$, $y = 5$; b) $x = 3$, $y = 6$; c) $x = -3$, $y = 5$; d) $x = -3$, $y = -6$. **11.** a) $x = -2$, $y = -1$; b) $x = 0$, $y = 1$; c) $x = 2$, $y = -3$; d) $x = 3$, $y = -4$. **12.** a) $c = 2$, $d = 10$; b) $c = -3$, $d = -20$. **13.** a) $x = -2$, $y = 3$; b) $x = -3$, $y = 0$; c) $x = 5$, $y = 4$. **14.** a) Nekonečně mnoho; b) jedno; c) nekonečně mnoho; d) žádné; e) nekonečně mnoho; f) nekonečně mnoho. **16.** Např. a) $x = t$, $y = 2 - 3t$, kde $t \in \mathsf{R}$; b) $x = 1 - 2t$, $y = t$, kde $t \in \mathsf{R}$; c) $x = t$, $y = \frac{1}{4}(3t - 7)$, kde $t \in \mathsf{R}$; d) $x = t$, $y = t - 4$, kde $t \in \mathsf{R}$. **17.** a) $x = 1$, $y = -1$; b) $x = 2$, $y = 1$; c) $x = -1$, $y = -1$; d) $x = 0$, $y = 3$. **18.** a) $x = 1$, $y = 2$; b) $x = -\frac{5}{3}$, $y = -\frac{11}{3}$; c) $x = 5$, $y = 2$; d) $x = \frac{1}{5}$, $y = -1$. **19.** a) $x_1 = 1$, $y_1 = -4$ a $x_2 = -1$, $y_2 = -8$; b) $x_1 = -1$, $y_1 = 0$ a $x_2 = 5$, $y_2 = -2$; c) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ a $x_2 = -\frac{8}{3}$, $y_2 = -11$; d) $x_1 = 4$, $y_1 = 1$ a $x_2 = -\frac{16}{3}$, $y_2 = -\frac{11}{3}$. **20.** a) $u_1 = 2$, $v_1 = 2$ a $u_2 = \frac{9}{2}$, $v_2 = -3$; b) $u = 1$, $v = -1$.

8 Slovní úlohy 2

1. Použili 25 sedmilitrových a 5 pětilitrových kanystrů. **2.** Role papíru stála 16 Kč, metr stuhy 3,20 Kč. **3.** První číslo je 93, druhé 76. **4.** Jsou to čísla 74 a 47. **5.** Součin se zmenší o 21. **6.** Úsek mezi A a B měří 9 km, úsek mezi B a C 6 km. **7.** Rychlost jednoho auta byla 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhého 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **8.** Jeden dělník by sám pracoval 20 dnů, druhý 30 dnů. **9.** Popelka měla původně přebrat 2,5 kg čočky a 3 kg hrachu.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. a) $x = 8$; b) $x = 24$; c) $x = 10$; d) $x = 0$. **2.** Rovnice a) a f); rovnice b), d) a h); rovnice c), e) a g). **3.** a) $c = 3$; b) $c = 0$; c) $c = 12$; d) $c = 0$; e) $c = \frac{10}{9}$; f) $c = -\frac{3}{5}$; g) $c = \frac{2}{3}$; h) $c = 0{,}3$. **4.** a) Řešením je každé reálné číslo; b) $y = 0$; c) žádné řešení; d) $y = 2$. **5.** a) Řešením je každé reálné číslo; b) $u = \frac{1}{3}$; c) $u = -10$; d) žádné řešení; e) $u = -2$; f) $u = -\frac{1}{135}$.

Cvičení 2

1. a) $x = \frac{1}{2}$; b) žádné řešení; c) řešením je každé reálné číslo kromě 0. **2.** a) $y = -4$; b) $y = -11$; c) $y = 5$; d) $y = \frac{9}{8}$; e) $y = -\frac{3}{2}$; f) $y = -\frac{4}{3}$. **3.** a) $x = 14$; b) $x = -30$; c) $x = 0$. **4.** a) $z = 0$; b) žádné řešení; c) řešením je každé reálné číslo kromě 1 a -1. **5.** a) $x = -\frac{1}{3}$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = -\frac{10}{3}$; d) $x = \frac{1}{2}$; e) $x = -3$; f) žádné řešení. **6.** Ano, $c = -\frac{7}{4}$.

Cvičení 3

1. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 7$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{9}{2}$; c) $x_1 = 5$, $x_2 = -6$; d) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -4$; e) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; f) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 1$. **2.** a) $y_1 = 0$, $y_2 = 8$; b) $y_1 = 0$, $y_2 = -8$; c) $y_1 = 0$, $y_2 = 9$; d) $y_1 = 0$, $y_2 = -9$; e) $y_1 = 0$, $y_2 = 11$; f) $y_1 = 0$, $y_2 = -12$. **3.** a) $m_1 = 3$, $m_2 = -3$; b) $m_1 = \sqrt{6}$, $m_2 = -\sqrt{6}$; c) žádné řešení; d) $m_1 = 13$, $m_2 = -13$; e) žádné řešení; f) $m_1 = 14$, $m_2 = -14$. **4.** a) $d_1 = 8$, $d_2 = -8$; b) $d_1 = 2$, $d_2 = -2$; c) $d_1 = \sqrt{11}$, $d_2 = -\sqrt{11}$; d) $d_1 = 2$, $d_2 = -2$; e) $d_1 = 1$, $d_2 = -1$; f) žádné řešení. **5.** a) $f_1 = f_2 = -6$; b) $f_1 = f_2 = -\frac{5}{2}$; c) $f_1 = f_2 = \frac{1}{7}$; d) $f_1 = f_2 = 3$. **6.** Oba kořeny $x_1 = \sqrt{14}$ a $x_2 = -\sqrt{14}$ jsou iracionální. **7.** a) $(x+1)\cdot(x+3)$; b) $(x+2)\cdot(x+5)$; c) $(x+5)\cdot(x+6)$; d) $(x+1)\cdot(x+100)$; e) $(x-2)\cdot(x-6)$; f) $(x-1)\cdot(x-9)$; g) $(x-4)\cdot(x-7)$; h) $(x-10)\cdot(x-11)$; i) $(x+3)\cdot(x-4)$; j) $(x+4)\cdot(x-3)$; k) $(x+9)\cdot(x-7)$; l) $(x+8)\cdot(x-11)$. **8.** a) $y_1 = -4$, $y_2 = -11$; b) $y_1 = -1$, $y_2 = 7$; c) $y_1 = 5$, $y_2 = 7$. **9.** a) $\dfrac{x-9}{x+8}$ $(x \neq 9,\ x \neq -8)$; b) $\dfrac{3x+12}{x+12}$ $(x \neq 4,\ x \neq -12)$; c) $\dfrac{3-x}{x-8}$ $(x \neq 8,\ x \neq -3)$. **10.** a) $\dfrac{6x^2+x-52}{(x+4)^2\cdot(x-4)\cdot(x-1)}$ $(x \neq \pm 4,\ x \neq 1)$; b) $\dfrac{1}{(x-1)\cdot(x+2)}$ $(x \neq \pm 1,\ x \neq -2)$. **11.** $\dfrac{z}{(z+2)\cdot(z-3)}$ $(z \neq \pm 3,$

$z \neq -2,\ z \neq -1$). **12.** a) $n_1 = -3,\ n_2 = -7$; b) $n_1 = 7,\ n_2 = -3$; c) $n_1 = 3,\ n_2 = 7$; d) $n_1 = 3,\ n_2 = -7$; e) $n_1 = 21,\ n_2 = -1$; f) $n_1 = -21,\ n_2 = -1$; g) $n_1 = 21,\ n_2 = 1$; h) $n_1 = -21,\ n_2 = 1$. **13.** Např. a) $x^2 - 6x + 9 = 0$; b) $x^2 + 2x + 1 = 0$; c) $x^2 + 5x = 0$; d) $x^2 - 8x = 0$; e) $x^2 - x - 12 = 0$; f) $x^2 - 17x + 66 = 0$. **14.** a) $z_1 = 0,\ z_2 = -6$; b) $z_1 = 0,\ z_2 = 1$; c) $z_1 = 0,\ z_2 = -\frac{9}{4}$; d) $z_1 = 0,\ z_2 = -11$. **15.** a) 1 kořen; b) 2 kořeny; c) 2 kořeny; d) 2 kořeny. **16.** a) $p_1 = 17,\ p_2 = -3$; b) $p_1 = 5,\ p_2 = \frac{1}{2}$; c) žádné řešení; d) $p_1 = 2,\ p_2 = \frac{2}{3}$; e) $p_1 = p_2 = 1$; f) $p_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $p_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **17.** a) $x_1 = 10,\ x_2 = -6$; b) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$; c) $x_1 = 0,\ x_2 = 8$; d) $x_1 = 2,\ x_2 = 10$; e) $x_1 = 4,\ x_2 = -5$. **18.** a) $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$; b) $x_1 = 9,\ x_2 = 4$; c) $x_1 = 8,\ x_2 = -5$; d) $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{3}{2}$; e) $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{4}$; f) žádné řešení.

Cvičení 4

1. Neznámé číslo je 400. **2.** Hledaná čísla jsou 208 a 16. **3.** Hledaná čísla jsou 48 a 15. **4.** Hledané číslo je 36. **5.** Směs obsahovala 77 g jahodového listí a 28 g lipového květu. **6.** Dvě řešení: hledaná čísla jsou 13 a 32 nebo -13 a -32. **7.** Hledaná přirozená čísla jsou 5 a 6. **8.** Dvě řešení: prostřední číslo je 6 nebo -6. **9.** Obsah trojúhelníku je 84 cm^2. **10.** Přepona měří 41 cm, odvěsny 40 cm a 9 cm. **11.** Strany obdélníku měří 6 cm a 12 cm. **12.** Výška je 12 cm. **13.** Dvě řešení: strana čtverce měří 8 cm nebo 12 cm. **14.** Obvod obdélníku je 62 cm, jeho obsah je 240 cm^2. **15.** Mnohoúhelník má 16 stran. **16.** Takový mnohoúhelník neexistuje. **17.** Turnaje se zúčastnilo 16 družstev. **18.** Tomáš se vrátil domů v 8 hodin 24 minut. **19.** Turista šel zpočátku rychlostí 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **20.** Ivan jel rychlostí 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **21.** Lubošova chůze trvala 2 hodiny.

Cvičení 5

1. Ano, společně budou pracovat právě 8 hodin. **2.** Společně pracovali 6 hodin. **3.** Byli hotovi za $\frac{252}{53}$ h, tj. přibližně za $4\frac{3}{4}$ h. **4.** Obě dílny budou společně pracovat $2\frac{2}{5}$ dne. **5.** Obě písařky dohromady napíšou za hodinu 12 stran. **6.** Druhým přívodem by se kašna naplnila za 1 hodinu. **7.** Čerpadlo naplní za minutu 50 m^3 nádrže. **8.** Unikla $\frac{1}{4}$ objemu bazénu. **9.** Stará třídička by pracovala 30 hodin. **10.** Vypouštění nádrže trvalo 10 hodin. **11.** Květa pracovala 30 hodin, Jarka 36 hodin.

Cvičení 6

1. Sekretářka koupila 50 známek po 4,60 Kč a 80 známek po 8 Kč. **2.** Na výletě bylo 29 žáků (15 hochů a 14 dívek). **3.** 1 kg „směsi“ prodávala za 28 Kč. **4.** Maminka musí přilít alespoň $2\frac{18}{21}$ litru a nejvýše $4\frac{8}{19}$ litru vody z vodovodu. **5.** Farmář musí přilít do dodávky pro mlékárnu 9,6 l teplejšího mléka, zůstane mu tedy 0,4 l mléka. **6.** Poměr obou slitin je 9 : 35. **7.** První odlitek obsahuje 25 % mědi. **8.** Je třeba 7,5 g čisté kyseliny borité. **9.** Je třeba $658\frac{2}{3}$ g borové vody. **10.** Maminka musela koupit dvě láhve. **11.** Vzniklo 325 l roztoku. **12.** Kanystr vystačí na 16 lázní. **13.** Musí smíchat $6\frac{2}{3}$ ml 1procentního a $3\frac{1}{3}$ ml 4procentního léku.

Cvičení 7

1. a) Ano; b) ano; c) ne. **2.** a) $x = \frac{1}{3}(12 - 7y)$; b) $x = 4 + 2y$; c) $x = 16y$; d) $x = \frac{1}{3}(-y - 17)$. **3.** a) $q = \frac{1}{3}(p - 1)$; b) $q = \frac{1}{2}(7 + 2p)$; c) $q = \frac{1}{5}(3p - 32)$; d) $q = \frac{1}{9}(2p + 6)$. **4.** a) $x = 7$, $y = 6$; b) $x = 5$, $y = 4$; c) $x = 3$, $y = 2$; d) $x = 0$, $y = 1$; **5.** a) $x = -2$, $y = -3$; b) $x = -3$, $y = 1$; c) $x = 2$, $y = -1$; d) $x = 1$, $y = 1$; **6.** a) $a = 5$, $b = 2$; b) $a = 5$, $b = -2$; c) $a = 5$, $b = -2$; d) $a = -5$, $b = 2$. **7.** a) $x = 1$, $y = 10$; b) $x = 0$, $y = 10$. **8.** a) Nekonečně mnoho; b) žádné; c) nekonečně mnoho; d) jedno. **9.** a) $x = t$, $y = t + 5$, kde $t \in \mathsf{R}$; b) $x = t$, $y = \frac{1}{4}(3t - 1)$, kde $t \in \mathsf{R}$. **10.** a) $a = 1$, $b = 4$; b) $a = 0$, $b = 7$; c) $a = t$, $b = 7 - 3t$, kde $t \in \mathsf{R}$; d) žádné řešení. **11.** a) Pro $y = -3$ je $x = 2$; b) pro $x = 16$ je $y = 4$. **12.** a) $r = 7$, $s = 2$; b) $r = 1$, $s = 3$; c) $r = 7$, $s = 4$. **13.** a) $x = 2$, $y = 5$; b) $x = 3$, $y = -2$. **14.** a) $x = 4$, $y = 10$; b) $x = 0$, $y = 6$. **15.** a) $p = 1$, $q = 5$; b) $p = -1$, $q = 7$; c) $p = 6$, $q = 4$; d) $p = 4$, $q = 1$. **16.** a) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ a $x_2 = -\frac{7}{3}$, $y_2 = -\frac{2}{3}$; b) $x_1 = -3$, $y_1 = -5$ a $x_2 = -9$, $y_2 = -13$; c) $x_1 = 1$, $y_1 = 11$ a $x_2 = 2$, $y_2 = 10$; d) $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ a $x_2 = -1$, $y_2 = -4$. **17.** $a_1 = 2$, $b_1 = 3$ a $a_2 = \frac{4}{9}$, $b_2 = 31$.

Cvičení 8

1. Otci je letos 42 roků, synovi 18 roků. **2.** V první místnosti bylo původně 35 osob. **3.** Vašek má 2 bratry a 4 sestry. **4.** Objednáno bylo 30 stolních a 22 nástěnných kalendářů. **5.** Číslo 82. **6.** Původní roztoky měly koncentrace 60 % a 15 %. **7.** Jeden motocykl se pohybuje rychlostí 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhý rychlostí 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **8.** Průměrná rychlost autobusu je 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, jízdní doba 3 h a délka jeho trasy je 120 km. **9.** Vlaky vyjely v 6.45 h. (Předpokládejme, že od výjezdu do míjení vlaků uplynulo t hodin, osobní vlak jel rychlostí x $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, nákladní vlak rychlostí y $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ze soustavy $x \cdot t = 2y$ a $y \cdot t = \frac{9}{2}y$ vychází $t = 3$.) **10.** Rychlost cyklistů byla 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, rychlost chodce 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **11.** Trasa měřila 180 km. **12.** Honza šel rychlostí 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Vojta rychlostí 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (Předpokládejme, že Honza šel rychlostí x $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Vojta rychlostí y $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Do okamžiku míjení ušel Honza tentýž úsek, který pak chyběl Vojtovi k cíli, tedy $3y$ km, a trvalo mu to $\dfrac{3y}{x}$ h. Podobně Vojta do okamžiku míjení ušel dráhu $\dfrac{8x}{3}$ km za dobu $\dfrac{8x}{3y}$ h. Proto platí $3y - \dfrac{8x}{3} = 4$ a $\dfrac{3y}{x} - \dfrac{8x}{3y} = 2$. Po dosazení y vyjádřeného z první rovnice této soustavy do rovnice druhé a úpravě získáme rovnici $7x^2 - 15x - 18 = 0$, která má jediné kladné řešení $x = 3$.)

Cvičení 9

1. Předpokládejme, že původně měl Bořek b známek, Cyril c známek a Adam $(b + c - 110)$ známek. Po prvním předání měl Adam $\frac{6}{7}(b + c - 110)$ známek a Cyril měl $c + \frac{1}{7}(b + c - 110)$ známek. Po druhém předání měl Adam $\frac{6}{7}(b + c - 110) - 30$ známek a Bořek $(b + 60)$ známek. Soustava

$$\begin{aligned} \tfrac{6}{7}(b + c - 110) &= c + \tfrac{1}{7}(b + c - 110) \\ \tfrac{6}{7}(b + c - 110) - 30 &= b + 60 \end{aligned}$$

má jediné řešení: $b = 210$, $c = 250$. Původně měl Adam 350 známek, Bořek 210 známek a Cyril 250 známek. **2.** Označme x počet mužů a y počet žen zaměstnaných v továrně. Platí $x + y = 1\,440$ a $0{,}187\,5x + 0{,}225y = 0{,}2 \cdot (x + y)$. Tato soustava má jediné řešení: $x = 960$ a $y = 480$. V továrně pracovalo 960 mužů a 480 žen. **3.** Označme x počet desítek a y počet jednotek většího čísla. Pak větší číslo je $10x + y$ a menší je $10y + x$, kde $1 \leqq y < x \leqq 9$. Podmínku pro dělení se zbytkem zapíšeme ve tvaru $10x + y = 3(10y + x) + 5$. Po úpravě dostáváme $7x = 29y + 5$. Protože $x \leqq 9$, platí $29y + 5 \leqq 63$, odkud $y \in \{1, 2\}$. Možnost $y = 1$ nevyhovuje ($29y + 5$ není dělitelné sedmi); pro $y = 2$ vychází $x = 9$. Větší číslo je 92, menší 29. **4.** Označme hledaná čísla $p > m \geqq n$. Z rovnic $p = (m + n)^2$ a $m + n + p = 42$ dostáváme $p = (42 - p)^2$, odkud $p_1 = 49$, $p_2 = 36$. Číslo p_1 je větší než 42, proto nevyhovuje zadání. Je-li $p = 36$, pak $m + n = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3$. Řešením jsou tři trojice čísel $(36, 5, 1)$, $(36, 4, 2)$ a $(36, 3, 3)$. **5.** Označme x hmotnost v kilogramech každé oddělené části. Zbytek prvního kusu pájky má hmotnost $(5 - x)$ kg a obsahuje $\frac{1}{4}(5 - x)$ kg cínu. Slijeme ho s částí oddělenou od druhého kusu pájky, která obsahuje $\frac{1}{3}x$ kg cínu. V takové pájce bude $\left[\frac{1}{4}(5 - x) + \frac{1}{3}x\right]$ kg cínu. Zbytek druhého kusu pájky má hmotnost $(7{,}5 - x)$ kg a obsahuje $\frac{1}{3}(7{,}5 - x)$ kg cínu. Ten slijeme s částí oddělenou od prvního kusu pájky, která obsahuje $\frac{1}{4}x$ kg cínu. V takové pájce bude $\left[\frac{1}{3}(7{,}5 - x) + \frac{1}{4}x\right]$ kg cínu. Aby procento cínu bylo v obou nových kusech pájek stejné, musí platit:

$$\frac{\frac{1}{4}(5 - x) + \frac{1}{3}x}{5} = \frac{\frac{1}{3}(7{,}5 - x) + \frac{1}{4}x}{7{,}5}$$

Tato rovnice má jediné řešení $x = 3$. Každá z oddělených částí musí mít hmotnost 3 kg. **6.** Předpokládejme, že při uzavřeném přítoku vyteče voda z plné nádrže jednou odtokovou trubicí za x hodin. Za hodinu jí tedy vyteče voda o objemu $\dfrac{1}{x}$ nádrže. Dále předpokládejme, že kdybychom uzavřeli všechny odtokové trubice, naplnila by se prázdná nádrž za a hodin, za 1 hodinu by se tedy naplnila $\dfrac{1}{a}$ nádrže. Podle zadání platí $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{18}$ a $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{30}$. Řešením této soustavy je $x = 45$, $a = 90$. Odtud $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{90}$. Jednou odtokovou trubicí při otevřeném přítoku se nádrž vyprázdní za 90 hodin. **7.** Je-li vlastní rychlost veslaře $v\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a rychlost proudu řeky $c\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, platí $v - c = c$, tedy $v = 2c$. Pokud veslař vesluje po proudu řeky, je jeho rychlost $v + c$, tedy $3c$. Po proudu se tedy pohybuje trojnásobnou rychlostí než proti proudu, proto k návratu potřebuje třikrát kratší dobu než k cestě proti proudu. Protože $\frac{3}{4} \cdot 3 = 2\frac{1}{4}$, musí se obrátit po $2\frac{1}{4}$ h, tedy v 17.15 h. **8.** Předpokládejme, že vlastní rychlost veslařů byla $v\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, rychlost proudu řeky byla $c\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a t hodin byla doba společné plavby obou veslařů od přístaviště k lesu. Platí $(v - c) \cdot t = (v + c) \cdot (3 - t)$ a $(v - c) \cdot t = c \cdot \left(\frac{21}{5} - t\right)$, neboť první veslař plul celkem 3 hodiny, zatímco druhý veslař 4 hodiny a 12 minut, tj. $\frac{21}{5}$ hodiny. Uvedené rovnice upravíme na $2v \cdot t = 3v + 3c$ a $5v \cdot t = 21c$, odkud $10v \cdot t = 5 \cdot (3v + 3c) = 42c$. Z poslední rovnice vychází $5v = 9c$, takže rovnici $5v \cdot t = 21c$ lze přepsat jako $9c \cdot t = 21c$, odkud $t = \frac{7}{3}$. Cesta od přístaviště k lesu trvala 2 hodiny a 20 minut. **9.** Označme x délku nákladního vlaku (v metrech) a v jeho rychlost (v $\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Vzhledem ke strojvůdci rychlíku se nákladní vlak pohybuje rychlostí $(v + 16)\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Proto platí $12(v + 16) = x$ a $20(v + 16) = x + 200$, odtud $v = 9$ a $x = 300$. Nákladní vlak měl délku 300 m a jel rychlostí $9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **10.** Označme po řadě j_1, o_1 a v_1 dobu jízdy, dobu odpočinku a rychlost prvního cyklisty. Podobně j_2, o_2 a v_2

znamenají dobu jízdy, dobu odpočinku a rychlost druhého cyklisty. Z podmínek úlohy platí: $o_1 + j_1 = o_2 + j_2$, $j_1 = 2o_2$ a $j_2 = 4o_1$. Dosadíme-li do první rovnice vyjádření $o_2 = \frac{1}{2}j_1$ a $o_1 = \frac{1}{4}j_2$, vyjde po úpravě $2j_1 = 3j_2$, tzn. $j_1 : j_2 = 3 : 2$. Protože oba cyklisté urazili stejnou dráhu, je poměr jejich rychlostí roven převrácenému poměru dob jejich jízdy: $v_2 : v_1 = j_1 : j_2 = 3 : 2 = 1{,}5$. Druhý cyklista tedy jel 1,5krát rychleji než první. **11.** Jedna a táž tramvaj vyjíždí z téže konečné zastávky v intervalu 100 minut. Předpokládejme, že původně jezdilo na trati x tramvají v intervalu y minut. Po změně jezdilo na trati $(x + 5)$ tramvají v intervalu $(y - 1)$ minut. Součin počtu tramvají a délky intervalu udává dobu mezi „sousedními“ výjezdy jedné tramvaje z pevné konečné zastávky. Proto platí: $xy = 100$ a $(x + 5) \cdot (y - 1) = 100$. Řešením této soustavy je dvojice $x = 20$ a $y = 5$. Původně tedy na trati jezdilo 20 souprav s intervalem 5 minut, nyní zde jezdí 25 souprav s intervalem 4 minuty. **12.** Je jasné, že tramvaj přijela nejprve do stanice A. Označme v rychlost chlapců, $x \cdot v$ rychlost tramvaje, $5d$ vzdálenost stanic A a B. Petr dorazil do kina za dobu $\dfrac{3d}{v}$. Za stejnou dobu urazil Milan nejprve vzdálenost $5d$ v tramvaji (rychlostí $x \cdot v$) a vzdálenost $2d$ pěšky (rychlostí v). Tato doba byla tedy rovna $\dfrac{5d}{xv} + \dfrac{2d}{v}$. Rovnici $\dfrac{3d}{v} = \dfrac{5d}{xv} + \dfrac{2d}{v}$ upravíme do tvaru $3 = \dfrac{5}{x} + 2$, z něhož najdeme jediné řešení $x = 5$. Chlapci šli rychlostí 5krát menší, než byla průměrná rychlost tramvaje.

VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

1. a) -28; b) 7. **2.** a) $x = 5$; b) $x = 2$; c) $x = 1$; d) $x = 5$ nebo $x = \frac{5}{3}$. **3.** a) $x = 2$; b) $x = 9$; c) $x = 2$. **4.** a) Žádné řešení; b) $x = 0$; c) řešením je každé reálné číslo; d) žádné řešení. **5.** a) $m = 9$; b) $m = -\frac{2}{3}$; c) řešením je každé reálné číslo; d) $m = \frac{5}{11}$. **6.** a) $b = -1$; b) $b = -3$. **7.** a) $x = 2$; b) $x = 1$; c) $x = 0$; d) $x = -1$; e) $x = -5$. **8.** a) Řešením je každé reálné číslo; b) řešením je každé reálné číslo; c) řešením je každé reálné číslo. **9.** a) Ne, kořen $x = -\frac{7}{18}$ v žádném z daných intervalů neleží; b) ano, kořen $x = -\frac{45}{16}$ leží v intervalu $\langle -3, -2 \rangle$. **10.** a) $x = 32$; b) $x = 13$. **11.** a) $x = 2$; b) řešením je každé reálné číslo kromě $x = 0$; c) řešením je každé reálné číslo kromě $x = 0$; d) $x = 12$. **12.** a) $t = -4$; b) $t = -1$; c) $t = \frac{5}{3}$; d) žádné řešení; e) $t = -1$; f) $t = 3$. **13.** a) $x = 2$; b) $x = -42$; c) $x = 4$; d) žádné řešení. **14.** a) $z = 2$; b) $z = -4$; c) $z = -3$; d) $z = -1$. **15.** a) $x = 4$; b) $x = -\frac{5}{2}$; c) $x = \frac{1}{4}$; d) $x = -\frac{1}{3}$; e) $x = -15$; f) $x = 15$. **16.** a) $x_1 = x_2 = 9$; b) $x_1 = x_2 = -11$; c) $x_1 = x_2 = \frac{7}{2}$; d) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{5}$; e) $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; f) $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. **17.** a) $s_1 = 9$, $s_2 = -9$; b) $s_1 = 1$, $s_2 = -1$; c) $s_1 = 5$, $s_2 = -5$; d) $s_1 = 7$, $s_2 = -7$; e) $s_1 = 8$, $s_2 = -8$; f) žádné řešení; g) žádné řešení; h) žádné řešení. **18.** a) $p = 2$; b) $p = 1$; c) $p_1 = 0$, $p_2 = -2$; d) $p = 1$. **19.** a) $(x + 1) \cdot (x + 20)$; b) $(x + 7) \cdot (x - 11)$; c) $(x + 1) \cdot (x + 50)$; d) $(x - 10) \cdot (x - 12)$; e) $(x + 2) \cdot (x + 100)$; f) $(x + 1) \cdot (x + 12)$; g) $(x + 5) \cdot (x - 10)$; h) $(x - 5) \cdot (x - 10)$; i) $(x - 5) \cdot (x + 10)$. **20.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = -15$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = -8$; c) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -7$; e) $x_1 = 4$, $x_2 = 5$; f) $x_1 = 3$, $x_2 = -6$. **21.** a) $\dfrac{x + 2}{x + 8}$

$(x \neq -8)$; b) $-\dfrac{5}{x+6}$ $(x \neq 7,\ x \neq -6)$; c) $\dfrac{x-1}{x-3}$ $(x \neq 3,\ x \neq -20)$; d) $\dfrac{x-7}{2x-10}$ $(x \neq 2,$ $x \neq 5)$; e) $\dfrac{x-1}{3}$ $(x \neq 29)$; f) $\dfrac{12-x}{x+4}$ $(x \neq 12,\ x \neq -4)$. **22.** a) $\dfrac{3}{(b+2)^2}$ $(b \neq 11,$ $b \neq -2)$; b) $\dfrac{b+5}{b-5}$ $(b \neq \pm 1,\ b \neq \pm 5,\ b \neq -3)$. **23.** a) Dvě řešení: při doplnění čísla -8 je $x_1 = x_2 = 4$, při doplnění čísla 8 je $x_1 = x_2 = -4$; b) čtyři řešení: při doplnění čísla 17 je $x_1 = -1$ a $x_2 = -16$, při doplnění čísla 10 je $x_1 = -2$ a $x_2 = -8$, při doplnění čísla -10 je $x_1 = 2$ a $x_2 = 8$, při doplnění čísla -17 je $x_1 = 1$ a $x_2 = 16$. **24.** a) $b_1 = 0,\ b_2 = 5$; b) $b_1 = 0,\ b_2 = 3$; c) $b = -1$; d) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$. **25.** a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$; b) žádné řešení; c) $x_1 = 8,\ x_2 = 9$; d) $x_1 = 5,\ x_2 = -2$; e) $x_1 = x_2 = 3$; f) $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{7}{3}$. **26.** a) $x_1 = 4,\ x_2 = -3$; b) $x_1 = 8,\ x_2 = -4$; c) $x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = -\frac{1}{3}$; d) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; e) $x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = -4$. **27.** Hledaná čísla jsou 86 a 12. **28.** Jde o číslo 24. **29.** Jitce bude 20 let, Aleně 12 let. **30.** Za 15 let. **31.** Měli 3 kombajny. **32.** $p = 25$. **33.** Dvě řešení: délka strany čtverce je 20 cm nebo 15 cm. **34.** Asi 87 %. **35.** a) Ano, je to 25úhelník; b) ne; c) ano, je to sedmiúhelník. **36.** Polibků bylo 270. **37.** Každá dvě po sobě jdoucí přirozená čísla. **38.** Dvě řešení: čísla 4, 5, 6 a 7 nebo -1, 0, 1 a 2. **39.** Hlediště mělo původně 20 řad. **40.** Větších konvic je 40 a menších je 24. **41.** Řeka tekla rychlostí 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **42.** Plánovaná rychlost vlaku byla 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, skutečná 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **43.** Třetí auto jelo rychlostí 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (Za neznámou t zvolíme čas v hodinách, který uplyne od vyjetí 1. auta po jeho dostižení „pronásledovatelem“. Z rovnice $\dfrac{40t}{t-\frac{1}{2}} = \dfrac{50(t+\frac{3}{2})}{t+1}$ vychází $t = \frac{3}{2}$. Rychlost v (v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) „pronásledovatele“ určíme např. z rovnice $v = \dfrac{40t}{t-\frac{1}{2}}$.) **44.** Cesta z A do B měří 5,5 km. **45.** Dvě řešení: Karel čekal buď 35 minut, nebo 20 minut. (Pro Mirkovu plánovanou rychlost v (v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) platí $\dfrac{14}{v} = \dfrac{7{,}5}{v-2} + \dfrac{1}{2}$, odtud $v_1 = 8$ a $v_2 = 7$. V prvním případě by mu cesta měla trvat $1\frac{3}{4}$ hodiny, ve druhém 2 hodiny, ve skutečnosti mu trvala $2\frac{1}{3}$ hodiny.) **46.** Trasa byla dlouhá 15 km. (Měří-li celá trasa x km, je rychlost prvního cyklisty $\dfrac{x-1}{\frac{7}{10}}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, tj. $\dfrac{10(x-1)}{7}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, rychlost druhého $\dfrac{x-2}{\frac{13}{15}}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, tj. $\dfrac{15(x-2)}{13}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Z rovnice $\dfrac{x-2}{\frac{10}{7}(x-1)} = \dfrac{x-1}{\frac{15}{13}(x-2)} - \dfrac{17}{60}$ dostaneme $x = 15$.) **47.** Úseky okruhu měří 6 km, 8 km a 10 km, celý okruh 24 km. (Závodník jel t hodin jak po silnici, tak po polní cestě. Proto přepona pravoúhlého trojúhelníku měří $(30t)$ km, kratší odvěsna $(21t-1)$ km a delší odvěsna $(21t+1)$ km. Z Pythagorovy věty $(2t-1)^2 + (2t+1)^2 = (30t)^2$ vychází $t = \frac{1}{3}$.) **48.** Hodinky A se za 24 hodin předcházejí o půl minuty. (Za 1 den (tj. 24 hodin) se hodinky A předejdou o x minut, hodinky B o $(x + \frac{1}{2})$ minut. Hodinky A ukážou správný čas za $\dfrac{2}{x}$ dnů, hodinky B za $\dfrac{3}{x+\frac{1}{2}}$ dnů. Z rovnice $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{x+\frac{1}{2}} + 1$ vychází $x = \frac{1}{2}$.) **49.** Balení bude trvat 3 hodiny. **50.** Napouštění bazénu trvalo 10 hodin. **51.** Loni potřebovali 10 pracovních dnů. **52.** První dělník by sám pracoval 10 dnů. **53.** Společných jízd bylo 18. **54.** Zásoba vystačila ještě na 21 dnů. **55.** Rybník se naplní za necelých 25 dnů. **56.** Výkonnější čerpadlo by nádrž naplnilo za 6 hodin. **57.** Všichni tři dělníci musí začít pracovat asi 4 minuty před 8. hodinou ranní. **58.** Poměr odměn prvního a druhého dělníka by měl být 3 : 1. **59.** Poměr výkonností obou kopáčů je 2 : 3 nebo 3 : 2 (pořadí kopáčů není zadáním určeno). **60.** V první dílně ušili denně průměrně 54 obleků. **61.** První jeřáb by náklad vyložil za 25 hodin, druhý za 20 hodin. **62.** Ano, trvalo to o 2 hodiny déle. **63.** Denně měli vylovit 100 q ryb. **64.** Jana poslala 14 dopisů a 9 pohlednic. **65.** Na kurs přijelo 30 dívek a 60 chlapců. **66.** Maminka měla původně připraveno 33 prázdných lahví. **67.** Lékárnice potřebuje 50 g první směsi a 75 g druhé směsi. **68.** Musíme vzít 7 kg první slitiny a 21 kg druhé slitiny. **69.** Radim musí ochladit převařenou vodu na teplotu 51 °C. **70.** Andrea. **71.** Milan smíchal 28 ml peroxidu a 222 ml vody. **72.** Technik musí použít asi 218,8 l vody. **73.** Služba potřebovala asi 1,7 l roztoku a asi 18,3 l vody. **74.** Lékárnice musí přidat 16 g desetiprocentní masti. **75.** Učitel musí smíchat asi 0,35 dm^3 96procentního a asi 1,65 dm^3 34procentního roztoku kyseliny sírové. **76.** a) Ne; b) ne; c) ano; d) ne. **77.** a) $x = \frac{1}{2}(-1-2y)$; b) $y = \frac{1}{2}(-1-2x)$. **78.** $x = 3$, $y = 1$. **79.** a) $a = 3$, $b = 5$; b) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{5}$; c) $a = -3$, $b = \frac{1}{5}$; d) $a = -\frac{1}{3}$, $b = 3$; e) $a = 0$, $b = 5$; f) $a = \frac{2}{5}$, $b = 0$. **80.** a) $y = 11$, $z = 17$; b) $y = 3$, $z = -10$. **81.** a) Pro $n = 1$ je $m = 2$, pro $n = -20$ je $m = -7$; b) pro $m = 2$ je $n = 1$, pro $m = 5$ je $n = 8$. **83.** a) Žádné; b) jedno; c) nekonečně mnoho; d) jedno. **84.** a) $x = -4$, $y = -5$; b) $x = -2$, $y = 5$; c) žádné řešení; d) např. $x = t$, $y = \frac{1}{4}(3t+2)$, kde $t \in \mathsf{R}$; e) např. $x = t$, $y = \frac{1}{3}(16-9t)$, kde $t \in \mathsf{R}$; f) $x = 0$, $y = 3$; **85.** $a = 2$, $b = 5$. **86.** a) $m = 2$, $o = 4$; b) $m = 3$, $o = 2$. **87.** a) $x = 5$, $y = 3$; b) $x = -3$, $y = 10$. **88.** a) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ a $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 5$; b) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ a $x_2 = \frac{7}{5}$, $y_2 = \frac{7}{4}$. **89.** Židle jsou 4, verpánky 3 a lidí je 7. **90.** Hledané číslo je 77. **91.** Je to číslo 37. **92.** Otci je 49 let, matce 36 let a Markovi 13 let. (Označme po řadě x, y, z věk otce, matky a Marka. Platí $x = y + z$, navíc součet $x + y + z$ je jedním z čísel 97, 98, 99. Protože číslo $2x$ je sudé, platí $2x = 98$, tedy $x = 49$, a proto $z = 4 + 9 = 13$ a $y = 49 - 13 = 36$.) **93.** Litr plnotučného mléka obsahuje 35 g tuku. **94.** Hospodyně má dát do třetího hrnce čtyřikrát více soli než poprvé do prvního hrnce. **95.** Vzdálenost míst A, B je 8 km. **96.** Nejrychleji plaval třetí plavec, a to rychlostí 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. (Nechť třetí plavec uplaval x metrů za t sekund, než dostihl první dva plavce. Plaval tedy rychlostí $v_3 = \frac{x}{t}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. První plavec plaval rychlostí $v_1 = \frac{x}{t+10}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, druhý rychlostí $v_2 = \frac{x}{t+5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Porovnáním časů od společného setkání po míjení druhého a třetího plavce dostaneme rovnici $\frac{(55-x)+9}{v_3} = \frac{(55-9)-x}{v_2}$, porovnáním časů od společného setkání po míjení prvního a třetího plavce zase rovnici $\frac{(55-x)+9+6}{v_3} = \frac{(55-9-6)-x}{v_1}$. Po dosazení a úpravě vyjdou rovnice $(64-x)\cdot t = (46-x)\cdot(t+5)$ a $(70-x)\cdot t = (40-x)\cdot(t+10)$. Řešením poslední soustavy je $t = 10$ a $x = 10$.) **97.** První chodec šel rychlostí 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, druhý rychlostí 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **98.** Stoupání měří 3 km, klesání 4,5 km. **99.** Společně sežerou ovci za $\frac{6}{11}$ hodiny. **100.** Dvě řešení: Stádo má 16 nebo 48 opic.

RNDr. Jiří Herman
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií
Rovnice a jejich soustavy

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1,
roku 1999
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Sazbu programem TEX a pérové obrázky
připravil Jura Charvát
Vytiskly Moravské tiskárny, a. s.,
Tiskárna Olomouc, Studentská 5, 771 64 Olomouc

1. vydání

9511194

ISBN 80-7196-137-X

SOUSTAVA ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 8 \\ -3x + 7y &= 17 \end{aligned}$$

Jak vyloučit jednu neznámou?

Srovnávací metoda

$$\left.\begin{array}{lcl} 2x + 5y = 8 & \longrightarrow & x = \dfrac{8-5y}{2} \\ -3x + 7y = 17 & \longrightarrow & x = \dfrac{7y-17}{3} \end{array}\right\} \quad \frac{8-5y}{2} = \frac{7y-17}{3}$$

Dosazovací metoda

$$\left.\begin{array}{lcr} 2x + 5y = 8 & \longrightarrow & x = \dfrac{8-5y}{2} \\ & & -3x + 7y = 17 \end{array}\right\} \quad -3 \cdot \frac{8-5y}{2} + 7y = 17$$

Sčítací metoda

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x + 5y = 8 & \xrightarrow{\cdot 3} & 6x + 15y = 24 \\ -3x + 7y = 17 & \xrightarrow{\cdot 2} & -6x + 14y = 34 \end{array}\right\} \oplus \quad 29y = 58$$

Počet řešení

$x + y = 0$ $x - y = 0$	jediné řešení	$x = 1, \quad y = -1$
$x + y = 0$ $x + y = 3$ rovnice si odporují	žádné řešení	
$x + y = 1$ $2x + 2y = 2$ rovnice vypovídají totéž	nekonečně mnoho řešení	$x = t, \quad y = 1 - t$ $(t \in \mathsf{R})$

KVADRATICKÁ ROVNICE

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (a \neq 0)$$

ax^2 je kvadratický člen, bx je lineární člen, c je absolutní člen

Řešení ve zvláštních případech

$c = 0$	$x^2 - 3x = 0$ $\downarrow$ vytknutím neznámé $x(x-3) = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = 3$
$b = 0$	$4x^2 - 9 = 0$ $\downarrow$ podle vzorce $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ $(2x+3)(2x-3) = 0 \implies x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = \frac{3}{2}$
	$4x^2 + 9 = 0$ rovnice nemá řešení
$b \neq 0$ $c \neq 0$	$x^2 + 4x + 4 = 0$ $\downarrow$ podle vzorce $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ $(x+2)^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = -2$
	$x^2 - 10x + 25 = 0$ $\downarrow$ podle vzorce $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$ $(x-5)^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 5$
	$x^2 + 3x - 4 = 0$ $\downarrow$ uhádnutím rozkladu $(x-1)(x+4) = 0 \implies x_1 = 1,\ x_2 = -4$ $x^2 + bx + c = (x+u)(x+v)$ $b = u + v \qquad 3 = (-1) + 4$ $c = u \cdot v \qquad -4 = (-1) \cdot 4$

ŘEŠENÍ POMOCÍ DISKRIMINANTU $D = b^2 - 4ac$

$D < 0$	rovnice nemá řešení	$x^2 - 4x + 7 = 0$ $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -12 < 0$
$D = 0$	rovnice má dvojnásobný kořen $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$9x^2 - 12x + 4 = 0$ $D = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$ $x_1 = x_2 = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{2}{3}$
$D > 0$	rovnice má dva různé kořeny $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	$6x^2 - 11x + 3 = 0$ $D = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49$ $x_1 = \frac{-(-11) + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{3}{2}$ $x_2 = \frac{-(-11) - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$

PROMETHEUS

9511194

ISBN 80-7196-137-X