PROMETHEUS

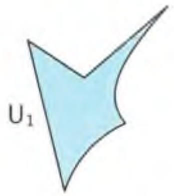
Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

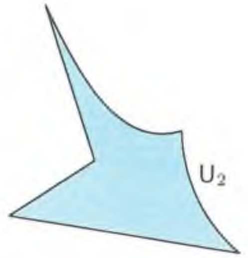
Matematika

Podobnost a funkce úhlu

Jč
m+f

Podobnost útvarů





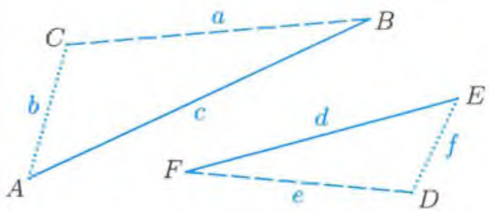
$\mathsf{U}_1 \sim \mathsf{U}_2$

U_1 je podobný U_2
s koeficientem podobnosti $\frac{2}{3}$
(zmenšení U_2)

$\mathsf{U}_2 \sim \mathsf{U}_1$

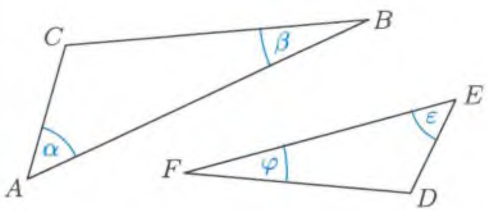
U_2 je podobný U_1
s koeficientem podobnosti $\frac{3}{2}$
(zmenšení U_1)

Podobnost trojúhelníků



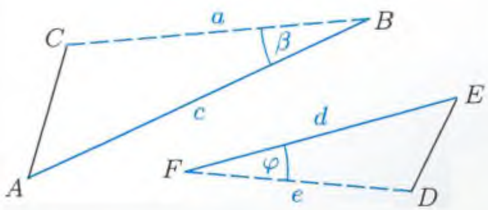
$$\underbrace{\frac{d}{c} = \frac{e}{a} = \frac{f}{b}}_{\triangle DEF \sim \triangle CAB}$$

(věta *sss*)



$$\underbrace{\varphi = \beta, \quad \varepsilon = \alpha}_{\triangle DEF \sim \triangle CAB}$$

(věta *uu*)



$$\underbrace{\frac{d}{c} = \frac{e}{a}, \quad \varphi = \beta}_{\triangle DEF \sim \triangle CAB}$$

(věta *sus*)

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Podobnost a funkce úhlu

RNDr. Jiří HERMAN, Ph.D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

Podobnost a funkce úhlu

PROMETHEUS

Publikace byla připravena ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali RNDr. Jura Charvát, CSc., a RNDr. Milan Ryšavý.

Koordinátor učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Revizi výsledků provedl RNDr. Jura Charvát, CSc.

Schválilo MŠMT ČR, č. j. 23096/2000–22, dne 27. 7. 2000 k zařazení do seznamu učebnic pro základní školy a víceletá gymnázia jako součást ucelené řady učebnic pro vyučovací předmět matematika s dobou platnosti šest let.

1. vydání

ISBN 80-7196-206-6

OBSAH

Na vysvětlenou ...

Šestnáctý sešit z řady učebnic matematiky pro nižší třídy víceletých gymnázií a pro třídy základních škol s rozšířenou výukou matematiky, který právě dostáváte do rukou, je věnován základním poznatkům o *podobných útvarech* a *goniometrických funkcích*.

Připomínáme, že cílem našeho projektu je vytvořit ve formě řady 17 sešitů úplnou a soběstačnou pomůcku pro výuku matematiky v prvních čtyřech ročnících víceletého gymnázia. Proto jsou sešity sestaveny tak, aby je bylo možno použít jak při výkladu nové látky či jejím procvičování ve vyučovacích hodinách, tak i při domácí přípravě žáků. Kromě toho věříme, že bohatý příkladový materiál usnadní učitelům zadávání domácích úkolů a umožní žákům důkladně si probrané učivo procvičit. Zvídaví žáci také najdou mezi příklady řadu obtížnějších úloh.

Zmíněné cíle ovlivnily rozsah i formu textu. Zopakujme stručně, jakým způsobem:

Výklad nového učiva je zpravidla uveden motivující otázkou (značenou otazníkem na okraji stránky). Nové pojmy, poznatky a pravidla jsou pak podrobně vysvětlovány a zdůvodňovány tak, aby je žák v případě potřeby mohl zvládnout samostatným studiem. Nezakrýváme, že naše učebnice jsou psány pro žáky s hlubším zájmem o matematiku a další přírodovědné předměty. Těm jsou určeny i drobnějším písmem (petitem) tištěné pasáže, které přesahují standardní rámec učiva.

U řešených příkladů někdy uvádíme více různých postupů vedoucích k cíli, aby je žáci mohli sami srovnat. Tak se je pokoušíme naučit tomu, co je pro práci v matematice zásadní: umět se podívat na jednu situaci z různých hledisek. Rovněž považujeme za důležité, aby se žáci naučili vlastní řešení srozumitelně a přehledně zapisovat. Proto jsme do učebnice zařadili ukázky „opsané" ze žákovských sešitů, které by mohly žákům posloužit jako vzory takových zápisů.

Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve *větách*, které jsou graficky vyznačeny *rámečky*. Nejedná se nám v žádném případě o signál k bezduchému memorování, ale o výzvu, aby se žáci nad obsahem těchto vět důkladně zamysleli a správně je pochopili. To lze kontrolovat *průběžnými úkoly*, v textu značenými . Ke kontrole zvládnutí větších celků jsou určena *cvičení* uváděná za jednou či dvěma kapitolami. Závěrečná *souhrnná cvičení* tvoří vlastně sbírku úloh k tématu celého sešitu.

Většina úkolů, cvičení i souhrnných cvičení je na konci sešitu opatřena výsledky. Příklady určené k samostatné práci žáků označujeme někdy (pro lepší orientaci) těmito symboly s uvedenými významy:

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
∗ – obtížnější příklad
∗∗ – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Na závěr připojujeme přehled titulů všech sešitů naší řady:

Prima

Úvodní opakování
Kladná a záporná čísla
Dělitelnost
Osová a středová souměrnost

Sekunda

Racionální čísla. Procenta
Trojúhelníky a čtyřúhelníky
Hranoly
Výrazy 1

Tercie

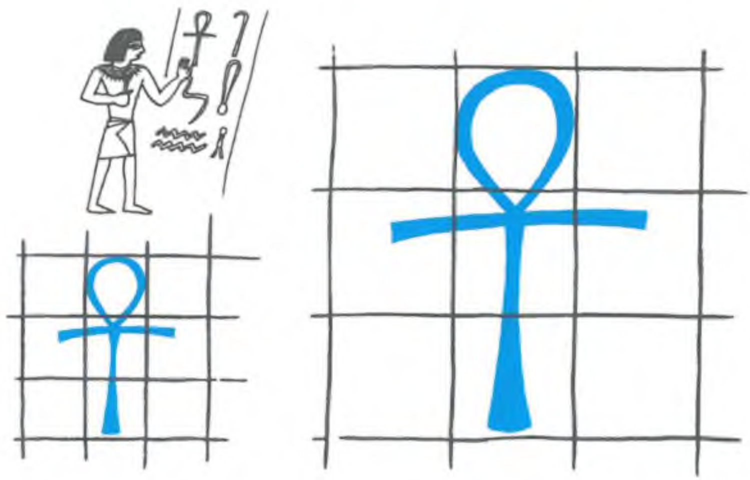
Rovnice a nerovnice
Kruhy a válce
Úměrnosti
Geometrické konstrukce
Výrazy 2

Kvarta

Rovnice a jejich soustavy
Funkce
Podobnost a funkce úhlu
Jehlany a kužely

ÚVOD

Obdivujeme-li krásu některého ornamentu, těšíme se z tvarů křivek a obrazců, které ho vytvářejí, lahodí nám jejich symetrie či „harmonie" poměrů různých délek nebo vzdáleností. Zmíněné vlastnosti se zachovají, i když ornament nakreslíme v jiné velikosti. Toho využívali již staří Egypťané při výzdobě svých velkolepých staveb bohatými kresbami a reliéfy. Přenášeli je na zdi z připravených malých nákresů pomocí dvou čtvercových sítí: menší sítě pokrývající nákres a větší sítě, kterou sestrojili na zdi; celý obrázek pak překreslovali postupně po jednotlivých čtvercích.



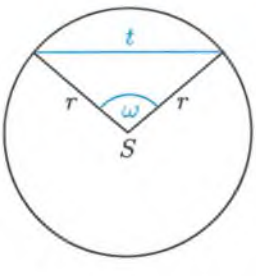
Porovnávání obrazců, které se sice liší svou velikostí, ne však svým tvarem, je velmi účinnou geometrickou metodou s širokým praktickým uplatněním v astronomii, architektuře, optice, geodézii, kartografii i jiných oborech. Proto si *obrazce téhož tvaru* samozřejmě zasloužily přesné matematické vymezení a pojmenování: říkáme jim *podobné útvary*. Nejdůležitějším příkladem podobných (rovinných) útvarů jsou bezesporu *podobné trojúhelníky*, neboť právě jejich vlastnosti uplatňujeme téměř vždy, když řešíme úlohy o podobných útvarech nebo úlohy, v nichž se „podobnostní" tematika projeví až v průběhu řešení.

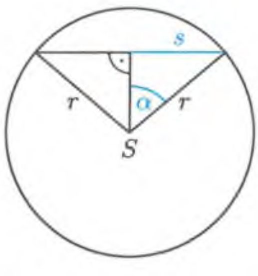
Podobné trojúhelníky využívali stavitelé egyptských pyramid. Hrany všech pyramid totiž svírají s vodorovnou rovinou týž úhel; domníváme se, že byl přenášen právě pomocí trojúhelníků s určeným poměrem stran. Nasvědčuje tomu úloha o vyměřování pyramid z *Rhindova papyru* (asi z r. 1650 před Kristem).

Některé důležité poznatky o úměrných úsečkách a podobných útvarech objevili staořečtí matematikové (zvaní *pythagorejci*) v 6. a 5. století před Kristem. Použili je k řešení takových důležitých úloh, jako jsou rozdělení úsečky v daném poměru nebo sestrojení třetí a čtvrté úměrné, tj. konstrukční řešení rovnic $a : b = b : x$ a $a : b = c : y$, ve kterých jsou a, b, c délky dané a x, y délky neznámé.

Z praktických potřeb starověkých civilizací (sestavit funkční kalendář, určit kurs lodi na širém moři podle postavení hvězd, měřit denní čas podle pohybu Slunce, určit vzdálenosti zeměpisných míst a nakreslit mapu daného území) rostl význam přesného měření stran a úhlů trojúhelníků a jejich výpočtů z daných prvků. Pravidla těchto výpočtů dnes tvoří ucelený systém, matematický obor zvaný *trigonometrie* (slovo řeckého původu, v doslovném překladu „měření trojúhelníku"). První známé trigonometrické poznatky spojujeme s astronomií starých Babyloňanů. Staří Řekové je od nich převzali po Alexandrově tažení do Asie (356–323 před Kristem), včetně vyjadřování velikostí úhlů ve stupních.

Největší zásluhy o rozvoj starořecké trigonometrie mají Hippokrates z Chiu, Hipparchos, Menelaos z Alexandrie a Klaudios Ptolemaios. Tito učenci již uměli redukovat výpočty prvků obecného trojúhelníku na výpočty prvků trojúhelníků rovnoramenných, jejichž základny jsou vlastně tětivy kružnic se středy v protilehlých vrcholech. Zároveň správně vytušili, že *přesnou* délku tětivy t, která v kružnici o poloměru r odpovídá středovému úhlu ω (obrázek vlevo), nelze obecně *vyčíslit* z velikosti úhlu ω žádným aritmetickým postupem (tj. užitím konečného počtu operací $+$, $-$, $\times$, $:$ a $\sqrt{\ }$). Proto bylo nutné s ohledem na naléhavé potřeby praxe délky tětiv t v závislosti na úhlu ω zjišťovat alespoň přibližně a poskytnout je veřejnosti v příhodné formě *tabulek*.





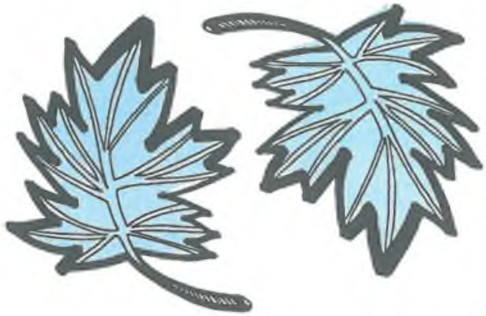
Tak například Ptolemaios tabeloval délky tětiv pro středový úhel ω v rozmezí od 0,5 stupně do 180 stupňů s intervalem 0,5° (při jednotce délky rovné jedné šedesátině poloměru kružnice). Nebudeme vysvětlovat, jak tyto přibližné délky Ptolemaios *počítal*, poznamenejme jen, že je prakticky nemožné dosáhnout přesnosti Ptolemaiových hodnot (šest platných číslic) pouhým rýsováním a měřením.

Ve středověku převzali vedoucí roli v trigonometrii (podobně jako v ostatních matematických oborech) obyvatelé Indie, zemí střední Asie a Blízkého východu. Kromě objevů nových vzorců přišli s důležitou koncepční změnou: za základní prostředek výpočtů vybrali nikoliv závislost délky tětivy t na středovém úhlu ω, nýbrž závislost délky „půltětivy“ s na polovičním středovém úhlu α (pravý obrázek na předchozí straně). Tato zdařilá změna dovolila zavést několik funkcí zmíněného úhlu α pomocí poměrů stran pravoúhlého trojúhelníku, jehož vrcholy jsou krajní body příslušné „půltětivy“ spolu se středem S uvažované kružnice. O několik století později tyto funkce prokázaly svůj význam v matematické analýze i dalších oborech, které tematicky s výpočty prvků trojúhelníků příliš nesouvisí.

Ptolemaiův úctyhodný počtářský výkon při sestavování tabulek délek tětiv byl v pozdější středověké a novověké historii mnohokrát překonán. Tak například *Rhaeticus*, žák *Mikuláše Koperníka*, pracoval po roce 1541 s řadou pomocníků po 12 let na tabulkách, ze kterých lze určovat délky tětiv s přesností na 15 platných číslic. Sestavování takových tabulek bylo současně i stimulem ke zdokonalování teorie stojící v pozadí příslušných výpočtů, a tak se objevovaly nové trigonometrické vzorce a poučky. V dnešní době trigonometrické tabulky ztratily svůj význam, nahradily je totiž počítačové programy, které jsou založeny na vyjádření funkcí úhlů nekonečnými řadami. Samotná trigonometrie však svůj význam neztratila, bez jejích výsledků a metod se neobejdeme ani v nejnovějších oblastech vědy a techniky při vyhodnocování údajů o prostorových vztazích (navigační programy letadel, raket a kosmických lodí, modelování objektů na počítačích architektů a designérů, počítačová tomografie v lékařství apod.).

1 PODOBNOST ÚTVARŮ

Na obrázku jsou nakresleny dva listy:



Nejspíš usoudíte, že jsou „stejné“ – to znamená, že mají stejný „tvar“ i stejnou „velikost“, liší se jen umístěním v rovině. Víte již, že takové útvary se v geometrii nazývají *shodné*. O shodnosti obou listů se můžeme přesvědčit tak, že jeden z nich překreslíme na průsvitný papír a získanou kopii položíme na druhý list tak, aby se s ním kryla.

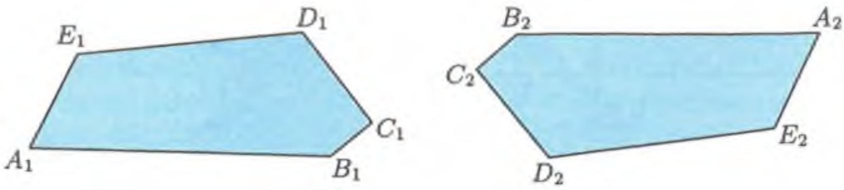
Na dalším obrázku jsou dva listy, které se svou „velikostí“ zjevně liší, „tvar“ však mají stejný.

Co vlastně tvrzení o „stejném tvaru“ znamená a jak ho prakticky ověřit?

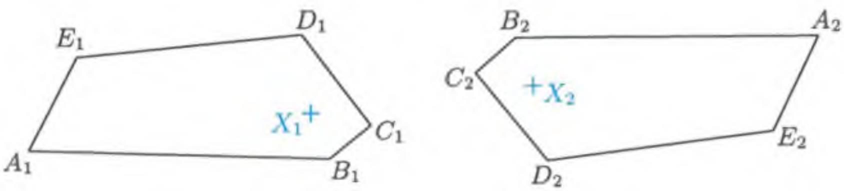
Jednoduchý pokus s průsvitným papírem tentokrát nestačí. Pomohl by nám však zvětšovací přístroj, s jehož pomocí bychom začali například menší list postupně zvětšovat, a sledovali bychom, zda se v některém okamžiku zvětšenina shoduje s větším listem. Pokud se tak stane, řekneme, že rovinné útvary, které dané dva listy znázorňují, jsou *podobné*. Základním vlastnostem podobných útvarů se nyní budeme věnovat podrobně. Nejdříve si však připomeneme podmínku, která zaručuje shodnost dvou útvarů.

? Kdy jsou dva útvary *shodné*?

Na obrázku vidíte dva shodné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E_1$ a $A_2B_2C_2D_2E_2$.



Víme, že pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$ lze přemístit tak, aby se bod A_1 kryl s bodem A_2, bod B_1 s bodem B_2, ..., bod E_1 s bodem E_2. Protože jde o překrytí celých útvarů (pětiúhelníků), přemístí se každý bod X_1 pětiúhelníku $A_1B_1C_1D_1E_1$ do určitého bodu X_2 pětiúhelníku $A_2B_2C_2D_2E_2$. Takovou dvojici X_1, X_2 nazýváme dvojicí ***odpovídajících*** si bodů.



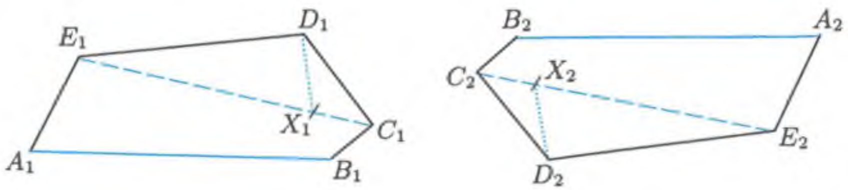
Shodnost pětiúhelníků $A_1B_1C_1D_1E_1$ a $A_2B_2C_2D_2E_2$ zapisujeme například takto:

$$A_1B_1C_1D_1E_1 \cong A_2B_2C_2D_2E_2$$

(Vrcholy musí být zapsány v pořadí, ve kterém si odpovídají: vrcholu A_1 odpovídá vrchol A_2, vrcholu B_1 odpovídá vrchol B_2 atd.)

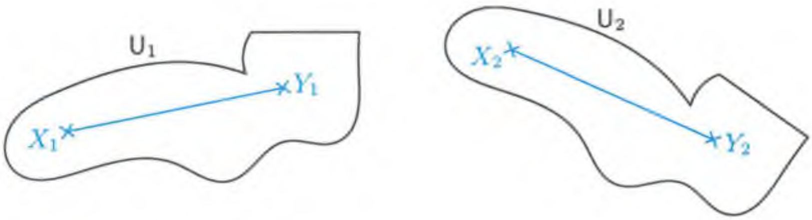
Protože při přemísťování útvaru se vzdálenosti jeho bodů nemění, platí v našem případě například tyto rovnosti:

$$|A_1B_1| = |A_2B_2|, \quad |C_1E_1| = |C_2E_2|, \quad |D_1X_1| = |D_2X_2|$$



Připomněli jsme základní vlastnost, kterou se vyznačují dva shodné útvary U_1 a U_2:
Pro libovolné dva body X_1, Y_1 útvaru U_1 a jim odpovídající body X_2, Y_2 útvaru U_2 platí:

$$|X_1Y_1| = |X_2Y_2|$$

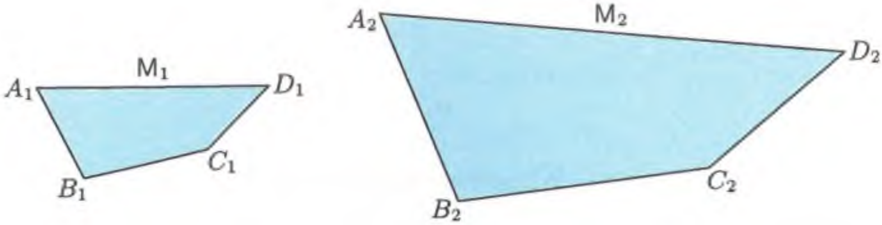


1. Úvahou o dvojicích odpovídajících si bodů vysvětlete, proč ve shodných trojúhelnících jsou těžnice z vrcholů, které si odpovídají, shodné.

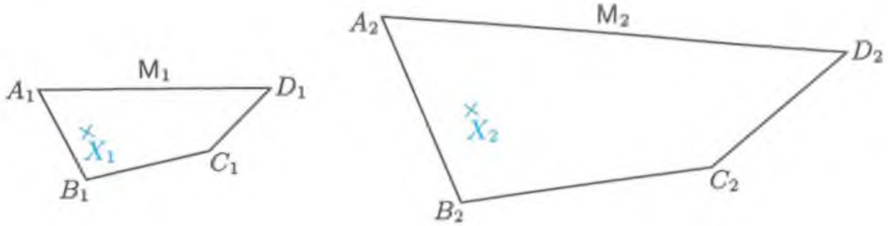
2. Zdůvodněte, proč ve dvou shodných ostroúhlých trojúhelnících odpovídá středu kružnice opsané jednomu trojúhelníku střed kružnice opsané druhému trojúhelníku. (Uvědomte si, že střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC je ten jediný bod X roviny ABC, pro který platí $|AX| = |BX| = |CX|$.)

Kdy jsou dva útvary *podobné*?

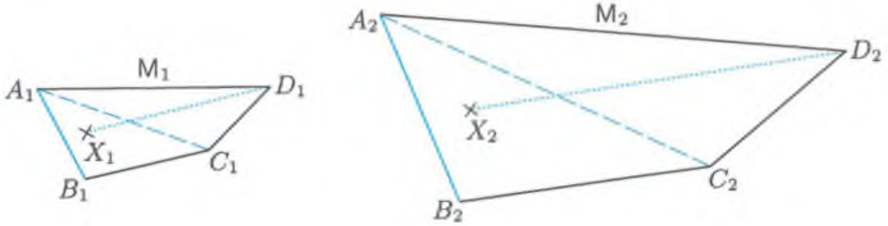
Vysvětlili jsme, že shodnost útvarů lze charakterizovat pravidlem „o zachování délek“. Nyní se budeme zabývat obdobnou základní vlastností podobných útvarů. Vyjdeme při tom z pokusu se zvětšovacím přístrojem, který jsme popsali v úvodu kapitoly. Pomocí příslušného zvětšení a přemístění jsou všechny body dvou podobných útvarů U_1 a U_2 *sdruženy do dvojic* odpovídajících si bodů. Tak u podobných čtyřúhelníků M_1 a M_2 z obrázku odpovídá vrcholu A_1 vrchol A_2, vrcholu B_1 vrchol B_2 atd.



Vyznačme ještě libovolný bod X_1 čtyřúhelníku M_1 a jemu odpovídající bod X_2 čtyřúhelníku M_2:



Posoudíme nyní, jakým zvětšením čtyřúhelníku M_1 je čtyřúhelník M_2. Provedeme to tak, že změříme nejprve vzdálenost některých dvou bodů čtyřúhelníku M_1 a pak vzdálenost odpovídajících bodů čtyřúhelníku M_2, například délky úseček A_1B_1 a A_2B_2 nebo A_1C_1 a A_2C_2 nebo D_1X_1 a D_2X_2:

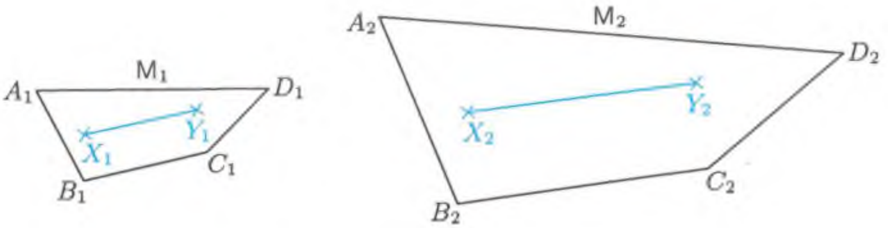


Zjistíme, že platí:

$$|A_2B_2| = 2 \cdot |A_1B_1|, \quad |A_2C_2| = 2 \cdot |A_1C_1|, \quad |D_2X_2| = 2 \cdot |D_1X_1|$$

Ve všech rovnostech vystupuje totéž číslo 2, které vyjadřuje, že čtyřúhelník M_2 je *dvojnásobným zvětšením* čtyřúhelníku M_1. Znamená to, že pro libovolné body X_1 a Y_1 čtyřúhelníku M_1 a jim odpovídající body X_2 a Y_2 čtyřúhelníku M_2 platí:

$$|X_2Y_2| = 2 \cdot |X_1Y_1|$$



Říkáme, že čtyřúhelník M_2 je *podobný* čtyřúhelníku M_1 s *koeficientem podobnosti* rovným číslu 2.

Kdybychom posuzovali, jakým zmenšením čtyřúhelníku M_2 je čtyřúhelník M_1, každá z rovností

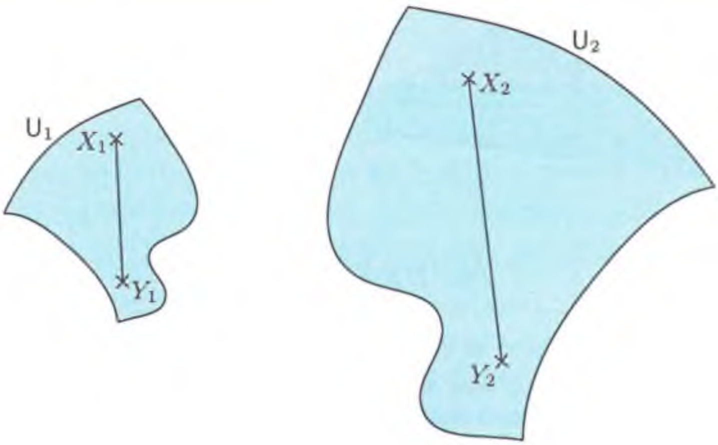
$$|A_1B_1| = \tfrac{1}{2} \cdot |A_2B_2|, \quad |A_1C_1| = \tfrac{1}{2} \cdot |A_2C_2|, \quad |D_1X_1| = \tfrac{1}{2} \cdot |D_2X_2|$$

by nás přivedla k závěru, že čtyřúhelník M_1 je podobný čtyřúhelníku M_2 s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$.

Řekneme, že útvar U_2 je podobný útvaru U_1, pokud lze všechny jejich body sdružit do dvojic (kterým říkáme dvojice odpovídajících si bodů) tak, že pro některé kladné číslo k platí rovnosti

$$|X_2Y_2| = k \cdot |X_1Y_1|,$$

kde X_1, Y_1 jsou libovolné body útvaru U_1 a X_2, Y_2 odpovídající body útvaru U_2.
Číslo k se nazývá koeficient podobnosti (útvaru U_2 vzhledem k útvaru U_1).

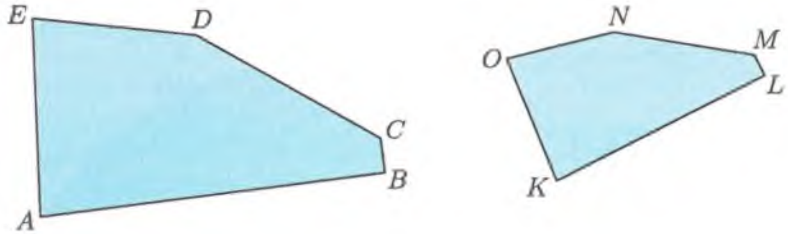


Je-li útvar U_2 podobný útvaru U_1 s koeficientem podobnosti k, je také útvar U_1 podobný útvaru U_2, a to s koeficientem podobnosti $\frac{1}{k}$.
Proto stručně hovoříme o *podobných útvarech* U_1 a U_2 (aniž rozlišujeme jejich pořadí) a jejich podobnost zapisujeme pomocí symbolu $\sim$ (čti „je podobný"):

$$\mathsf{U}_1 \sim \mathsf{U}_2 \quad \text{znamená totéž co} \quad \mathsf{U}_2 \sim \mathsf{U}_1$$

Pokud však uvádíme koeficient podobnosti, musí být pořadí útvarů jasně stanoveno (často právě vazbou „*co* je podobné *čemu*").

Dohodneme se, že při zápisu podobnosti dvou *mnohoúhelníků* pomocí jejich vrcholů a znaku $\sim$ budeme odpovídající si vrcholy zapisovat na stejných místech před i za znakem $\sim$:



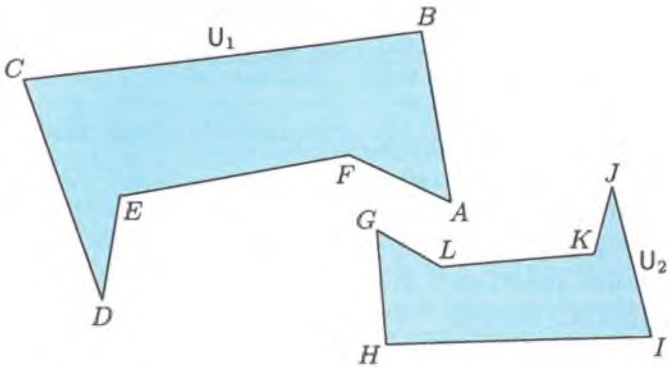
$$ABCDE \sim KLMNO$$

V našem příkladu vrcholu A odpovídá vrchol K, vrcholu B vrchol L atd. (Stejnou dohodu jsme učinili dříve při zápisu shodnosti mnohoúhelníků pomocí symbolu $\cong$.) Slovně však shodnost nebo podobnost mnohoúhelníků vyjadřujeme volněji. K předchozímu obrázku například můžeme říci, že pětiúhelník $CBAED$ je podobný pětiúhelníku $LMNOK$.

□ **3.** Útvary U_1 a U_2 na obrázku jsou podobné. Pomocí pojmenovaných bodů doplňte úměry:

a) $|HI| : |BC| = |IJ| : ?$ b) $|KL| : |EF| = ? : |AF|$

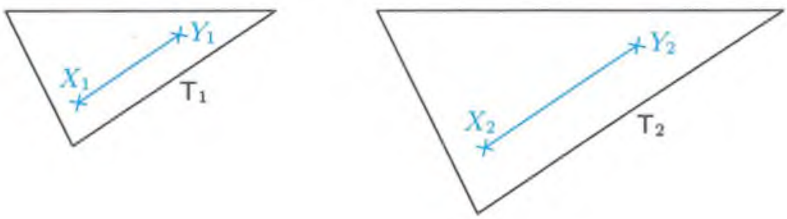
c) $|HG| : ? = |JI| : |DC|$ d) $? : |BF| = |IK| : |CE|$



Kdy je podobnost zvětšením a kdy zmenšením?

?

Na obrázku jsou narýsovány trojúhelníky T_1 a T_2.



Trojúhelník T_2 je podobný trojúhelníku T_1 s koeficientem podobnosti $\frac{3}{2}$: Pro každé dva body X_1, Y_1 trojúhelníku T_1 a jim odpovídající body X_2, Y_2 trojúhelníku T_2 platí rovnost

$$|X_2Y_2| = \tfrac{3}{2} \cdot |X_1Y_1|.$$

Znamená to, že úsečka X_2Y_2 je vždy *delší* než úsečka X_1Y_1. Proto je trojúhelník T_2 *zvětšením* trojúhelníku T_1. Můžeme také říci, že trojúhelník T_1 je *zmenšením* trojúhelníku T_2 (koeficient podobnosti je $\frac{2}{3}$).

O tom, zda je podobnost zvětšením, či zda je zmenšením, rozhoduje hodnota k koeficientu podobnosti. Je-li $k > 1$, jde o zvětšení; je-li $k < 1$, jde o zmenšení.

Předpokládejme, že útvar U_2 je podobný útvaru U_1 s koeficientem podobnosti k.

Je-li $k > 1$, je útvar U_2 zvětšením útvaru U_1.

Je-li $k < 1$, je útvar U_2 zmenšením útvaru U_1.

Zajímavý a důležitý je případ, kdy je koeficient podobnosti roven číslu 1 (podobnost tak není ani zvětšením, ani zmenšením). Jak jsme připomněli dříve, podmínka rovnosti

$$|X_2Y_2| = |X_1Y_1|$$

(pro libovolné body X_1, Y_1 útvaru U_1 a jim odpovídající body X_2, Y_2 útvaru U_2) znamená, že útvary U_1 a U_2 jsou *shodné* ($\mathsf{U}_1 \cong \mathsf{U}_2$). Dva útvary jsou tedy shodné, právě když jsou podobné s koeficientem podobnosti 1 (nezávisle na pořadí útvarů). Shodnost je tedy zvláštním případem podobnosti.

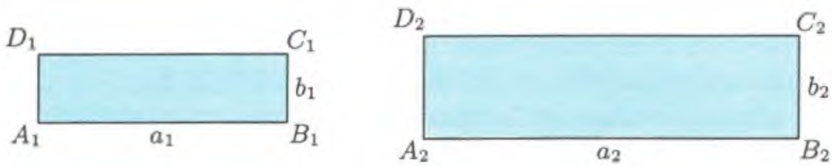
☐ **4.** Rozhodněte, zda platí:
Je-li útvar U_2 podobný útvaru U_1 a je-li útvar U_3 podobný útvaru U_2, pak je útvar U_3 podobný útvaru U_1.

5. Narýsujte libovolný čtverec $ABCD$. Pak sestrojte čtverec $MNOP$, který je podobný čtverci $ABCD$ s koeficientem podobnosti rovným číslu
a) 3, b) $\frac{1}{2}$.

? Co znamená, že podobné útvary mají stejný „tvar“?

Slovo „tvar“ nemá přesný matematický význam. Používáme ho v běžném jazyce jednak k upřesněním typu „deska tvaru rovnoramenného trojúhelníku“, jednak k vyjádření takových vlastností útvarů, jako jsou „protáhlost“, „špičatost“, „zakřivenost“ apod.

Na obrázku jsou dva podobné obdélníky $A_1B_1C_1D_1$ a $A_2B_2C_2D_2$.



Řekneme-li, že oba obdélníky jsou stejně „protáhlé“, míníme tím nejspíš, že poměr délky a šířky je u obou obdélníků stejný. Vysvětleme nyní, proč je tomu (díky jejich podobnosti) skutečně tak.

Protože obdélník $A_2B_2C_2D_2$ je podobný obdélníku $A_1B_1C_1D_1$ s jistým koeficientem k, platí rovnosti:

$$|A_2B_2| = k \cdot |A_1B_1|, \quad |B_2C_2| = k \cdot |B_1C_1|$$

Pro rozměry obou obdélníků tedy platí:

$$a_2 = k \cdot a_1, \quad b_2 = k \cdot b_1$$

Odtud pro poměr $a_2 : b_2$ dostáváme:

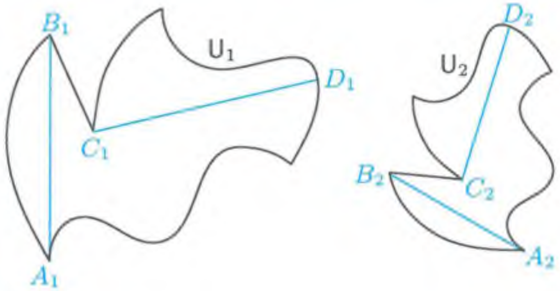
$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{k \cdot a_1}{k \cdot b_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

(Všimněte si, že jsme rovnost $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$ odvodili, aniž jsme znali konkrétní hodnotu koeficientu k.)

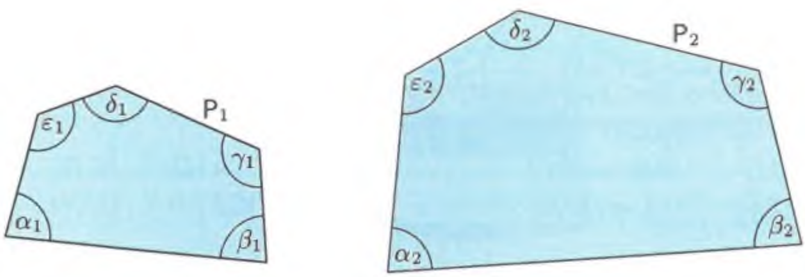
Stejným způsobem lze zdůvodnit, že pravidlo o „zachování poměrů délek“ platí pro každé dva podobné útvary:

Libovolné body A_1, B_1, C_1, D_1 útvaru U_1 a jim odpovídající body A_2, B_2, C_2, D_2 podobného útvaru U_2 splňují úměru:

$$|A_1B_1| : |C_1D_1| = |A_2B_2| : |C_2D_2|$$



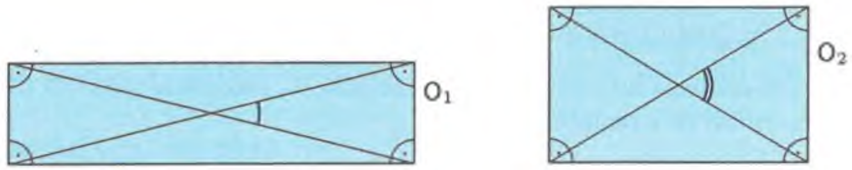
Uvedeme druhou důležitou vlastnost, která vystihuje „tvar“ podobných útvarů. Bude vyjádřena pravidlem o „zachování úhlů“, které bez důkazu ilustrujeme na příkladu dvou podobných pětiúhelníků P_1 a P_2:



Pětiúhelník P_2 je dvojnásobným zvětšením pětiúhelníku P_1. Měřením se přesvědčte, že platí:

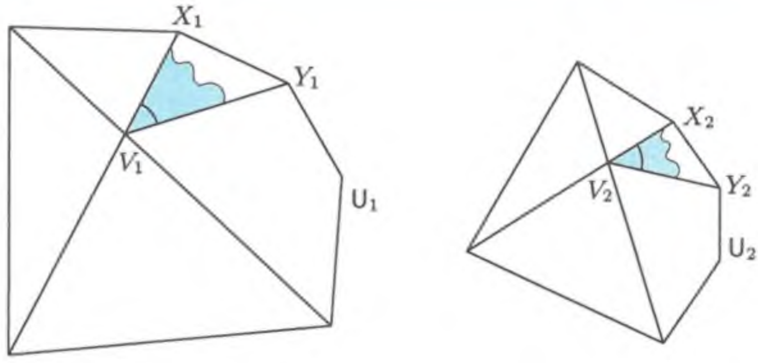
$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \delta_1 = \delta_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Také obdélníky O_1 a O_2 z dalšího obrázku mají shodné vnitřní úhly (jako ostatně každé dva obdélníky), nejsou však podobné. Liší se například v úhlech, které svírají jejich úhlopříčky.



Pro každé tři body X_1, V_1, Y_1 útvaru U_1 takové, že $V_1 \neq X_1$ a $V_1 \neq Y_1$, a jim odpovídající body X_2, V_2, Y_2 podobného útvaru U_2 platí:

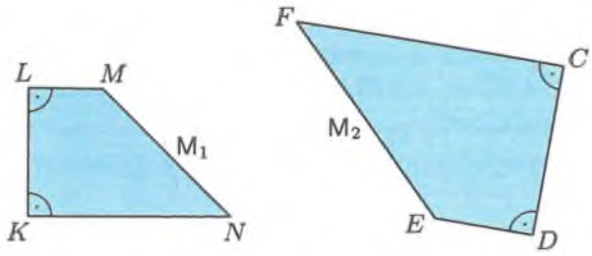
$$|\sphericalangle X_1V_1Y_1| = |\sphericalangle X_2V_2Y_2|$$



□**6.** Na obrázku jsou podobné čtyřúhelníky M_1 a M_2. Pomocí pojmenovaných bodů doplňte úměry:

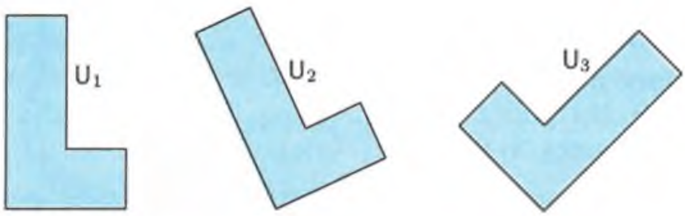
a) $|MN| : |ML| = |EF| : ?$ b) $|LK| : ? = |DC| : |ED|$

c) $|EC| : |FD| = |MK| : ?$ d) $|CE| : |CF| = ? : |KN|$



Co je *přímá* a *nepřímá* podobnost?

Nejprve připomeňme, které dva útvary se nazývají *přímo* shodné a které *nepřímo* shodné. Na obrázku vidíte tři shodné útvary U_1, U_2 a U_3.



Útvary U_1 a U_2 jsou přímo shodné. Útvar U_1 stačí totiž „natočit" a „posunout" v rovině tak, aby se kryl s útvarem U_2.

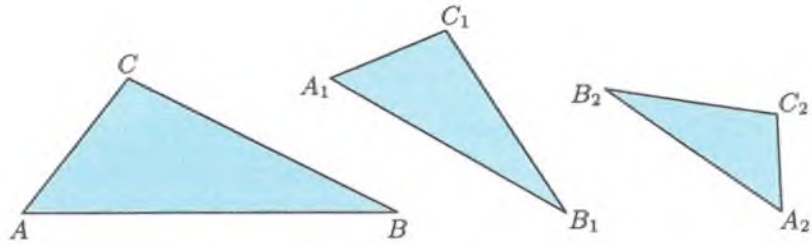
Přemísťováním v rovině však nikdy nedosáhneme toho, aby se kryly útvary U_1 a U_3 (i když jsou, jak jsme uvedli, shodné). K tomu potřebujeme přemísťovaný útvar „překlopit" v prostoru. Útvary U_1 a U_3 jsou nepřímo shodné.

Podobným způsobem budeme rozlišovat *přímo podobné* a *nepřímo podobné* útvary.

Z jednoho portrétu chlapce byly zhotoveny dvě zmenšeniny:

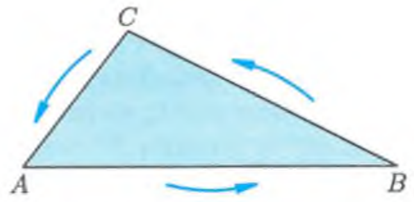
Podle pěšinky chlapcova účesu jistě usoudíte, že při pořizování jedné zmenšeniny byla fólie s původním snímkem „překlopena“ v prostoru. Proto jsou obě zmenšeniny navzájem *nepřímo podobné*, jen jedna z nich (ta dolní) je *přímo podobná* originálu.

Obdobně je tomu i na obrázku tří podobných trojúhelníků:

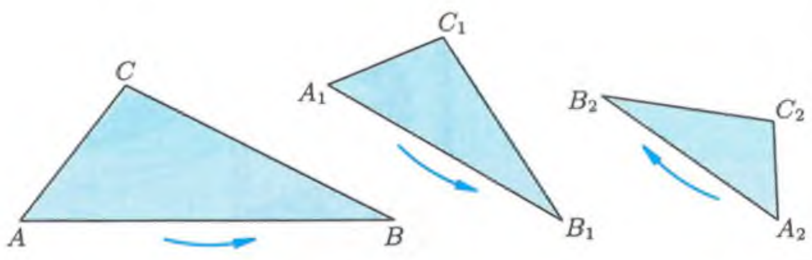


Jistě uhodnete, který z trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ je přímo podobný a který nepřímo podobný trojúhelníku ABC. Přímo podobné jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$; nepřímo podobné jsou trojúhelníky ABC a $A_2B_2C_2$ (a tedy i trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$).

Jak to snadno rozpoznat? Zvolme určité pořadí vrcholů jednoho z trojúhelníků, např. pořadí A, B, C, a vyznačme ho v obrázku šipkami:



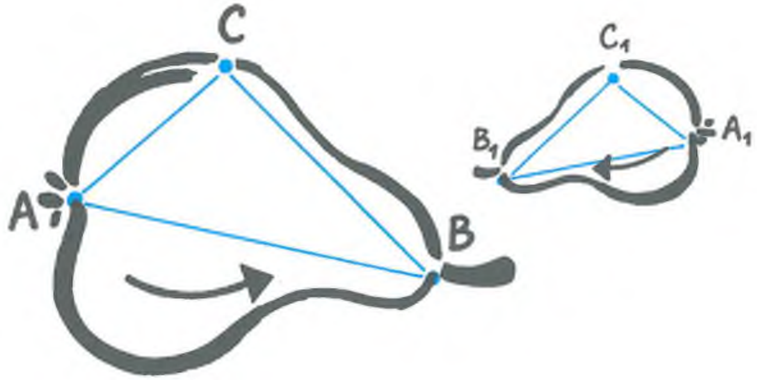
Stejným způsobem vyznačíme pořadí odpovídajících vrcholů zbylých dvou trojúhelníků (tedy pořadí A_1, B_1, C_1 a A_2, B_2, C_2).



Vidíme, že u trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$ jdou šipky stejným směrem (proti chodu hodinových ručiček), u trojúhelníku $A_2B_2C_2$ jdou šipky naopak (totiž stejně jako hodinové ručičky).

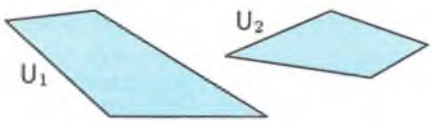
Tím je o „druhu“ podobnosti (přímé či nepřímé) daných trojúhelníků rozhodnuto.

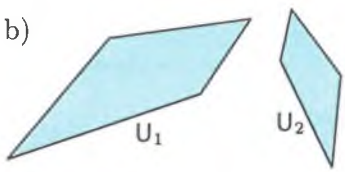
Právě uvedené pravidlo „směru šipek“ lze využít i v případě podobných útvarů, které nejsou trojúhelníky. Stačí vybrat v jednom útvaru pomocný trojúhelník, najít ve druhém útvaru body, které odpovídají jeho vrcholům, a posoudit podobnost obou trojúhelníků:



Obrázky dvou hrušek jsou nepřímo podobné.

□ **7.** Rozhodněte, zda podobné útvary U_1 a U_2 z obrázku jsou podobné přímo, nebo nepřímo:

a) 

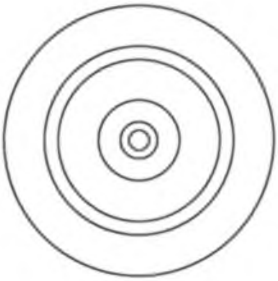
b) 

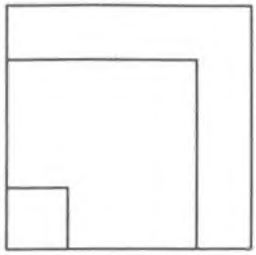
V závěru kapitoly se ještě zmíníme o podobnosti některých jednoduchých (ale významných) geometrických útvarů. Vynecháme prozatím trojúhelníky, neboť jim bude věnována celá následující kapitola.

Postupným zvětšováním nebo zmenšováním dané úsečky dostaneme úsečky všech možných délek.

- Každé dvě úsečky jsou podobné.

Totéž platí o zvětšování či zmenšování každého kruhu, každé kružnice a každého čtverce.



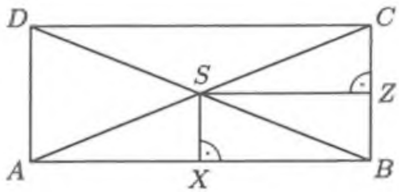


- Každé dva kruhy jsou podobné.
- Každé dvě kružnice jsou podobné.
- Každé dva čtverce jsou podobné.

☐**8.** Jsou každé dva kosočtverce podobné?

CVIČENÍ 1

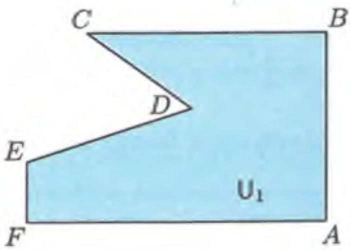
☐**1.** Obdélník $ABCD$ na obrázku je rozdělen na 6 trojúhelníků. Které z nich jsou shodné?

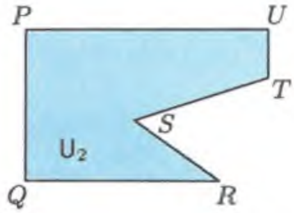


☐**2.** Útvary U_1 a U_2 z obrázku jsou podobné. Pomocí pojmenovaných bodů doplňte úměry:

a) $|DC| : |SR| = |AD| : ?$ b) $|UT| : |FE| = ? : |CB|$

c) $|FB| : ? = |BC| : |QR|$ d) $? : |ST| = |AF| : |PU|$





□**3.** Jsou dány úsečky AB a RT tak, že $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$, $|RT| = 4\,\mathrm{cm}$. Doplňte názvy úseček tak, aby platilo:

a) Úsečka ... je podobná úsečce ... s koeficientem podobnosti $\frac{4}{7}$.

b) Úsečka ... je podobná úsečce ... s koeficientem podobnosti $\frac{7}{4}$.

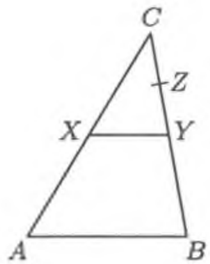
□**4.** Čtverec $ABCD$ má stranu délky $4\,\mathrm{cm}$. Určete délku strany čtverce $KLMN$, který je podobný čtverci $ABCD$ s koeficientem podobnosti:

a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{2}$

□**5.** Trojúhelníky ABC a XYC jsou podobné. Bod X je střed úsečky AC, bod Z je střed úsečky YC. Určete číslo k tak, aby platilo:

a) $|XY| = k \cdot |AB|$ b) $|YC| = k \cdot |BC|$

c) $|AC| = k \cdot |XC|$ d) $|ZX| = k \cdot |YA|$



6. Obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou podobné: $ABCD \sim EFGH$. Doplňte úměry:

a) $|AB| : |BC| = |EF| : ?$ b) $|AC| : |CD| = ? : |GH|$

c) $|EH| : ? = |AD| : |DC|$ d) $? : |FH| = |AD| : |BD|$

7. Pro rovnoběžníky $TUVX$ a $MNOP$ platí $TUVX \sim MNOP$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku $MNOP$, má-li úhel XTU velikost $78°$.

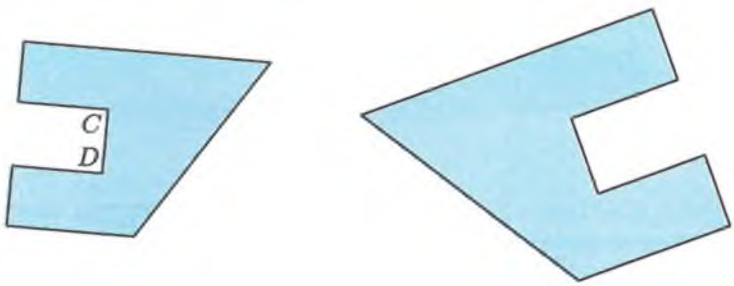
□**8.** Rozhodněte, zda platí, že

a) každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné,

b) každé dva pravidelné šestiúhelníky jsou podobné,

c) každé dvě půlkružnice jsou podobné.

9. Pro osmiúhelníky $ABCDEFGH$ a $KLMNOPQR$ z obrázku platí $ABCDEFGH \sim KLMNOPQR$. Načrtněte oba mnohoúhelníky do sešitu a doplňte pojmenování jejich vrcholů.



10. Rozhodněte, zda existují dva obdélníky, které mají stejné obsahy a které

a) jsou podobné,

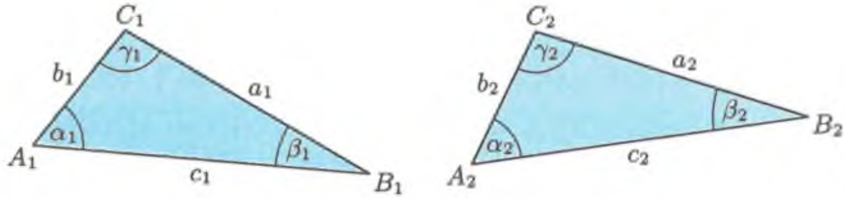
b) jsou podobné a nejsou shodné.

2 PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY

V této kapitole se budeme věnovat důležité otázce – kdy jsou podobné dva trojúhelníky. Výsledky výkladu shrneme do několika vět, které jsou obdobami známých tvrzení o shodnosti dvou trojúhelníků. Proto všechny běžné věty o shodnosti trojúhelníků nejprve připomeneme.

? Kdy jsou dva trojúhelníky *shodné*?

Na obrázku jsou narýsovány dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ a obvyklým způsobem jsou označeny jejich strany a vnitřní úhly.

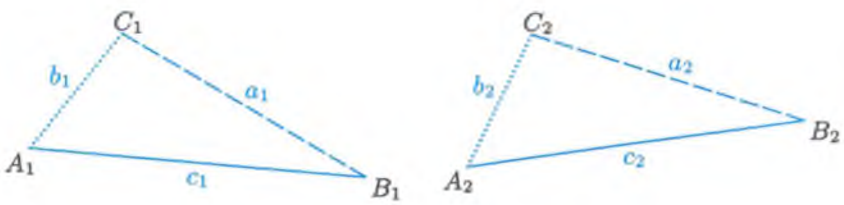


Víme, že platí šest rovností:

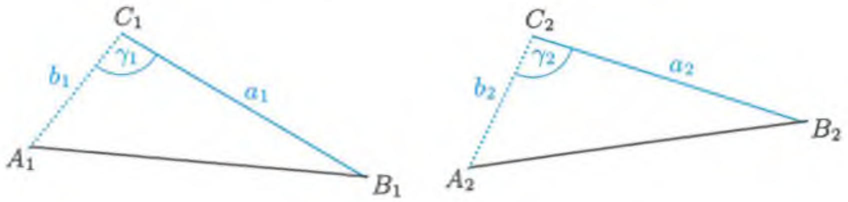
$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2$$
$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

Představme si opačnou situaci. Máme rozhodnout o shodnosti dvou daných trojúhelníků. Přitom víme, že pro ně platí pouze *některé* z uvedených šesti rovností. Kdy máme zaručeno, že trojúhelníky jsou skutečně shodné? Víme, že je to v případech, kdy platí *tři* vhodně vybrané rovnosti:

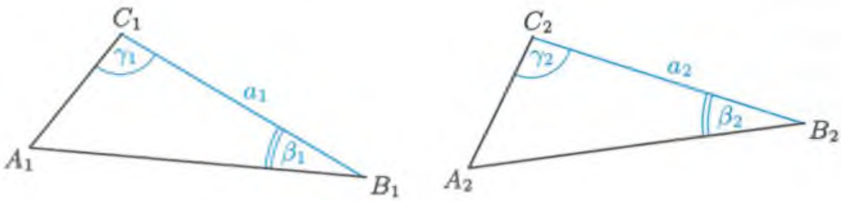
- $a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2$ (věta ***sss***)



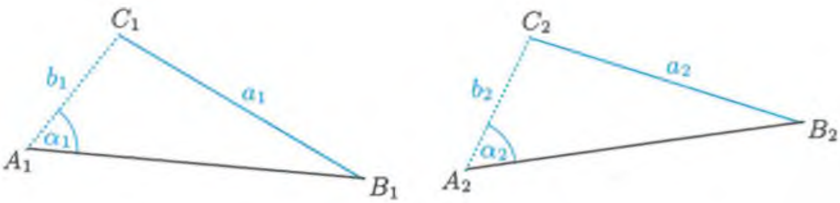
- $a_1 = a_2,\quad b_1 = b_2,\quad \gamma_1 = \gamma_2$ (věta ***sus***)



- $a_1 = a_2,\quad \beta_1 = \beta_2,\quad \gamma_1 = \gamma_2$ (věta ***usu***)

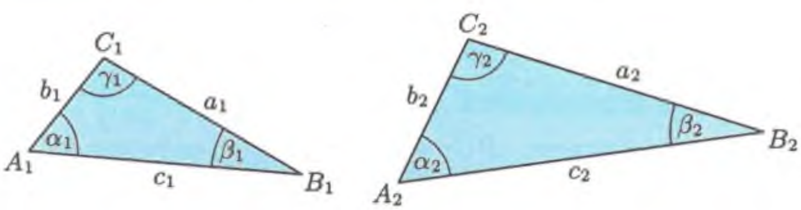


- $a_1 = a_2,\quad b_1 = b_2,\quad \alpha_1 = \alpha_2,$ jestliže navíc $a_1 > b_1$ (věta ***Ssu***)



☐ **1.** Každou z vět o shodnosti trojúhelníků vyslovte, aniž použijete označení stran a úhlů (pomozte si výrazy „sevřený úhel“ apod.).

Jaké vlastnosti mají strany a úhly podobných trojúhelníků?



Narýsovali jsme dva podobné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. I když jsme dosud mluvili pouze o odpovídajících si *bodech* podobných trojúhelníků, budeme také říkat, že si odpovídají jejich *strany* a *vnitřní úhly*. Například straně a_1 odpovídá strana a_2, vnitřnímu úhlu α_1 odpovídá vnitřní úhel α_2 apod. V minulé kapitole jsme vysvětlili, že pro odpovídající si strany a vnitřní úhly podobných trojúhelníků platí rovnosti

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$
$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1.$$

Stručně řečeno: Odpovídající si úhly podobných trojúhelníků jsou shodné a poměry délek odpovídajících si stran jsou stejné.

Ze shodnosti odpovídajících si úhlů podobných trojúhelníků a ze známého pravidla „proti větší straně trojúhelníku leží větší úhel" plyne závěr, že strany dvou podobných trojúhelníků si odpovídají v pořadí „podle velikosti". Skutečně, jestliže pro strany a_1, b_1, c_1 platí například $a_1 \leqq b_1 \leqq c_1$, pak $\alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \gamma_1$, neboli $\alpha_2 \leqq \beta_2 \leqq \gamma_2$, a tak pro strany a_2, b_2, c_2 rovněž platí $a_2 \leqq b_2 \leqq c_2$.

Nerovnosti $a_2 \leqq b_2 \leqq c_2$ ovšem plynou z nerovností $a_1 \leqq b_1 \leqq c_1$ také proto, že $a_2 = k \cdot a_1$, $b_2 = k \cdot b_1$ a $c_2 = k \cdot c_1$, kde k je koeficient podobnosti trojúhelníku $A_2B_2C_2$ vzhledem k trojúhelníku $A_1B_1C_1$. (Vzpomeňte si na pravidlo o násobení nerovnosti *kladným* číslem.)

Příklad 1. Strany trojúhelníku ABC mají délky

$$|AB| = 56\,\text{mm}, \quad |BC| = 42\,\text{mm} \quad \text{a} \quad |CA| = 64\,\text{mm}.$$

Trojúhelník KLM je trojúhelníku ABC podobný a jeho nejkratší strana KM měří 63 mm. Vypočtěte délky jeho zbývajících dvou stran.

Řešení. Protože v trojúhelníku KLM známe délku nejkratší strany, zjistíme, která ze stran trojúhelníku ABC je nejkratší. Je to strana BC (délky

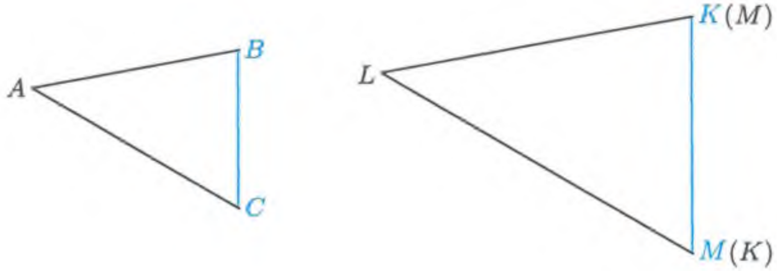
42 mm). Nejkratší strany podobných trojúhelníků si odpovídají, proto je trojúhelník KLM podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti

$$k = \frac{|KM|}{|BC|} = \frac{63\,\text{mm}}{42\,\text{mm}} = 1{,}5.$$

Zbývající strany trojúhelníku KLM tedy měří

$$k \cdot |AB| = 1{,}5 \cdot 56\,\text{mm} = 84\,\text{mm},$$
$$k \cdot |CA| = 1{,}5 \cdot 64\,\text{mm} = 96\,\text{mm}.$$

Všimněme si ještě, že ze zadání úlohy vyplývá, že v podobných trojúhelnících ABC a KLM si odpovídají vrcholy A a L (vrcholy proti nejkratším stranám). Nelze však zjistit, zda vrcholu B odpovídá vrchol K, nebo vrchol M. Platí tedy buď $\triangle ABC \sim \triangle LKM$, nebo $\triangle ABC \sim \triangle LMK$.



□ **2.** Trojúhelník XYZ je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti 3. Určete délky stran trojúhelníku XYZ, je-li $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|BC| = 7\,\text{cm}$, $|CA| = 8\,\text{cm}$.

□ **3.** Pro trojúhelníky DEF a MNO platí $\triangle DEF \sim \triangle MNO$. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku MNO, jestliže $|\sphericalangle DEF| = 42°$ a $|\sphericalangle EFD| = 54°$.

4. Určete délky stran AB a BC trojúhelníku ABC, jestliže $|CA| = 4{,}2\,\text{cm}$ a současně $\triangle ABC \sim \triangle RST$, přičemž $|RS| = 5{,}4\,\text{cm}$, $|ST| = 7{,}2\,\text{cm}$, $|TR| = 6{,}3\,\text{cm}$.

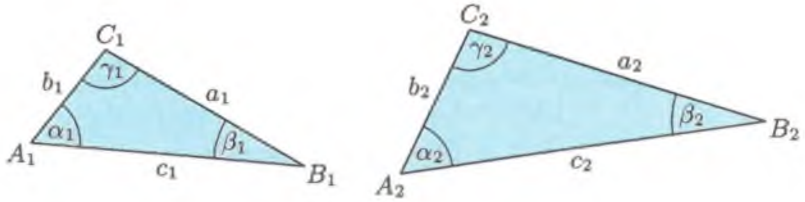
5. Trojúhelník T_1 má délky stran 8 cm, 10 cm a 16 cm a je podobný trojúhelníku T_2. Určete délky zbylých dvou stran trojúhelníku T_2, jestliže jeho

a) nejdelší　　　　b) nejkratší

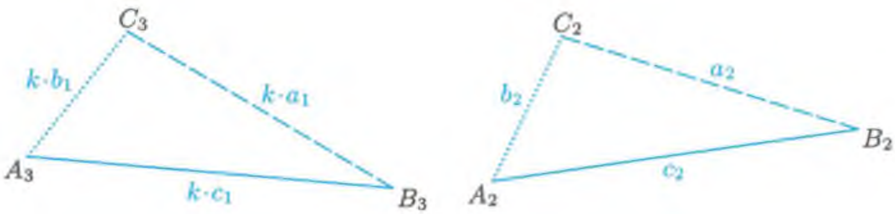
strana měří 12 cm.

Co stačí k podobnosti trojúhelníků?

Nyní budeme hledat podmínky, které zaručují podobnost dvou trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. Jejich strany a vnitřní úhly označíme běžným způsobem:



Budeme postupovat tak, že jeden z trojúhelníků, například $A_1B_1C_1$, nejprve zvětšíme nebo zmenšíme s jistým koeficientem k, který určíme později. (Číslo k bude rovno koeficientu podobnosti trojúhelníku $A_2B_2C_2$ vzhledem k trojúhelníku $A_1B_1C_1$, pokud to vůbec jsou podobné trojúhelníky.) Získáme tak „pomocný“ trojúhelník $A_3B_3C_3$ podobný trojúhelníku $A_1B_1C_1$ ($\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_1B_1C_1$). Poté budeme vypisovat různé podmínky, kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$. Tehdy totiž bude platit $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. Použijeme k tomu postupně známé věty o shodnosti trojúhelníků – větu *sss*, větu *usu* a větu *sus*.



- Kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *sss*?

Víme, že je to v případě, kdy současně platí tři rovnosti:

$$ka_1 = a_2, \quad kb_1 = b_2, \quad kc_1 = c_2$$

Pro číslo k odtud dostáváme podmínky:

$$k = \frac{a_2}{a_1}, \quad k = \frac{b_2}{b_1}, \quad k = \frac{c_2}{c_1}$$

Ty lze splnit pouze v případě, kdy platí

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Za této podmínky jsou trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ podobné.

Odvodili jsme tak tvrzení, které se nazývá **věta *sss* o podobnosti trojúhelníků**.

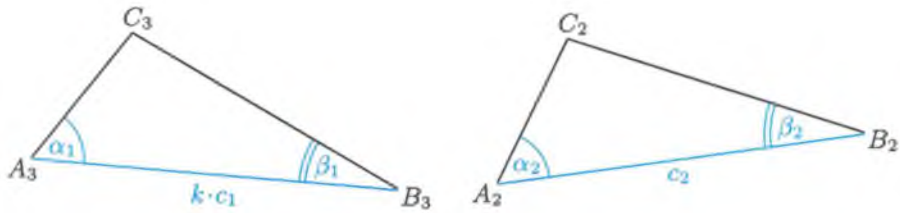
Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti

$$\frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_2A_2|}{|C_1A_1|},$$

pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$

- Kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *usu*?

Je to tehdy, když se oba trojúhelníky shodují v jedné straně a obou k ní přilehlých vnitřních úhlech, například:



$$kc_1 = c_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2$$

První podmínku lze splnit volbou čísla k: $k = \frac{c_2}{c_1}$. Pak nám zůstanou pouze podmínky pro vnitřní úhly:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2$$

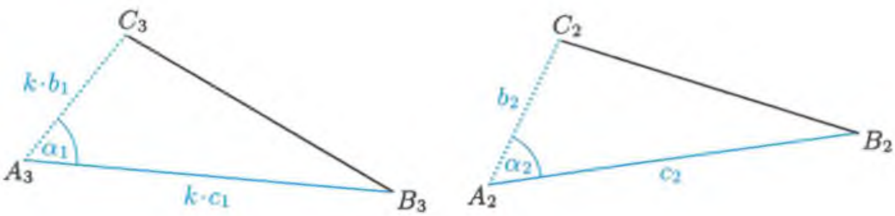
Jsou-li splněny, jsou trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ podobné.

> Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti
>
> $$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2,$$
>
> pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$

Předchozí tvrzení se nazývá **věta *uu* o podobnosti trojúhelníků**.

- Kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *sus*?

Tato situace nastane, když se oba trojúhelníky shodují v jednom vnitřním úhlu a dvou přilehlých stranách, například:



$$kb_1 = b_2, \quad kc_1 = c_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

Z prvních dvou podmínek dostáváme:

$$k = \frac{b_2}{b_1}, \quad k = \frac{c_2}{c_1}$$

Lze je tedy splnit jen tehdy, pokud se oba vypočtené zlomky rovnají:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

Podmínky

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \quad \text{a} \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

tedy zaručují podobnost trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$.

Zdůvodnili jsme následující **větu *sus* o podobnosti trojúhelníků**:

Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti

$$\frac{|C_2A_2|}{|C_1A_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$

Dodejme ještě, že tvrzení o podobnosti trojúhelníků založené na větě *Ssu* odvozovat nebudeme. Prakticky se totiž téměř nevyužívá.

? Jak používáme věty o podobnosti trojúhelníků?

V následujících příkladech ukážeme, jak se pomocí právě odvozených vět zdůvodňuje, že dva dané trojúhelníky jsou podobné.

Příklad 2. Strany trojúhelníků ABC a XYZ mají následující délky:

$$|AB| = 40\,\text{mm}, \quad |BC| = 55\,\text{mm}, \quad |CA| = 50\,\text{mm}$$
$$|XY| = 77\,\text{mm}, \quad |YZ| = 56\,\text{mm}, \quad |ZX| = 70\,\text{mm}$$

Rozhodněte, zda jsou tyto trojúhelníky podobné. Pokud ano, zapište jejich podobnost pomocí symbolu $\sim$.

Řešení. Zapišme délky stran obou trojúhelníků v pořadí od nejkratší po nejdelší:

$$|AB| = 40\,\text{mm}, \quad |CA| = 50\,\text{mm}, \quad |BC| = 55\,\text{mm}$$
$$|YZ| = 56\,\text{mm}, \quad |ZX| = 70\,\text{mm}, \quad |XY| = 77\,\text{mm}$$

Sestavíme poměry délek stran zapsaných pod sebou a příslušné zlomky zkrátíme:

$$\frac{|AB|}{|YZ|} = \frac{40\,\text{mm}}{56\,\text{mm}} = \frac{5}{7}$$
$$\frac{|CA|}{|ZX|} = \frac{50\,\text{mm}}{70\,\text{mm}} = \frac{5}{7}$$
$$\frac{|BC|}{|XY|} = \frac{55\,\text{mm}}{77\,\text{mm}} = \frac{5}{7}$$

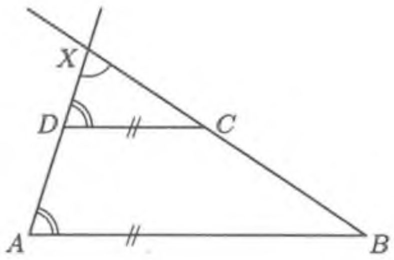
Všechny tři poměry jsou stejné, proto jsou trojúhelníky ABC a XYZ podobné podle věty *sss*.

Nyní určíme, jak si odpovídají vrcholy těchto podobných trojúhelníků. Protože straně AB odpovídá strana YZ, odpovídá vrcholu C vrchol X. Podobně usoudíme, že vrcholu B odpovídá vrchol Y (a vrcholu A vrchol Z).

Platí tedy $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$.

Příklad 3. Přímky, na kterých leží ramena AD a BC daného lichoběžníku $ABCD$, se protínají v bodě X. Dokažte, že trojúhelníky ABX a CDX jsou podobné.

Řešení. Trojúhelníky ABX a CDX mají společný vnitřní úhel při vrcholu X. Protože $AB \parallel CD$, jsou souhlasné úhly XAB a XDC shodné. Proto jsou zkoumané trojúhelníky podobné podle věty *uu*: $\triangle ABX \sim \triangle DCX$



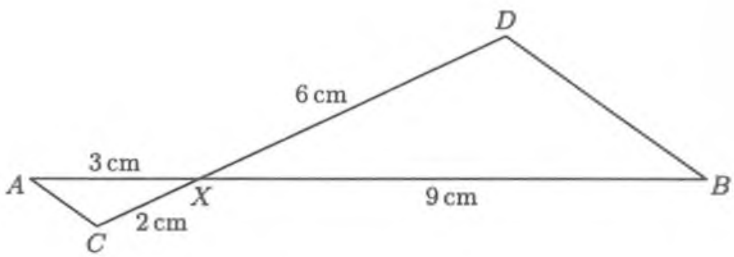
(Ke zdůvodnění podobnosti jsme rovněž mohli využít shodnost souhlasných úhlů ABX a DCX.)

Příklad 4. Úsečky AB a CD se protínají v bodě X, přitom platí:

$$|AX| = 3\,\mathrm{cm}, \quad |BX| = 9\,\mathrm{cm}, \quad |CX| = 2\,\mathrm{cm}, \quad |DX| = 6\,\mathrm{cm}.$$

Dokažte, že platí $\triangle ACX \sim \triangle BDX$.

Řešení. Situaci ze zadání znázorníme obrázkem.



Úhly AXC a BXD jsou vrcholové, proto jsou shodné. Podle zadání platí:

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{3\,\mathrm{cm}}{9\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{|CX|}{|DX|} = \frac{2\,\mathrm{cm}}{6\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{3}$$

Podobnost trojúhelníků ACX a BDX je tak zaručena větou *sus*.

6. Rozhodněte, zda jsou trojúhelníky KLM a XYZ podobné, je-li

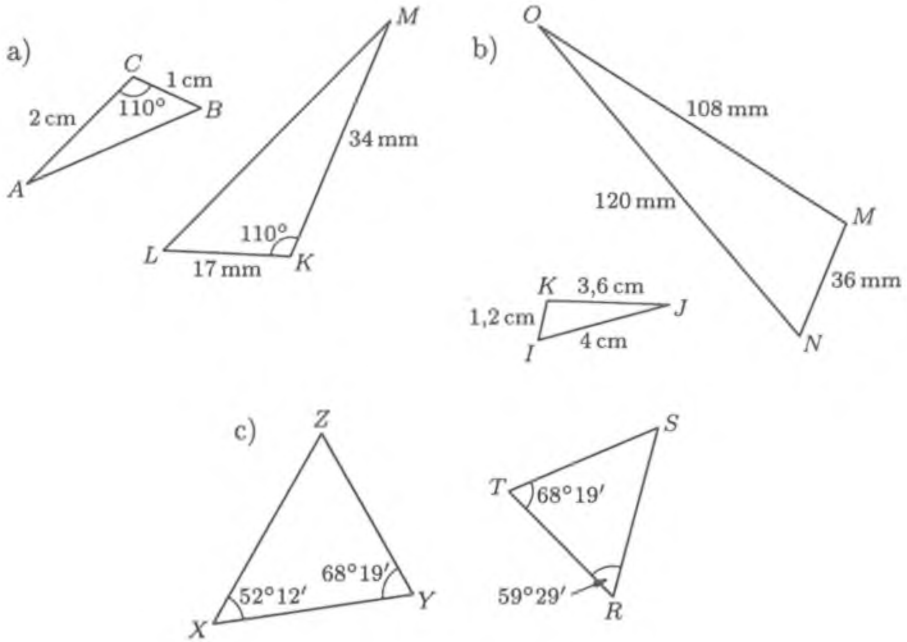
a) $|KL| = 15\,\text{cm}$, $|KM| = 12\,\text{cm}$, $|LM| = 18\,\text{cm}$, $|XY| = 48\,\text{mm}$, $|YZ| = 40\,\text{mm}$, $|XZ| = 32\,\text{mm}$,

b) $|KL| = 6{,}4\,\text{cm}$, $|LM| = 4{,}8\,\text{cm}$, $|\sphericalangle KLM| = 56°$, $|YZ| = 10{,}8\,\text{cm}$, $|XZ| = 8{,}1\,\text{mm}$, $|\sphericalangle XZY| = 56°$,

c) $|\sphericalangle KLM| = 42°$, $|\sphericalangle LMK| = 106°$, $|\sphericalangle XYZ| = 32°$, $|\sphericalangle ZXY| = 42°$.

Případnou podobnost zapište pomocí symbolu $\sim$.

7. Zdůvodněte a zapište podobnost trojúhelníků z obrázku:



8. Libovolným vnitřním bodem T strany PQ trojúhelníku PQR je vedena přímka p rovnoběžná se stranou QR. Přímka p protíná stranu PR v bodě U. Dokažte, že $\triangle PQR \sim \triangle PTU$.

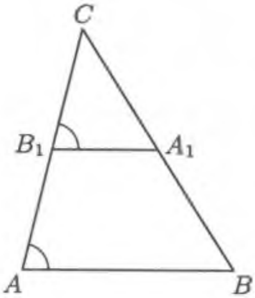
V další kapitole se přesvědčíme, že věty o podobnosti trojúhelníků jsou účinným prostředkem k řešení rozmanitých úloh (většinou však musíme sami „objevit“, které trojúhelníky jsou podobné). Dvě jednoduché ukázky uvedeme již nyní.

Příklad 5. Užitím podobnosti dokažte známé vlastnosti střední příčky trojúhelníku: Jsou-li body B_1, A_1 po řadě středy stran AC, BC trojúhelníku ABC, pak platí $B_1A_1 \parallel AB$ a také $|B_1A_1| = \frac{1}{2}|AB|$.

Řešení. Protože bod B_1 je středem strany AC a bod A_1 je středem strany BC, platí

$$\frac{|B_1C|}{|AC|} = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \frac{|A_1C|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

Vnitřní úhel při vrcholu C je společný trojúhelníku ABC a trojúhelníku B_1A_1C. Proto je (podle věty ***sus***) trojúhelník B_1A_1C podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$.

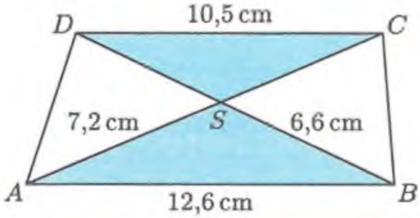


Protože strana B_1A_1 odpovídá straně AB, platí $|B_1A_1| = \frac{1}{2}|AB|$.

Úhlu CBA odpovídá úhel CA_1B_1, jsou tedy shodné. Zároveň jsou tyto úhly souhlasné (viz obrázek), a proto $B_1A_1 \parallel AB$.

Příklad 6. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD se protínají v bodě S. Vypočtěte jejich délky, jestliže $|AB| = 12{,}6\,\text{cm}$, $|CD| = 10{,}5\,\text{cm}$, $|AS| = 7{,}2\,\text{cm}$ a $|BS| = 6{,}6\,\text{cm}$.

Řešení



Všimněme si nejprve, že trojúhelník CDS je podobný trojúhelníku ABS podle věty ***uu***. Platí totiž $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD|$ (vrcholové úhly) a $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SCD|$ (střídavé úhly u rovnoběžných přímek AB a CD). Koeficient k této podobnosti určíme pomocí odpovídajících si stran CD a AB:

$$k = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{10{,}5\,\text{cm}}{12{,}6\,\text{cm}} = \frac{5}{6}$$

Proto platí:

$$|SC| = k \cdot |SA| = \tfrac{5}{6} \cdot 7{,}2\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$$
$$|SD| = k \cdot |SB| = \tfrac{5}{6} \cdot 6{,}6\,\text{cm} = 5{,}5\,\text{cm}$$

Pro délky úhlopříček AC a BD dostáváme:

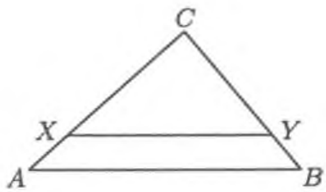
$$|AC| = |AS| + |SC| = 7{,}2\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 13{,}2\,\text{cm}$$
$$|BD| = |BS| + |SD| = 6{,}6\,\text{cm} + 5{,}5\,\text{cm} = 12{,}1\,\text{cm}$$

Úhlopříčka AC měří 13,2 cm, úhlopříčka BD měří 12,1 cm.

□ **9.** Průsečík S úhlopříček lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD dělí úhlopříčku AC v poměru 3 : 5. V jakém poměru dělí bod S úhlopříčku BD?

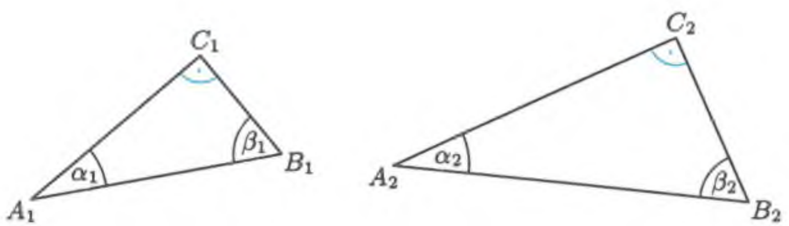
10. Na rameni VX úhlu XVY jsou zvoleny body A, B tak, že $|VA| = 4\,\text{cm}$, $|VB| = 4{,}5\,\text{cm}$. Na rameni VY jsou zvoleny body C, D tak, že $|VC| = 3\,\text{cm}$, $|VD| = 6\,\text{cm}$. Vysvětlete, proč jsou úhly VBC a VDA shodné.

11. V trojúhelníku ABC o stranách $a = 8\,\text{cm}$, $b = 9{,}2\,\text{cm}$ a $c = 12\,\text{cm}$ je narýsována příčka XY délky 9 cm rovnoběžná se stranou AB. Určete vzdálenost bodu C od bodů X a Y.



Co stačí k podobnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků?

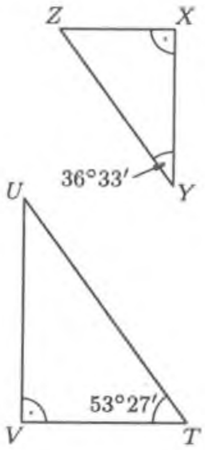
Všechny pravoúhlé trojúhelníky mají stejný úhel proti přeponě. Je to pravý úhel, zbývající dva vnitřní úhly pravoúhlých trojúhelníků jsou ostré.



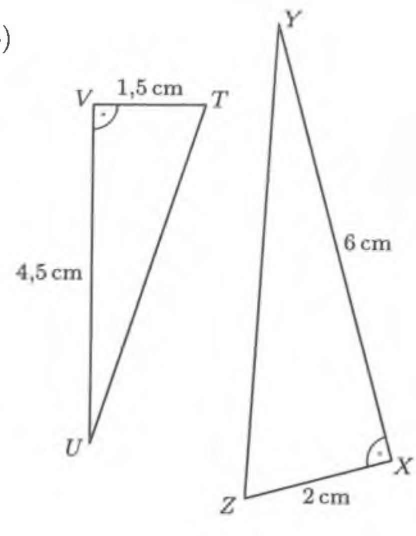
Pro pravoúhlé trojúhelníky z obrázku platí $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *uu*, když je splněna aspoň jedna z rovností $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ (pak jsou ovšem splněny obě).

12. Zdůvodněte a zapište podobnost trojúhelníků z obrázku:

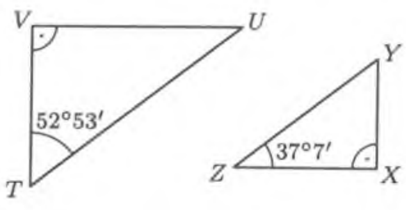
a)



b)

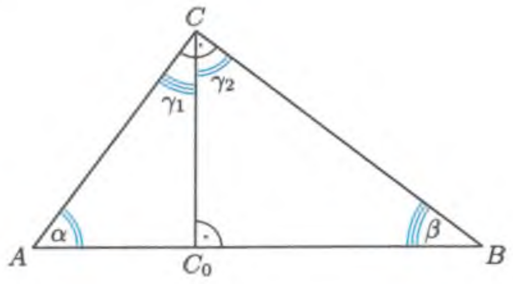


c)



Příklad 7. Dokažte, že výška k přeponě pravoúhlého trojúhelníku dělí tento trojúhelník na dva podobné pravoúhlé trojúhelníky.

Řešení. Předpokládejme, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC je sestrojena výška CC_0 k přeponě AB. Trojúhelník ABC je tak rozdělen na trojúhelníky ACC_0 a BCC_0.



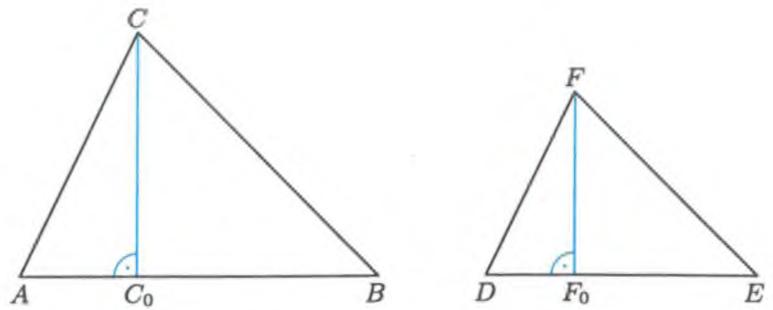
Oba trojúhelníky ACC_0 i BCC_0 se shodují v pravém úhlu při vrcholu C_0. Ukážeme, že se shodují i v jednom ostrém vnitřním úhlu. V trojúhelníku ACC_0 platí $\gamma_1 = 90° - \alpha$. Pro úhel β trojúhelníku CBC_0 dostaneme z trojúhelníku ABC vyjádření $\beta = 90° - \alpha$. Proto $\gamma_1 = \beta$, a tak $\triangle ACC_0 \sim \triangle CBC_0$. (Mohli jsme stejně tak dokázat rovnost $\gamma_2 = \alpha$ a uplatnit ji ve větě ***uu*** místo rovnosti $\gamma_1 = \beta$.)

13. V pravoúhlém trojúhelníku RST je na přeponě RS vyznačena pata P výšky z vrcholu T. Dokažte, že platí:

a) $\triangle RTP \sim \triangle RST$ b) $|RP| : |RT| = |RT| : |RS|$

Příklad 8. Trojúhelník DEF je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti k. Označme S_1 obsah trojúhelníku ABC a S_2 obsah trojúhelníku DEF. Dokažte, že $S_2 = k^2 \cdot S_1$.

Řešení. Předpokládejme, že vrcholy trojúhelníků jsou označeny tak, že platí $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Vyberme některou dvojici odpovídajících si vrcholů, například C a F, a sestrojme výšky CC_0 a FF_0. Situace pro ostroúhlé trojúhelníky ABC a DEF je znázorněna na obrázku:



Pro obsahy S_1 a S_2 zkoumaných trojúhelníků platí vzorce:

$$S_1 = \tfrac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CC_0|, \quad S_2 = \tfrac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FF_0|$$

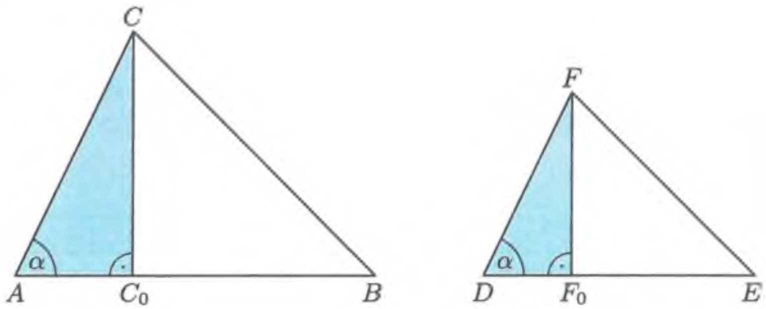
Podle zadání příkladu známe vztah mezi délkami úseček AB a DE:

$$|DE| = k \cdot |AB|$$

Zdůvodníme nyní, proč pro výšky CC_0 a FF_0 obdobně platí

$$|FF_0| = k \cdot |CC_0|.$$

I když bychom mohli tuto rovnost vysvětlit úvahou, proč bodu C_0 trojúhelníku ABC odpovídá bod F_0 podobného trojúhelníku DEF, dáme přednost jinému postupu. Všimneme si, že $\triangle DFF_0 \sim \triangle ACC_0$ podle věty *uu*.



Protože $|DF| = k \cdot |AC|$, platí též $|FF_0| = k \cdot |CC_0|$. Dosazením do vzorce pro S_2 dostáváme:

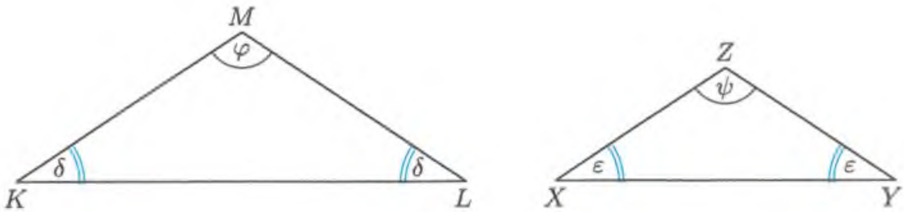
$$S_2 = \frac{|DE| \cdot |FF_0|}{2} = \frac{k \cdot |AB| \cdot k \cdot |CC_0|}{2} = k^2 \cdot \frac{|AB| \cdot |CC_0|}{2} = k^2 \cdot S_1$$

Pro ostroúhlé trojúhelníky ABC a DEF je důkaz hotov. Sami promyslete, jak změnit důkaz v případě, kdy budou dané trojúhelníky pravoúhlé, či tupoúhlé.

14. Trojúhelník T_2 je podobný trojúhelníku T_1 s koeficientem podobnosti $\frac{4}{3}$ a má obsah $16\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah trojúhelníku T_1.

? Co stačí k podobnosti rovnoramenných trojúhelníků?

Na obrázku vidíte rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou KL a rovnoramenný trojúhelník XYZ se základnou XY.



Písmeny δ a ε jsme označili úhly při základnách, písmeny φ a ψ úhly při hlavních vrcholech trojúhelníků.

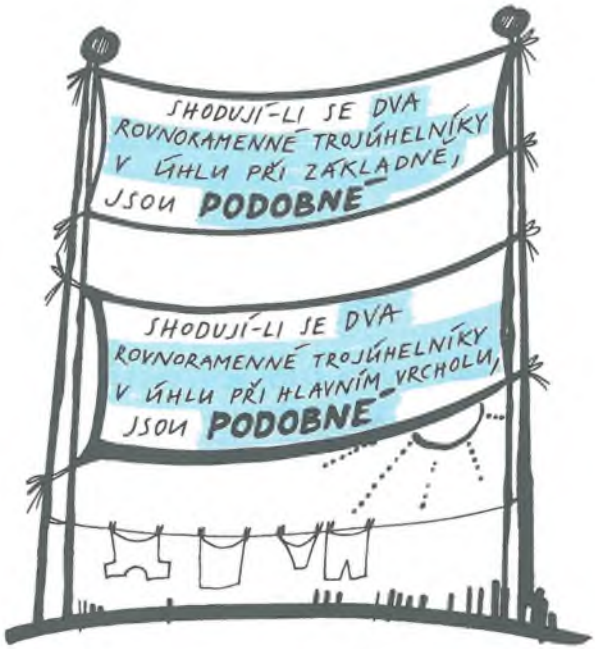
Je jasné, že pokud $\delta = \varepsilon$, pak $\triangle KLM \sim \triangle XYZ$ podle věty *uu*.

Platí stejný závěr i v případě $\varphi = \psi$? Protože součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180°, platí

$$\varphi = 180° - 2\delta \quad \text{a} \quad \psi = 180° - 2\varepsilon.$$

Je-li $\varphi = \psi$, pak $180° - 2\delta = 180° - 2\varepsilon$, a tedy $\delta = \varepsilon$.

I v tomto případě platí $\triangle KLM \sim \triangle XYZ$ podle věty *uu*.



□ **15.** Které rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné?

□ **16.** Rovnoramenný trojúhelník T_1 má úhel při základně 50°, rovnoramenný trojúhelník T_2 má úhel při hlavním vrcholu 80°. Vysvětlete, proč jsou podobné.

17. Rovnoramenný trojúhelník T_1 má základnu z_1 a rameno r_1, rovnoramenný trojúhelník T_2 má základnu z_2 a rameno r_2. Jestliže $r_1 : z_1 = r_2 : z_2$, pak jsou trojúhelníky T_1 a T_2 podobné. Dokažte.

CVIČENÍ 2

□ **1.** Trojúhelník T_2 je podobný trojúhelníku T_1 s koeficientem podobnosti 5. Vypočtěte délky stran trojúhelníku T_2, měří-li strany trojúhelníku T_1 3,3 cm, 4 cm a 5,2 cm.

□ **2.** Trojúhelník T_2 je podobný trojúhelníku T_1 s koeficientem podobnosti 3. Vypočtěte délky stran trojúhelníku T_1, měří-li strany trojúhelníku T_2 6,6 cm, 9 cm a 12 cm.

3. Pro trojúhelníky ABC a XYZ platí $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. Určete délky stran AB a AC trojúhelníku ABC, jestliže $|XY| = 10\,\text{cm}$, $|YZ| = 9\,\text{cm}$, $|ZX| = 7{,}5\,\text{cm}$, $|BC| = 3{,}6\,\text{cm}$.

4. Pro trojúhelníky ABC a PQR platí $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku PQR, jestliže pro vnitřní úhly α, β a γ trojúhelníku ABC platí: Úhel γ je zároveň dvakrát větší než úhel α a třikrát menší než úhel β.

5. Pro trojúhelníky STU a PQR platí $\triangle STU \sim \triangle PQR$ a $|ST| = 15\,\text{cm}$, $|TU| = 10\,\text{cm}$, $|PR| = 32\,\text{cm}$. Vypočtěte délky ostatních stran obou trojúhelníků, jestliže poměr podobnosti trojúhelníku STU vzhledem k trojúhelníku PQR je roven

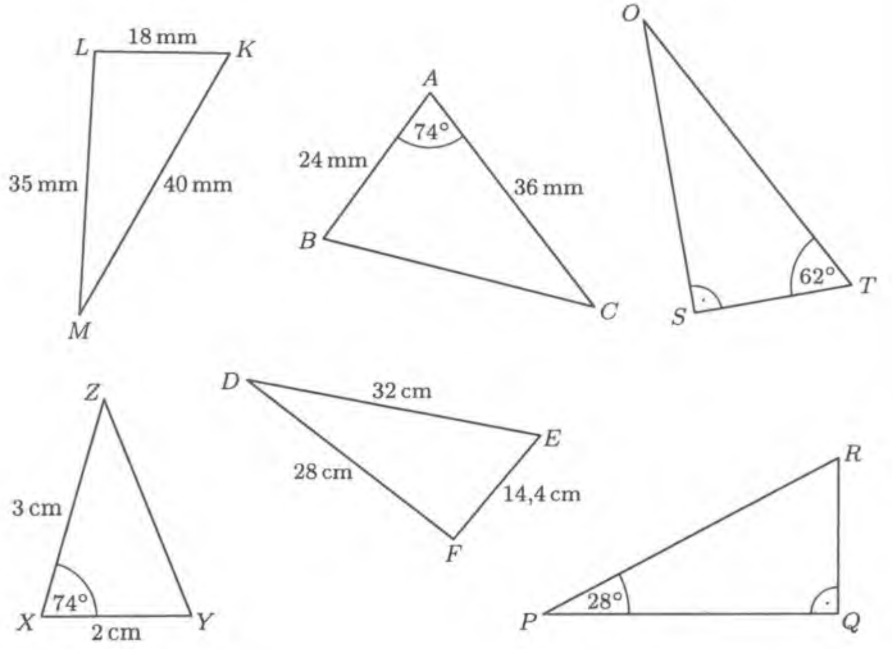
a) $\frac{5}{8}$, b) $\frac{2}{5}$.

6. Pro strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$ platí $|A_1B_1| = 8\,\text{cm}$, $|B_1C_1| = 10\,\text{cm}$, $|C_1A_1| = 12\,\text{cm}$. Určete délky stran trojúhelníku $A_2B_2C_2$, který má obvod 15 cm a který je trojúhelníku $A_1B_1C_1$ podobný.

7. Pro pravoúhlé trojúhelníky ABC a XYZ platí $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. Určete obsah trojúhelníku XYZ, jestliže odvěsny trojúhelníku ABC měří 5 cm a 12 cm a kratší odvěsna trojúhelníku XYZ měří 7,5 cm.

8. Pravoúhlý trojúhelník XYZ je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $k = \frac{2}{3}$. Určete poloměr kružnice opsané trojúhelníku XYZ, víte-li, že těžnice t_c z vrcholu C k přeponě AB trojúhelníku ABC měří 9 cm.

9. Na obrázku jsou tři dvojice podobných trojúhelníků. Najděte je, jejich podobnost zdůvodněte a zapište pomocí znaku $\sim$.



10. Zdůvodněte podobnost trojúhelníků CDE a MNO a zapište ji pomocí znaku $\sim$, znáte-li tyto údaje:

a) $|\sphericalangle ECD| = 52°$, $|\sphericalangle CDE| = 25°$, $|\sphericalangle MON| = 103°$, $|\sphericalangle ONM| = 52°$

b) $|CD| = 15\,\text{cm}$, $|DE| = 12\,\text{cm}$, $|EC| = 21\,\text{cm}$, $|OM| = 7\,\text{cm}$, $|MN| = 5\,\text{cm}$, $|NO| = 4\,\text{cm}$

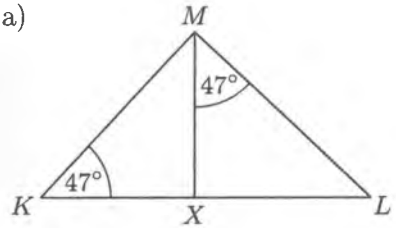
c) $|CD| = 18\,\text{cm}$, $|CE| = 27\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ECD| = 75°$, $|MN| = 14\,\text{cm}$, $|MO| = 21\,\text{cm}$, $|\sphericalangle OMN| = 75°$

11. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na odvěsně BC je zvolen bod X tak, že $|BX| : |XC| = 1 : 2$. Bodem X je vedena přímka p rovnoběžná se stranou AC, která protíná přeponu AB v bodě Y. Dokažte, že platí $\triangle ABC \sim \triangle YBX$, a vypočtěte $|AY| : |AB|$.

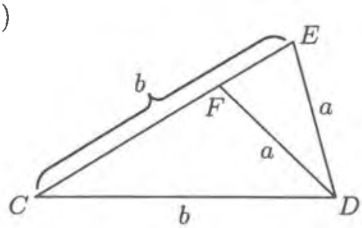
12. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD se protínají v bodě S. Vypočtěte jejich délky a délku základny CD, jestliže $|AB| = 3{,}2\,\text{cm}$, $|AS| = 1{,}7\,\text{cm}$, $|BS| = 2{,}2\,\text{cm}$, $|DS| = 4{,}4\,\text{cm}$.

13. Najděte na obrázku dva podobné trojúhelníky:

a)



b)



14. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je sestrojena výška AA_0 ke straně BC a výška CC_0 ke straně AB. Dokažte, že platí $\triangle AA_0B \sim \triangle CC_0B$.

15. Na straně PR trojúhelníku PQR leží bod A tak, že $|PA| = \frac{2}{5} \cdot |PR|$, a na straně QR leží bod B tak, že $|QB| = \frac{2}{5} \cdot |QR|$. Dokažte, že $|PQ| = \frac{5}{3} \cdot |AB|$.

16. Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku XYZ s koeficientem podobnosti $\frac{2}{5}$. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, jestliže trojúhelník XYZ je rovnostranný a má obvod 15 cm.

∗17. Na rameni VX úhlu XVY jsou zvoleny body A, B tak, že $|VA| = 4\,\text{cm}$, $|VB| = 9\,\text{cm}$. Na rameni VY je zvolen bod C tak, že $|VC| = 6\,\text{cm}$. Dokažte, že $|\sphericalangle VBC| = |\sphericalangle VCA|$.

18. V trojúhelníku ABC měří strana BC 9 cm a strana AC 18 cm. Na straně AC jsou zvoleny body S a Q tak, že $|QC| = 6\,\text{cm}$ a $|SC| = 15\,\text{cm}$. Bodem Q je vedena rovnoběžka a se stranou BC, která stranu AB protíná v bodě P. Bodem S je vedena rovnoběžka b se stranou BC, která stranu AB protíná v bodě R. Vypočtěte délky úseček PQ a RS.

□19. Jistě uhodnete, které tvrzení měla Lucie na mysli, když si do sešitu napsala:

a) Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu.

b) Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu.

Opravte vedlejší větu tak, aby tvrzení bylo správné.

20. Trojúhelníku KLM je opsána kružnice k se středem O, který leží na straně KL. Trojúhelníku ABC je opsána kružnice l se středem S, který leží na straně AB. Rozhodněte, zda jsou tyto trojúhelníky podobné, jestliže platí:

a) $|\sphericalangle KLM| = 40°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$
b) $|\sphericalangle KLM| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 48°$

21. Pravoúhlý trojúhelník ABC má přeponu AB délky 13 cm a kratší odvěsnu BC délky 5 cm. Pravoúhlý trojúhelník DEF má přeponu ED délky 39 cm a kratší odvěsnu FD délky 15 cm. Zdůvodněte a zapište podobnost obou trojúhelníků pomocí znaku $\sim$.

22. Pravoúhlý trojúhelník PQR má odvěsnu PQ délky 1,5 cm a odvěsnu QR délky 2 cm. Pravoúhlý trojúhelník MNO má přeponu ON délky 35 cm a odvěsnu OM délky 21 cm. Zdůvodněte a zapište podobnost obou trojúhelníků pomocí znaku $\sim$.

23. Vypočtěte délky stran rovnoramenného trojúhelníku ABC, jehož výška k základně AB je 7,5 cm, víte-li, že trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A_1B_1C_1$, jehož základna A_1B_1 měří 16 cm a rameno B_1C_1 měří 17 cm.

****24.** V pravoúhlém trojúhelníku ABC je sestrojena pata C_0 výšky k přeponě AB. Dokažte, že platí:

a) $|AC|^2 = |AC_0| \cdot |AB|$ b) $|BC|^2 = |BC_0| \cdot |AB|$

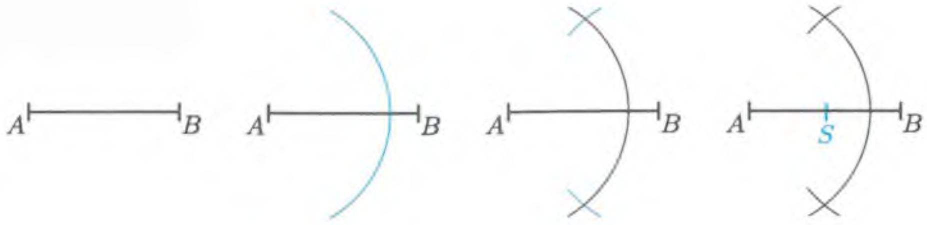
(Každé z těchto tvrzení se nazývá *Eukleidova věta o odvěsně.*)

3 UŽITÍ PODOBNOSTI

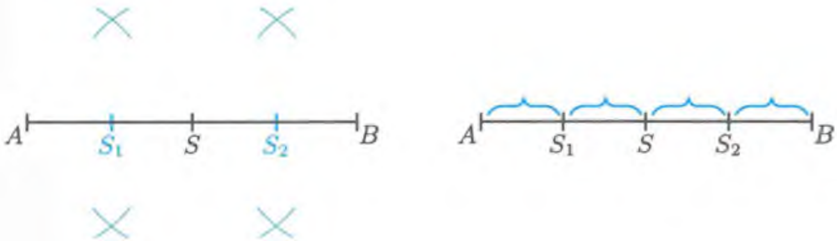
Poznatky o podobných trojúhelnících, které jsme získali v minulých kapitolách, nyní využijeme při řešení úloh dvojího typu. Půjde jednak o některé konstrukční úlohy, které budeme jako obvykle řešit pomocí pravítka a kružítka, jednak o „výpočtové“ úlohy, se kterými se můžeme setkat při určování některých vzdáleností v terénu.

? Jak rozdělit úsečku na daný počet stejných dílů?

Připomeňte si podle obrázků jednu ze základních geometrických konstrukcí – sestrojení středu S dané úsečky AB.



Výsledný bod S dělí úsečku AB na dva stejné díly – úsečky AS a SB. Dalším „rozpůlením" každé z úseček AS, SB rozdělíme celou úsečku AB na čtyři shodné díly.



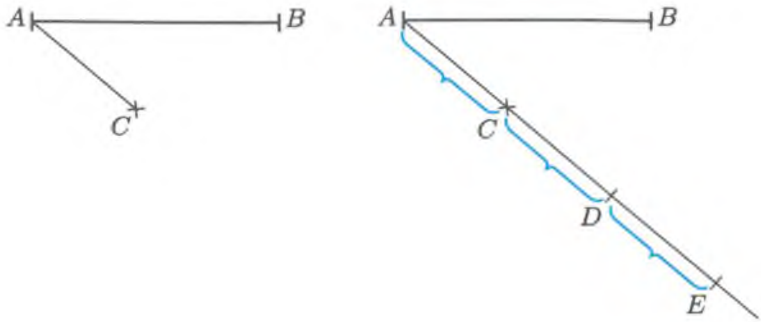
Následným „půlením" můžeme původní úsečku rozdělit na 8, 16, 32, 64, … stejných dílů.

Jak však rozdělit danou úsečku AB na tři shodné díly?

Polohu neznámých bodů X, Y na úsečce AB můžeme jistě určit jednoduše tak, že úsečku AB změříme, její délku vydělíme třemi, a tak získáme délku každého z dílů AX, XY a YB.

Ukážeme nyní, jak vyřešit tuto úlohu bez měření a výpočtu, jen pomocí pravítka a kružítka (s pomůckami, se kterými jsme před chvílí vystačili při dělení úsečky na 2, 4, 8, … stejných dílů).

Rozdělit danou úsečku AB pravítkem a kružítkem na tři stejné díly zatím neumíme. Dovedeme však k dané úsečce AC sestrojit úsečku AE trojnásobné délky. Proveďme to pro libovolný bod C zvolený mimo přímku AB.

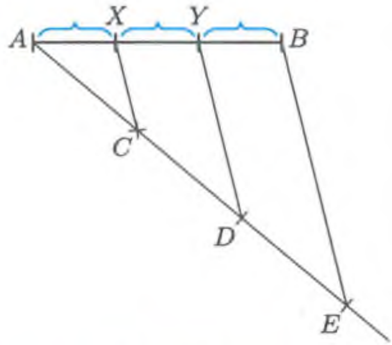


Na polopřímce AC jsme sestrojili body D, E tak, že $|AD| = 2 \cdot |AC|$, $|AE| = 3 \cdot |AC|$. Lze využít bodů C, D, E k nalezení neznámých „dělicích" bodů X, Y na úsečce AB?

Předpokládejme na chvíli, že body X, Y úsečky AB, pro které platí

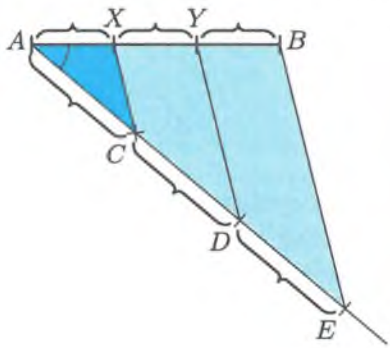
$|AX| = \frac{1}{3} \cdot |AB|$ a $|AY| = \frac{2}{3} \cdot |AB|$,

již známe. Doplňme obrázek ještě o úsečky CX, DY a EB.



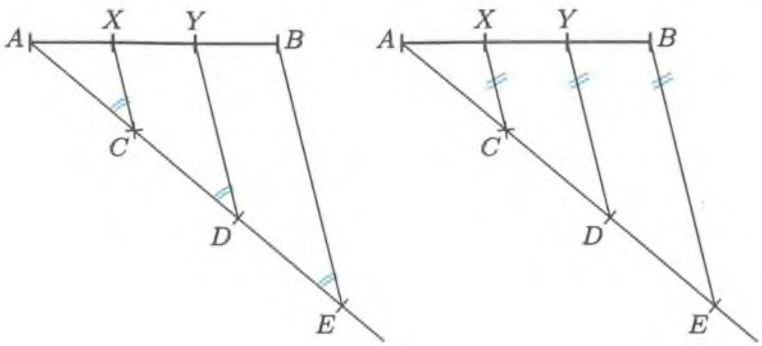
Všimněme si nyní trojúhelníků ACX a AEB. Podle věty *sus* platí $\triangle ACX \sim \triangle AEB$, neboť úhel při vrcholu A je oběma trojúhelníkům společný a poměry přilehlých stran jsou stejné:

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad \frac{|AX|}{|AB|} = \frac{1}{3}$$



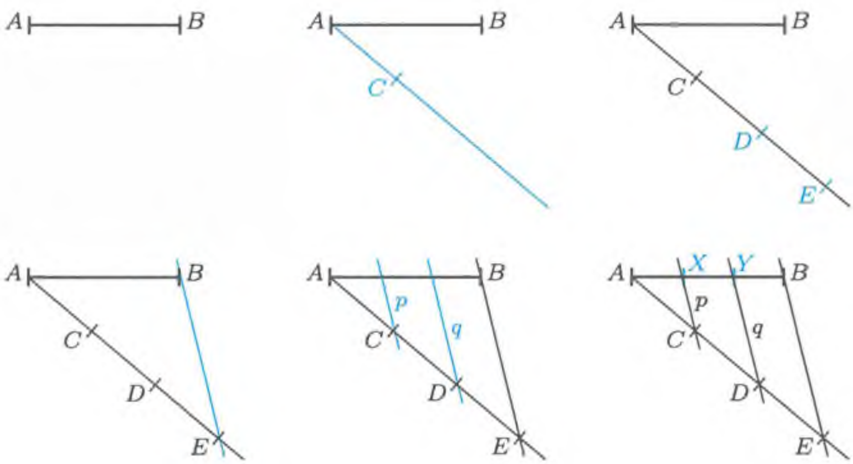
To znamená, že souhlasné úhly ACX a AEB jsou shodné, takže úsečky CX a EB jsou rovnoběžné.

Podobně se zdůvodní podobnost trojúhelníků ADY a AEB, z níž plyne rovnoběžnost úseček DY a EB.



Z rovnoběžnosti úseček CX, DY a EB vyplývá postup, jak hledané body X, Y sestrojit. Popišme celou konstrukci od začátku.

Zvolíme libovolný bod C neležící na přímce AB a na polopřímce AC nalezneme body D, E tak, aby platilo $|AD| = 2 \cdot |AC|$, $|AE| = 3 \cdot |AC|$. Bodem C vedeme rovnoběžku p s přímkou EB. Její průsečík s úsečkou AB je hledaný bod X. Podobně bodem D vedeme rovnoběžku q s přímkou EB, její průsečík s úsečkou AB je hledaný bod Y.



Vysvětleme nyní, proč sestrojené body X a Y skutečně dělí úsečku AB na tři stejné díly. Z rovnoběžnosti přímek p a EB plyne shodnost souhlasných úhlů ACX a AEB, a tak $\triangle ACX \sim \triangle AEB$ podle věty *uu*. To znamená, že

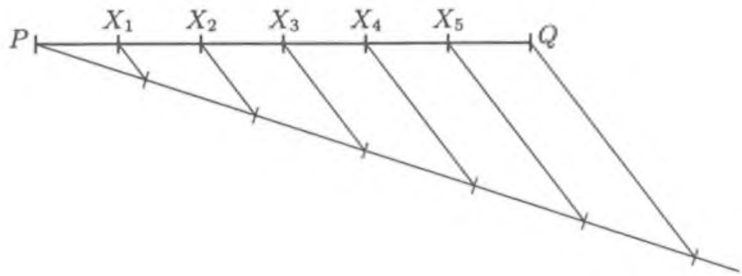
$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{1}{3}.$$

Z rovnoběžnosti přímek q a EB plyne shodnost souhlasných úhlů ADY a AEB, tedy $\triangle ADY \sim \triangle AEB$. Proto

$$\frac{|AY|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{2}{3}.$$

Z rovností $\dfrac{|AX|}{|AB|} = \dfrac{1}{3}$ a $\dfrac{|AY|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$ vyplývá, že pro sestrojené body X, Y skutečně platí $|AX| = |XY| = |YB|$.

Na následujícím obrázku je provedeno konstrukční rozdělení dané úsečky PQ na 6 shodných dílů PX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5Q.



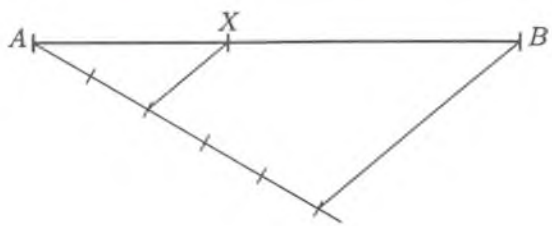
Jak bývá obvyklé, pomocné body a přímky nejsou na obrázku pojmenovány.

1. Narýsujte libovolnou úsečku EF a rozdělte ji na 5 stejných dílů.

Jak rozdělit úsečku v daném poměru?

Rozdělit danou úsečku AB v poměru $2 : 3$ znamená najít takový její bod X, pro který platí $|AX| : |XB| = 2 : 3$. Můžeme si představit, že úsečka AX je složena ze 2 dílů, úsečka XB ze 3 dílů, přitom všechny díly jsou stejné.

Celá úsečka AB je tak rozdělena na $(2 + 3)$ díly, tj. na 5 (stejných) dílů.



Rozdělit danou úsečku AB na 5 stejných dílů už umíme, a proto dokážeme sestrojit i hledaný bod X. (Všimněte si, že jsme ze čtyř „pomocných“ rovnoběžek narýsovali jen tu, kterou potřebujeme k určení bodu X.)

Také bod Y z dalšího obrázku dělí úsečku AB v poměru $2:3$. Jak již víte, nerozlišujeme, který z krajních bodů úsečky je první a který druhý (což by umožnilo stanovit pořadí dvou dílů, na které je úsečka rozdělena).

Domluvíme se, že při dělení úsečky v daném poměru budeme rýsovat vždy jen jedno z obou možných řešení.

2. Narýsujte libovolnou úsečku KL. Rozdělte ji bodem Z v poměru

a) $1:2$, b) $3:1$, c) $2:5$.

3. Narýsujte libovolnou úsečku AB. Rozdělte ji body X a Y tak, aby platilo:

a) $|AX|:|XY|:|YB| = 1:2:1$

b) $|AX|:|XY|:|YB| = 3:2:1$

4. Narýsujte libovolnou úsečku RS. Najděte její bod T tak, aby platilo:

a) $|RT|:|RS| = 1:3$ b) $|TS|:|RS| = 2:5$

5. Na dané úsečce AB sestrojte body X a Y tak, aby platilo

$$|AX|:|XY|:|YB| = 2:1:2.$$

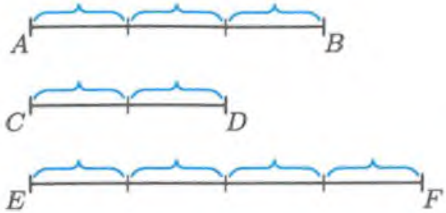
Najděte obě řešení.

Jak zmenšit nebo zvětšit úsečku v daném poměru?

Při zobrazování téhož útvaru v různých měřítcích se často setkáváme s úlohou, jak danou úsečku „přeměnit“ na jinou úsečku v daném poměru $m:n$ dvou přirozených čísel m a n. V případě $m < n$ jde o *zmenšení* dané úsečky, v případě $m > n$ o její *zvětšení*.

Tak například zmenšit danou úsečku AB v poměru $2:3$ znamená sestrojit takovou úsečku CD, pro kterou platí

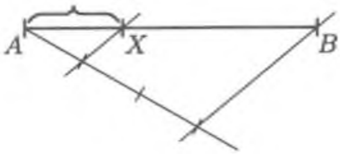
$$|CD| : |AB| = 2 : 3.$$

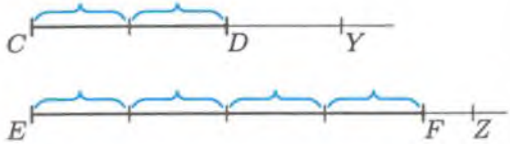


Zvětšit danou úsečku AB v poměru $4:3$ zase znamená sestrojit takovou úsečku EF, pro kterou platí

$$|EF| : |AB| = 4 : 3.$$

Obě zmíněné úlohy umíme snadno vyřešit. Stačí totiž rozdělit úsečku AB na 3 stejné díly. Ze 2 takových dílů „sestavíme“ úsečku CD, ze 4 takových dílů úsečku EF.





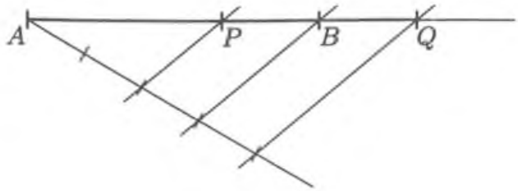
Nejdříve jsme známým postupem sestrojili takový bod X úsečky AB, pro který platí $|AX| : |AB| = 1 : 3$. Délku $|AX|$ jsme pak „nanesli“ dvakrát na předem zvolenou polopřímku CY a čtyřikrát na předem zvolenou polopřímku EZ. Tak jsme dostali krajní bod D hledané úsečky CD i krajní bod F hledané úsečky EF.

Jistě vás napadlo, že konstrukce se zjednoduší, pokud úlohu „pomocných“ polopřímek CY a EZ zastane rovnou polopřímka AB. Nalezneme pak její body P a Q, pro které platí:

$$|AP| : |AB| = 2 : 3 \qquad\qquad |AQ| : |AB| = 4 : 3$$

Úsečka AP je hledaným zmenšením úsečky AB v poměru $2:3$, úsečka AQ je hledaným zvětšením úsečky AB v poměru $4:3$.

Konstrukce bodů P a Q je připomenuta na následujícím obrázku:



Dodejme ještě, že místo o zmenšování (zvětšování) úsečky v daném poměru někdy hovoříme o zmenšování (zvětšování) úsečky s daným koeficientem podobnosti. Například „zmenšit s koeficientem podobnosti 0,7“ znamená „zmenšit v poměru 7 : 10“. Podobně „zvětšit s koeficientem podobnosti 2,5“ znamená „zvětšit v poměru 5 : 2“.

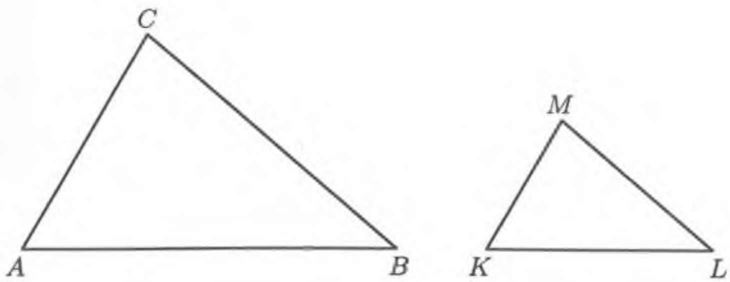
6. Narýsujte libovolnou úsečku XY a pak ji zmenšete v poměru
a) 2 : 5, b) 5 : 6.

7. Narýsujte libovolnou úsečku UV a pak ji zvětšete v poměru
a) 5 : 3, b) 7 : 4.

8. Narýsujte úsečku PQ délky 6 cm. „Přeměňte“ ji na úsečku PR s koeficientem podobnosti
a) 0,8, b) 1,25.

Postup při zmenšování (zvětšování) úseček, který jsme právě vyložili, používáme také při zmenšování (zvětšování) jiných rovinných útvarů.

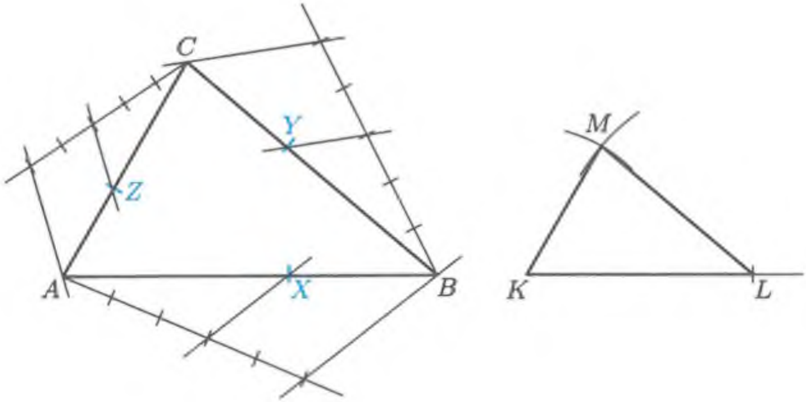
Ukažme si například, jak sestrojit trojúhelník KLM, který je zmenšením daného trojúhelníku ABC v poměru 3 : 5. Trojúhelník KLM má být podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $\frac{3}{5}$. Předpokládejme, že vrcholy obou trojúhelníků si odpovídají tak, že platí $\triangle KLM \sim \triangle ABC$.



Podle zadání má platit:

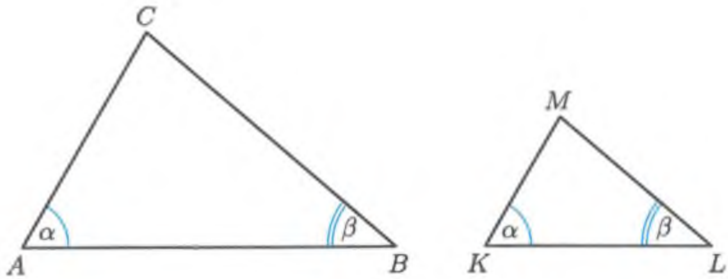
$$\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{|LM|}{|BC|} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{|MK|}{|CA|} = \frac{3}{5}$$

Zmenšíme-li tedy každou ze stran trojúhelníku ABC v poměru $3:5$, dostaneme strany trojúhelníku KLM. Ten pak sestrojíme podle věty *sss*:

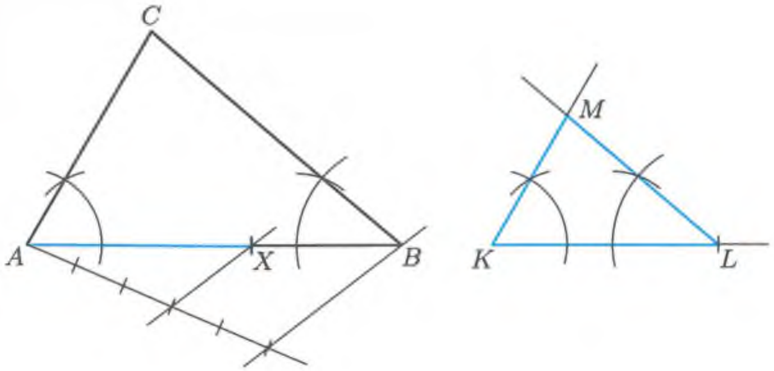


$$|KL| = |AX|, \qquad |LM| = |BY|, \qquad |MK| = |CZ|$$

Konstrukci můžeme podstatně zjednodušit, když si uvědomíme, že podobné trojúhelníky mají shodné odpovídající si úhly.

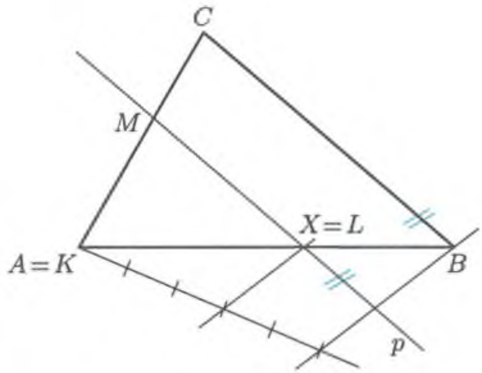


Proto můžeme trojúhelník KLM sestrojit podle věty *usu*: V daném poměru $3:5$ zmenšíme pouze stranu AB, tak dostaneme úsečku KL, k níž poté „přeneseme“ úhly α a β:



$$|KL| = |AX|, \quad |\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle BAC|, \quad |\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle ABC|$$

Ještě „rychlejší“ je konstrukce trojúhelníku KLM v případě, kdy jej „vepíšeme“ do trojúhelníku ABC tak, aby vrchol K splynul s vrcholem A a vrcholy L a M ležely po řadě na polopřímkách AB a AC. Pak totiž vrchol L splyne s bodem X z předchozí konstrukce. Protože vnitřní úhly při vrcholech B a L jsou shodné, k nalezení třetího vrcholu M trojúhelníku KLM stačí vést bodem L rovnoběžku p se stranou BC. Bod M je pak jejím průsečíkem s polopřímkou AC.



9. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Pak sestrojte trojúhelník XYZ podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{3}$

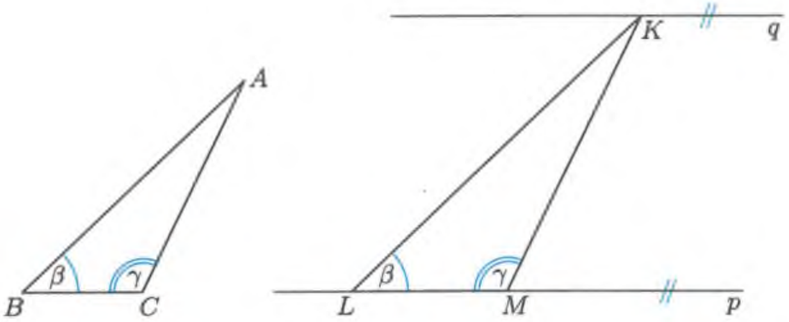
Které další úlohy lze řešit užitím podobnosti?

V závěru této kapitoly vyřešíme nejprve několik konstrukčních úloh, ve kterých se o podobnosti buď mluví přímo v zadání, nebo se podobné útvary „objeví“ v průběhu jejich řešení. Pak přejdeme k zajímavým „praktickým“ úlohám, ke kterým patří například otázka, jak určit výšku věže, známe-li délku jejího stínu.

Příklad 1. Je dán trojúhelník ABC (s tupým úhlem při vrcholu C), přímka p a mimo ni bod K. Sestrojte trojúhelník KLM tak, aby body L, M ležely na přímce p a aby platilo $\triangle KLM \sim \triangle ABC$.

Řešení 1. Při prvním řešení podrobně zopakujeme všechny fáze řešení konstrukční úlohy. Další dvě řešení popíšeme stručněji.

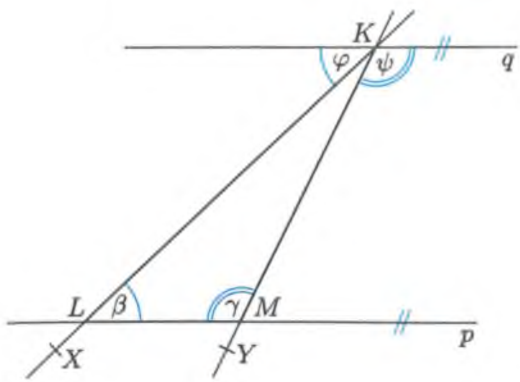
Rozbor. Začneme jako obvykle náčrtkem. Do něj zakreslíme kromě obou (navzájem podobných) trojúhelníků ABC a KLM i pomocnou přímku q, která prochází bodem K a je rovnoběžná s přímkou p.



Protože odpovídající si úhly podobných trojúhelníků jsou shodné, označili jsme je v obou trojúhelnících stejnými písmeny β a γ.

Hledejme přímky KX a KY, na kterých leží po řadě strany KL a KM hledaného trojúhelníku. Využijeme k tomu úhlů φ a ψ, které jsou vyznačeny na obrázku vpravo.

Úhly β a φ jsou střídavé u rovnoběžných přímek p a q, proto jsou shodné. Přímka KX tedy svírá s přímkou q úhel β.

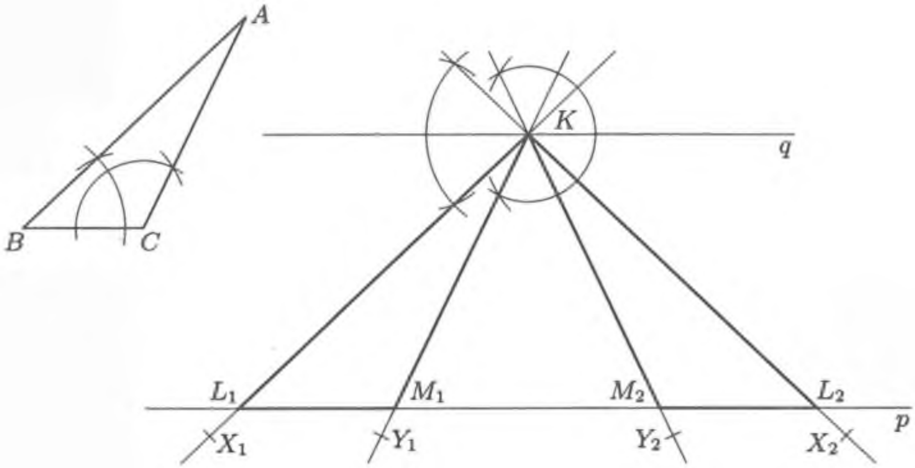


Podobně ze shodnosti střídavých úhlů γ a ψ vyplývá, že přímka KY svírá s přímkou q úhel γ.

Postup konstrukce

Dáno: trojúhelník ABC, přímka p, bod $K \notin p$

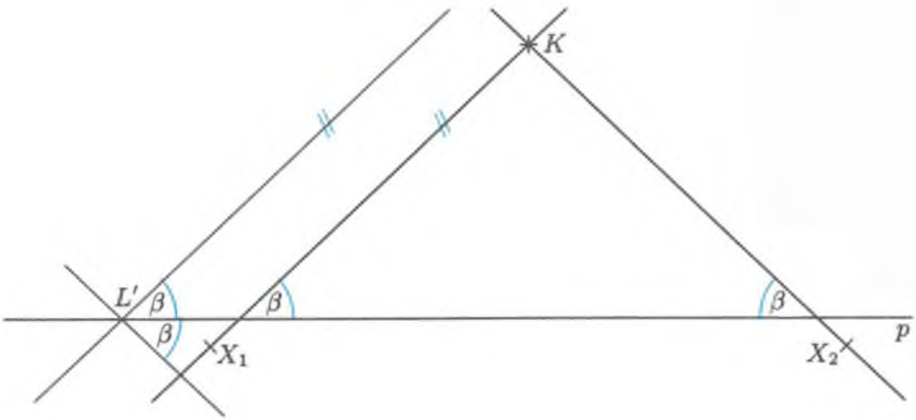
1. přímka q; $q \parallel p$, $K \in q$
2. přímka KX; KX svírá s přímkou q úhel β
3. bod L; $L \in p \cap KX$
4. přímka KY; KY svírá s přímkou q úhel γ
5. bod M; $M \in p \cap KY$
6. $\triangle KLM$



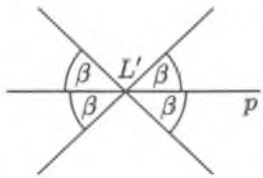
Počet řešení. Bodem K lze vést dvě přímky KX_1 a KX_2, které svírají s přímkou q úhel β. Stejně tak lze sestrojit dvě přímky KY_1 a KY_2, které svírají s přímkou q úhel γ. Úloha však nemá čtyři, ale pouze dvě řešení: dva (nepřímo) shodné trojúhelníky KL_1M_1 a KL_2M_2, které jsou souměrně sdružené podle osy kolmé k přímce p a procházející bodem K. Sami vysvětlete, proč ani trojúhelník KL_1M_2, ani trojúhelník KL_2M_1 není řešením naší úlohy.

Zkouška správnosti. Z konstrukce vyplývá, že trojúhelníky KL_1M_1 a KL_2M_2 jsou podobné trojúhelníku ABC podle věty *uu* a jejich vrcholy L_1, M_1, L_2 i M_2 leží na přímce p.

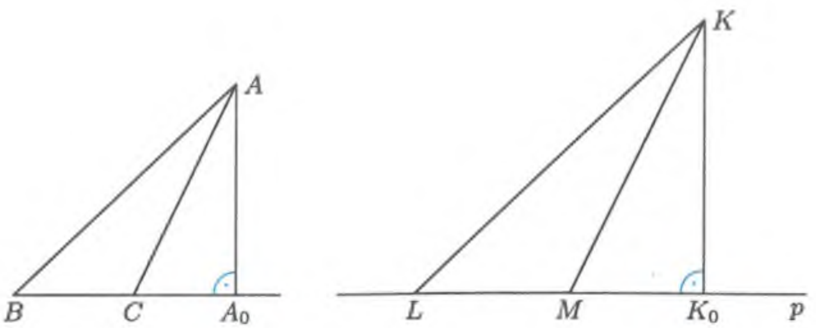
Řešení 2. Přímky KX a KY z *Řešení 1* sestrojíme, aniž použijeme pomocnou přímku q. Sestrojit například přímku KX znamená vyřešit úlohu tohoto typu: Daným bodem K vést přímku KX, která s danou přímkou p svírá daný úhel β. Přímku KX sestrojíme takto: Na přímce p zvolíme libovolný bod L', úhel β z trojúhelníku ABC přeneseme tak, aby bod L' byl jeho vrcholem a aby jedno jeho rameno leželo na přímce p. Přímku KX pak sestrojíme jako rovnoběžku s druhým ramenem přeneseného úhlu β.



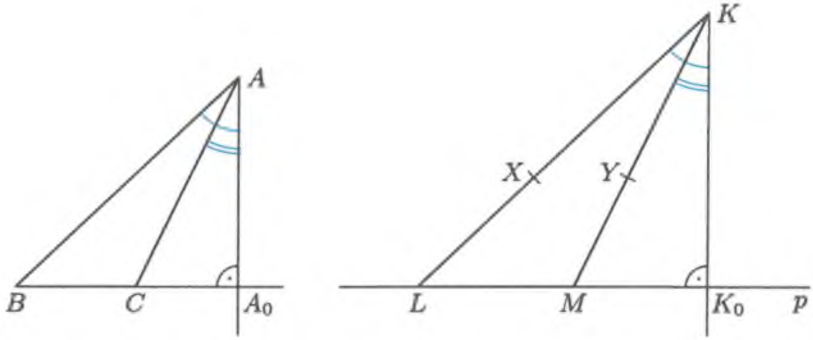
Ačkoliv úhel β můžeme přenést „k vrcholu L'" čtyřmi různými způsoby, hledané přímky jsou pouze dvě: přímky KX_1 a KX_2 z předchozího obrázku.



Řešení 3. I když polohu strany LM na přímce p neznáme, můžeme sestrojit výšku KK_0 hledaného trojúhelníku KLM. Bod K_0 je totiž patou kolmice vedené z bodu K k přímce p. Sestrojíme i výšku AA_0 trojúhelníku ABC.



Pravoúhlé trojúhelníky BAA_0 a LKK_0 mají shodné úhly při vrcholech B a L (jsou to odpovídající si úhly podobných trojúhelníků ABC a KLM), tedy i shodné úhly při vrcholech A a K. Bod L tedy leží na té polopřímce KX, která svírá s polopřímkou KK_0 úhel shodný s úhlem BAA_0. Podobně bod M lze sestrojit pomocí shodných úhlů CAA_0 a MKK_0.

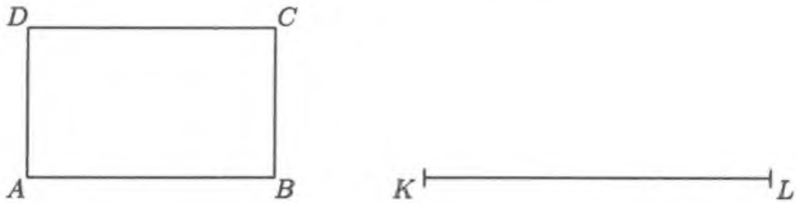


10. Narýsujte trojúhelník KLM z předchozího příkladu postupy popsanými v druhém a třetím řešení.

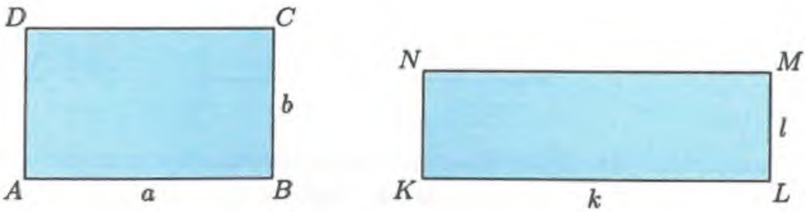
11. Narýsujte libovolný trojúhelník XYZ. Pak sestrojte trojúhelník ABC o straně $a = 6\,\mathrm{cm}$ tak, aby $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

12. Narýsujte libovolný trojúhelník XYZ. Pak sestrojte trojúhelník ABC o výšce $v_a = 5\,\mathrm{cm}$ tak, aby $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

Příklad 2. Je dán obdélník $ABCD$ a úsečka KL. Sestrojte obdélník $KLMN$, který má stejný obsah jako obdélník $ABCD$.



Řešení. Označme $a = |AB|$, $b = |BC|$, $k = |KL|$, $l = |LM|$.



Délku k strany KL obdélníku $KLMN$ známe, délku l sousední strany LM vypočteme z rovnosti

$$a \cdot b = k \cdot l,$$

která vyjadřuje, že obdélníky $ABCD$ a $KLMN$ mají stejný obsah. Vyjde

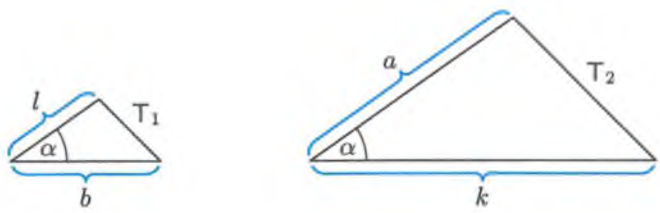
$$l = \frac{a \cdot b}{k}.$$

Kdybychom délky a, b a k změřili, mohli bychom délku l snadno vypočítat. Ukážeme, že tuto délku lze určit také konstrukčně (bez měření a výpočtu).

Rovnost $a \cdot b = k \cdot l$ přepíšeme jako úměru

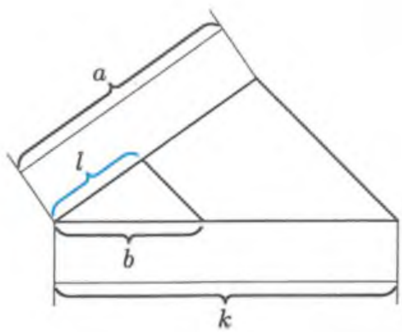
$$l : a = b : k,$$

kterou budeme považovat za rovnost poměrů odpovídajících si stran dvou podobných trojúhelníků T_1 a T_2, které vidíte na obrázku (úhel α je zvolen libovolně):



Z úměry $l : a = b : k$ plyne, že trojúhelníky T_1 a T_2 jsou skutečně podobné (podle věty *sus*).

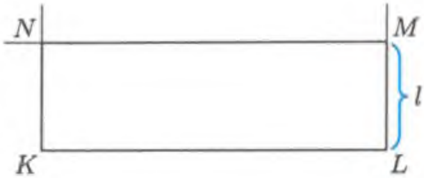
Ke konstrukci trojúhelníku T_2 délku l nepotřebujeme; sestrojíme ho pro dané délky a, k a libovolně zvolený úhel α podle věty *sus*. Pokud takto sestrojený trojúhelník T_2 „přeměníme" v poměru $b : k$, získáme trojúhelník T_1, a tím i neznámou délku l.



K této konstrukci poznamenejme, že dosud jsme úsečky nebo trojúhelníky „přeměňovali" pouze v poměru $m : n$, kde m a n byla přirozená čísla.

Pomáhali jsme si při tom dvěma úsečkami složenými z m a n stejných dílů. Nyní jsme použili stejný postup i pro poměr $b : k$ délek daných úseček (aniž bychom znali jejich číselné hodnoty v určitých jednotkách).

Pomocí zjištěné délky l již můžeme obdélník $KLMN$ (ve zvolené polorovině s hraniční přímkou KL) snadno sestrojit.

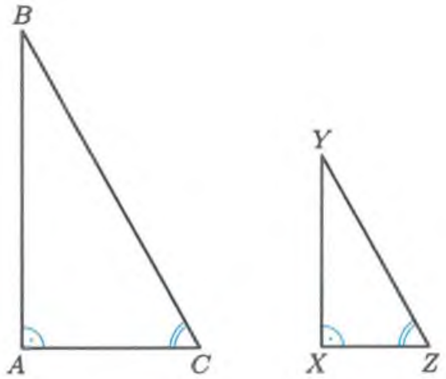


13. Na obrázku jsou úsečky délek a, b, y. Přeneste je do sešitu a pak sestrojte úsečku délky x tak, aby platilo $a \cdot b = x \cdot y$.

14. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník PQR s přeponou PQ a úsečku BC. Pak sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, který má stejný obsah jako trojúhelník PQR.

Příklad 3. Karel chtěl zjistit výšku osamělého stromu v rovinaté krajině. Za slunečného dne změřil těsně po sobě délku stínu stromu a délku stínu svého kamaráda Jardy vysokého 170 cm. Zjistil, že stín stromu byl dlouhý 8 m a stín Jardy 75 cm. Jak vysoký byl strom?

Řešení. Strom znázorníme úsečkou AB, jeho stín úsečkou AC, postavu Jardy úsečkou XY, její stín úsečkou XZ.



Protože sluneční paprsky jsou rovnoběžné, jsou úhly ACB a XZY shodné (rovné úhlu, pod kterým dopadají paprsky na vodorovnou rovinu). Pravoúhlé trojúhelníky ACB a XZY jsou tedy podobné, proto platí

$$\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|AC|}{|XZ|}, \quad \text{tedy} \quad |AB| = \frac{|AC|}{|XZ|} \cdot |XY|.$$

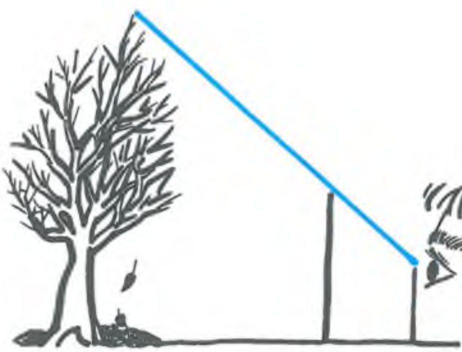
Po dosazení $|XY| = 1{,}7\,\mathrm{m}$, $|XZ| = 0{,}75\,\mathrm{m}$, $|AC| = 8\,\mathrm{m}$ vychází

$$|AB| = \frac{8}{0{,}75} \cdot 1{,}7\,\mathrm{m} \doteq 18{,}1\,\mathrm{m}.$$

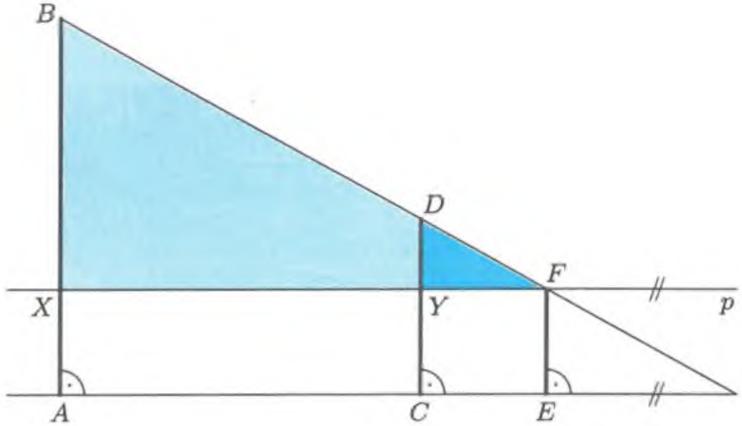
Strom byl vysoký přibližně 18,1 m.

Měření stínů využil pravděpodobně i starořecký matematik *Thales z Milétu* (625 – 545 př. Kr.), který touto metodou určil výšku egyptských pyramid.

Určování výšky stromu pomocí stínu je samozřejmě možné jen za slunečného počasí. Za oblačného dne můžeme výšku stromu určit pomocí dvou tyčí různých délek. Delší z nich postavíme svisle ve vhodné vzdálenosti od stromu a kratší tyč postavíme dále od stromu tak, aby vrchol stromu a vrcholy obou tyčí ležely v jedné přímce:



Strom i tyče znázorníme svislými úsečkami AB, CD a EF a vysvětlíme, jak se pomocí délek $|AC|$, $|CE|$, $|CD|$ a $|EF|$ vypočítá délka úsečky AB.



Pomůžeme si vodorovnou přímkou p vedenou bodem F. Její průsečíky s úsečkami AB a CD jsme označili po řadě X a Y. Z obrázku vyčteme, že platí:

$$|AB| = |AX| + |XB| = |EF| + |XB|$$

Neznámou délku $|XB|$ určíme z podobných trojúhelníků BXF a DYF:

$$\frac{|BX|}{|DY|} = \frac{|XF|}{|YF|}, \quad \text{tedy} \quad |BX| = \frac{|XF|}{|YF|} \cdot |DY|,$$

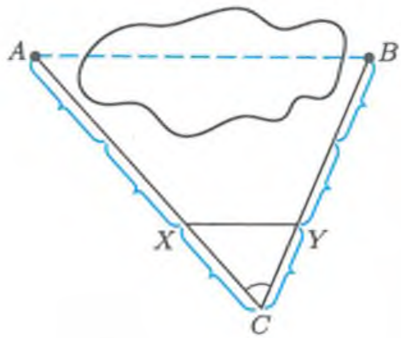
kam nakonec dosadíme $|XF| = |AE| = |AC| + |CE|$, $|YF| = |CE|$ a $|DY| = |CD| - |EF|$.

15. Vypočtěte výšku stromu podle předchozího postupu, kdy délky tyčí jsou 2 m a 0,5 m. Delší tyč je od stromu vzdálena 24 m, kratší tyč je od stromu ještě o 3 m dále.

Vysvětlíme ještě, jak je možné určit vzdálenost dvou míst v terénu, mezi nimiž je překážka, která znemožňuje přímé měření. Jsou to například dvě místa A, B oddělená hladinou rybníka.

Zvolíme takové místo C, aby ani mezi místy A a C, ani mezi místy B a C nebyla žádná překážka. Obě vzdálenosti $|CA|$ i $|CB|$ změříme a zmenšíme ve stejném poměru, například $1 : 3$. Zmenšeným vzdálenostem odpovídají na obrázku místa X a Y. Jsou to ty body úseček CA a CB, pro které platí

$$|CX| = \tfrac{1}{3} \cdot |CA|, \quad |CY| = \tfrac{1}{3} \cdot |CB|.$$



Trojúhelník CAB je podobný trojúhelníku CXY (podle věty *sus*) s koeficientem podobnosti 3. Proto platí:

$$|AB| = 3 \cdot |XY|$$

Zdůrazněme ještě, že vzdálenost míst A, B lze takto určit, pokud lze změřit vzdálenost míst X a Y. Kdyby mezi místy X a Y byla překážka, museli bychom koeficient zmenšení $\frac{1}{3}$ nahradit jiným, vhodnějším, aby mezi novými, odpovídajícími místy X' a Y' překážka nebyla.

16. Při zjišťování vzdálenosti mezi místy A a B oddělenými zákrutem říčky bylo určeno místo C vzdálené 150 m od místa A a 120 m od místa B. Na spojnici AC bylo kolíkem určeno místo X vzdálené 30 m od místa C. Druhý kolík byl vytyčen v místě Y na spojnici CB ve vzdálenosti 24 m od místa C. Vzdálenost obou kolíků byla 35 m. Určete vzdálenost míst A a B.

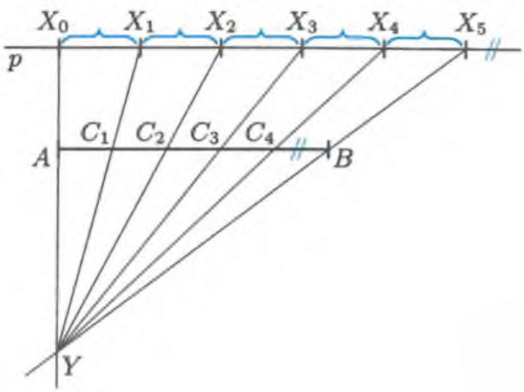
CVIČENÍ 3

1. Narýsujte úsečku XY délky 10,8 cm a rozdělte ji na 7 stejných dílů.

2. Narýsujte libovolný trojúhelník. Každou z jeho stran rozdělte na 3 stejné díly. Každé dva dělicí body na různých stranách spojte úsečkami. Kolik takových úseček vznikne? Kolik by jich vzniklo, kdybychom každou stranu trojúhelníku rozdělili na n stejných dílů?

3. Vysvětlete, proč je správný následující postup dělení dané úsečky AB na 5 shodných dílů:

   Narýsujeme přímku p rovnoběžnou s AB a naneseme na ni 5 shodných úseček X_0X_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5. Pak sestrojíme polopřímky X_0A a X_5B a jejich průsečík označíme Y. Průsečíky C_1, C_2, C_3 a C_4 úsečky AB s úsečkami YX_1, YX_2, YX_3 a YX_4 jsou pak hledanými dělicími body.



4. Narýsujte libovolnou úsečku PQ a rozdělte ji bodem R v poměru $4:8$.

5. Narýsujte úsečku MN délky 10 cm. Sestrojte na ní bod O tak, aby platilo:

   a) $|MO|:|ON| = 5:1$ b) $|MO|:|ON| = 1:5$

   c) $|MO|:|ON| = 4:3$ d) $|MO|:|ON| = 3:6$

6. Narýsujte libovolnou přímku p a umístěte na ni body C, O, B, Y (v tomto pořadí) tak, aby platilo:

$$|CO|:|OB|:|BY| = 5:3:2, \quad |CY| = 8\,\text{cm}$$

7. Na danou úsečku DE umístěte body R a Q tak, aby

$$|DR|:|RQ|:|QE| = 5:2:3.$$

   Najděte obě řešení.

8. Narýsujte libovolnou přímku p a umístěte na ni body A, H, O, J (v tomto pořadí) tak, aby platilo:

$$|AJ| = 11\,\text{cm}, \quad |AO| : |OJ| = 5 : 4, \quad |AH| : |HJ| = 1 : 2.$$

Zapište poměr $|AH| : |HO| : |OJ|$ třemi přirozenými čísly.

9. Je dána úsečka MN délky 9 cm. Na polopřímce MN sestrojte bod X tak, aby $|MX| : |MN| = 2 : 3$.

10. Je dána úsečka KL délky 7 cm. Na polopřímce KL sestrojte bod Y tak, aby $|KL| : |KY| = 5 : 7$.

11. Narýsujte libovolnou úsečku AB a pak ji

a) zmenšete v poměru 3 : 4, b) zvětšete v poměru 8 : 5.

12. Narýsujte libovolnou úsečku EF a pak ji „přeměňte" na úsečku EF' s koeficientem podobnosti

a) 1,4, b) 0,4.

13. Narýsujte kružnici k se středem S a poloměrem $r = 3{,}2\,\text{cm}$. Pak narýsujte soustřednou kružnici l s poloměrem r_1, kde

a) $r_1 = \frac{2}{3} \cdot r$, b) $r_1 = \frac{5}{3} \cdot r$.

14. Narýsujte libovolný čtverec C_1. Pak sestrojte čtverec C_2 podobný čtverci C_1 s koeficientem podobnosti $\frac{4}{5}$, který má se čtvercem C_1 společné všechny osy souměrnosti. Kolik má úloha řešení?

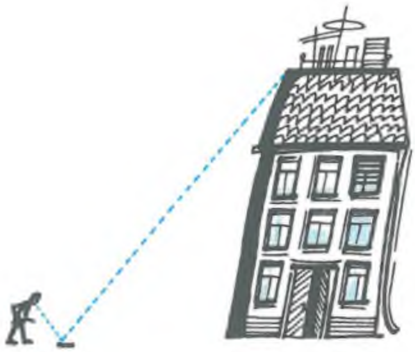
15. Narýsujte libovolný rovnoramenný trojúhelník T_1. Pak sestrojte trojúhelník T_2 podobný trojúhelníku T_1 s koeficientem podobnosti $\frac{6}{5}$.

16. Narýsujte obdélník O_1 s rozměry 9 cm a 3,8 cm. Pak sestrojte obdélník O_2 podobný obdélníku O_1 s koeficientem podobnosti $\frac{4}{7}$.

17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $c = 4\,\text{cm}$, $a = 6{,}2\,\text{cm}$, $\beta = 112°$. Pak sestrojte trojúhelník $A_1B_1C_1$ podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $\frac{4}{3}$.

18. Do kružnice s poloměrem 3,7 cm vepište libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC. Pak sestrojte trojúhelník $A_1B_1C_1$ podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $\frac{4}{5}$.

■ 19. Vypočtěte výšku domu z údajů, které získal Pavel při pokusu se zrcátkem. Zrcátko je vzdáleno 12 m od domu a 2 m od Pavlových nohou, Pavlovy oči jsou 160 cm nad vodorovnou rovinou. (Pavel v zrcátku vidí nejvyšší bod průčelí domu.)

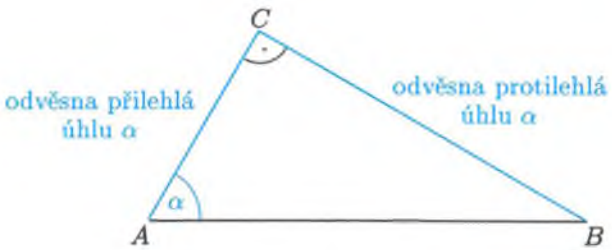


4 SINUS OSTRÉHO ÚHLU

Víme již, že každý trojúhelník je určen délkami svých stran. Stranami trojúhelníku jsou tedy určeny i velikosti jeho vnitřních úhlů. Zatím je však nedokážeme určit jinak než tak, že trojúhelník podle věty *sss* sestrojíme a jeho vnitřní úhly změříme. Jejich velikosti ***vypočítat*** ze stran trojúhelníku nedovedeme; víme jen, že proti delší straně leží větší úhel, a tak umíme vnitřní úhly uspořádat podle velikosti. (Podle délek stran dokážeme ještě rozhodnout, zda má některý vnitřní úhel trojúhelníku velikost 90°.)

Se způsobem, jak vypočítat velikosti vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku z délek jeho stran, se seznámíte až ve vyšších ročnících gymnázia. Ve zbývajících kapitolách tohoto sešitu se budeme zabývat vztahy mezi délkami stran a velikostmi vnitřních úhlů *pravoúhlých* trojúhelníků.

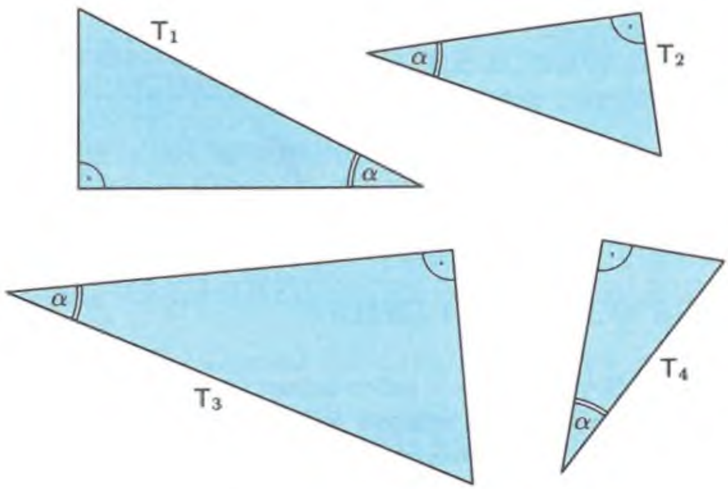
Kvůli stručnému vyjadřování se domluvíme na pojmenování odvěsen pravoúhlého trojúhelníku. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB nazveme odvěsnu AC ***přilehlou*** úhlu α, odvěsnu BC ***protilehlou*** úhlu α.



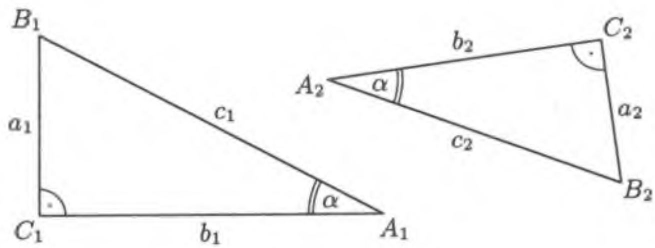
Strana BC je ovšem zároveň odvěsnou ***přilehlou*** úhlu β, strana AC je odvěsnou ***protilehlou*** úhlu β.

? Co je *sinus* ostrého úhlu?

Na obrázku vidíte čtyři pravoúhlé trojúhelníky T_1, T_2, T_3 a T_4 se shodným vnitřním úhlem α:



Podle věty *uu* jsou všechny čtyři trojúhelníky T_1, T_2, T_3 a T_4 navzájem podobné. Vyberme libovolné dva z nich, např. T_1 a T_2, a popišme obvyklým způsobem jejich strany a vrcholy:



Víme, že poměry odpovídajících si stran jsou stejné:

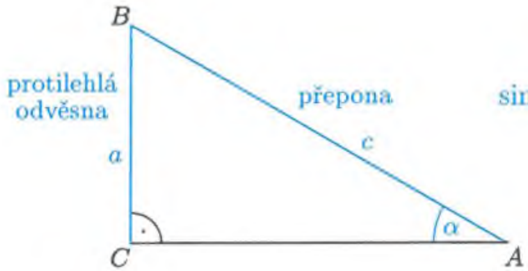
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Rovnost „krajních“ zlomků $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}.$$

Na levé straně této rovnosti je poměr délek dvou stran trojúhelníku T_1, na pravé straně poměr délek dvou stran trojúhelníku T_2. V obou případech jde o poměr odvěsny protilehlé úhlu α a přepony.

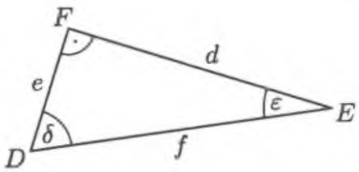
Zjistili jsme, že ve všech pravoúhlých trojúhelnících se stejným ostrým vnitřním úhlem α má *poměr odvěsny protilehlé úhlu α a přepony* stejnou hodnotu. Tato hodnota tedy závisí pouze na velikosti úhlu α. Říkáme jí **sinus úhlu α** a značíme $\sin\alpha$ (čti „sinus alfa“).



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

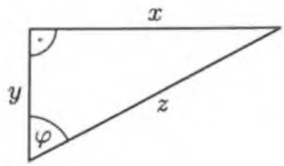
Jak vysvětluje původ názvu *sinus* většina historiků matematiky? Staří Indové používali pro tětivu luku nebo kružnice slovo *džíva*. Od Indů ho převzali Arabové, kteří toto cizí slovo zapisovali ve svých spisech stejně jako arabské slovo *džajb* (v arabštině se totiž nezapisují samohlásky), které má více významů: záliv, ňadra, výstřih, vypuklost apod. Některé z těchto významů má i latinské slovo *sinus*, které tak při překladu arabských spisů do latiny uplatnil *Robert z Chesteru* kolem r. 1145. Podle jiného názoru vzniklo slovo sinus z latinské zkratky *s.ins.* pro spojení *semis inscripta* znamenající *půl tětivy*.

1. Zapište sinus úhlů δ a ε pomocí délek stran trojúhelníku DEF:

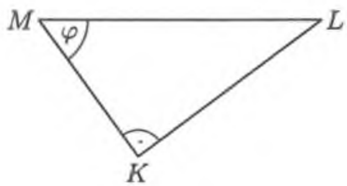


2. Zapište sinus úhlu φ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a)

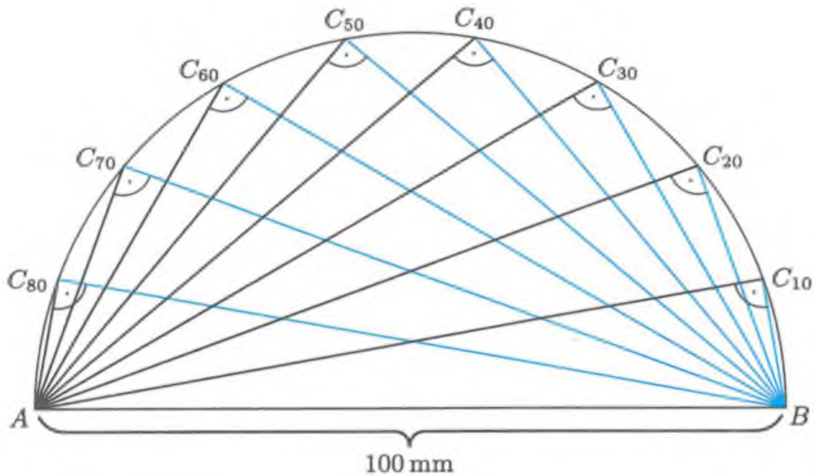


b)



? Co lze říci o hodnotách sinu?

Popsali jsme způsob, kterým je každému ostrému úhlu α přiřazeno číslo zvané sinus α. Jeho přibližné hodnoty můžeme určit rýsováním a měřením.



Na obrázku jsou narýsovány pravoúhlé trojúhelníky se společnou přeponou AB délky 100 mm a s vnitřními úhly 10°, 20°, 30°, ..., 80° při vrcholu A. Jejich vrcholy C_{10}, C_{20}, C_{30}, ..., C_{80} leží na půlkružnici nad průměrem AB. Měřením délek „modrých odvěsen" (s přesností na milimetry) získáme hodnoty sin 10°, sin 20°, sin 30°, ..., sin 80° s přesností na dvě desetinná místa. Například:

$$\sin 40° = \frac{|BC_{40}|}{|AB|} \doteq \frac{64\,\text{mm}}{100\,\text{mm}} = 0{,}64$$

Takto zjištěné hodnoty zapíšeme do tabulky:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin\alpha$	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98

Co všechno nám čísla z tabulky napovídají? Především to, že hodnoty $\sin\alpha$ leží mezi čísly 0 a 1:

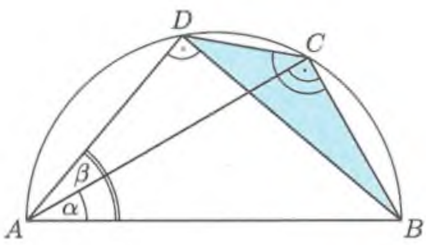
$$0 < \sin\alpha < 1 \quad \text{pro každé } \alpha, \quad 0° < \alpha < 90°.$$

Vysvětlení je snadné. Číslo $\sin\alpha$ je rovno poměru délek odvěsny a přepony některého pravoúhlého trojúhelníku. Protože odvěsna je kratší než přepona, je takový poměr kladné číslo menší než 1.

Naše tabulka také nasvědčuje tomu, že většímu ostrému úhlu odpovídá větší hodnota sinu:

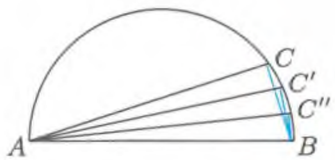
Je-li $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$, pak $\sin\alpha < \sin\beta$.

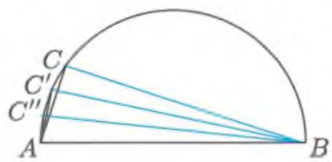
Uvedené pravidlo dokážeme, když zdůvodníme, proč pro délky modrých úseček z obrázku platí $|BC| < |BD|$. Protože úhel BCA je pravý, je úhel BCD tupý, a tak je strana BD nejdelší stranou trojúhelníku BCD, takže nerovnost $|BC| < |BD|$ skutečně platí.



Z geometrického názoru je patrné, že čím bude úhel α menší (tj. „blíže" k 0°), tím bude číslo $\sin\alpha$ „blíže" k 0. Na druhé straně, čím bude úhel α „blíže" k 90°, tím bude číslo $\sin\alpha$ „blíže" k 1. Učiníme proto úmluvu:

$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1$

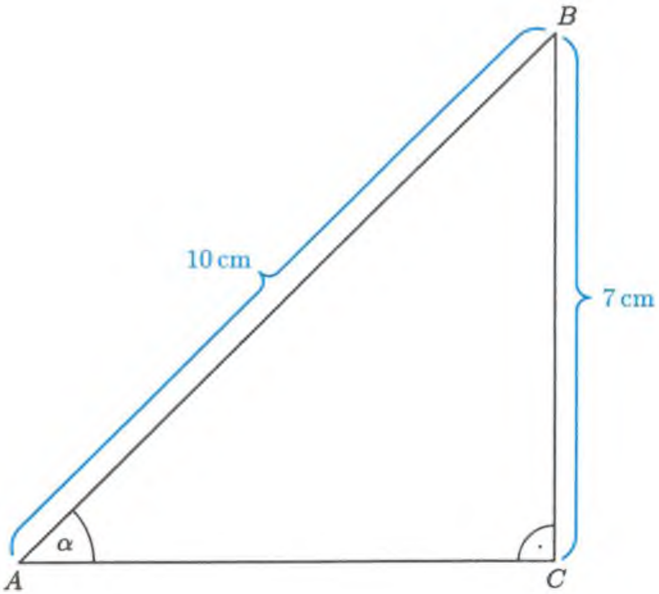




Tyto dvě rovnosti nelze odvodit pomocí poměrů délek stran žádného pravoúhlého trojúhelníku. Jejich význam doceníte až ve vyšších ročnících gymnázia.

Je rovněž patrné, že když bod C „proběhne“ celou půlkružnici AB, dosáhne délka odvěsny BC pravoúhlého trojúhelníku ABC všech hodnot od 0 do $|AB|$. Znamená to, že když ostrý úhel α nabude všech velikostí od 0° do 90°, vyplní hodnoty sinu α celý interval $(0, 1)$.

Pro danou hodnotu sinu můžeme velikost příslušného ostrého úhlu určit přibližně rýsováním a měřením. Zvolme libovolné číslo z intervalu $(0, 1)$, například 0,7, a hledejme úhel α z rovnosti $\sin\alpha = 0{,}7$. Určíme ho například jako ostrý vnitřní úhel BAC v tom pravoúhlém trojúhelníku ABC, jehož přepona AB měří 10 cm a jehož odvěsna BC má délku 7 cm. Takový trojúhelník snadno sestrojíme podle věty *Ssu*. Měřením se přesvědčte, že $\alpha \doteq 44°$.



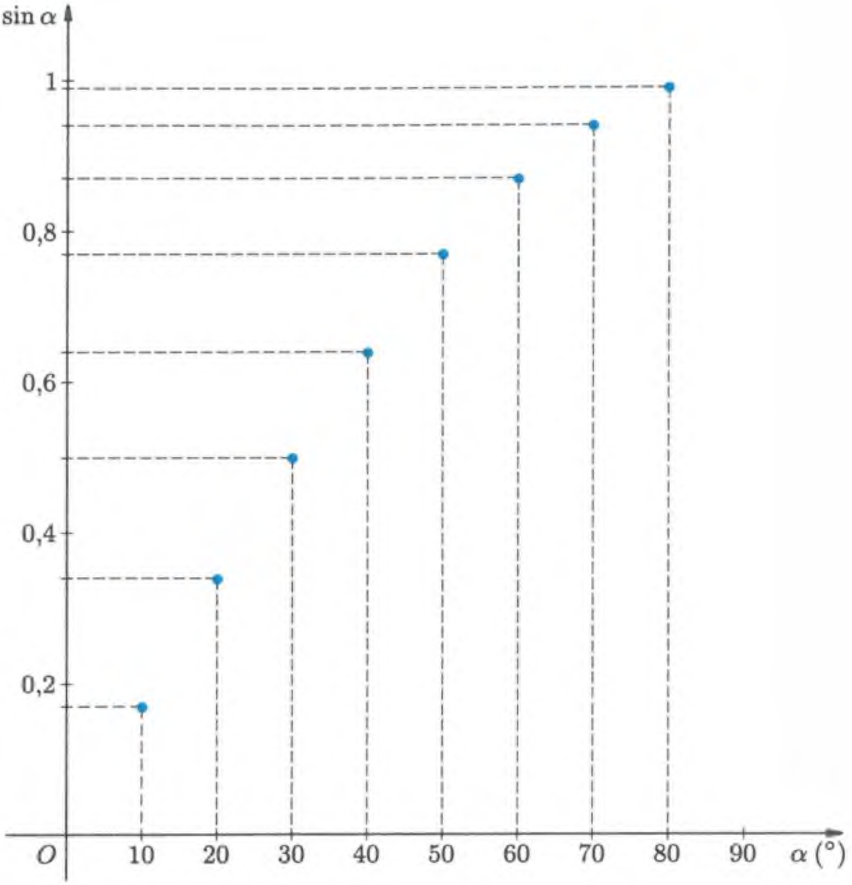
3. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné strany a určete přibližnou hodnotu $\sin\alpha$ pro úhel

a) $\alpha = 45°$, b) $\alpha = 72°$.

4. Rýsováním a měřením zjistěte přibližnou velikost úhlu α z rovnosti

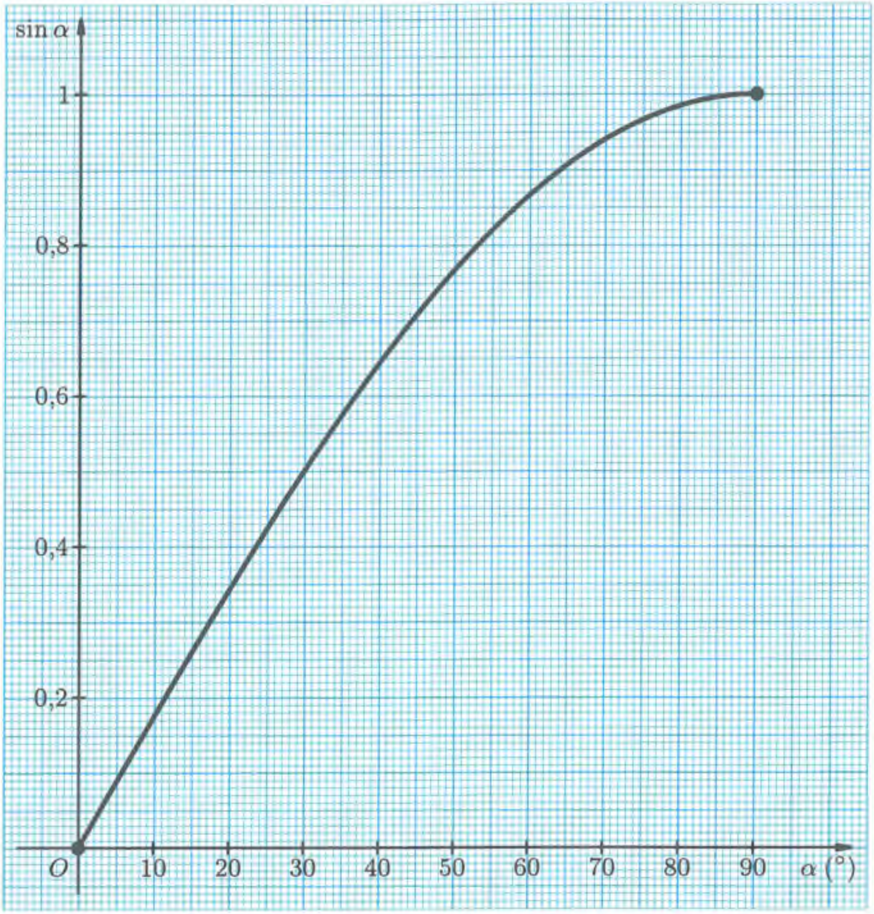
a) $\sin\alpha = 0{,}3$, b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Znázorněme nyní graficky, jak závisí hodnoty $\sin\alpha$ na úhlu α. Nejdříve využijeme údaje z tabulky na str. 70 k zakreslení osmi „izolovaných“ bodů v pravoúhlé soustavě souřadnic:

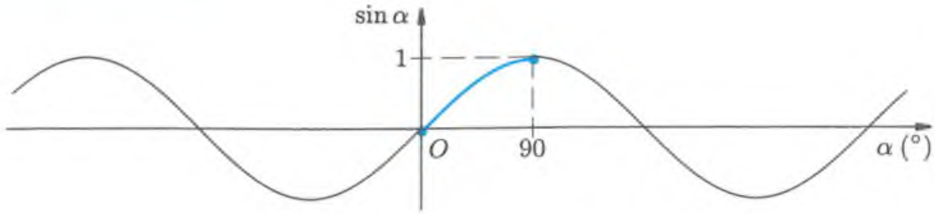


Na vodorovnou osu jsme „vynesli“ velikosti úhlu α ve stupních, na svislou osu hodnoty $\sin\alpha$. Zdůrazněme, že modré body odpovídají pouze *přibližným* hodnotám, které jsme zjistili rýsováním a měřením.

Velké množství přesnějších hodnot sinu α lze získat pomocí počítačového programu. Z těchto hodnot byl na počítačové tiskárně pořízen graf, který vidíte na dalším obrázku:



Je na něm „plynulá hladká“ křivka, kterou nelze sestrojit pravítkem a kružítkem. Je to část „nekonečné“ křivky, která se nazývá *sinusoida*. Její „větší“ část (pořízenou v menších jednotkách na obou souřadnicových osách) si prohlédněte na dalším obrázku:



Z hodin matematiky již víte, že závislost hodnot jedné veličiny na hodnotách veličiny druhé vyjadřujeme pojmem *funkce*. Hodnoty závisle i nezávisle proměnné při tom vyjadřujeme reálnými čísly, tedy bez jednotek, které zkoumané (původně geometrické, fyzikální aj.) veličiny mohly mít. Nyní jsme poznali nový důležitý (geometrický) příklad takové závislosti: každé velikosti ostrého úhlu α je přiřazeno jediné kladné reálné číslo $\sin\alpha$. Budeme proto mluvit o **funkci sinus**, i když hodnotami nezávisle proměnné (tj. velikostmi úhlu α) prozatím nebudou ***čísla***, nýbrž ***počty stupňů***. Ve vyšších ročnících gymnázia se seznámíte s jinou jednotkou velikosti úhlu, 1 *radiánem*, která je z hlediska novodobé matematiky výhodnější než starověká jednotka 1 *stupeň*. Teprve pak se dohodneme, že budeme velikosti úhlů vyjadřovat pouhými čísly (odpovídajícími násobky 1 radiánu). V tuto chvíli bude pro nás definičním oborem funkce sinus uzavřený interval $\langle 0°, 90° \rangle$. Funkce sinus je na tomto intervalu rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Funkce sinus je první z tzv. **goniometrických funkcí**, se kterými se v tomto sešitě seznámíme.

Slovo *goniometrický* je řeckého původu a znamená *úhloměrný* („gonios“ – úhel, „metrein“ – měřit).

5. Z počítačového grafu funkce sinus zjistěte $\sin\alpha$, je-li
a) $\alpha = 15°$, b) $\alpha = 55°$.

6. Z počítačového grafu funkce sinus zjistěte α, je-li
a) $\sin\alpha = 0{,}4$, b) $\sin\alpha = 0{,}6$.

Jak určujeme hodnoty funkce sinus?

?

Určit číslo $\sin\alpha$ (pro daný ostrý úhel α) umíme zatím jen pomocí rýsování a měření, popř. vyčtením z grafu. Obě tyto metody jsou zdlouhavé a málo přesné. K přesnějším výpočtům lidem dlouhá staletí sloužily tabulky, teprve v posledních desetiletích roli tabulek převzaly kalkulačky. I když udávají hodnoty goniometrických funkcí s přesností, která často výrazně převyšuje požadavky praxe, nesmíme zapomenout, že tyto hodnoty jsou zpravidla *iracionální čísla*, tedy čísla, která mají za desetinnou čárkou nekonečně mnoho nenulových číslic, jež se navíc od žádného místa periodicky neopakují.

Určeme nyní například $\sin 34°$ na kalkulačce, která má tlačítko $\boxed{\text{sin}}$. Postup je patrný z obrázků:

Zjistili jsme, že $\sin 34° \doteq 0{,}559\,192\,9$. Zobrazený výsledek obvykle zaokrouhlíme, třeba na desetitisíciny, neboť taková přesnost je pro většinu výpočtů postačující: $\sin 34° \doteq 0{,}559\,2$

Nápis „DEG“ v horní části displeje znamená, že velikost úhlu, jehož sinus hledáme, musíme zadat ve stupních. Máme-li například určit $\sin 10°15'$, zapíšeme minuty jako šedesátiny stupně a zlomek převedeme na desetinné číslo:

$$15' = \left(\tfrac{15}{60}\right)^{\circ} = 0{,}25°, \quad \text{tedy} \quad 10°15' = 10{,}25°$$

Na kalkulačce s osmimístným displejem zjistíme, že $\sin 10{,}25° \doteq 0{,}177\,943\,5$. Po zaokrouhlení na desetitisíciny: $\sin 10°15' \doteq 0{,}177\,9$

Mnohé kalkulačky však tlačítko $\boxed{\text{sin}}$ ani tlačítka pro další goniometrické funkce nemají. Seznámíme se proto starším způsobem určování přibližných hodnot těchto funkcí pomocí tabulek. I když tyto tištěné pomůcky v posledních letech svůj praktický význam rychle ztrácejí, dovednost *práce s tabulkami* (řádky a sloupci údajů jakéhokoliv druhu) ve svém životě i povolání určitě dobře uplatníte.

V *Tabulkách pro ZŠ* (Prometheus 2000) vypadá část strany 42 takto:

′ / °	0′	10′	20′	30′	40′	50′
30	0,500 0	502 5	505 0	507 5	510 0	512 5
31	515 0	517 5	520 0	522 5	525 0	527 5
32	529 9	532 4	534 8	537 3	539 8	542 2
33	544 6	547 1	549 5	551 9	554 4	556 8
34	559 2	561 6	564 0	566 4	568 8	571 2

M 6A

Vidíme, že v tabulce M 6 A jsou uvedeny hodnoty funkce sinus s přesností na desetitisíciny pro úhly, jejichž velikosti rostou po 10 minutách. Z řádku, který jsme zvýraznili modře, například vyčteme:

$$\sin 34° \doteq 0{,}559\,2, \qquad \sin 34°10' \doteq 0{,}561\,6, \qquad \sin 34°20' \doteq 0{,}564\,0$$

Všimněte si, že v této tabulce jsou u hledaných čísel vytištěny pouze číslice „za desetinnou čárkou“ (výjimkami jsou pouze čísla v levém horním rohu každého „bloku“). Nulu a desetinnou čárku musíme do výsledku před nalezená čísla „předepsat“.

7. Najděte v tabulkách a výsledek zkontrolujte na kalkulačce:

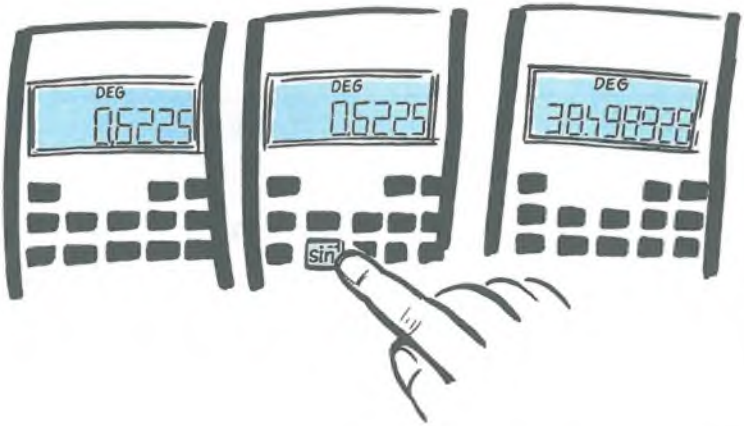
a) $\sin 30°20'$ b) $\sin 22°30'$ c) $\sin 81°50'$ d) $\sin 60°$

8. Úhel α nejprve zaokrouhlete na celé desítky minut a pak určete $\sin\alpha$ z tabulek, je-li

a) $\alpha = 12°12'$, b) $\alpha = 27°27'$, c) $\alpha = 57°57'$, d) $\alpha = 80°8'$.

Jak určit úhel z hodnoty jeho sinu?

Vysvětlíme nyní, jak pomocí kalkulačky nebo tabulek nalézt velikost úhlu, známe-li hodnotu jeho sinu. Určíme například velikost úhlu α z rovnosti $\sin\alpha = 0{,}622\,5$. Pokud má kalkulačka tlačítko $\boxed{\sin^{-1}}$, postupujeme podle obrázků:



U některých kalkulaček má stejnou funkci jako tlačítko $\boxed{\sin^{-1}}$ tlačítko $\boxed{\text{arcsin}}$.

Nalezený přibližný výsledek $\alpha \doteq 38{,}498\,928°$ zaokrouhlíme a vyjádříme ve stupních a minutách:

$$38{,}498\,928° \doteq 38{,}5° = 38°30'$$

Hodnotu 38,498 928° lze pomocí kalkulačky snadno převést na celé počty stupňů, minut a vteřin:

$$38{,}498\,928° \doteq 38°29'56''$$

Chyba, které jsme se dopustili při zaokrouhlení $38{,}498\,928° \doteq 38°30'$, je tedy velmi malá.

Nemáme-li k dispozici kalkulačku, pomohou nám tabulky. Hodnotu 0,622 5 v nich přímo nalezneme, podle záhlaví odpovídajícího řádku a odpovídajícího sloupce zjistíme, že $\alpha \doteq 38°30'$.

M
6A

′ / °	0′	10′	20′	30′	40′	50′
30	0,500 0	502 5	505 0	507 5	510 0	512 5
31	515 0	517 5	520 0	522 5	525 0	527 5
32	529 9	532 4	534 8	537 3	539 8	542 2
33	544 6	547 1	549 5	551 9	554 4	556 8
34	559 2	561 6	564 0	566 4	568 8	571 2
35	0,573 6	576 0	578 3	580 7	583 1	585 4
36	587 8	590 1	592 5	594 8	597 2	599 5
37	601 8	604 1	606 5	608 8	611 1	613 4
38	615 7	618 0	620 2	622 5	624 8	627 1
39	629 3	631 6	633 8	636 1	638 3	640 6

Tečka nad rovnítkem v rovnosti $\alpha \doteq 38°30'$ je nutná, i když je hodnota 0,622 5 v tabulkách přímo uvedena. Nezapomeňte, že hodnoty v tabulkách jsou (až na několik výjimek) *zaokrouhlená iracionální čísla.*

Nyní budeme hledat pomocí tabulek úhel α z rovnosti $\sin\alpha = 0{,}54$. Na rozdíl od předchozího příkladu není hodnota 0,54 v tabulce hodnot sinu přímo uvedena. V tomto případě najdeme v tabulkách dvě nejbližší hodnoty, mezi kterými zadaná hodnota leží:

$$0{,}539\,8 < 0{,}54 < 0{,}542\,2$$

Z tabulek vyčteme, že číslo nalevo je přibližná hodnota $\sin 32°40'$, číslo napravo přibližná hodnota $\sin 32°50'$. Protože funkce sinus je rostoucí, pro hledaný úhel α platí:

$$32°40' < \alpha < 32°50'$$

Více informací o hledaném úhlu α v našich tabulkách nenajdeme. Pro praktické výpočty můžeme použít kteroukoli z přibližných rovností:

$$\alpha \doteq 32°40', \qquad \alpha \doteq 32°50'$$

9. Najděte v tabulkách velikost úhlu α z rovnosti

a) $\sin\alpha = 0{,}202\,2$, b) $\sin\alpha = 0{,}388\,1$,

c) $\sin\alpha = 0{,}613\,4$, d) $\sin\alpha = 0{,}942\,6$.

Výsledek zkontrolujte na kalkulačce.

10. Určete velikost neznámého úhlu z rovnosti

a) $\sin\beta = 0{,}1$, b) $\sin\gamma = \frac{1}{3}$,

c) $4 \cdot \sin\delta = 3$, d) $7 \cdot \sin\varepsilon = 6$.

5 KOSINUS OSTRÉHO ÚHLU

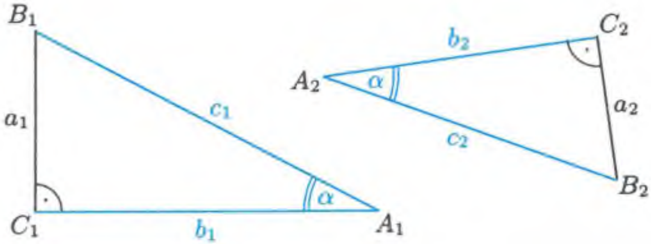
V minulé kapitole jsme se seznámili se sinem ostrého úhlu jako s poměrem odvěsny protilehlé tomuto úhlu a přepony pravoúhlého trojúhelníku.

Takovou funkci ostrého úhlu jsme mohli definovat díky tomu, že každé dva pravoúhlé trojúhelníky se stejným ostrým vnitřním úhlem jsou podobné.

Významnou úlohu v matematice hrají i funkce úhlu určené jinými poměry stran pravoúhlého trojúhelníku. V této kapitole se budeme zabývat poměrem přilehlé odvěsny a přepony, v následující kapitole pak poměrem odvěsen. Výklad v obou kapitolách povedeme obdobně jako v kapitole předchozí, proto budeme místy stručnější.

? Co je *kosinus* ostrého úhlu?

Na obrázku jsou pravoúhlé trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ se stejným vnitřním úhlem α. Kromě úhlu α jsou v obou trojúhelnících modře vyznačeny přilehlé odvěsny a přepony.



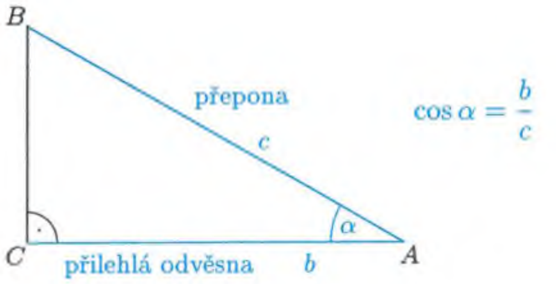
Z podobnosti obou trojúhelníků plyne rovnost

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

kterou přepíšeme do tvaru

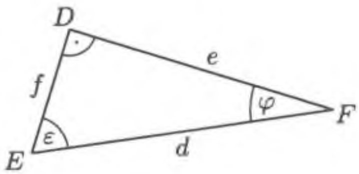
$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}.$$

Znamená to, že v obou trojúhelnících má *poměr odvěsny přilehlé úhlu α a přepony* stejnou hodnotu, která závisí pouze na velikosti úhlu α. Říkáme jí **kosinus úhlu α** a značíme $\cos\alpha$ (čti „kosinus alfa").

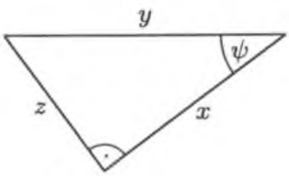


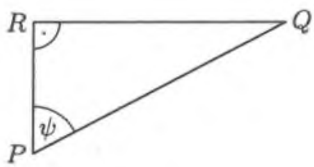
Staří Indové nazývali kosinus slovem *kótidživa* (předpona *kóti* znamená *zbytek*, v tomto případě doplněk do 90°). Podle toho se v Evropě v 15. století ujal pro kosinus latinský název *sinus complementi*, tj. sinus doplňku. Změnou pořadí obou slov a zkrácením vznikl termín *cosinus*. Setkáváme se s ním poprvé v roce v r. 1620 u anglického astronoma *E. Guntera*.

1. Zapište kosinus úhlů ε a φ pomocí délek stran trojúhelníku DEF:



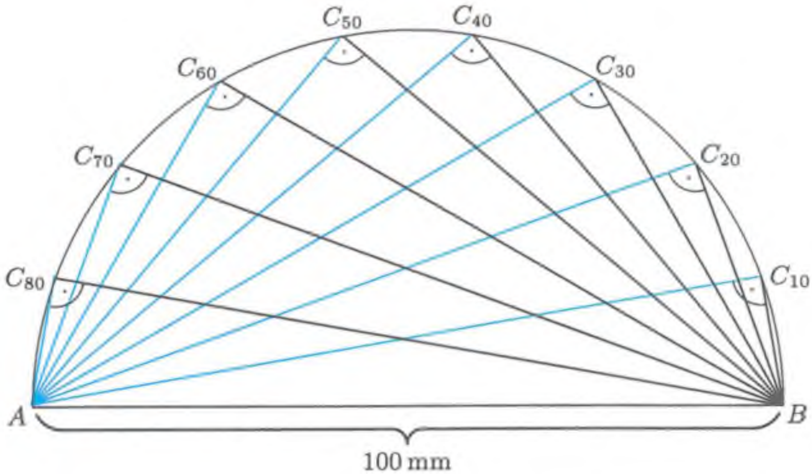
2. Zapište kosinus úhlu ψ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a) 

b) 

? Co lze říci o hodnotách kosinu?

Podobně jako u sinu zjistíme přibližné hodnoty kosinů několika ostrých úhlů rýsováním a měřením:



Například z trojúhelníku ABC_{40} určíme, že

$$\cos 40° = \frac{|AC_{40}|}{|AB|} \doteq \frac{77\,\text{mm}}{100\,\text{mm}} = 0{,}77.$$

Tuto i další hodnoty, které získáme na základě měření „modrých odvěsen“ v trojúhelnících ABC_{10}, ABC_{20}, ..., ABC_{80}, zapíšeme do tabulky:

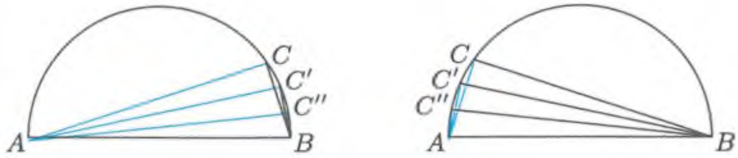
α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

Sami vysvětlete, proč platí:

$$0 < \cos\alpha < 1 \quad \text{pro každé } \alpha, \quad 0° < \alpha < 90°.$$

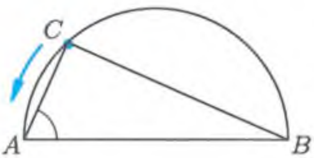
Následující obrázky vám napoví, proč je užitečné učinit úmluvu:

$$\boxed{\cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0}$$



Závislost hodnoty $\cos\alpha$ na velikosti úhlu α je funkcí, jejímž definičním oborem je uzavřený interval $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$. (Stejně jako u funkce sinus nejsou hodnotami nezávisle proměnné *čísla*, ale *počty stupňů*.)

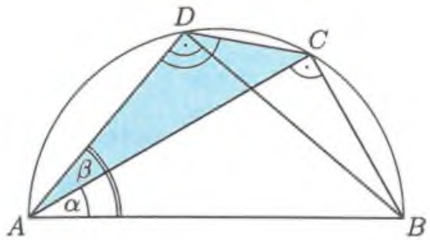
Obrázek vrcholu C pohybujícího se po půlkružnici AB názorně vysvětluje, proč funkce kosinus nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.



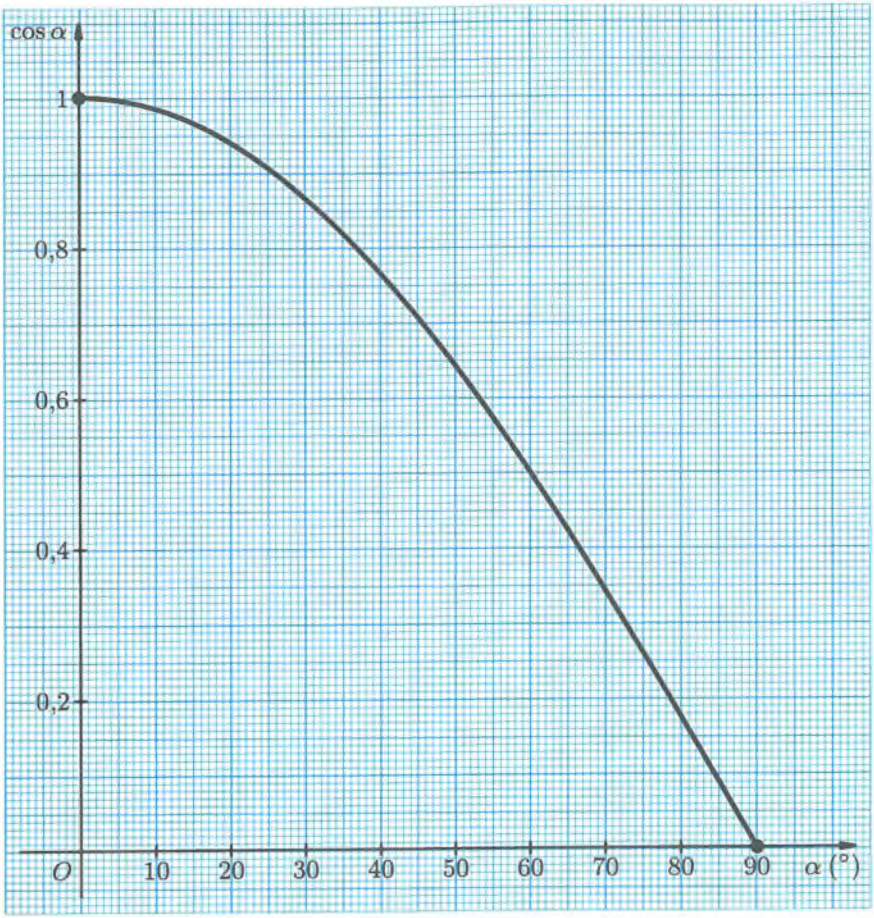
Uvedeme nyní vlastnost, kterou se funkce kosinus výrazně liší od funkce sinus. Zatímco funkce sinus je v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ **rostoucí**, je funkce kosinus v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ **klesající**:

$$\boxed{\text{Je-li} \quad 0^\circ \leqq \alpha < \beta \leqq 90^\circ, \quad \text{pak} \quad \cos\alpha > \cos\beta.}$$

Nerovnost $|AC| > |AD|$ plyne z tupoúhlého trojúhelníku ADC.



Prohlédněte si, jak vypadá graf funkce kosinus pořízený počítačovým programem:



Ve vyšších ročnících gymnázia se dozvíte, že graf funkce kosinus je (stejně jako graf funkce sinus) část sinusoidy, nekonečné křivky, kterou jsme znázornili na str. 75. Někdy se této křivce také říká *kosinusoida*.

3. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné strany a určete přibližnou hodnotu $\cos\alpha$ pro úhel

a) $\alpha = 45°$, b) $\alpha = 27°$.

4. Z počítačového grafu funkce kosinus zjistěte $\cos\alpha$, je-li

a) $\alpha = 25°$, b) $\alpha = 65°$.

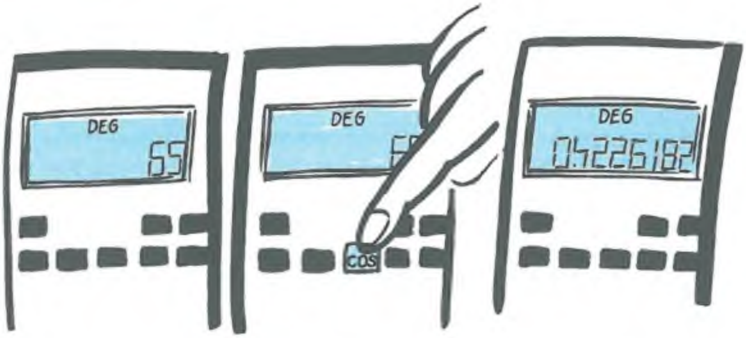
5. Z počítačového grafu funkce kosinus zjistěte α, je-li

a) $\cos\alpha = 0{,}4$, b) $\cos\alpha = 0{,}6$.

Jak určujeme hodnoty funkce kosinus?

Vysvětlili jsme, jak přibližně určit číslo $\cos\alpha$ pro daný ostrý úhel α pomocí rýsování a měření a také vyčtením z počítačového grafu. Přesnější hodnoty získáme pomocí kalkulačky nebo tabulek. Vysvětlíme stručně, jak se obě pomůcky používají.

Určeme nejprve například $\cos 65°$ na kalkulačce, která má tlačítko $\boxed{\cos}$. Postup je patrný z obrázků:



Po zaokrouhlení na desetitisíciny vychází $\cos 65° \doteq 0{,}4226$.

Stejnou hodnotu najdeme i v tabulce M 6B na str. 46 *Tabulek pro ZŠ*:

° \ ′	0′	10′	20′	30′	40′	50′
60	0,500 0	497 5	495 0	492 4	489 9	487 4
61	484 8	482 3	479 7	477 2	474 6	472 0
62	469 5	466 9	464 3	461 7	459 2	456 6
63	454 0	451 4	448 8	446 2	443 6	441 0
64	438 4	435 8	433 1	430 5	427 9	425 3
65	0,422 6	420 0	417 3	414 7	412 0	409 4
66	406 7	404 1	401 4	398 7	396 1	393 4
67	390 7	388 1	385 4	382 7	380 0	377 3
68	374 6	371 9	369 2	366 5	363 8	361 1
69	358 4	355 7	352 9	350 2	347 5	344 8

M 6B

Podívejte se, jak tuto tabulku využila Lucie při určování $\cos 38°42'$:

$\cos 38°42' = ?$

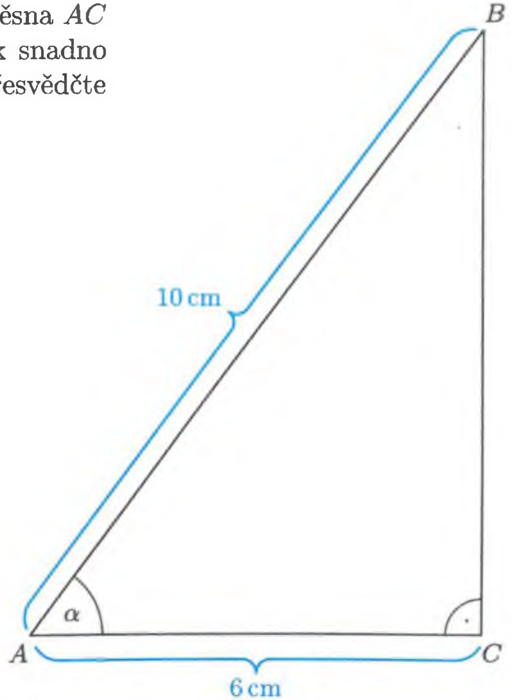
$\cos 38°42' \doteq \cos 38°40' \doteq \underline{\underline{0{,}7808}}$

6. Najděte v tabulkách a výsledek zkontrolujte na kalkulačce:
a) $\cos 30°20'$ b) $\cos 22°30'$ c) $\cos 81°50'$ d) $\cos 60°10'$

7. Úhel α nejprve zaokrouhlete na celé desítky minut a pak určete $\cos\alpha$ z tabulek, je-li
a) $\alpha = 12°12'$, b) $\alpha = 27°27'$, c) $\alpha = 57°57'$, d) $\alpha = 80°8'$.

? Jak určit úhel z hodnoty jeho kosinu?

Známe-li hodnotu $\cos\alpha$, můžeme přibližnou velikost úhlu α určit rýsováním a měřením. Tak například, je-li $\cos\alpha = 0{,}6$, je α ostrý vnitřní úhel BAC pravoúhlého trojúhelníku ABC, jehož přepona AB měří 10 cm a odvěsna AC měří 6 cm. Takový trojúhelník snadno sestrojíme podle věty *Ssu*. Přesvědčte se, že $\alpha \doteq 53°$.



Přesnější velikost úhlu α získáme pomocí kalkulačky nebo tabulek.

Na kalkulačce s tlačítkem $\boxed{\cos^{-1}}$ zjistíme, že pokud $\cos\alpha = 0{,}6$, pak $\alpha \doteq 53{,}130102° \doteq 53°8'$.

U některých kalkulaček používáme ke stejnému účelu tlačítko $\boxed{\text{arcsin}}$.

V tabulce M 6 B hodnotu 0,6 nenajdeme. Proto nalezneme dvě nejbližší tabulkové hodnoty, mezi kterými číslo 0,6 leží:

$$0{,}601\,8 > 0{,}6 > 0{,}599\,5$$

Protože $0{,}601\,8 \doteq \cos 53°$, $0{,}599\,5 \doteq \cos 53°10'$ a funkce kosinus je klesající, platí pro úhel α z rovnosti $\cos\alpha = 0{,}6$ odhad

$$53° < \alpha < 53°10'.$$

8. Rýsováním a měřením určete přibližnou velikost úhlu α z rovnosti

a) $\cos\alpha = 0{,}8$, b) $\cos\alpha = 0{,}5$.

9. Najděte v tabulkách velikost úhlu α z rovnosti

a) $\cos\alpha = 0{,}355\,7$, b) $\cos\alpha = 0{,}784\,4$,
c) $\cos\alpha = 0{,}898\,8$, d) $\cos\alpha = 0{,}409\,4$.

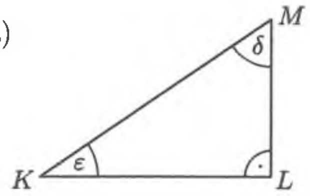
Výsledek zkontrolujte na kalkulačce.

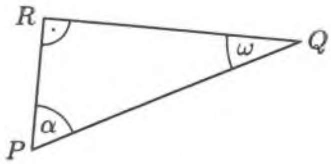
10. Určete velikost úhlu α z rovnosti

a) $\cos\alpha = 0{,}2$, b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$,
c) $4 \cdot \cos\alpha = 1$, d) $8 \cdot \cos\alpha = 5$.

CVIČENÍ 4

1. Zapište siny obou ostrých úhlů pomocí délek úseček z obrázku:

a) 

b) 

2. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné strany a určete s přesností na dvě desetinná místa:

a) $\sin\alpha$, je-li $\alpha = 21°$ b) $\sin\beta$, je-li $\beta = 42°$

c) $\sin\gamma$, je-li $\gamma = 63°$ d) $\sin\delta$, je-li $\delta = 84°$

Velikosti úhlů β, γ a δ jsou celými násobky velikosti úhlu α. Jsou také hodnoty $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin\delta$ celými násobky hodnoty $\sin\alpha$?

3. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete velikost úhlu ε, je-li

a) $\sin\varepsilon = 0{,}8$, b) $\sin\varepsilon = \frac{1}{2}$, c) $\sin\varepsilon = \frac{3}{5}$.

4. Určete pomocí tabulek nebo kalkulačky a výsledek zaokrouhlete na setiny:

a) $\sin 14°20'$ b) $\sin 28°40'$ c) $\sin 33°10'$ d) $\sin 66°20'$

e) $\sin 0°10'$ f) $\sin 0°20'$ g) $\sin 84°10'$ h) $\sin 84°20'$

5. Najděte v tabulkách velikost úhlu ω z rovnosti:

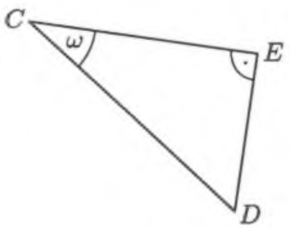
a) $\sin\omega = 0{,}6494$ b) $\sin\omega = 0{,}7490$

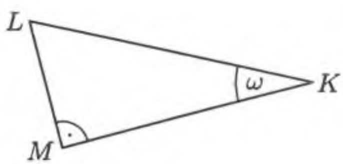
c) $\sin\omega = 0{,}8496$ d) $\sin\omega = 0{,}9492$

6. Sestrojte (bez úhloměru, pomocí tabulkové hodnoty sinu zaokrouhlené na setiny) úhel δ o velikosti co nejbližší

a) $72°$, b) $55°$, c) $18°$.

7. Zapište sinus a kosinus úhlu ω pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a) 

b) 

8. Narýsujte tři podobné (ne však shodné) pravoúhlé trojúhelníky s ostrým vnitřním úhlem 34°. V každém z těchto trojúhelníků změřte potřebné údaje a vypočtěte z nich hodnotu $\cos 34°$ s přesností na dvě desetinná místa. (Výsledky porovnejte s hodnotou $\cos 34°$ uvedenou v tabulkách.)

9. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete velikost úhlu β, je-li

a) $\cos\beta = 0{,}6$, b) $\cos\beta = 0{,}9$, b) $\sin\beta = 0{,}9$.

10. Určete pomocí tabulek nebo kalkulačky a výsledek zaokrouhlete na setiny:

a) $\cos 5°40'$ b) $\cos 23°40'$ c) $\cos 51°40'$ d) $\cos 89°30'$
e) $\sin 30°$ f) $\cos 60°$ g) $\cos 74°20'$ h) $\sin 15°40'$

11. Najděte v tabulkách nebo na kalkulačce velikost úhlu δ z rovnosti:

a) $\cos\delta = 0{,}991\,1$ b) $\cos\delta = 0{,}014\,5$
c) $\cos\delta = 0{,}139\,2$ d) $\sin\delta = 0{,}139\,2$
e) $\sin\delta = 0{,}910\,0$ f) $\cos\delta = 0{,}414\,7$

12. Sestrojte (bez úhloměru, pomocí tabulkové hodnoty kosinu zaokrouhlené na setiny) úhel φ o velikosti co nejbližší

a) 72°, b) 55°, c) 18°.

13. Doplňte tabulku:

α	31°20′		
$\sin\alpha$		0,835 5	
$\cos\alpha$			0,955 5

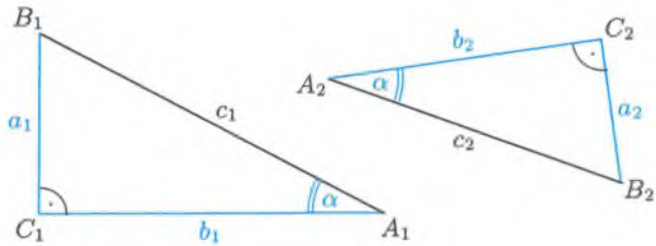
6 TANGENS A KOTANGENS OSTRÉHO ÚHLU

Jak jsme slíbili v úvodu předchozí kapitoly, budeme se nyní věnovat poměrům odvěsen pravoúhlého trojúhelníku. Pomocí těchto poměrů definujeme další dvě goniometrické funkce – *tangens* a *kotangens*.

?

Co je *tangens* ostrého úhlu?

Ještě jednou se vrátíme k obrázku dvou pravoúhlých trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ se stejným vnitřním úhlem α:



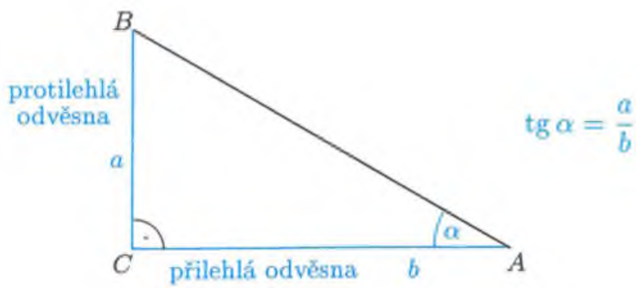
Pro tyto podobné trojúhelníky tentokrát zapíšeme rovnost poměrů odpovídajících si odvěsen

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

a přepíšeme ji do tvaru

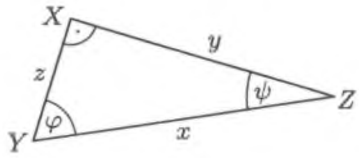
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Na obou stranách této rovnosti stojí *poměr odvěsny protilehlé úhlu α a odvěsny přilehlé úhlu α*. Tento poměr je v obou trojúhelnících stejný; závisí tedy jen na velikosti úhlu α. Nazývá se **tangens úhlu α** a značí se $\operatorname{tg}\alpha$ (čti „tangens alfa").



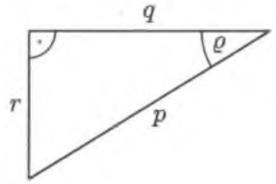
Slovo *tangens* je nesklonné, je odvozeno z latinského slovesa *tangere*, které znamená *dotýkat se*.

1. Zapište tangens úhlů φ a ψ pomocí délek stran trojúhelníku XYZ:

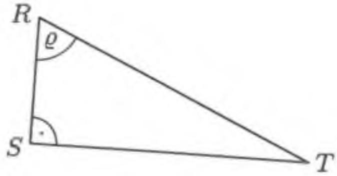


2. Zapište tangens úhlu ϱ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a)

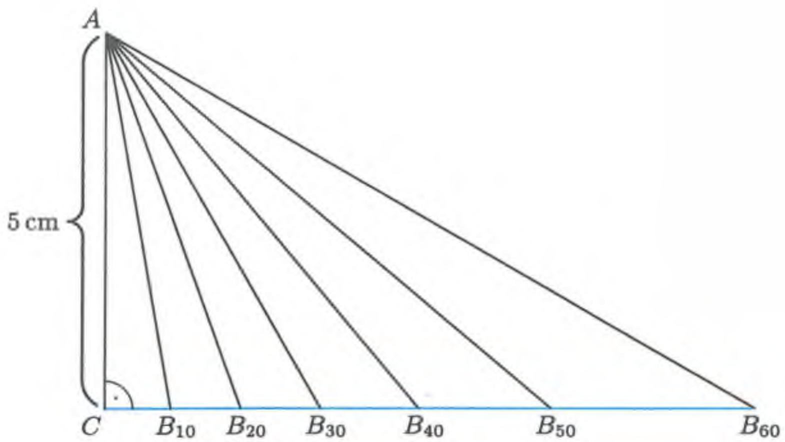


b)



Co lze říci o hodnotách tangens?

Hodnoty $\operatorname{tg} \alpha$ pro $\alpha = 10°, 20°, \dots, 60°$ určíme přibližně rýsováním a měřením. Na obrázku jsou narýsovány pravoúhlé trojúhelníky $AB_{10}C$, $AB_{20}C, \dots, AB_{60}C$ se společnou odvěsnou AC délky 50 mm a vnitřními úhly $10°, 20°, \dots, 60°$ při vrcholu A.



Měřením například zjistíme, že

$$\operatorname{tg} 50° = \frac{|B_{50}C|}{|AC|} \doteq \frac{60\,\text{mm}}{50\,\text{mm}} = 1{,}2.$$

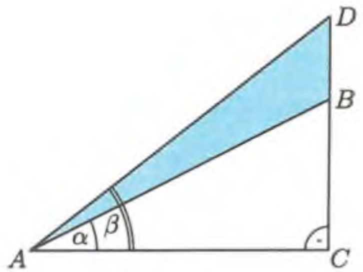
Pro výpočet zmíněných hodnot tangens by bylo výhodnější, kdyby přilehlá odvěsna AC měřila např. 100 mm. Takový obrázek by však byl pro naši učebnici příliš „velký". Ze stejného důvodu jsme nekreslili ani trojúhelníky pro výpočet $\operatorname{tg} 70°$ a $\operatorname{tg} 80°$. Kdybychom to udělali, měřením a výpočtem bychom dospěli k následující tabulce:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\operatorname{tg}\alpha$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,2	1,7	2,7	5,7

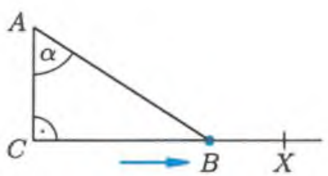
Tabulka naznačuje, že s rostoucím úhlem α roste i hodnota $\operatorname{tg}\alpha$:

Je-li $0° < \alpha < \beta < 90°$, pak $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

Vysvětlení je zřejmé z obrázku. Protože bod B je vnitřním bodem úsečky CD, platí $|CB| < |CD|$, a tak $\dfrac{|CB|}{|AC|} < \dfrac{|CD|}{|AC|}$, neboli $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.



Všimněme si nyní, co se děje s poměrem $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|}$ v případě, kdy bod B probíhá polopřímku CX kolmou k dané pevné úsečce AC. Ve zkoumaném zlomku se mění pouze čitatel, který nabývá (ve zvolených jednotkách délky) všech hodnot z intervalu $(0, \infty)$.



Čím „blíže“ je bod B bodu C, tím je velikost úhlu α „blíže“ k $0°$ a hodnota $\operatorname{tg}\alpha$ „blíže“ k číslu 0. Proto učiníme úmluvu:

$$\boxed{\operatorname{tg} 0° = 0}$$

Čím je bod B od bodu C „dále“, tím „blíže“ je velikost úhlu α k $90°$. Tehdy číslo $\operatorname{tg}\alpha$ nabývá stále větších hodnot a převýší jakékoliv zvolené číslo (říkáme, že se blíží k nekonečnu). Protože ∞ není žádné číslo, $\operatorname{tg}\alpha$ pro $\alpha = 90°$ nedefinujeme.

Shrňme zjištěné poznatky: Závislost hodnoty $\operatorname{tg}\alpha$ na velikosti úhlu α je funkcí, jejímž definičním oborem je (zleva uzavřený, zprava otevřený) interval $\langle 0°, 90°)$. Tato funkce je rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, \infty)$.

Počítačem pořízený graf funkce tangens si prohlédněte na str. 144. Tvoří ho část křivky zvané *tangentoida*.

3. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné strany a určete přibližnou hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ pro úhel

a) $\alpha = 35°$, b) $\alpha = 15°$.

4. Z počítačového grafu funkce tangens zjistěte $\operatorname{tg}\alpha$ pro úhel

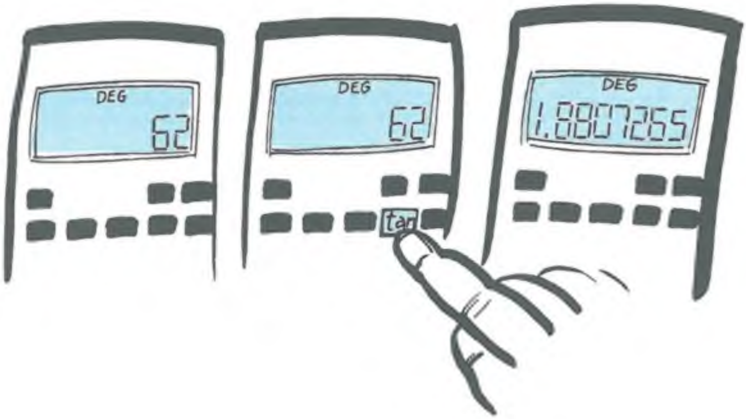
a) $\alpha = 25°$, b) $\alpha = 55°$.

5. Z počítačového grafu funkce tangens zjistěte úhel α, je-li

a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7$, b) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$.

? Jak určujeme hodnoty funkce tangens?

K určení čísla $\mathrm{tg}\,\alpha$ pro daný ostrý úhel α používáme nejčastěji kalkulačku nebo tabulky. Na kalkulačce s tlačítkem $\boxed{\text{tan}}$ (v mnoha zemích se totiž místo $\mathrm{tg}\,\alpha$ píše $\tan\alpha$) zjistíme například hodnotu $\mathrm{tg}\,62°$:



Po zaokrouhlení na desetitisíciny vychází $\mathrm{tg}\,62° \doteq 1{,}8807$. V tabulce M 6 C na str. 49 *Tabulek pro ZŠ* tak přesný výsledek nenajdeme. Hodnota $\mathrm{tg}\,62°$ je tam zaokrouhlena na 3 desetinná místa: $\mathrm{tg}\,62° \doteq 1{,}881$

M 6C

′ / °	0′	10′	20′	30′	40′	50′
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128

6. Najděte v tabulkách a výsledek zkontrolujte na kalkulačce:

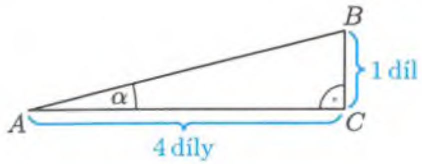
a) $\mathrm{tg}\,35°$ b) $\mathrm{tg}\,12°30'$ c) $\mathrm{tg}\,71°50'$ d) $\mathrm{tg}\,80°20'$

7. Úhel α nejprve zaokrouhlete na celé desítky minut a pak určete $\mathrm{tg}\,\alpha$ z tabulek, je-li

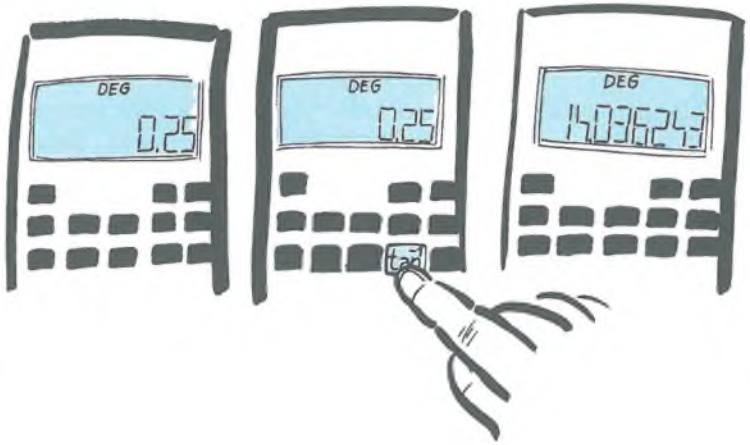
a) $\alpha = 22°14'$, b) $\alpha = 37°17'$, c) $\alpha = 45°52'$, d) $\alpha = 62°14'$.

Jak určit úhel z hodnoty jeho tangens?

Rýsováním vhodného pravoúhlého trojúhelníku můžeme z dané hodnoty $\mathrm{tg}\,\alpha$ určit neznámý úhel α. Pro $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}25$ vidíte vhodný trojúhelník na obrázku vpravo. Sestrojíme ho podle věty *sus*.



Výpočet na kalkulačce s tlačítkem $\boxed{\tan^{-1}}$ (popř. $\boxed{\text{arctan}}$) ukazuje, že hodnotě tangens 0,25 odpovídá přibližně úhel $14{,}036\,243° \doteq 14°2'$.



Kdybychom stejný úhel hledali v našich tabulkách, našli bychom v nich dvě nejbližší hodnoty tangens 0,249 3 a 0,252 4. Jsou to hodnoty $\mathrm{tg}\,14°0'$ a $\mathrm{tg}\,14°10'$. Odtud plyne, že pro úhel α z rovnosti $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}25$ platí odhad

$$14°0' < \alpha < 14°10'.$$

8. Rýsováním a měřením určete přibližnou velikost úhlu α z rovnosti

a) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$.

9. Najděte v tabulkách velikost úhlu α z rovnosti

a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}367\,3$, b) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}965\,7$,

c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}767$, d) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3{,}606$.

Výsledek zkontrolujte na kalkulačce.

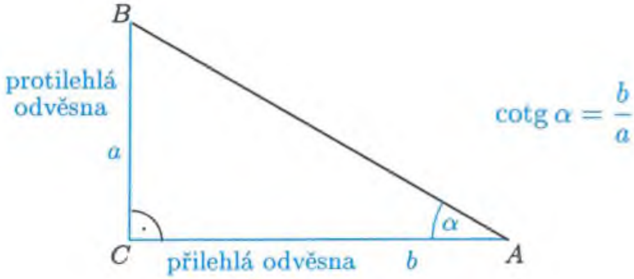
10. Určete velikost úhlu α z rovnosti

a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5$, b) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$,

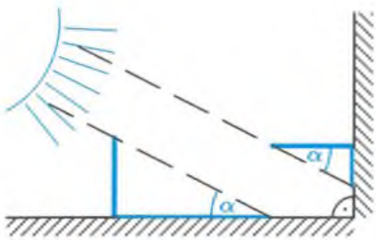
c) $4 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 5$, d) $8 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 6$.

? Co je *kotangens* ostrého úhlu?

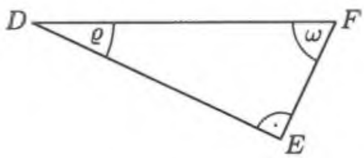
V úvodu této kapitoly jsme vysvětlili, že poměr odvěsny protilehlé úhlu α a odvěsny přilehlé úhlu α nezávisí na tom, jak „velký" pravoúhlý trojúhelník s daným ostrým vnitřním úhlem α vybereme. Je jasné, že stejnou vlastnost má i „převrácený" poměr, tj. *poměr odvěsny přilehlé úhlu α a odvěsny protilehlé úhlu α*. Nazývá se **kotangens úhlu α** a značí se $\operatorname{cotg}\alpha$ (čti „kotangens alfa").



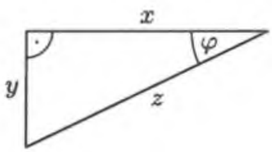
Stejně jako slovo *tangens* je i slovo *kotangens* nesklonné. Název *tangens* vznikl v Evropě na přelomu 16. a 17. století, poměry odvěsen se však již v 9. století zabývali učenci střední Asie, když určovali výšku Slunce na základě délky stínu vrženého svislou nebo vodorovnou tyčí. Příslušné úsečky podle toho nazývali *první stín* (vodorovný stín svislé tyče, odpovídá hodnotě kotangens α) a *druhý stín* (svislý stín vodorovné tyče, odpovídá hodnotě tangens α).

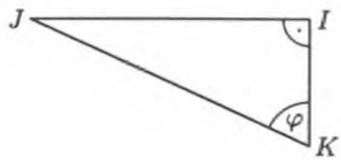


11. Zapište kotangens úhlů ϱ a ω pomocí délek stran trojúhelníku DEF:



12. Zapište kotangens úhlu φ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a) 

b) 

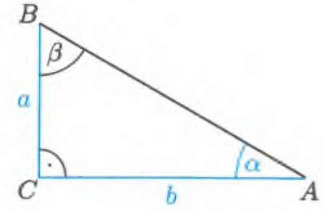
Co lze říci o hodnotách kotangens?

?

I když bychom mohli zkoumat hodnoty $\operatorname{cotg} \alpha$ podobným způsobem, jako jsme zkoumali hodnoty $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$, zvolíme odlišný postup. Uplatníme při něm to, co jsme již zjistili o hodnotách tangens.

Zopakujme, že hodnota $\operatorname{cotg} \alpha$ je rovna poměru odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ABC z obrázku:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

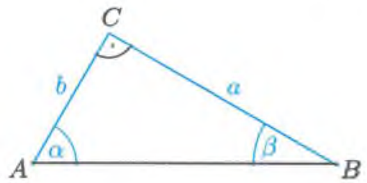


Na obrázku jsme vyznačili i druhý ostrý vnitřní úhel trojúhelníku ABC, úhel β. Říkejme mu „doplňkový" úhel k úhlu α. Vidíme, že poměr $\frac{b}{a}$ je také hodnotou tangens tohoto „doplňkového" úhlu:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Platí tedy

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$



Probíhá-li úhel α všechny hodnoty mezi $0°$ a $90°$, probíhá úhel β všechny hodnoty od $90°$ k $0°$ („v opačném směru"), neboť platí $\alpha + \beta = 90°$. Víme, že číslo $\operatorname{tg} \beta$ při tom nabude všech hodnot z intervalu $(0, \infty)$. Proto všech těchto hodnot nabude také číslo $\operatorname{cotg} \alpha$.

Vysvětlíme nyní, proč s *rostoucí* velikostí úhlu α hodnoty $\operatorname{cotg} \alpha$ *klesají*. Jestliže totiž platí $\alpha_1 < \alpha_2$, potom pro „doplňkové" úhly $\beta_1 = 90° - \alpha_1$ a $\beta_2 = 90° - \alpha_2$ platí $\beta_1 > \beta_2$, takže $\operatorname{tg} \beta_1 > \operatorname{tg} \beta_2$. Poslední nerovnost lze přepsat jako $\operatorname{cotg} \alpha_1 > \operatorname{cotg} \alpha_2$.

Je-li $0° < \alpha_1 < \alpha_2 < 90°$, pak $\operatorname{cotg} \alpha_1 > \operatorname{cotg} \alpha_2$.

Jestliže se úhel α „blíží" k $90°$, „blíží" se „doplňkový" úhel β k $0°$. Víme již, že $\operatorname{tg} 0° = 0$. Proto se domluvíme na rovnosti:

$$\boxed{\operatorname{cotg} 90° = 0}$$

Čím „blíže" je úhel α k $0°$, tím „blíže" je úhel β k $90°$, což znamená, že $\operatorname{tg}\beta$ (a tedy i $\operatorname{cotg}\alpha$) se blíží k nekonečnu. Proto hodnotu $\operatorname{cotg}\alpha$ pro $\alpha = 0°$ nedefinujeme.

Zjistili jsme, že závislost hodnoty $\operatorname{cotg}\alpha$ na velikosti úhlu α je funkce s definičním oborem $(0°, 90°\rangle$. Tato funkce je klesající a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, \infty)$.

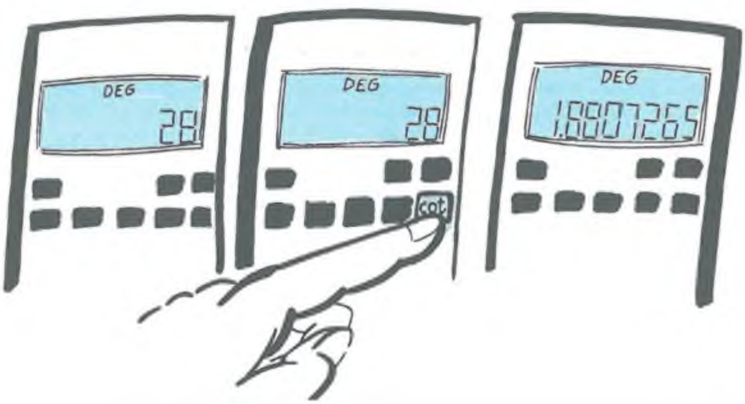
Graf funkce kotangens pořízený počítačem je na str. 144.

13. Z počítačového grafu funkce kotangens zjistěte $\operatorname{cotg}\alpha$, je-li
a) $\alpha = 35°$, b) $\alpha = 65°$.

14. Z počítačového grafu funkce kotangens zjistěte α, je-li
a) $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}6$, b) $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}8$.

? Jak určujeme hodnoty funkce kotangens?

Určeme například hodnotu $\operatorname{cotg} 28°$ na kalkulačce. Jen některé kalkulačky mají tlačítko cot, které slouží k přímému výpočtu hodnot funkce kotangens. Pak je postup výpočtu $\operatorname{cotg} 28°$ patrný z obrázků:



Častěji se stává, že zmíněné tlačítko na kalkulačce chybí. Je-li na ní alespoň tlačítko $\boxed{\text{tan}}$, můžeme ho využít nejen k výpočtu hodnot tangens, ale i hodnot kotangens. Vysvětlili jsme totiž, že platí:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$$

Proto hodnotu cotg 28° můžeme určit takto:

$$\operatorname{cotg} 28° = \operatorname{tg}(90° - 28°) = \operatorname{tg} 62° \doteq 1{,}880\,7$$

(Číslo tg 62° jsme pomocí kalkulačky nalezli na str. 94.)

Hodnoty funkce kotangens můžeme najít i v tabulce M 6 D. Dolní část str. 50 vypadá takto:

25	2,145	2,128	2,112	2,097	2,081	2,066
26	2,050	2,035	2,020	2,006	1,991	1,977
27	1,963	1,949	1,935	1,921	1,907	1,894
28	1,881	1,868	1,855	1,842	1,829	1,816
29	1,804	1,792	1,780	1,767	1,756	1,744
30	1,732	1,720	1,709	1,698	1,686	1,675
	0′	10′	20′	30′	40′	50′

M 6D

Z tabulky zjistíme výsledek zaokrouhlený na tisíciny: $\operatorname{cotg} 28° \doteq 1{,}881$

15. Najděte v tabulkách a výsledek zkontrolujte na kalkulačce:

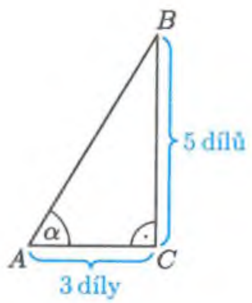
a) cotg 15° b) cotg 22°30′ c) cotg 61°20′ d) cotg 82°40′

16. Úhel α nejprve zaokrouhlete na celé desítky minut a pak určete cotg α z tabulek, je-li

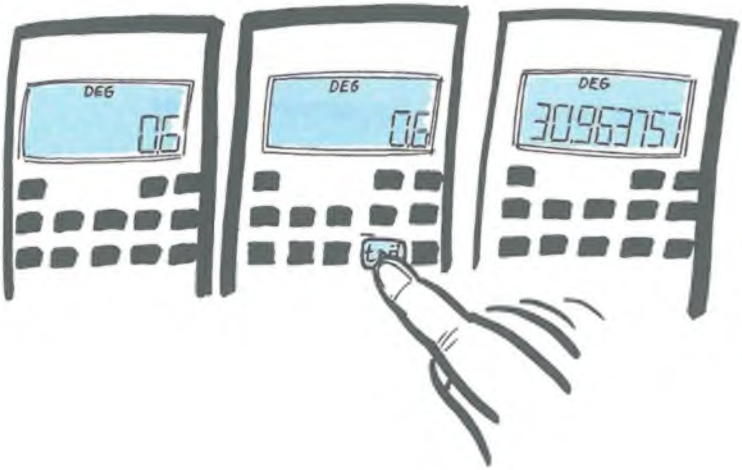
a) $\alpha = 12°43'$, b) $\alpha = 31°27'$, c) $\alpha = 44°42'$, d) $\alpha = 82°12'$.

Jak určit úhel z hodnoty jeho kotangens?

Z dané hodnoty cotg α můžeme určit neznámý úhel α narýsováním vhodného pravoúhlého trojúhelníku. Pro $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{5}$ vidíte náčrtek takového trojúhelníku na obrázku vpravo. Sestrojte ho sami (podle věty *sus*) a měřením se přesvědčte, že $\alpha \doteq 60°$.



Přesnější výsledky získáme na kalkulačce. U většiny kalkulaček však musíme postupovat „nepřímo“ a k výpočtu využít tlačítko $\boxed{\tan^{-1}}$, (někdy značené $\boxed{\text{arctan}}$). Ukážeme to při hledání úhlu α z rovnosti $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$:



Vyobrazeným postupem jsme zjistili, že $0{,}6 \doteq \operatorname{tg} 30{,}963\,757° \doteq \operatorname{tg} 30°58'$. Hledaný úhel α je „doplněním“ nalezeného úhlu do 90°:

$$\alpha \doteq 90° - 30°58' = 59°2'$$

Při hledání stejného úhlu v našich tabulkách můžeme přímo využít tabulku M 6D s hodnotami funkce kotangens. Najdeme v nich hodnoty 0,596 9 a 0,600 9, které jsou „nejblíže“ zadané hodnotě 0,6. Protože $0{,}596\,9 \doteq \operatorname{cotg} 59°10'$, $0{,}600\,9 \doteq \operatorname{cotg} 59°$ a funkce kotangens je klesající, platí pro hledaný úhel α odhad

$$59° < \alpha < 59°10'.$$

17. Rýsováním a měřením určete velikost ostrého úhlu α z rovnosti

a) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{2}$

18. Najděte v tabulkách velikost ostrého úhlu α z rovnosti

a) $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}367\,3$, b) $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}965\,7$,
c) $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}767$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = 3{,}606$.

Výsledek zkontrolujte na kalkulačce.

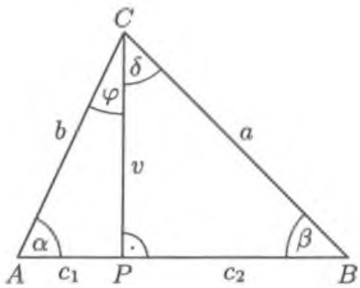
19. Určete velikost ostrého úhlu α z rovnosti

a) $\operatorname{cotg} \alpha = 1{,}7$, b) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{5}$,

c) $2 \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 5$, d) $3 \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 7$.

CVIČENÍ 5

1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je sestrojena výška CP ke straně AB. Pomocí stran trojúhelníků APC a BPC zapište hodnoty tangens úhlů α, β, φ a δ.



2. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné strany a určete s přesností na dvě desetinná místa $\operatorname{tg} \alpha$, je-li:

a) $\alpha = 54°$ b) $\alpha = 58°$ c) $\alpha = 64°$

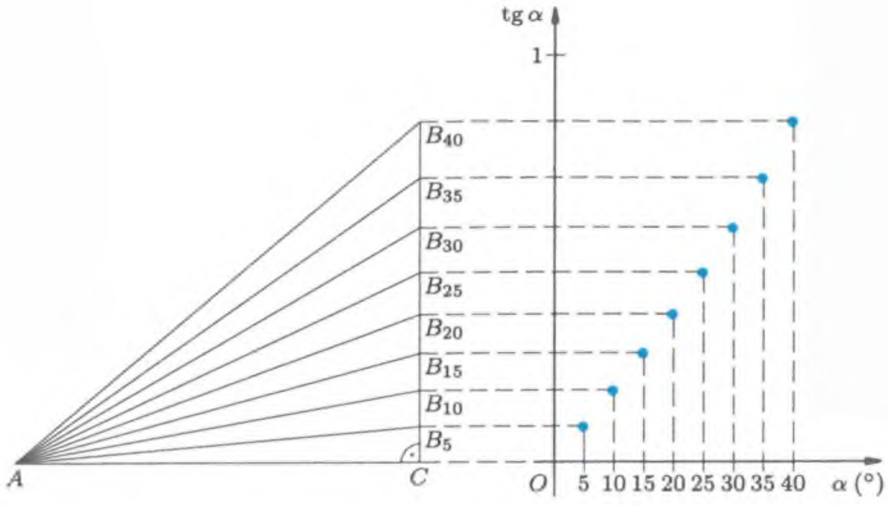
3. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné strany a určete přibližné hodnoty $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ a $\operatorname{tg} \alpha$ pro $\alpha = 35°$.

4. Na obrázku, který najdete nahoře na str. 102, jsou narýsovány pravoúhlé trojúhelníky AB_5C, $AB_{10}C$, ..., $AB_{40}C$ se společnou odvěsnou AC, jejichž vnitřní úhly při vrcholu A mají po řadě velikosti $5°, 10°, \dots, 40°$. Hodnoty funkce tangens lze pro $\alpha \in \{5°, 10°, \dots, 40°\}$ určit graficky jako délky odpovídajících protilehlých odvěsen CB_5, CB_{10}, ..., CB_{40}, když za jednotku zvolíme $|AC|$. Proveďte to ve svých sešitech pro $|AC| = 10\,\text{cm}$, abyste tak určili $\operatorname{tg} \alpha$ pro $\alpha \in \{5°, 10°, \dots, 40°\}$ s přesností na dvě desetinná místa.

5. Najděte v tabulkách a výsledek zkontrolujte na kalkulačce:

a) $\operatorname{tg} 50°20'$ b) $\operatorname{tg} 50°30'$ c) $\operatorname{tg} 50°40'$

d) $\operatorname{tg} 88°20'$ e) $\operatorname{tg} 88°30'$ f) $\operatorname{tg} 88°40'$



6. Úhel α nejprve zaokrouhlete na celé desítky minut a pak určete z tabulek $\sin\alpha$ a $\operatorname{tg}\alpha$, je-li:

a) $\alpha = 13°23'$ b) $\alpha = 45°48'$ c) $\alpha = 85°17'$

7. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete přibližnou velikost toho ostrého úhlu ω, pro který

a) $\operatorname{tg}\omega = 0{,}75$, b) $\sin\omega = 0{,}75$, c) $\cos\omega = 0{,}75$.

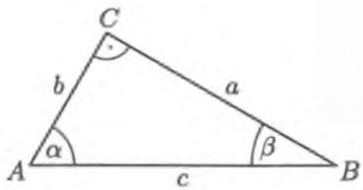
8. Najděte v tabulkách nebo pomocí kalkulačky velikost úhlu β z rovnosti:

a) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}058\,2$ b) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}585\,1$ c) $\operatorname{tg}\beta = 0{,}988\,4$
d) $\operatorname{tg}\beta = 1{,}006$ e) $\operatorname{tg}\beta = 28{,}636$ f) $\operatorname{tg}\beta = 343{,}77$

9. Do rámečku vepište správné označení funkcí úhlů z obrázku:

a) $\boxed{}\,\alpha = \frac{a}{b}$ b) $\boxed{}\,\alpha = \frac{a}{c}$

c) $\boxed{}\,\beta = \frac{a}{b}$ d) $\boxed{}\,\beta = \frac{a}{c}$



10. Najděte v tabulkách a výsledek zkontrolujte na kalkulačce:

a) $\operatorname{cotg} 3°40'$ b) $\operatorname{cotg} 28°30'$ c) $\operatorname{cotg} 65°10'$
d) $\operatorname{cotg} 89°$ e) $\operatorname{cotg} 72°$ f) $\operatorname{tg} 18°$

11. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete přibližnou velikost ostrého úhlu γ, je-li:

a) $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{11}{10}$ b) $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{6}{10}$ c) $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{10}{6}$

12. Najděte v tabulkách nebo pomocí kalkulačky velikost ostrého úhlu δ z rovnosti:

a) $\sin\delta = 0{,}5$ b) $\cos\delta = 0{,}5$ c) $\operatorname{tg}\delta = 0{,}5$
d) $\operatorname{cotg}\delta = 0{,}5$ e) $\operatorname{cotg}\delta = \frac{7}{2}$ f) $\operatorname{cotg}\delta = \frac{12}{5}$

13. Doplňte následující tabulku za podmínky, že $\alpha + \beta = 90°$:

α	33°				
β		33°			
$\sin\alpha$				0,707 1	
$\cos\alpha$			0,984 8		
$\operatorname{tg}\alpha$					5,671
$\operatorname{cotg}\alpha$					

$\ast$**14.** Pomocí poměrů stran pravoúhlého trojúhelníku vysvětlete, proč pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

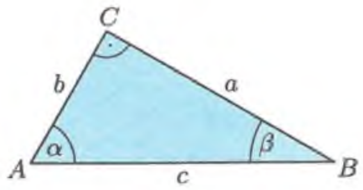
7 VZTAHY MEZI FUNKCEMI ÚHLŮ

V předchozích kapitolách jsme poznali čtyři nejdůležitější goniometrické funkce – sinus, kosinus, tangens a kotangens. Zavedli jsme je pomocí poměrů stran v pravoúhlém trojúhelníku s daným ostrým vnitřním úhlem. Mezi těmito poměry existuje řada závislostí, které je možné vyjádřit různými rovnostmi. Některé z nich nyní odvodíme.

V závěru kapitoly pak vysvětlíme, jak vypočítat hodnoty všech známých goniometrických funkcí některých „významných" úhlů (30°, 45° a 60°).

? Co platí pro funkce dvou úhlů, které se doplňují do 90°?

Narýsujme libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a označme obvyklým způsobem jeho strany a ostré vnitřní úhly:



Poměry stran trojúhelníku určují hodnoty funkcí úhlů α a β:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$$

Protože pro „doplňkové“ úhly α, β platí $\alpha + \beta = 90°$, dostáváme odtud vzorce:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(90° - \alpha) \\ \cos\alpha &= \sin(90° - \alpha) \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}(90° - \alpha) \\ \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{tg}(90° - \alpha) \end{aligned}}$$

Tyto vzorce platí pro libovolný úhel $\alpha \in (0°, 90°)$, první dva z nich dokonce i pro $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$.

Vzpomeňte si, že vzorec $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$ jsme vlastně objevili již v minulé kapitole, kde jsme ho využili při výkladu o funkci kotangens.

Podle předchozích vzorců například platí:

$\sin 25° = \cos 65°$, $\cos 10° = \sin 80°$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45°$, $\operatorname{cotg} 60° = \operatorname{tg} 30°$

Díky vzorci $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ by v *Tabulkách pro ZŠ* nemusela být tabulka hodnot kosinů vůbec uvedena. Místo ní bychom mohli používat tabulku hodnot sinů (např. $\cos 50°$ hledat jako $\sin 40°$, úhel α z rovnosti $\cos\alpha = 0{,}68$ najít jako doplňkový úhel k úhlu β z rovnosti $\sin\beta = 0{,}68$). Podobně je „nadbytečná" jedna ze dvou tabulek hodnot tangens a kotangens. Proto také na většině kalkulaček (s tlačítkem pro tangens) chybí tlačítko pro kotangens.

Příklad 1. Uspořádejte od nejmenšího k největšímu čísla:

$$\sin 25°, \quad \cos 17°, \quad \cos 28°, \quad \sin 75°, \quad \sin 61°$$

Řešení. Úlohu vyřešíme bez tabulek a kalkulaček. Využijeme toho, že $\cos 17° = \sin 73°$ a $\cos 28° = \sin 62°$. Máme tedy uspořádat podle velikosti čísla

$$\sin 25°, \quad \sin 73°, \quad \sin 62°, \quad \sin 75°, \quad \sin 61°.$$

Protože je funkce sinus rostoucí, platí

$$\sin 25° < \sin 61° < \sin 62° < \sin 73° < \sin 75°,$$

což znamená, že

$$\sin 25° < \sin 61° < \cos 28° < \cos 17° < \sin 75°.$$

□ **1.** Určete ostrý úhel α z rovnosti

a) $\sin\alpha = \cos 15°$, b) $\cos\alpha = \sin 52°$,
c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg} 24°$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg} 5°$.

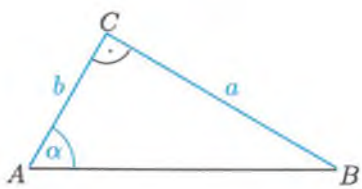
2. Bez použití tabulek a kalkulačky porovnejte podle velikosti čísla:

a) $\sin 42°12'$ a $\cos 47°47'$ b) $\cos 26°25'$ a $\sin 63°37'$
c) $\operatorname{tg} 44°56'$ a $\operatorname{cotg} 45°7'$ d) $\operatorname{cotg} 77°7'$ a $\operatorname{tg} 12°12'$

Co platí pro tangens a kotangens téhož úhlu?

Hodnoty $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$ jsme definovali jako poměry odvěsen téhož pravoúhlého trojúhelníku, které jsou zapsány dvěma navzájem převrácenými zlomky:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$$



Odtud plyne, že

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Znamená to, že pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

□ **3.** Vysvětlete, proč pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90° - \alpha) = 1$.

□ **4.** Bez tabulek a kalkulaček vypočtěte součin:

a) $\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{cotg} 10°$ b) $\operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{cotg} 40°$ c) $\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 80°$

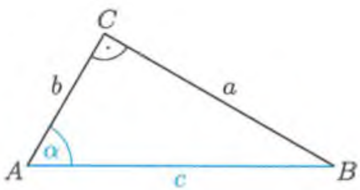
d) $\operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 50°$ e) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60°$ f) $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 70°$

? Jaké jsou další vztahy mezi funkcemi téhož úhlu?

Důležité vztahy mezi goniometrickými funkcemi téhož ostrého úhlu snáze odvodíme, když nejdříve vysvětlíme, jak pomocí těchto funkcí vyjádřit délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, známe-li délku jeho přepony a velikost jednoho z jeho ostrých úhlů.

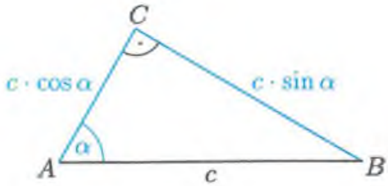
Předpokládejme, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC je dána délka c jeho přepony AB a velikost ostrého úhlu α. Délku a můžeme zjistit ze vzorce pro $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \text{a proto} \quad a = c \cdot \sin\alpha.$$



Podobně ze vzorce pro $\cos\alpha$ vyjádříme délku b:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \text{a proto} \quad b = c \cdot \cos\alpha.$$



Dosadíme-li tato vyjádření odvěsen a, b do vzorce pro $\mathrm{tg}\,\alpha$, získáme vyjádření $\mathrm{tg}\,\alpha$ pomocí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c\cdot\sin\alpha}{c\cdot\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Obdobně lze vyjádřit i $\mathrm{cotg}\,\alpha$:

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{c\cdot\cos\alpha}{c\cdot\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Odvodili jsme, že pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Závislost mezi hodnotami $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ získáme pomocí Pythagorovy věty:

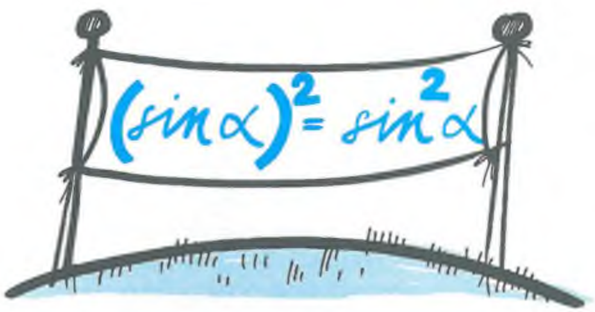
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(c\cdot\sin\alpha)^2 + (c\cdot\cos\alpha)^2 = c^2$$
$$c^2\cdot(\sin\alpha)^2 + c^2\cdot(\cos\alpha)^2 = c^2$$

Vydělíme-li obě strany poslední rovnosti kladným výrazem c^2, dostaneme:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

V matematice je obvyklé zapisovat mocniny hodnot goniometrických funkcí bez závorek. Například:

$$(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha, \quad (\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha, \quad (\mathrm{tg}\,\alpha)^3 = \mathrm{tg}^3\,\alpha$$



Proto vztah mezi $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ zapisujeme jako vzorec:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Tato rovnost platí pro každé $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$. Pro $\alpha \in (0°, 90°)$ jsme ji odvodili z Pythagorovy věty, pro $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$ ji ověřte dosazením sami.

Číslu 1 zapsanému ve tvaru $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ se často říká *goniometrická jednička*.

Známe-li jednu ze čtyř hodnot $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ a $\mathrm{cotg}\,\alpha$, dokážeme ostatní tři hodnoty vypočítat, aniž bychom zjišťovali neznámý ostrý úhel α. Můžeme při tom využít právě odvozené vzorce, nebo vhodný pravoúhlý trojúhelník. Délky stran tohoto „pomocného" trojúhelníku budeme uvádět „bez jednotek", pouze čísly, která budou vyjadřovat, jakými jsou násobky některé jednotky délky. Na tom, která jednotka délky (cm, mm, km, ...) by byla zvolena, totiž nezáleží. Změna jednotky způsobí pouze zvětšení nebo zmenšení příslušného trojúhelníku, jeho vnitřní úhly se při tom nezmění.

Ve všech příkladech předpokládáme, že α je *ostrý* úhel.

Příklad 2. Určete $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ a $\mathrm{cotg}\,\alpha$, je-li $\sin\alpha = 0{,}3$.

Řešení 1. Využijeme vhodný pravoúhlý trojúhelník. Protože $0{,}3 = \frac{3}{10}$, je úhel α vnitřním ostrým úhlem pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnou 3 a přeponou 10, který je vyznačen na obrázku. Druhá odvěsna má podle Pythagorovy věty délku

$$\sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}.$$

Proto platí:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10} \doteq 0{,}953\,9$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{91}} \doteq 0{,}314\,5$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3} \doteq 3{,}18$$

V odpovědích k matematickým úlohám dáváme přednost přesným výsledkům $\left(\text{i když jsou zapsány pomocí odmocnin, jako např. } \cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}\right)$

před zaokrouhlenými čísly, neboť pro praxi významné přibližné hodnoty výsledků lze vždy vypočítat (s požadovanou přesností) až „dodatečně“. Dřívější praxe přibližných výpočtů zapříčinila, že u zmíněných přesných, avšak „nevyčíslených“ výsledků se vyhýbáme zlomkům s odmocninami ve jmenovateli $\left(\text{např. } \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{91}}\right)$; dělení iracionálním číslem (bez kalkulačky) totiž bývalo velmi pracné. Proto zlomek s jmenovatelem $\sqrt{91}$ upravíme; rozšíříme ho číslem $\sqrt{91}$:

$$\frac{3}{\sqrt{91}} = \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{91}} = \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{91}$$

Hledané hodnoty jsou

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{91} \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}.$$

Řešení 2. Ze vzorce $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ po dosazení $\sin\alpha = \frac{3}{10}$ vypočítáme hodnotu $\cos\alpha$:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\
\cos^2\alpha &= 1 - \frac{9}{100} \\
\cos\alpha &= \sqrt{\frac{91}{100}} \\
\cos\alpha &= \frac{\sqrt{91}}{10}
\end{aligned}$$

Nyní už snadno vyčíslíme $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{\sqrt{91}}{10}} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot \sqrt{91}} = \frac{3}{\sqrt{91}} = \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{91}$$

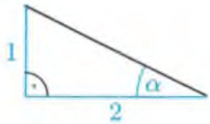
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{91}}} = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

Protože jsme hodnotu $\operatorname{cotg}\alpha$ určili „převrácením“ zlomku pro $\operatorname{tg}\alpha$, vybrali jsme pro dosazení za $\operatorname{tg}\alpha$ zlomek s odmocninou ve jmenovateli.

Příklad 3. Určete $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\operatorname{tg}\alpha$, je-li $\operatorname{cotg}\alpha = 2$.

Řešení 1. Vhodný pravoúhlý trojúhelník má odvěsny 2 a 1. Jeho přepona má délku

$$\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$



Platí tedy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$$

Řešení 2. Hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$ určíme okamžitě:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{1}{2}$$

Neznámé hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ určíme ze soustavy rovnic:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Z první rovnice vychází $\cos\alpha = 2\sin\alpha$. Dosadíme do druhé rovnice:

$$\sin^2\alpha + (2\cdot\sin\alpha)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + 4\cdot\sin^2\alpha = 1$$

$$5\cdot\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha = 2\cdot\sin\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$$

Stejně jako v *Řešení 1* jsme zjistili, že

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}.$$

5. Zapište bez odmocniny ve jmenovateli:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{5}{3\cdot\sqrt{15}}$

6. Určete $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$, je-li dáno:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ b) $\sin\alpha = 0{,}7$

7. Určete $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$, je-li dáno:

a) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos\alpha = 0{,}25$

8. Určete $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$, je-li dáno:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$ b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$

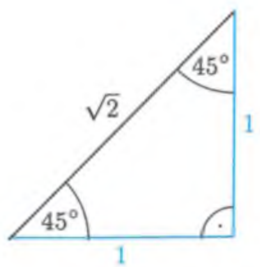
9. Určete $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\operatorname{tg}\alpha$, je-li dáno:

a) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{3}$ b) $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}5$

Jaké jsou hodnoty funkcí úhlů 30°, 45° a 60°?

Ukážeme, že pomocí délek stran „význačných“ trojúhelníků lze určit hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$ pro některé úhly α.

Jako první zvolíme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 1 a 1. Jeho přepona má délku $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, jeho vnitřní ostré úhly jsou shodné a mají velikost 45°. Proto platí:



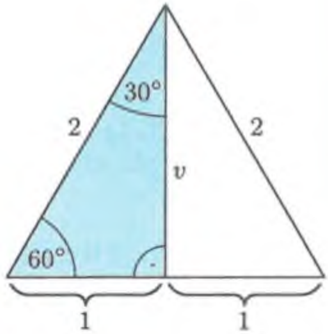
$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{cotg} 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Pravoúhlý trojúhelník s vnitřními úhly 30° a 60° dostaneme, když „rozpůlíme“ rovnostranný trojúhelník jednou jeho výškou. Je výhodné zvolit délku strany „celého“ trojúhelníku rovnu číslu 2, neboť pak kratší odvěsna modrého „polovičního“ trojúhelníku bude mít délku 1. Vypočtěme jeho delší odvěsnu (výšku v výchozího rovnostranného trojúhelníku):



$$v = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

Z délek stran modrého trojúhelníku zjistíme, že platí:

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{cotg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} 30° = \operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

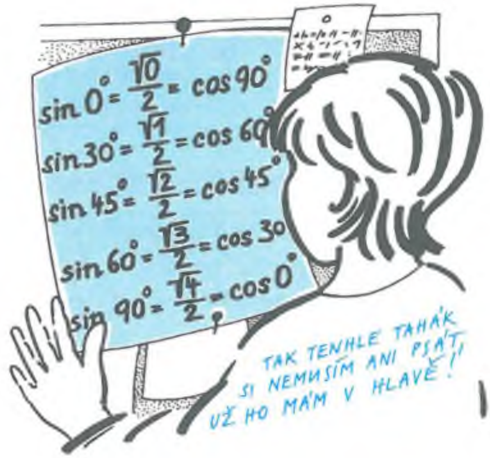
Vypočtené hodnoty zapíšeme do tabulky rozšířené i o hodnoty funkcí úhlů 0° a 90°:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

10. Vypočtěte:

a) $4 \cdot (\sin 60° - \sin 45°) \cdot (\cos 30° + \cos 45°)$

b) $\sin 60° - 2 \cdot \sin 30° \cdot \cos 30°$



CVIČENÍ 6

1. Rozšiřte na zlomek bez odmocniny ve jmenovateli:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{15}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{4}{3 \cdot \sqrt{6}}$ d) $\dfrac{4}{5 \cdot \sqrt{2}}$

***2.** Rozšiřte na zlomek bez odmocniny ve jmenovateli (využijte vzorec pro $A^2 - B^2$):

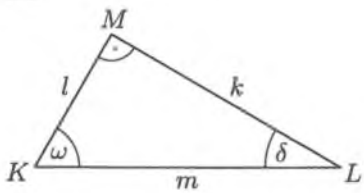
a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{11}{5-\sqrt{3}}$

3. Podle obrázku doplňte do rámečků správná označení funkcí, úhlů či stran:

a) $\dfrac{k}{m} = \sin \square = \cos \square$ b) $\dfrac{l}{\square} = \square\, \omega = \mathrm{tg}\, \square$

c) $\dfrac{k}{l} = \square\, \omega == \mathrm{cotg}\, \square$

d) $\dfrac{\square}{\square} = \cos \omega = \square\,\square$



4. Určete ostrý úhel φ z rovnosti:

a) $\sin 35° = \cos \varphi$ b) $\sin \varphi = \cos 28°$

c) $\operatorname{tg} 83°40' = \operatorname{cotg} \varphi$ d) $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cotg} 24°10'$

5. Bez použití tabulek a kalkulačky uspořádejte daná čísla od nejmenšího k největšímu: $\operatorname{cotg} 71°$, $\operatorname{tg} 33°$, $\operatorname{cotg} 18°$, $\operatorname{cotg} 82°$, $\operatorname{tg} 69°$

6. Vypočtěte:

a) $\operatorname{tg} 15° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 75°$

b) $\operatorname{cotg} 5° \cdot \operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{cotg} 15° \cdot \operatorname{cotg} 75° \cdot \operatorname{tg} 80° \cdot \operatorname{cotg} 85°$

7. Určete nejprve výpočtem $\sin \delta$, $\operatorname{tg} \delta$ a $\operatorname{cotg} \delta$, je-li $\cos \delta = 0{,}6$. Teprve pak ke každé vypočtené hodnotě najděte v tabulce příslušné funkce odpovídající ostrý úhel δ a nalezené hodnoty porovnejte.

8. Vypočtěte $\cos \omega$, $\operatorname{tg} \omega$ a $\operatorname{cotg} \omega$, je-li ω takový ostrý úhel, že $\sin \omega = \frac{2}{3}$.

9. Vypočtěte $\sin \psi$, $\cos \psi$ a $\operatorname{cotg} \psi$, je-li ψ ostrý úhel a $\operatorname{tg} \psi = 4$.

10. Víme, že $\sin 32°40' \doteq 0{,}54$. Aniž byste hledali hodnoty funkcí úhlů v tabulkách nebo na kalkulačce, vypočtěte $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$ pro $\alpha = 57°20'$.

■ 11. Na displeji kalkulačky je přibližná hodnota $\cos 23°$:

Ze vzorců $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ a $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$ vypočtěte co nejpřesněji (jak vám vaše kalkulačka umožní) čísla $\sin 23°$, $\operatorname{tg} 23°$, $\sin 67°$ a $\operatorname{tg} 67°$. Ty pak porovnejte s hodnotami, získanými na kalkulačce pomocí tlačítek $\boxed{\sin}$ a $\boxed{\tan}$.

12. Vypočtěte (bez použití tabulek či kalkulačky):

a) $\operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{cotg} 45° - 2 \cdot \sin 45° \cos 45°$

b) $(\sin 60° - \cos 60°) \cdot (\sin 30° + \cos 30°)$

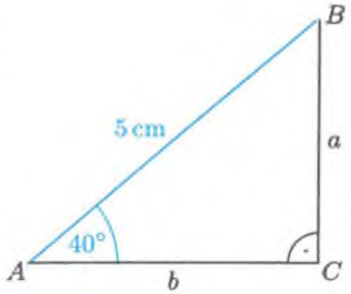
c) $8 \cdot (\operatorname{tg} 60° - \operatorname{cotg} 60°)^2$

■* 13. Jedna ze čtyř hodnot $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$, kde α je neznámý ostrý úhel, je rovna číslu $\dfrac{5 \cdot \sqrt{6}}{12}$. Určete (bez tabulek a kalkulačky) ostatní tři hodnoty.

8 ŘEŠENÍ ÚLOH O TROJÚHELNÍKU

Teoretické poznatky o goniometrických funkcích, které jsme získali v předchozích kapitolách, nyní uplatníme při výpočtech stran a úhlů pravoúhlých trojúhelníků. Nejprve uvedeme několik úloh přímo o trojúhelnících, pak přejdeme k „praktickým“ úlohám, ve kterých budeme muset vhodné trojúhelníky na začátku řešení objevit.

Příklad 1. Přepona AB pravoúhlého trojúhelníku ABC měří 5 cm a úhel při vrcholu A má velikost 40°. Určete délky odvěsen AC a BC.



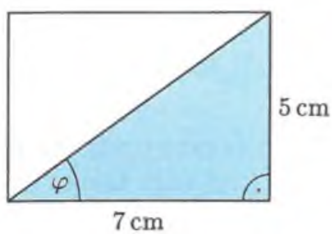
Řešení. Hledané délky $a = |BC|$ a $b = |AC|$ určíme pomocí funkcí sinus a kosinus:

$$\begin{aligned} \sin 40° &= \frac{a}{5\,\text{cm}} \\ a &= 5\,\text{cm} \cdot \sin 40° \\ a &\doteq 5\,\text{cm} \cdot 0{,}643 \\ a &\doteq 3{,}2\,\text{cm} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos 40° &= \frac{b}{5\,\text{cm}} \\ b &= 5\,\text{cm} \cdot \cos 40° \\ b &\doteq 5\,\text{cm} \cdot 0{,}766 \\ b &\doteq 3{,}8\,\text{cm} \end{aligned}$$

Odvěsna BC měří asi 3,2 cm, odvěsna AC asi 3,8 cm.

Příklad 2. Jaký úhel svírá úhlopříčka obdélníku o rozměrech 5 cm a 7 cm s jeho delší stranou?

Řešení. Načrtneme daný obdélník a vyznačíme v něm hledaný úhel φ.



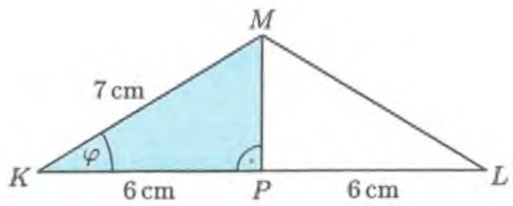
Úhel φ je vnitřní úhel modrého pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny známe. K určení úhlu φ proto použijeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} \doteq 0{,}714\,3$$
$$\varphi \doteq 35{,}5° = 35°30'$$

Úhlopříčka svírá s delší stranou obdélníku úhel o velikosti asi $35°30'$.

Příklad 3. Vypočtěte vnitřní úhly rovnoramenného trojúhelníku KLM se základnou KL, je-li $|KL| = 12\,\text{cm}$ a $|KM| = 7\,\text{cm}$.

Řešení. Trojúhelník KLM není pravoúhlý (neboť $7^2 + 7^2 \neq 12^2$), proto jeho vnitřní úhly nemůžeme určit přímo z poměrů jeho stran. Pomůžeme si pravoúhlým trojúhelníkem KMP, kde P je pata výšky z vrcholu M k základně KL.



V tomto trojúhelníku známe délku přepony KM a také délku odvěsny KP, neboť bod P je středem strany KL, a proto $|KP| = 6\,\text{cm}$. Pro označený úhel φ tedy platí:

$$\cos\varphi = \frac{|KP|}{|KM|} = \frac{6\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} \doteq 0{,}857\,1, \quad \text{odkud} \quad \varphi \doteq 31°$$

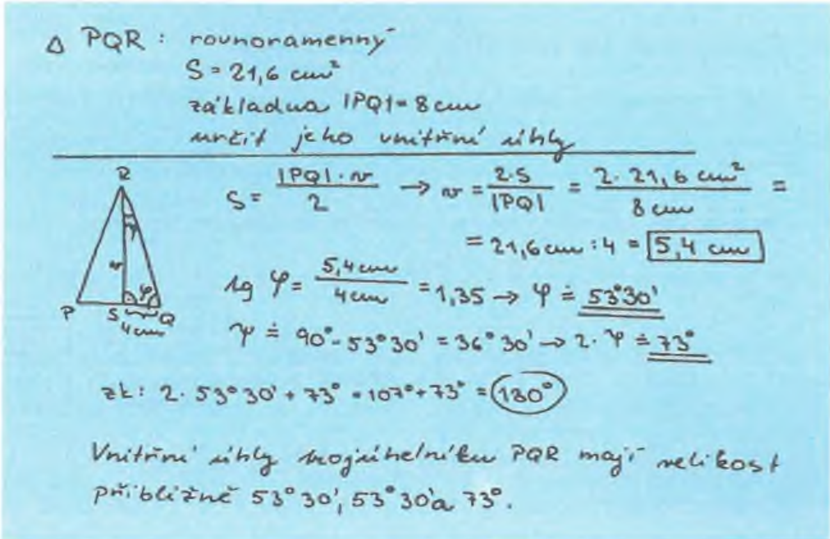
Shodné úhly trojúhelníku KLM při základně KL tedy měří asi $31°$, úhel při hlavním vrcholu M má proto velikost

$$|\sphericalangle KML| = 180° - 2\varphi \doteq 180° - 2 \cdot 31° = 118°.$$

Vnitřní úhly trojúhelníku KLM měří asi $31°$, $31°$ a $118°$.

Příklad 4. Základna PQ rovnoramenného trojúhelníku PQR o obsahu $21{,}6\,\text{cm}^2$ měří $8\,\text{cm}$. Určete vnitřní úhly tohoto trojúhelníku.

Řešení jsme převzali z Evina sešitu.



△ PQR : rovnoramenný
$S = 21{,}6\ \mathrm{cm}^2$
základna $|PQ| = 8\ \mathrm{cm}$
určit jeho vnitřní úhly

$S = \frac{|PQ| \cdot v}{2} \rightarrow v = \frac{2 \cdot S}{|PQ|} = \frac{2 \cdot 21{,}6\ \mathrm{cm}^2}{8\ \mathrm{cm}} = 21{,}6\ \mathrm{cm} : 4 = \boxed{5{,}4\ \mathrm{cm}}$

$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{5{,}4\ \mathrm{cm}}{4\ \mathrm{cm}} = 1{,}35 \rightarrow \varphi \doteq 53°30'$

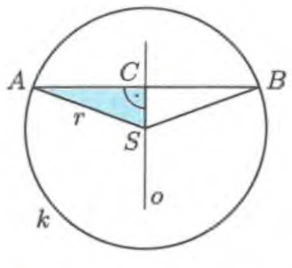
$\psi \doteq 90° - 53°30' = 36°30' \rightarrow 2 \cdot \psi \doteq 73°$

zk: $2 \cdot 53°30' + 73° = 107° + 73° = 180°$

Vnitřní úhly trojúhelníku PQR mají velikost přibližně 53°30', 53°30' a 73°.

Příklad 5. V kružnici $k(S; r)$ je sestrojena tětiva AB, která přísluší středovému úhlu ASB o velikosti 140°. Vzdálenost středu S od tětivy AB je 3 cm. Vypočtěte poloměr r kružnice k.

Řešení. Situace ze zadání úlohy je znázorněna na prvním obrázku. Střed C tětivy AB leží na její ose o, která prochází bodem S a je k tětivě AB kolmá. Proto je trojúhelník ASC pravoúhlý s přeponou AS a jeho vnitřní úhel při vrcholu S měří $\frac{140°}{2}$, tj. 70°.

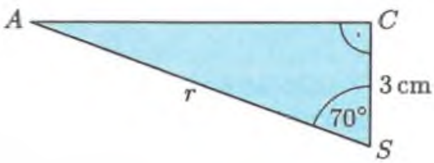


Z trojúhelníku ASC dostáváme:

$$\cos 70° = \frac{3\,\mathrm{cm}}{r}$$

$$r \cdot \cos 70° = 3\,\mathrm{cm}$$

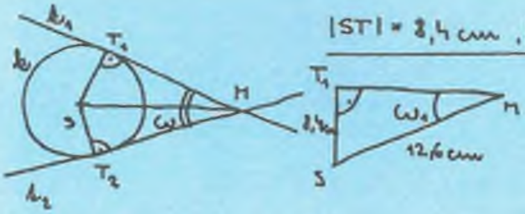
$$r = \frac{3\,\mathrm{cm}}{\cos 70°} \doteq \frac{3\,\mathrm{cm}}{0{,}342} \doteq 8{,}8\,\mathrm{cm}$$



Poloměr kružnice k je asi 8,8 cm.

Příklad 6. Určete úhel, který svírají tečny ke kružnici $k(S; 8{,}4\,\text{cm})$ vedené z bodu M, který má od středu S vzdálenost 12,6 cm.

Řešení. Podívejte se, jak tuto úlohu řešila Kristýna:



$|ST| = 8{,}4\,\text{cm}$, $|MS| = 12{,}6\,\text{cm}$, $\omega = ?$

$$\sin \omega_1 = \frac{8{,}4\,\text{cm}}{12{,}6\,\text{cm}} = \frac{84}{126} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}\bar{6}$$

$$\sin \omega_1 = 0{,}\bar{6} \rightarrow \omega_1 \doteq \boxed{41°50'}$$

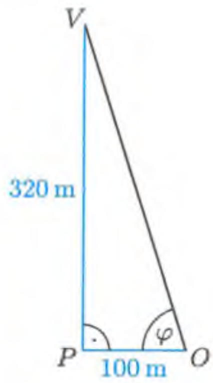
$$\omega = 2 \cdot \omega_1 \doteq 2 \cdot 41°50' = 82°100' = \underline{\underline{83°40'}}$$

Tečny svírají úhel přibližně 83°40'.

1. Přepona RS pravoúhlého trojúhelníku RST měří 8 cm, jeho odvěsna ST měří 5 cm. Určete oba ostré úhly RST a SRT.
2. Strany obdélníku jsou v poměru 5 : 8. Jak velký tupý úhel svírají jeho úhlopříčky?
3. Vypočtěte ostré vnitřní úhly pravoúhlého trojúhelníku o obsahu $19{,}8\,\text{cm}^2$, jehož jedna odvěsna má délku 4,5 cm.
4. V trojúhelníku ABC platí: $\gamma = 90°$, $a = 25\,\text{cm}$, $v_c = 7\,\text{cm}$. Určete velikosti vnitřních úhlů α, β a délku strany b.
5. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů kosočtverce, jehož úhlopříčky měří 4 cm a 10 cm.
6. Určete, jakému středovému úhlu v kružnici o poloměru 10,8 cm přísluší tětiva délky 5 cm.
7. Vypočtěte poloměry kružnice vepsané a kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku, jehož strana měří 3 cm.

Příklad 7. Eiffelova věž v Paříži měří 320 m (i s televizní anténou). Pod jakým úhlem nad vodorovnou rovinou vidí její vrcholek pozorovatel vzdálený 100 m od její paty? (Výšku pozorovatele zanedbejte.)

Řešení. Situaci vystihneme pravoúhlým trojúhelníkem VPO, kde V je vrchol Eiffelovy věže, P její pata a O místo, na kterém stojí pozorovatel. Podle zadání platí $|VP| = 320\,\text{m}$, $|PO| = 100\,\text{m}$. K určení hledaného úhlu φ použijeme funkci tangens:



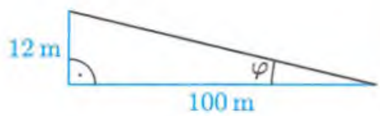
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|VP|}{|PO|} = \frac{320\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 3{,}2$$

$$\varphi \doteq 72{,}6^\circ \doteq 73^\circ$$

Pozorovatel vidí vrchol Eiffelovy věže pod úhlem, jehož velikost je asi 73°.

Příklad 8. Výstražná značka na obrázku upozorňuje, že následující úsek silnice má spád 12 %. V jakém úhlu klesá silnice za touto značkou?

Řešení. Dvanáctiprocentní spád silnice znamená, že na vzdálenosti 100 m (měřené ve vodorovném směru – například na mapě) klesne silnice o 12 % ze 100 m, tj. o 12 m.



Úhel klesání φ vypočteme pomocí funkce tangens:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{12\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0{,}12, \quad \text{odkud } \varphi \doteq 7^\circ$$

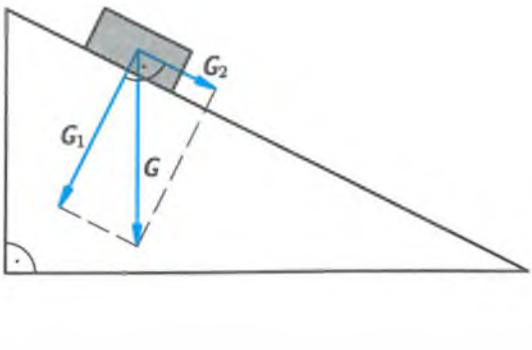
Silnice klesá přibližně pod úhlem 7°.

8. Lanová dráha je dlouhá 650 m a její přímá trať stoupá pod úhlem 39°. Vypočtěte výškový rozdíl mezi horní a dolní stanicí lanovky.

9. Vjezdu do přístavu v New Yorku dominuje Socha Svobody. Samotná socha je vysoká 46 metrů a podstavec pod ní má výšku 47 metrů. Jak daleko je od ní vzdálen pozorovatel, který vidí vrchol pochodně, již drží socha nad hlavou, pod úhlem 60°?

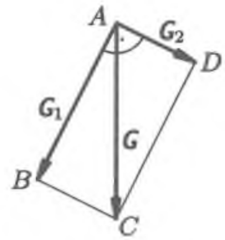
10. Tato železniční značka znamená stoupání 15 ‰ na trati, jejíž konce mají podle mapy vzdálenost 800 m. Pod jakým úhlem trať na vymezeném úseku stoupá?

V závěru kapitoly se budeme zabývat důležitou úlohou z fyziky, úlohou o tělese na nakloněné rovině. Tíhová síla $\boldsymbol{G}$, kterou Země na těleso působí, má dvojí účinek: jednak „přitlačuje" těleso k nakloněné rovině, jednak způsobuje jeho pohyb po nakloněné rovině dolů (pokud „překoná" sílu tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou).



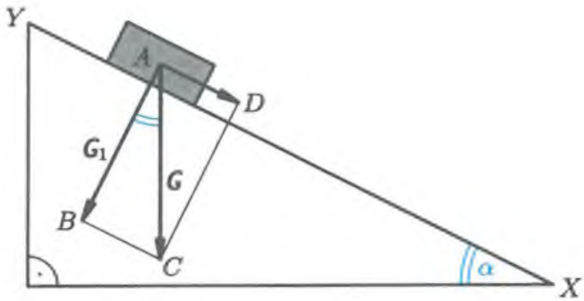
První účinek je na obrázku znázorněn silou $\boldsymbol{G}_1$, druhý silou $\boldsymbol{G}_2$. Směry těchto dvou sil jsou navzájem kolmé. Síla $\boldsymbol{G}_1$ totiž působí kolmo k nakloněné rovině, síla $\boldsymbol{G}_2$ je s nakloněnou rovinou rovnoběžná.

Velikosti sil $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ označíme $|\boldsymbol{G}_1|$ a $|\boldsymbol{G}_2|$. Určíme je z tzv. „rovnoběžníkového pravidla“ pro sčítání sil, které znáte z hodin fyziky:



Síly $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ jsou takové, že síla $\boldsymbol{G}$ je úhlopříčkou rovnoběžníku $ABCD$ z obrázku. Protože $AB \perp AD$, je rovnoběžník $ABCD$ obdélník. V něm platí: $|AB| = |\boldsymbol{G}_1|$, $|AD| = |\boldsymbol{G}_2|$, $|AC| = |\boldsymbol{G}|$.

Vysvětlíme nyní, že úhel BAC, který svírají síly $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}$, je shodný s úhlem α, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou.



Protože tíhová síla G má svislý směr, je přímka AC svislá, a tak svírá s přímkou YX úhel $(90° - \alpha)$, tedy $|\sphericalangle DAC| = 90° - \alpha$. Protože úhel BAD je pravý, platí:

$$|\sphericalangle BAC| = 90° - |\sphericalangle DAC| = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$$

Pro poměry stran pravoúhlého trojúhelníku ABC tak dostáváme:

$$\cos\alpha = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|\boldsymbol{G}_1|}{|\boldsymbol{G}|}, \qquad \sin\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|\boldsymbol{G}_2|}{|\boldsymbol{G}|}$$

Odtud pro velikosti sil $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ vycházejí vzorce

$$|\boldsymbol{G}_1| = |\boldsymbol{G}| \cdot \cos\alpha, \qquad |\boldsymbol{G}_2| = |\boldsymbol{G}| \cdot \sin\alpha.$$

(Uvědomte si, že tyto vzorce platí i v případě $\alpha = 0°$, kdy je „nakloněná“ rovina vlastně vodorovná, a tak $|\boldsymbol{G}_1| = |\boldsymbol{G}|$ a $|\boldsymbol{G}_2| = 0$.)

11. Dosaďte do vzorců pro velikosti sil $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ hodnotu $\alpha = 90°$. Odpovídá výsledek reálné situaci? Jaké?

Příklad 9. Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel 20°. Na těleso, které je na ní umístěno, působí tíhová síla 350 N. Určete velikost její složky kolmé k nakloněné rovině.

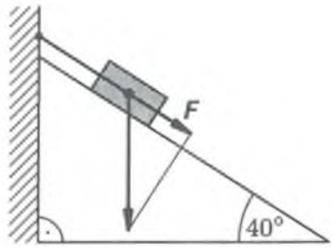
Řešení. Hledáme velikost síly $\boldsymbol{G}_1$ z předchozího výkladu v případě, kdy $\alpha = 20°$ a $|\boldsymbol{G}| = 350\,\mathrm{N}$:

$$|\boldsymbol{G}_1| = |\boldsymbol{G}| \cdot \cos\alpha = (350\,\mathrm{N}) \cdot (\cos 20°) \doteq (350 \cdot 0{,}94)\,\mathrm{N} \doteq 330\,\mathrm{N}$$

Velikost složky kolmé k nakloněné rovině je asi 330 N.

12. V situaci z předchozího příkladu určete velikost složky tíhové síly rovnoběžné s nakloněnou rovinou.

13. Na těleso na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 40°, působí tíhová síla 100 N. Těleso je proti pohybu dolů zajištěno lanem, které je napnuto rovnoběžně s nakloněnou rovinou. Jak velkou silou je lano napínáno, když zanedbáme tření?



CVIČENÍ 7

1. Určete velikosti ostrých vnitřních úhlů v pravoúhlém trojúhelníku, jehož délky stran (v některých jednotkách) jsou známé pythagorejské trojice čísel

a) 3, 4 a 5, b) 5, 12 a 13.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB vypočtěte délky ostatních stran a velikosti zbývajících ostrých vnitřních úhlů, je-li dáno:

a) $c = 4\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 57°$ b) $b = 3\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 28°$

c) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 75°$ d) $b = 15\,\mathrm{cm}$, $\beta = 52°$

e) $a = 3{,}26\,\mathrm{dm}$, $b = 6\,\mathrm{dm}$ f) $b = 24\,\mathrm{cm}$, $c = 2{,}5\,\mathrm{dm}$

3. Pravoúhlý trojúhelník má obsah $10{,}92\,\mathrm{dm}^2$, jedna z jeho odvěsen měří 13 cm. Vypočtěte velikosti jeho vnitřních ostrých úhlů.

4. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno $\gamma = 90°$, $v_c = 5\,\mathrm{cm}$, $a = 9\,\mathrm{cm}$.

5. Vypočtěte obvod pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li $t_c = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a $\alpha = 24°$.

6. V rovnoramenném trojúhelníku je velikost úhlu při hlavním vrcholu 70° a délka ramena je 7 cm. Vypočtěte délku základny.

7. Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno délky 10 cm svírá se základnou úhel 63°.

8. Vypočtěte délku strany LM a úhlopříčky KM obdélníku $KLMN$, je-li dáno $|NM| = 7\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle KLN| = 38°$.

9. Vypočtěte délky úhlopříček kosočtverce o straně 3 cm, jehož dvě sousední strany svírají úhel 133°.

10. Určete délku tětivy, která v kružnici o poloměru 5 cm přísluší středovému úhlu o velikosti

a) 45°, b) 60°, c) 72°.

11. Kružnice $k(S; 3\,\mathrm{cm})$ se dotýká ramen úhlu AVB. Určete délku úsečky VS, je-li

a) $|\sphericalangle AVB| = 30°$, b) $|\sphericalangle AVB| = 60°$.

12. Vypočtěte obvod pravidelného osmiúhelníku, kterému je vepsána kružnice o poloměru 7,4 cm.

13. Základny rovnoramenného lichoběžníku měří 8 cm a 5 cm, jeho výška je 3 cm. Vypočtěte velikosti jeho vnitřních úhlů.

■ **14.** Jednou z nejvyšších staveb světa je vysílací věž C. N. Tower v Kanadě. Z pohledu od jezera Ontario se věž tyčí vysoko nad mrakodrapy Toronta. Jak je vysoká, jestliže je ze člunu na jezeře vzdáleného 1 km od její paty vidět její vrchol pod úhlem 24°?

15. Tomáš spočítal, že na přímém schodišti z přízemí do 1. poschodí jejich domu je 16 schodů. Změřil, že každý schod má výšku 17 cm a šířku 26 cm. Z toho pak vypočítal, v jakém úhlu schodiště stoupá. Udělejte to také.

16. Značka u silnice před kopcem udává 8% stoupání. Výškový rozdíl vrcholu kopce a místa, kde je umístěna značka, je 44 metrů. Jak dlouhý je tento úsek silnice?

17. Vojta pouštěl draka na šňůře dlouhé 80 metrů. Jak vysoko asi drak vyletěl ve chvíli, kdy Vojta odhadl, že napnutá šňůra svírá s vodorovnou rovinou úhel 45°?

18. Novákovi dělají novou střechu nad zahradní kůlnou. Oba štíty tvaru rovnoramenného trojúhelníku budou z dřevěných prken; boky sedlové střechy (tvaru obdélníku) budou pokryty střešními taškami. Kolik m^2 každého materiálu musí nakoupit, počítají-li s dvacetiprocentním odpadem? Potřebné údaje jsou na obrázku.

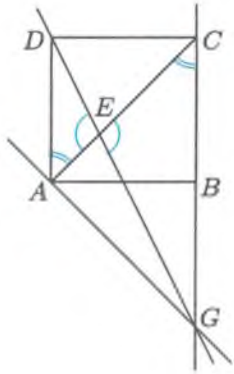
9 ÚLOHY Z MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Tato kapitola i následující cvičení jsou věnovány obtížnějším úlohám, které byly zadány v minulých ročnících *matematické olympiády*. Tak jako v předchozích sešitech jsou všechny řešené úlohy v této kapitole opatřeny odkazy na ročník soutěže. Zopakujme, že například zápis „41. r., Z8–II–3“ znamená, že úloha byla zadána ve 41. ročníku v kategorii Z8 v II. (tzn. okresním) kole jako úloha číslo 3. Tyto odkazy vám pomohou srovnat vlastní řešení nejen s tím, které publikujeme zde v učebnici, ale také s autorským řešením, které je uvedeno v příslušné *ročence* matematické olympiády.

Úloha 1 (41. r., Z8–II–3)
Je dán čtverec $ABCD$. Na úhlopříčce AC zvolme bod E tak, aby platilo $|AE| : |AC| = 1 : 3$. Přímka DE protne přímku BC v bodě G. Dokažte, že přímka GA je tečnou kružnice opsané čtverci $ABCD$.

Řešení

Protože úsečka AC je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, bude důkaz hotov, když ukážeme, že přímka GA je kolmá k přímce AC. Všimněme si, že $\triangle ADE \sim \triangle CGE$ podle věty *uu*, neboť úhly AED a CEG jsou vrcholové a úhly DAE a GCE mají velikost 45°. Platí tedy



$$\frac{|CG|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|AE|}, \quad \text{avšak} \quad |CE| = 2 \cdot |AE|$$

podle volby bodu E.

Proto také $|CG| = 2 \cdot |AD| = 2 \cdot |BC|$, odkud $|GB| = |BC| = |AB|$. Pravoúhlý trojúhelník AGB je tedy rovnoramenný, takže $|\sphericalangle GAB| = 45°$. To znamená, že úhel GAC je pravý:

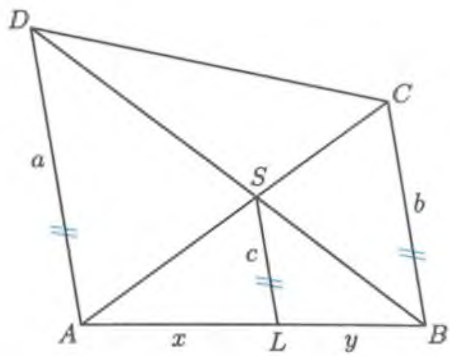
$$|\sphericalangle GAC| = |\sphericalangle GAB| + |\sphericalangle BAC| = 45° + 45° = 90°$$

Úloha 2 (47. r., Z9–II–4)

Strany AD a BC čtyřúhelníku $ABCD$ jsou rovnoběžné. Úhlopříčky čtyřúhelníku se protínají v bodě S. Bod L leží na straně AB tak, že $LS \parallel AD$. Určete délku úsečky SL, jestliže $|AD| = 4\,\text{cm}$ a $|BC| = 3\,\text{cm}$.

Řešení

Zvolme označení podle obrázku:



Protože $AD \parallel LS \parallel BC$, platí (podle věty *uu*)

$$\triangle LBS \sim \triangle ABD \quad \text{a} \quad \triangle ALS \sim \triangle ABC.$$

Odtud dostáváme soustavu rovnic:

$$\frac{c}{a} = \frac{y}{x+y}$$
$$\frac{c}{b} = \frac{x}{x+y}$$

$$c \cdot (x+y) = ay$$
$$c \cdot (x+y) = bx$$

Porovnáním pravých stran posledních dvou rovnic dostáváme $ay = bx$, odtud $x = \dfrac{ay}{b}$. Pravá strana první rovnice původní soustavy je tedy rovna

$$\frac{y}{x+y} = \frac{y}{\frac{ay}{b} + y} = \frac{y}{y \cdot \left(\frac{a}{b} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{a+b}{b}} = \frac{b}{a+b},$$

proto ze zmíněné rovnice plyne

$$c = a \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Po dosazení $a = 4\,\mathrm{cm}$ a $b = 3\,\mathrm{cm}$ vychází $c = \frac{12}{7}\,\mathrm{cm} \doteq 1{,}71\,\mathrm{cm}$. (Sami vysvětlete, proč „neznámé" délky x, y určit nelze.)

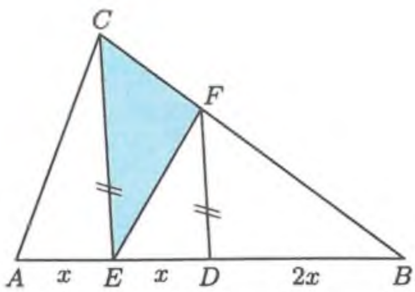
Úsečka SL měří asi 1,71 cm.

Úloha 3 (45. r., Z8–II–2)

V trojúhelníku ABC je D střed strany AB, E střed úsečky AD a F je takový bod strany BC, že $DF \parallel CE$. Obsah trojúhelníku CEF je $4\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC.

Řešení

Situace ze zadání úlohy je zachycena na obrázku:



Úsečky EC a DF jsou rovnoběžné, proto jsou trojúhelníky BEC a BDF podobné podle věty uu. To znamená, že $|BF| : |BC| = |BD| : |BE| = 2 : 3$, a tak pro bod F platí $|CF| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$.

Trojúhelníky BCE a FCE mají společnou výšku z vrcholu E, proto z rovnosti $|BC| = 3 \cdot |CF|$ plyne

$$S_{\triangle BCE} = 3 \cdot S_{\triangle FCE}.$$

Podle zadání platí $|AB| = \frac{4}{3} \cdot |EB|$. Všimněme si ještě, že trojúhelníky ABC a EBC mají společnou výšku z vrcholu C. Dohromady dostáváme:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \cdot S_{\triangle EBC} = \frac{4}{3} \cdot (3 \cdot S_{\triangle CFE}) = 4 \cdot S_{\triangle CFE} = 16\,\mathrm{cm}^2$$

Obsah trojúhelníku ABC je $16\,\mathrm{cm}^2$.

CVIČENÍ 8

1. (35. r., Z8–I–4)
Je dán čtverec $ABCD$ se stranou a. Vrcholem A vedeme libovolnou přímku, která protíná stranu BC v jejím vnitřním bodě M a prodloužení strany DC v bodě N. Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{a}$$

2. (45. r., Z8–I–6)
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$. Označme P patu výšky ke straně BC, Q patu výšky ke straně AC. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku CPQ.

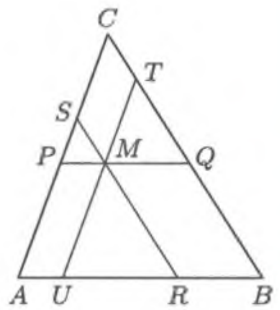
3. (39. r., Z8–I–6)
Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A, s vnitřním úhlem $\beta = 45°$ při vrcholu B a se shodnými stranami AD, DC. Do trojúhelníků ABC a ADC jsou vepsány kružnice. Vypočtěte poměr obsahů kruhů určených těmito kružnicemi.

4. (34. r., Z8–I–3)
Je dána úsečka AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC, ve kterém pro patu P výšky z vrcholu A platí $|BP| : |CP| = 3 : 5$.

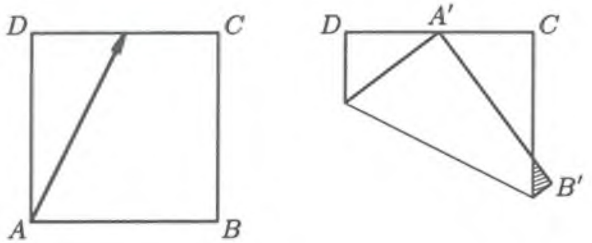
5. (48. r., Z9–II–2)
V lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 6\,\mathrm{cm}$. Nechť S je průsečík úhlopříček lichoběžníku a p je přímka procházející bodem S rovnoběžně se základnou AB lichoběžníku. Přímka p protíná rameno BC v bodě K a rameno DA v bodě L. Určete délku úsečky KL.

6. (22. r., Z–II–3)
Bod M leží uvnitř trojúhelníku ABC a platí $PQ \parallel AB$, $RS \parallel BC$, $TU \parallel CA$ (viz obr.). Dokažte, že

$$\frac{|PQ|}{|AB|} + \frac{|RS|}{|BC|} + \frac{|TU|}{|CA|} = 2.$$

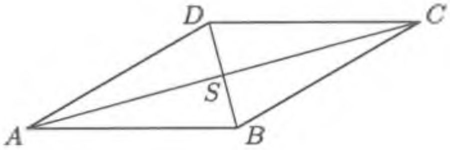


7. (40. r., Z8–I–6)
Čtverec $ABCD$ o straně 8 cm byl přeložen tak, že vrchol A se přemístil do středu strany CD. Zjistěte obsah vyšrafovaného trojúhelníku na obrázku vpravo.

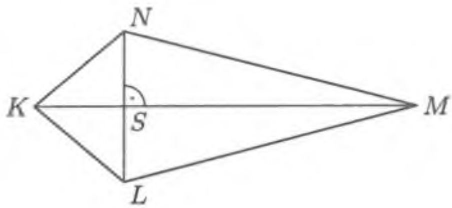


10 SOUHRNNÁ CVIČENÍ

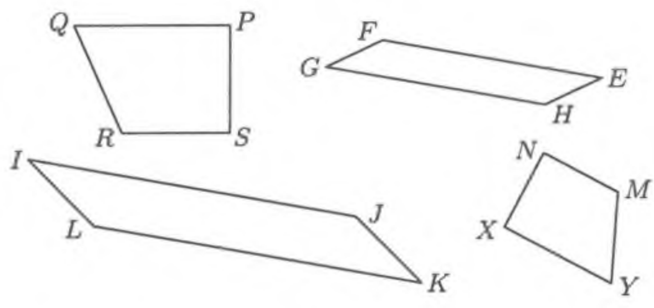
1. Úhlopříčky kosočtverce $ABCD$ z obrázku se protínají v bodě S. Vypište všechny dvojice shodných trojúhelníků s vrcholy z množiny $\{A, B, C, D, S\}$.



2. Úhlopříčky deltoidu $KLMN$ jsou k sobě kolmé a protínají se v bodě S, který půlí úhlopříčku LN. Vypište všechny dvojice shodných trojúhelníků s vrcholy z množiny $\{K, L, M, N, S\}$.



3. Na obrázku jsou dvě dvojice podobných čtyřúhelníků. Zapište jejich podobnost pomocí znaku $\sim$:



4. Rozhodněte, zda platí:

a) Každé dva kosočtverce jsou podobné.

b) Každé dva kosočtverce, které se shodují v některém vnitřním úhlu, jsou podobné.

5. Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku KLM s koeficientem podobnosti $\frac{4}{5}$.

a) Určete délky stran trojúhelníku ABC, jestliže $|KL| = 6\,\text{cm}$, $|LM| = 12\,\text{cm}$, $|MK| = 10\,\text{cm}$.

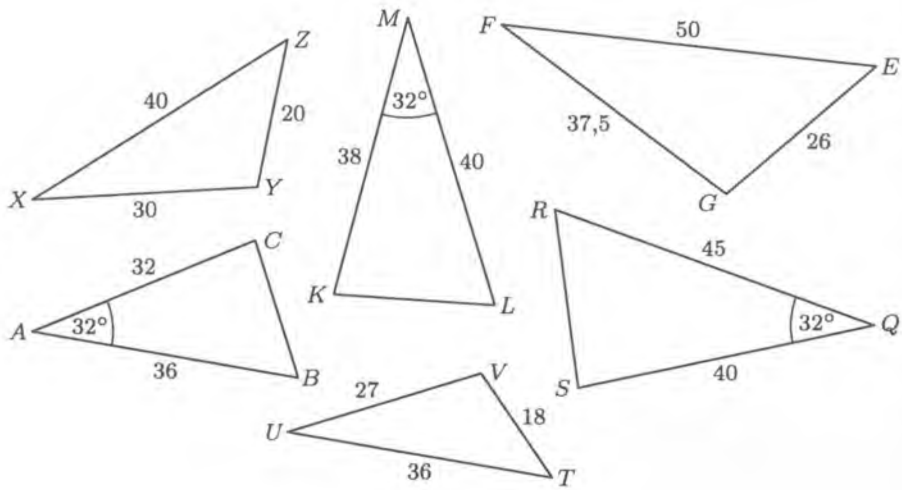
b) Určete délky stran trojúhelníku KLM, jestliže $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|BC| = 5{,}2\,\text{cm}$, $|CA| = 4{,}8\,\text{cm}$.

6. Pro trojúhelníky PQR a XYZ platí $\triangle PQR \sim \triangle XYZ$. Trojúhelník XYZ má obvod 22 cm, jeho strana XY měří 8 cm a strana YZ měří 10 cm. Sestrojte trojúhelník PQR, víte-li, že má obvod 16,5 cm.

7. Pro trojúhelníky EFG a XYZ platí $\triangle EFG \sim \triangle XYZ$, $|EF| = 2{,}7\,\text{cm}$, $|EG| = 4{,}5\,\text{cm}$, $|YZ| = 4\,\text{cm}$, $|XZ| = 5\,\text{cm}$. Určete obvody obou trojúhelníků.

8. Určete největší vnitřní úhel trojúhelníku $A_1B_1C_1$, jestliže jemu podobný trojúhelník ABC má dva vnitřní úhly $61°40'$ a $57°45'$.

9. Některé dvojice trojúhelníků z obrázku jsou podobné. Najděte je, jejich podobnost zdůvodněte a zapište pomocí znaku $\sim$:

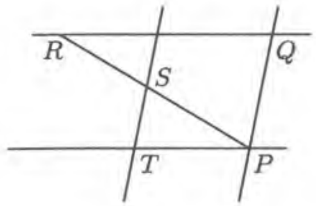


10. V trojúhelníku ABC jsou vnitřní úhly $\alpha = 43°20'$ a $\beta = 56°40'$. Rozhodněte, zda platí $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, je-li

a) $|\sphericalangle XZY| = 80°$ a $|\sphericalangle XYZ| = 56°40'$,

b) $|\sphericalangle ZXY| = 43°20'$ a velikost vnějšího úhlu trojúhelníku XYZ při vrcholu Y je $143°20'$.

11. Zjistěte, zda jsou podobné trojúhelníky TPS a PQR z obrázku. Přímky PT a RQ jsou rovnoběžné, přímky ST a PQ jsou rovnoběžné. Pokud ano, zapište podobnost pomocí znaku $\sim$.



12. V trojúhelníku PQR je na straně PR zvolen bod M tak, že $|PM| = \frac{3}{4} \cdot |PR|$, a na straně PQ bod N tak, že $|QN| = \frac{1}{4} \cdot |PQ|$. Dokažte, že $MN \parallel QR$.

13. V trojúhelníku LMO je bod X vnitřním bodem strany OM a bod Y je vnitřním bodem strany LM. Dále platí $|XM| = 18\,\mathrm{cm}$, $|YM| = 21\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 35\,\mathrm{cm}$, $|OL| = 48\,\mathrm{cm}$ a $XY \parallel OL$. Vypočtěte délky úseček OM a XY.

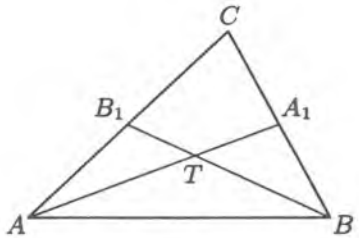
14. V rovnoramenném trojúhelníku CDE je bod X patou kolmice vedené středem S ramena CE k základně CD. Vysvětlete, proč bod X dělí základnu CD v poměru $1:3$.

15. Trojúhelník KLM je podobný trojúhelníku TUV s koeficientem podobnosti 2,5. Vypočtěte obsah trojúhelníku KLM, je-li obsah trojúhelníku TUV roven $4{,}8\,\mathrm{cm}^2$.

16. Pro trojúhelníky ABC a XYZ platí $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, $|BC| = 7\,\mathrm{cm}$, $|YZ| = 9{,}8\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte výšku v_a ke straně BC trojúhelníku ABC a výšku v_x ke straně YZ trojúhelníku XYZ, víte-li, že trojúhelník ABC má obsah $8{,}75\,\mathrm{cm}^2$.

∗17. Trojúhelník ABC má obsah $18\,\mathrm{cm}^2$, obsah trojúhelníku PQR je $25{,}92\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte délku strany BC trojúhelníku ABC, jestliže platí $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ a $|QR| = 9{,}6\,\mathrm{cm}$.

∗18. Užitím podobnosti dokažte, že těžiště trojúhelníku dělí těžnici v poměru $2:1$. Známé vlastnosti střední příčky dokazovat nemusíte.

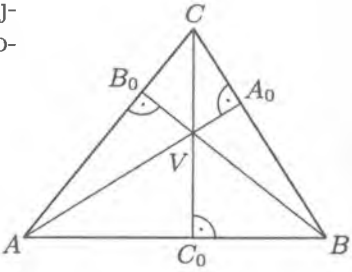


∗19. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je vedena z bodu X, který dělí odvěsnu AC v poměru $1:3$, kolmice k přeponě AB. Její patu označme Y. Určete délky stran trojúhelníku ABC, jestliže $|XY| = 1\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$. Najděte obě možné odpovědi.

20. Výšky AA_0, BB_0, CC_0 ostroúhlého trojúhelníku ABC se protínají v bodě V. Dokažte, že platí:

a) $\triangle AC_0V \sim \triangle CA_0V$

b) $\triangle CVA_0 \sim \triangle CBC_0$



***21.** Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2 : 3$, nejkratší strana BC měří 1 cm. V jakém poměru dělí nejdelší stranu AB pata výšky z vrcholu C?

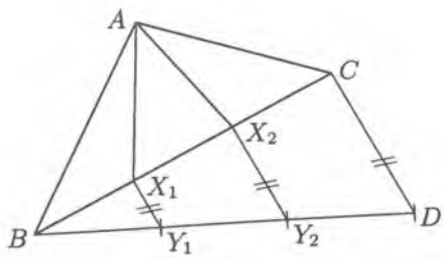
22. Narýsujte úsečku PQ délky d a pak ji (bez výpočtu) rozdělte na n stejných dílů, je-li:

a) $d = 5{,}6\,\text{cm}$, $n = 3$ b) $d = 7{,}8\,\text{cm}$, $n = 6$

c) $d = 9\,\text{cm}$, $n = 7$ d) $d = 11\,\text{cm}$, $n = 9$

23. Narýsujte lomenou čáru $RSTU$ podobnou lomené čáře na obrázku. Každou z úseček RS, ST a TU rozdělte na 3 stejné díly. (Rozdělení jedné úsečky lze výhodně využít při dělení ostatních dvou úseček.)

24. Vysvětlete, proč trojúhelníky ABX_1, AX_1X_2 a AX_2C mají stejné obsahy, víte-li, že body Y_1 a Y_2 dělí úsečku BD na tři stejné díly a že úsečky X_1Y_1, X_2Y_2 a CD jsou rovnoběžné.



25. Úsečku FG délky 11 cm rozdělte na dvě části v poměru

a) $1:7$, b) $3:2$, c) $7:3$.

26. Úsečku AB délky 11 cm rozdělte na tři úsečky tak, aby jejich délky byly v poměru $1:5:3$.

27. Na dané úsečce KL určete body X a Y tak, aby platilo

$$|KX| : |XY| : |YL| = 7 : 3 : 4.$$

Najděte obě řešení.

***28.** Pro daná přirozená čísla a, b, c lze na úsečce KL dvěma způsoby umístit body X a Y tak, že platí $|KX| : |XY| : |YL| = a : b : c$. Jakou podmínku taková čísla a, b, c splňují?

29. Je dána úsečka EF délky 7 cm. Sestrojte úsečku EG (s krajním bodem G na polopřímce EF), jejíž délka je rovna

a) $\frac{7}{8}$ délky úsečky EF, b) $\frac{4}{3}$ délky úsečky EF.

30. Narýsujte libovolný rovnoramenný trojúhelník. Pak sestrojte jemu podobný trojúhelník s koeficientem podobnosti $\frac{4}{3}$.

31. Narýsujte libovolnou úsečku UV. Sestrojte nějaký rovnostranný trojúhelník XYZ, jehož strana má délku rovnou $\frac{5}{6}$ délky úsečky UV a který je osově souměrný podle přímky UV.

32. Narýsujte pravidelný šestiúhelník se stranou o délce 2,3 cm. Pak sestrojte jemu podobný šestiúhelník s koeficientem podobnosti $\frac{9}{7}$, aniž vypočtete délku jeho strany.

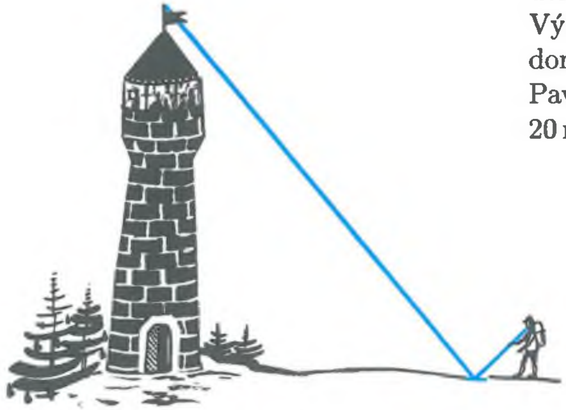
33. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže je dáno $b = 6$ cm, $a = 3$ cm, $\gamma = 50°$. Pak na polopřímce CB sestrojte bod D tak, aby platilo $\triangle ACB \sim \triangle DCA$.

34. V okamžiku, kdy stín metrové tyče měří 120 cm, je stín stromu dlouhý 22 m.

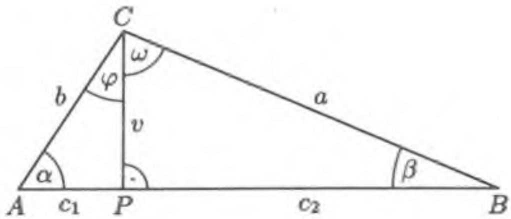
a) Vypočtěte výšku stromu.

b) Jak dlouhý byl stín stromu ve chvíli, kdy stín tyče měřil 80 cm?

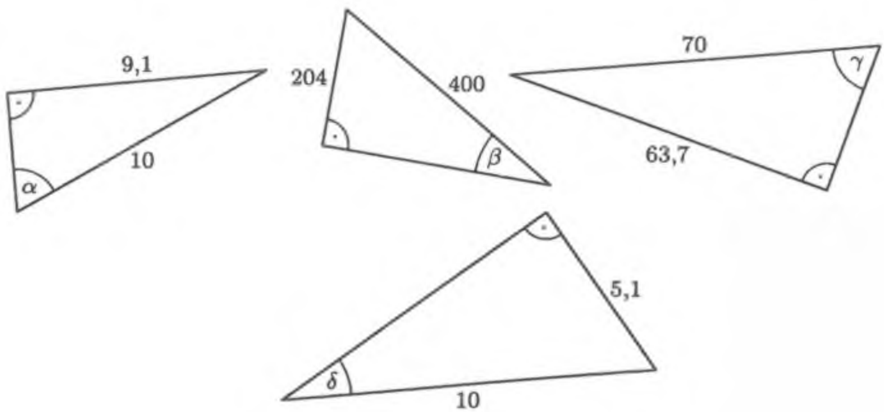
■ **35.** Jak daleko od svých nohou musel Pavel umístit zrcátko, aby v něm uviděl vrchol věže vysoké 12 m? Výška Pavlových očí nad vodorovnou rovinou je 160 cm, Pavel je od věže vzdálen 20 m.



36. V trojúhelníku ABC s ostrými vnitřními úhly α a β je sestrojena výška CP ke straně AB. Pomocí délek stran trojúhelníků APC a BPC zapište siny úhlů α, β, ω a φ. (Strany i úhly jsou označeny na obrázku.)



37. Pomocí funkce sinus zjistěte, zda jsou shodné některé z úhlů α, β, γ, δ v trojúhelnících na obrázku. (Připsaná čísla vyjadřující délky dvou stran jsou vždy ve stejných jednotkách.)



38. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte potřebné délky a určete s přesností na setiny $\sin\alpha$, je-li:

a) $\alpha = 65°$ b) $\alpha = 13°$

39. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete velikost úhlu ω, je-li:

a) $\sin\alpha = 0{,}45$ b) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$

40. Z počítačového grafu funkce sinus vyčtěte přibližnou hodnotu $\sin\alpha$, je-li:

a) $\alpha = 25°$ b) $\alpha = 35°$ c) $\alpha = 45°$
d) $\alpha = 65°$ e) $\alpha = 75°$ f) $\alpha = 85°$

Výsledek zkontrolujte pomocí tabulek nebo kalkulačky.

41. Z počítačového grafu funkce sinus vyčtěte přibližnou hodnotu α, je-li:

a) $\sin\alpha = 0{,}3$ b) $\sin\alpha = 0{,}7$ c) $\sin\alpha = 0{,}8$

Výsledek zkontrolujte pomocí tabulek nebo kalkulačky.

□ **42.** Na displeji kalkulačky je zobrazen $\sin 42°$:

Z tabulek jsme zjistili, že pro některých šest úhlů platí:

$$\sin\alpha = 0{,}8290,\quad \sin\beta = 0{,}6713,\quad \sin\gamma = 0{,}5925,$$
$$\sin\delta = 0{,}6494,\quad \sin\omega = 0{,}6561,\quad \sin\varphi = 0{,}6670$$

Každý z těchto úhlů porovnejte s úhlem o velikosti 42°, aniž byste jeho velikost zjišťovali.

43. Doplňte tabulku:

α	5°40′	11°30′	29°50′	30°10′	71°50′	88°50′
$\sin\alpha$						

44. Najděte v tabulkách nebo na kalkulačce velikost úhlu φ z rovnosti

a) $\sin\varphi = 0{,}7112$, b) $\sin\varphi = 0{,}9967$, c) $\sin\varphi = 0{,}2672$.

45. Sestrojte (bez použití úhloměru, pomocí tabulkové hodnoty sinu zaokrouhlené na setiny) úhel β o velikosti co nejbližší

a) 21°, b) 42°, c) 64°.

46. Pro pravoúhlý trojúhelník XYZ s přeponou XY zapište kosiny obou ostrých vnitřních úhlů jako poměry délek jeho stran.

47. Doplňte tabulku:

α	17°	73°					
$\sin\alpha$			0,484 8	0,874 6		0,998 6	
$\cos\alpha$					0,034 9		0,997 6

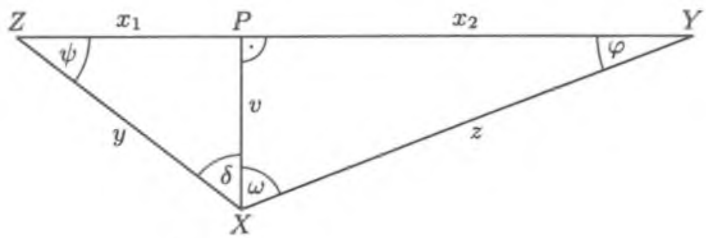
48. Ostré úhly z následujících rovností uspořádejte od nejmenšího k největšímu, aniž byste zjišťovali jejich velikosti:

$$\cos\alpha = 0{,}894\,9, \quad \cos\beta = 0{,}517\,5, \quad \cos\gamma = 0{,}765\,4,$$
$$\cos\delta = 0{,}162\,2, \quad \cos\omega = 0{,}058\,1, \quad \cos\varphi = 0{,}667\,8$$

49. Sestrojte (bez použití úhloměru, pomocí tabulkové hodnoty kosinu zaokrouhlené na setiny) úhel ω o velikosti co nejbližší

a) 64°, b) 32°, c) 16°.

50. V trojúhelníku XYZ s ostrými vnitřními úhly při vrcholech Y a Z je sestrojena výška XP ke straně YZ. Pomocí délek stran trojúhelníků ZPX a YPX zapište tangens úhlů δ, ω, φ a ψ. (Strany i úhly jsou označeny na obrázku.)



51. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník a označte jeho ostré vnitřní úhly δ a ω. Měřením délek stran trojúhelníku, výpočtem a užitím tabulek hodnot tangens zjistěte velikosti úhlů δ a ω. Výsledky zkontrolujte úhloměrem.

52. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete velikost úhlu β, je-li $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$.

53. Aniž byste zjišťovali jejich velikosti, uspořádejte úhly α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 a α_6 od nejmenšího k největšímu, víte-li, že

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 3{,}867, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = 5{,}671, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = 0{,}844,$$
$$\operatorname{tg}\alpha_4 = 11{,}826, \quad \operatorname{tg}\alpha_5 = 0{,}629, \quad \operatorname{tg}\alpha_6 = 4{,}511.$$

54. Doplňte tabulku:

ω	7°	38°	62°40′	87°			
$\sin\omega$					0,994 2		
$\operatorname{tg}\omega$						0,994 2	9,514

55. Narýsujte libovolný pravoúhlý trojúhelník s ostrým úhlem $\varphi = 32°$. Měřením délek stran trojúhelníku a výpočtem určete $\operatorname{cotg}\varphi$ a $\operatorname{cotg}(90° - \varphi)$. Své výsledky porovnejte s údaji z tabulek nebo displeje kalkulačky.

56. Na displeji kalkulačky je zobrazena hodnota $\operatorname{cotg} 49°$:

Z tabulek víme, že pro některých šest úhlů platí:

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = 1{,}732, \quad \operatorname{cotg}\alpha_2 = 0{,}864\,2, \quad \operatorname{cotg}\alpha_3 = 0{,}914\,2,$$
$$\operatorname{cotg}\alpha_4 = 343{,}77, \quad \operatorname{cotg}\alpha_5 = 0{,}581\,2, \quad \operatorname{cotg}\alpha_6 = 0{,}874\,4$$

Každý z těchto úhlů porovnejte s úhlem o velikosti 49°, aniž byste jeho velikost zjišťovali.

57. Je dán pravoúhlý trojúhelník PQR s přeponou PQ a ostrým vnitřním úhlem ψ při vrcholu P. Zapište $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\operatorname{tg}\psi$ a $\operatorname{cotg}\psi$ pomocí poměrů stran trojúhelníku PQR.

58. Narýsujte vhodný trojúhelník, změřte jeho strany a určete přibližné hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$, je-li

a) $\alpha = 22°$, b) $\alpha = 48°$, c) $\alpha = 68°$.

59. Bez pomoci tabulek a kalkulačky, jen rýsováním a měřením, určete přibližnou velikost úhlu ω, je-li:

a) $\sin\omega = 0{,}56$ b) $\cos\omega = 0{,}56$
c) $\operatorname{tg}\omega = 1{,}6$ d) $\operatorname{cotg}\omega = 1{,}6$

60. Doplňte následující tabulku za podmínky, že $\alpha + \beta = 90°$:

α	$54°$				
β		$54°$			
$\sin\alpha$			0,642 8		
$\cos\alpha$				0,139 2	
$\mathrm{tg}\,\alpha$					0,424 5
$\mathrm{cotg}\,\alpha$					

61. Rozšiřte na zlomek bez odmocniny ve jmenovateli:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{8}}$ c) $\dfrac{3}{4\cdot\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{9}{2\cdot\sqrt{6}}$

$*$**62.** Rozšiřte na zlomek bez odmocniny ve jmenovateli:

a) $\dfrac{2}{3-\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

□**63.** Do rámečku doplňte správné značky funkcí:

a) $\sin\alpha = \boxed{}\,(90° - \alpha)$ b) $\boxed{}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,(90° - \alpha)$

c) $\boxed{}\,\alpha = \sin\,(90° - \alpha)$ d) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \boxed{}\,(90° - \alpha)$

64. Pomocí tabulky hodnot funkce sinus určete:

a) $\cos 67°$ b) $\cos 14°$ c) $\cos 41°20'$

d) $\cos 12°40'$ e) $\cos 2°$ f) $\cos 88°$

65. Pomocí tabulky hodnot funkce tangens určete:

a) $\mathrm{cotg}\,23°$ b) $\mathrm{cotg}\,14°30'$ c) $\mathrm{cotg}\,72°40'$

66. Bez použití tabulek a kalkulačky uspořádejte od nejmenšího k největšímu čísla:

a) $\sin 12°$, $\cos 13°$, $\cos 14°$, $\sin 15°$, $\cos 16°$, $\cos 17°$

b) $\mathrm{cotg}\,70°$, $\mathrm{cotg}\,60°$, $\mathrm{tg}\,50°$, $\mathrm{tg}\,40°$, $\mathrm{cotg}\,30°$

67. Vypočtěte hodnoty zbývajících tří goniometrických funkcí ostrého úhlu α, je-li dáno:

a) $\sin\alpha = 0{,}4$ b) $\cos\alpha = 0{,}9$

c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5$ d) $\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}25$

■ 68. Na displeji kalkulačky je přibližná hodnota $\operatorname{tg} 76°$:

Ze vzorců

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{a} \quad \sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$$

vypočtěte co nejpřesněji (jak vám vaše kalkulačka umožní) čísla $\sin 76°$, $\cos 76°$, $\sin 14°$ a $\cos 14°$. Ta pak porovnejte s hodnotami získanými na kalkulačce pomocí tlačítek $\boxed{\sin}$ a $\boxed{\cos}$.

69. Bez tabulek a kalkulačky vypočtěte součin:

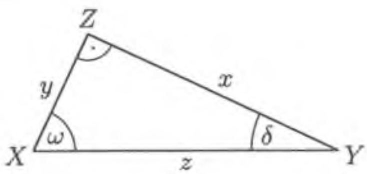
$$\operatorname{tg} 10° \cdot \operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 70° \cdot \operatorname{tg} 80°$$

70. Čemu se rovná $\operatorname{tg} \alpha$, když je to čtvrtina $\operatorname{cotg} \alpha$?

71. Určete velikosti ostrých vnitřních úhlů v pravoúhlém trojúhelníku, jehož délky stran (v daných jednotkách) udávají pythagorejské trojice čísel

a) 9, 40 a 41,
b) 6, 8 a 10,
c) 16, 30 a 34,
d) 11, 60 a 61.

72. Na obrázku je pravoúhlý trojúhelník XYZ s délkami stran x, y, z a ostrými úhly ω a δ.



Vypočtěte délky ostatních stran a velikosti zbývajících ostrých vnitřních úhlů, je-li dáno:

a) $y = 4{,}8\,\text{dm}$, $z = 5\,\text{dm}$
b) $x = 2\,\text{dm}$, $\omega = 54°$
c) $x = 7\,\text{cm}$, $\delta = 16°$
d) $z = 1\,\text{m}$, $\delta = 8°$
e) $z = 3\,\text{dm}$, $\omega = 25°$
f) $x = 17\,\text{cm}$, $y = 14{,}4\,\text{cm}$
g) $y = 10\,\text{cm}$, $\omega = 81°$
h) $y = 8\,\text{cm}$, $\delta = 38°$

73. V pravoúhlém trojúhelníku KLM s pravým úhlem při vrcholu M je $|KM| = 3\,\text{cm}$, $|\sphericalangle KLM| = 28°$. Vypočtěte poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané.

74. Vypočtěte obvod a obsah pravoúhlého trojúhelníku PQR s přeponou PQ délky 2 dm, je-li $|\sphericalangle RPQ| = 51°20'$.

75. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $v_c = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 82°$, $\beta = 50°$

b) $v_b = 4{,}4\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $\gamma = 38°$, $\triangle ABC$ je ostroúhlý

c) $v_a = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 95°$, $\beta = 30°$

76. Délky stran trojúhelníku KLM jsou v poměru 8 : 15 : 17. Rozhodněte, zda je trojúhelník KLM pravoúhlý. Pokud ano, vypočtěte velikosti jeho ostrých vnitřních úhlů.

77. Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož výška k základně měří 9,6 cm a jehož rameno svírá se základnou úhel 41°.

78. Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož výška k základně měří 9,6 cm a jehož úhel při hlavním vrcholu má velikost 54°.

***79.** Vypočtěte poloměry kružnice opsané a kružnice vepsané rovnoramennému trojúhelníku ABC se základnou AB, je-li $\gamma = 100°$ a $|BC| = 10\,\text{cm}$.

80. Úhlopříčky obdélníku, které mají délku 12 cm, svírají ostrý úhel 62°. Vypočtěte rozměry obdélníku.

***81.** Vypočtěte velikost tupého úhlu, který svírají úhlopříčky obdélníku, jehož obvod je 26 cm a obsah 40 cm^2.

82. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů kosočtverce $PQRS$, je-li dáno:

a) $|PQ| = 4{,}2\,\text{cm}$, $|QS| = 3{,}9\,\text{cm}$

b) $|PQ| = 7\,\text{cm}$, $|PR| = 9\,\text{cm}$

83. Vypočtěte délky úhlopříček a obsah kosočtverce o straně 10 cm, jehož kratší úhlopříčka svírá se stranou úhel 65°.

84. Dokažte, že pro obsah S kosočtverce o straně a a ostrém vnitřním úhlu α platí vzorec $S = a^2 \cdot \sin\alpha$.

85. Vypočtěte poloměr kružnice, ve které středovému úhlu o velikosti 144° přísluší tětiva délky 11 cm.

86. Tečny vedené z bodu A ke kružnici $k(S; r)$ svírají úhel $106°$. Vypočtěte poloměr r, je-li $|AS| = 275\,\mathrm{mm}$.

∗87. V trojúhelníku ABC je dáno: $\alpha = 116°$, $a = 9\,\mathrm{cm}$, $v_b = 6\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte délky zbývajících stran i velikosti ostatních vnitřních úhlů.

88. Vypočtěte obsah rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD, je-li $|AB| = 14\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 10\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 70°$.

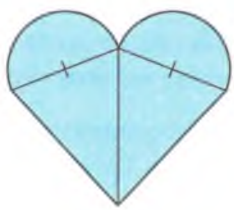
∗89. Na kružnici s průměrem KL dlouhým $15\,\mathrm{cm}$ leží body X a Y v opačných polorovinách s hraniční přímkou KL, přičemž platí $|\sphericalangle YKL| = |\sphericalangle XKL| = 37°$. Vypočtěte obsah čtyřúhelníku $KYLX$.

∗90. Na kružnici $k(S; 10\,\mathrm{cm})$ leží tři různé body X, Y, Z tak, že bod Y leží na kratším z obou oblouků s krajními body X a Z. Vypočtěte délku tětivy XZ, je-li $|XY| = 11{,}4\,\mathrm{cm}$ a $|YZ| = 6{,}2\,\mathrm{cm}$.

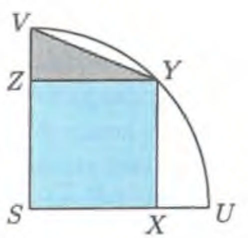
∗91. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je sestrojen střed A_1 strany BC. Vypočtěte jeho obsah, je-li $|AA_1| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|\sphericalangle CAA_1| = 40°$.

92. Vypočtěte obvod a obsah pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru $13\,\mathrm{cm}$.

■93. Vypočtěte obvod a obsah obrazce tvaru srdce z obrázku. Obrazec je složen ze dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků a půlkruhů nad jejich základnami. Ramena trojúhelníků měří $12\,\mathrm{cm}$ a úhly při hlavních vrcholech mají velikost $43°$.



94. Do čtvrtkruhu omezeného obloukem UV kružnice se středem S je vepsán čtverec $SXYZ$ a trojúhelník ZYV jako na obrázku. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ZYV.



■ **95.** Šikmá věž v Pise je vysoká 55 m. Jak se její vrchol nakláněl, odchýlil se od původního místa o 4,6 m. O jaký úhel to bylo, když původně stála věž svisle?

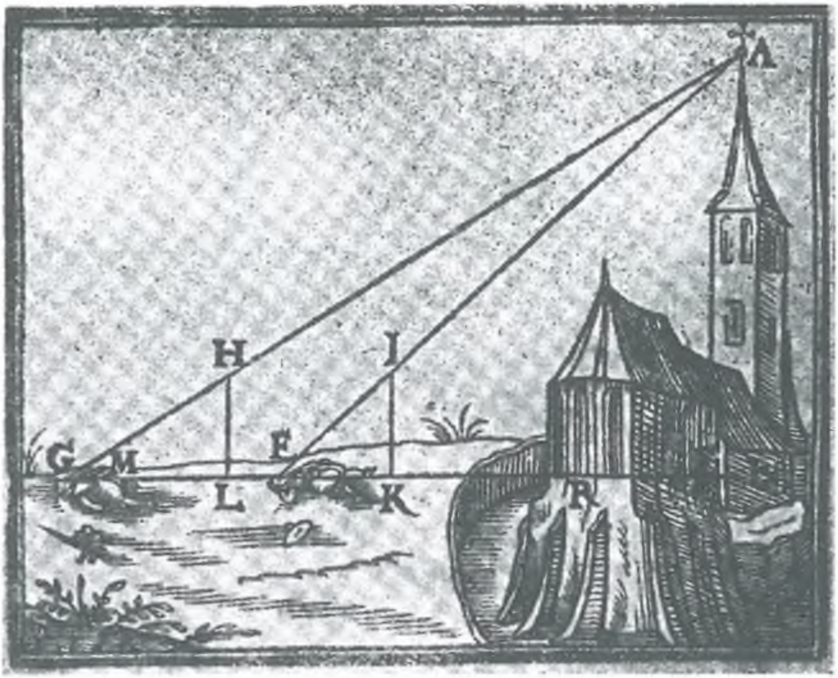
96. Značka u železniční trati upozorňuje strojvůdce na klesání 12 ‰ na úseku trati délky 750 m (měřeno na mapě). Pod jakým úhlem v tomto úseku trať klesá?

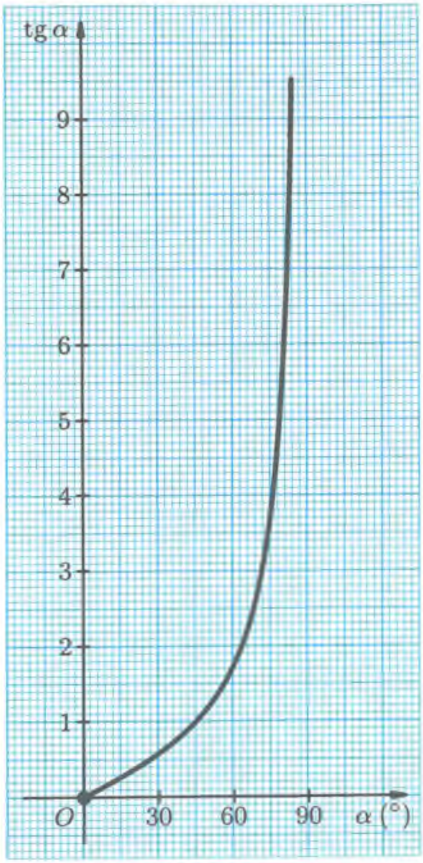
97. Na meteorologické stanici je na laně dlouhém 150 m upoután balon. V jaké výšce se balon vznáší, svírá-li napnuté lano s vodorovnou rovinou úhel 74°?

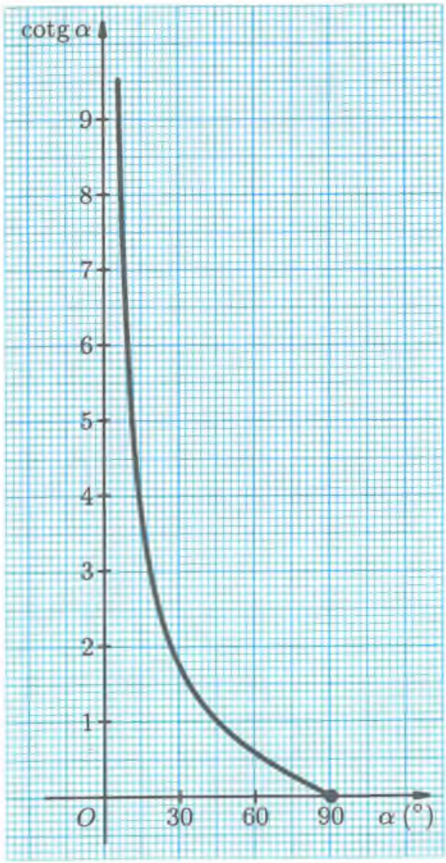
98. Pětimetrový žebřík je opřen o svislou stěnu tak, že se jeho konec dotýká země ve vzdálenosti 120 cm od stěny. Je postaven bezpečně? (Žebřík je postaven bezpečně, pokud úhel, který svírá s vodorovnou rovinou, není větší než 70°.)

99. Těleso spočívá na nakloněné rovině a působí na ni tlakovou silou o velikosti 70 N. Určete, jaký úhel svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou, jestliže na těleso působí tíhová síla o velikosti 100 N.

■∗ **100.** V knize *Geometria practica* z r. 1617 rozebírá autor *Daniel Schwenter* řadu měřičských úloh, při kterých lze využít podobnost trojúhelníků. Patří k nim i úloha o určení výšky věže AB s nepřístupnou patou B řešená dvojím zaměřením vrcholu věže A touž tyčí, která je postupně umístěna ve dvou svislých polohách IK a HL. Ve Schwenterově výkladu je délka tyče 18 střevíců, při jednom zaměření je oko E pozorovatele vzdáleno 19 střevíců od dolního konce K tyče, při druhém zaměření je shodný úsek ML délky 19 střevíců nutné prodloužit o další úsek GM délky 10 střevíců; konečně úsek LE má délku 9,5 střevíce. Vypočtěte výšku věže a vzdálenost její paty od bodu G.


A
H
I
G
M
F
L
K
R


tg α
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
30
60
90
α (°)


cotg α
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
30
60
90
α (°)

VÝSLEDKY PRŮBĚŽNÝCH ÚKOLŮ

1 Podobnost útvarů

1. Předpokládejme, že $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$. Pro střed X_1 strany A_1B_1 platí $|A_1X_1| = |X_1B_1|$. Pro jemu odpovídající bod X_2 strany A_2B_2 trojúhelníku $A_2B_2C_2$ platí $|A_2X_2| = |A_1X_1|$ a $|X_2B_2| = |X_1B_1|$, takže $|A_2X_2| = |X_2B_2|$ a bod X_2 je střed strany A_2B_2. Proto jsou odpovídající si těžnice C_1X_1 a C_2X_2 shodné. **2.** Předpokládejme, že $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$. Pro střed S_1 kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ platí $|A_1S_1| = |B_1S_1| = |C_1S_1|$. Pro jemu odpovídající bod S_2 trojúhelníku $A_2B_2C_2$ platí $|A_2S_2| = |A_1S_1|$, $|B_2S_2| = |B_1S_1|$ a $|C_2S_2| = |C_1S_1|$, takže $|A_2S_2| = |B_2S_2| = |C_2S_2|$. Bod S_2 je proto středem kružnice opsané trojúhelníku $A_2B_2C_2$. **3.** a) $|CD|$; b) $|GL|$; c) $|BA|$; d) $|HL|$. **4.** Ano. **5.** Např. a) obr. A-1; b) obr. A-2. **6.** a) $|ED|$; b) $|ML|$; c) $|NL|$; d) $|KM|$. **7.** a) Přímo; b) nepřímo. **8.** Ne, např. obr. A-3.

2 Podobné trojúhelníky

2. 15 cm, 21 cm a 24 cm. **3.** $|\sphericalangle MNO| = 42°$, $|\sphericalangle NOM| = 54°$, $|\sphericalangle OMN| = 84°$. **4.** $|AB| = 3{,}6$ cm, $|BC| = 4{,}8$ cm. **5.** a) 6 cm a 7,5 cm; b) 15 cm a 24 cm. **6.** a) $\triangle KLM \sim \triangle ZYX$ podle věty *sss*; b) $\triangle KLM \sim \triangle YZX$ podle věty *sus*; c) $\triangle KLM \sim \triangle YXZ$ podle věty *uu*. **7.** a) $\triangle ABC \sim \triangle MLK$ podle věty *sus*; b) $\triangle IJK \sim \triangle NOM$ podle věty *sss*; c) $\triangle XYZ \sim \triangle STR$ podle věty *uu*. **8.** Podle věty *uu* (využijte např. shodných souhlasných úhlů PTU a PQR). **9.** 3 : 5. **10.** $\triangle AVD \sim \triangle CVB$ podle věty *sus*, úhly VBC a VDA si v těchto podobných trojúhelnících odpovídají. **11.** $|CX| = 6{,}9$ cm, $|CY| = 6$ cm. **12.** a) $\triangle TUV \sim \triangle ZYX$ podle věty *uu*; b) $\triangle TUV \sim \triangle ZYX$ podle věty *sus*; c) $\triangle TUV \sim \triangle YZX$ podle věty *uu*. **13.** a) Oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a mají společný vnitřní úhel při vrcholu R, proto jsou podobné podle věty *uu*; b) plyne z podobnosti dokázané v části a). **14.** 9 cm^2. **15.** Všechny. **16.** Podle věty *uu*. **17.** Z úměry $r_1 : z_1 = r_2 : z_2$ plyne $r_1 : r_2 = z_1 : z_2$, proto jsou oba trojúhelníky podobné podle věty *sss*.

3 Užití podobnosti

1. Např. obr. A-4. **2.** Např. a) obr. A-5; b) obr. A-6; c) obr. A-7. **3.** Např. a) obr. A-8; b) obr. A-9. **4.** Např. a) obr. A-10; b) obr. A-11. **5.** Např. obr. A-12. Leží-li bod X blíže bodu A než bod Y, rozdělíme úsečku AB na 5 stejných dílů. Leží-li bod Y blíže bodu A než bod X, rozdělíme úsečku AB na 3 stejné díly. **6.** Např. a) obr. A-13; b) obr. A-14. **7.** Např. a) obr. A-15; b) obr. A-16. **8.** Např. a) obr. A-17; b) obr. A-18. **9.** Např. a) obr. A-19; b) obr. A-20. **11.** Např. obr. A-21. **12.** Např. obr. A-22. **13.** Např. obr. A-23. **14.** Např. obr. A-24. **15.** Výška stromu je 14 m. **16.** Obě místa jsou vzdálena 175 m.

4 Sinus ostrého úhlu

1. $\sin\delta = \dfrac{d}{f}$, $\sin\varepsilon = \dfrac{e}{f}$. **2.** a) $\sin\varphi = \dfrac{x}{z}$; b) $\sin\varphi = \dfrac{|KL|}{|ML|}$. **3.** a) Asi 0,71; b) asi 0,95. **4.** a) Asi 17°; b) asi 53°. **5.** a) Asi 0,26; b) asi 0,82. **6.** a) Asi 24°; b) asi 37°. **7.** a) Asi 0,505; b) asi 0,3827; c) asi 0,9899; d) asi 0,866. **8.** a) Asi 0,2108; b) asi 0,4617; c) asi 0,848; d) asi 0,9853. **9.** a) Asi 11°40′; b) asi 22°50′; c) asi 37°50′; d) asi 70°30′. **10.** a) $\beta \doteq 5°40'$; b) $\gamma \doteq 19°30'$; c) $\delta \doteq 48°40'$; d) $\varepsilon \doteq 59°$.

5 Kosinus ostrého úhlu

1. $\cos\varepsilon = \frac{f}{d}$, $\cos\varphi = \frac{e}{d}$. **2.** a) $\cos\psi = \frac{x}{y}$; b) $\cos\psi = \frac{|PR|}{|PQ|}$. **3.** a) Asi 0,71; b) asi 0,89. **4.** a) Asi 0,91; b) asi 0,42. **5.** a) Asi 66°; b) asi 53°. **6.** a) Asi 0,863 1; b) asi 0,923 9; c) asi 0,142 1; d) asi 0,497 6. **7.** a) Asi 0,977 5; b) asi 0,887; c) asi 0,529 9; d) asi 0,170 8. **8.** a) Asi 37°; b) asi 60°. **9.** a) Asi 69°10′; b) asi 38°20′; c) asi 26°; d) asi 65°50′. **10.** a) $\alpha \doteq 78°30'$; b) $\alpha \doteq 48°10'$; c) $\alpha \doteq 75°30'$; d) $\alpha \doteq 51°20'$.

6 Tangens a kotangens ostrého úhlu

1. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{z}$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{z}{y}$. **2.** a) $\operatorname{tg}\varrho = \frac{r}{q}$; b) $\operatorname{tg}\varrho = \frac{|ST|}{|RS|}$. **3.** a) Asi 0,7; b) asi 0,27. **4.** a) Asi 0,47; b) asi 1,43. **5.** a) Asi 35°; b) asi 56°. **6.** a) Asi 0,700 2; b) asi 0,221 7; c) asi 3,047; d) asi 5,871. **7.** a) Asi 0,407 4; b) asi 0,762 7; c) asi 1,03; d) asi 1,894. **8.** a) Asi 34°; b) asi 56°. **9.** a) Asi 20°10′; b) asi 44°; c) asi 60°30′; d) asi 74°30′. **10.** a) $\alpha \doteq 26°30'$; b) $\alpha \doteq 53°10'$; c) $\alpha \doteq 51°20'$; d) $\alpha \doteq 36°50'$. **11.** $\operatorname{cotg}\varrho = \frac{|ED|}{|EF|}$, $\operatorname{cotg}\omega = \frac{|EF|}{|ED|}$. **12.** a) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y}$; b) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{|KI|}{|IJ|}$. **13.** a) Asi 1,43; b) asi 0,47. **14.** a) Asi 59°; b) asi 29°. **15.** a) Asi 3,732; b) asi 2,414; c) asi 0,546 7; d) asi 0,128 7. **16.** a) Asi 4,449; b) asi 1,632; c) asi 1,012; d) asi 0,137 6. **17.** a) Asi 56°; b) asi 34°. **18.** a) Asi 69°50′; b) asi 46°; c) asi 29°30′; d) asi 15°30′. **19.** a) $\alpha \doteq 30°30'$; b) $\alpha \doteq 78°40'$; c) $\alpha \doteq 21°50'$; d) $\alpha \doteq 23°10'$.

7 Vztahy mezi funkcemi úhlů

1. a) $\alpha = 75°$; b) $\alpha = 38°$; c) $\alpha = 66°$; d) $\alpha = 85°$. **2.** a) $\sin 42°12' < \cos 47°47'$; b) $\cos 26°25' < \sin 63°37'$; c) $\operatorname{tg} 44°56' > \operatorname{cotg} 45°7'$; d) $\operatorname{cotg} 77°7' > \operatorname{tg} 12°12'$. **3.** Protože $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$. **4.** a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1. **5.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; d) $\frac{\sqrt{15}}{9}$. **6.** a) $\cos\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = 2\cdot\sqrt{2}$; b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7\cdot\sqrt{51}}{51}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$. **7.** a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$; b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$. **8.** a) $\sin\alpha = \frac{5\cdot\sqrt{34}}{34}$, $\cos\alpha = \frac{3\cdot\sqrt{34}}{34}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$. **9.** a) $\sin\alpha = \frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$; b) $\sin\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\cdot\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. **10.** a) 1; b) 0.

8 Řešení úloh o trojúhelníku

1. $|\sphericalangle SRT| \doteq 38°40'$, $|\sphericalangle RST| \doteq 51°20'$. **2.** Asi 116°. **3.** Asi 27°10′, asi 62°50′. **4.** $\alpha \doteq 73°40'$, $\beta \doteq 16°20'$, $b \doteq 7{,}3$ cm. **5.** Asi 43°40′ a asi 136°20′. **6.** Asi 26°50′. **7.** Poloměr kružnice opsané je asi 2,6 cm, poloměr kružnice vepsané asi 2,1 cm. **8.** Výškový rozdíl je asi 409 m. **9.** Pozorovatel je vzdálen asi 54 m. **10.** Trať stoupá pod úhlem o velikosti asi 50′. **11.** $|G_1| = 0$, $|G_2| = |G|$, těleso volně padá k zemi. **12.** Asi 120 N. **13.** Síla, která napíná lano, má velikost asi 64 N.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Cvičení 1

1. $\triangle SCZ \cong \triangle SBZ$, $\triangle SAX \cong \triangle SBX$. **2.** a) $|PS|$; b) $|RQ|$; c) $|UQ|$; d) $|DE|$. **3.** a) RT, AB; b) AB, RT. **4.** a) 8 cm; b) 1 cm; c) 6 cm. **5.** a) $k = \frac{1}{2}$; b) $k = \frac{1}{2}$; c) $k = 2$; d) $k = \frac{1}{2}$. **6.** a) $|FG|$; b) $|EG|$; c) $|HG|$; d) $|EH|$. **7.** $|\sphericalangle PMN| = |\sphericalangle NOP| = 78°$, $|\sphericalangle MNO| = |\sphericalangle OPM| = 102°$. **8.** a) Ano; b) ano; c) ano. **9.** Obr. B-1. **10.** a) Ano, shodné obdélníky; b) ne.

Cvičení 2

1. 16,5 cm, 20 cm a 26 cm. **2.** 2,2 cm, 3 cm a 4 cm. **3.** $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 3$ cm. **4.** $|\sphericalangle RPQ| = 20°$, $|\sphericalangle PQR| = 120°$, $|\sphericalangle QRP| = 40°$. **5.** a) $|PQ| = 24$ cm, $|QR| = 16$ cm, $|SU| = 20$ cm; b) $|PQ| = 37{,}5$ cm, $|QR| = 25$ cm, $|SU| = 12{,}8$ cm. **6.** 4 cm, 5 cm a 6 cm. **7.** 67,5 cm^2. **8.** 6 cm. **9.** $\triangle KLM \sim \triangle EFD$ podle věty *sss*, $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ podle věty *sus*, $\triangle OST \sim \triangle PQR$ podle věty *uu*. **10.** a) $\triangle CDE \sim \triangle NMO$ podle věty *uu*; b) $\triangle CDE \sim \triangle MNO$ podle věty *sss*; c) $\triangle CDE \sim \triangle MNO$ podle věty *sus*. **11.** $\triangle ABC \sim \triangle YBX$ podle věty *uu*, $|AY| : |AB| = 2 : 3$. **12.** $|AC| = 5{,}1$ cm, $|BD| = 6{,}6$ cm, $|CD| = 6{,}4$ cm. **13.** a) $\triangle KLM \sim \triangle MLX$ podle věty *uu*; b) $\triangle CDE \sim \triangle DFE$ a také $\triangle CDE \sim \triangle DEF$ podle věty *uu*. **14.** Oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a mají společný vnitřní úhel při vrcholu B. **15.** Podle věty *sus* je trojúhelník ABR podobný trojúhelníku PQR s koeficientem podobnosti $\frac{3}{5}$. Proto $|PQ| = \frac{5}{3} \cdot |AB|$. **16.** $\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \doteq 1{,}73\,\text{cm}^2$. **17.** Protože $\dfrac{|VB|}{|VC|} = \dfrac{|VC|}{|VA|} = \dfrac{3}{2}$, platí $\triangle VBC \sim \triangle VCA$ podle věty *sus*. **18.** $|PQ| = 6$ cm, $|RS| = 1{,}5$ cm. **20.** a) Ne; b) ano. **21.** $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ např. podle věty *sus*. **22.** $\triangle PRQ \sim \triangle ONM$ např. podle věty *sus*. **23.** $|AB| = 8$ cm, $|AC| = |BC| = 8{,}5$ cm. **24.** a) Platí $\triangle ABC \sim \triangle ACC_0$ podle věty *uu*. Proto $|AB| : |AC| = |AC| : |AC_0|$, a tedy $|AC|^2 = |AC_0| \cdot |AB|$. b) Platí $\triangle ABC \sim \triangle CBC_0$ podle věty *uu*. Proto $|AB| : |BC| = |BC| : |BC_0|$, a tedy $|BC|^2 = |BC_0| \cdot |AB|$.

Cvičení 3

1. Např. obr. B-2. **2.** Např. obr. B-3; 12 úseček; $3 \cdot (n-1)^2$ úseček. **3.** Ukážeme například, že $|AB| = 5 \cdot |AC_1|$. Z podobnosti trojúhelníků YAC_1 a YX_0X_1 plyne $\dfrac{|AC_1|}{|X_0X_1|} = \dfrac{|YA|}{|YX_0|}$, z podobnosti trojúhelníků YAB a YX_0X_5 pak $\dfrac{|AB|}{|X_0X_5|} = \dfrac{|YA|}{|YX_0|}$, proto $\dfrac{|AB|}{|X_0X_5|} = \dfrac{|AC_1|}{|X_0X_1|}$, tzn. $|AB| = \dfrac{|X_0X_5|}{|X_0X_1|} \cdot |AC_1|$. Podle konstrukce je $\dfrac{|X_0X_5|}{|X_0X_1|} = 5$, a tak $|AB| = 5 \cdot |AC_1|$. **4.** Např. obr. B-4. **5.** Např. a) obr. B-5; b) obr. B-6; c) obr. B-7; d) obr. B-8. **6.** Např. obr. B-9. **7.** Např. obr. B-10. Leží-li bod R blíže bodu D než bod Q, rozdělíme úsečku DE na 10 stejných dílů. Leží-li bod Q blíže bodu D než bod R, rozdělíme úsečku DE na 6 stejných dílů. **8.** Např. obr. B-11, $|AH| : |HO| : |OJ| = 3 : 2 : 4$. **9.** Např. obr. B-12. **10.** Např. obr. B-13. **11.** Např.

a) obr. B-14; b) obr. B-15. **12.** Např. a) obr. B-16; b) obr. B-17. **13.** Např. obr. B-18, a) obr. B-19; b) obr. B-20. **14.** Např. obr. B-21, 2 řešení. **15.** Např. obr. B-22. **16.** Např. obr. B-23. **17.** Např. obr. B-24. **18.** Např. obr. B-25. **19.** Výška domu je 9,6 m.

Cvičení 4

1. a) $\sin\delta = \dfrac{|KL|}{|KM|}$, $\sin\varepsilon = \dfrac{|ML|}{|KM|}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{|QR|}{|PQ|}$, $\sin\omega = \dfrac{|PR|}{|PQ|}$. **2.** a) Asi 0,36; b) asi 0,67; c) asi 0,89; d) asi 0,99. **3.** a) $\varepsilon \doteq 53°$; b) $\varepsilon \doteq 30°$; c) $\varepsilon \doteq 37°$. **4.** a) Asi 0,25; b) asi 0,48; c) asi 0,55; d) asi 0,92; e) asi 0; f) asi 0,01; g) asi 0,99; h) asi 1. **5.** a) $\omega \doteq 40°30'$; b) $\omega \doteq 48°30'$; c) $\omega \doteq 58°10'$; d) $\omega \doteq 71°40'$. **6.** Např. a) obr. B-26; b) obr. B-27; c) obr. B-28. **7.** a) $\sin\omega = \dfrac{|DE|}{|CD|}$, $\cos\omega = \dfrac{|CE|}{|CD|}$; b) $\sin\omega = \dfrac{|LM|}{|KL|}$, $\cos\omega = \dfrac{|KM|}{|KL|}$. **9.** Např. a) obr. B-29; b) obr. B-30; c) obr. B-31. **10.** a) 1,00; b) 0,92; c) 0,62; d) 0,01; e) 0,50; f) 0,50; g) 0,27; h) 0,27. **11.** a) $\delta \doteq 7°40'$; b) $\delta \doteq 89°10'$; c) $\delta \doteq 82°$; d) $\delta \doteq 8°$; e) $\delta \doteq 65°30'$; f) $\delta \doteq 65°30'$. **12.** Např. a) obr. B-32; b) obr. B-33; c) obr. B-34. **13.** První řádek: 56°40′, 17°10′; druhý řádek: 0,520 0; 0,295 0; třetí řádek: 0,854 2; 0,549 5.

Cvičení 5

1. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|CP|}{|AP|}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{|CP|}{|BP|}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|AP|}{|CP|}$, $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{|BP|}{|CP|}$. **2.** a) Asi 1,38; b) asi 1,60; c) asi 2,05. **3.** $\sin 35° \doteq 0{,}57$, $\cos 35° \doteq 0{,}82$, $\operatorname{tg} 35° \doteq 0{,}7$. **4.** $\operatorname{tg} 5° \doteq 0{,}09$, $\operatorname{tg} 10° \doteq 0{,}18$, $\operatorname{tg} 15° \doteq 0{,}27$, $\operatorname{tg} 20° \doteq 0{,}36$, $\operatorname{tg} 25° \doteq 0{,}47$, $\operatorname{tg} 30° \doteq 0{,}58$, $\operatorname{tg} 35° \doteq 0{,}70$, $\operatorname{tg} 40° \doteq 0{,}84$. **5.** a) Asi 1,206; b) asi 1,213; c) asi 1,220; d) asi 34,368; e) asi 38,188; f) asi 42,964. **6.** a) $\sin 13°20' \doteq 0{,}230\,6$, $\operatorname{tg} 13°20' \doteq 0{,}237$; b) $\sin 45°50' \doteq 0{,}717\,3$, $\operatorname{tg} 45°50' \doteq 1{,}03$; c) $\sin 85°20' \doteq 0{,}996\,7$, $\operatorname{tg} 85°20' \doteq 12{,}251$. **7.** a) Asi 37°; b) asi 49°; c) asi 41°. **8.** a) Asi 3°20′; b) asi 30°20′; c) asi 44°40′; d) asi 45°10′; e) asi 88°; f) asi 89°50′. **9.** a) tg; b) sin; c) cotg; d) cos. **10.** a) Asi 15,605; b) asi 1,842; c) asi 0,462 8; d) asi 0,017 5; e) asi 0,324 9; f) asi 0,324 9. **11.** a) Asi 42°; b) asi 59°; c) asi 31°. **12.** a) Asi 30°; b) asi 60°; c) asi 26°30′; d) asi 63°30′; e) asi 16°; f) asi 22°40′. **13.** První řádek: 57°, 10°, 45°, 80°; druhý řádek: 57°, 80°, 45°, 10°; třetí řádek: 0,544 6; 0,838 7; 0,173 6; 0,984 8; čtvrtý řádek: 0,838 7; 0,544 6; 0,707 1; 0,173 6; pátý řádek: 0,649 4; 1,54; 0,176 3; 1; 5,671; šestý řádek: 1,54; 0,649 4; 5,671; 1; 0,176 3. **14.** V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c platí $c > b$, proto $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b}$, a tak $\dfrac{a}{c} < \dfrac{a}{b}$, což znamená, že $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Cvičení 6

1. a) $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$; b) $3\cdot\sqrt{5}$; c) $\frac{2\cdot\sqrt{6}}{9}$; d) $\frac{2\cdot\sqrt{2}}{5}$. **2.** a) $\sqrt{2}-1$; b) $3+\sqrt{2}$; c) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$. **3.** a) $\dfrac{k}{m} = \sin\omega = \cos\delta$; b) $\dfrac{l}{k} = \operatorname{cotg}\omega = \operatorname{tg}\delta$; c) $\dfrac{k}{l} = \operatorname{tg}\omega = \operatorname{cotg}\delta$; d) $\dfrac{l}{m} = \cos\omega = \sin\delta$. **4.** a) $\varphi = 55°$; b) $\varphi = 62°$; c) $\varphi = 6°20'$; d) $\varphi = 65°50'$. **5.** $\operatorname{cotg} 82° < \operatorname{cotg} 71° < \operatorname{tg} 33° < \operatorname{tg} 69° < \operatorname{cotg} 18°$. **6.** a) 1; b) 1. **7.** $\sin\delta = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\delta = \frac{4}{3}$;

$\operatorname{cotg}\delta = \frac{3}{4}$. **8.** $\cos\omega = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\omega = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{cotg}\omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **9.** $\sin\psi = \frac{4\cdot\sqrt{17}}{17}$; $\cos\psi = \frac{\sqrt{17}}{17}$; $\operatorname{cotg}\psi = \frac{1}{4}$. **10.** $\sin 57°20' \doteq 0{,}84$; $\cos 57°20' \doteq 0{,}54$; $\operatorname{tg} 57°20' \doteq 1{,}56$; $\operatorname{cotg} 57°20' \doteq 0{,}64$. **11.** Např. $\sin 23° \doteq 0{,}390\,731\,128$; $\operatorname{tg} 23° \doteq 0{,}424\,474\,816$; $\sin 67° \doteq 0{,}920\,504\,853$; $\operatorname{tg} 67° \doteq 2{,}355\,852\,366$. **12.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{32}{3}$. **13.** Dané číslo $\frac{5\cdot\sqrt{6}}{12}$ je větší než 1, je to tedy jedno z čísel $\operatorname{tg}\alpha$ nebo $\operatorname{cotg}\alpha$. Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek $5\cdot\sqrt{6}$ a 12 má přeponu délky $\sqrt{(5\cdot\sqrt{6})^2 + 12^2} = \sqrt{294} = 7\cdot\sqrt{6}$. Proto jsou hledané tři hodnoty rovny zlomkům $\frac{5\cdot\sqrt{6}}{7\cdot\sqrt{6}}$, $\frac{12}{7\cdot\sqrt{6}}$ a $\frac{12}{5\cdot\sqrt{6}}$, tedy zlomkům $\frac{5}{7}$, $\frac{2\cdot\sqrt{6}}{7}$ a $\frac{2\cdot\sqrt{6}}{5}$.

Cvičení 7

1. a) Asi 36°50′ a asi 53°10′; b) asi 22°40′ a asi 67°20′. **2.** a) $a \doteq 3{,}4\,\text{cm}$, $b \doteq 2{,}2\,\text{cm}$, $\beta = 33°$; b) $a \doteq 1{,}6\,\text{cm}$, $c \doteq 3{,}4\,\text{cm}$, $\beta = 62°$; c) $b \doteq 1{,}6\,\text{cm}$, $c \doteq 6{,}2\,\text{cm}$, $\beta = 15°$; d) $a \doteq 11{,}7\,\text{cm}$, $c \doteq 19\,\text{cm}$, $\alpha = 38°$; e) $c \doteq 6{,}83\,\text{dm}$, $\alpha \doteq 28°30'$, $\beta \doteq 61°30'$; f) $a = 7\,\text{cm}$, $\alpha \doteq 16°20'$, $\beta \doteq 73°40'$. **3.** Asi 4°30′ a asi 85°30′. **4.** Asi 27,1 cm². **5.** Asi 16,2 cm. **6.** Asi 8 cm. **7.** Asi 40,5 cm². **8.** $|LM| \doteq 5{,}5\,\text{cm}$; $|KM| \doteq 8{,}9\,\text{cm}$. **9.** Asi 2,4 cm a asi 5,5 cm. **10.** a) Asi 3,8 cm; b) 5 cm; c) asi 5,9 cm. **11.** a) $|VS| \doteq 11{,}6\,\text{cm}$; b) $|VS| = 6\,\text{cm}$. **12.** Asi 49 cm. **13.** Úhly při delší základně měří asi 63°30′, úhly při kratší základně asi 116°30′. **14.** Věž je vysoká asi 445 metrů. **15.** Schodiště stoupá pod úhlem o velikosti asi 33°. **16.** Úsek je dlouhý asi 550 metrů. **17.** Drak vyletěl do výšky necelých 57 metrů. **18.** Novákovi budou potřebovat asi 19,2 m² prken a asi 87,8 m² tašek.

Cvičení 8

1. Označme $|CM| = x$, $|CN| = y$ (obr. B-35), pak $|BM| = a - x$. Platí $\triangle ABM \sim \triangle NCM$ podle věty *uu*, proto $\frac{|AB|}{|NC|} = \frac{|BM|}{|CM|}$, neboli $\frac{a}{y} = \frac{a-x}{x}$, odkud $y = \frac{ax}{a-x}$. Dosadíme do levé strany dokazované rovnosti:

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{ax}{a-x}} = \frac{1}{x} - \frac{a-x}{ax} = \frac{a-(a-x)}{ax} = \frac{x}{ax} = \frac{1}{a}$$

2. Trojúhelníky CPA a CQB jsou pravoúhlé a mají společný úhel při vrcholu C, proto jsou podle věty *uu* podobné (obr. B-36). To znamená, že $|CP| : |CQ| = |CA| : |CB|$, neboli $|CP| : |CA| = |CQ| : |CB|$, odkud $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$ podle věty *sus*. Proto $|\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle CAB| = \alpha = 40°$, $|\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle CBA| = \beta = 60°$ a $|\sphericalangle QCP| = |\sphericalangle ACB| = \gamma = 80°$. **3.** V lichoběžníku $ABCD$ vyznačíme úhlopříčku AC (obr. B-37). Trojúhelník ADC je rovnoramenný a pravoúhlý s přeponou AC, takže $|\sphericalangle DAC| = 45°$, a proto také $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Úhly při vrcholech A, B trojúhelníku ABC mají velikost 45°. Podle věty *uu* tedy platí $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{|AC|}{|AD|}$. Je-li $|AD| = x$, je podle Pythagorovy věty $|AC| = \sqrt{2}\cdot x$, proto $k = \sqrt{2}$. Označíme-li r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ACD a R poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC, platí $R = k\cdot r = \sqrt{2}\cdot r$, takže $\pi\cdot R^2 = \pi\cdot\left(\sqrt{2}r\right)^2 = 2\pi\cdot r^2$, a proto kruh vepsaný trojúhelníku ABC má dvojnásobný obsah než kruh vepsaný trojúhelníku ADC.

4. Platí $\triangle ABC \sim \triangle PBA$ podle věty *uu* (obr. B-38.). Označme X patu výšky z vrcholu P trojúhelníku ABP. Z uvedené podobnosti plyne $|AX| : |XB| = |CP| : |PB| = 5 : 3$. Bod X na úsečce AB tedy dokážeme sestrojit. Bod P leží jednak na kolmici q k úsečce AB vedené bodem X, jednak na Thaletově kružnici nad průměrem AB, neboť úhel APB je pravý. Po sestrojení bodu P je konstrukce vrcholu C již snadná. Úloha má dvě řešení (souměrně sdružená podle osy AB). **5.** Z podobností $\triangle ACD \sim \triangle ASL$ a $\triangle ABD \sim \triangle LSD$ (obr. B-39) jako v úloze 2 ze str. 125 odvodíme, že platí:

$$|LS| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|AB| + |CD|}$$

Stejně tak z podobností $\triangle ABC \sim \triangle SKC$ a $\triangle BCD \sim \triangle BKS$ vyplývá, že platí:

$$|SK| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|AB| + |CD|}$$

Dohromady dostáváme:

$$|LK| = |LS| + |SK| = \frac{2 \cdot |AB| \cdot |CD|}{|AB| + |CD|} = 8\,\mathrm{cm}$$

6. Protože $\triangle ARS \sim \triangle ABC$, platí $\dfrac{|RS|}{|BC|} = \dfrac{|AR|}{|AB|}$; protože $\triangle UBT \sim \triangle ABC$, platí $\dfrac{|UT|}{|AC|} = \dfrac{|UB|}{|AB|}$. Dosadíme do levé strany dokazované rovnosti:

$$\frac{|PQ|}{|AB|} + \frac{|RS|}{|BC|} + \frac{|TU|}{|AC|} = \frac{|PQ|}{|AB|} + \frac{|AR|}{|AB|} + \frac{|UB|}{|AB|} = \frac{|PQ| + |AR| + |UB|}{|AB|}$$

Důkaz bude hotov, když ukážeme, že platí $|PQ| + |AR| + |UB| = 2 \cdot |AB|$. To však je snadné: protože čtyřúhelníky $AUMP$ a $RBQM$ jsou rovnoběžníky, platí $|PM| = |AU|$ a $|MQ| = |RB|$, tedy $|PQ| = |PM| + |MQ| = |AU| + |RB|$, a proto $|PQ| + |AR| + |UB| = |AU| + |RB| + |AR| + |UB| = (|AU| + |UB|) + (|AR| + |RB|) = 2 \cdot |AB|$. **7.** Zvolme označení podle obr. B-40 a vyjadřujme délky čísly (bez jednotky cm). Všimněme si, že platí: $|DA'| = |A'C| = 4$, $|DE| + |EA'| = x + y = 8$, $|A'F| + |FB'| = z + t = 8$. Nyní určíme x a y z pravoúhlého trojúhelníku EDA':

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 &= y^2 \\ x + y &= 8 \\ \hline x^2 + 16 &= (8 - x)^2 \\ x^2 + 16 &= 64 - 16x + x^2 \\ 16x &= 48 \\ \hline x = 3, &\quad y = 5 \end{aligned}$$

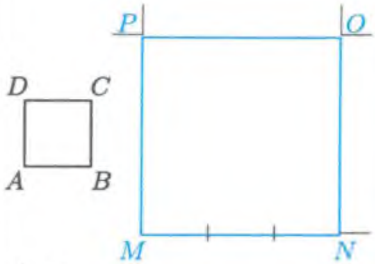
Platí $\triangle A'CF \sim \triangle EDA'$ (věta *uu*), proto $\dfrac{|A'F|}{|A'C|} = \dfrac{|A'E|}{|ED|}$, tzn. $\dfrac{z}{4} = \dfrac{y}{x}$, $z = \dfrac{4y}{x} = \dfrac{20}{3}$. Protože $z + t = 8$, je $t = 8 - z = \frac{4}{3}$. Nyní určíme s. Z podobnosti trojúhelníků $GB'F$ a EDA' plyne rovnost $\dfrac{|GB'|}{|B'F|} = \dfrac{|ED|}{|DA'|}$, tzn. $\dfrac{s}{t} = \dfrac{x}{4}$, proto $s = \dfrac{xt}{4} = 1$. Odvěsna FB' pravoúhlého trojúhelníku $GB'F$ měří $\frac{4}{3}$ cm, odvěsna GB' měří 1 cm, proto pro jeho obsah S dostáváme:

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot |FB'| \cdot |GB'| = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot 1\,\mathrm{cm}^2 = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{cm}^2$$

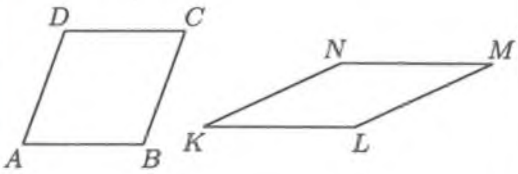
VÝSLEDKY SOUHRNNÝCH CVIČENÍ

1. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ nebo $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ nebo $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, $\triangle ABS \cong \triangle CBS$, $\triangle ABS \cong \triangle CDS$, $\triangle ABS \cong \triangle ADS$, $\triangle BCS \cong \triangle DCS$, $\triangle BCS \cong \triangle DAS$, $\triangle CDS \cong \triangle ADS$. **2.** $\triangle KLM \cong \triangle KNM$, $\triangle KLS \cong \triangle KNS$, $\triangle MLS \cong \triangle MNS$. **3.** $PQRS \sim XYMN$; $EFGH \sim KLIJ$ nebo $EFGH \sim IJKL$. **4.** a) Ne; b) ano. **5.** a) 4,8 cm, 9,6 cm a 8 cm; b) 10 cm, 6,5 cm a 6 cm. **6.** Užijte větu *sss*; $|PQ| = 6$ cm, $|QR| = 7{,}5$ cm, $|RP| = 3$ cm. **7.** Obvod trojúhelníku EFG je 10,8 cm, obvod trojúhelníku XYZ je 12 cm. **8.** $61°40'$. **9.** $\triangle ABC \sim \triangle QRS$ podle věty *sus*, $\triangle XYZ \sim \triangle UVT$ podle věty *sss*. **10.** a) Ano, podle věty *uu*; b) ne. **11.** $\triangle TPS \sim \triangle QRP$ např. podle věty *uu*. **12.** $\triangle PQR \sim \triangle PNM$ podle věty *sus*, proto jsou shodné střídavé úhly PQR a PNM, a tedy $MN \parallel QR$. **13.** $|OM| = 30$ cm, $|XY| = 28{,}8$ cm. **14.** Označme P patu výšky z vrcholu E, $|CP| = \frac{1}{2} \cdot |CD|$. Dále platí $\triangle CXS \sim \triangle CPE$ (podle věty *uu*) s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$, takže $|CX| = \frac{1}{2} \cdot |CP| = \frac{1}{4} \cdot |CD|$. **15.** $30\,\text{cm}^2$. **16.** $v_a = 2{,}5$ cm, $v_x = 3{,}5$ cm. **17.** 8 cm. **18.** Platí $\triangle ABT \sim \triangle A_1B_1T$ (podle věty *uu*). Protože $|A_1B_1| : |AB| = 1 : 2$, platí též $|A_1T| : |AT| = |B_1T| : |BT| = 1 : 2$. **19.** Platí $\triangle AXY \sim \triangle ABC$ (podle věty *uu*). Pokud $|AX| : |XC| = 1 : 3$, pak $|AB| \doteq 8{,}05$ cm a $|BC| \doteq 5{,}37$ cm. Pokud $|AX| : |XC| = 3 : 1$, pak $|AB| \doteq 6{,}15$ cm a $|BC| \doteq 1{,}37$ cm. **20.** a) Úhly AVC_0 a CVA_0 jsou vrcholové, proto $\triangle AC_0V \sim \triangle CA_0V$ (podle věty *uu*); b) pravoúhlé trojúhelníky CVA_0 a CBC_0 mají společný vnitřní ostrý úhel při vrcholu C, proto $\triangle CVA_0 \sim \triangle CBC_0$ (podle věty *uu*). **21.** Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB a ostrými vnitřními úhly $\alpha = 30°$ a $\beta = 60°$. Je „polovinou“ rovnostranného trojúhelníku o straně 2 cm, proto $|AB| = 2$ cm. Platí $\triangle ABC \sim \triangle CBC_0$, kde C_0 je pata výšky z vrcholu C ke straně AB. Trojúhelník CBC_0 je „polovinou“ rovnostranného trojúhelníku o straně 1 cm, proto $|BC_0| = \frac{1}{2}$ cm. Platí tedy $|BC_0| : |C_0A| = 1 : 3$. **22.** Např. a) obr. C-1; b) obr. C-2; c) obr. C-3; d) obr. C-4. **23.** Např. obr. C-5. **24.** Platí $|BX_1| = |X_1X_2| = |X_2C|$ a všechny tři trojúhelníky mají stejné výšky z vrcholu A. **25.** Např. a) obr. C-6; b) obr. C-7; c) obr. C-8. **26.** Obr. C-9. **27.** Obr. C-10. Leží-li bod X blíže bodu K než bod Y, rozdělte úsečku KL na 14 stejných dílů. Leží-li bod Y blíže bodu K než bod X, rozdělte úsečku KL na 8 stejných dílů. **28.** Leží-li bod Y blíže bodu K než bod X, rozdělíme úsečku KL na $(a-b)+b+(c-b)$ stejných dílů. Musí platit $a-b>0$ i $c-b>0$, tzn. $b<a$ a současně $b<c$. **29.** Např. a) obr. C-11; b) obr. C-12. **31.** Např. obr. C-13. **33.** Např. obr. C-14. **34.** a) Strom měří asi 18,3 m. b) Stín stromu měřil asi 14,7 m. **35.** Pavel musel položit zrcátko asi 2,35 m od svých nohou. **36.** $\sin\alpha = \dfrac{v}{b}$, $\sin\beta = \dfrac{v}{a}$, $\sin\omega = \dfrac{c_2}{a}$, $\sin\varphi = \dfrac{c_1}{b}$. **37.** $\alpha \cong \gamma$, $\beta \cong \delta$. **38.** a) $\sin 65° \doteq 0{,}91$; b) $\sin 13° \doteq 0{,}22$. **39.** a) $\alpha \doteq 27°$; b) $\alpha \doteq 56°$. **40.** a) Asi 0,42; b) asi 0,57; c) asi 0,71; d) asi 0,91; e) asi 0,97; f) asi 1. **41.** a) Asi 17°; b) asi 44°; c) asi 53°. **42.** Úhly α a β jsou větší než 42°, ostatní úhly jsou menší. **43.** Přibližné hodnoty: 0,098 7; 0,199 4; 0,497 5; 0,502 5; 0,950 2; 0,999 8. **44.** a) $\varphi \doteq 45°20'$; b) $\varphi \doteq 85°20'$; c) $\varphi \doteq 15°30'$. **45.** Např. a) obr. C-15; b) obr. C-16; c) obr. C-17. **46.** $\cos|\sphericalangle ZXY| = \dfrac{|XZ|}{|XY|}$, $\cos|\sphericalangle XYZ| = \dfrac{|YZ|}{|XY|}$. **47.** První řádek: 29°, 61°, 88°, 87°, 4°; druhý řádek: 0,292 4; 0,956 3; 0,999 4; 0,069 8; třetí řádek: 0,956 3; 0,292 4; 0,874 6; 0,484 8; 0,052 3. **48.** $\alpha < \gamma < \varphi < \beta < \delta < \omega$. **49.** Např. a) obr. C-18; b) obr. C-19; c) obr. C-20. **50.** $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{x_1}{v}$, $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{x_2}{v}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{v}{x_2}$, $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{v}{x_1}$. **52.** Např. obr. C-21; $\beta \doteq 11°$. **53.** $\alpha_5 < \alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_6 <$

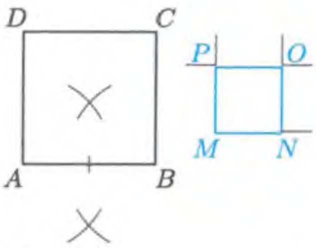
$< \alpha_2 < \alpha_4$. **54.** První řádek: 83°50′, 44°50′, 84°; druhý řádek: 0,121 9; 0,615 7; 0,888 4; 0,998 6; 0,705; 0,994 5; třetí řádek: 0,122 8; 0,781 3; 1,935; 19,081; 9,255. **56.** Úhly α_2 a α_5 jsou větší než 49°, ostatní úhly jsou menší. **57.** $\sin\psi = \dfrac{|QR|}{|PQ|}$, $\cos\psi = \dfrac{|PR|}{|PQ|}$, $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{|QR|}{|PR|}$, $\operatorname{cotg}\psi = \dfrac{|PR|}{|QR|}$. **58.** a) $\sin 22° \doteq 0{,}37$, $\cos 22° \doteq 0{,}93$, $\operatorname{tg} 22° \doteq 0{,}4$, $\operatorname{cotg} 22° \doteq 2{,}48$; b) $\sin 48° \doteq 0{,}74$, $\cos 48° \doteq 0{,}67$, $\operatorname{tg} 48° \doteq 1{,}11$, $\operatorname{cotg} 48° \doteq 0{,}9$; c) $\sin 68° \doteq 0{,}93$, $\cos 68° \doteq 0{,}37$, $\operatorname{tg} 68° \doteq 2{,}48$, $\operatorname{cotg} 68° \doteq 0{,}4$. **59.** a) $\omega \doteq 34°$; b) $\omega \doteq 56°$; c) $\omega \doteq 58°$; d) $\omega \doteq 32°$. **60.** První řádek: 36°, 40°, 82°, 23°; druhý řádek: 36°, 50°, 8°, 67°; třetí řádek: 0,809; 0,587 8; 0,990 3; 0,390 7; čtvrtý řádek: 0,587 8; 0,809; 0,766; 0,920 5; pátý řádek: 1,376; 0,726 5; 0,839 1; 7,115; šestý řádek: 0,726 5; 1,376; 1,192; 0,140 5; 2,356. **61.** a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; b) $\frac{5\cdot\sqrt{8}}{8}$; c) $\frac{3\cdot\sqrt{5}}{20}$; d) $\frac{3\cdot\sqrt{6}}{4}$. **62.** a) $\frac{2\cdot(3+\sqrt{2})}{7}$; b) $3-\sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; d) $\sqrt{5}+2$. **63.** a) cos; b) tg; c) cos; d) tg. **64.** a) Asi 0,390 7; b) asi 0,970 3; c) asi 0,750 9; d) asi 0,975 7; e) asi 0,999 4; f) asi 0,034 9. **65.** a) Asi 2,356; b) asi 3,867; c) asi 0,312 1. **66.** a) $\sin 12° < \sin 15° < \cos 17° < \cos 16° < \cos 14° < \cos 13°$; b) $\operatorname{cotg} 70° < \operatorname{cotg} 60° < \operatorname{tg} 40° < \operatorname{tg} 50° < \operatorname{cotg} 30°$. **67.** a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$; b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$; c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{cotg}\alpha = 2$; d) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$. **68.** $\sin 76° = \cos 14° \doteq 0{,}970\,295\,7$; $\cos 76° = \sin 14° \doteq 0{,}241\,921\,9$. **69.** 1. **70.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. **71.** a) Asi 12°40′ a asi 77°20′; b) asi 36°50′ a asi 53°10′; c) asi 28° a asi 62°; d) asi 10°20′ a asi 79°40′. **72.** a) $x \doteq 1{,}4$ dm, $\delta \doteq 73°40'$, $\omega \doteq 16°20'$; b) $\delta = 36°$, $y \doteq 1{,}5$ dm, $z \doteq 2{,}5$ dm; c) $\omega = 74°$, $y \doteq 2$ cm, $z \doteq 7{,}3$ cm; d) $\omega = 82°$, $x \doteq 0{,}99$ m, $y \doteq 0{,}14$ m; e) $\delta = 65°$, $x \doteq 2{,}7$ dm, $y \doteq 1{,}3$ dm; f) $z \doteq 22{,}3$ cm, $\delta \doteq 40°20'$, $\omega \doteq 49°40'$; g) $\delta = 9°$, $x \doteq 63{,}1$ cm, $z \doteq 63{,}9$ cm; h) $\omega = 52°$, $x \doteq 10{,}2$ cm, $z \doteq 13$ cm. **73.** Asi 3,2 cm. **74.** Obvod je asi 4,81 dm, obsah asi 0,98 dm^2. **75.** a) Asi 7,8 cm^2; b) asi 21,4 cm^2; c) asi 19,5 cm^2. **76.** Ano; asi 28° a asi 62°. **77.** Asi 106 cm^2. **78.** Asi 47 cm^2. **79.** Poloměr kružnice opsané je asi 7,8 cm, poloměr kružnice vepsané asi 2,8 cm. **80.** Délka obdélníku je asi 10,3 cm, jeho šířka asi 6,2 cm. **81.** Asi 116°. **82.** a) Asi 55°20′ a asi 124°40′; b) asi 80° a asi 100°. **83.** Úhlopříčky měří asi 18,1 cm a asi 8,5 cm, obsah kosočtverce je asi 77 cm^2. **84.** Pro výšku v kosočtverce platí $v = a \cdot \sin\alpha$. **85.** Asi 5,8 cm. **86.** Asi 220 mm. **87.** $b \doteq 3{,}8$ cm, $c \doteq 6{,}7$ cm, $\gamma \doteq 41°50'$, $\beta \doteq 22°10'$. **88.** Asi 66 cm^2. **89.** Asi 108 cm^2. **90.** $|XZ| \doteq 15{,}9$ cm. **91.** Asi 7,9 cm^2. **92.** Obvod je asi 80 cm, obsah asi 497 cm^2. **93.** Obvod je asi 51,6 cm, obsah asi 159 cm^2. **94.** $|\sphericalangle ZYV| \doteq 22°30'$, $|\sphericalangle YVZ| \doteq 67°30'$, $|\sphericalangle VZY| = 90°$. **95.** Věž se vychýlila asi o 4°50′. **96.** Trať klesá pod úhlem o velikosti asi 40′. **97.** Balon je přibližně ve výšce 144 m. **98.** Žebřík není postaven bezpečně, zmiňovaný úhel je asi 76°. **99.** Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel asi 45°30′. **100.** Zvolme označení podle obr. C-22: $|AB| = v$ střevíců, $|KB| = x$ střevíců. Z podobností $\triangle EKI \sim \triangle EBA$ a $\triangle GLH \sim \triangle GBA$ dostáváme $\dfrac{19}{19+x} = \dfrac{18}{v}$ a $\dfrac{29}{57{,}5+x} = \dfrac{18}{v}$, neboli $19v - 18x = 342$ a $29v - 18x = 1\,035$. Odečtením posledních dvou rovnic získáme $10v = 693$, odkud $v = 69{,}3$, pak $x = 54{,}15$. Věž měří asi 69 střevíců, vzdálenost její paty od bodu G je asi 112 střevíců.



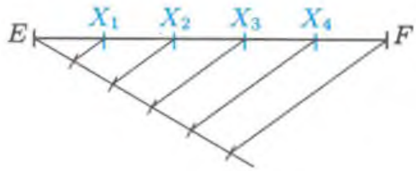
A-1



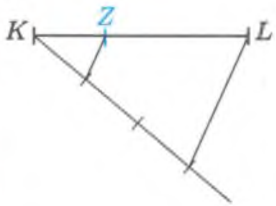
A-3



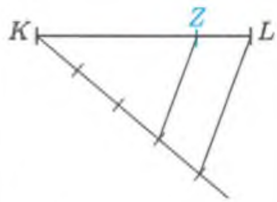
A-2



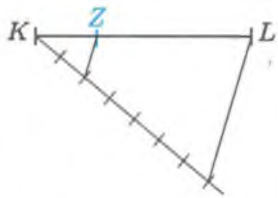
A-4



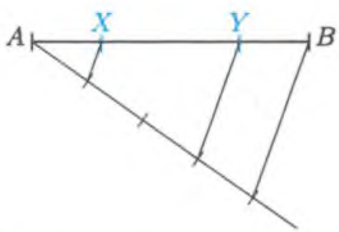
A-5



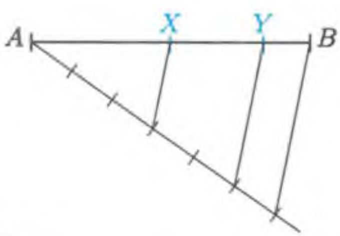
A-6



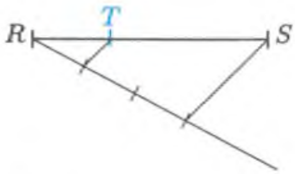
A-7



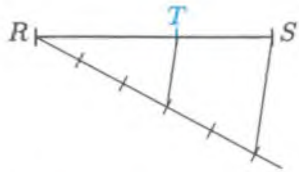
A-8



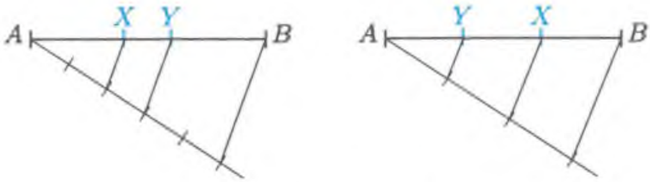
A-9



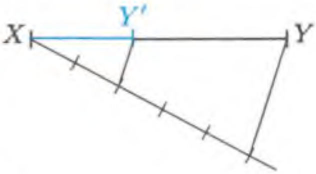
A-10



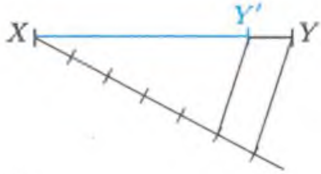
A-11



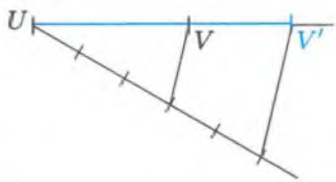
A-12



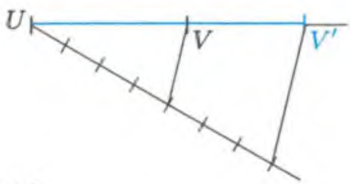
A-13



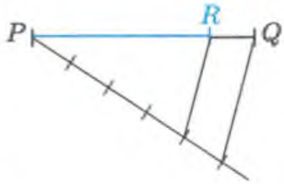
A-14



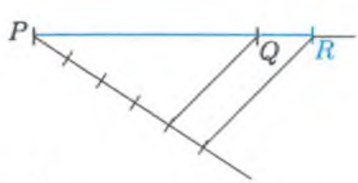
A-15



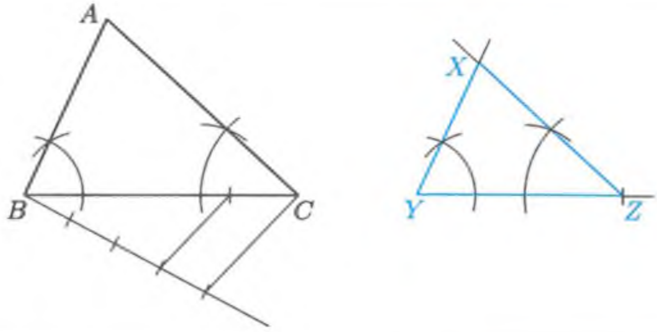
A-16



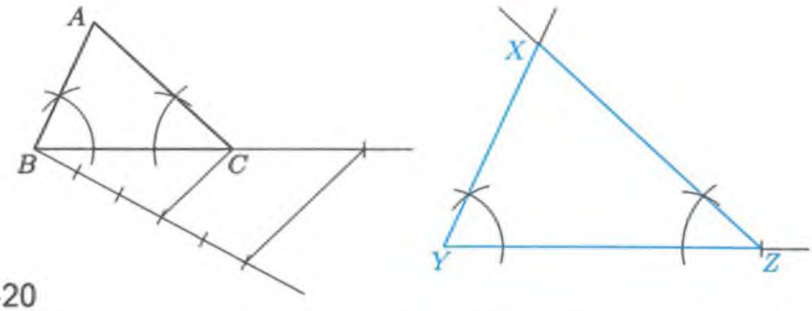
A-17



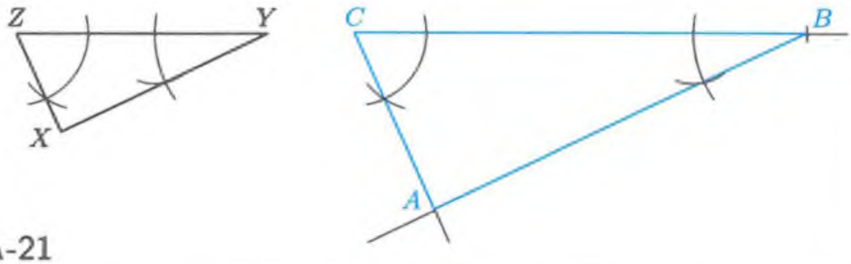
A-18



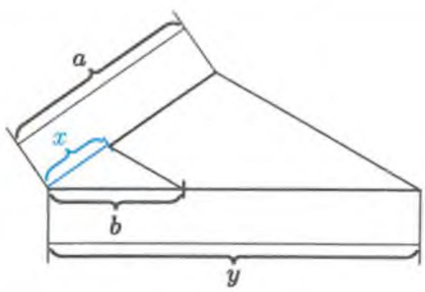
A-19



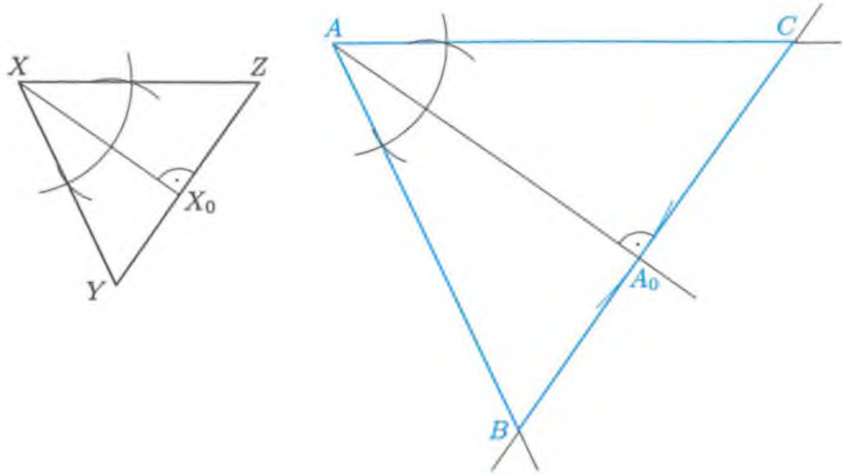
A-20



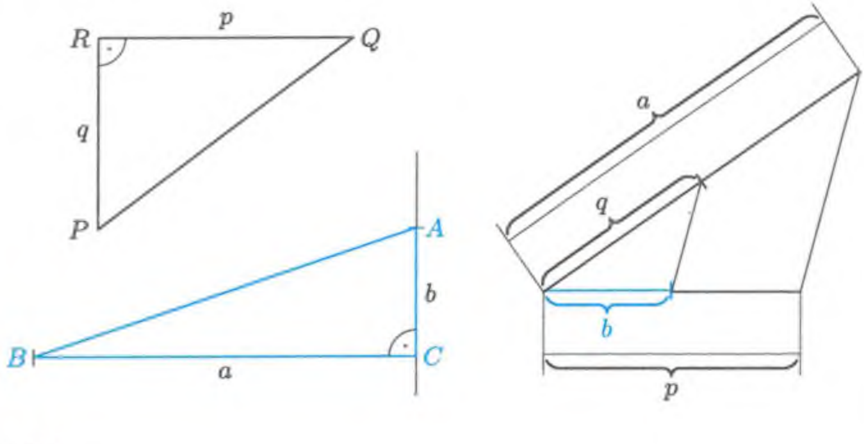
A-21



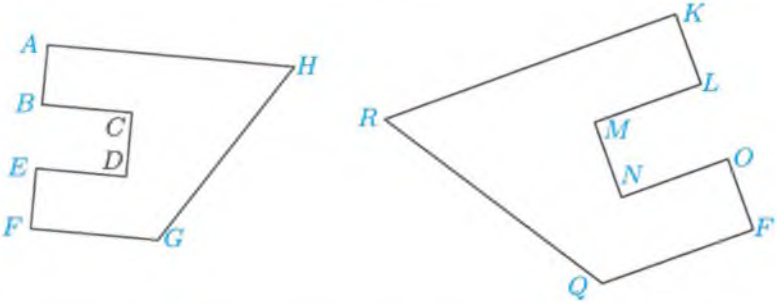
A-23



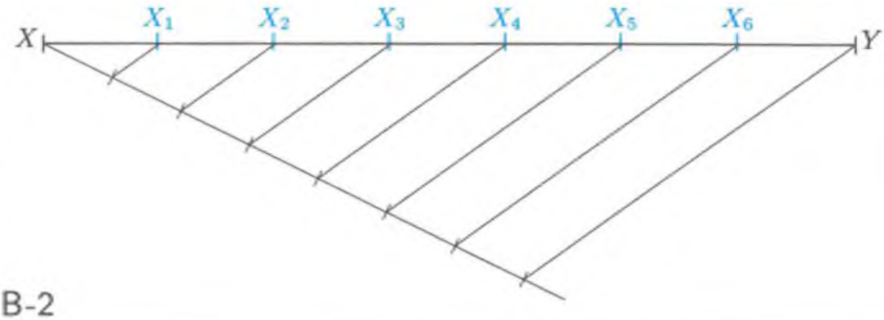
A-22



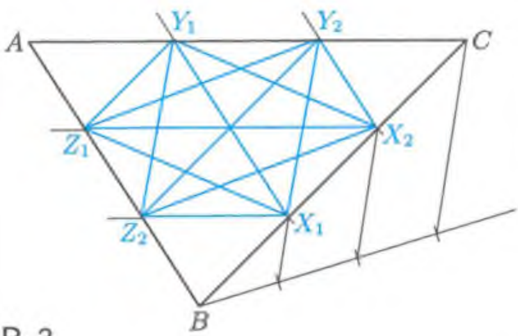
A-24


A
H
B
C
D
E
F
G
K
L
R
M
N
O
F
Q

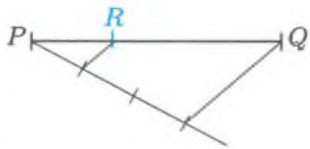
B-1


X
X_1
X_2
X_3
X_4
X_5
X_6
Y

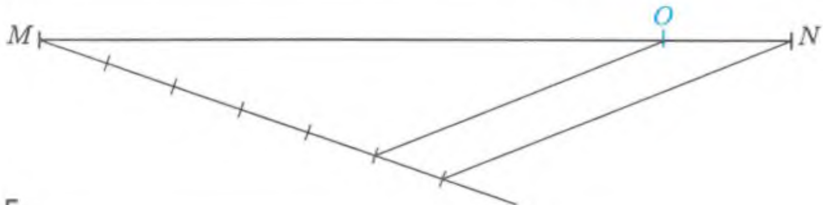
B-2


A
Y_1
Y_2
C
Z_1
X_2
Z_2
X_1
B

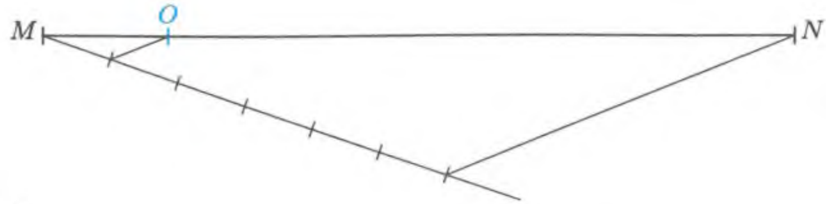
B-3


P
R
Q

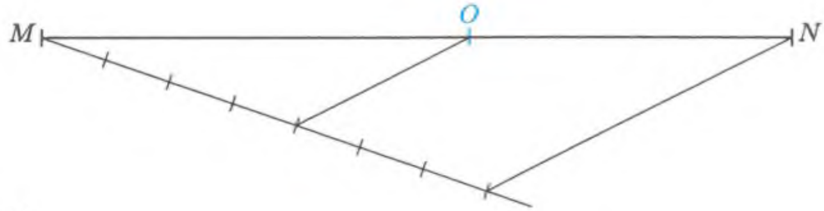
B-4


M
O
N

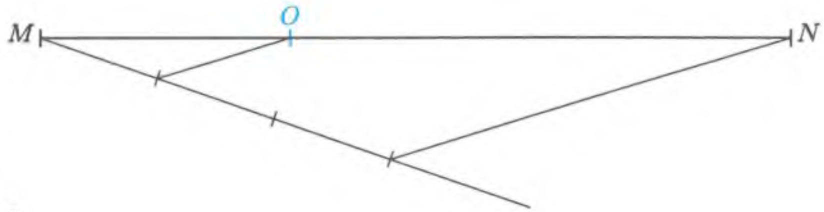
B-5



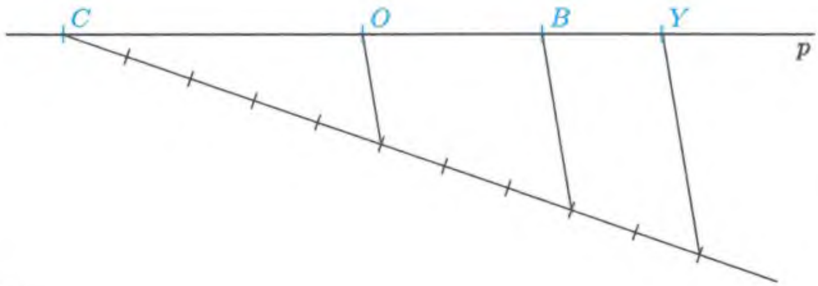
B-6



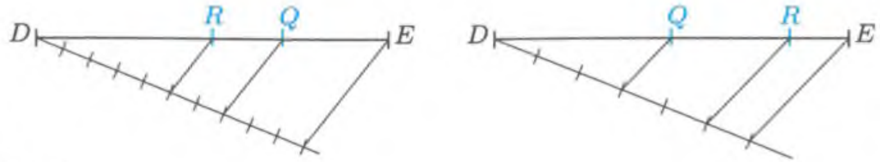
B-7



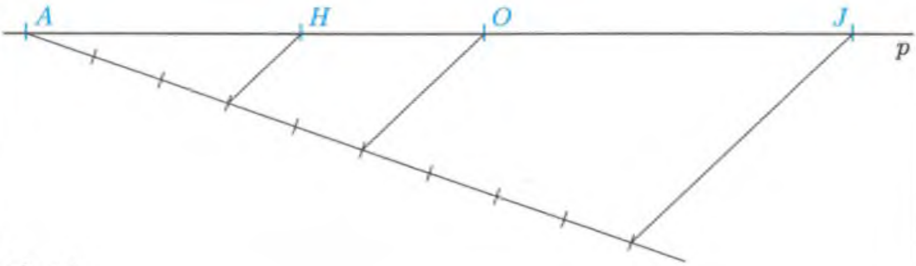
B-8



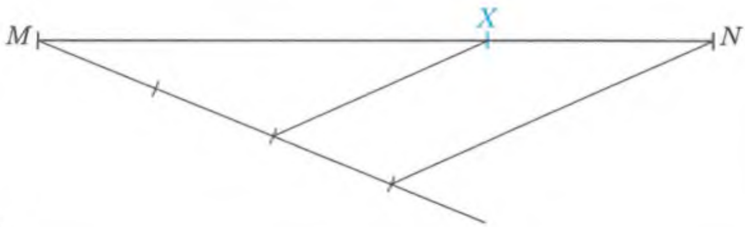
B-9



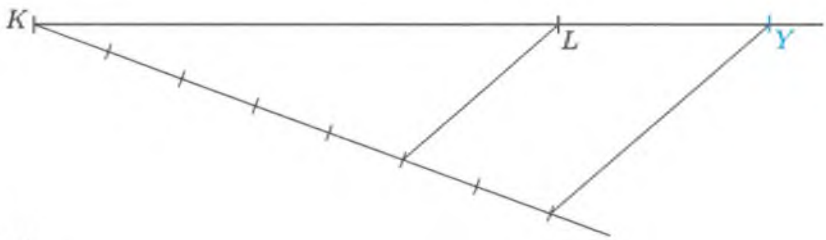
B-10



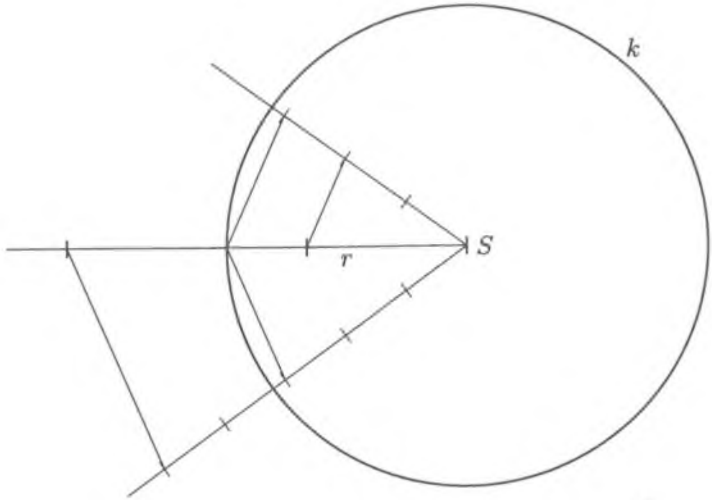
B-11



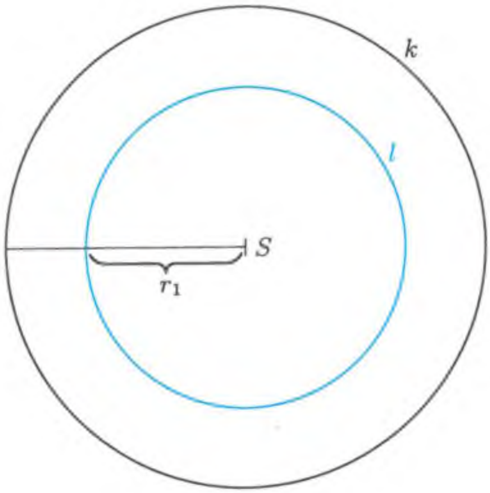
B-12



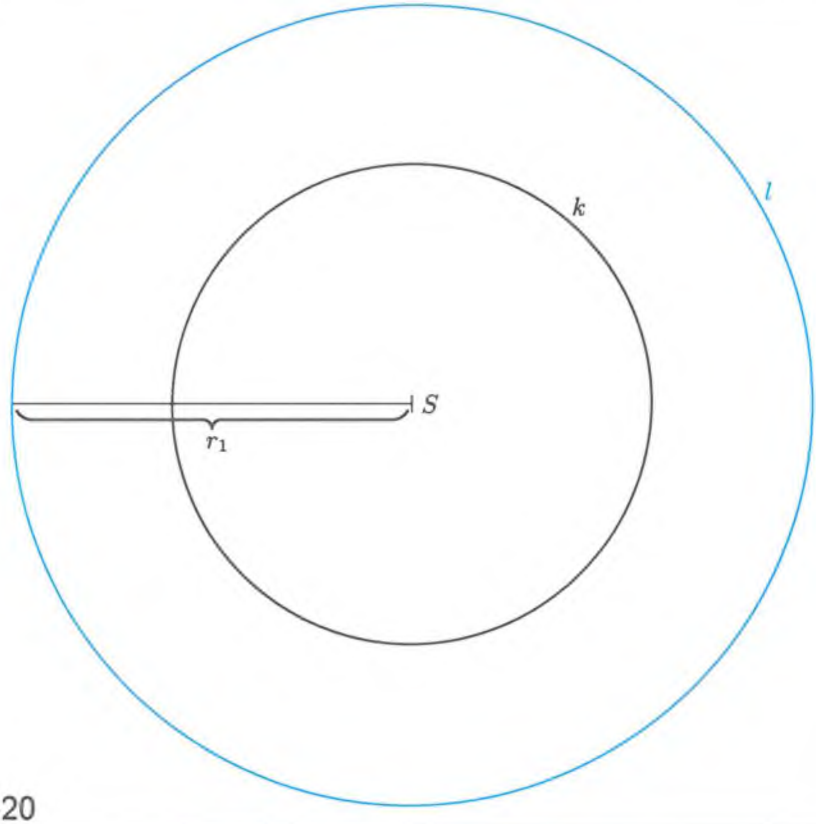
B-13



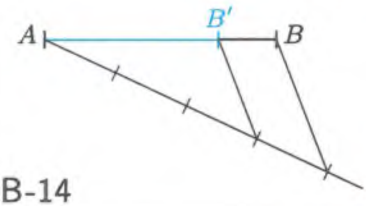
B-18



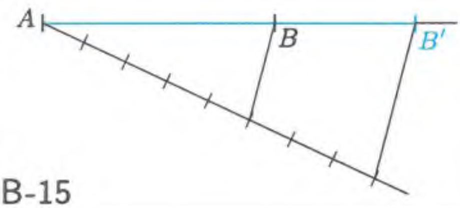
B-19



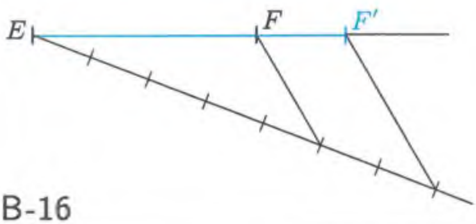
B-20



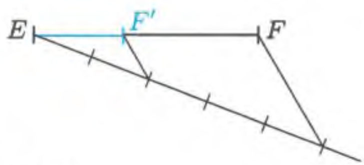
B-14



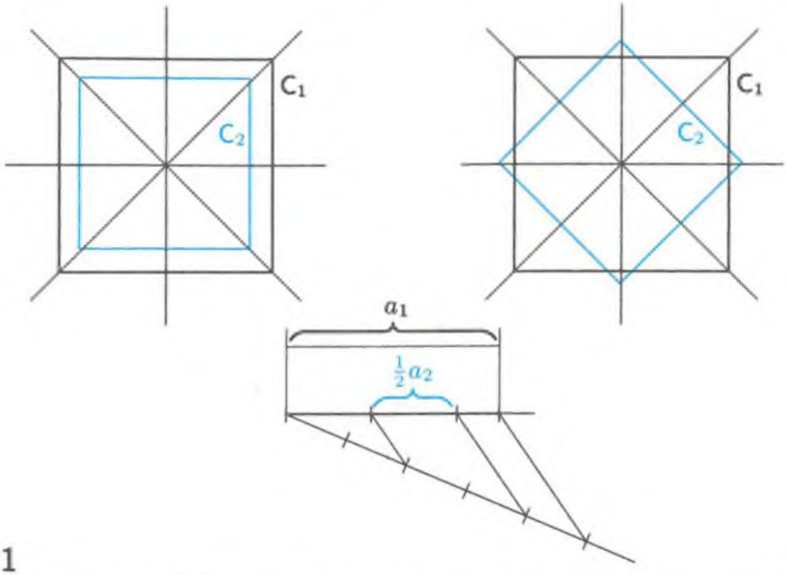
B-15



B-16

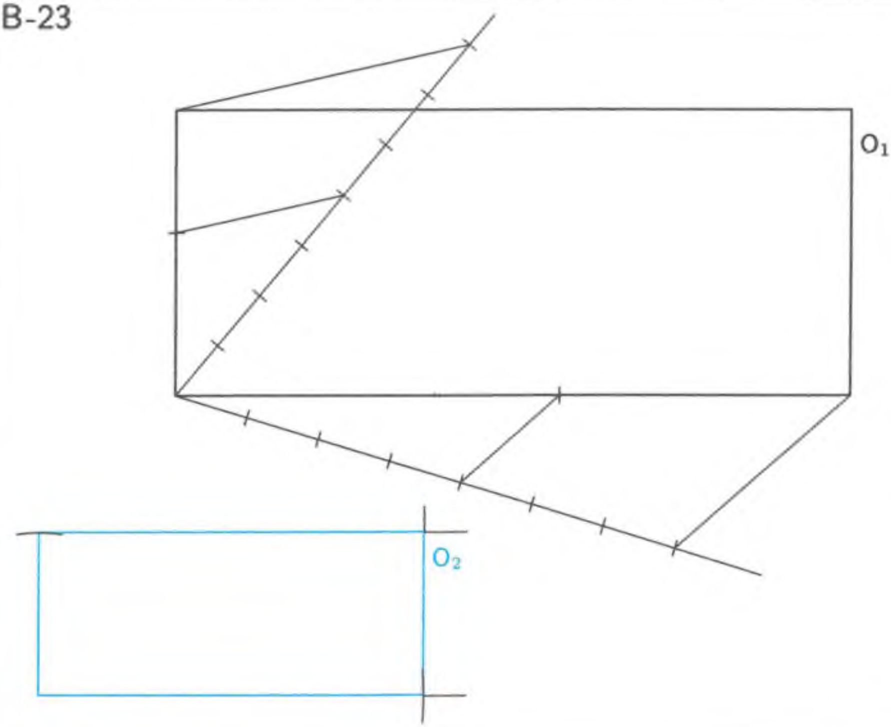


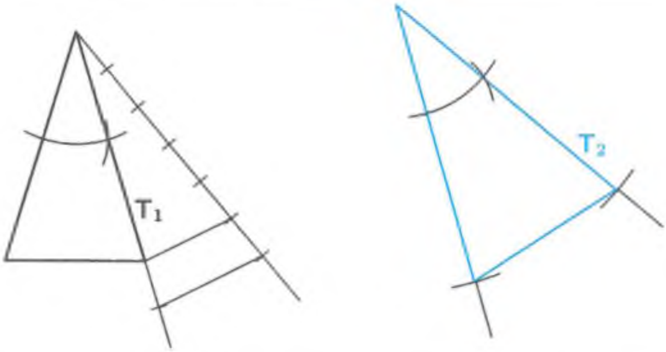
B-17



B-21

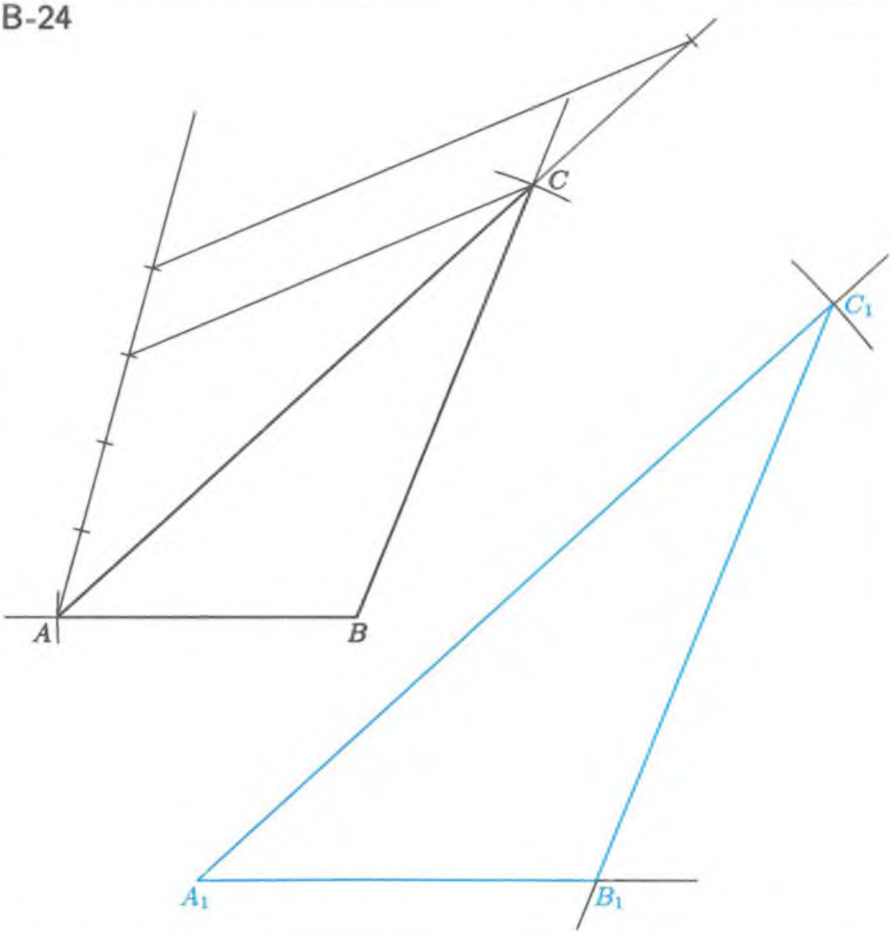
B-23

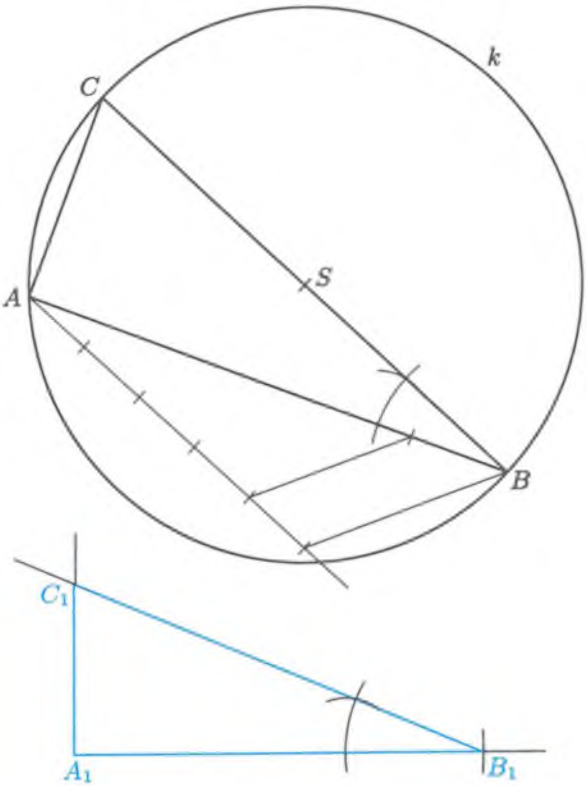




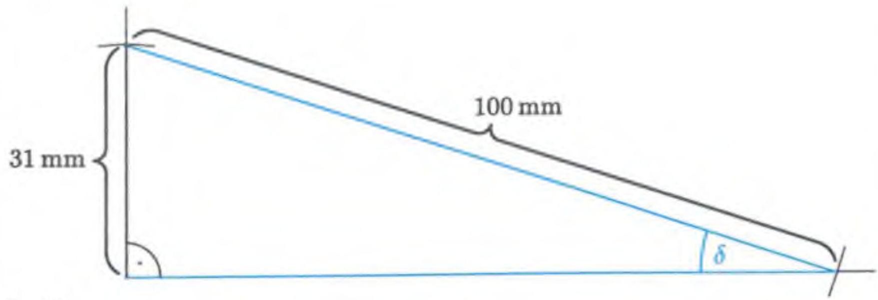
B-22

B-24

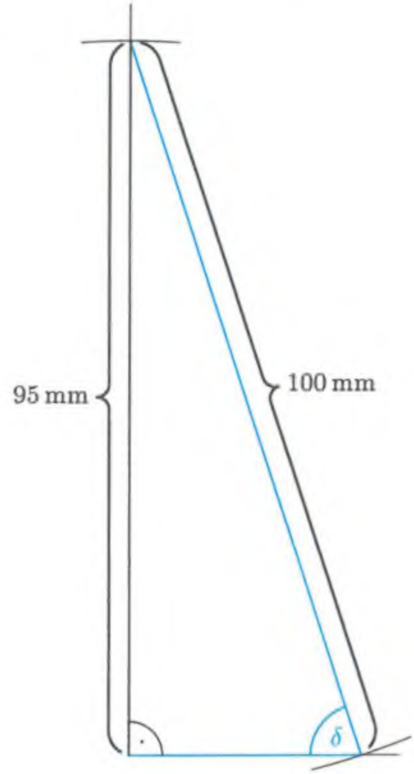




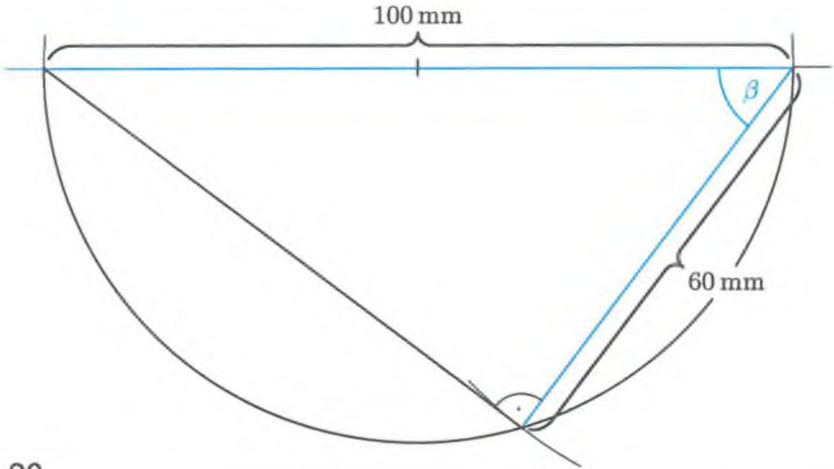
B-25



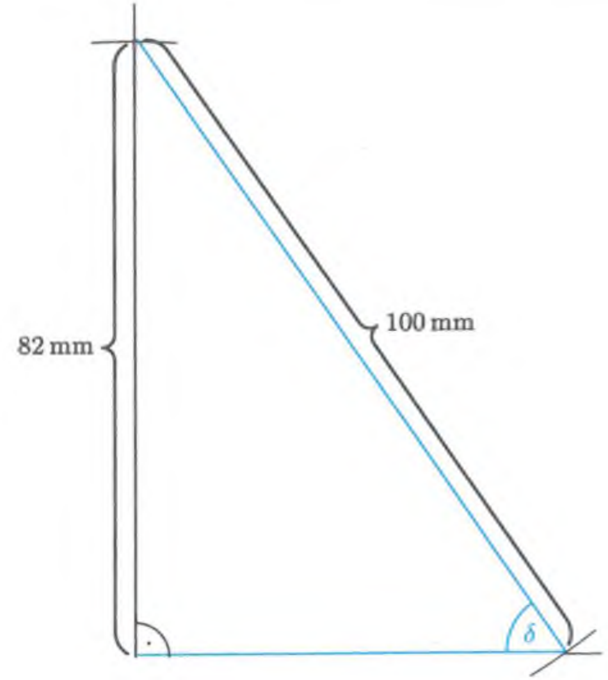
B-28



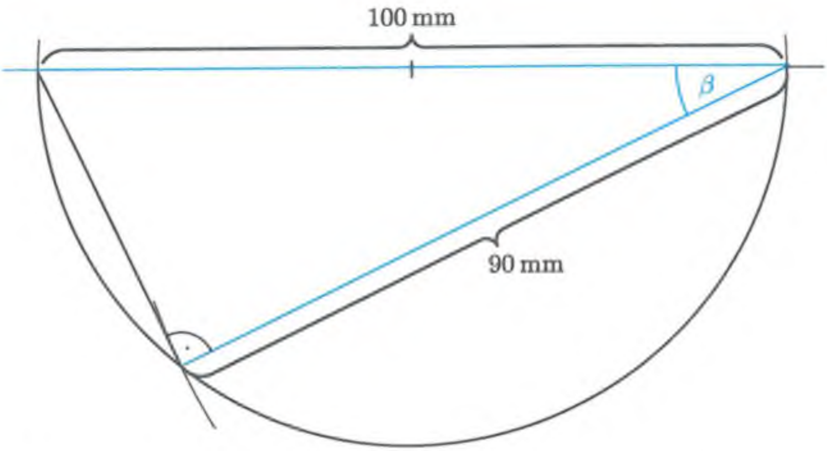
B-26



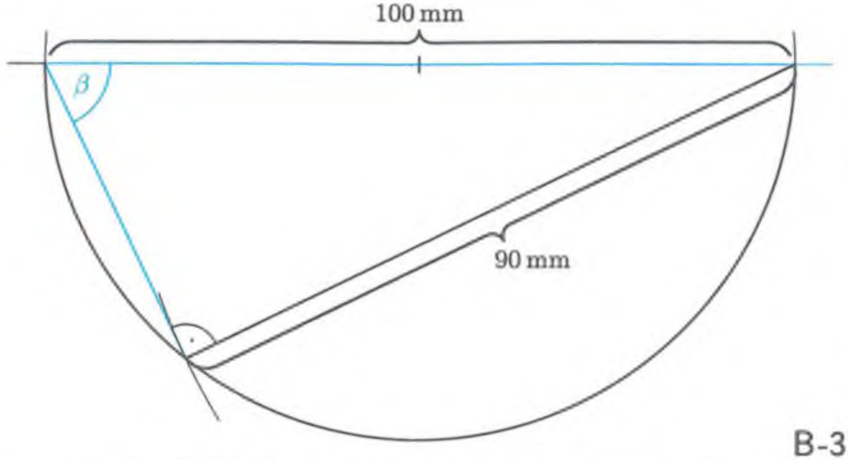
B-29



B-27

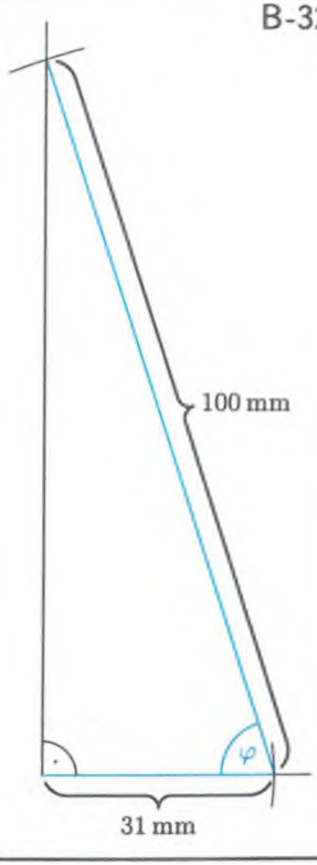


B-30

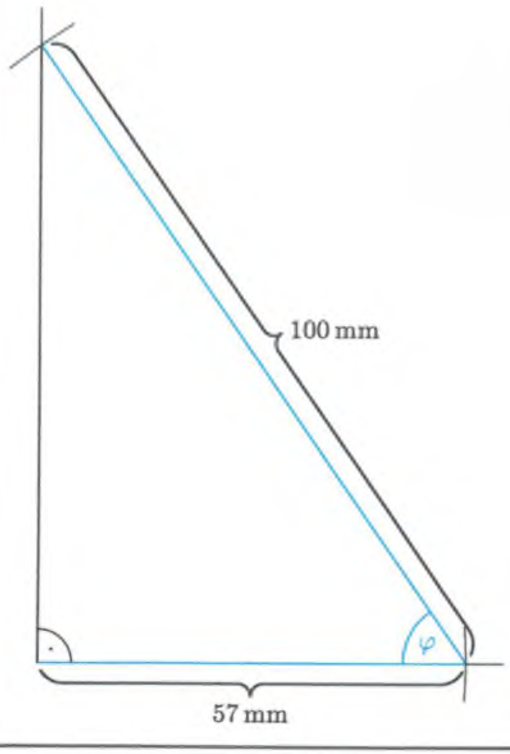


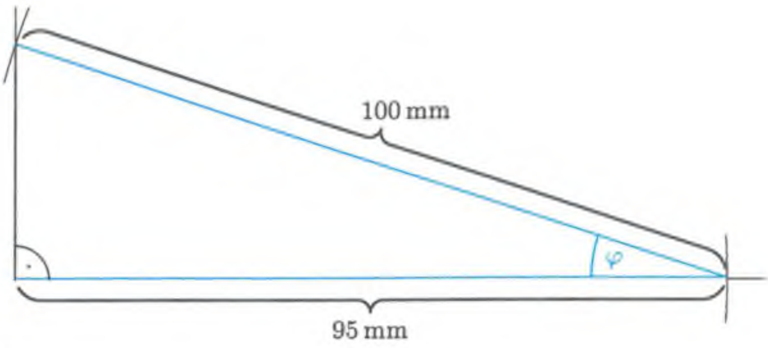
B-31

B-32

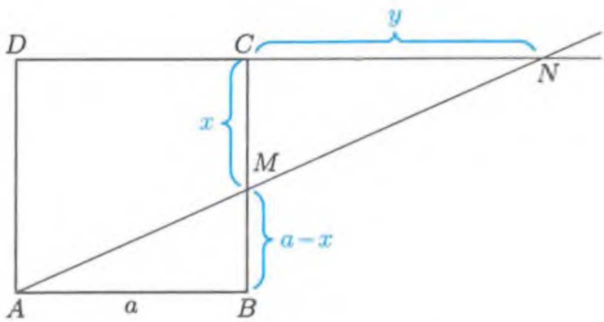


B-33



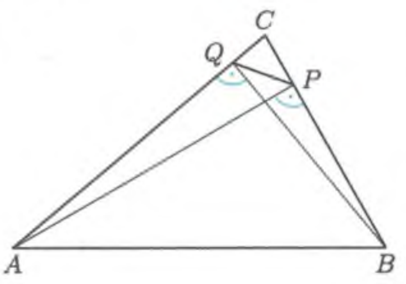


B-34

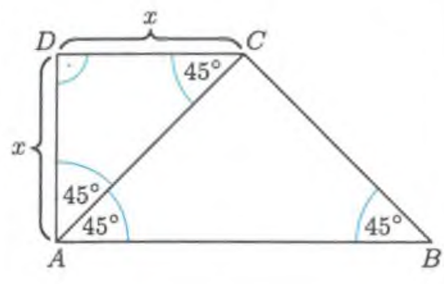


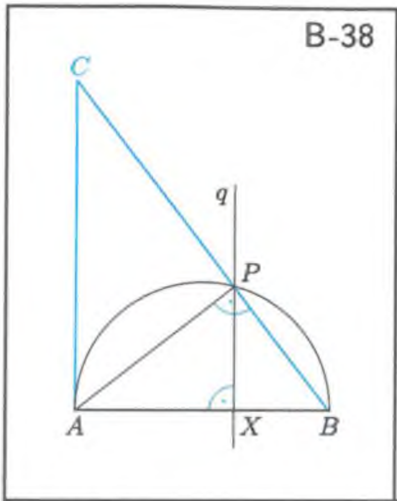
B-35

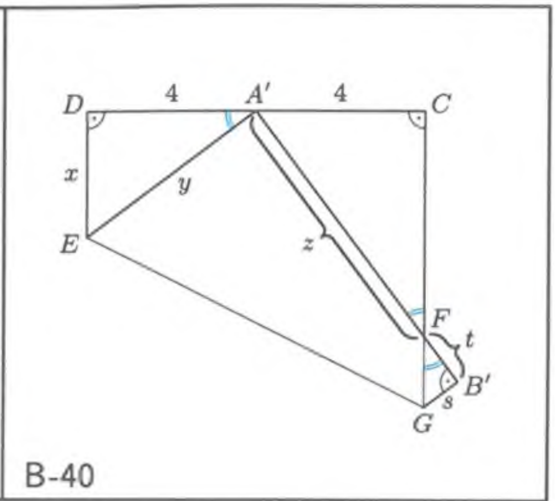
B-36

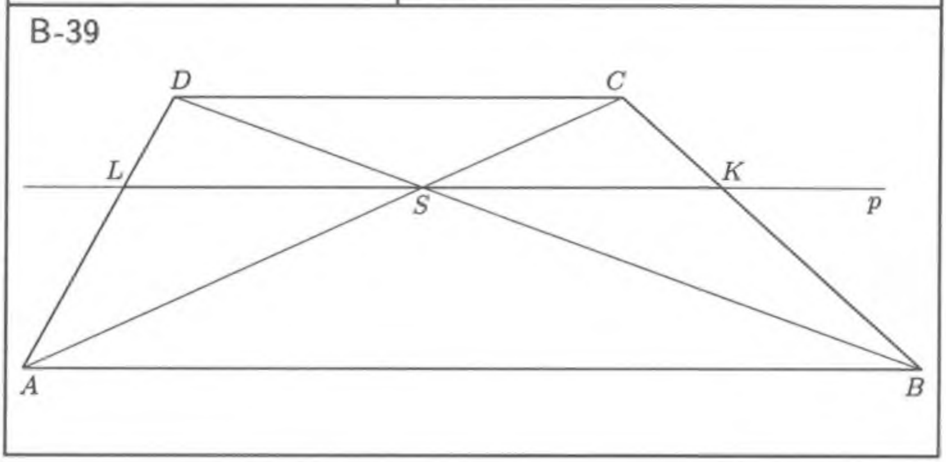


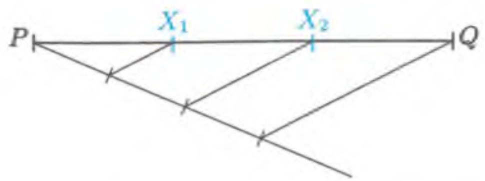
B-37



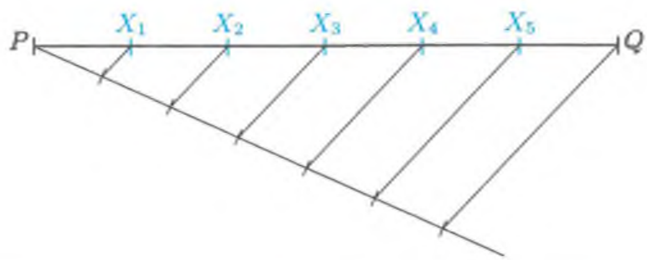

B-38
C
q
P
A
X
B


D
4
A′
4
C
x
y
E
z
F
t
B′
s
G
B-40

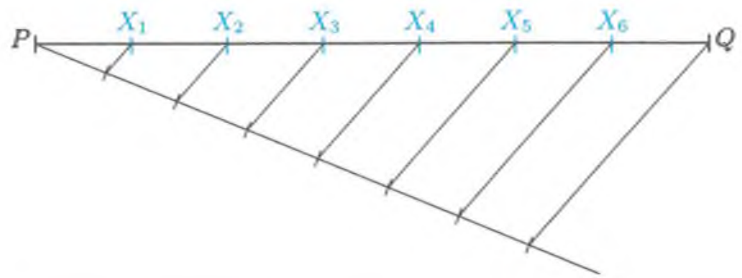

B-39
D
C
L
K
S
p
A
B


P
X1
X2
Q

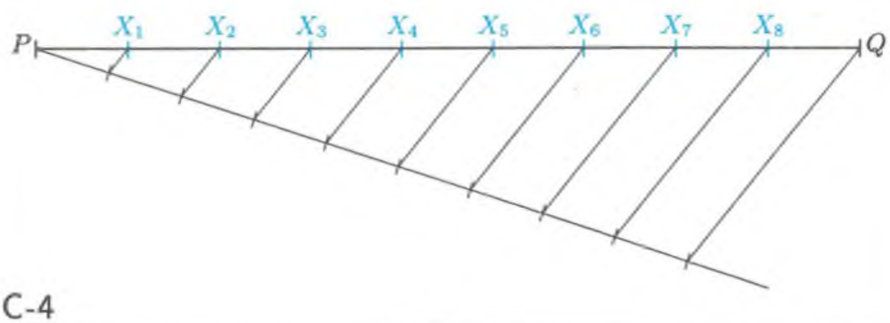
C-1


P
X1
X2
X3
X4
X5
Q

C-2

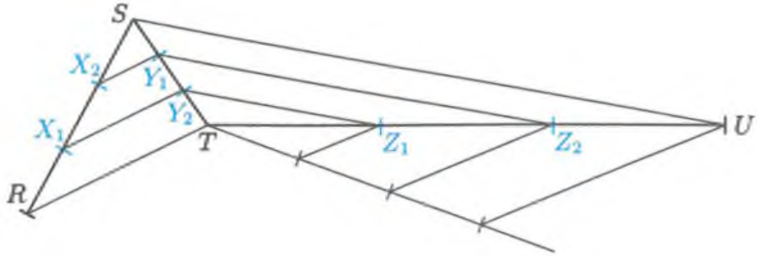

P
X1
X2
X3
X4
X5
X6
Q

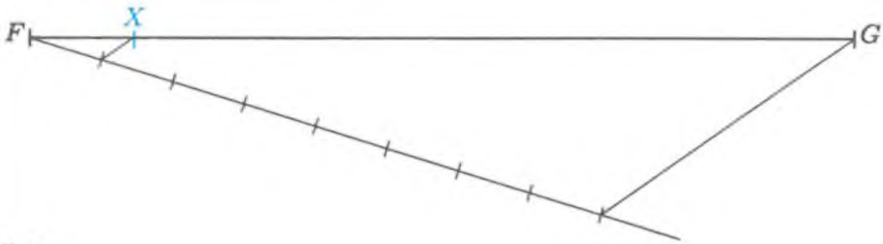
C-3


P
X1
X2
X3
X4
X5
X6
X7
X8
Q

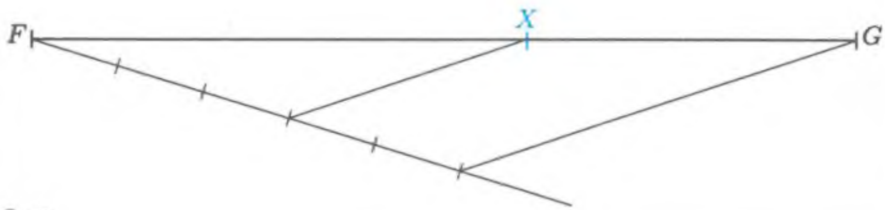
C-4

C-5

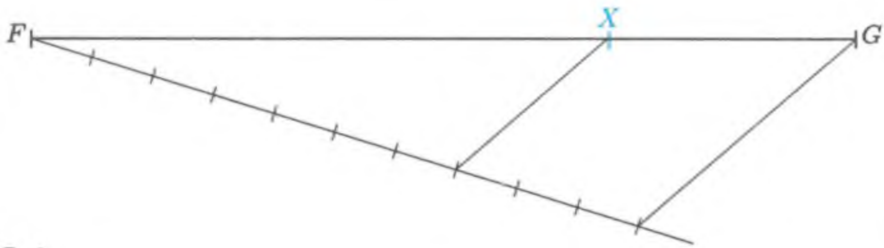




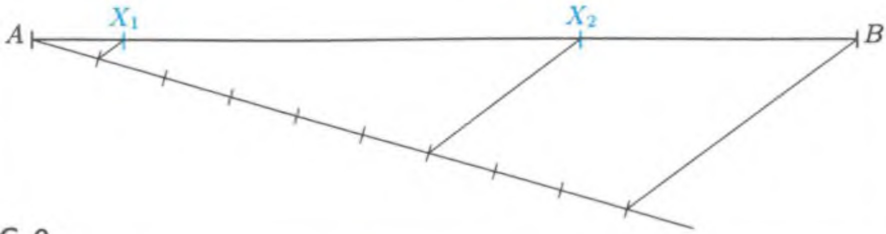
C-6



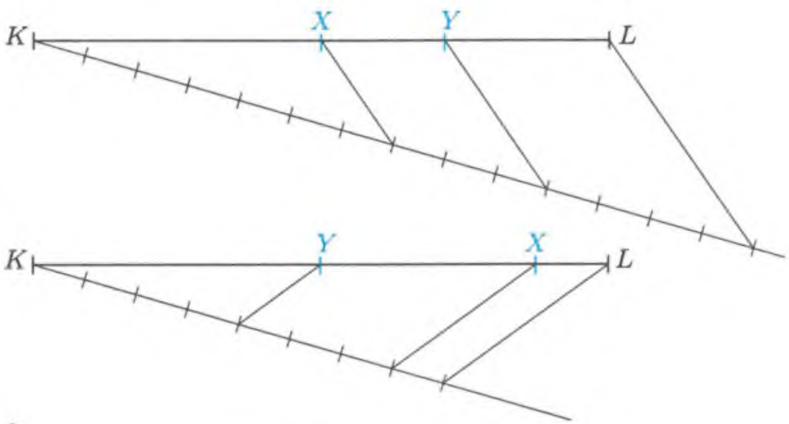
C-7



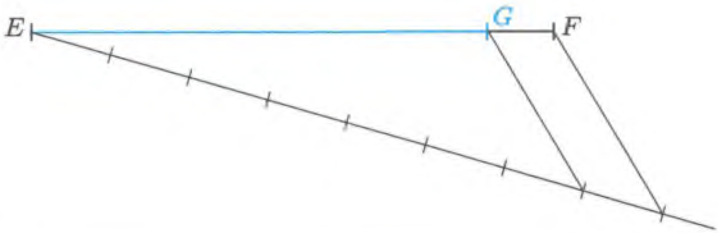
C-8



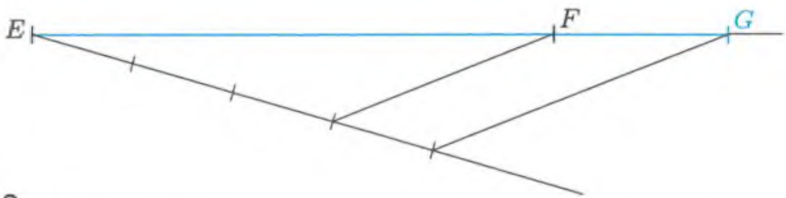
C-9



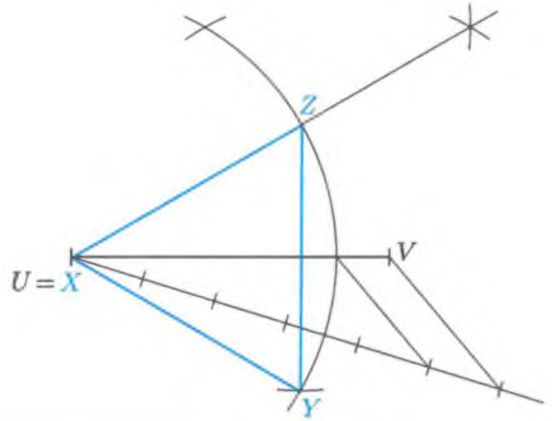
C-10



C-11

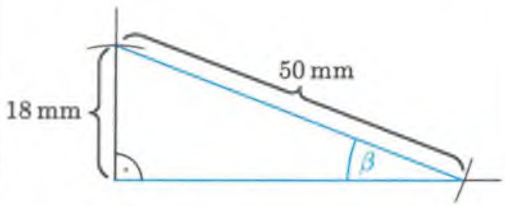


C-12

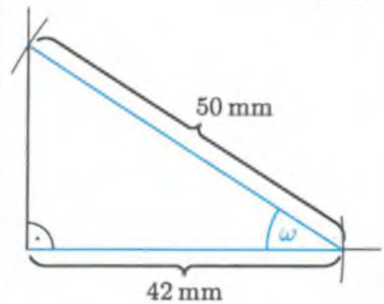


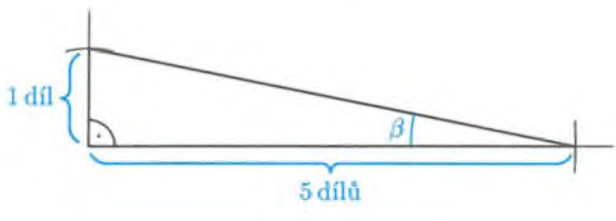
C-13

C-15



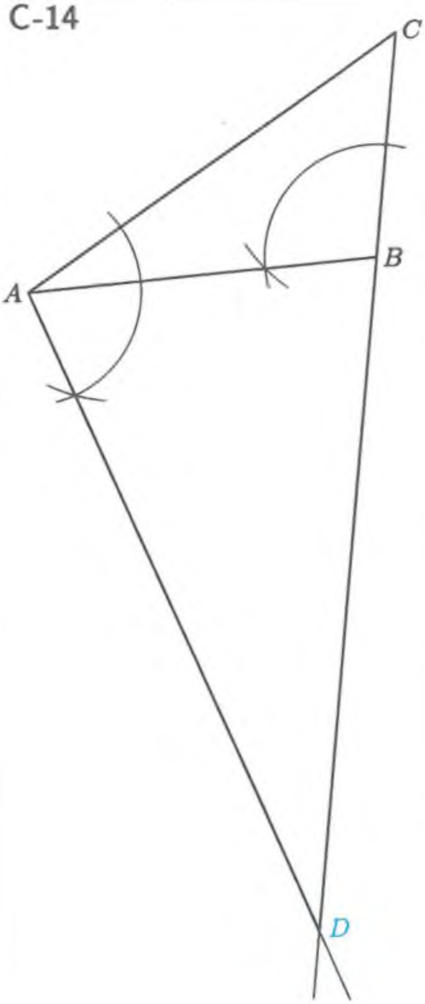
C-19



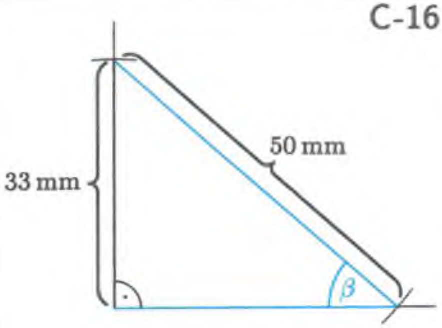


C-21

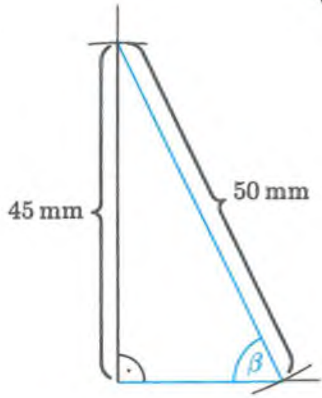
C-14



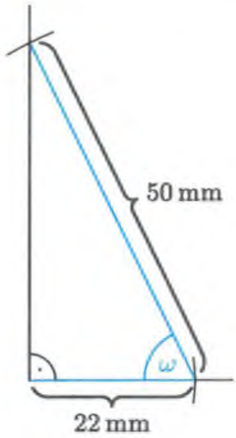
C-16



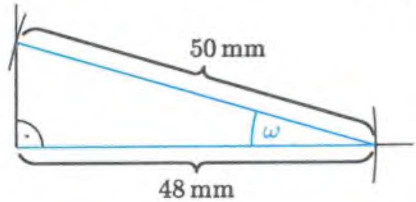
C-17

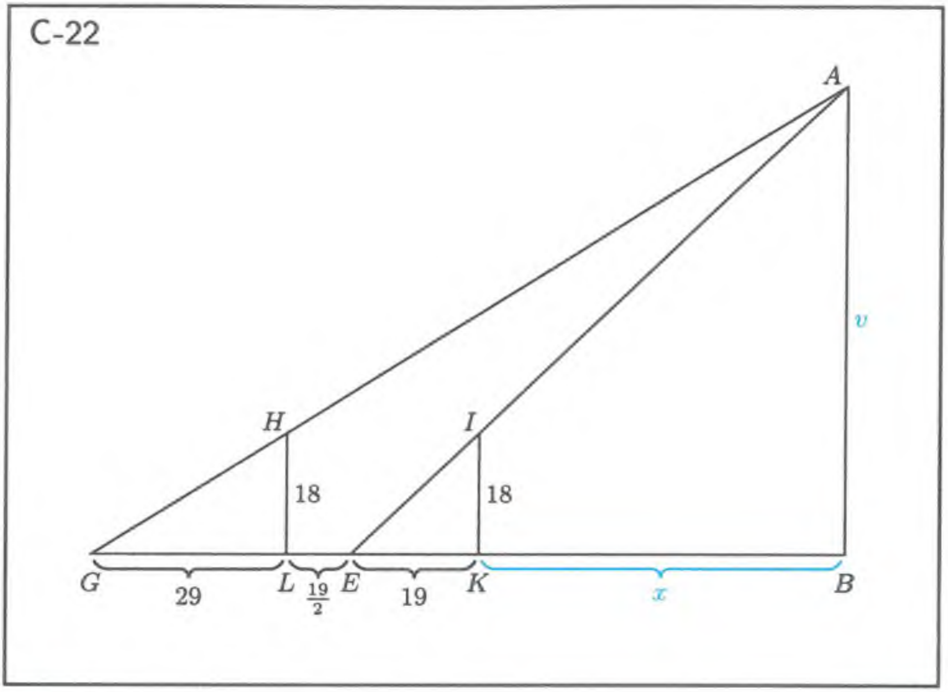


C-18



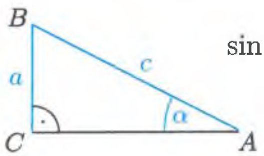
C-20




C-22
A
v
H
I
18
18
G
29
L
19/2
E
19
K
x
B

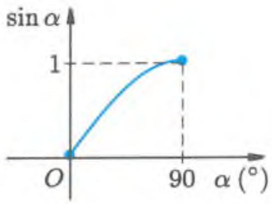
Goniometrické funkce ostrého úhlu

Sinus

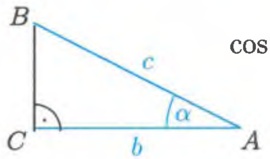


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$\sin 0° = 0, \quad \sin 90° = 1$

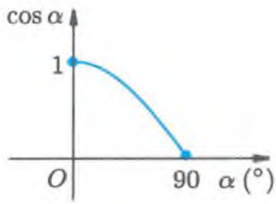


Kosinus

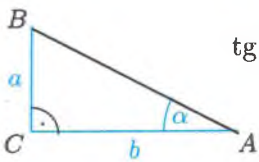


$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$\cos 0° = 1, \quad \cos 90° = 0$

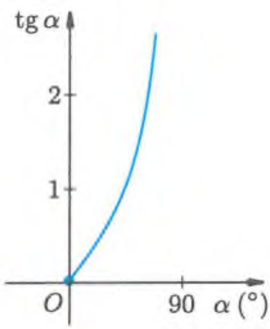


Tangens

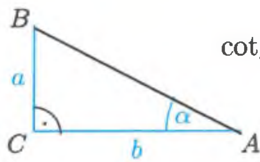


$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$\mathrm{tg}\,0° = 0, \quad \mathrm{tg}\,90°$ nemá smysl

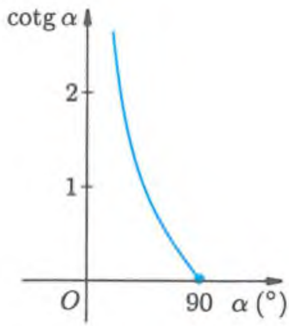


Kotangens



$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$\mathrm{cotg}\,0°$ nemá smysl, $\quad \mathrm{cotg}\,90° = 0$



Vztahy mezi funkcemi úhlu

(pro $0° < \alpha < 90°$)

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(90° - \alpha) \\ \cos\alpha &= \sin(90° - \alpha) \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}(90° - \alpha) \\ \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{tg}(90° - \alpha) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

RNDr. Jiří Herman, Ph.D.
PaedDr. Vítězslava Chrápavá
Mgr. Eva Jančovičová
Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií
Podobnost a funkce úhlu

Obálku navrhl Miloš Jirsa
Ilustrovala Lucie Voráčková
Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Žitná 25, 117 01 Praha 1,
roku 2000
Edice Učebnice pro základní školy
Odpovědná redaktorka Marie Nováková
Sazbu programem TEX a pérové obrázky
připravil Jura Charvát
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod
1. vydání

PROMETHEUS
9511196

ISBN 80-7196-206-6
9 788071 962069