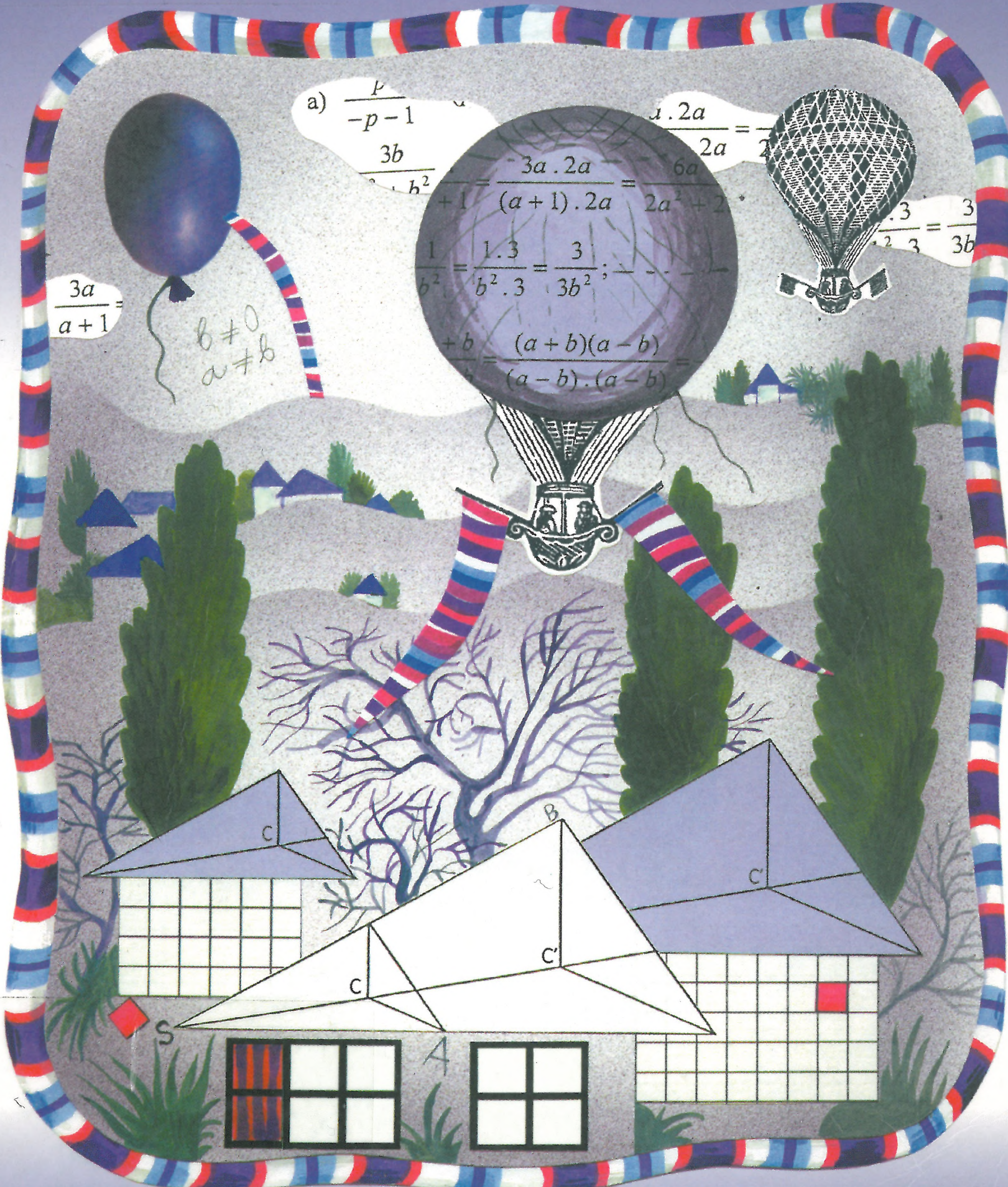
Matematika

pre 9. ročník základných škôl • 2. časť



Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

Matematika

pre 9. ročník základných škôl

2. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 2002

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

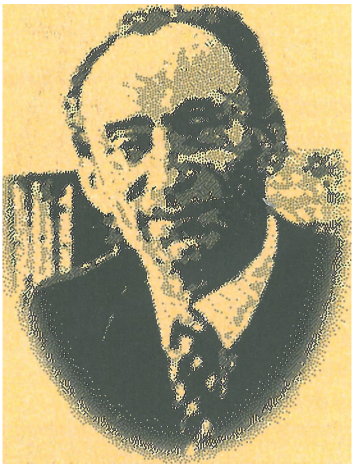
Illustrations © akademická maliarka Táňa Žitňanová, 2002
Design © Igor Imro, 2002

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky
dňa 24. apríla 2002 pod číslom 438/2002-41
ako učebnicu matematiky pre 9. ročník ZŠ, 2. časť.

Prvé vydanie, 2002

ISBN 80-08-02947-1

OBSAH



Milan Kolibiar

(14. 2. 1922 až 9. 7. 1994)

Slovenský matematik. Narodil sa v Detvianskej Hute. Pôsobil ako profesor na Univerzite Komenského **v** *Bratislave. Patril ku generácii zakladateľov slovenskej matematiky. Venoval sa algebre a topológii. Zaslúžil sa tiež o rozvoj teórie zväzov. Podstatne prispel ku skvalitňovaniu vyučovania matematiky na stredných školách. Zakladal a potom aj dlhé roky organizoval súťaže Matematickej olympiády na Slovensku.*
Vedecká výchova mladej generácie slovenských matematikov patrila k jeho prioritám.

Milí deviataci!

Dostávate do rúk poslednú časť učebnice matematiky, ktorá uzatvára sériu učebníc matematiky pre druhý stupeň základných škôl.

V tomto roku sa pripravujete na prijímacie skúšky na stredné školy. Preto je potrebné doplniť všetky znalosti učiva, ktoré sú predpísané pre základnú školu a súčasne zopakovať, čo ste sa doteraz naučili. Pritom vám pomôže táto 2. časť učebnice pre 9. ročník ZŠ. Pomocou nej sa naučíte riešiť pravouhlý trojuholník, oboznámite sa s lineárnou funkciou, zopakujete a doplníte si úlohy na výpočet objemu a povrchu známych telies, dozviete sa o základoch práce s údajmi a v rozširujúcom učive si doplníte poznatky o topografických prácach v teréne, o goniometrických funkciách a rozriešite niekoľko úloh z teórie grafov.

V snahe pomôcť vám pri opakovaní, sme zostavili cvičenia na opakovanie tak, aby obsahovali úlohy z celého učiva matematiky od 5. až po 9. ročník.

Prajeme vám veľa úspechov v štúdiu a na prijímacích skúškach.

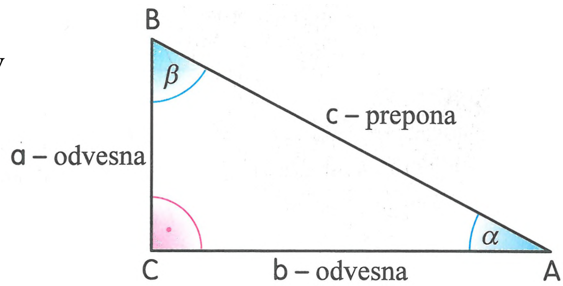
Autori

V učebnici používame tieto symboly:

- príklad
- problém
- riešenie
- zapamätať si
- zhrnutie alebo poučka
- úloha
- cvičenia
- vyskúšajte sa
- poznámka
- rozširujúce učivo

5 GONIOMETRIA OSTRÉHO UHLA

5.1 Pravouhlý trojuholník, podobnosť trojuholníkov



ZOPAKUJME SI

1 ***ÚLOHA***

a) Ktorá zo strán pravouhlého trojuholníka je najdlhšia?
b) Určte súčet veľkostí uhlov α a β.
c) Vyslovte Pytagorovu vetu.
d) Vyslovte vetu o podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov.
e) Čo možno povedať o vnútorných uhloch dvoch podobných trojuholníkov.

2 ***ÚLOHA***

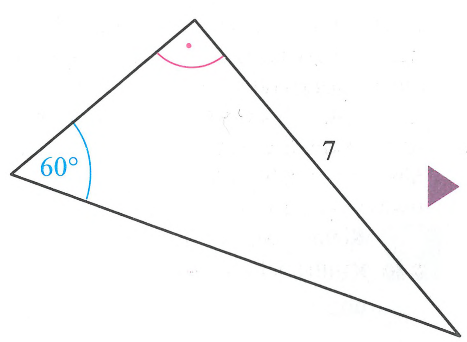
Narysujte trojuholník ABC so stranami $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm a trojuholník KLM tak, aby pre jeho strany platilo $k = 2a,\ l = 2b,\ m = 2c$.
a) Overte, či sú obidva trojuholníky pravouhlé.
b) Odôvodnite, prečo platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$.

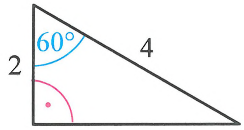
Návod:
a) Overte, že pre dĺžky strán obidvoch trojuholníkov platí $x^2 + y^2 = z^2$.
b) Ukážte, že platí $\triangle ABC \sim \triangle KLM$:

$$k : a = l : b = m : c = 2 : 1$$

[1] ***PRÍKLAD***

Rozhodnite, či sú trojuholníky na obrázku podobné. Určte dĺžky všetkých strán a veľkosti uhlov zobrazených trojuholníkov. Dĺžky na obrázku sú v centimetroch.

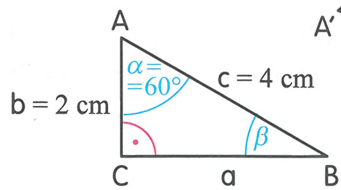


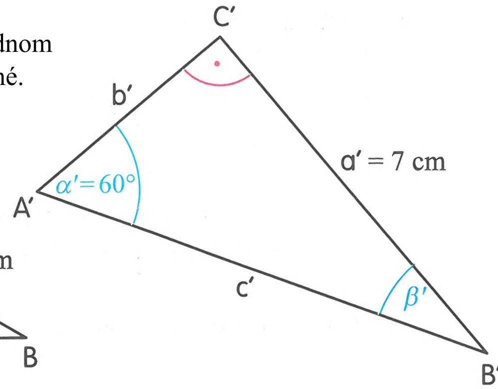


RIEŠENIE

Trojuholníky sú pravouhlé a zhodujú sa v jednom ostrom uhle, a preto podľa vety *uu* sú podobné.

Prerysujme dané trojuholníky a označme vrcholy, strany a uhly





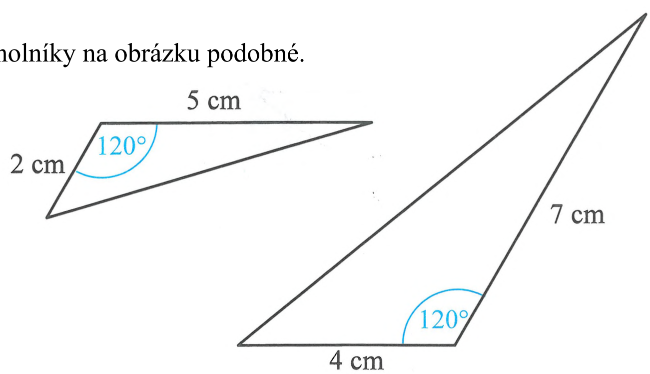
Pretože súčet vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je 180°, platí $\beta = 30°$. Z podobnosti trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ vyplýva $\beta = \beta' = 30°$

$$
\begin{array}{llll}
b = 2\text{ cm} & a' = 7\text{ cm} & & \\
c = 4\text{ cm} & b' = \ldots\text{ cm} & & \\
a = \ldots\text{ cm} & \underline{c' = \ldots\text{ cm}} & & \\
\underline{a^2 = c^2 - b^2} & a' = ka & b' = kb & \\
a^2 = 4^2 - 2^2 & k = \dfrac{a'}{a} & c' = kc & \\
a^2 = 16 - 4 & & & \\
a^2 = 12 & & & \\
a = \sqrt{12} & k = \dfrac{7}{\sqrt{12}} & b' = \dfrac{7}{\sqrt{12}} \,.\, 2 & c' = \dfrac{7}{\sqrt{12}} \,.\, 4 \\
\underline{a = 3{,}46} & \underline{k \doteq 2{,}02} & \underline{b' = 4{,}04} & \underline{c' = 8{,}08} \\
a \doteq 3{,}46\text{ cm} & & b' \doteq 4{,}04\text{ cm} & c' \doteq 8{,}08\text{ cm}
\end{array}
$$

Odpoveď: Trojuholníky ABC, $A'B'C'$ sú podobné. Pre uhly a strany v daných trojuholníkoch platí: $\beta = \beta' = 30°$, $a \doteq 3{,}46$ cm, $b' \doteq 4{,}04$ cm, $c' \doteq 8{,}08$ cm.

[2] ***PRÍKLAD***

Rozhodnite, či sú trojuholníky na obrázku podobné.



RIEŠENIE

Keďže trojuholník má najviac jeden tupý uhol, musí vrcholu tohto uhla v jednom trojuholníku odpovedať vrchol uhla 120° v druhom trojuholníku.

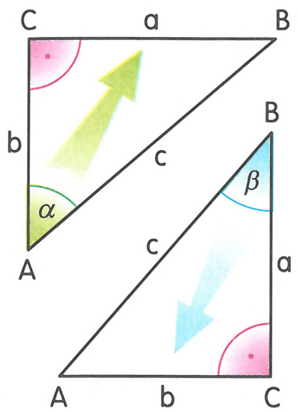
Keby boli uvažované trojuholníky podobné, musel by sa pomer dĺžok strán, ktoré tento uhol určujú v jednom trojuholníku, rovnať pomeru dĺžok odpovedajúcich strán v druhom trojuholníku.

Pretože $\frac{2}{5} \neq \frac{4}{7}$, trojuholníky na obrázku nie sú podobné.

3 ***ÚLOHA***

V pravouhlom trojuholníku má jeden ostrý uhol veľkosť 40°, v druhom pravouhlom trojuholníku má jeden ostrý uhol veľkosť 50°. Sú tieto trojuholníky podobné?

Urobme nasledujúci dohovor:



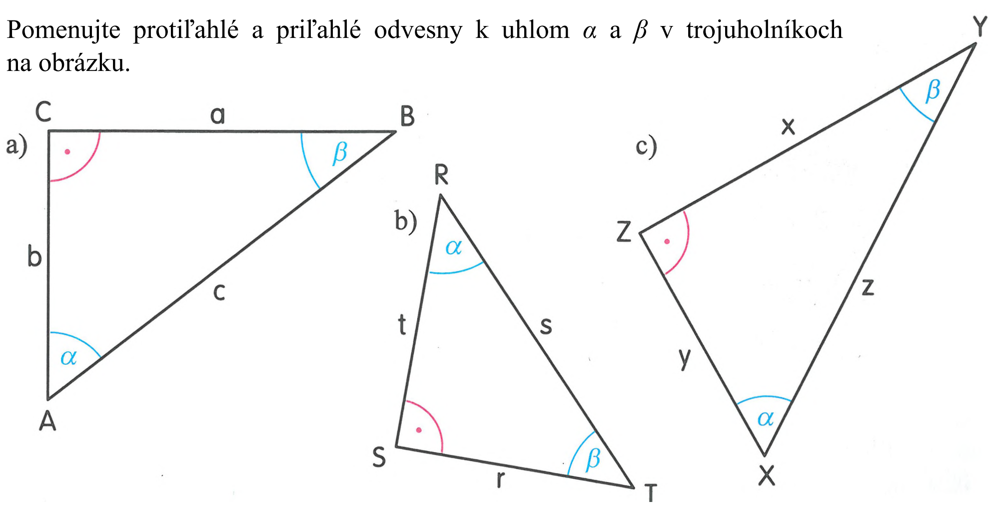
a je odvesna protiľahlá k uhlu *α*
b je odvesna priľahlá k uhlu *α*
c je prepona

a je odvesna priľahlá uhlu *β*
b je odvesna protiľahlá uhlu *β*
c je prepona

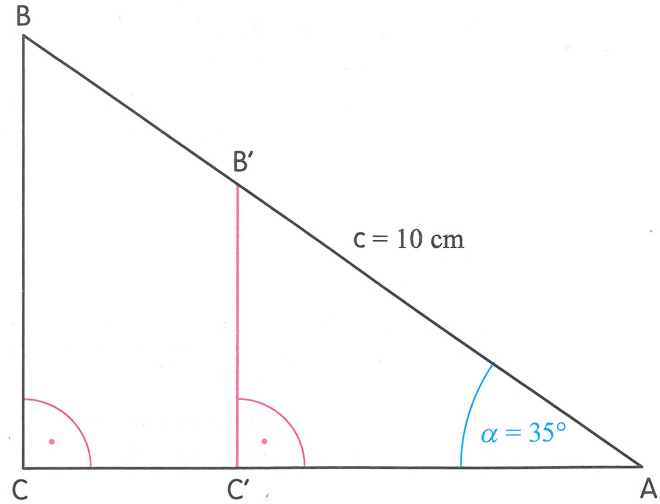
Prepona vždy leží oproti pravému uhlu.

4 ***ÚLOHA***

Pomenujte protiľahlé a priľahlé odvesny k uhlom *α* a *β* v trojuholníkoch na obrázku.



Na nasledujúcom obrázku je narysovaný pravouhlý trojuholník ABC s uhlom $\alpha = 35°$ a dĺžkou prepony $c = 10$ cm.



Narysujte obrázok do zošita (rysujte presne).

Odmerajte dĺžku protiľahlej odvesny a k uhlu α a vypočítajte pomer $\frac{a}{c}$. Ak ste rysovali presne, $a = 5{,}7$ cm, pomer $\frac{a}{c} = \frac{5{,}7 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \frac{a}{c} = 0{,}57$.

Ďalej zvoľme na polpriamke AB ľubovoľný bod B', veďme ním kolmicu na polpriamku AC. Priesečník tejto kolmice s polpriamkou AC označme C'. Vznikol ďalší pravouhlý trojuholník $AB'C'$, ktorý má s trojuholníkom ABC spoločný uhol $\alpha = 35°$ ale dĺžky strán a', c' odlišné od a a c. (Každý zo žiakov má dĺžky strán závislé od voľby bodu B' – pravdepodobne každý žiak iné). Odmerajte dĺžky strán a', c' a vypočítajte pomer $\frac{a'}{c'}$. Zapíšte na tabuľu výsledky všetkých žiakov v triede. Ak ste rysovali presne, výsledky (aspoň po prvé desatinné miesto) máte rovnaké.

Môžeme vysloviť domnienku:

Pomer dĺžky protiľahlej odvesny a dĺžky prepony je vo všetkých pravouhlých trojuholníkoch s uhlom $\alpha = 35°$ rovnaký.

Dôkaz tohto tvrdenia urobíme pomocou podobnosti trojuholníkov.

Pretože sa obidva pravouhlé trojuholníky zhodujú v ostrom uhle α, ktorý má veľkosť 35°, sú podľa vety *uu* o podobnosti trojuholníkov tieto trojuholníky podobné, teda

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Z podobnosti trojuholníkov $A'B'C'$ a ABC vyplýva:

$$a' = k \,.\, a, \quad b' = k \,.\, b, \quad c' = k \,.\, c, \quad \text{pre } k > 0.$$

Pomery pre veľkosti strán sú:

$$\frac{a'}{c'} = \frac{k \,.\, a}{k \,.\, c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{b'}{c'} = \frac{k \,.\, b}{k \,.\, c} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{k \,.\, a}{k \,.\, b} = \frac{a}{b}$$

Pomer dĺžky protiľahlej odvesny k uhlu α a dĺžky prepony je vo všetkých podobných pravouhlých trojuholníkoch s uhlom α rovnaký.

Pomer dĺžky priľahlej odvesny k uhlu α a dĺžky prepony je vo všetkých podobných pravouhlých trojuholníkoch s uhlom α rovnaký.

Pomer dĺžky protiľahlej odvesny k uhlu α a dĺžky priľahlej odvesny k uhlu α je vo všetkých podobných trojuholníkoch s uhlom α rovnaký.

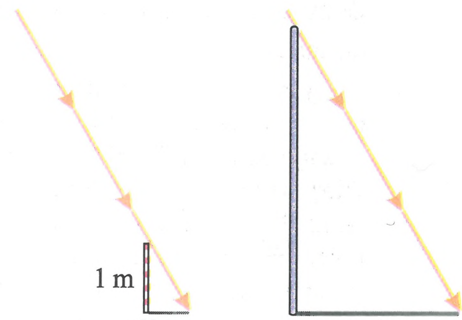
CVIČENIA

1. Načrtnite pravouhlý trojuholník KLM s pravým uhlom pri vrchole L. Pomenujte strany trojuholníka podľa polohy k obidvom ostrým uhlom.

2. V pravouhlom trojuholníku má jeden ostrý uhol veľkosť 35°, v druhom pravouhlom trojuholníku má jeden ostrý uhol veľkosť 55°. Sú tieto trojuholníky podobné?

3. Odôvodnite tvrdenie: Výška na preponu rozdelí ľubovoľný pravouhlý trojuholník na dva podobné trojuholníky.

4. Zvislá tyč dlhá 1 m vrhá pri slnečnom osvetlení na vodorovnú rovinu tieň dlhý 60 cm. Aký je vysoký zvislý stĺp, ktorého tieň je vtedy dlhý 2,4 m?



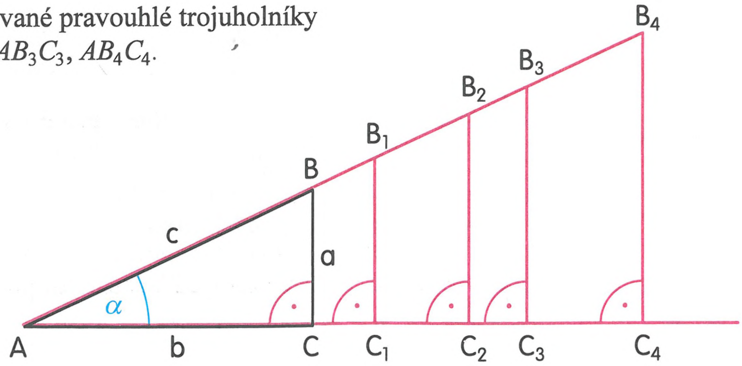
5. V pravouhlom trojuholníku majú odvesny dĺžky $a = 80$ mm, $b = 240$ mm. V podobnom pravouhlom trojuholníku je dĺžka väčšej odvesny
   a) 180 mm, b) 150 mm, c) 120 mm, d) 60 mm.
   Vypočítajte dĺžku druhej odvesny.

6. Daný je pravouhlý trojuholník ABC, v ktorom $a = 16$ cm, $c = 20$ cm. Vypočítajte dĺžku druhej odvesny a pomery dĺžok všetkých strán tohto trojuholníka.

5.2 Sínus uhla, kosínus uhla, tangens uhla

Často potrebujeme určiť veľkosť strán a uhlov v pravouhlom trojuholníku. Ak nato použijeme pravítko a uhlomer, môže byť naše meranie z najrôznejších dôvodov nepresné. Ukážeme si preto ďalší, presnejší a možno aj pohodlnejší, spôsob vypočítania dĺžky strán a veľkostí uhlov pravouhlého trojuholníka.

Na obrázku sú narysované pravouhlé trojuholníky
ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, AB_4C_4.



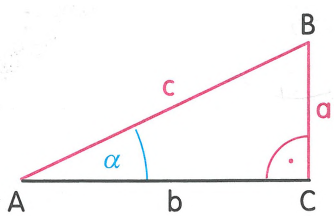
Všetky tieto trojuholníky sa zhodujú v dvoch uhloch, v uhle a a v pravom uhle. Tieto pravouhlé trojuholníky sú podobné, a preto pomery dĺžok odpovedajúcich strán sú rovnaké.

$$1.\quad \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|} = \frac{|B_3C_3|}{|AB_3|} = \frac{|B_4C_4|}{|AB_4|} = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}}$$

$$2.\quad \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|AC_2|}{|AB_2|} = \frac{|AC_3|}{|AB_3|} = \frac{|AC_4|}{|AB_4|} = \frac{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}}$$

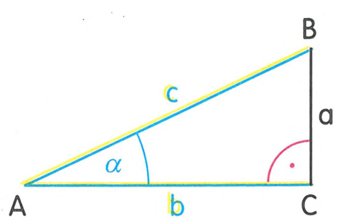
$$3.\quad \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|AC_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AC_2|} = \frac{|B_3C_3|}{|AC_3|} = \frac{|B_4C_4|}{|AC_4|} = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}$$

Aby sme nemuseli vždy vypisovať, o ktorý pomer dĺžok strán ide, zavedieme pre jednotlivé pomery samostatné názvy a označenia.



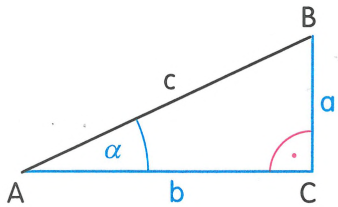
$$\frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}} = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$

Sínus uhla α je pomer dĺžky protiľahlej odvesny a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka. Píšeme sin α, čítame sínus α.



$$\frac{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}} = \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

Kosínus uhla α je pomer dĺžky priľahlej odvesny a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka. Píšeme cos α, čítame kosínus α.

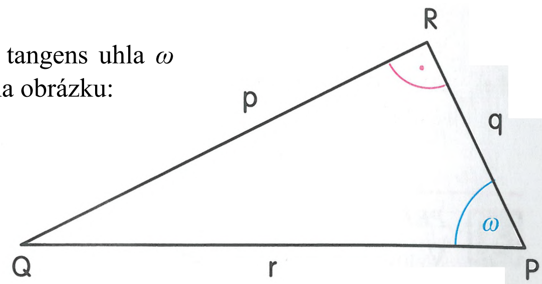


$$\frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka priľahlej odvesny}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

Tangens uhla α je pomer dĺžky protiľahlej odvesny a dĺžky priľahlej odvesny pravouhlého trojuholníka. Píšeme tg α, čítame tangens α.

PRÍKLAD [1]

Zapíšte sínus uhla ω, kosínus uhla ω a tangens uhla ω pre uhol ω v trojuholníku narysovanom na obrázku:



RIEŠENIE

Vzhľadom na označenie strán a uhla môžeme napísať:

$$\sin \omega = \frac{p}{r} \left(\frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}} \right)$$

$$\cos \omega = \frac{q}{r} \left(\frac{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}} \right)$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{p}{q} \left(\frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka priľahlej odvesny}} \right)$$

PRÍKLAD [2]

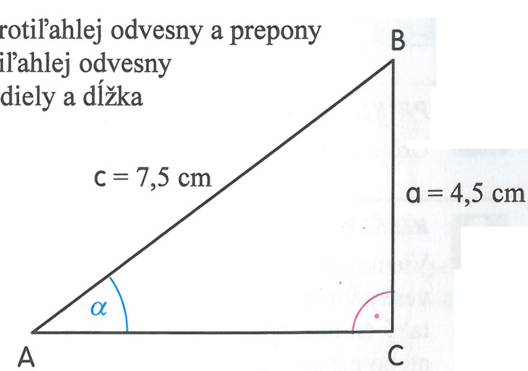
Zostrojte aspoň jeden pravouhlý trojuholník ABC, v ktorom pre vnútorný uhol α platí:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos \alpha = \frac{4}{7}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

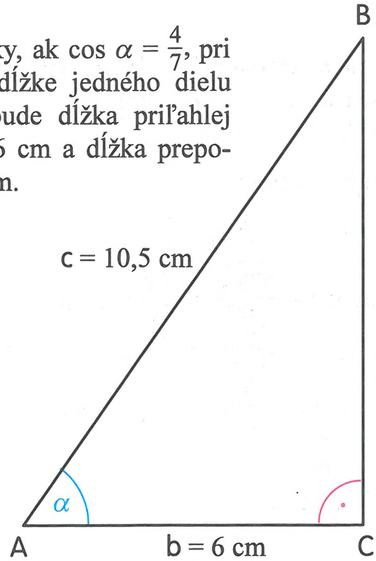
RIEŠENIE

a) Ak $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ znamená pomer dĺžok protiľahlej odvesny a prepony vzhľadom na uhol α. Teda dĺžka protiľahlej odvesny istého pravouhlého trojuholníka sú 3 diely a dĺžka prepony 5 takých istých dielov.

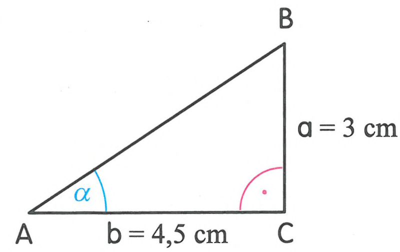
Zvolíme si jeden diel, napr. 1,5 cm, potom pre tento trojuholník bude dĺžka protiľahlej odvesny 4,5 (3 . 1,5) cm a dĺžka prepony 7,5 (5 . 1,5) cm.



b) Analogicky, ak $\cos\alpha = \frac{4}{7}$, pri zvolenej dĺžke jedného dielu 1,5 cm bude dĺžka priľahlej odvesny 6 cm a dĺžka prepony 10,5 cm.



c) Ak $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, potom dĺžka protiľahlej odvesny je 3 cm a dĺžka priľahlej odvesny je 4,5 cm (pri zvolenej dĺžke dielu 1,5 cm).

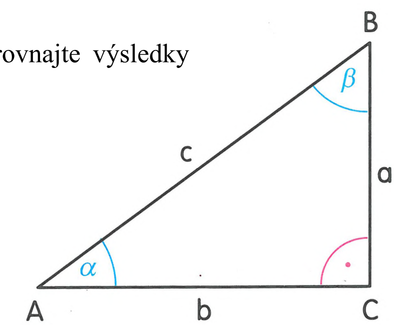


[3] ***PRÍKLAD***

Vyjadrite z pravouhlého trojuholníka *ABC* a porovnajte výsledky z a) a b):

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$

b) $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$



RIEŠENIE

$$\text{a)}\ \sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{b)}\ \sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Porovnaním dostaneme rovnosti:

$$\sin\alpha = \cos\beta \qquad \sin\beta = \cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

[4] ***PRÍKLAD***

Určte tg 45°, tg 20°, tg 30°, tg 60°.

RIEŠENIE

Vieme, že $\operatorname{tg}\alpha$ vypočítame ako pomer dĺžky protiľahlej odvesny a dĺžky priľahlej odvesny v pravouhlom trojuholníku s ostrým uhlom α. Aby sa $\operatorname{tg}\alpha$ dal ľahko určiť, treba taký trojuholník vhodne zvoliť (napr. tak, že dĺžka priľahlej odvesny sa rovná 10 cm alebo priamo nejakej jednotke dĺžky).

a) Zostrojme pravouhlé trojuholníky, ktoré majú spoločnú odvesnu AC, $|AC| = 10$ cm a pri vrchole A ostré uhly s veľkosťami 20°, 30°, 45°, 60°.

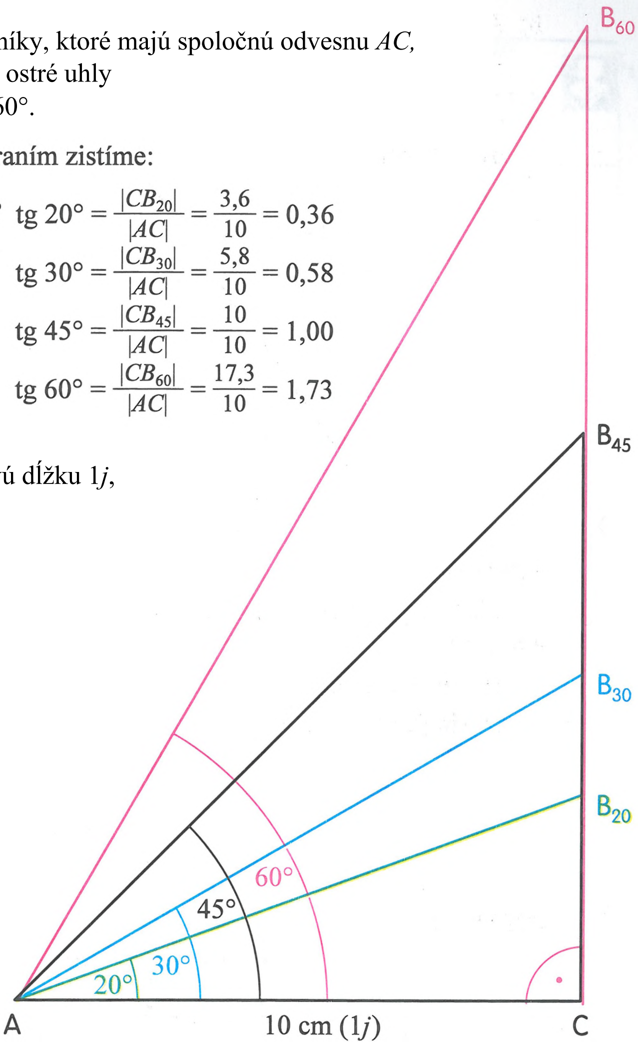
Ak $|AC| = 10$ cm, tak odmeraním zistíme:

$|CB_{20}| = 3{,}6$ cm Odtiaľ $\operatorname{tg} 20° = \dfrac{|CB_{20}|}{|AC|} = \dfrac{3{,}6}{10} = 0{,}36$

$|CB_{30}| = 5{,}8$ cm $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{|CB_{30}|}{|AC|} = \dfrac{5{,}8}{10} = 0{,}58$

$|CB_{45}| = 10$ cm $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{|CB_{45}|}{|AC|} = \dfrac{10}{10} = 1{,}00$

$|CB_{60}| = 17{,}3$ cm $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{|CB_{60}|}{|AC|} = \dfrac{17{,}3}{10} = 1{,}73$



b) Ak za $|AC|$ zvolíme jednotkovú dĺžku $1j$, j je dĺžková jednotka, potom

$$|AC| = 1j$$

a nameriame

$$|CB_{20}| = 0{,}36\,j$$
$$|CB_{30}| = 0{,}58\,j$$
$$|CB_{45}| = 1\,j$$
$$|CB_{60}| = 1{,}73\,j$$

Zistili sme, že

$$\operatorname{tg} 20° = 0{,}36$$
$$\operatorname{tg} 30° = 0{,}58$$
$$\operatorname{tg} 45° = 1{,}00$$
$$\operatorname{tg} 60° = 1{,}73$$

5

PRÍKLAD

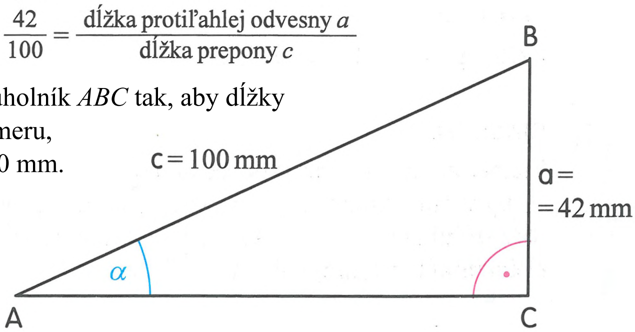
Určte veľkosť uhla α, ak $\sin \alpha = 0{,}42$.

RIEŠENIE

$$\sin \alpha = 0{,}42$$

$$\sin \alpha = \frac{42}{100} = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny } a}{\text{dĺžka prepony } c}$$

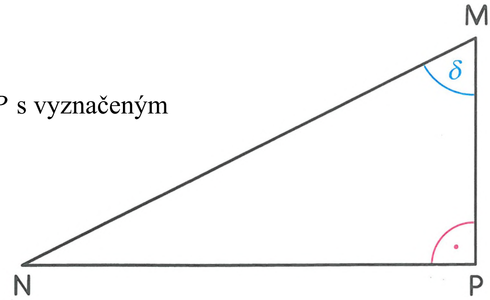
Teraz zostrojíme pravouhlý trojuholník ABC tak, aby dĺžky strán odpovedali uvedenému pomeru, t. j. $|BC| = a = 42$ mm, $|AB| = 100$ mm.



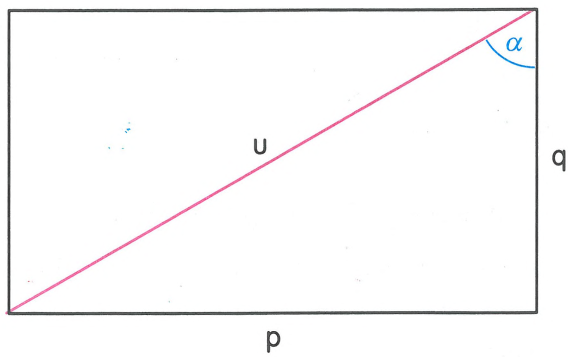
Odmeraním zistíme, že uhol $\alpha = 25°$ (presnejšie 24°50').

CVIČENIA

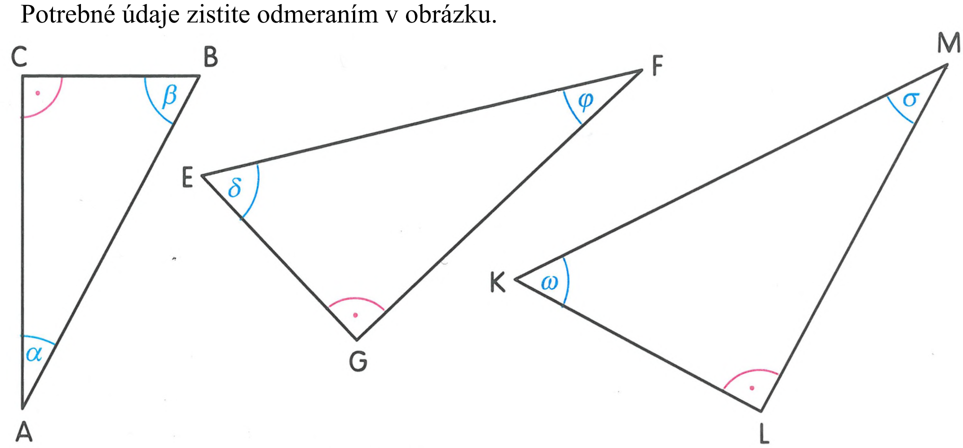
1. Na obrázku je pravouhlý trojuholník MNP s vyznačeným uhlom δ. Zapíšte sin δ, cos δ a tg δ.



2. Na obrázku je obdĺžnik so stranami p, q a uhlopriečkou u. Zapíšte sin α a tg α.



3. Určte hodnoty tangens všetkých ostrých uhlov v trojuholníkoch na obrázku. Potrebné údaje zistite odmeraním v obrázku.



4. Zostrojte uhol α, ak sin $\alpha = \frac{2}{3}; \frac{3}{7}; \frac{1}{10}$.

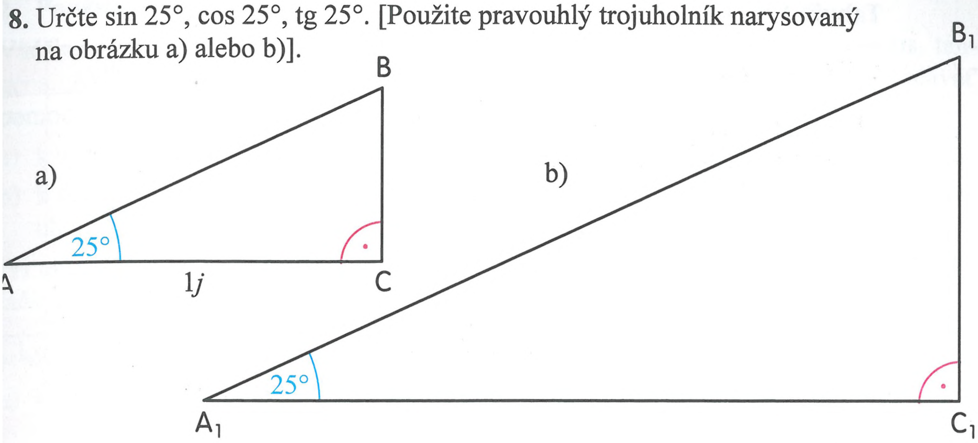
5. Vypočítajte sin 45°, cos 45° pomocou dĺžky uhlopriečky štvorca, ktorého strana má dĺžku 1 dm. Výsledky porovnajte.

6. Viete, že sin 30° $= \frac{1}{2}$. Napíšte hodnotu cos 60°.

7. Zostrojte aspoň jeden pravouhlý trojuholník MNP, v ktorom pre vnútorný uhol β platí:

a) sin $\beta = \frac{1}{2}$ b) cos $\beta = \frac{3}{7}$ c) tg $\beta = \frac{3}{4}$

8. Určte sin 25°, cos 25°, tg 25°. [Použite pravouhlý trojuholník narysovaný na obrázku a) alebo b)].



9. Určte veľkosť uhla α, ak cos α = 0,6.

5.3 Hodnoty sínusu uhla, kosínusu uhla, tangensu uhla

Pri práci so sínusom, kosínusom a tangensom uhla možno použiť Tabuľky pre základnú školu alebo kalkulačku.

1. Tabuľky pre základnú školu

Tabuľky poslúžia:

a) na určenie hodnoty sínus uhla, kosínus uhla, tangens uhla pre veľkosť daného uhla.

b) na určenie veľkosti ostrého uhla k danej hodnote sínusu uhla, kosínusu uhla, alebo tangensu uhla.

PRÍKLAD

Zistite hodnoty sínusov pre uhly s veľkosťami:

a) 30° b) 33° c) 45°20'

RIEŠENIE

V tabuľkách pre ZŠ nájdeme tabuľku M6A (alebo 8A). V stĺpci označenom ° sú uvedené veľkosti uhlov v stupňoch, v hornom riadku sú uvedené minúty. Uvedené hodnoty sú zaokrúhlené na 4 desatinné miesta. To znamená, že z tabuliek väčšinou získame len približné hodnoty

a) V prvom stĺpci nájdeme 30° a v tom istom riadku v stĺpci 0' je uvedená hodnota 0,500 0. *Zapíšeme:* sin 30° = 0,500 0.

b) Rovnako postupujeme pri hľadaní sin 33°. Dávajte pozor, pretože v tabuľke sa stále neopakuje 0,… . *Zapíšeme:* sin 33° = 0,544 6

c) V prvom stĺpci vyhľadáme 45° a v tom istom riadku, v stĺpci 20' prečítame 0,711 2. *Zapíšeme:* sin 45°20' = 0,711 2

Na nasledujúcej strane je ukážka tabuliek i s riešením 1. príkladu.

Tabuľka hodnôt sínusu uhla

	°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
	0	0,000 0	002 9	005 8	008 7	011 6	014 5
	1	017 5	020 4	023 3	026 2	029 1	032 0
	2	034 9	037 8	040 7	043 6	049 5	049 4
	3	052 3	055 2	058 1	061 0	064 0	066 9
	4	069 8	072 7	075 6	078 5	081 4	084 3
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a)	**30**	0,500 0	502 5	505 0	507 5	510 0	512 5
	31	515 0	517 5	520 0	522 5	525 0	527 5
	32	529 9	532 4	543 8	537 3	539 8	542 2
b)	**33**	546 6	547 1	549 5	551 9	554 4	556 8
	34	559 2	561 6	564 0	566 4	568 8	571 2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c)	**45**	0,707 1	709 2	711 2	713 3	715 3	717 3
	46	719 3	751 4	723 4	725 4	727 4	729 4
	47	731 4	733 3	735 3	737 3	739 2	741 2

PRÍKLAD

Pomocou tabuliek určte približnú veľkosť uhlov α, β, ak

a) $\sin \alpha = 0{,}606\,5$ b) $\sin \beta = 0{,}76$

RIEŠENIE

Pôjde len o približné hodnoty uhlov.

a) V tabuľke sínus nájdeme číslo 0,606 5 a v tom istom riadku a v prvom stĺpci sú uvedené stupne 37°. Stĺpec, v ktorom sme našli číslo 0,606 5, je označený 20'.

Zapíšeme: $\alpha = 37°\ 20'$

b) V tabuľke sínus opäť hľadáme číslo 0,76, nie je také číslo, a preto vyhľadáme naj-! bližšiu hodnotu k číslu 0,760 0, je to číslo 0,760 4 a odčítame ako v predošlom prípade. Tým určíme približnú veľkosť uhla. *Zapíšeme:* $\beta = 49°\ 30'$

PRÍKLAD

Pomocou tabuliek určte približnú veľkosť uhlov α, β, ak

a) $\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}565\,8$ b) $\mathrm{tg}\, \beta = 1{,}563$

RIEŠENIE

a) V tabuľke tangens nájdeme číslo 0,565 8 a v tom istom riadku a v prvom stĺpci je uvedené 29°. Stĺpec, v ktorom sme našli číslo 0,565 8, je označený 30'.

Zapíšeme: $\alpha = 29°\ 30'$

b) Opäť v tabuľke tangens hľadáme číslo 1,565. Také číslo nie je uvedené, a preto hľadáme najbližšiu hodnotu, je to číslo 1,560 a odčítame ako v bode a). Tým určíme len približnú veľkosť uhla. *Zapíšeme:* $\beta = 57°\ 20'$

2. Použitie kalkulačky

Väčšina kalkulačiek má vo svojom programe aj hodnoty funkcií sínus, kosínus, tangens. Ak máme takú kalkulačku k dispozícii, nemusíme tieto hodnoty vyhľadávať pomocou tabuliek. Pomocou kalkulačky riešime dve základné úlohy:

a) k danej veľkosti uhla určiť hodnotu sínus uhla, kosínus uhla, tangens uhla,

b) k danej hodnote sínus uhla, kosínus uhla, tangens uhla určiť odpovedajúcu veľkosť uhla.

Pri práci s kalkulačkou sa vždy treba oboznámiť najskôr s návodom na použitie kalkulačky a pracovať podľa návodu.

Ukážeme postup na kalkulačke:

a) Určte hodnotu sínus uhla pre uhol veľkosti 23°:

ON/C 2 3 SIN → 0.390731128

Po zaokrúhlení na štyri platné číslice: sin 23° = 0,390 7

b) Určte hodnotu kosínus pre uhol veľkosti 54° 30'.
Na uvedenom type kalkulačky nie sú vyznačené minúty a sekundy. Preto 54° 30' vyjadríme desatinným číslom 54,5

ON/C 5 4 • 5 COS → 0.580702955

Po zaokrúhlení na štyri platné číslice: cos 54° 30' = 0,580 7

c) Určte uhol a, ktorého tg α = 0,324 9

ON/C 0 • 3 2 4 9 2nd TAN → 17.99897925

Po zaokrúhlení sa $\alpha = 18°$

POZNÁMKA

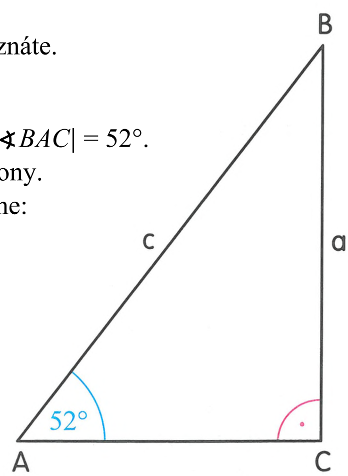
Kalkulačku uvedieme do režimu počítanie v *stupňoch tlačidlom* DRG.

PRÍKLAD

Určte hodnotu sin 52° všetkými spôsobmi, ktoré už poznáte.

RIEŠENIE

a) Zostrojíme ľubovoľný pravouhlý trojuholník *ABC*, $|\sphericalangle BAC| = 52°$.
Odmeriame dĺžku protiľahlej odvesny a dĺžku prepony.
Napríklad v trojuholníku *ABC* na obrázku nameriame:



a = 52 mm

c = 66 mm

sin 52° = ...

$$\sin 52° = \frac{a}{c}$$

$$\sin 52° = \frac{52}{66}$$

sin 52° = 0,8

POZNÁMKA

Výhodne zvolený trojuholník by mohol mať preponu dĺžky 100 mm. Pri konštrukcii by sme použili Talesovu vetu, najprv by sme zostrojili preponu AB, potom Talesovu kružnicu a potom uhol BAC $|\sphericalangle BAC| = 52°$.

b) V tabuľkách vyhľadáme: $\underline{\sin 52° = 0{,}788\,0}$

c) Použijeme kalkulačku: ON/C 5 2 SIN → 0.788010753

Po zaokrúhlení: $\underline{\sin 52° = 0{,}788\,0}$

PRÍKLAD 5 R

Určte veľkosť uhla α, ak $\sin\alpha = 0{,}711\,2$, všetkými spôsobmi, ktoré už poznáte.

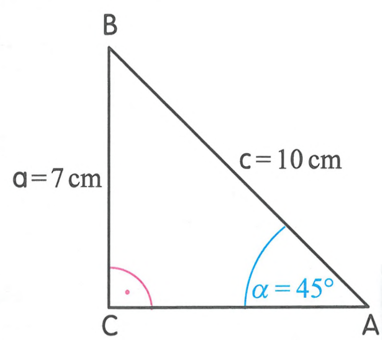
RIEŠENIE R

a) Veľkosť uhla α zistíme meraním v pravouhlom trojuholníku *ABC*:
$\sin\alpha = 0{,}711\,2 \doteq 0{,}7$

$\sin\alpha = \dfrac{7}{10}$ ← dĺžka protiľahlej odvesny a k uhlu α; ← dĺžka prepony c

Pre dĺžku použijeme rovnaké jednotky.
Zostrojíme pravouhlý trojuholník s týmito rozmermi a odmeriame veľkosť uhla α.

$\underline{\alpha \doteq 45°}$



Môžeme zostrojiť ktorýkoľvek trojuholník podobný trojuholníku *ABC*.

b) Veľkosť uhla vyhľadáme v tabuľkách: $\sin\alpha = 0{,}711\,2$
$\underline{\alpha \doteq 45°20'}$

c) Použijeme kalkulačku

ON/C SIN^{-1} 0 • 7 1 1 2 = → 45.33263468

Po zaokrúhlení dostaneme: $\underline{\alpha \doteq 45°\,20'}$

C V I Č E N I A

1. Určte hodnoty $\sin\alpha$, ak: a) $\alpha = 25°$ b) $\alpha = 49°$ c) $\alpha = 67°$ d) $\alpha = 25°\,20'$ e) $\alpha = 69°\,30'$ f) $\alpha = 86°\,40'$

2. Určte hodnoty cos α, ak: a) $\alpha = 17°$ b) $\alpha = 39°$ c) $\alpha = 67° 40'$

3. Určte hodnoty tg α, ak: a) $\alpha = 22°$ b) $\alpha = 37°$ c) $\alpha = 60° 30'$

4. Bez použitia tabuliek alebo kalkulačky určte veľkosť uhla α, ak:
a) $\sin \alpha = 0{,}32$ b) $\cos \alpha = 0{,}76$ c) $\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}70$

5. Určte hodnoty sínusu a kosínusu a porovnajte ich:
a) $\sin 28° =$; $\cos 62° =$ c) $\cos 12° 30' =$; $\sin 77° 30' =$
b) $\sin 62° =$; $\cos 28° =$ d) $\cos 77° 30' =$; $\sin 12° 30' =$

6. Odôvodnite, že pre uhol α pravouhlého trojuholníka platí: $\mathrm{tg}\, \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

7. Určte všetkými spôsobmi veľkosť uhla α, ak $\cos \alpha = 0{,}809\,0$.

8. Zostrojte uhol α, ak platí $\mathrm{tg}\, \alpha = 1$.

5.4 Výpočty v geometrii

Pri riešení geometrických úloh používame okrem konštrukcií aj výpočty. Využitím sínusu uhla, kosínusu uhla a tangensu uhla a Pytagorovej vety môžeme v pravouhlom trojuholníku vypočítať dĺžky strán a veľkosti uhlov.

[1] ***PRÍKLAD***

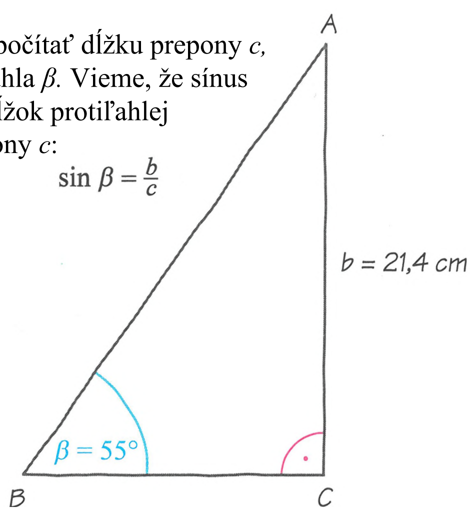
V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C má uhol β veľkosť 55° a k nemu protiľahlá odvesna b má dĺžku 21,4 cm. Vypočítajte dĺžku prepony c.

RIEŠENIE

Načrtneme pravouhlý trojuholník ABC, označíme strany a uhly a vyznačíme tie prvky, ktoré sú dané.

Pretože máme vypočítať dĺžku prepony c, použijeme sínus uhla β. Vieme, že sínus uhla β je pomer dĺžok protiľahlej odvesny b a prepony c:

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$



$b = 21{,}4$ cm
$\beta = 55°$
$c = \ldots$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$\sin 55° = 0{,}819\,2$

$$0{,}819\,2 = \frac{21{,}4}{c}$$

$c = 21{,}4 : 0{,}819\,2$
$c = 26{,}123\,047$
$c \doteq 26{,}1$

$c \doteq 26{,}1$ cm

Prepona c v pravouhlom trojuholníku ABC má dĺžku približne 26,1 cm.

PRÍKLAD

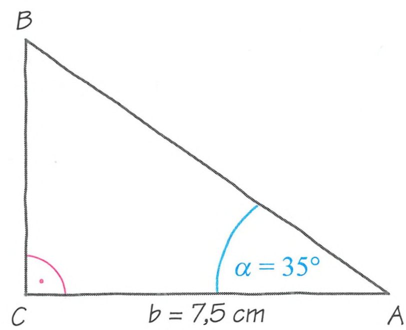
V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C má ostrý uhol veľkosť $\alpha = 35°$ a k nemu priľahlá odvesna b má dĺžku 7,5 cm. Vypočítajte dĺžku protiľahlej odvesny a k uhlu α.

RIEŠENIE

Načrtneme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, označíme strany a uhly a vyznačíme dané prvky.

Na výpočet dĺžky protiľahlej odvesny, ak poznáme dĺžku priľahlej odvesny a uhol α, použijeme tangens uhla α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



$b = 7{,}5$ cm

$\alpha = 35°$

$a = \ldots$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} 35° = \frac{a}{7{,}5}$$

$$0{,}700\,2 = \frac{a}{7{,}5}$$

$$a = 0{,}700\,2 \cdot 7{,}5$$

$$a = 5{,}251\,5$$

$$a = 5{,}23$$

$$a = 5{,}23 \text{ cm}$$

V danom pravouhlom trojuholníku ABC má protiľahlá odvesna k uhlu α dĺžku približne 5,25 cm.

PRÍKLAD

V pravouhlom trojuholníku ABC je dĺžka odvesny $|AC| = 5$ cm, dĺžka prepony $|AB| = 13$ cm.

Vypočítajte:
a) veľkosť jeho vnútorných ostrých uhlov,
b) dĺžku druhej odvesny.

RIEŠENIE

Zo zadania vyplýva, že $\triangle ABC$ má pravý uhol pri vrchole C.

$|AC| = b = 5$ cm

$|AB| = c = 13$ cm

$\alpha = \ldots$

$\beta = \ldots$

$a = \ldots$

a) $\sin \beta = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$

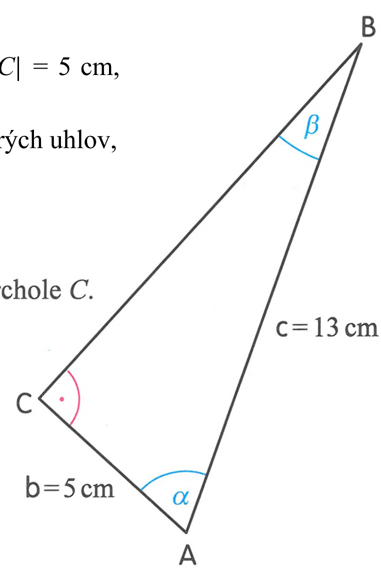
$\sin \beta = \frac{5}{13}$

$\sin \beta = 0{,}384\,6$

$\beta = 22°\,40'$

$\alpha = 90° - 22°\,40'$

$\alpha = 67°\,20'$



POZNÁMKA

Veľkosť uhla sme mohli vypočítať aj pomocou kosínusu uhla.
Vypočítané hodnoty uhlov sú približné.

b) Dĺžku odvesny BC môžeme vypočítať viacerými spôsobmi:

1. pomocou Pytagorovej vety:

$$|BC| = a, \quad \underline{a^2 + b^2 = c^2}$$
$$a^2 = 13^2 - 5^2$$
$$a = \sqrt{169 - 23}$$
$$a = \sqrt{144}$$
$$\underline{a = 12}$$
$$a \doteq 12 \text{ cm}$$

2. pomocou tangensu uhla α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$
$$\underline{a = b \,.\, \operatorname{tg} \alpha}$$
$$a = 5 \,.\, \operatorname{tg} 67^\circ 20'$$
$$\underline{a = 11{,}97}$$
$$a \doteq 12 \text{ cm}$$

V pravouhlom trojuholníku ABC majú vnútorné ostré uhly veľkosť 67° 20' a 22° 40', odvesna BC má po zaokrúhlení dĺžku 12 cm.

[4] ***PRÍKLAD***

Bez použitia tabuliek alebo kalkulačiek pomocou pravouhlého rovnoramenného trojuholníka a rovnostranného trojuholníka vypočítajte hodnoty sínus, kosínus a tangens pre uhly s veľkosťou 30°, 45° a 60°.

RIEŠENIE

a) Pre $\alpha = 45°$

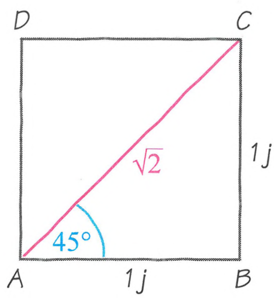
Načrtneme štvorec $ABCD$ a jeho uhlopriečku AC.
Predpokladajme, že $|AB| = 1$ (jednotka). Potom podľa Pytagorovej vety sa $|AC| = \sqrt{2}$.
Vyznačíme uhol CAB, $|\sphericalangle CAB| = 45°$.

Z trojuholníka ABC vypočítame:

$$\sin 45^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = 1$$



b) Pre uhly s veľkosťami 30° a 60°:

Načrtneme rovnostranný trojuholník KLM so stranami dĺžky 2 (jednotky).

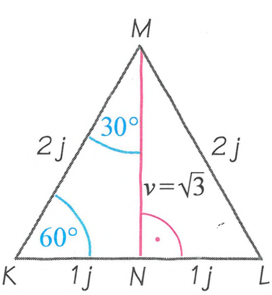
Vyznačíme jeho výšku v a vypočítame jej dĺžku:

$$v^2 = 2^2 - 1^2$$
$$v^2 = 3$$
$$\underline{v = \sqrt{3}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$



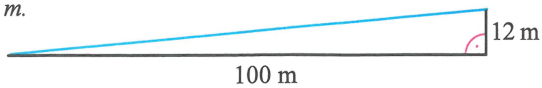
Výsledky zapíšeme v tabuľke:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

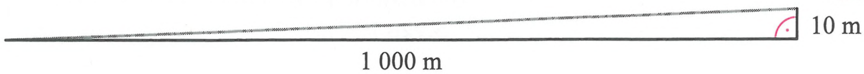
POZNÁMKA

V doprave sa často stretávame s pojmami „stúpanie“ („klesanie“). Stúpanie na cestách je vyjadrené v percentách, stúpanie železničnej trate sa udáva v promile.

Napríklad stúpanie 12 % znamená, že cesta vo vzdialenosti 100 m meranej vodorovne, stúpne o 12 m.



Stúpanie železničnej trate 10 ‰ znamená, že železničná trať vo vzdialenosti 1000 m meranej vodorovne, stúpne o 10 m.



[5] *PRÍKLAD*

Určte uhol stúpania: a) na ceste, keď stúpanie je 16 %,
b) na železničnej trati, keď stúpanie je 12 ‰.

RIEŠENIE

a) Ak máme určiť uhol stúpania, môžeme použiť tangens uhla: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{100} = 0{,}160\,0$
Z tabuliek pre tangens určíme $\alpha = 9°\ 5'$.

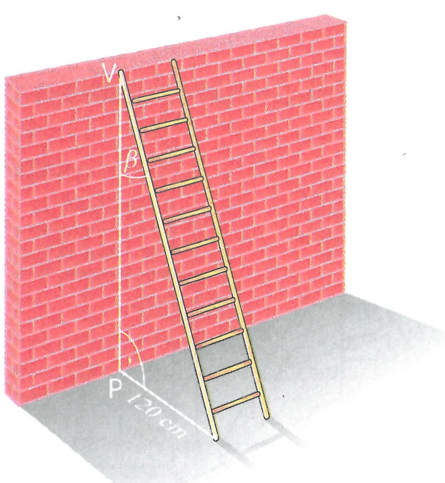
b) Ak má železničná trať stúpanie 12 ‰, tak $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{1\,000} = 0{,}012$
Z tabuliek hodnôt tangens určíme $\alpha = 40'$.

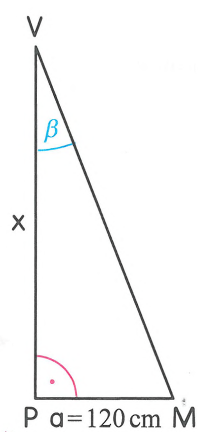
[6] *PRÍKLAD*

V akej výške sa dotýka rebrík múru, ak s múrom zviera uhol $\beta = 21°50'$ a zeme sa dotýka 120 cm od päty múra.

RIEŠENIE

Využijeme pravouhlý trojuholník *PMV*, v ktorom poznáme $a = |PM| = 120$ cm, uhol $\beta = 21°50'$. Neznámu výšku označíme x.





$a = 120$ cm
$\beta = 21°\ 50'$
$x = \dots$ cm

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{x}$$
$$\operatorname{tg} 21°\ 50' = \frac{120}{x}$$
$$x = 120 : 0{,}400\,6$$
$$x \doteq 299{,}6 \doteq 300$$

$$x \doteq 300 \text{ cm} \doteq 3 \text{ m}$$

Rebrík sa dotýka múru vo výške približne 3 m.

PRÍKLAD

Lanová trať je dlhá 870 m a jej priama časť stúpa pod uhlom s veľkosťou 40°. Vypočítajte vodorovnú vzdialenosť dolnej a hornej stanice lanovej trate a ich výškový rozdiel.

RIEŠENIE

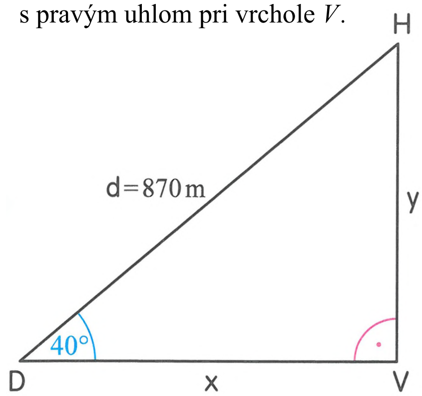
$d = 870$ m

$\alpha = 40°$

$x = \dots$

$y = \dots$

Použijeme pravouhlý trojuholník DVH s pravým uhlom pri vrchole V.



a) $\cos\alpha = \frac{x}{d}$

$\cos 40° = \frac{x}{870}$

$x = 870 \,.\, 0{,}7660$

$x \doteq 666{,}4$

$x \doteq 666{,}4$ m

b) $\sin\alpha = \frac{y}{d}$

$\sin 40° = \frac{y}{870}$

$y = 870 \,.\, 0{,}6428$

$y \doteq 559{,}2$

$y \doteq 559{,}2$ m

Vodorovná vzdialenosť staníc je približne 666 m a ich výškový rozdiel je približne 559 m.

CVIČENIA

1. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C sa:
   a) $\alpha = 42°$, c = 75 mm
   b) $\alpha = 45°$, c = 124 mm
   c) $\alpha = 32°$, $b = 72$ cm
   d) $\alpha = 78°\ 30'$, $b = 12$ cm
   Vypočítajte veľkosť protiľahlej odvesny k danému uhlu.

2. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C platí:
   a) $\alpha = 61°\ 10'$, $a = 54$ mm
   b) $\beta = 12°$, $b = 136$ mm
   c) $\alpha = 30°$, $b = 4{,}2$ dm
   d) $\beta = 81°40'$, $a = 43$ cm
   Vypočítajte dĺžku prepony a dĺžku druhej odvesny.

3. V pravouhlom trojuholníku ABC je daná veľkosť ostrého uhla α a dĺžka protiľahlej odvesny a. Vypočítajte dĺžku priľahlej odvesny, ak:
   a) $\alpha = 46°$, $a = 5{,}3$ m
   b) $\alpha = 2°\ 30'$, $a = 1$ m
   c) $\alpha = 85°\ 30'$, $a = 11{,}5$ cm
   d) $\alpha = 37°\ 40'$, $a = 20$ dm

4. Určte veľkosť vnútorných uhlov pravouhlého trojuholníka so stranami $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm.

5. Vypočítajte dĺžky ostatných strán a veľkosti ostrých vnútorných uhlov pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C, ak je dané:

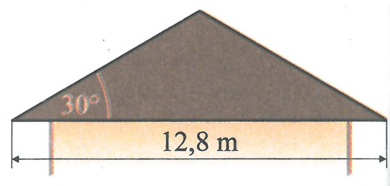
a) $c = 56{,}4$ cm, $\alpha = 62° \, 20'$	d) $b = 8{,}5$ cm, $\beta = 42° \, 50'$
b) $c = 12{,}3$ cm, $\beta = 18{,}5°$	e) $a = 0{,}26$ m, $\alpha = 35°$
c) $b = 9{,}2$ m, $\alpha = 72°$	f) $b = 1$ m, $\alpha = 63°$

6. Ako ďaleko od rozhľadne vysokej 48 m stál turista, ak jej vrchol videl pod uhlom s veľkosťou 40°?

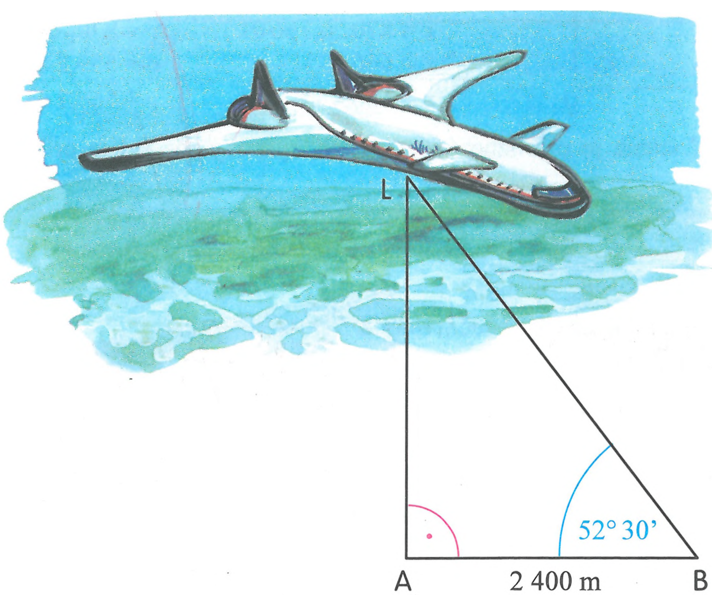
7. Priama železničná trať má stúpanie 16 ‰. Akú veľkosť má uhol stúpania?

8. Veľkosť uhla stúpania priamej cesty je približne 12°. Určte stúpanie tejto cesty v percentách.

9. Štít domu v tvare rovnoramenného trojuholníka má základňu 12,8 m, sklon strechy je 30°. Vypočítajte výšku tohto štítu.

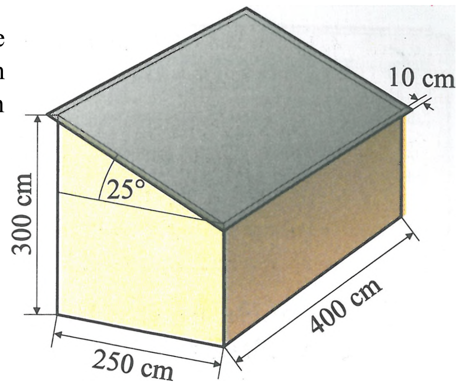


10. Lietadlo letiace práve nad miestom A vidieť z pozorovateľne B vzdialenej od miesta A 2 400 m, vo výškovom uhle s veľkosťou 52° 30'. Ako vysoko letí toto lietadlo?



11. Chlapci púšťali šarkana na špagáte dlhom 100 m. Ako vysoko vyletel šarkan pri plne napnutom a rozvinutom špagáte, ak veľkosť uhla napnutého špagáta s vodorovnou rovinou odhadli na 60°?

12. Vypočítajte spotrebu plechu na zhotovenie strechy prístrešku, ktorý je 4 m dlhý, 2,5 m široký a 3 m vysoký. Jeho strecha má sklon 25° a presahuje na všetkých stranách 10 cm.



VYSKÚŠAJTE SA!

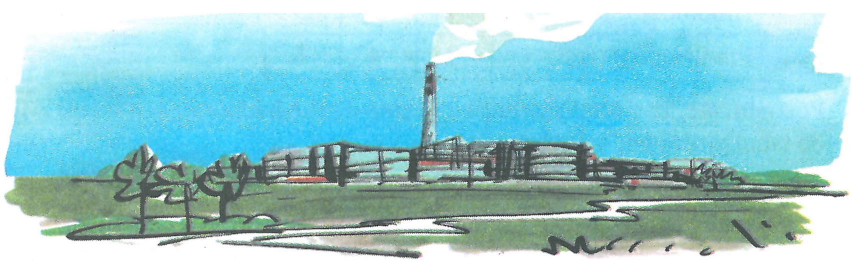
1. Určte sin 42° 30' a) pomocou tabuliek; b) pomocou kalkulačky.

2. Určte hodnoty kosínus, ak a) $\alpha = 25°$, b) $\alpha = 67°$, c) $\alpha = 86°20'$.

3. Bez použitia uhlomeru zostrojte uhol s veľkosťou 20° pomocou sínusu uhla.

4. V pravouhlom trojuholníku *PQR* s pravým uhlom pri vrchole *Q* je $|\sphericalangle QRP| = 30°$, $|PQ| = 6$ cm. Vypočítajte polomer kružnice opísanej trojuholníku *PQR* (využite vlastnosť Talesovej kružnice).

5. Ako vysoký je komín továrne stojaci na vodorovnom teréne, ak jeho vrchol vidíme zo vzdialenosti $d = 95$ m od päty komína pod uhlom s veľkosťou 40°?



6. Lanovka stúpa priemerne pod uhlom s veľkosťou 15° a spája dolnú a hornú stanicu s výškovým rozdielom 106 m. Aká dlhá je jej dráha?

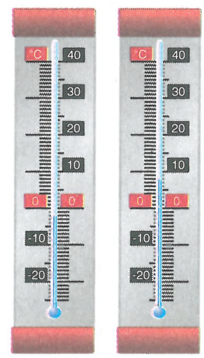
7. Zrnomet je vzdialený 4,5 m od sýpky. Rúry zrnometu zvierajú so zemou uhol s veľkosťou 50°. Aké dlhé sú rúry? Ako vysoko od zeme je okno sýpky?

8. Základne rovnoramenného lichobežníka *ABCD* majú dĺžky 9,5 cm a 5,5 cm. Jeho ramená zvierajú s dlhšou základňou uhol $\alpha = 36°$. Vypočítajte
a) obvod, b) obsah lichobežníka *ABCD*.

6 FUNKCIE, LINEÁRNA FUNKCIA

6.1 Funkcia, definičný obor funkcie, obor hodnôt funkcie

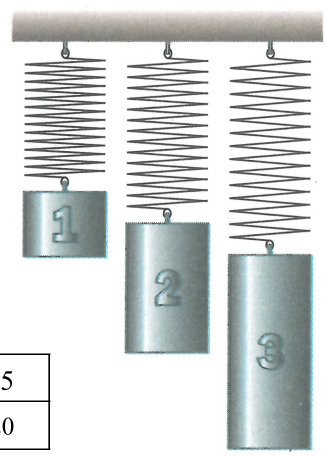
Slovo funkcia je nám známe z bežného života. Má rôzne významy. V matematike, vo fyzike, v biológii i v technickej praxi sa často stretávame s rôznymi druhmi závislosti veličín. Prv, než vyslovíme, čo znamená pojem funkcia (čiže funkciu definujeme), uvedieme niekoľko príkladov, s ktorými ste sa už stretli. Pozorne sledujte, čo majú tieto príklady spoločné.



Začneme fyzikou.
V 6. ročníku ste sledovali dennú teplotu v hodinových intervaloch a výsledky ste zapisovali do tabuľky.

Čas v h	7	8	9	10	11	12
Teplota v °C	-2	-1	0	3	5	8

V 7. ročníku ste do tabuľky zapísali výsledky pokusu. Ak zavesíme na pružinu závažie s hmotnosťou 1 kg, pružina sa predĺži o 2 cm, pri 2 kg o 4 cm, pri 3 kg o 6 cm.



Hmotnosť v kg	1	2	3
Predĺženie v cm	2	4	6

Postrehli ste, že v tomto prípade môžeme ďalšie hodnoty do tabuľky doplniť výpočtom.

Pokračujme geometriou.

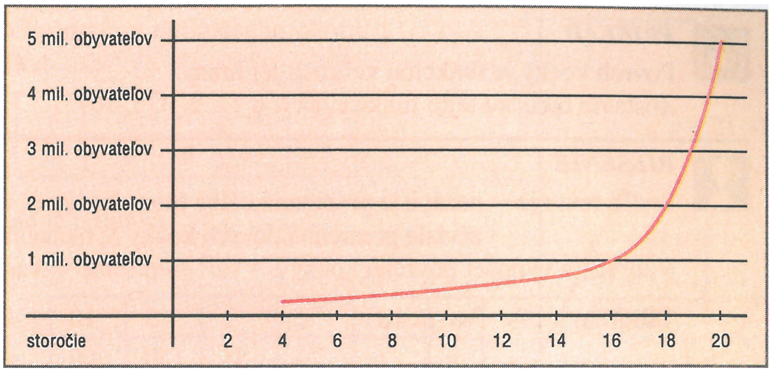
Vypočítajte obvody štvorcov, ak ich strany majú dĺžky: 1, 2, 3, 4, 5 centimetrov. Výsledky zostavte do tabuľky. Obvod budeme počítať podľa vzorca $o = 4 \cdot a$

a v cm	1	2	3	4	5
o v cm	4	8	12	16	20

A ešte jedna tabuľka a jeden graf zo zemepisu.

Rieka	Váh	Hron	Nitra	Hornád	Laborec
Dĺžka v km	390	284	198	186	135

Graf vývoja počtu obyvateľov Slovenska:

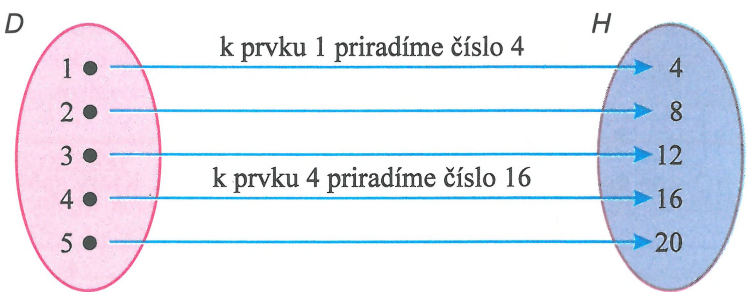


Všetky tieto príklady boli príkladmi funkcií. Čo mali spoločné?

V každom príklade

- Boli dve množiny, z nich jedna prvá, jedna druhá.
- Ku každému prvku prvej množiny sme vedeli nejakým spôsobom priradiť práve jedno číslo z druhej množiny.

Situáciu môžeme znázorniť aj diagramom, kde prvú množinu označíme D a druhú H. Priradenie naznačíme šípkou. Údaje v diagrame sú z tabuľky, ktorá vyjadruje závislosť obvodu štvorca od veľkosti jeho strany.



Z každého bodu množiny D vychádza práve jedna šípka.

Teraz vyslovíme definíciu pojmu funkcia:

Funkciou f nazývame **priradenie,** ktoré každému prvku danej množiny D **priraďuje práve jedno reálne číslo.**

Množinu D nazývame **definičný obor funkcie** f. Množinu všetkých reálnych čísel, ktoré sú priradené danou funkciou f prvkom jej definičného oboru D nazývame **množina funkčných hodnôt** a označujeme ju H (H - **množina hodnôt funkcie).**

Prvky množiny D budeme označovať x a priradené čísla množiny H symbolom y; x a y nazývame **premennými veličinami.**

Premennú x niekedy nazývame **nezávisle premennou veličinou** a premennú y **závislé premennou veličinou.**

Hovoríme tiež, že y **je funkciou** x.

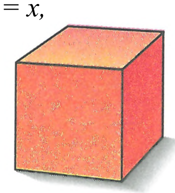
PRÍKLAD [1]

Povrch kocky je funkciou veľkosti jej hrany
Zostavte tabuľku tejto funkcie, ak $a \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$.

RIEŠENIE

Podľa textu je - nezávisle premenná dĺžka hrany kocky a, označíme $a = x$,
- závislé premenná povrch kocky S, označíme $S = y$.

Vzorec na výpočet povrchu kocky $S = 6a^2$ prepíšeme v tvare $y = 6x^2$



Tabuľka:

x	1	2	3	5	10
y	6	24	54	150	600

PRÍKLAD [2]

Závislosť hmotnosti telesa od jeho objemu je daná vzorcom $m = V . \rho$.
Zostavte tabuľku tejto funkcie, ak je teleso z medi.

RIEŠENIE

Z textu vyplýva, že: - nezávisle premenná je objem $V = x$,
- závisle premenná je hmotnosť $m = y$.

Hustota medi $\rho = 8{,}93 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Rovnica funkcie: $y = 8{,}93x$. Definičný obor funkcie nebol daný, ale platí x > 0. Viete prečo?

Tabuľka:

x	1	2	3	4
y	8,93	17,86	26,79	35,72

V príkladov 1 a 2 sme mali funkcie určené rovnicou aj tabuľkou. Ktorý spôsob je výhodnejší?

ÚLOHA 1

Zapíšte z príkladov 1 a 2 množiny D a H.

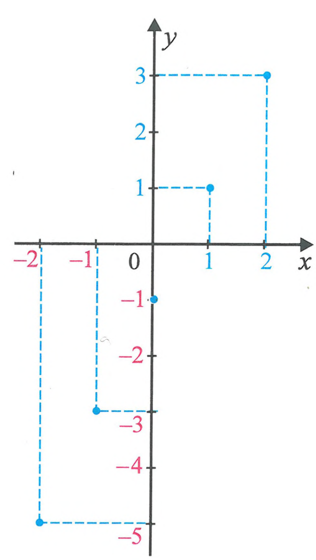
PRÍKLAD [3]

Zostrojte graf funkcie danej rovnicou $y = 2x - 1$, ak:
a) $D = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ b) $D = R$

RIEŠENIE

a) Zostavíme tabuľku:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	1	3



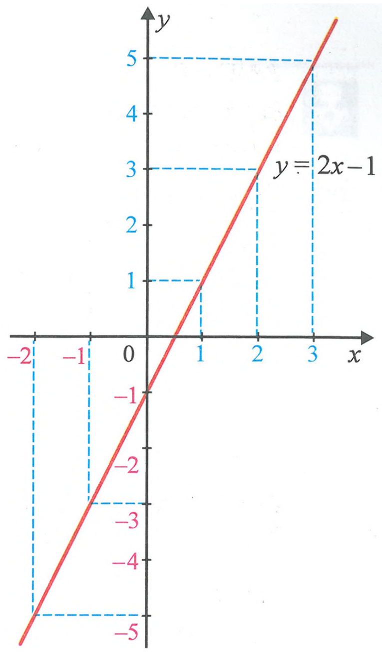
Zostrojíme graf, to je množina bodov:
[-2, -5], [-1, -3], [0, -1], [1, 1], [2, 3].

b) Zvoľme si niekoľko prvkov definičného oboru a zostavme tabuľku:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	-1	1	3	5	-3	-5	-7

Pretože $D = R$, grafom je priamka.

Zostrojme graf:



Funkcia f je daná vzorcom (rovnicou), napr. $y = -4x + 5$, $S = \pi r^2$, $V = a^2$. v alebo tabuľkou alebo grafom.

ÚLOHA

Jedna čokoláda stojí 10 Sk. Zapíšte rovnicou závislosť ceny čokolád od ich počtu, ak môžete kúpiť najviac 5 čokolád. Určte definičný obor tejto funkcie, zostavte tabuľku a narysujte jej graf.

PROBLÉM

Daná je rovnica funkcie $y = \frac{1}{x-10}$. Vieme vypočítať funkčné hodnoty pre všetky reálne čísla?

RIEŠENIE

Janka uvažuje:

Funkcia je daná lomeným výrazom s premennou v menovateli. Hodnotu výrazu môžeme vypočítať len vtedy, ak sa menovateľ nebude rovnať 0. Pre x = 10 sa však bude menovateľ rovnať nule a výraz stratí zmysel. To znamená, že ku x = 10 nemôžeme priradiť funkčnú hodnotu, a preto toto číslo musíme „vyradiť“ z definičného oboru.

Peter sa pýta:

Nemôžeme to zapísať takto: $D = R$ - 10?

Janka odpovedá:

Nie, pretože R je množina reálnych čísel a od množiny môžeme odčítať len množinu.

Zapíšeme to takto: $D = R$ - {10}.

CVIČENIA

1. Napíšte množinu hodnôt funkcie $y = 7x$, ak je definičný obor danej funkcie $D = \{-7; -6; -1; \frac{1}{7}; 0; 1; \frac{1}{7}; 7\}$.

2. Zistite, ktoré z tabuliek určujú a ktoré neurčujú funkcie. Odôvodnite prečo neurčujú funkcie.

A

x	1	2	3	4	5
y	2	3	4	5	6

B

x	1	2	3	4	5
y	3	3	3	3	3

C

x	–1	0	1	2	3
y	A	B	C	D	E

D

x	$-\frac{2}{3}$	–1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
y	–5	–5	–5	–5	–5

E

x	1	–1	0	1	–1
y	1	1,2	0	2	1

F

x	–2	–1	0	1	2
y	2	1	0	–1	–2

3. Zapíšte aspoň desať hodnôt funkcií, ak:

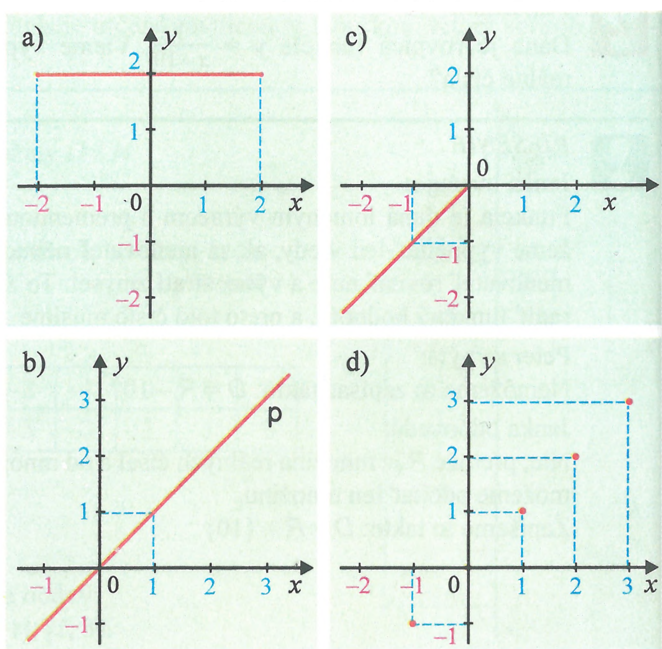
a) $y = x^2 + 1$ a $D = R$,

b) $y = \sqrt{x}$ a D je množina všetkých nezáporných čísel,

c) $y = \frac{1}{x-10}$ a $D = R - \{10\}$.

4. Zostrojte graf funkcie danej rovnicou:
a) $y = 0{,}5\,x$, ak $D = \{-2, -1; 0, 1, 2\}$,
b) $y = 0{,}5\,x$, ak $D = R$,
c) $y = 0{,}5\,x$, ak $D = \{-2 \leq x \leq 2\}$.

5. Zapíšte definičné obory a obory hodnôt funkcií, ktorých grafy sú:



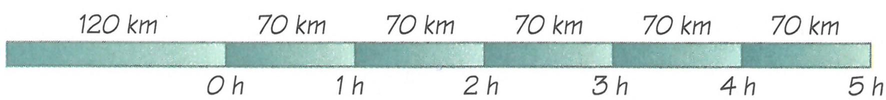
6.2 Lineárna funkcia, graf lineárnej funkcie a jej vlastnosti

PRÍKLAD

Jazda autom, ktorého priemerná rýchlosť je 70 $\frac{km}{h}$, trvala 5 hodín. V čase začatia merania času malo auto ubehnutých 120 km. Závislosť dráhy auta od času zapíšte rovnicou, určte definičný obor funkcie a zostrojte jej graf.

RIEŠENIE

Situáciu znázorníme na obrázku:

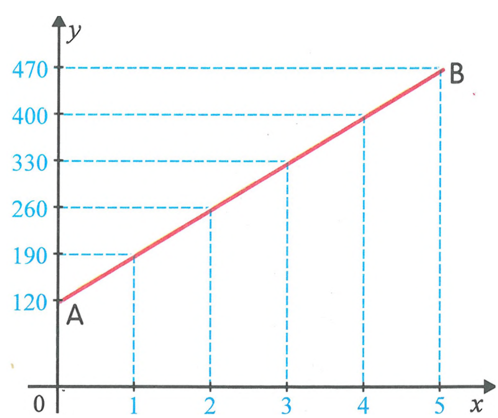


Čas jazdy je nezávisle premenná - označíme ju x.
Dráha auta je závisle premenná - označíme ju y.
Definičný obor vyplýva z textu: $0 \leq x \leq 5$.
Podľa obrázka zostavíme tabuľku:

x	0	1	2	3	4		x
y	70.0 + 120	70 . 1 + 120	70 . 2 + 120	70 . 3 + 120	70 . 4 + 120		$70x + 120$

Z tabuľky vidíme, že závislosť dráhy od času vyjadruje rovnica $y = 70 . x + 120$
Doplníme tabuľku a zostrojíme graf.

x	0	1	2	3	4	5
y	120	190	260	330	400	470



Vyznačená úsečka AB je grafom funkcie $y = 70x + 120$, ak $0 \leq x \leq 5$.

POZNÁMKA

Ak by sa D = R, grafom by bola priamka AB.

Závislosť medzi dráhou a časom, ktorú sme sledovali v príklade sa nazýva

lineárna funkcia.

Ak v rovnici $y = 70x + 120$ nahradíme čísla $70 = k$ a $120 = q$, dostaneme **všeobecnú rovnicu lineárnej funkcie** $\boxed{y = kx + q}$

Funkcia typu $\boldsymbol{y = kx + q}$, kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla a jej definičný obor je množina všetkých reálnych čísel, sa nazýva **lineárna funkcia.**

Graf lineárnej funkcie **je priamka** alebo jej časť (ak je definičný obor obmedzený).

POZNÁMKA

Priamka sa latinsky nazýva linea recta (čítaj rekta = priamka). Preto funkcia, ktorá je graficky znázornená priamkou dostala už pred niekoľkými storočiami pomenovanie lineárna funkcia.

PRÍKLAD [2]

Zostrojte graf funkcie: a) $y = 4x - 1$ b) $y = 2x + 3$

RIEŠENIE

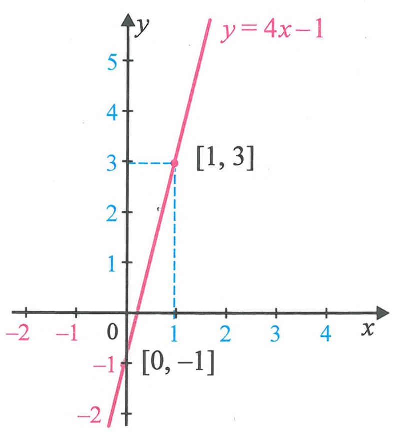
Grafom každej lineárnej funkcie je priamka. Na jej zostrojenie nám postačia vždy dva rôzne body.

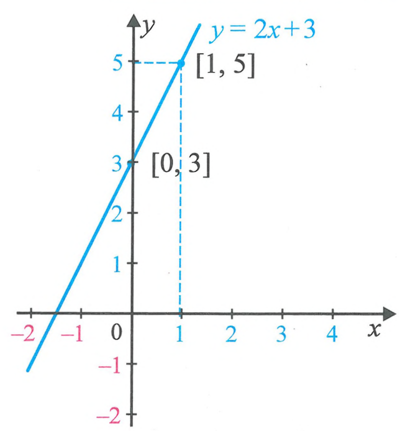
a) $y = 4x - 1$

x	0	1
y	-1	3

b) $y = 2x + 3$

x	0	1
y	3	5





Všimnime si súradnice priesečníka s osou y.

Priesečník lineárnej funkcie $\boxed{y = 4x - 1}$ s osou y má súradnice $\boxed{[0, -1]}$

a priesečník lineárnej funkcie $\boxed{y = 2x + 3}$ s osou y má súradnice $\boxed{[0, 3]}$

Graf funkcie $y = kx + q$ pretína os y vždy v bode so súradnicami $[0, q]$.

ÚLOHA

Akému číslu sa rovná q, ak graf funkcie y = -7x + q pretína os y v bode so súradnicami [0, -3].

ÚLOHA

Určte súradnice priesečníka s osou ak $q = 0$.

ÚLOHA

Zapíšte lineárnu funkciu, v ktorej $k = 6$ a $q = 0$ zostrojte jej graf.

Lineárna funkcia $y = kx + q$, kde $q = 0$ je **priama úmernosť.**
Graf priamej úmernosti prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

PRÍKLAD

Porovnajte grafy lineárnych funkcií $y = -2x + 2$ a $y = 2x + 2$

RIEŠENIE

Peter upozorňuje na rozdielne znamienka pre k_1 a k_2. Vieme, že obidva grafy budú pretínať os y v bode so súradnicami, [0, 2], lebo $q = 2$. Zostavme tabuľky oboch funkcií:

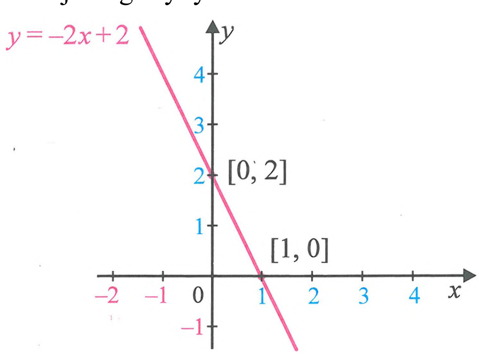
$y = - 2x + 2$

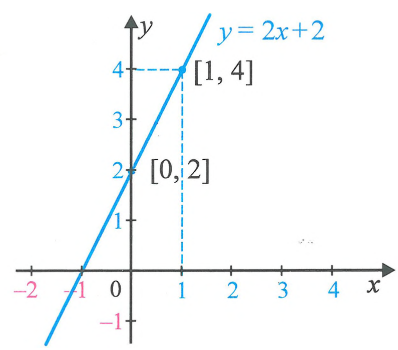
x	0	1
y	2	0

$y = 2x + 2$

x	0	1
y	2	4

Zostrojíme grafy týchto funkcií:





Lenka si všimla, že pri funkcii $y = -2x + 2$ s rastúcou hodnotou x hodnota y klesá.

Pri funkcii $y = 2x + 2$ s rastúcou hodnotou x rastie aj hodnota y.

Funkcia je rastúca práve vtedy, keď pre každé x_1, x_2 z jej definičného oboru platí:
ak $x_1 < x_2$, tak $y_1 < y_2$ alebo ak $x_1 > x_2$, tak $y_1 > y_2$.

Funkcia je klesajúca práve vtedy, keď pre každé x_1, x_2 z jej definičného oboru platí: ak $x_1 < x_2$, tak $y_1 > y_2$ alebo ak $x_1 > x_2$, tak $y_1 < y_2$.

Lineárna funkcia $y = kx + q$ je rastúca, ak $k > 0$.
Lineárna funkcia $y = kx + q$ je klesajúca, ak $k < 0$.

[4] *PRÍKLAD*

Napíšte najviac tri rastúce lineárne funkcie.

RIEŠENIE

$$y = \frac{2}{3}x - 3, \qquad y = 7x + \frac{1}{2}, \qquad y = 0{,}25x + 9{,}3$$

[5] *PRÍKLAD*

Napíšte najviac tri klesajúce lineárne funkcie.

RIEŠENIE

$$y = -2x + 5, \qquad y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \qquad y = -x + 1$$

PROBLÉM

Existuje taká funkcia, že nie je ani rastúca, ani klesajúca?

RIEŠENIE

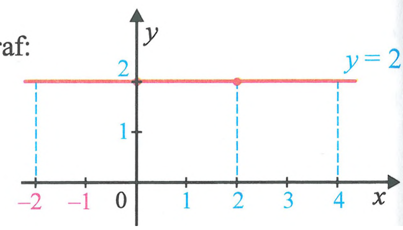
Ondrej uvažuje takto: Ak v lineárnej funkcii $k > 0$, funkcia je rastúca. Ak $k < 0$, je klesajúca. Ak $k = 0$, platí $y = 0 \,.\, x + q$, teda $y = q$.

Napr. $y = 0 \,.\, x + 2$

$y = 2$

x	0	1
y	2	2

Zostrojme graf:



4 *ÚLOHA*

Zostrojte grafy konštantných funkcií: a) $y = \frac{1}{2}$, b) $y = -3$, c) $y = 2{,}5$.

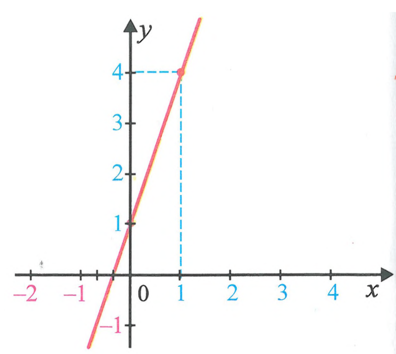
[6] *PRÍKLAD*

Určte priesečník grafu lineárnej funkcie $y = 3x + 1$ s osou x.

RIEŠENIE

1. Graficky: Vieme, že graf danej funkcie pretína os y v bode $[0, 1]$, Stačí teda určiť ešte jeden ďalší bod a zostrojiť graf:

x	1
y	4



Z grafu vidíme, že priesečník s osou x má súradnice $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

2. ***Výpočtom:*** Vieme, že všetky body, ktoré ležia na osi x, majú *y-ovú* súradnicu rovnajúcu sa nule, preto do danej rovnice $y = 3x + 1$ stačí dosadiť za $y = 0$ a x vypočítame:

$$0 = 3x + 1$$
$$-1 = 3x$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

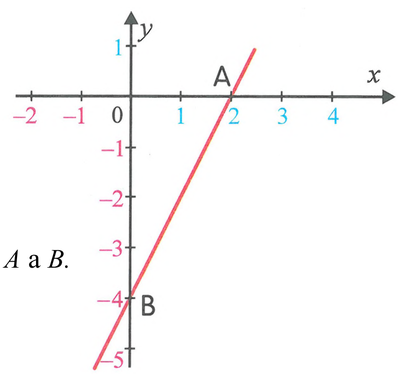
Odpoveď: Súradnice priesečníka s osou x sú $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

ÚLOHA

5 Určte výpočtom súradnice priesečníka grafu funkcie $y = \frac{2}{3}x - 2$ s osou x.

PRÍKLAD

[7] Zapíšte zadanie lineárnej funkcie danej grafom:



RIEŠENIE

Priesečníky grafu funkcie s osami x a y sú označené A a B.
Ich súradnice sú: $A[2, 0]$, $B[0,-4]$.

Rovnica lineárnej funkcie:
$y = kx + q$, kde $q = -4$ (-4 je *y-ová* súradnica bodu B).
Po dosadení: $y = kx - 4$.

Dosaďme do rovnice súradnicu bodu $A[\underset{x}{\underset{\downarrow}{2}}, \underset{y}{\underset{\downarrow}{0}}]$:

$$0 = k \cdot 2 - 4$$
$$4 = k \cdot 2$$
$$k = 2$$

Odpoveď: Rovnica funkcie danej grafom je $y = 2x - 4$.

PRÍKLAD

[8] Priesečník s osou x má súradnice $A[5,0]$ a s osou y $B[0,5]$. Napíšte rovnicu danej lineárnej funkcie.

RIEŠENIE

$y = kx + q \qquad q = 5$
$y = kx + 5$

Dosadíme súradnice bodu A do rovnice tak, že

$$y = 0 \ \text{a} \ x = 5$$
$$0 = k \cdot 5 + 5$$
$$-5k = 5$$
$$k = -1 \Rightarrow y = -1x + 5$$

Odpoveď: Rovnica lineárnej funkcie je $y = -x + 5$.

ÚLOHA

6 Zapíšte rovnicu lineárnej funkcie, ktorá prechádza bodmi [7, 0] a [0, -2].

[9]

PRÍKLAD

Vieme, že graf lineárnej funkcie prechádza bodmi $A[2, 3]$ a $B[-2, -1]$. Zapíšte rovnicu danej lineárnej funkcie.

RIEŠENIE

Pretože body A a B ležia na grafe, ich súradnice x a y môžeme dosadiť do lineárnych rovníc:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A: } \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \quad 3 = k\,.\,2 + q \\ \text{B: } \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \end{array}\right\} \quad -1 = k\,.\,(-2) + q \end{array}\right\} \quad \text{riešme sústavu}$$

Upravíme na tvar $y = kx + q$

$$\begin{array}{l} 3 = 2k + q \\ \underline{-1 = -2k + q} \\ 2 = 2q \\ q = 1 \Rightarrow 2k + 1 = 3 \\ \qquad\qquad 2k = 2 \\ \qquad\qquad k = 1 \end{array}$$

Odpoveď: Rovnica lineárnej funkcie prechádzajúca bodmi $A[2, 3]$ a $B[-2,-1]$, je $y = x + 1$.

[10]

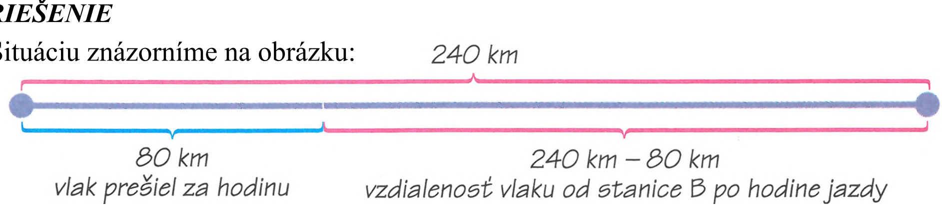
PRÍKLAD

Vlak odchádza zo stanice **A** do konečnej stanice **B**, vzdialenej od **A** 240 km. Rýchlosť vlaku je 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Napíšte rovnicu, ktorá vyjadrí závislosť vzdialenosti vlaku od stanice **B** od času.
b) Určte definičný obor funkcie.
c) Zostrojte jej graf.

RIEŠENIE

Situáciu znázorníme na obrázku:



a) Čas jazdy je nezávisle premenná - označíme ju x.
Vzdialenosť vlaku od stanice **B** je závisle premenná - označíme ju y.
Podľa obrázka zostavíme tabuľku:

x	0	1	2	3
y	240 - 80 . 0	240 - 80 . 1	240 - 80 . 2	240 - 80 . 3
y	240	160	80	0

Rovnica funkcie:

$y = 240 - 80x$ alebo $y = -80x + 240$ ($k = -80 \Rightarrow$ funkcia je klesajúca).

b) Z tabuľky vidíme definičný obor: v čase $x = 3$ je vzdialenosť vlaku od stanice **B** nulová, čiže vlak je v konečnej stanici. Jeho dráhu síce ďalej počítať môžeme, ale pre našu úlohu to nemá význam.

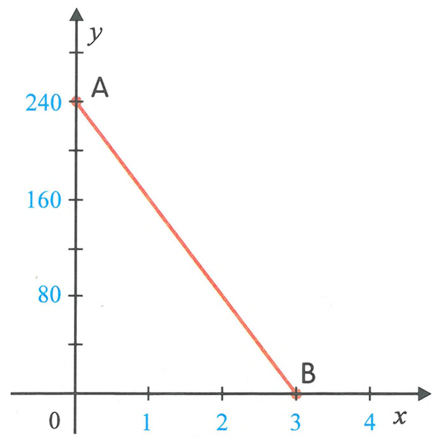
Definičný obor: $0 \le x \le 3$.

Ak by sme rovnicu zostavili bez tabuľky, môžeme definičný obor vypočítať z rovnice. Budeme hľadať také x, pre ktoré je vzdialenosť vlaku od konečnej stanice $y = 0$.

Dosadíme do rovnice

$$y = -80x + 240$$
$$0 = -80x + 240$$
$$80x = 240$$
$$x = 3$$

c) Graf: z rovnice vidíme, že ide o lineárnu funkciu, s definičným oborom $\langle 0, 3\rangle$, že jej grafom je úsečka, ktorej krajné body majú súradnice $A[0, 240]$ a $B[3, 0]$.



Graf je úsečka AB (graf nám potvrdil, že ide o klesajúcu funkciu).

CVIČENIA

1. Linda ušetrila 500 Sk. Koľko Sk bude mať o sedem týždňov, ak k ušetrenej sume pridá každý týždeň 50 Sk? Vyjadrite závislosť medzi ušetrenou čiastkou a počtom týždňov.

2. Vo fyzike sme sa učili, že sa objem plynu (V) za stáleho tlaku pri každom zvýšení teploty (t) o 1° zväčší o $\frac{1}{273}$ toho objemu (V_0), ktorý malo to isté množstvo plynu pri teplote 0° C. Určte závislosť objemu od teploty.

3. Zostrojte grafy funkcií a) $y = 3x - \frac{1}{2}$
b) $y = -2x + 1$

Určte súradnice priesečníkov s osou y.

4. Traktor pri orbe ťahá pluh silou 10 kN. Akú prácu vykoná, keď prejde 50 m, 100 m, 250 m, 1 000 m? Znázornite graficky ($W = F . s$).

5. Akou silou je k Zemi priťahovaný človek, ktorého hmotnosť je 50 kg, 60 kg, 70 kg, 80 kg?
Zostavte tabuľku. $\left(F_g = m \cdot g,\ g = 10\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right)$

6. Čo je zaujímavé na grafoch funkcií a) $y = 3x + 1$
b) $y = 3x - 2$
c) $y = 3x$

7. Zostrojte grafy funkcií $y = -2x + 3$, $y = -2x - 1$ a $y = -2x$ do jedného obrázka. Povedzte, čo všetko možno povedať zo zadania lineárnej funkcie danej rovnicou a čo ste zistili z grafov daných funkcií.

8. Porovnajte bez narysovania grafy lineárnych funkcií
1. $y = -5x + 4$ a 2. $y = 5x + 4$

9. Zapíšte najviac 5 a) rastúcich,
b) klesajúcich,
c) konštantných lineárnych funkcií.

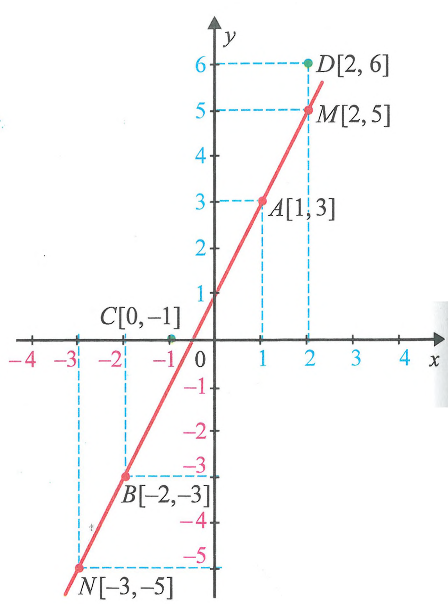
10. Určte priesečníky lineárnych funkcií s osou x:
a) $y = 7x - 5$ b) $y = -4x + 5$ c) $y = -9x - \frac{1}{3}$

11. Zapíšte lineárne funkcie, ktorých grafy prechádzajú bodmi:
a) $A[3, 4]$, $B[1, 2]$ c) $A[0, 0]$, $K[-7, 6]$ e) $K[3, -5]$, $L[4, -5]$
b) $C\left[-5, \frac{1}{2}\right]$, $D[-3, -4]$ d) $M[1, 1]$, $N[-2, -2]$ f) $S[5, 0]$, $T[0, 5]$

6.3 Grafické riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

PROBLÉM

a) Prechádza graf lineárnej funkcie $y = 2x + 1$ bodmi $A[1, 3]$ a $B[-2, -3]$?
b) Ležia body $C[0, -1]$ a $D[2, 6]$ na grafe tejto funkcie?
c) Koľko bodov je riešením tejto lineárnej rovnice s dvoma neznámymi?



RIEŠENIE

Zostavme tabuľku a zostrojme graf danej funkcie:

x	0	1
y	1	3

a) Z tabuľky vidno, že bod so súradnicami [1, 3], čo je bod A, leží na priamke, ktorej rovnica je $y = 2x + 1$.

Pre $B[-2, -3]$ platí:
Ľ = -3
P = 2 . (-2) + 1 = -3
Ľ = P

Bod B leží na grafe danej funkcie.

b) Body C a D neležia na grafe. Bod C má súradnice [0, -1] a zo zadania rovnice $y = 2x + 1$ vyplýva, že $x = 0$ a $y = 1$, teda $C[0, -1]$ nie je riešením rovnice. O tom sa presvedčíme aj skúškou správnosti:

Pre $C[0, -1]$ platí:	Pre $D[2, 6]$ platí:
Ľ = -1	Ľ = 6
P = 2 . 0 + 1 = 1	P = 2 . 2 + 1 = 5
Ľ ≠ P	Ľ ≠ P

Body C a D neležia na grafe danej funkcie.

c) Ak si zvolíme ľubovoľný bod, ktorý leží na priamke, napr. M a určíme jeho súradnice $M[2, 5]$, dosadíme do rovnice a urobíme skúšku:

Ľ = 5
P = 2 . 2 + 1 = 5
Ľ = P

Vidíme, že sme našli ďalší bod, ktorého súradnice vyhovujú rovnici $y = 2x + 1$. Súradnice všetkých bodov priamky, ktorá je grafom funkcie $y = 2x + 1$, sú riešením danej lineárnej rovnice s dvoma neznámymi.

1 ***ÚLOHA***

Presvedčte sa, že súradnice bodu $N[-3, -5]$ sú riešením rovnice $y = 2x + 1$.

2 ***ÚLOHA***

Riešte graficky lineárnu rovnicu s dvoma neznámymi $x - 5y = -6$.

[1] ***PRÍKLAD***

Riešte graficky sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi:
1. $x - 3y = -3$
2. $2x - y = 4$

! ***RIEŠENIE***

Pri riešení sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi musíme nájsť takú usporiadanú dvojicu $[x, y]$, ktorá je riešením prvej aj druhej rovnice súčasne. Pri grafickom riešení budeme postupovať takto:

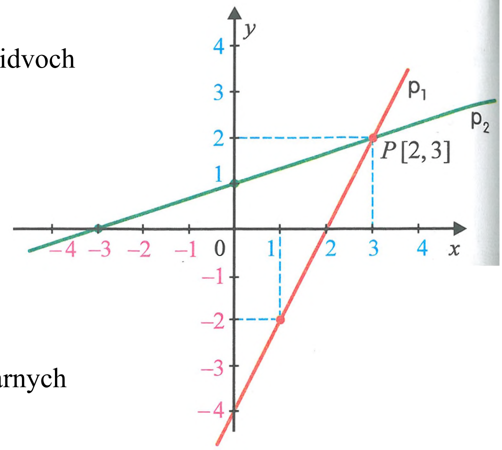
1. Vyjadríme y z prvej aj z druhej rovnice:

1.	2.
$x - 3y = -3$	$2x - y = 4$
$-3y = -3 - x$	$-y = 4 - 2x$
$y = \frac{1}{3}x + 1$	$y = 2x - 4$

2. Zostavíme tabuľky a zostrojíme grafy obidvoch funkcií do jedného obrázka:

x	0	3
y	1	2

x	0	1
y	-4	-2



Súradnice všetkých bodov priamky p_1 sú riešením rovnice $x - 3y = -3$.

Súradnice všetkých bodov priamky p_2 sú riešením rovnice $2x - y = 4$.

Grafickým riešením sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi
$$x - 3y = -3$$
$$2x - y = 4$$
sú súradnice priesečníka obidvoch priamok $P[3, 2]$, kde $x = 3$, $y = 2$.

Skúška: Ľ = 3 – 3 . 2 = –3   Ľ = 2 . 3 – 2 = 4

$P_1 = -3$ $P_2 = 4$

Ľ = P_1 Ľ = P_2

Usporiadaná dvojica čísel [3, 2] je riešením danej sústavy.

3 ***ÚLOHA***

Riešte graficky sústavu dvoch lineárnych rovníc
$$5x + 2y = 3$$
$$3x + y = 1$$

[2] ***PRÍKLAD***

Riešte graficky sústavu dvoch rovníc
$$\frac{1}{3}x - y = -2$$
$$2x - 6y = 6$$

RIEŠENIE

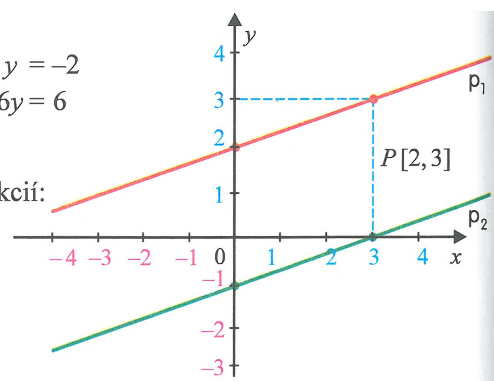
Zostrojme grafy príslušných lineárnych funkcií:

$y = \frac{1}{3}x + 2$

x	0	-3
y	2	3

$y = \frac{1}{3}x - 1$

x	0	3
y	–1	0



Grafy lineárnych funkcií $y = \frac{1}{3}x + 2$ a $y = \frac{1}{3}x - 1$ sú dve rovnobežné priamky p_1 a p_2. Neexistuje žiadna usporiadaná dvojica, ktorá je riešením danej sústavy. Daná sústava nemá riešenie.

4 ***ÚLOHA***

Riešte graficky sústavu rovníc
$$2x - 3y = -1$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 0$$

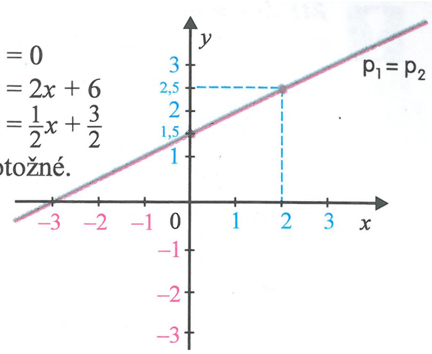
[3] ***PRÍKLAD***

Riešte graficky sústavu rovníc
$$x - 2y + 3 = 0$$
$$2x + 4y - 6 = 0$$

RIEŠENIE

1. $x - 2y + 3 = 0$
$$-2y = -x - 3$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2. $-2x + 4y - 6 = 0$
$$4y = 2x + 6$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Obidve rovnice sú rovnaké. Grafy funkcií budú totožné.

Zostrojme grafy funkcií:

x	0	1
y	1,5	2,5

Táto sústava má nekonečne veľa riešení.
Sú to všetky usporiadané dvojice reálnych čísel, ktoré sú súradnicami bodov ležiacich na priamke – grafe lineárnej funkcie danej rovnicou $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Skúška: Z grafu vidíme, že riešením je napr. usporiadaná dvojica [–3, 0]. Overme si, či je riešením sústavy.

$Ľ_1 = -3 - 2 \cdot 0 + 3 = -3 + 3 = 0$ $\qquad$ $Ľ_2 = -2 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 - 6 = 6 - 6 = 0$

$P_1 = 0$ $\qquad$ $P_2 = 0$

$Ľ_1 = P_1$ $\qquad$ $Ľ_2 = P_2$

5 *ÚLOHA*

Riešte graficky sústavu rovníc
$$\frac{1}{3}x - y = -\frac{1}{6}$$
$$2x - 6y = -1$$

1. Sústava má **jediné riešenie** práve vtedy, ak grafy príslušných lineárnych funkcií sú rôznobežné priamky.
2. Sústava nemá **žiadne riešenie** práve vtedy, ak grafy príslušných lineárnych funkcií sú rovnobežné priamky.
3. Sústava má **nekonečne veľa riešení** práve vtedy, ak grafy príslušných lineárnych funkcií sú totožné priamky.

[4] *PRÍKLAD*

Z prístavu vyplávala výletná loď, ktorá sa pohybuje rýchlosťou 30 km za hodinu. O hodinu neskôr vyplávala za ňou druhá loď rýchlosťou 45 km za hodinu. Kedy dobehne druhá loď prvú a v akej vzdialenosti budú od prístavu, z ktorého obidve vyplávali?

Riešte túto úlohu graficky.

RIEŠENIE

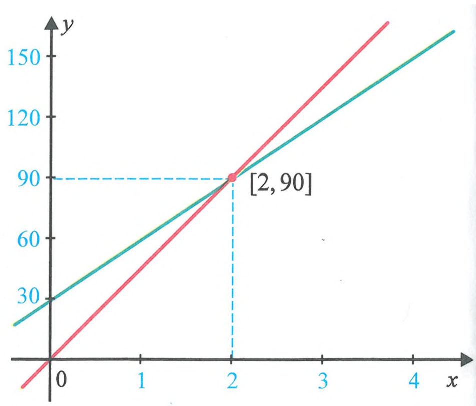
Čas začneme merať v okamihu vyplávania druhej lode.
Potom čas 2. lode bude $t = x$ a medzi dráhou y a časom x bude platiť vzťah $y = 45x$. Čas prvej lode bude $t = x + 1$ a dráha $y = 30(x + 1)$, po úprave $y = 30x + 30$. Máme sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi, ktorú budeme riešiť graficky:

$y = 45x$

x	0	1
y	0	45

$y = 30x + 30$

x	0	1
y	30	60



Obidve priamky sa pretínajú, to znamená, že spoločný bod so súradnicami [2, 90] je riešením tejto sústavy. V našom prípade priesečník určuje okamih, keď sa lode stretnú. Druhá loď pláva dve hodiny a prvá tri hodiny. Obidve preplávajú vzdialenosť 90 km.

Skúška: Dráha 2. lode za 2 hodiny .... $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\ \text{h} = 90\ \text{km}$
Dráha 1. lode za (2 + 1) hodiny .... $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\ \text{h} = 90\ \text{km}$
Obidve dráhy sa rovnajú.

Odpoveď: Druhá loď dobehne prvú o dve hodiny vo vzdialenosti 90 km od prístavu.

CVIČENIA

1. Nájdite najviac päť riešení (riešte graficky) rovnice $3x - 2y = 6$.

2. Riešte graficky sústavy rovníc:

a) $2x + 3y = 1$, $-2x + 6y = 8$ b) $x + y = 3$, $3x + y = 5$ c) $3x + y = 5$, $\frac{1}{2}x - y = 2$

3. Riešte graficky sústavy rovníc:

a) $x + y = 4$, $-\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$ b) $2x - y = 0$, $y = 2x + 1$ c) $4\left(x - \frac{1}{2}\right) = y$, $4x = -1 + y$

4. Riešte graficky sústavy rovníc:

a) $3(x + y) = 6$, $-y = x - 2$ b) $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}$, $x - 1 = y$ c) $2a + 3b = 8$, $4 - a = \frac{3}{2}b$

5. Súčet dvoch čísel je 5 a ich rozdiel je 3. Riešte graficky.

6. Janko s Petrom sa vybrali na túru ráno o 8. hodine. Išli priemernou rýchlosťou 4 km za hodinu. Juraj, ktorý vyšiel z toho istého miesta ako oni o pol hodinu neskôr, išiel o 2 km za hodinu rýchlejšie. Kedy dobehol Juraj kamarátov? Riešte graficky.

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Jeden maliar vymaľuje izbu za a hodín, druhý za b hodín.
a) Akú časť izby vymaľujú spolu za 1, 2, ..., x hodín?
b) Za aký čas vymaľujú obaja $\frac{1}{2}$ izby, $\frac{2}{3}$ izby, ..., celú izbu?

2. Ktorý z bodov neleží na grafe funkcie $y = 1{,}2x - 1$?
$A[1; 0{,}2]$ $B[0, -1]$ $C[10, 9]$ $D[2, 1]$ $E[\frac{5}{6}, 0]$

3. Nájdite množinu funkčných hodnôt funkcie $y = -x + 3$, ak $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

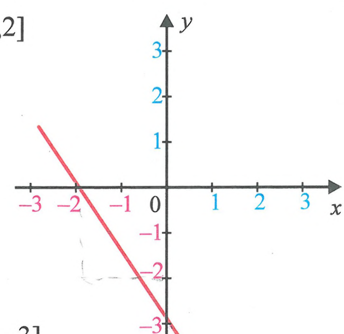
4. Ktoré z uvedených tvrdení je nepravdivé?
A Graf funkcie $y = 4x$ prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.
B Graf funkcie $y = 2.x + 5$ pretína os y v bode [0, 5],
C Graf funkcie $y = -4x - 1$ prechádza bodom [0, 1].
D Graf funkcie $y = x - 8$ prechádza bodom [8, 0].
E Grafom lineárnej funkcie je priamka.

5. Ktorá z daných funkcií je lineárna?
A $y = \frac{x+2}{3}$ **B** $y = \frac{3}{x-1}$ **C** $y = \frac{1}{x} + 2$ **D** $y = x^2 + 1$ **E** $y = \frac{x^2-1}{5}$

6. Graf funkcie $y = 6x - 2$ je rovnobežný s grafom funkcie:
A $y = -6x + 2$ **B** $y = -(-6x + 4)$ **C** $y = -6x - 2$ **D** $y = -3 \,.\, (2x - 1)$ **E** $y = -(6x + 2)$

7. Ktorá z daných funkcií nie je rastúca?
A $y = 7x - 9$ **B** $y = \frac{1}{2} - 2x$ **C** $y = -9\,(-x + 3)$ **D** $y = 3x - 1{,}5$ **E** $y = -2 + x$

8. Graf funkcie $y = kx + 5{,}2$ prechádza bodom $P[-5; 25{,}2]$ práve vtedy, keď k sa rovná:
A -5 **B** $-4{,}5$ **C** -4 **D** 0 **E** 5,2

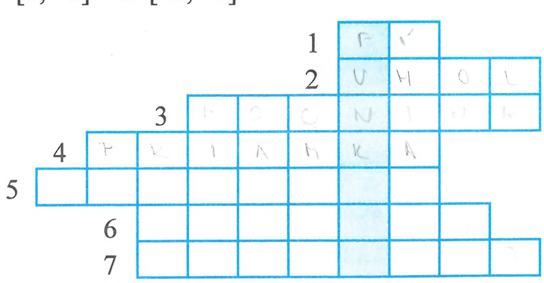


9. Na obrázku vpravo je graf funkcie
A $y = \frac{3}{2}x - 3$ **C** $y = 2x - 3$ **E** $y = -\frac{3}{2}x - 3$
B $y = 3x - 2$ **D** $y = -\frac{2}{3}x - 2$

10. Priesečník grafov funkcií $y = 2x - 3$ a $y = -6x + 5$ je bod so súradnicami
A [2, 3] **B** [0, –5] **C** [0, –3] **D** [1, –1] **E** [–2, –3]

11. Zopakujme si znaky a označenia:

1. φ
2. $\sphericalangle$
3. n^2
4. $\overleftrightarrow{p}$
5. $K(S, r)$
6. ‰
7. %



7 OBJEM A POVRCH TELIES

7.1 Objem a povrch kocky, kvádra a hranola

ZOPAKUJME SI

Jednotky dĺžky

Základná jednotka: **meter**, označenie **m**

Iné jednotky dĺžky, ktoré sa v praxi najčastejšie používajú:

Názov	kilometer	decimeter	centimeter	milimeter
Označenie	km	dm	cm	mm
Vyjadrenie v m	1000 m	$\frac{1}{10}$ m	$\frac{1}{100}$ m	$\frac{1}{1\,000}$ m
	10^3 m	10^{-1} m	10^{-2} m	10^{-3} m

Jednotky obsahu

Základná jednotka: **štvorcový meter**, označenie $\mathbf{m^2}$

Iné jednotky obsahu, ktoré sa v praxi najčastejšie používajú:

Názov	štvorcový kilometer	hektár	ár	štvorcový decimeter	štvorcový centimeter	štvorcový milimeter
Označenie	km^2	ha	a	dm^2	cm^2	mm^2
Vyjadrenie v m^2	1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	$\frac{1}{100}$ m^2	$\frac{1}{10\,000}$ m^2	$\frac{1}{1\,000\,000}$ m^2
	10^6 m^2	10^4 m^2	10^2 m^2	10^{-2} m^2	10^{-4} m^2	10^{-6} m^2

Jednotky objemu

Základná jednotka: **kubický meter**, označenie $\mathbf{m^3}$

Iné jednotky objemu, ktoré sa v praxi najčastejšie používajú:

Názov	kubický kilometer	hektoliter	kubický decimeter (liter)	kubický centimeter (mililiter)
Označenie	km^3	hl	dm^3 (l)	cm^3 (ml)
Vyjadrenie v m^3	1 000 000 000 m^3	$\frac{1}{10}$ m^3	$\frac{1}{1\,000}$ m^3	$\frac{1}{1\,000\,000}$ m^3
	10^9 m^3	10^{-1} m^3	10^{-3} m^3	10^{-6} m^3

1 *ÚLOHA*

Doplňte tabuľky:

a)

m	dm	cm	mm
5			
	30		
			857
		175	
	0,1		

b)

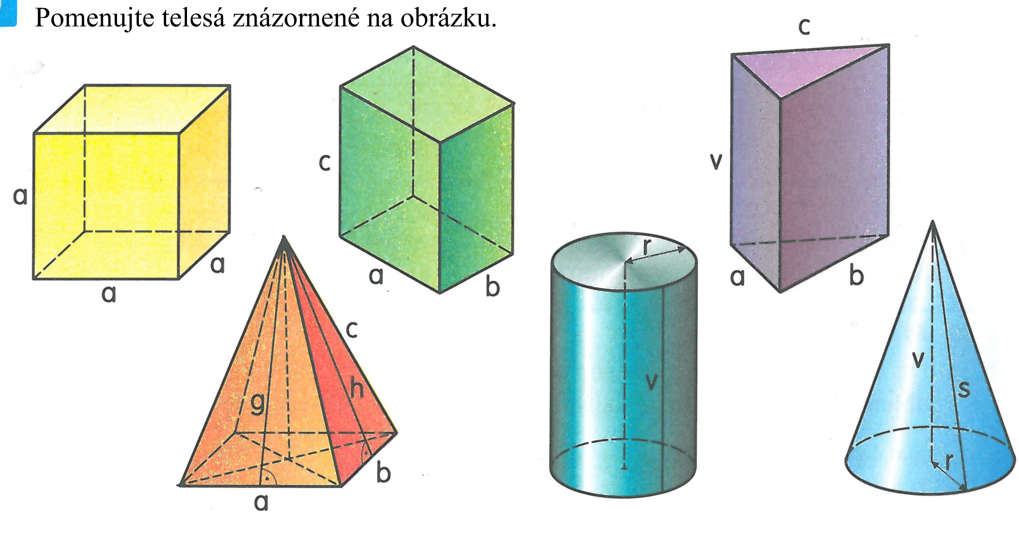
m^2	dm^2	cm^2	mm^2
7			
		30 000	
	30		
			3 000 000
0,7			

c)

m^3	dm^3	cm^3	mm^3	l	hl
2,2					
				18 000	
0,5					
	4 200				
			140 000 000		
		7 600			
					340

2 *ÚLOHA*

Pomenujte telesá znázornené na obrázku.



3 *ÚLOHA*

Miško si zopakoval vzorce na výpočet objemu kocky, kvádra a hranola. Zapísal si ich do tabuľky. Skontrolujte správnosť tabuľky. Ak nájdete chybu, do zošita si prepíšte tabuľku bez chýb!

Teleso	Vzorec
KOCKA	$V = a^3$
KVÁDER	$V = a \,.\, b \,.\, c$
HRANOL	$V = S_p \,.\, v$

4 *ÚLOHA*

Ferko si zasa napísal do tabuľky vzorce na výpočet povrchu kocky, kvádra a hranola. Skontrolujte aj správnosť tejto tabuľky.

Teleso	Vzorec
KOCKA	$S = 6a^2$
KVÁDER	$S = 2(ab + bc + ac)$
HRANOL	$S = 2 \cdot S_p + Q$

[1] ***PRÍKLAD***

Vypočítajte povrch kvádra, ak jeho objem $V = 113{,}088\ \text{cm}^3$ a dĺžka hrany $a = 4{,}8$ cm, dĺžka hrany $b = 6{,}2$ cm.

RIEŠENIE

Riešenie rozložíme na dva kroky. Pretože chceme vypočítať povrch kvádra, na to potrebujeme dĺžky jeho hrán, v prvom kroku vypočítame dĺžku tretej hrany. Potom vypočítame jeho povrch.

1.
$a = 4{,}8$ cm
$b = 6{,}2$ cm
$V = 113{,}088\ \text{cm}^3$
$c = \ldots$ cm
$V = a \cdot b \cdot c$

$113{,}088 = 4{,}8 \cdot 6{,}2 \cdot c$
$c = 113{,}088 : 29{,}76$
$c = 3{,}8$
$c = 3{,}8$ cm

2.
$a = 4{,}8$ cm
$b = 6{,}2$ cm
$c = 3{,}8$ cm
$S = \ldots\ \text{cm}^2$
$S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$
$S = 2 \cdot (4{,}8 \cdot 6{,}2 + 6{,}2 \cdot 3{,}8 + 4{,}8 \cdot 3{,}8)$
$S = 2 \cdot (29{,}76 + 23{,}56 + 18{,}24)$
$S = 2 \cdot 71{,}56$
$S = 143{,}12$
$S = 143{,}12\ \text{cm}^2$

Povrch kvádra je $143{,}12\ \text{cm}^2$.

[2] ***PRÍKLAD***

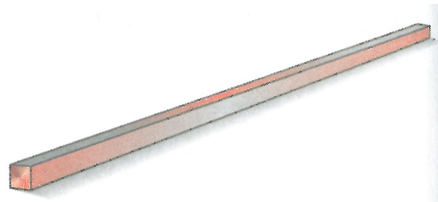
Aká je hmotnosť železnej tyče (hustota železa je $7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) 1 m dlhej, ktorej prierezom je štvorec so stranou $a = 45$ mm?

RIEŠENIE

Daná tyč má tvar pravidelného štvorbokého hranola. Hmotnosť vypočítame ako súčin objemu tyče a jej hustoty. Najskôr teda vypočítame objem tyče:

$a = 45\ \text{mm} = 4{,}5$ cm
$v = 1\ \text{m} = 100$ cm
$V = \ldots\ \text{cm}^3$
$V = S_p \cdot v$
$V = a^2 \cdot v$
$V = 4{,}5^2 \cdot 100$
$V = 20{,}25 \cdot 100$
$V = 2\,025$
$V = 2\,025\ \text{cm}^3$

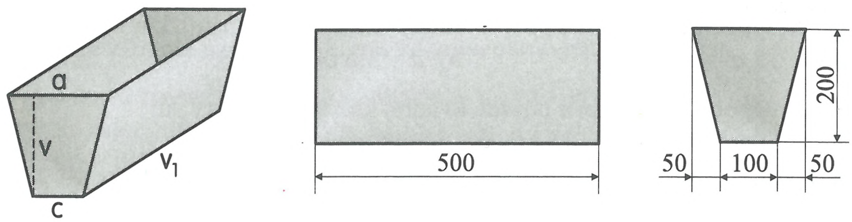
$V = 2\,025\ \text{cm}^3$
$\rho = 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
$m = \ldots$ g
$m = V \cdot \rho$
$m = 2\,025 \cdot 7{,}8$
$m = 15\,795$
$m = 15\,795\ \text{g} = 1{,}579\,5\ \text{kg} \doteq 15{,}8$ kg



Hmotnosť železnej tyče je približne 15,8 kg.

PRÍKLAD

Vypočítajte spotrebu plechu na výrobu nádoby nakreslenej na obrázku a jej objem.



RIEŠENIE

Nádobu môžeme považovať za hranol, ktorého podstavy sú rovnoramenné lichobežníky (so základňami a, c a výškou v), a ktorého výška je v_1. Označme S_1 obsah lichobežníkovej podstavy. Riešenie rozdelíme na viac častí.

a) Obsah lichobežníka

$a = 200$ mm

$c = 100$ mm

$v = 200$ mm

$S_1 = \ldots$ mm^2

$S_1 = \dfrac{a+c}{2} \cdot v$

$S_1 = \dfrac{200+100}{2} \cdot 200$

$S_1 = 30\,000$

$S_1 = 30\,000$ mm^2

b) Objem nádoby

$S_1 = 30\,000$ mm^2

$v_1 = 500$ mm

$V = \ldots$ mm^3

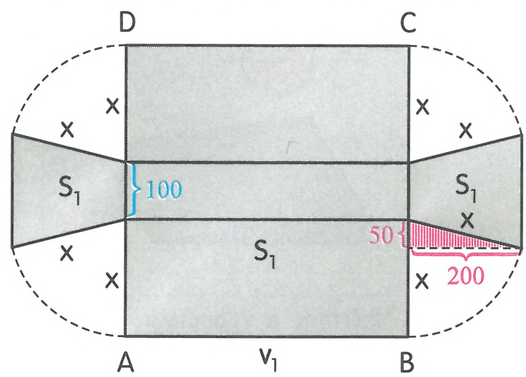
$V = S_1 \,.\, v_1$

$V = 30\,000 \,.\, 500$

$V = 15\,000\,000$

$V = 15\,000\,000$ mm^3 = 15 dm^3 = 15 l

c) Spotrebu plechu môžeme vypočítať ako súčet obsahu S_2 obdĺžnika $ABCD$ a obsahov dvoch lichobežníkových podstáv. Dĺžku úsečky x vypočítame podľa Pytagorovej vety z vyšrafovaného trojuholníka.



Pre povrch S nádoby teda platí:

$S = S_2 + 2S_1, \quad S_2 = v_1\,(2x + 100)$

$x^2 = 200^2 + 50^2$

$x^2 = 40\,000 + 2\,500$

$x^2 = 42\,500$

$x = \sqrt{42\,500} = 206{,}155\,28$

$x = 206{,}2$ mm

$S_2 = 500 \,.\, (2 \,.\, 206{,}155\,28 + 100)$

$S_2 = 256\,115{,}28$

$S_2 = 256\,200$

$S_2 = 256\,200$ mm^2

$S = 256\,155{,}28 + 2 \,.\, 30\,000$

$S = 316\,155{,}28$

$S = 316\,200$

$S = 316\,200$ mm^2 $\doteq$ 32 dm^2

Objem nádoby je 15 litrov, na jej výrobu treba približne 32 dm^2 plechu.

CVIČENIA

1. Vypočítajte objem a povrch kocky, ktorej hrana má dĺžku:
   a) $a = 7$ cm b) $a = 3{,}6$ dm

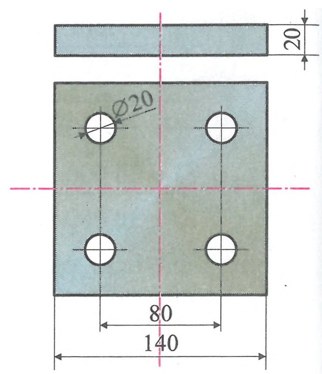
2. Vypočítajte objem a povrch kvádra, ktorého rozmery sú:
   a) $a = 30$ cm, $b = 15$ cm, $c = 11$ cm
   b) $a = 1{,}5$ m, $b = 2{,}5$ m, $c = 4$ m
   c) $a = 7$ dm, $b = 60$ cm, $c = 0{,}9$ m

3. Akú hmotnosť má žulová kocka s hranou dĺžky 85 cm, ak 1 m^3 žuly má hmotnosť 2,7 tony?

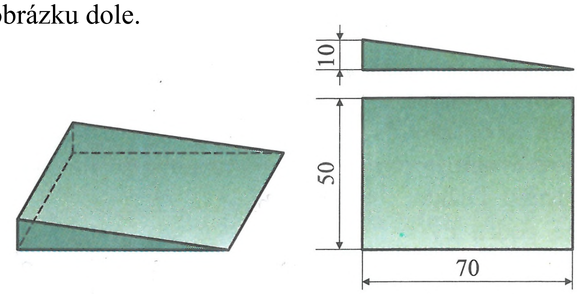
4. Vypočítajte hrúbku medeného plechu s hustotou $8{,}7\ \frac{g}{cm^3}$ s rozmermi 1,5 m a 80 cm, ak jeho hmotnosť je 3,65 kg.

5. Komora na výrobu koksu má približne tvar kvádra. Je 12 m dlhá, 440 cm široká a 3,7 m vysoká. Koľko ton uhlia spracuje 72 pecí pri jednej náplni, ak počítame, že do 1 m^3 sa zmestí 1,35 ton čierneho uhlia?

6. Vypočítajte hmotnosť štvorcovej dosky so štyrmi otvormi. Je vyrobená zo železa s hustotou $7{,}8\ \frac{g}{cm^3}$. Rozmery na obrázku vpravo sú v milimetroch.

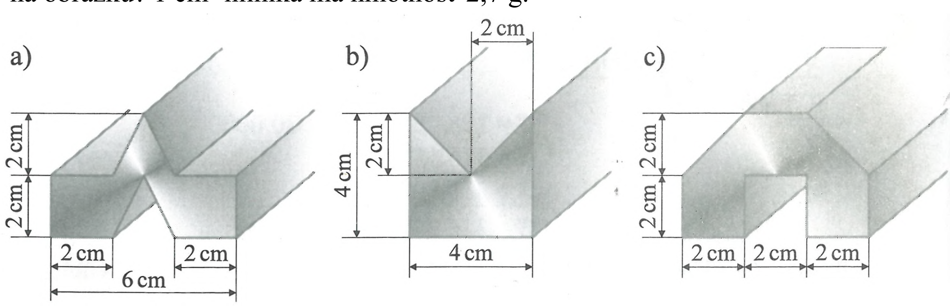


7. Vypočítajte povrch a objem klina znázorneného na obrázku dole.

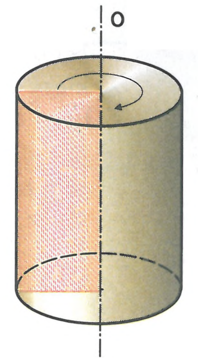


8. Načrtnite a vypočítajte povrch a objem pravidelného šesťbokého hranola. Hrana podstavy má dĺžku 20 mm, výška hranola je 60 mm.

9. Aká je hmotnosť hliníkového profilu dĺžky 1,80 m, ktorého prierez je znázornený na obrázku? 1 cm^3 hliníka má hmotnosť 2,7 g.



7.2 Povrch a objem valca

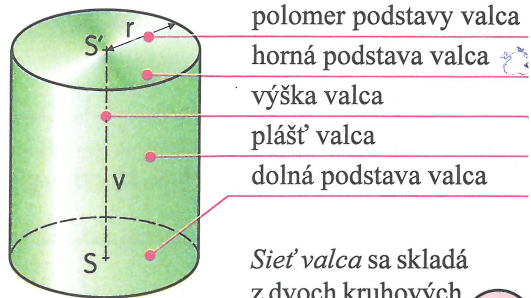


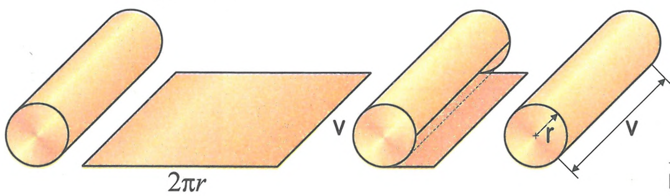
Rotačný valec vznikne napr. otáčaním obdĺžnika okolo jeho strany.

Strana obdĺžnika rovnobežná s osou otáčania vytvorí pri otáčaní plášť valca. Valec má dve *podstavy*, sú to kruhy s polomerom r, ktorý sa rovná dĺžke otáčajúcej sa strany obdĺžnika kolmej na os otáčania.

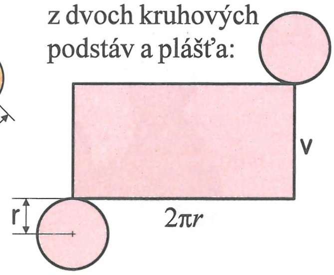
Výška valca je dĺžka strany obdĺžnika, okolo ktorej sa obdĺžnik otáča. Je to vzdialenosť obidvoch podstáv valca.

Pri rozvinutí plášťa do roviny dostaneme obdĺžnik, ktorého jedna strana má dĺžku $2\pi r$ (obvod podstavy), dĺžka druhej strany sa rovná výške v valca. $S_{pl} = 2\pi r \cdot v$





Sieť valca sa skladá z dvoch kruhových podstáv a plášťa:



Povrch valca vypočítame ako súčet obsahu plášťa a obsahov kruhových podstáv

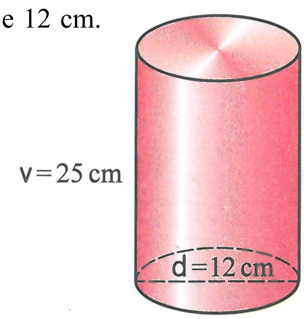
$$\boldsymbol{S = S_{pl} + 2 \cdot S_p}$$
$$\boldsymbol{S = 2\pi rv + 2\pi r^2}$$
$$\boldsymbol{S = 2\pi r\,(r + v)}$$

[1] ***PRÍKLAD***

Rotačný valec má výšku v = 2,5 dm a priemer podstavy d je 12 cm. Vypočítajte jeho povrch.

RIEŠENIE

Povrch valca vypočítame podľa vzorca $S = 2\pi rv + 2\pi r^2$

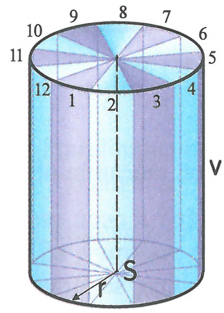


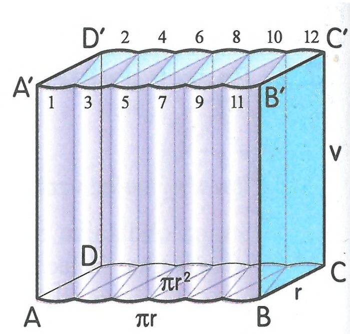
d = 12 cm,
v = 2,5 dm = 25 cm
S = ... cm²

$S = 2\pi rv + 2\pi r^2$
$S = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 25 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6^2$
$S = 942 + 226{,}08$
$S = 1\,168{,}08$
$S = 1\,168{,}08\ \text{cm}^2$
$S \doteq 1\,168\ \text{cm}^2$

Povrch valca sa rovná približne 1 168 cm².

Na obrázku je znázornený valec, ktorý je rozdelený na 12 zhodných častí. Z týchto je zostavené teleso $ABCDA'B'C'D'$. Toto teleso pripomína kváder s rozmermi πr, r, v; jeho objem $V = \pi r^2 v$.





Objem valca vypočítame ako súčin obsahu podstavy a výšky valca

$$V = \pi r^2 v$$

PRÍKLAD

[2] Vypočítajte objem valca, ktorého podstava má priemer $d = 22$ cm a jeho výška v je 1,7 dm.

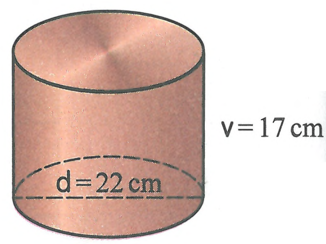
RIEŠENIE

$d = 22$ cm
$r = 11$ cm
$v = 1{,}7$ dm $= 17$ cm
$V = \dots$ cm^3

$V = \pi r^2 v$

$V = 3{,}14 \,.\, 11^2 \,.\, 17$
$V = 6\,458{,}98$

$V = 6\,458{,}98$ cm^3
$V \doteq 6\,459$ cm^3



Objem valca je približne 6 459 cm^3.

PRÍKLAD

[3] Akú hmotnosť má 1 000 m bronzového drôtu s priemerom $d = 4{,}5$ mm (1 cm^3 bronzu má hmotnosť 9 g)?

RIEŠENIE

Opäť riešenie rozdelíme na dva kroky. V prvom kroku vypočítame objem. Použijeme vzorec pre objem valca.

$d = 4{,}5$ mm
$r = 2{,}25$ mm $= 0{,}225$ cm
$v = 1000$ m $= 100\,000$ cm
$V = \dots$ cm^3

$V = \pi r^2 v$

$V = 3{,}14 \,.\, 0{,}225^2 \,.\, 100\,000$
$V = 3{,}14 \,.\, 0{,}050\,625 \,.\, 100\,000$
$V = 15\,896{,}25$

$V \doteq 15\,896$ cm^3

Vypočítame hmotnosť m ako súčin objemu a hustoty bronzu.

$V = 15\,896$ cm^3
$\rho = 9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
$m = \dots$ g

$m = V \,.\, \rho$

$m = 15\,896 \,.\, 9$
$m = 143\,064$

$m = 143\,064$ g $\doteq 143$ kg

1 000 m bronzového drôtu má hmotnosť približne 143 kg.

CVIČENIA

1. Vypočítajte povrch a objem rotačného valca, ktorého podstava má polomer 2,5 cm a jeho výška je 12 cm.

2. Narysujte sieť valca, ktorého polomer podstavy je 2 cm a výška 6 cm.

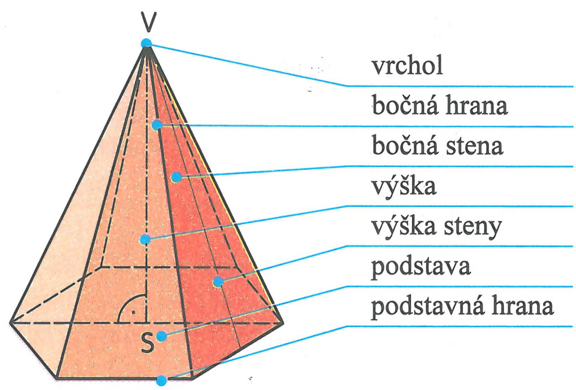
3. Vypočítajte hmotnosť železnej rúrky 1 m dlhej, keď vonkajší polomer je 2 cm a vnútorný polomer je 1,5 cm (1 cm^3 železa má hmotnosť 7,8 g).

4. Vypočítajte rozdiel objemov valcov, z ktorých jeden je opísaný a druhý vpísaný pravidelnému šesťbokému hranolu s podstavnou hranou dĺžky 6 cm a s bočnou hranou dĺžky 27 cm.

5. Rovnostranný valec (valec, ktorého výška sa rovná priemeru podstavy) má povrch $S = 650\ cm^2$. Vypočítajte jeho polomer, výšku a objem.

6. Určte hrúbku mosadznej rúrky (1 cm^3 má hmotnosť 8,5 g), ktorej dĺžka je 60 cm, vonkajší obvod 3,2 cm a hmotnosť 94,956 g.

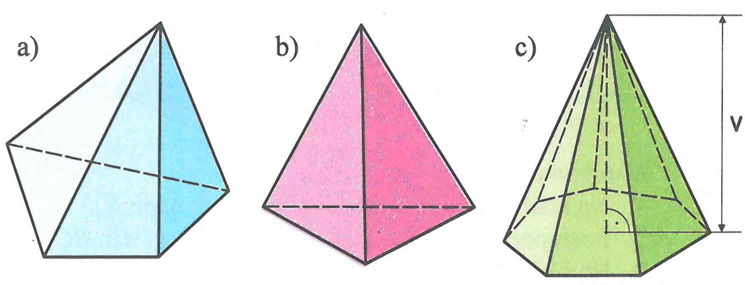
7.3 Povrch a objem ihlana



Ihlan je teleso ohraničené jedným n-uholníkom a n trojuholníkmi; n-uholník sa nazýva *podstava,* trojuholníky *bočné steny.*

Ak má ihlan n bočných stien (ak jeho podstava je n-uholník), hovoríme o n-bokom ihlane. Trojboký ihlan sa nazýva *štvorsten.* Ak jeho podstava a ostatné steny trojbokého ihlana sú zhodné rovnostranné trojuholníky, nazýva sa *pravidelný štvorsten.*

Na obrázku a) je štvorboký ihlan, na obrázku b) je trojboký ihlan (štvorsten) a na obrázku c) je sedemboký ihlan.

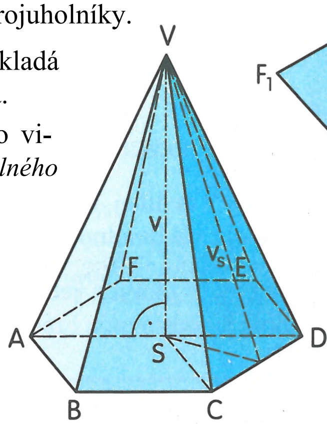


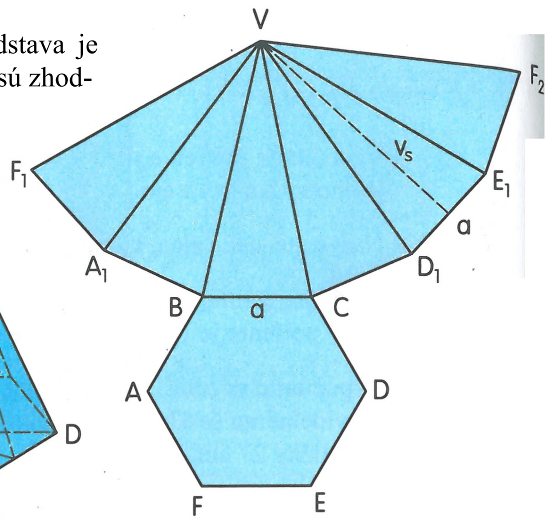
Výška ihlana je vzdialenosť vrcholu od roviny podstavy.

Pravidelný ihlan je ihlan, ktorého podstava je pravidelný n-uholník a jeho bočné steny sú zhodné rovnoramenné trojuholníky.

Povrch ihlana sa skladá z podstavy a plášťa.

Na obrázku vpravo vidíme *sieť pravidelného šesťbokého ihlana.*





Je zrejmé, že plášť ihlana sa skladá zo zhodných rovnoramenných trojuholníkov so základňou a a výškou v_S steny. Preto sa obsah plášťa rovná súčtu obsahov trojuholníkov, ktoré tvoria plášť.

Povrch S ihlana sa rovná súčtu obsahu podstavy S_p a obsahu plášťa S_{pl}

$$S = S_p + S_{pl}$$

[1] ***PRÍKLAD***

Zostrojte sieť ihlana, ak je jeho podstavou pravidelný šesťuholník s dĺžkou hrany 3 cm a výška ihlana je 4 cm.

RIEŠENIE

Podstava je pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky $a = 3$ cm. Najprv musíme vypočítať dĺžku h bočnej hrany ihlana. Použijeme Pytagorovu vetu pre $\triangle\, CSV$, kde S je stred podstavy. Platí:

$a = 3$ cm
$v = 4$ cm
$h = \ldots$ cm

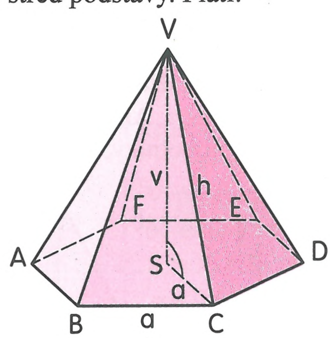
$h^2 = a^2 + v^2$

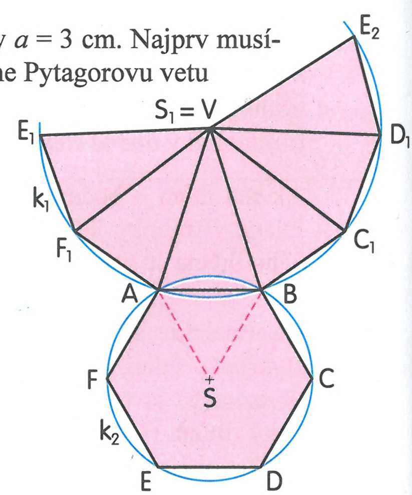
$h^2 = 3^2 + 4^2$

$h = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$h = 5$

$h = 5$ cm





Konštrukcia:

1. Na kružnici $k_1(V, 5\text{ cm})$ zvolíme bod, napr. E_1.
2. Postupne zostrojíme šesť tetív E_1F_1, F_1A, AB, BC_1, C_1D_1, D_1E_2 s dĺžkou 3 cm.
3. Nad niektorou z tetív (napr. nad AB) zostrojíme pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ s dĺžkou strany 3 cm [$k_2(S, 3\text{ cm})$, kde S je vrchol rovnostranného trojuholníka ABS].

1 *ÚLOHA*

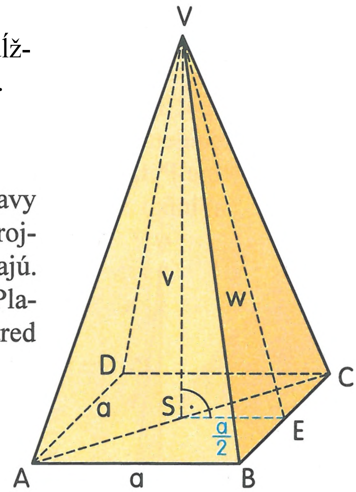
Zostrojte z papiera model pravidelného štvorstena, ktorého hrana má dĺžku 8 cm.

2 *ÚLOHA*

Zostrojte z papiera model pravidelného štvorbokého ihlana, ktorého dĺžka podstavnej hrany je 7 cm a dĺžka bočnej hrany 9 cm.

[2] ***PRÍKLAD***

Vypočítajte povrch pravidelného štvorbokého ihlana, ak dĺžka podstavnej hrany $a = 4{,}6$ cm a výška ihlana $v = 8{,}5$ cm.



RIEŠENIE

Podstavou ihlana je štvorec so stranou a. Obsah podstavy je a^2. Výšky w vo všetkých zhodných rovnoramenných trojuholníkoch, ktoré tvoria plášť ihlana, sa navzájom rovnajú. Výšku w vypočítame z pravouhlého trojuholníka VSE. Platí $|SE| = \frac{1}{2}a$, lebo E je stred podstavnej hrany a S je stred podstavy ihlana.

$a = 4{,}6$ cm
$v = 8{,}5$ cm
$\underline{w = \ldots \text{ cm}}$

$w^2 = v^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$w^2 = 8{,}5^2 + \frac{1}{4} \cdot 4{,}6^2$
$w^2 = 72{,}25 + 5{,}29$
$w = \sqrt{77{,}54}$
$w \doteq 8{,}8$
$w \doteq 8{,}8$ cm

Obsah S_1 jednej bočnej steny ihlana sa rovná obsahu rovnoramenného trojuholníka so základňou a a výškou w.

$a = 4{,}6$ cm
$w = 8{,}8$ cm
$\underline{S_1 = \ldots \text{ cm}^2}$

$S_1 = \frac{1}{2}a \,.\, w$

$S_1 = \frac{1}{2} \,.\, 4{,}6 \,.\, 8{,}8$
$S_1 = 20{,}24$
$S_1 = 20{,}24$ cm^2

$S = a^2 + 4 \,.\, S_1$
$S = 4{,}6^2 + 4 \,.\, 20{,}24$
$S = 21{,}16 + 80{,}96$
$S = 102{,}12$
$S \doteq 102{,}1$ cm^2

Povrch daného ihlana je približne 102,1 cm^2.

[3] ***PRÍKLAD***

Vypočítajte povrch štvorbokého ihlana, ktorého podstava je obdĺžnik s jedným rozmerom 2,4 dm a uhlopriečkou s dĺžkou 0,25 m. Výška ihlana má dĺžku 3 dm.

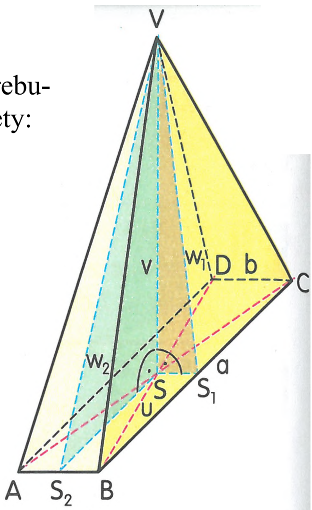
RIEŠENIE

$a = 2{,}4$ dm
$u = 0{,}25$ m $= 2{,}5$ dm
$\underline{S = \ldots \text{ dm}^2}$

Povrch ihlana vypočítame ako súčet obsahu podstavy a obsahov stien, teda

$$S = S_{ABCD} + 2S_{\triangle ABV} + 2S_{\triangle BCV}$$

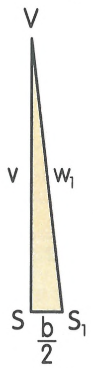
Najskôr vypočítame obsah podstavy S_{ABCD}. Na výpočet potrebujeme druhý rozmer b obdĺžnika $ABCD$. Podľa Pytagorovej vety:



$$\begin{aligned} b^2 &= u^2 - a^2 \\ b^2 &= 2{,}5^2 - 2{,}4^2 \\ b &= \sqrt{6{,}25 - 5{,}76} \\ b &= \sqrt{0{,}49} \\ b &= 0{,}7 \\ b &= 0{,}7\ \text{dm} \end{aligned}$$

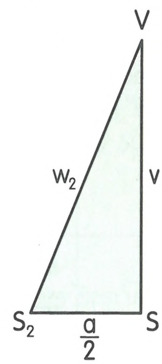
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= ab \\ S_{ABCD} &= 2{,}4\ .\ 0{,}7 \\ S_{ABCD} &= 1{,}68 \\ S_{ABCD} &= 1{,}68\ \text{dm}^2 \end{aligned}$$

Ďalej vypočítame obsahy stien. Najskôr vypočítame obsah steny ABV. Na to potrebujeme dĺžku výšky w_1 $\triangle ABV$. Využijeme Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku S_1SV.



$$\begin{aligned} w_1^2 &= v^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ w_1^2 &= 3^2 + 0{,}35^2 \\ w_1 &= \sqrt{9 + 0{,}122\,5} \\ w_1 &= 3{,}02 \\ w_1 &= 3{,}02\ \text{dm} \end{aligned}$$

Podobne na výpočet dĺžky výšky w_2 využijeme pravouhlý trojuholník S_2SV.



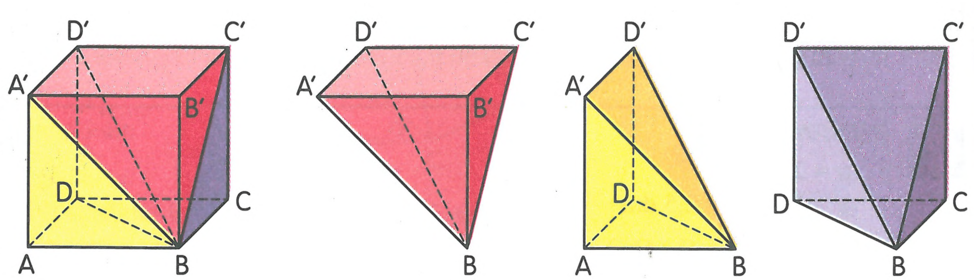
$$\begin{aligned} w_2^2 &= v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ w_2^2 &= 3^2 + 1{,}2^2 \\ w_2 &= \sqrt{9 + 1{,}44} \\ w_2 &= 3{,}23 \\ w_2 &= 3{,}23\ \text{dm} \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABV} = \frac{2{,}4\ .\ 3{,}02}{2} = 3{,}62 \qquad S_{\triangle BCV} = \frac{0{,}7\ .\ 3{,}23}{2} = 1{,}13 \qquad S = (1{,}68 + 2\ .\ 3{,}62 + 2\ .\ 1{,}13) = 11{,}18$$

$$S_{\triangle ABV} = 3{,}62\ \text{dm}^2 \qquad S_{\triangle ACV} = 1{,}13\ \text{dm}^2 \qquad S = 11{,}18\ \text{dm}^2$$

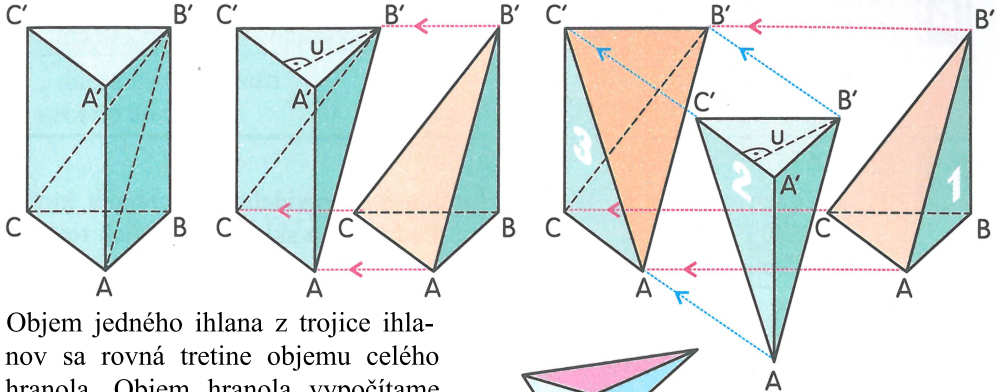
Povrch ihlana sa rovná približne 11,18 dm^2.

Na obrázku je narysovaná kocka $ABCDA'B'C'D'$. Táto sa dá rozložiť na tri štvorboké ihlany so spoločným vrcholom B. Ich podstavy sú: $A'B'C'D'$, $ADD'A'$ a $DCC'D'$. Pretože ich podstavy sú stenami tej istej kocky, sú zhodné.

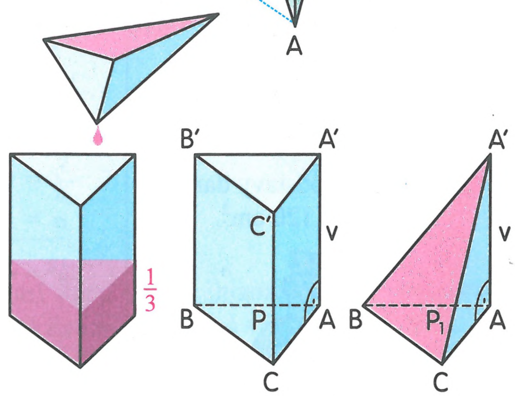


Objem každého z nich sa rovná jednej tretine objemu kocky.

Podobne môžeme rozrezať aj trojboký hranol $ABCA'B'C'$ na tri trojboké ihlany.

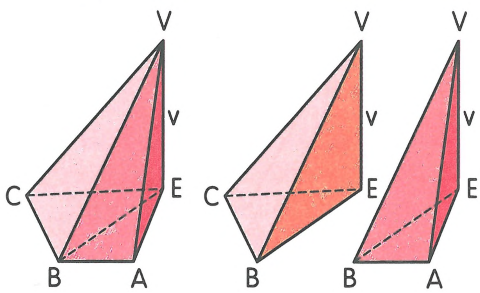


Objem jedného ihlana z trojice ihlanov sa rovná tretine objemu celého hranola. Objem hranola vypočítame ako súčin obsahu podstavy a dĺžky jeho výšky. Preto pre ihlan platí:



Objem ihlana sa rovná jednej tretine zo súčinu obsahu jeho podstavy a dĺžky výšky

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$



Platnosť tohto vzorca ľahko rozšírime aj na viacboké ihlany, lebo každý z nich môžeme rozdeliť na trojboké ihlany s rovnakou výškou.

[4] ***PRÍKLAD***

Vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana, ktorého dĺžka podstavnej hrany a = 4,5 dm a výška je 65 cm.

RIEŠENIE

$a = 4{,}5$ dm

$v = 65$ cm $= 6{,}5$ dm

$V = \ldots$ dm^3

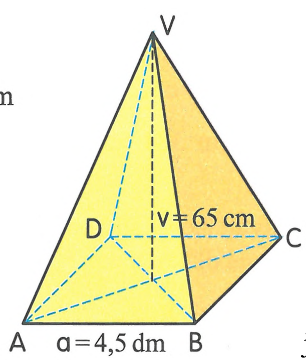
$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5^2 \cdot 6{,}5$

$V = 43{,}875$

$V = 43{,}875$ dm^3



Objem pravidelného štvorbokého ihlana je 43,875 dm³.

[5] ***PRÍKLAD***

Objem pravidelného šesťbokého ihlana, ktorého výška $v = 6$ cm, je 240 cm³.
Vypočítajte a) obsah jeho podstavy,
b) dĺžku hrán podstavy.

RIEŠENIE

a) $v = 6$ cm
$V = 240\ \text{cm}^3$
$S_p = \dots\ \text{cm}^2$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

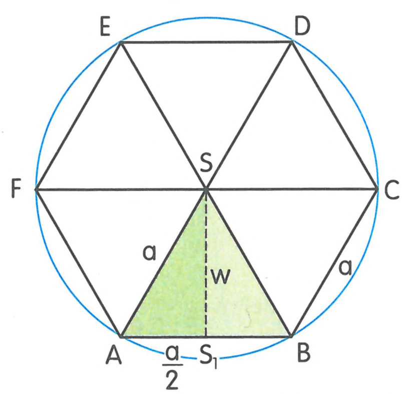
$$240 = \frac{1}{3} S_p \cdot 6$$
$$240 = 2 \cdot S_p$$
$$S_p = 120$$
$$S_p = 120\ \text{cm}^2$$

Obsah podstavy daného ihlana je 120 cm².

b) Podstava ihlana je pravidelný šesťuholník, ktorého obsah poznáme. Podstava sa skladá zo šiestich rovnostranných trojuholníkov, na výpočet veľkostí podstavnej hrany použijeme napr. $\triangle ABS$. Na to potrebujeme výšku w rovnostranného trojuholníka.
Použijeme pravouhlý $\triangle ASS_1$;
$w^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, odtiaľ $w = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$S_p = 120\ \text{cm}^2$
$\frac{S_p}{6} = 20\ \text{cm}^2 = S_{\triangle ABS}$ $\quad 20 = \dfrac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$
$a = \dots$ cm

$$a^2 = \frac{80}{\sqrt{3}}$$
$$a^2 \doteq \frac{80}{1{,}73}$$
$$a^2 \doteq 46{,}242$$
$$a \doteq 6{,}8$$
$$a \doteq 6{,}8\ \text{cm}$$



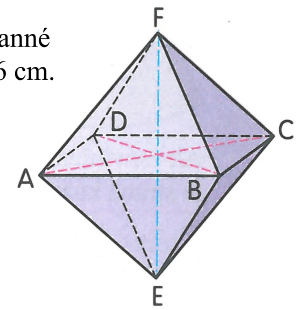
Dĺžka podstavnej hrany daného ihlana je približne 6,8 cm.

CVIČENIA

1. Vypočítajte povrch a objem pravidelného štvorbokého ihlana, ktorého dĺžka podstavnej hrany $a = 4{,}6$ cm a výška $v = 8{,}5$ cm.
2. Pravidelný štvorboký ihlan má objem 384 ml a dĺžku podstavnej hrany 12 cm. Vypočítajte výšku tohto ihlana.
3. Vypočítajte povrch a objem pravidelného šesťbokého ihlana, ktorého podstavná hrana má dĺžku 10 cm a bočná hrana dĺžku 26 cm.
4. Veľká pyramída v Gize (Egypt) má tvar pravidelného štvorbokého ihlana. Podstavná hrana má dĺžku približne 227 m a jej výška je 140 m. Akú hmotnosť má kameň,

ktorý bol potrebný na stavbu tejto pyramídy, ak hmotnosť jedného kubického metra kameňa je 2,5 t? (Chodby a miestnosti vo vnútri neberte do úvahy).

5. Všetky steny pravidelného osemstena sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Hrany osemstena *ABCDEF* majú dĺžku $d = 6$ cm.
   Vypočítajte a) povrch,
   b) objem tohto osemstena.



6. Vypočítajte objem vzduchu v m^3 vo vnútri stanu v tvare ihlana, ktorý je postavený nad obdĺžnikovým pôdorysom s rozmermi 2 m a 2,5 m a má výšku $v = 2,5$ m.

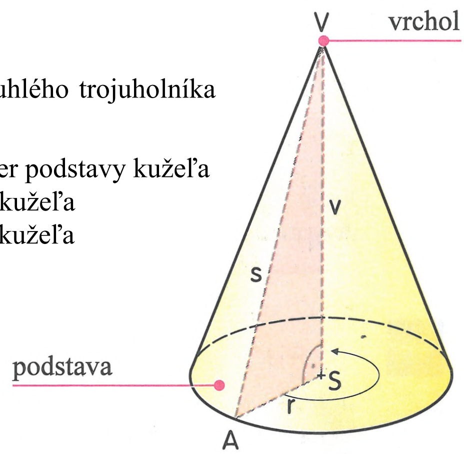
7. Vypočítajte povrch pravidelného štvorstena (podstava a steny sú rovnostranné trojuholníky), ktorého hrana a má dĺžku 4 m.

8. Plášť pravidelného štvorbokého ihlana sa skladá zo štyroch zhodných rovnoramenných trojuholníkov, ktorých ramená majú dĺžku 8 cm a zvierajú uhol $\alpha = 56°$.
   Vypočítajte a) dĺžku podstavnej hrany,
   b) povrch ihlana,
   c) objem ihlana.

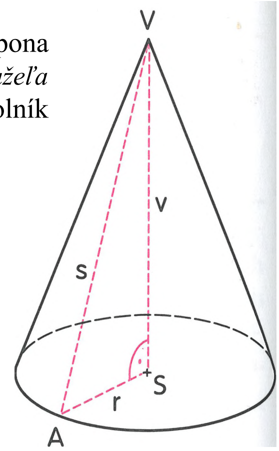
7.4 Povrch a objem kužeľa

Rotačný kužeľ vznikne napr. otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny

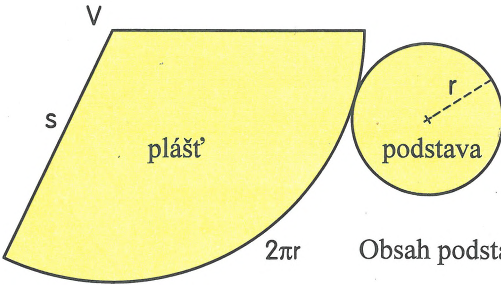
r - polomer podstavy kužeľa
v - výška kužeľa
s - strana kužeľa



Druhá odvesna vytvára pri otáčaní kruhovú *podstavu.* Prepona otáčajúceho sa trojuholníka je *strana* (s) *kužeľa. Výška* (v) *kužeľa* je veľkosť tej odvesny trojuholníka, okolo ktorej sa trojuholník otáča, je to vzdialenosť stredu podstavy od vrcholu kužeľa.

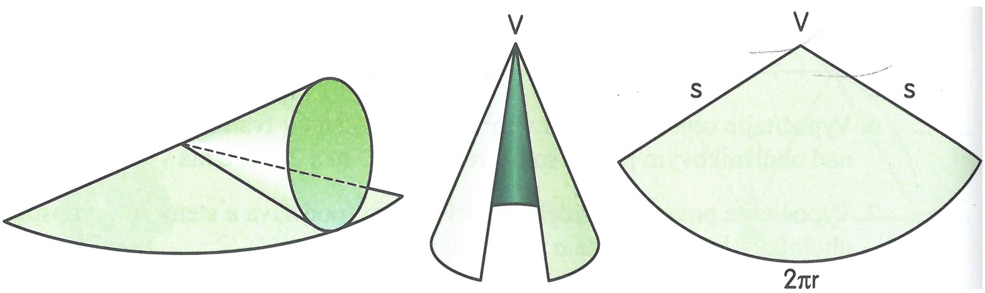


Povrch rotačného kužeľa sa skladá z podstavy a plášťa.

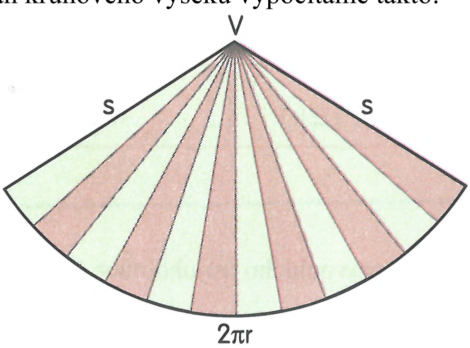


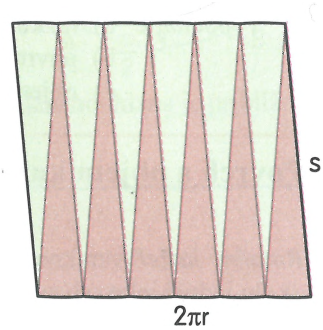
Obsah podstavy $S_p = \pi r^2$

Ak rozvinieme plášť kužeľa do roviny, dostaneme kruhový výsek, ktorého polomerom je strana kužeľa a ktorého oblúk má dĺžku $2\pi r$.



Obsah kruhového výseku vypočítame takto:





Obsah S_{pl} plášťa tohto útvaru bude πrs. Ak k obsahu plášťa S_{pl} pričítame obsah podstavy πrs, potom povrch rotačného kužeľa vypočítame:

Povrch kužeľa sa rovná súčtu obsahu jeho podstavy a obsahu plášťa

$$S = S_p + S_{pl}$$

$$S = \pi r^2 + \pi rs$$

$$S = \pi r\,(r + s)$$

PRÍKLAD [1]

Vypočítajte povrch rotačného kužeľa, ktorého podstava má priemer d = 25 cm, výška kužeľa je 18 cm.

RIEŠENIE

$d = 25$ cm
$r = 12{,}5$ cm
$v = 18$ cm
$s = \ldots$ cm
$S = \ldots \text{ cm}^2$

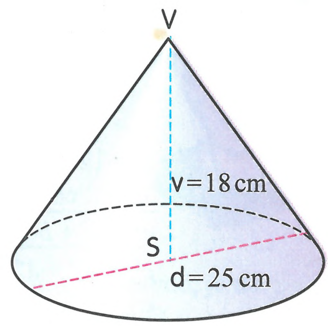
$s^2 = 12{,}5^2 + 18^2$
$s^2 = 156{,}25 + 324$
$s^2 = 480{,}25$
$s = 22$

$s = 22$ cm

$S = \pi r^2 + \pi r s$
$S = 3{,}14 \,.\, 12{,}52 + 3{,}14 \,.\, 12{,}5 \,.\, 22$
$S = 490{,}625 + 863{,}5$
$S = 1\,354{,}125$

$S = 1\,354{,}125 \text{ cm}^2$

Povrch kužeľa je 1 354,125 cm^2.



Podobne ako objem ihlana sa rovná jednej tretine objemu hranola, ktorého obsah podstavy a veľkosť výšky sa rovná obsahu podstavy a veľkosti výšky ihlana, tak aj objem rotačného kužeľa sa rovná jednej tretine objemu valca so zachovaním obsahu podstavy a veľkosti výšky. Teda:

Objem rotačného kužeľa sa rovná jednej tretine zo súčinu obsahu podstavy S_p a výšky v

$$V = \frac{1}{3} S_p \,.\, v$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

PRÍKLAD [2]

Vypočítajte objem kužeľa, ktorého priemer podstavy d = 26 cm a jeho výška v = 8 cm.

RIEŠENIE

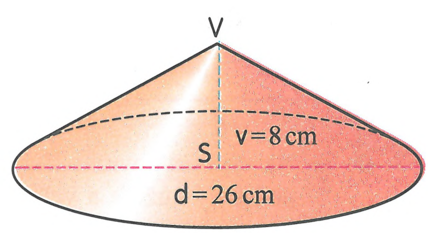
$d = 26$ cm
$r = 13$ cm
$v = 8$ cm
$V = \ldots \text{ cm}^3$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$V = \frac{1}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 13^2 \,.\, 8$
$V = \frac{1}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 169 \,.\, 8$
$V \doteq 1\,415$

$V \doteq 1\,415 \text{ cm}^3$

Objem kužeľa je približne 1 415 cm^3.



[3] ***PRÍKLAD***

Pravouhlý trojuholník má dĺžky odvesien 16 cm, 12 cm. Aké teleso vznikne otáčaním tohto trojuholníka okolo prepony? Aký je objem tohto telesa?

RIEŠENIE

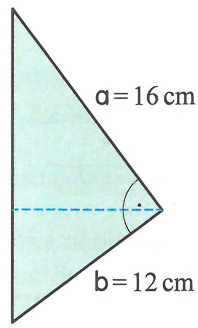
Pravouhlý trojuholník je dĺžkami určený, podľa Pytagorovej vety vypočítame dĺžku jeho prepony.

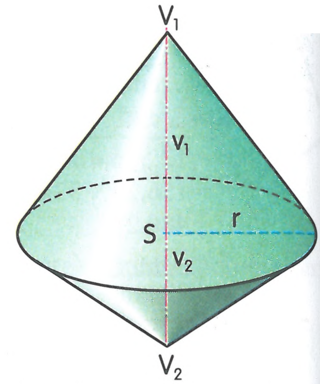
$a = 16$ cm
$b = 12$ cm
$c = \dots$ cm

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 16^2 + 12^2$
$c^2 = 256 + 144$
$c^2 = 400$

$c = 20$ cm





Vzniknú dva kužele so spoločnou podstavou. Objem vzniknutého telesa vypočítame ako súčet objemov V_1 a V_2 týchto kužeľov. Označme v_1, v_2 výšky týchto kužeľov. Polomery podstáv sú pre obidva kužele rovnaké, označme ich r. Zo zadania vyplýva, že $v_1 + v_2 = 20$ cm.

Polomer r je výška daného pravouhlého trojuholníka; r vypočítame z obsahu daného trojuholníka.

$$\frac{c \,.\, r}{2} = \frac{12 \,.\, 16}{2}$$
$$20 \,.\, r = 192$$
$$r = 192 : 20$$
$$r = 9{,}6$$
$$r = 9{,}6 \text{ cm}$$

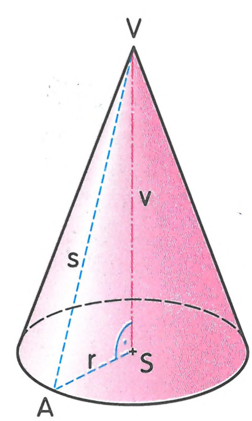
Objem celého telesa vypočítame:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 v_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (v_1 + v_2),\ v_1 + v_2 = c$$
$$V = \frac{1}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 9{,}6^2 \,.\, 20$$
$$V \doteq 1\,929{,}22$$
$$V \doteq 1\,929{,}22 \text{ cm}^3$$

Teleso je zložené z dvoch kužeľov so spoločnou podstavou. Jeho objem je po zaokrúhlení 1 929,22 cm^3.

[4] ***PRÍKLAD***

Rotačný kužeľ má obvod podstavy 16 cm a výšku $v = 7$ cm. Určte jeho povrch S a objem V.



RIEŠENIE

a) Na výpočet povrchu kužeľa potrebujeme poznať polomer podstavy kužeľa a veľkosť strany s. Z obvodu podstavy $2\pi r = 16$ cm vypočítame
$$r = \frac{8}{\pi} = 2{,}25 \text{ cm}$$

Strana s je prepona pravouhlého trojuholníka s odvesnami r a v, a preto $s^2 = r^2 + v^2$, po dosadení a úpravách $s = 7{,}45$ cm. Odtiaľ
$$S = \pi r s + \pi r^2 \doteq 80 \text{ cm}^2$$

b) Objem V vypočítame podľa vzorca $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v \doteq 48\ \text{cm}^3$

Povrch daného kužeľa je približne 80 cm^2 a objem je približne 48 cm^3.

POZNÁMKA

Pri riešení tohto príkladu sme neuviedli všetky úpravy, prenechávame ich žiakom.

CVIČENIA

1. Vypočítajte povrch a objem kužeľa, ktorého
   a) polomer podstavy je 9 cm a výška 1,1 dm;
   b) priemer podstavy je 60 mm a dĺžka strany 3,4 cm;
   c) výška je 5 cm a veľkosť uhla, ktorý zviera strana kužeľa s podstavou, je 65°;
   d) priemer podstavy je 3 dm a veľkosť uhla pri vrchole kužeľa je 46°.

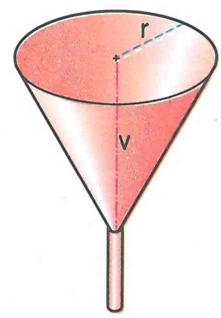
2. V nasledujúcej tabuľke doplňte chýbajúce údaje o kužeľoch.

Kužeľ	Polomer podstavy	Obsah podstavy	Výška kužeľa	Strana kužeľa	Objem kužeľa
A	5 cm		15 cm		
B		50 cm^2	10 cm		
C	10 m			20 m	
D			3 m	5 m	
E		$16 . \pi\ \text{m}^2$			$64 . \pi\ \text{m}^3$

3. Objem kužeľa je 462 cm^3, polomer podstavy r = 7 cm. Vypočítajte výšku v.

4. Strana rotačného kužeľa a jeho os určuje uhol α = 20° 30'; polomer podstavy kužeľa r = 22,5 cm. Vypočítajte objem tohto kužeľa.

5. Kužeľovitá nálievka s malým (zanedbateľným) otvorom pre odtok kvapaliny má objem 0,5 litra a výšku 7 cm. Vypočítajte polomer horného okraja.



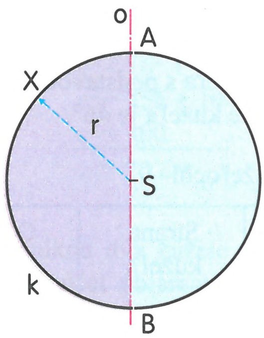
Ďaleko ťažšie sa hľadá chyba, než pravda.

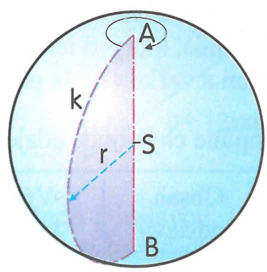
J. W. Goethe

7.5 Guľa, guľová plocha

V praktickom živote sa často stretávame s predmetmi, ktoré majú tvar gule. Napríklad lopta, vodojem, guľky v guľkových ložiskách atď.

Nech je daný polkruh s priemerom *AB*. Otáčaním tohto polkruhu okolo priemeru *AB* vzniká teleso, ktoré sa nazýva ***guľa.***





S - stred gule
r - polomer gule

Polkružnica *k* vytvára pri otáčaní okolo priamky *AB* guľovú plochu, ktorá tvorí povrch gule.

Ak zvolíme na polkružnici *k* bod *X*, platí

$$|SX| = r$$

Každý bod guľovej plochy má od stredu *S* guľovej plochy vzdialenosť *r*.

Bod priestoru, ktorý má od stredu *S* guľovej plochy (gule) vzdialenosť menšiu ako polomer, leží vo vnútri guľovej plochy (gule). Bod priestoru, ktorý má od stredu *S* guľovej plochy (gule) vzdialenosť väčšiu ako polomer, leží zvonka guľovej plochy (gule).

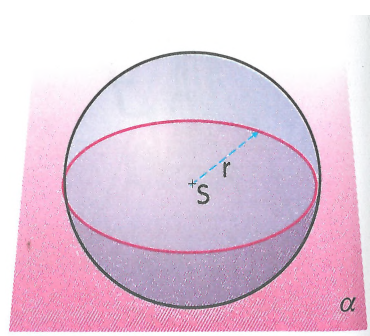
Guľová plocha je množina bodov *X* priestoru, ktoré majú od pevného bodu *S* rovnakú vzdialenosť *r,* ktorá sa nazýva polomer.

$$\boldsymbol{|SX| = r}$$

Guľa je množina všetkých bodov *X* priestoru, ktorých vzdialenosť od daného pevného bodu *S* je menšia alebo sa rovná polomeru gule.

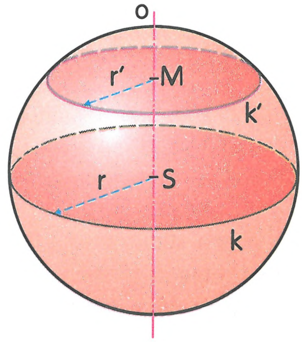
$$\mathbf{|SX| \leq r}$$

Guľovú plochu nemožno rozvinúť do roviny, teda *sieť gule neexistuje.*



Rovina, ktorá prechádza stredom guľovej plochy, pretína túto guľovú plochu v kružnici *k* so stredom *S* a polomerom *r*. Takáto kružnica sa nazýva *hlavná kružnica guľovej plochy.*

Rovina, ktorej vzdialenosť od stredu S je $0 < v < r$, pretína guľovú plochu opäť v kružnici k' so stredom M a polomerom $r' < r$.



Rovina, ktorá pretína guľovú plochu, sa nazýva sečná rovina.

Objem gule vypočítame podľa vzorca

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Povrch gule vypočítame podľa vzorca

$$S = 4\pi r^2$$

POZNÁMKA

Vzorec pre objem gule odvodil grécky matematik Archimedes v *3. storočí pred n. l.*

PRÍKLAD

Vypočítajte povrch S a objem V gule s polomerom 3 m.

RIEŠENIE

a) $r = 3$ m

$S = \ldots \text{ m}^2$

$S = 4\pi r^2$

$S = 4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 3^2$

$S \doteq 113{,}04$

$S \doteq 113 \text{ m}^2$

b) $r = 3$ m

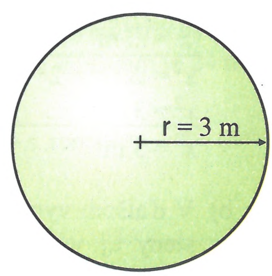
$V = \ldots \text{ m}^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 3^3$

$V \doteq 113$

$V \doteq 113 \text{ m}^3$



Povrch gule je približne 113 m^2 a objem tej istej gule je približne 113 m^3.

ÚLOHA

Preskúmajte, či sa pre každú guľu jej povrch a objem číselne rovnajú?
Čo spôsobilo rovnosť povrchu a objemu v príklade 1?

CVIČENIA

1. Vypočítajte povrch gule, ak jej polomer je:
   a) $r = 0{,}7$ m b) $r = 4{,}5$ cm c) $r = 11$ cm
2. Vypočítajte objem gule, ak jej polomer je:
   a) $r = 6$ cm b) $r = 3{,}2$ m
3. Vypočítajte povrch a objem Zeme. (Považujte ju za guľu s polomerom 6 370 km).

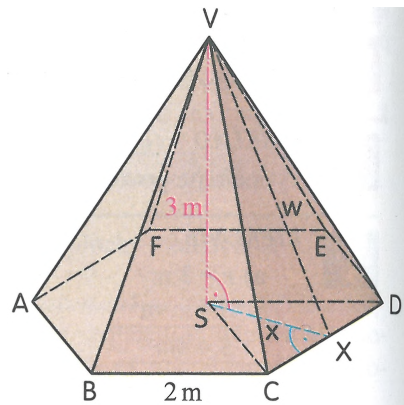
7.6 Úlohy z praxe

PRÍKLAD

Plátená strieška nad predajným stánkom má tvar pravidelného šesťbokého ihlana s dĺžkou podstavnej hrany 2 m a výškou 3 m. Vypočítajte, koľko m² plátna je potrebných na jej výrobu, ak výrobné straty tvoria 8 % zo skutočného povrchu.

RIEŠENIE

Strecha je vlastne plášť pravidelného šesťbokého ihlana. Plášť tvorí šesť rovnoramenných trojuholníkov, ktorých základňa má dĺžku 2 m. Výška w rovnoramenného trojuholníka je odvesna pravouhlého trojuholníka VSX, kde S je stred podstavy a X stred niektorej podstavnej hrany, podľa obrázka je to hrana CD.



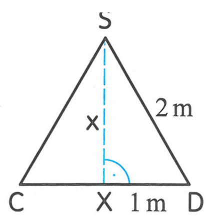
Úsečka SX je výška x rovnostranného trojuholníka SCD s dĺžkou strany 2 m.

a) $a = 2$ m
$x = \ldots$ m

$x^2 = |SX|^2 = 2^2 - 1^2$

$x^2 = 3$

$x^2 = 3\ \text{m}^2$



b) V ďalšom vypočítame výšku steny, t.j. výšku rovnoramenného trojuholníka VSX.

$x^2 = 3\ \text{m}^2$
$v = 3$ m
$w = \ldots$ m

$w^2 = v^2 + x^2$

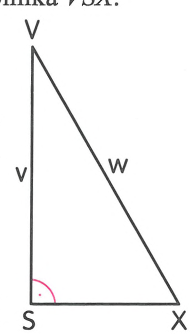
$w^2 = 3^2 + 3$

$w^2 = 12$

$w = \sqrt{12}$

$w = 3{,}46$

$w = 3{,}46$ m



c) Vypočítame obsah plášťa:

$a = 2$m
$w = 3{,}46$ m
$S_{pl} = \ldots\ \text{m}^2$

$S_{pl} = 6 \cdot \dfrac{a \cdot w}{2}$

$S_{pl} = 6 \cdot \dfrac{2 \cdot 3{,}46}{2}$

$S_{pl} \doteq 20{,}76$

$S_{pl} \doteq 20{,}76\ \text{m}^2$

d) Vypočítame potrebu materiálu. Pretože strata materiálu je 8 %, treba na výrobu počítať o 8 % materiálu viac ako je S_{pl}. Označme potrebu materiálu písmenom M. Potom

$M = S_{pl} + \dfrac{8}{100} S_{pl}$

$M = 20{,}76\ \text{m}^2 + 1{,}66\ \text{m}^2$

$M \doteq 22{,}5\ \text{m}^2$

Na výrobu striešky nad predajňou treba asi 22,5 m² plátna.

POZNÁMKA

V tomto prípade sme zaokrúhľovali nahor, aby pri výrobe materiál náhodou nechýbal.

[2] ***PRÍKLAD***

Koľko m³ štrku sa zmestí do násypníka na betonárke, ktorý má tvar pravidelného štvorbokého ihlana s dĺžkou podstavnej hrany 3,2 m, keď stenová výška s príslušnou strednou priečkou podstavy zviera uhol s veľkosťou 60°.

RIEŠENIE

Na výpočet objemu ihlana potrebujeme vypočítať výšku ihlana. Výška (hĺbka násypníka) je odvesnou pravouhlého trojuholníka *VXS.* V tomto trojuholníku poznáme dĺžku odvesny *SX,* to je polovica dĺžky hrany, teda $|SX| = 1,6$ m, ďalej poznáme veľkosť $\sphericalangle SXV$, to je $\alpha = 60°$. Na výpočet použijeme tangens uhla α.

a)
$|SX| = 1,6$ m
$\alpha = 60°$
$v = \dots$ m

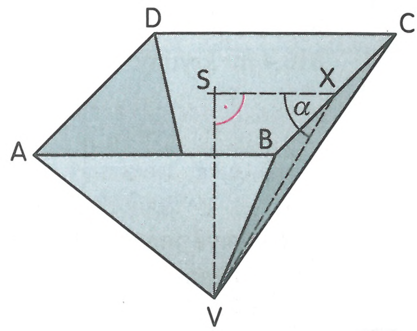
$\text{tg } 60° = \frac{v}{|SX|}$
$v = |SX| \,.\, \text{tg } 60°$
$v = 1,6 \,.\, 1,732\,0$
$v \doteq 2,77$

$v \doteq 2,77$ m

b)
$a = 3,2$ m
$v = 2,77$ m
$V = \dots \text{ m}^3$

$V = \frac{1}{3}a^2 \,.\, v$
$V = \frac{1}{3} \,.\, 3,2^2 \,.\, 2,77$
$V \doteq 9,45$

$V \doteq 9,45 \text{ m}^3$



Do násypníka sa zmestí približne 9,5 m³ štrku.

[3] ***PRÍKLAD***

Pri oprave hradu je potrebné vymeniť krytinu na hornej polovici strechy tvaru kužeľa nad vežou tvaru valca s priemerom 20 m. Výška strechy nad murivom je 24 m.

a) Koľko m² krytiny je na veži celkom?
b) Vypočítajte, koľko m² krytiny treba kúpiť (počítajte s rezervou 5 % materiálu na opravu strechy).
c) Koľko % krytiny na streche bude vymenené.

RIEŠENIE

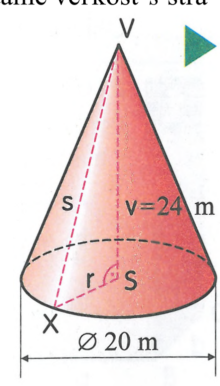
a) Veža má tvar kužeľa a strecha tvorí jeho plášť. Na výpočet obsahu plášťa potrebujeme polomer podstavy a dĺžku strany kužeľa. Polomer podstavy je $r = 10$ m a výška kužeľa je 24 m. Z pravouhlého trojuholníka *SXV* vypočítame veľkosť s strany kužeľa:

$r = 10$ m
$v = 24$ m
$s = \dots$ m

$s^2 = v^2 + r^2$

$s^2 = 10^2 + 24^2$
$s^2 = 676$
$s = \sqrt{676}$
$s = 26$

$s = 26$ m



Teraz vypočítame obsah plášťa

$r = 10$ m
$s = 26$ m
$S_{pl} = \dots$ m^2

$S_{pl} = \pi r s$

$S_{pl} = 3{,}14 \,.\, 10 \,.\, 26$
$S_{pl} = 816{,}4$

$S_{pl} = 816{,}4$ m^2

Na veži je 816,4 m^2 krytiny.

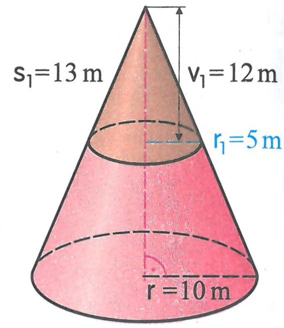
b) Krytinu treba vymeniť na hornej polovici, to znamená, že výška tejto časti bude polovica výšky celej veže a polomer kužeľa bude polovica polomeru veže.

$r_1 = 5$ m
$s_1 = 13$ m
$S_{1pl} = \dots$ m^2

$S_{1pl} = \pi r_1 s_1$

$S_{1pl} = 3{,}14 \,.\, 5 \,.\, 13$
$S_{1pl} = 204{,}1$

$S_{1pl} = 204{,}1$ m^2



Množstvo krytiny sa bude rovnať obsahu plášťa S_{1pl} väčšieho o 5 %.

$M = S_{1pl} + \frac{5}{100} S_{1pl}$
$M = 214{,}3$ m^2

Treba kúpiť približne 215 m^2 krytiny.

c) Celkové množstvo krytiny na veži je 816,7 m^2. Množstvo vymenenej krytiny je približne 215 m^2 čo je približne 26 %.

[4] ***PRÍKLAD***

Ktorý z dvoch hrnčekov tvaru valca má väčší objem? Prvý má polomer podstavy r a výšku v, druhý má polovičný polomer a dvojnásobnú výšku. Najskôr urobte odhad výsledku.

RIEŠENIE

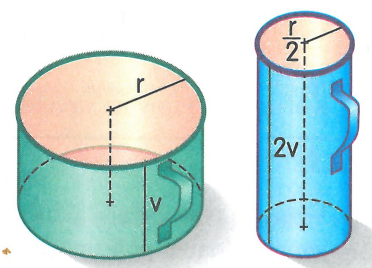
Objem prvého

r
v
$V_1 = \pi r^2 v$

Objem druhého

$r' = \frac{1}{2} r$
$v' = 2v$

$V_2 = \pi r'^2 \,.\, v'$
$V_2 = \pi \left(\frac{1}{2} r\right)^2 . \, 2v$
$V_2 = \frac{1}{2} \pi r^2 v$

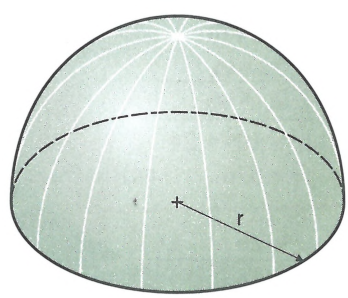


Objem vyššieho hrnčeka sa rovná polovici objemu nižšieho hrnčeka.

1 ***ÚLOHA***

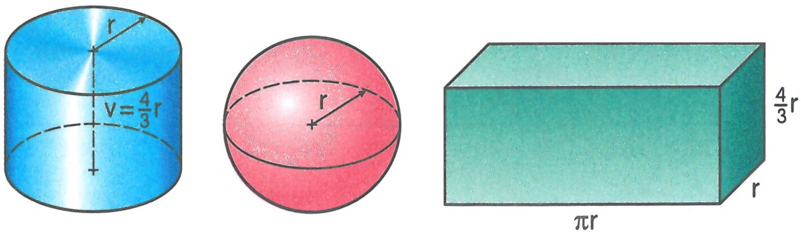
Porovnajte povrch kupole hvezdárne (polguľa) s obsahom podlahy:

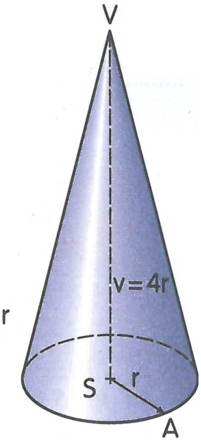
a) pre $r = 6$ m,
b) všeobecne.



2 ***ÚLOHA***

Na obrázku sú znázornené telesá: valec, guľa, kváder a kužeľ. Porovnajte ich objemy a povrchy.





CVIČENIA

1. Zväzok medeného drôtu s priemerom 2,8 mm má hmotnosť 5 kg. Koľko metrov drôtu je v tomto zväzku, ak 1 m^3 medi má hmotnosť 8 930 kg?

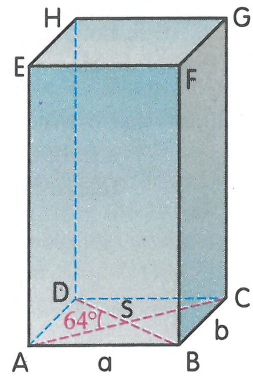
2. Obal na televízor v tvare kvádra má rozmery 65 cm, 55 cm a 48 cm. Koľko dm^2 lepenky treba na zhotovenie tohto obalu? Na preloženie je potrebné o 10 % materiálu navyše.

3. Anička vyrába škatule na zabalenie darčekov v rôznych tvaroch. Všetky majú rovnaký objem $V = 0{,}4$ l. Prvá škatuľa má tvar kvádra s dĺžkami hrán dna 4 cm a 5 cm, druhá má tvar valca s polomerom podstavy 3 cm, tretia má opäť tvar valca s polomerom 6 cm a štvrtá má tvar pravidelného šesťbokého hranola s dĺžkou hrany 4 cm. Škatule nie sú zhora uzavreté. Vypočítajte, koľko materiálu Anička potrebovala na jednotlivé škatule, ak počítame s 20 % odpadom pri výrobe. Ktorý tvar bol z hľadiska spotreby materiálu najúspornejší?

4. Nádoba v tvare valca s polomerom podstavy 10 cm je sčasti naplnená vodou. O koľko stúpne jej hladina, ak ponoríme do vody guľu s polomerom 5 cm?

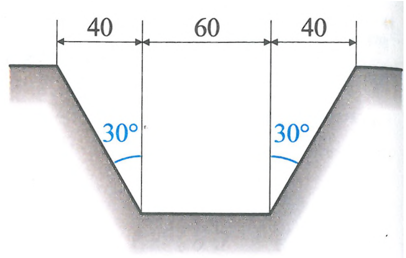
5. Z valca s priemerom d = 45 mm a výškou v = 80 mm treba na sústruhu zhotoviť rotačný kužeľ, ktorého priemer podstavy je 45 mm a výška v' = 60 mm. Koľko percent materiálu pri sústružení odpadne?

6. Klampiar má vyhotoviť uzavretú plechovú nádobu tvaru kvádra *ABCDEFGH*, ak pozná dĺžku 13,6 cm uhlopriečok *AC* a *BD* jeho podstavy *ABCD* a veľkosť uhla, ktorý tieto uhlopriečky zvierajú, je 64°. Hrana *AE* má dĺžku 21,3 cm. Pomôžte vypočítať klampiarovi spotrebu plechu na vyhotovenie nádoby, ak na spoje počíta 10 % materiálu.



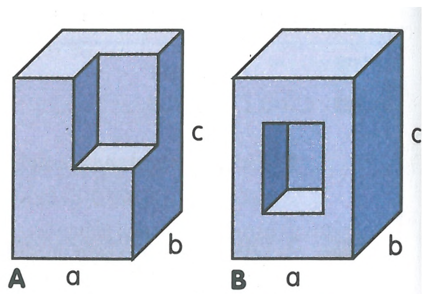
7. Odmerný valec s vnútorným priemerom 5 cm má vyznačenú stupnicu merajúcu objem tekutiny po 10 cm^3.
   a) Ako vysoko od dna je značka pre 1 l ?
   b) Aká je vzdialenosť medzi susednými značkami stupnice?

8. Ako dlho trvá výkop zavlažovacieho kanála dlhého 150 m, ktorého prierez má tvar lichobežníka trom kopáčom, ak každý vykope za hodinu 0,2 m^3 zeminy? (Na obrázku sú rozmery kanála v centimetroch.)

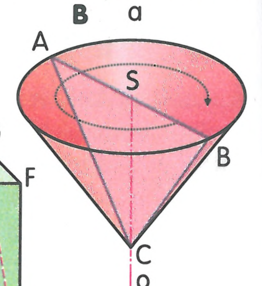


VYSKÚŠAJTE SA!

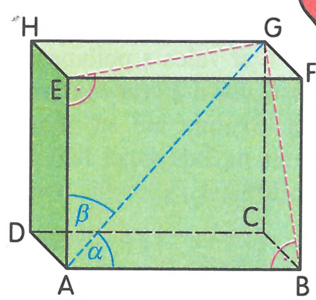
1. Z kvádra $\boldsymbol{K}$ s rozmermi a, b, c bol vyrezaný kváder $\boldsymbol{K'}$ polovičných rozmerov dvoma spôsobmi (telesá $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ na obrázku). Vyjadrite:
a) objem a povrch kvádrov $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{K'}$
b) objem a povrch telesa $\boldsymbol{A}$
c) objem a povrch telesa $\boldsymbol{B}$
d) pomer objemov telies $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$
e) pomer povrchov telies $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$



2. Vypočítajte objem kužeľa, ktorý vznikne rotáciou rovnoramenného trojuholníka ABC okolo jeho osi, ak $a = b = 5$ dm, $c = 6$ dm.



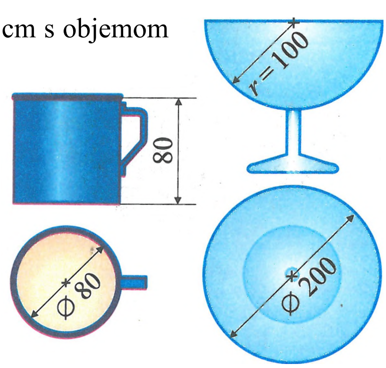
3. Vypočítajte povrch a objem kvádra $ABCDEFGH$, ak je daná dĺžka jeho uhlopriečky $|BH| = 4{,}5$ cm. Veľkosti uhlov tejto uhlopriečky s hranami AB a BF sú: $|\sphericalangle BAG| = 45°$, $|\sphericalangle EAG| = 60°$.



4. Z kusa železa tvaru kvádra s rozmermi 20 cm, 30 cm, 1 m máme vyvalcovať tyč s kruhovým prierezom, s priemerom 30 mm. Akú dĺžku bude mať, ak pri valcovaní nevznikne nijaký odpad?

5. Porovnajte objem 1 000 guliek s polomerom 1 cm s objemom gule s polomerom 1 000 cm.

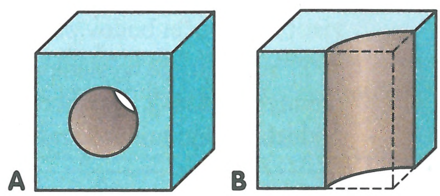
6. Porovnajte objemy dvoch nádob: hrnčeka a polguľovitého pohára. (Rozmery sú v mm.)



7. Potrubie má dĺžku 12 km a jeho rúry majú priemer 30 cm. Koľko hl vody ho naplní?

8. Nádrž na vodu tvaru kvádra je vyrobená z oceľového plechu hrúbky 6 mm. Jej dĺžka je 1,6 m, šírka 0,8 m a výška 1 m. Nádrž je naplnená vodou do výšky 0,8 m. Vypočítajte, koľko percent celkového objemu nádrže je naplnených vodou? Uvedené rozmery sú vonkajšie rozmery nádrže.

9. Porovnajte navzájom objemy a povrchy telies A a B, ktoré vznikli zo zhodných kociek. V prípade A bol z kocky vyrezaný valec s priemerom $d = \frac{a}{2}$ a výškou $v = a$, teleso B vzniklo odrezaním štvrťvalca s polomerom $r = \frac{a}{2}$ kde a je dĺžka hrany kocky.



Veľa premýšľajte. Nielen o matematike. O všetkom.

Š. Schwarz

Štefan Schwarz

(18. 5. 1914 až 6. 12. 1996)

Slovenský matematik. Narodil sa v Novom Meste nad Váhom. Študoval na Karlovej univerzite v Prahe. Od r. 1947 pôsobil ako profesor na Slovenskej vysokej škole technickej v Bratislave. Vytvoril vlastnú vedecko-pedagogickú školu, z ktorej vyšla ďalšia generácia významných slovenských matematikov. Bol riadnym členom Československej akadémie vied, patril k zakladateľom Slovenskej akadémie vied, stal sa jedným z prvých slovenských akademikov. V rokoch 1965-1970 zastával funkciu predsedu SAV a riaditeľa Matematického ústavu SAV. Vo vedeckej práci sa zameriaval na teóriu pologrúp, teóriu matíc, kombinatoriku, teóriu konečných polí a teóriu čísel. Jeho prednášky boli veľmi pútavé, každý problém formuloval ako malé „ dobrodružstvo poznania “.

8 KOMBINATORIKA, ŠTATISTIKA, PRAVDEPODOBNOSŤ

8.1 Štatistický súbor, štatistická jednotka, znak

V predchádzajúcom ročníku ste v učive pravdepodobnosti experimentovali, vykonali ste s hracími kockami a mincami určitý počet hodov. Naučili ste sa výsledky hodov zaznamenať. Pri hode, napríklad jednou kockou, ste výsledky dvadsiatich hodov zapísali v podobe číselného radu takto:

3, 6, 5, 1, 4, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 5, 3, 1, 6, 4, 1, 5, 2, 6

Tento záznam zachytáva počet bodov na hornej stene kocky pri jednotlivých hodoch. Tieto výsledky sú neusporiadané, pretože napríklad zo záznamu nemôžeme priamo zistiť, aký počet bodov padol najčastejšie.

V 8. ročníku ste výsledky experimentu zaznamenávali aj pomocou sčítacích čiarok (šikmých čiarok). Pomocou sčítacích čiarok ste výsledok experimentu, pri desiatich hodoch jednou mincou, zaznamenali takto:

Výsledok hodu	Pri jednotlivých hodoch padol										Spolu
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
Znak (Z)	/		/			/			/		4
Číslo (Č)		/		/	/		/	/		/	6

Sčítacie čiarky sa dajú výhodne používať pri zaznamenaní údajov do tabuľky. Tieto údaje sú už roztriedené, takže môžeme odpovedať na všetky otázky týkajúce sa priebehu experimentu. V nasledujúcej tabuľke zaznamenáme sčítacími čiarkami roztriedené údaje, ktoré sú však len čiastočne usporiadané. Z tabuľky napríklad nevieme zistiť, ktorá zo skúmaných rodín má koľko detí.

[1] ***PRÍKLAD***

Žiaci 9. triedy zisťovali, koľko rodín s 1, 2, 3, 4 a viacerými deťmi býva na hlavnej ulici. Pred zisťovaním údajov si pripravili tabuľku, do ktorej zaznamenávali zistené údaje.

Rodiny	Záznam	Vyjadrenie číslom
1 dieťa	~~////~~ /	6
2 deti	~~////~~ ///	8
3 deti	~~////~~	5
4 deti	///	3
Viac ako 4 deti	/	1

Táto tabuľka nám poskytuje prehľad o tom, koľko rodín s 1, 2, 3, 4 a viacerými deťmi býva na hlavnej ulici.

Pri experimentovaní s hracou kockou, mincou, a pri určovaní počtu rodín s 1, 2, 3, 4 a viacerými deťmi sme uplatnili štatistický postup. Prvým krokom každého štatistického postupu je štatistické zisťovanie, čo predstavuje určenie pozorovaných skutočností (javov) z hľadiska ich hodnoty, druhu, číselnej veľkosti a podobne. Predmetom štatistického zisťovania je **štatistický súbor,** v našom prípade sú to súbory:

- všetky hody hracou kockou
- všetky hody mincou
- všetky rodiny bývajúce na hlavnej ulici

Jednotlivé prvky štatistického súboru nazývame **štatistické jednotky.** V našom prípade sú to štatistické jednotky:

- jednotlivé hody s hracou kockou
- jednotlivé hody mincou
- jednotlivé rodiny

Pri štatistickej jednotke sme zisťovali zvolený znak z hľadiska jeho hodnoty (počet padnutých bodov na kocke), druhu (znak alebo číslo) a číselnej veľkosti (počet detí v rodine).

1

ÚLOHA

Vymenujte aspoň tri štatistické súbory. Určte štatistické jednotky týchto súborov a stanovte štatistické znaky, ktoré budete zisťovať z hľadiska ich hodnoty, číselnej veľkosti alebo druhu, či kvality.

2

ÚLOHA

Zistite a zaznamenajte do vami pripravenej tabuľky, koľko žiakov z vašej triedy nemá súrodencov, má 1, 2, 3, 4 alebo viac súrodencov.

3

ÚLOHA

Pripravte si vhodnú tabuľku a zaznamenajte do nej výsledky 50 hodov jednou hracou kockou.

CVIČENIA

1. Zistite presné dátumy narodenín jednotlivých žiakov z vašej triedy. Usporiadajte podľa veku (od najstaršieho po najmladšieho) mená:
   a) všetkých žiakov, b) všetkých chlapcov, c) všetkých dievčat.
2. Zistite telesnú hmotnosť jednotlivých žiakov z vašej triedy (údaje udajte v kilogramoch, zaokrúhlené na desatiny kilogramu). Mená žiakov s údajom ich telesnej hmotnosti usporiadajte podľa hmotnosti od najľahšieho po najťažšieho, v prípade:
   a) všetkých žiakov, b) všetkých chlapcov, c) všetkých dievčat.
3. Zistite telesnú výšku jednotlivých žiakov z vašej triedy (údaje udajte v metroch, zaokrúhlené na stotiny metra). Usporiadajte podľa telesnej výšky od najnižšieho po najvyššieho, mená:
   a) všetkých žiakov, b) všetkých chlapcov, c) všetkých dievčat.
4. Porovnajte údaje z 2. a z 3. cvičenia a zistite, či sa poradie aspoň niektorých žiakov podľa hmotnosti a podľa výšky zhoduje.

8.2 Početnosť, relatívna početnosť, aritmetický priemer

[1] ***PRÍKLAD***

Žiaci 9. ročníka našej školy písali písomnú prácu z matematiky. Písomné práce pán učiteľ opravil a vyhodnotil podľa jednotnej bodovacej stupnice. Jeden žiak mohol získať najviac 10 bodov. Výsledky písomnej práce pán učiteľ zachytil do tejto prehľadnej tabuľky:

Tabuľka 1

Počet bodov	Trieda a počet žiakov z triedy, ktorí body získali			Spolu
	9. A	9. B	9. C	
10	.	2	1	3
9	1	2	3	6
8	3	4	2	9
7	4	6	5	15
6	5	3	4	12
5	6	5	6	17
4	2	2	2	6
3	1	1	1	3
2	1	2	.	3
1	.	.	1	1
Spolu	23	27	25	75

Posledný riadok tejto tabuľky udáva počet žiakov v jednotlivých triedach, posledný stĺpec počet tých žiakov, ktorí získali toľko bodov, ako je uvedené na začiatku príslušného riadka.

Túto tabuľku nazývame **štatistickou tabuľkou.** Každá štatistická tabuľka sa zvyčajne delí na hlavičku, stĺpce, riadky, legendu a pole tabuľky.

Hlavička je tá časť tabuľky, ktorá označuje obsah stĺpcov (počet žiakov, počet hodov).
Stĺpec tvorí kolmý číselný rad.
Riadok tabuľky je vodorovný číselný rad.
Legenda je tá časť tabuľky, ktorá vysvetľuje obsah riadkov.
Pole tabuľky tvoria bunky s priestorom pre jednotlivé čísla.

POZNÁMKA

V tabuľke v štyroch políčkach uvádzame bodku (.) na vyznačenie toho, že nemáme k dispozícii žiadne údaje.

V tomto príklade tvoria štatistický súbor všetci žiaci 9. ročníka (všetci žiaci z 9. A, 9. B a 9. C triedy). Štatistickou jednotkou je žiak 9. ročníka. Štatistický znak, podľa ktorého sme štatistický súbor skúmali, je počet bodov, ktoré získal žiak za vyriešenie úloh písomnej skúšky z matematiky.

V tejto tabuľke je zahrnutý výsledok zisťovania údajov prostredníctvom písomnej skúšky a jej opravy podľa jednotnej bodovacej stupnice, ďalej spracovanie získaných údajov, určenie počtu jednotiek, ktoré majú danú hodnotu znaku. V poslednom stĺpci tabuľky sú počty žiakov 9. ročníka, ktorí v matematickej písomnej skúške získali 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 bod. Z tejto tabuľky sa dajú zistiť napríklad tieto údaje:

- najvyšší počet bodov - 10 z 9. A triedy nedosiahol nikto,
- z ostatných dvoch tried najvyšší počet bodov dosiahli celkom 3 žiaci,
- jeden bod dosiahol len jeden žiak,
- najviac žiakov z 9. ročníka (17) získalo 5 bodov,
- 5 bodov získalo najmenej žiakov (5) z 9. B triedy,
- 7 bodov získalo najviac žiakov (6) z 9. B triedy atď.

Táto etapa štatistického skúmania sa už nazýva rozborom výsledkov. V nasledujúcich úlohách 1 a 2 sa požaduje takýto rozbor výsledkov na základe našej *Tabuľky 1.*

1 ***ÚLOHA***

Z údajov tabuľky zistite:

a) Koľko žiakov z jednotlivých tried a koľko žiakov z ročníka dosiahlo 7 a viac bodov?
b) Koľko žiakov z jednotlivých tried a koľko žiakov z ročníka dosiahlo najviac 3 a menej bodov?
c) Aký počet bodov dosiahol najväčší počet žiakov z jednotlivých ročníkov?

2 ***ÚLOHA***

Na základe údajov z tabuľky sformulujte ďalšie otázky a odpovedzte na ne.

Počet štatistických jednotiek skúmaného súboru, ktoré majú hodnotu štatistického znaku napríklad 10 bodov, v našej *tabuľke 1* je 3. Nazýva sa početnosť (frekvencia) výskytu tohto znaku. Všeobecne početnosť (frekvenciu) výskytu určitého štatistického znaku budeme definovať takto:

Počet štatistických znakov súboru, ktorí majú tú istú hodnotu znaku ***x*****,**
sa nazýva **početnosť (frekvencia).**
Budeme ju označovať symbolom ***fx*****.**

Napríklad podľa *tabuľky 1* hodnota $f\,9 = 6$, $f\,1 = 1$. Inými slovami, početnosť (frekvencia) výskytu žiakov, ktorí pri písomnej skúške získali 9 bodov je 6, početnosť (frekvencia) výskytu žiakov, ktorí pri písomnej skúške získali 1 bod sa rovná 1.

3 *ÚLOHA*

Z danej *tabuľky 1* určte $f\,7, f\,4$, viac ako $f\,5$ ($f\,6, f\,7, f\,8, f\,9, f\,10$)

4 *ÚLOHA*

Vypočítajte, koľko bodov celkom získali žiaci z jednotlivých tried a z celého ročníka?

5 *ÚLOHA*

Vypočítajte percentuálnu úspešnosť jednotlivých tried a celého ročníka.

[2] ***PRÍKLAD***

Na základe údajov *tabuľky 1* vypočítajte aritmetický priemer počtu bodov:

a) získaných jedným žiakom v jednotlivých triedach 9. A, 9. B, 9. C,

b) získaných jedným žiakom v celom 9. ročníku.

! ***RIEŠENIE***

a) Ak chceme vypočítať aritmetický priemer počtu bodov získaných jedným žiakom v jednotlivých triedach, musíme najprv vypočítať celkový počet bodov získaný žiakmi jednotlivých tried. Tento výpočet urobíme tak, že jednotlivý počet bodov vynásobíme počtom žiakov danej triedy, ktorí daný počet bodov získali. Čiastkové súčty sčítame a vydelíme súčtom počtu žiakov triedy, ktorí jednotlivé počty bodov dosiahli (tento súčet sa rovná počtu žiakov triedy, ktorí písali písomnú skúšku).

Teda platí:

Priemerný počet bodov získaný jedným žiakom z 9. A triedy =

$$= \frac{0.10+1.9+3.8+4.7+5.6+6.5+2.4+1.3+1.2+0.1}{0+1+3+4+5+6+2+1+1+0} = \frac{134}{23} = 5{,}83 \text{ bodov}$$

Priemerný počet bodov získaný jedným žiakom z 9. B triedy =

$$= \frac{2.10+2.9+4.8+6.7+3.6+5.5+2.4+1.3+2.2+0.1}{2+2+4+6+3+5+2+1+2+0} = \frac{170}{27} = 6{,}3 \text{ bodov}$$

Priemerný počet bodov získaný jedným žiakom z 9. C triedy =

$$= \frac{1.10+3.9+2.8+5.7+4.6+6.5+2.4+1.3+0.2+1.1}{1+3+2+5+4+6+2+1+0+1} = \frac{154}{25} = 6{,}16 \text{ bodov}$$

Priemerný počet bodov získaný jedným žiakom z 9. A triedy je 5, 83 bodov,
9. B triedy je 6, 3 bodov,
9. C triedy je 6, 16 bodov.

b) Ak už poznáme počet bodov dosiahnutý jednotlivými triedami 9. ročníka, ako aj počet žiakov ročníka, tak aritmetický priemer počtu bodov získaný žiakmi celého ročníka vypočítame tak, že celkový počet bodov získaný všetkými tromi triedami vydelíme počtom žiakov celého ročníka:

Priemerný počet bodov
získaný jedným žiakom z 9. ročníka $= \dfrac{134+170+154}{23+27+25} = \dfrac{458}{75} = 6{,}16$ bodov

Priemerný počet bodov, ktorý dosiahol žiak 9. ročníka je 6,16 bodov.

6 *ÚLOHA*

Zostavte tabuľku známok žiakov vašej triedy z matematiky, ktoré dosiahli na konci 8. ročníka a na polroku v 9. ročníku. Vypočítajte aritmetický priemer koncoročných známok z matematiky v 8. ročníku a aritmetický priemer polročných známok z matematiky v 9. ročníku. Dosiahnuté priemery porovnajte a komentujte.

7 *ÚLOHA*

Na základe údajov z tabuľky úlohy 6 zistite:

a) Koľko žiakov si zlepšilo známku z matematiky v 1. polroku 9. ročníka v porovnaní so známkou na konci 8. ročníka a koľko žiakov si známku zhoršilo?
b) Koľko žiakov dosiahlo na konci 8. ročníka lepšiu známku z matematiky ako je priemer triedy?
c) Koľko žiakov dosiahlo v 1. polroku 9. ročníka lepšiu známku z matematiky, ako je priemer triedy?
d) Či niekto z vašej triedy dosiahol v 9. ročníku na polroku o dva stupne lepšiu alebo horšiu známku ako na konci 8. ročníka?

[3] *PRÍKLAD*

Miško sa rozhodol, že zistí, koľkými osobami sú obsadené osobné autá, ktoré prejdú pred ich domom. Zaznamenal celkove obsadenie 100 osobných áut.

! *RIEŠENIE*

Výsledky svojho zistenia zaznačil Miško do tejto tabuľky:

Tabuľka 2

Obsadenie áut	Početnosť fx	Relatívna početnosť fx vyjadrená		
		zlomkom	desatinným číslom	percentami
1 osoba	29	$\frac{29}{100}$	0,29	29 %
2 osoby	23	$\frac{23}{100}$	0,23	23 %
3 osoby	18	$\frac{18}{100}$	0,18	18 %
4 osoby	16	$\frac{16}{100}$	0,16	19 %
5 osôb	14	$\frac{14}{100}$	0,14	14 %
	100	$\frac{100}{100}$	1,00	100 %

S podobným vyjadrením početnosti a relatívnej početnosti rôznych udalostí sme sa stretli aj v 8. ročníku pri preberaní učiva z pravdepodobnosti. Početnosť v štatistike sa bude vzťahovať na počet tých jednotiek štatistického súboru, ktoré majú tú istú hodnotu štatistického znaku.

Z *tabuľky 2* vidíme, že početnosť znaku v *osobnom aute cestovali 3 osoby* je 18. Budeme ho označovať $f\,3 = 18$. Ako sme videli aj v 8. ročníku pri učive pravdepodobnosti, početnosť 18 bez poznania celkového počtu štatistických jednotiek nie je charakteristický údaj. Nie je jedno, či táto početnosť štatistického znaku nastane v prípade, keď štatistický súbor obsahuje 20, 40, 100 alebo 500 štatistických jednotiek. V tom prípade, keď počet štatistických jednotiek súboru je 20 a z nich početnosť jednotiek súboru, ktoré majú tú istú hodnotu znaku je $f3 = 18$, možno povedať, že takmer vo všetkých autách boli 3 osoby. V prípade, ak počet štatistických jednotiek súboru je 500, pri početnosti znaku $f = 18$ zase možno konštatovať, že takmer nebolo takých áut, v ktorých cestovali 3 osoby. Aby naša informácia o výskyte početnosti jednotlivých znakov bola úplná, početnosť jednotiek, ktoré majú tú istú hodnotu je potrebné dať do súvislosti s celkovým počtom štatistických jednotiek súboru. V tabuľke toto nové číslo, ktoré vyjadruje aká časť súboru má danú hodnotu znaku, sme nazvali pomerná (relatívna) početnosť $f'x$.

Pomerná (relatívna) početnosť je číslo, ktoré vyjadruje, aká časť súboru má hodnotu znaku x.
Vypočíta sa podielom početnosti fx a celkového počtu štatistických jednotiek N.

$$f'x = \frac{fx}{N}$$

Na základe údajov z *tabuľky 2* platí:

$f4 = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\ \%$, čo znamená, že zo 100 osobných áut v 16 cestovali 4 osoby.

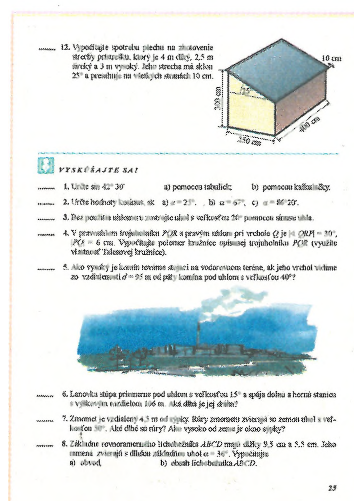
Z *tabuľky 2* vyplýva, že súčet relatívnych (pomerných) početností sledovaného znaku sa rovná 1.

8 ***ÚLOHA***

Overte si vypočítané pomerné početnosti v *tabuľke 2* a vypočítajte ich súčet.

9 ***ÚLOHA***

Určte početnosť a relatívnu početnosť výskytu jednotlivých písmen abecedy zo strany 25 tejto učebnice. Úlohu riešte tak, že najprv spoločne spočítate všetky písmená abecedy na tejto strane, a potom individuálne, nech každý žiak zistí početnosť jedného písmena a vypočíta relatívnu početnosť výskytu tohto písmena. Na záver riešenia zostavte relatívnu početnosť výskytu jednotlivých písmen od najväčšej až po najmenšiu.



CVIČENIA

1. Urobte 50 hodov dvomi mincami. Určte početnosti a relatívne (pomerné) početnosti možných výsledkov (ZZ, ZČ, ČZ, ČČ), ktoré padli na minciach. Výsledky si navzájom porovnajte.

2. Zistite vo vašej triede, koľko:
   a) chlapcov nosí okuliare,
   b) dievčat nosí okuliare,
   c) žiakov nosí okuliare.
   d) Vypočítajte relatívnu početnosť zistených údajov.

3. Zistite, koľko minút trvá cesta do školy jednotlivým vašim spolužiakovi.
   a) Vypočítajte aritmetický priemer dĺžky trvania cesty do školy pre žiaka vašej triedy.
   b) Určte početnosť a relatívnu početnosť tých žiakov, ktorým cesta trvá viac ako 20 minút.
   c) Určte početnosť a relatívnu početnosť tých žiakov, ktorým cesta do školy trvá menej ako 5 minút.
   d) Určte početnosť tých žiakov, ktorým cesta do školy trvá dlhšie ako je priemer za triedu.

4. Urobte 30 hodov hracou kockou. Určte početnosti a relatívne (pomerné) početnosti počtu bodiek, ktoré padli na kocke. Porovnajte svoje výsledky so spolužiakmi.

5. Nech každý žiak z vašej triedy napíše na papier 5 krstných mien (dievčenské alebo chlapčenské). Zistite, početnosť výskytu ktorého mena je najväčšia a ktorého najmenšia. Skúste nájsť vysvetlenie, prečo je výsledok taký, aký je.

6. Na štvorčekovanom papieri vyznačte štvorec 6×6 a náhodne v ňom vyšrafujte 10 štvorčekov. Pri každom štvorčeku spočítajte, koľko žiakov z triedy ho vyšrafovalo. Skúste spoločne nájsť vysvetlenie, prečo je výsledok taký, aký je.

8.3 Grafické znázornenie údajov

V 7. ročníku ste sa pri preberaní učiva o percentách oboznámili s grafickým znázorňovaním číselných údajov, pomocou diagramov. V ďalšom najprv zopakujeme grafické znázornenie údajov a potom rozšírime o znázornenie stĺpcovým a kruhovým diagramom. Diagramy však nezavádzame preto, aby nahradili tabuľky, ale aby ich doplnili v názornej podobe. Tým dosiahneme, že podstatné súvislosti budú rýchlejšie a ľahšie pochopiteľné. Postup štatistického spracovania údajov od ich získavania, spracovania do tabuľky, až po ich grafické znázornenie ukážeme na nasledujúcom príklade.

PRÍKLAD

[1]

V písomnej skúške z matematiky dosiahlo 28 žiakov tieto známky:

3, 2, 1, 1, 2, 4, 2, 3, 3, 4, 5, 3, 1, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 5, 3, 4, 1, 3, 2, 5, 4.

Vytvorte tabuľku známok:

a) do ktorej zaznamenáte výsledky písomnej skúšky pomocou sčítacích čiarok,
b) ktorá bude obsahovať číselné vyjadrenie početnosti výskytu jednotlivých známok,
c) ktorá bude obsahovať vypočítanú relatívnu početnosť výskytu jednotlivých známok v tvare zlomku, desatinného čísla a percentami,
d) pomocou stĺpcového diagramu znázornite jednotlivé početnosti,
e) vypočítajte aritmetický priemer dosiahnutých známok pri písomnej skúške.

RIEŠENIE

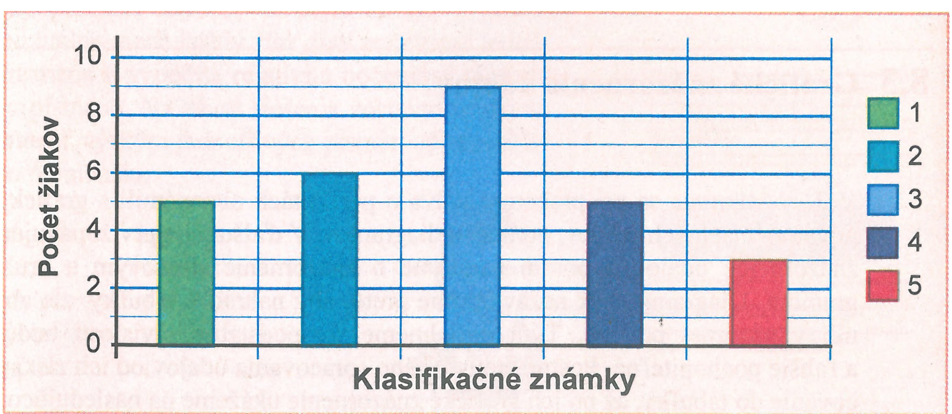
Výsledky písomnej skúšky spracujeme do prehľadnej tabuľky

a) pomocou sčítacích čiarok,
b) prirodzeným číslom,
c) zlomkom, desatinným číslom a percentami:

Tabuľka 3

Známka	Záznam	Početnosť f	Relatívna početnosť f' vyjadrená		
			zlomkom	desatinným číslom	percentami
1	~~////~~	5	$\frac{5}{28}$	0,18	18 %
2	~~////~~ /	6	$\frac{6}{28}$	0,21	21 %
3	~~////~~ ////	9	$\frac{9}{28}$	0,32	32 %
4	~~////~~	5	$\frac{5}{28}$	0,18	18 %
5	///	3	$\frac{3}{28}$	0,11	11 %

d) početnosti výskytu jednotlivých známok znázornime pomocou stĺpcového diagramu takto:



e) ak súčet známok dosiahnutých všetkými žiakmi v triede označíme s, počet žiakov n, potom aritmetický priemer dosiahnutých známok vypočítame takto:

$$x = \frac{s}{n} = \frac{5 \,.\, 1 + 6 \,.\, 2 + 9 \,.\, 3 + 5 \,.\, 4 + 3 \,.\, 5}{28} = 2{,}8$$

Aritmetický priemer dosiahnutých známok žiakom triedy je 2,8.

1 ***ÚLOHA***

V triede je 26 žiakov. Pani učiteľka v rámci výchovy k zdravej výžive zisťovala, koľko detí má pravidelne na desiatu ovocie. V deň zisťovania dostala takéto odpovede:

Tabuľka 4

Ovocie	Záznam	Početnosť f	Relatívna početnosť $f'x$ vyjadrená		
			zlomkom	desatinným číslom	percentami
Jablko	$\cancel{////}$ ///	8			
Hruška	////	4			
Hrozno	//	2			
Banán	$\cancel{////}$	5			
Pomaranč	////	4			
Žiadne	///	3			

Doplňte *tabuľku 4* a znázornite stĺpcovým diagramom.

2 ***ÚLOHA***

V školskom bufete predali v pondelok 23 jablkových džúsov, utorok 20, stredu 31, štvrtok 18 a piatok 27 džúsov. Vypočítajte denný priemer predaja džúsov za tieto dni. Znázornite stĺpcovým diagramom predaj za jednotlivé dni. Zistite, v ktorých dňoch bol predaj džúsov nadpriemerný.

[2] ***PRÍKLAD***

Žiaci 9. ročníka budú po ukončení základnej školy pokračovať vo svojich štúdiách na stredných školách v takomto počte: na gymnáziu 14 žiakov, na stredných odborných školách 17 žiakov, na strednej zdravotníckej škole 3 žiaci, na obchodnej akadémii 6 žiakov a na stredných odborných učilištiach 12 žiakov. Znázornite umiestnenie žiakov na stredných školách kruhovým diagramom.

RIEŠENIE

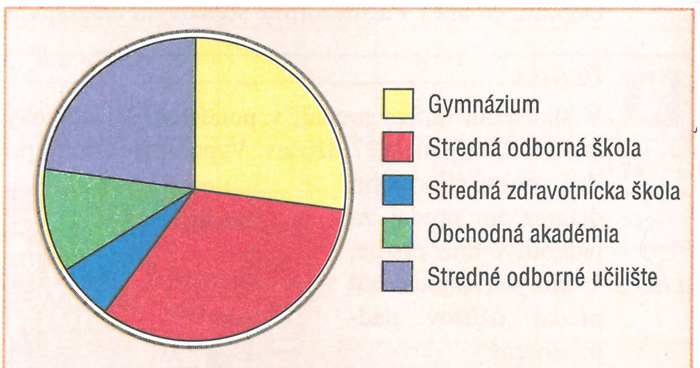
Riešenie tejto úlohy možno začať tak, že údaje spracujeme do *tabuľky 5* a vypočítame, akú zlomkovú časť a akú percentovú časť celku tvoria žiaci pokračujúci na jednotlivých typoch stredných škôl:

Tabuľka 5

Gymnázium	14	$\frac{14}{52} = 0{,}27$	27
Stredná odborná škola	17	$\frac{17}{52} = 0{,}33$	33
Stredná zdravotnícka škola	3	$\frac{3}{52} = 0{,}06$	6
Obchodná akadémia	6	$\frac{6}{52} = 0{,}11$	11
Stredné odborné učilište	12	$\frac{12}{52} = 0{,}23$	23

Ďalej vychádzame z toho, že stredový uhol kruhu je 360°, čomu prislúcha 100 % žiakov. Preto 1 % žiakov predstavuje v znázornení na kruhovom diagrame kruhový výsek so stredovým uhlom 360 : 100 = 3,6° (t.j. 3° a 36')

Potom už výpočtom zistíme, že gymnazistom prislúcha kruhový výsek so stredovým uhlom 27 . 3,6 = 97,2°, žiakom stredných odborných škôl 33 . 3,6 = 118,8°, žiakom zdravotníckych škôl 6 . 3,6 = 21,6°, žiakom obchodných akadémií 11 . 3,6 = 39,6° a žiakom stredných odborných učilíšť 23 . 3,6 = 82,8°. Po vykonaní týchto výpočtov môžeme narysovať kruhový diagram:

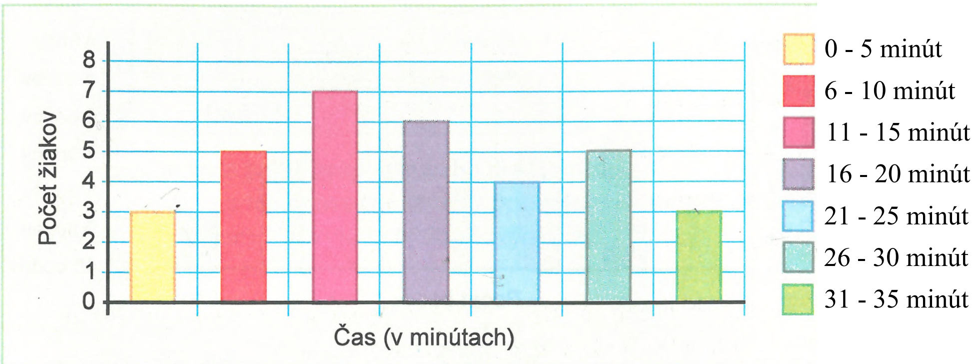


3 ***ÚLOHA***

Žiaci dvoch tried 9. ročníka našej školy sa chceli prezentovať na školskej nástenke účasťou na rôznych olympiádach a iných súťažiach. Marián, ktorý dostal za úlohu zabezpečiť prezentáciu po grafickej stránke sa rozhodol, že pri prezentácii využije aj kruhový diagram. Zistil, že v dvoch 9. triedach je celkom 48 žiakov. Z nich 16 žiakov sa zúčastnilo na súťažiach zo slovenského jazyka a literatúry, 9 žiakov na matematickej olympiáde, 5 žiakov na chemickej olympiáde, 7 žiakov na fyzikálnej olympiáde a 4 žiaci na zemepisnej olympiáde. Nikto zo žiakov sa nezúčastnil dvoch súťaží. Ostatní žiaci sa nezapojili do žiadnej súťaže. Znázornite tieto údaje namiesto Mariána na kruhovom diagrame.

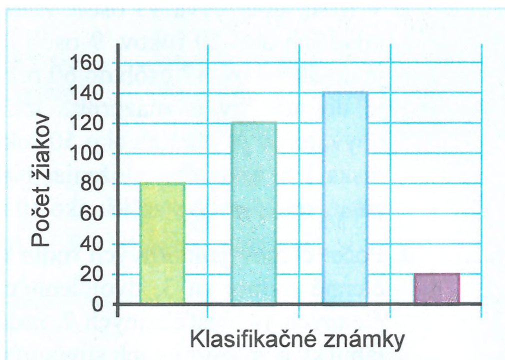
4 ***ÚLOHA***

Graf znázorňuje čas, ktorý žiaci potrebujú na cestu z domu do školy. Z grafu zistite, koľkým žiakom trvá cesta do školy viac ako 15 minút? Koľkým žiakom trvá cesta do školy menej ako 11 minút?

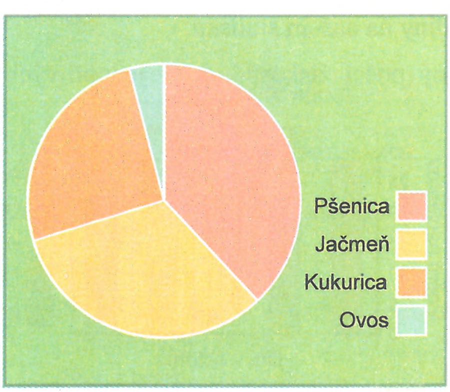


5 ***ÚLOHA***

Na grafe je znázornený počet žiakov našej školy, ktorí na polročnom vysvedčení mali z matematiky známku 1, 2, 3 alebo 4. Na grafe nie je vyznačené, ktorý stĺpec označuje počet žiakov s jednotlivými známkami. Vieme len toľko, že počet trojkárov bol najväčší, počet štvorkárov najmenší. Viac žiakov malo dvojku ako jednotku. Koľko bolo dvojkárov?



6 ***ÚLOHA***



Graf znázorňuje pestovanie obilia v istej oblasti Slovenska. Na základe informácií z grafu zistite, ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé:

A pestuje sa viac ovsa ako pšenice

B jačmeň tvorí viac ako polovicu úrody

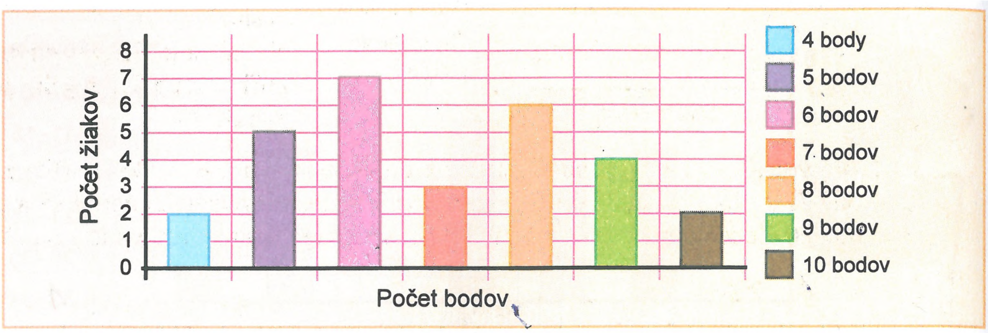
C ovos tvorí viac ako štvrtinu úrody

D úroda pšenice a ovsa spolu je väčšia ako úroda kukurice

E úroda j ačmeňa a kukurice spolu je menšia ako úroda pšenice

ÚLOHA

Na stĺpcovom diagrame sú znázornené výsledky žiakov v desaťbodovom matematickom teste. Na základe diagramu zistite, koľko žiakov dosiahlo viac ako 6 bodov? Koľko žiakov dosiahlo menej ako 3 body? Zostavte ďalšie otázky a odpovedzte na ne.

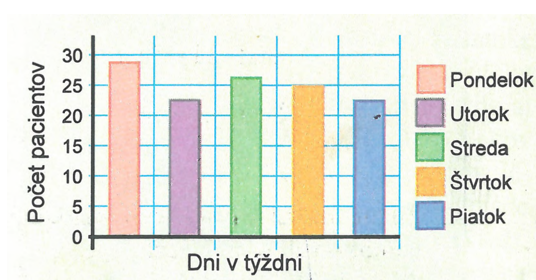


CVIČENIA

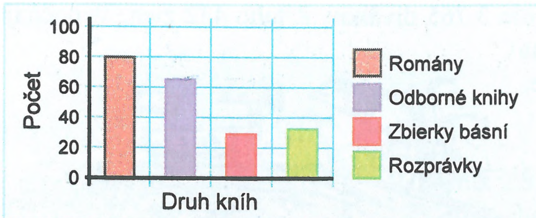
1. V našej ulici býva 93 osôb. Z nich 4 osoby sú mladšie ako 10 rokov, 15 osôb je mladších ako 20 rokov, 9 osôb je do 30 rokov, 12 osôb je do 40 rokov, 21 osôb je do 50 rokov, 17 osôb do 60 rokov a 15 osôb do 70 rokov. Usporiadajte tieto údaje do tabuľky a znázornite ich pomocou stĺpcového diagramu. Zistite, koľko obyvateľov je starších ako 50 rokov. Charakterizujte obyvateľov našej ulice z hľadiska ich vekového zloženia. Napríklad údaj „15 osôb mladších ako 20 rokov" znamená 15 osôb starších ako 10 a mladších ako 20 rokov.

2. Počet členov jednotlivých rodín na našom sídlisku sa pohybuje od 1 po 7. Jednočlenné rodiny sú 3, dvojčlenných je 7, trojčlenných 18, štvorčlenných 26, päťčlenných 14, šesťčlenných 7, sedemčlenná je 1 rodina. Usporiadajte tieto údaje do tabuľky a znázornite ich stĺpcovým diagramom. Z diagramu zistite:
   a) koľkočlenných rodín je najviac,
   b) koľko je viac ako trojčlenných rodín,
   c) koľko je menej ako päťčlenných rodín,
   d) aký je priemerný počet členov rodiny na našom sídlisku.

3. Na stĺpcovom diagrame je zachytený počet žiakov, ktorí v jednotlivých dňoch týždňa navštívili zubnú lekárku.
   Z diagramu zistite:
   a) ktorý deň v týždni bola najväčšia návštevnosť,
   b) v prvých alebo v posledných dvoch dňoch v týždni bola väčšia návštevnosť,
   c) ktorý deň v týždni bola najmenšia návštevnosť.

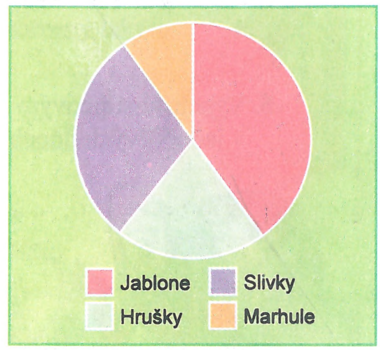


4. Pán Suchý má vo svojej domácej knižnici romány, zbierky básní, odbornú literatúru a rozprávkové knižky. Románov je viac ako odborných kníh, odborných kníh je toľko ako zbierok básní a rozprávkových kníh spolu. Rozprávkových kníh je viac ako zbierok básní.



Na základe údajov grafu zistite, koľko rozprávkových kníh má pán Suchý.

5. V ovocnom sade poľnohospodárskeho družstva sú jablone, slivky, hrušky a marhule. Vzhľadom na to, že ovocné stromy priebežne vysychajú, neudáva sa ich presný počet, ale ich pomer je vyjadrený kruhovým diagramom, ktorý vidíme na obrázku.



Ktoré z nasledujúcich tvrdení podľa údajov grafu je pravdivé:

A Hrušiek je viac ako sliviek.

B Hrušiek a sliviek je viac ako jabloní.

C Sliviek je viac ako jabloní.

D Najviac je marhúľ.

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Pojmy štatistický súbor, štatistický znak a štatistická jednotka priraďte k vymenovaným konkrétnym štatistickým súborom, znakom a jednotkám.

Štatistický súbor

Štatistická jednotka

Štatistický znak

Viac ako 50-ročný.
Všetky osobné autá v meste X.
Základná škola v meste Z.
Všetky okná na našej; škole.
Pán Suchý.
Býva od školy aspoň 1 km.
Všetci obyvatelia nášho domu.
Získal aspoň 5 bodov.

2. Zistite a zaznačte sčítacími čiarkami a číslami do vami pripravenej tabuľky výskyt jednotlivých samohlások (a, e, i, o, u) v texte tejto úlohy (nie je potrebné rozlíšiť dlhé a krátke samohlásky).

3. Sledujte a spočítajte, koľko minút strávite pozeraním televízora za 7 dní, a potom vypočítajte koľko minút je to priemerne denne.

4. Na futbalovom zápase bolo 3 765 divákov. Z toho 432 žien. Vypočítajte relatívnu početnosť výskytu žien na
tomto futbalovom zápase.

5. Vyjadrite stĺpcovým diagramom, koľko minút (zaokrúhlene na desiatky minút) ste v jednotlivých dňoch minulého týždňa venovali štúdiu, športu atď.

Václav Medek

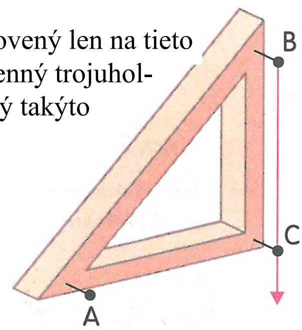
(23.10. 1923 až 31. 3. 1992)

Slovenský matematik - geometer. Narodil sa v Žiline. Pôsobil ako vysokoškolský profesor na Slovenskej vysokej škole technickej v Bratislave (dnes STU). Venoval sa najmä deskriptívnej geometrii. Rozhľad v geometrickej problematike ho priviedol aj na riešenie otázok, ktoré nadväzovali na Lenzove, Artinove a Pickertove práce, čím sa zaslúžil o rozvoj matematickej vedy na Slovensku. Mal výrazný podiel na kodifikácii slovenskej matematickej terminológie. Pôsobil v rôznych funkciách, napr. ako dlhoročný predseda Jednoty slovenských matematikov a fyzikov. Aktívne sa podieľal na tvorbe vysokoškolských a stredoškolských učebníc z deskriptívnej geometrie.

9 TOPOGRAFICKÉ PRÁCE V TERÉNE

R V 1. časti učebnice Matematika pre 9. ročník ZŠ sme pomocou podobnosti trojuholníkov počítali výšku predmetov (napr. telefónneho stĺpa, stromu...). Teraz sa naučíme merať výšky v teréne. Vystačíme pritom s jednoduchými pomôckami, napr. s pravouhlým rovnoramenným trojuholníkom.

Tento pravouhlý rovnoramenný trojuholník môže byť vyhotovený len na tieto účely, môžeme na to použiť aj drevený pravouhlý rovnoramenný trojuholník s dĺžkou odvesien 15 až 20 cm. Na obrázku je znázornený takýto trojuholník.



1

ÚLOHA

Treba odmerať výšku stožiara.

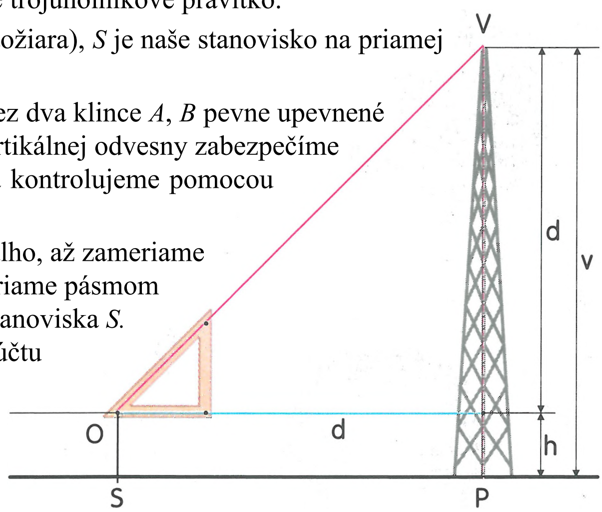
R *Pomôcky:* meracie pásmo, drevené trojuholníkové pravítko.

Postup: Nech P je päta objektu (stožiara), S je naše stanovisko na priamej vodorovnej spojnici.

Na vrchol V objektu zameriame cez dva klince A, B pevne upevnené na trojuholníku. Zvislú polohu vertikálnej odvesny zabezpečíme zavesením olovnice na klinci B a kontrolujeme pomocou klinca C.

Trojuholník premiestňujeme tak dlho, až zameriame na vrchol V objektu. Potom odmeriame pásmom vzdialenosť d päty P objektu od stanoviska S. Výška objektu $v = |PV|$ sa rovná súčtu odmeranej vzdialenosti $d = |SP|$ a výšky h pozorovateľovho oka nad terénom

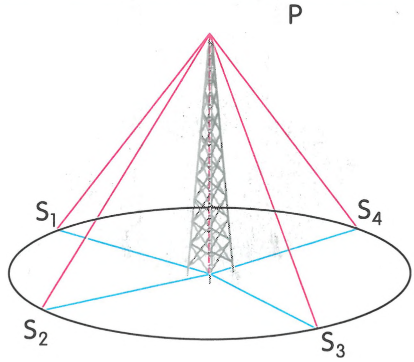
$$v = d + h$$



POZNÁMKA

1. Pred meraním môžeme uskutočniť odhad, aby sme precvičovali priestorovú predstavivosť

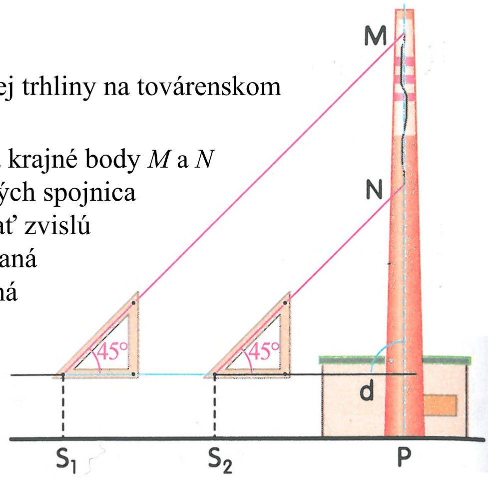
2. S výhodou môžeme súčasne merať z rôznych stanovísk, ktoré sú na kružnici so stredom v päte P meraného objektu. Na to je potrebné vyhľadať V objekt prístupný zo všetkých strán.



ÚLOHA 2 R

Meranie vertikálnej dĺžky, napr. dĺžky zvislej trhliny na továrenskom komíne.

Postup: Zameriame trojuholníkmi na obidva krajné body M a N postupne zo stanovísk S_1 a S_2, ktorých spojnica musí byť vodorovná a musí pretínať zvislú priamku určenú bodmi M a N. Meraná dĺžka $|MN|$ sa v tomto prípade rovná vzdialenosti $|S_1S_2|$.



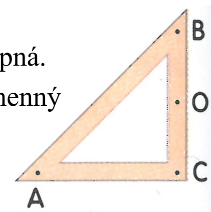
POZNÁMKA

Toto meranie nezávisí od výšky pozorovateľovho oka nad terénom. Stanoviská S_1 a S_2 nemusia byť na úrovni päty objektu a ani nie je potrebné, aby päta objektu bola prístupná.

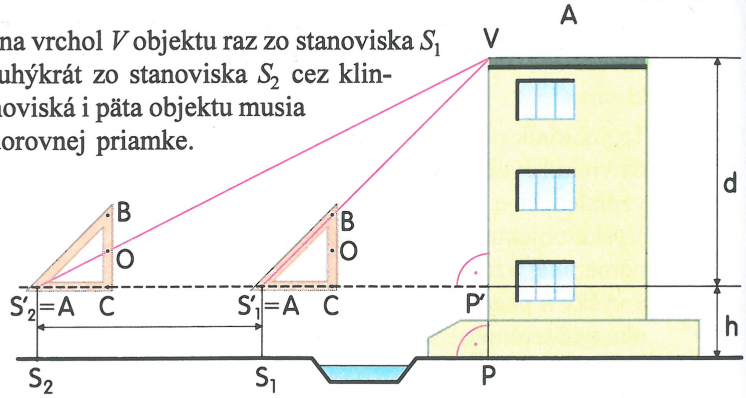
ÚLOHA 3 R

Meranie výšky objektu, ktorého päta je pre nejakú prekážku neprístupná.

Postup: Na to je potrebné zhotovenú pomôcku (pravouhlý rovnoramenný trojuholník) doplniť ďalším klincom, ktorý je v strede O odvesny BC.



Zameriavame potom na vrchol V objektu raz zo stanoviska S_1 cez klince A a B, druhýkrát zo stanoviska S_2 cez klince A a O. Obidve stanoviská i päta objektu musia ležať na tej istej vodorovnej priamke.



Pretože pre vzdialenosti klincov platí

$$|AC| = |BC| \qquad |AC| = 2\,.\,|OC|$$

potom
$$|S_1P| - |S'_1P'| = |P'V|$$
$$|S_2P| - |S'_2P'| = 2\,.\,|P'V|$$

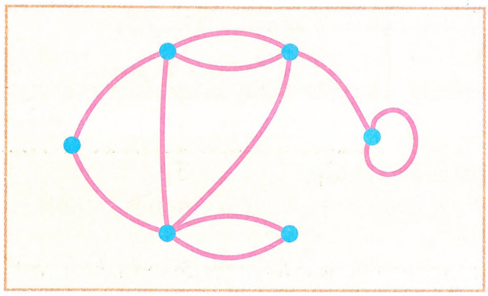
a odtiaľ $\quad |S_1S_2| = |S_2P| - |S_1P| = 2\,.\,|P'V| - |P'V| = |P'V|$

Hľadanú výšku $|PV|$ objektu dostaneme, ak pričítame k vzdialenosti stanovísk S_1S_2 výšku h pozorovateľovho oka nad terénom

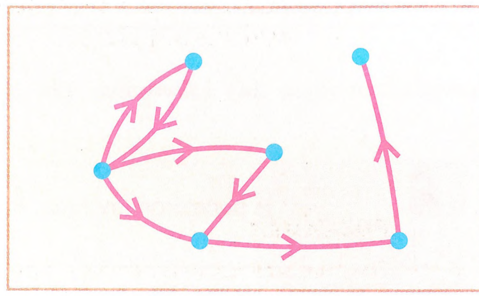
$$|PV| = |S_1S_2| + h$$

10 RIEŠENIE ELEMENTÁRNYCH ÚLOH Z TEÓRIE GRAFOV

ZOPAKUJME SI



Neorientovaný graf

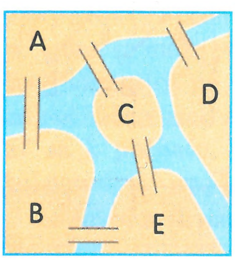


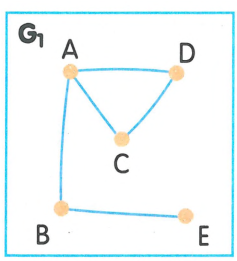
Orientovaný graf

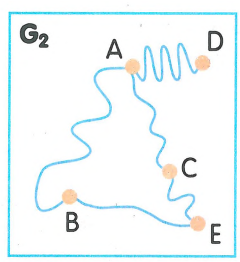
Graf sa skladá: z bodov v rovine - **vrcholy grafu**
z čiar, ktoré tieto body spájajú - **hrany grafu**

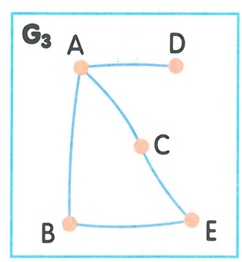
1 ***ÚLOHA***

Na obrázku je časť mapy parku. *A*, *B*, *D*, *E* sú brehy riečky, *C* je ostrov. Ktorý z grafov G_1, G_2, G_3 je grafom tohto parku? Povedzte, koľko má vrcholov a koľko má hrán.



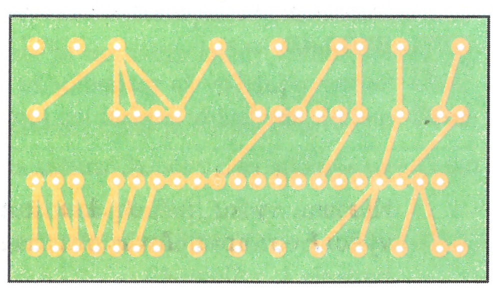






2 ***ÚLOHA***

Na obrázku je platňa s plošnými spojmi. Je to vlastne graf.



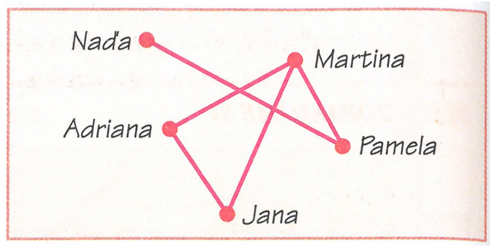
a) Koľko súvislých častí, z ktorých každá obsahuje aspoň jednu hranu viete v tomto grafe nájsť? Prekreslite si ich do zošita.

b) Určte počet vrcholov a počet hrán každej takej súvislej časti.

ÚLOHA

Na obrázku je *graf priateľstva* medzi dievčatami. Vrcholy - mená dievčat - sú spojené, ak sa spolu priatelia. Vyberte odpoveď áno alebo nie pre nasledujúce tvrdenia:

a) Každé dievča má aspoň jednu priateľku.
b) Najmenej priateliek má Adriana.
c) Martina má najviac priateliek.
d) Práve dve dievčatá majú rovnaký počet priateliek.



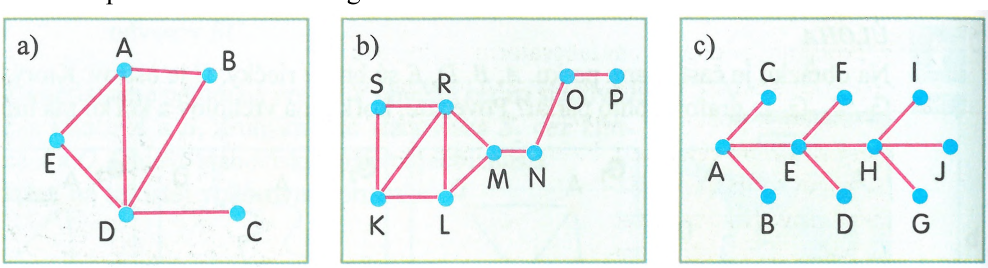
Stupeň vrcholu
je počet koncov hrán, ktoré začínajú alebo končia v tomto vrchole.

PRÍKLAD

Stupeň každého vrcholu v predchádzajúcom *grafe priateľstva* je počet priateliek každého dievčaťa. Platí: Martina 3, Pamela, Jana, Adriana 2, Naď'a 1.

ÚLOHA

Určte stupeň každého vrcholu grafov na obrázku.



Presvedčte sa, že platia nasledujúce tvrdenia:

1. **Súčet stupňov** vrcholov v každom grafe je **párny** a rovná sa **dvojnásobnému počtu hrán.**
2. V každom grafe je **počet vrcholov nepárneho stupňa párny.**

PRÍKLAD

Sedem priateľov sa rozhodlo, že každý napíše pohľadnicu z prázdnin trom z nich. Je možné, aby každý napísal len tomu, od koho dostane pohľadnicu?

RIEŠENIE

Nie je to možné, pretože neexistuje graf, ktorý by mal sedem vrcholov a každý vrchol by bol tretieho stupňa. Presvedčte sa o tom kreslením i výpočtom. (Na výpočet použite tvrdenie 1. z úlohy 4.)

ZOPAKUJME SI

Ak sa graf dá **nakresliť jedným ťahom** tak, že tento ťah obsahuje všetky hrany grafu, hovoríme, že graf má **eulerovský ťah.**

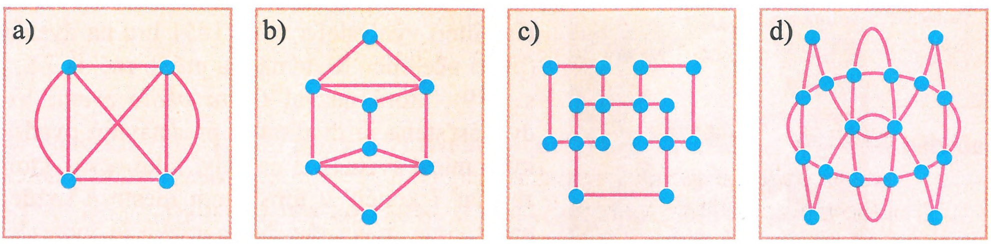
Graf má **uzavretý eulerovský ťah,** ak všetky jeho vrcholy sú **párneho stupňa.**

Graf má **otvorený eulerovský ťah,** ak má práve dva vrcholy **nepárneho stupňa.**

5

ÚLOHA

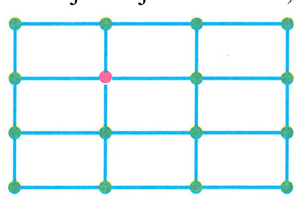
Zistite výpočtom a presvedčte sa kreslením, aký eulerovský ťah majú nasledujúce grafy.



Hamiltonovské grafy

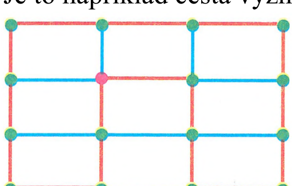
PROBLÉM

V školskom počítačovom laboratóriu je do siete zapojených šestnásť počítačov tak, ako je to na obrázku. Jeden z počítačov napadol počítačovým vírus, ktorý sa šíri po celej sieti. Existuje v tejto sieti cesta, po ktorej sa môže počítačový vírus šíriť na ostatné počítače v sieti a vrátiť sa k počítaču, ktorý bol napadnutý prvý?



RIEŠENIE

V danom grafe máme nájsť takú cestu, ktorá prechádza každým vrcholom práve raz. Je to napríklad cesta vyznačená červenou farbou. Všimnite si, že:



→ na červenej ceste sa nachádza každý vrchol pôvodného grafu, nie však každá hrana,

→ každý vrchol červenej cesty je stupňa dva,

→ červená cesta sa začína i končí v tom istom ľubovoľnom vrchole.

Takýto graf, vytvorený z pôvodného grafu sa nazýva **hamiltonovská kružnica** podľa írskeho matematika W. R. Hamiltona.

Cesta v grafe je taká postupnosť vrcholov a hrán grafu, ktorá začína aj končí vrcholom, hrany a vrcholy sa striedajú a každá hrana v tejto postupnosti je susedná s vrcholom, cez ktorý predchádza aj s vrcholom, ktorý za ňou nasleduje.

Hamiltonovská cesta je taká cesta, ktorá obsahuje všetky **vrcholy daného** grafu.

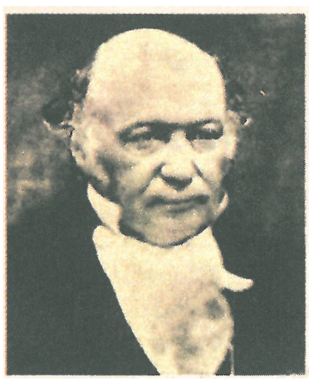
Uzavretá cesta (začína a končí v tom istom vrchole) sa nazýva **kružnica.**

Hamiltonovská kružnica je taká kružnica, ktorá obsahuje **všetky vrcholy** daného grafu.

6 R

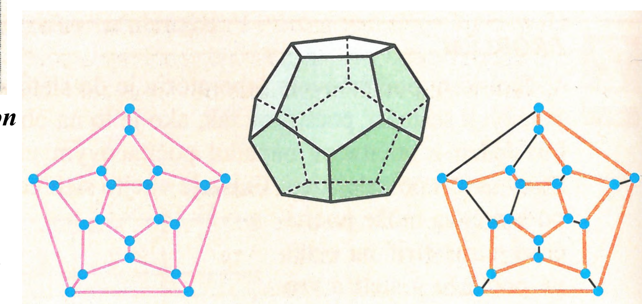
ÚLOHA

Nájdite inú hamiltonovskú kružnicu v grafe z predchádzajúceho problému.



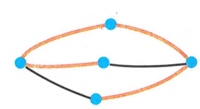
Sir Wiliam Rowan Hamilton
(4. 8. 1805 - 2. 9. 1865)
bol už ako dieťa geniálnym počtárom. Venoval sa aj fyzike. V matematike vytvoril teóriu kvarteriónov a stál pri zrode komlexných čísel.

Hamilton vymyslel v roku 1851 hru na dvanásťstene (pozri učebnicu Matematika pre 8. ročník ZŠ, 2. časť s. 119), ktorú nazval *Cesta okolo sveta.* Vrcholov dvanásťstena je dvadsať a predstavujú dvadsať veľkých miest sveta. Máme nájsť takú cestu, ktorá bude začínať i končiť v tom istom meste a každé mesto navštívime práve raz. Na obrázku je vyznačené riešenie - **hamiltonovská kružnica.**



Taký graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu nazývame na počesť W. R. Hamiltona **hamiltonovský graf** alebo **hamiltonián.**

POZNÁMKA



Všeobecne neplatí, že každý graf má hamiltonovskú kružnicu. Tento graf má iba hamiltonovskú cestu, je vyznačená farebne.

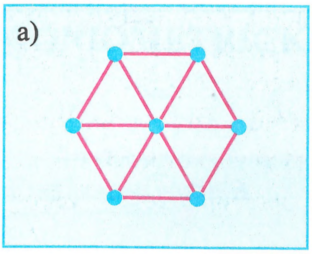
Platí veta:

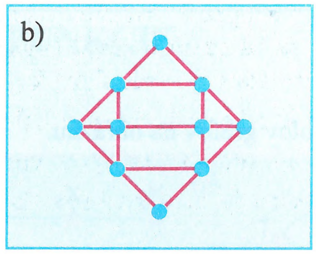
Nech graf má n vrcholov, kde n je aspoň tri. Nech stupeň každého vrcholu je aspoň $\frac{1}{2}n$. Potom tento graf je hamiltonovský.

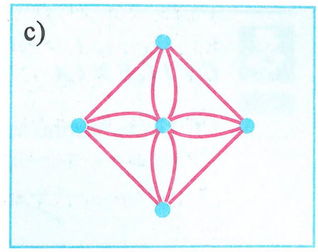
7 R

ÚLOHA

Zistite, ktoré z nasledujúcich grafov (na s. 91 hore) sú hamiltonovské. Prekreslite si ich a vyznačte, ak existujú, hamiltonovské kružnice.



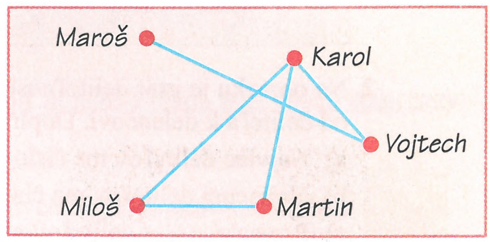




8 R

ÚLOHA

Jeden z priateľov z *grafu priateľstva* sa dozvedel veľmi dobrý vtip, ktorý chce povedať ďalšiemu práve jednému priateľovi.



a) Je možné, aby sa vtip šíril medzi týmito priateľmi tak, že žiaden z priateľov nebude vtip počuť dvakrát?

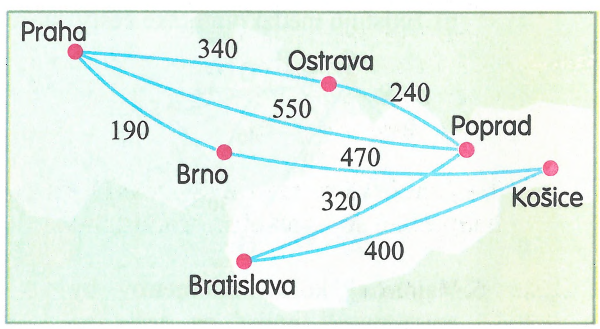
b) Ak je to možné, ktorý z priateľov by sa mal vtip dozvedieť ako prvý?

Úlohy z teórie grafov, ktorých riešením je nájdenie hamiltonovskej cesty alebo kružnice, majú spoločný názov: **Problém obchodného cestujúceho.** Univerzálne kritérium ani efektívny postup na riešenie problému zatiaľ neexistujú. Pre grafy s malým počtom vrcholov však stačí preskúmať pomerne malý konečný počet možností.

9 R

ÚLOHA

Obchodný cestujúci vychádza z Bratislavy, má navštíviť mestá podľa grafu na obrázku a vrátiť sa naspäť do Bratislavy. Čísla vedľa hrán grafu predstavujú približné vzdialenosti medzi mestami v kilometroch. Nájdite cesty, ktoré môže obchodný cestujúci absolvovať a určte ich dĺžky v kilometroch.



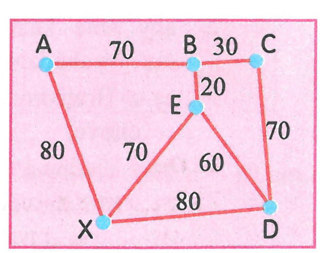
10 R

ÚLOHA

Pracovník, ktorý obsluhuje automaty na výdaj cestovných lístkov vychádza z vrcholu X a má skontrolovať všetky automaty vo vrcholoch A až E. Nájdite najkratšiu cestu, ak sa

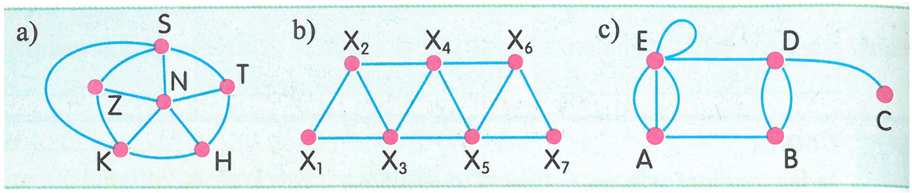
a) musí vrátiť naspäť do vrcholu X,

b) nemusí vrátiť naspäť do vrcholu X.

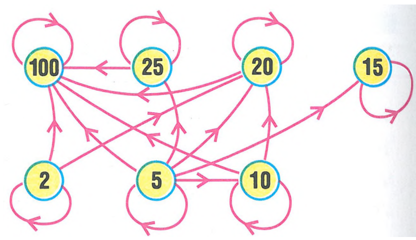


CVIČENIA

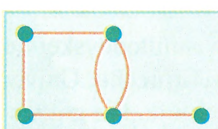
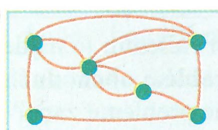
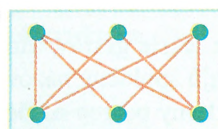
1. Určte stupne vrcholov grafov na obrázku.



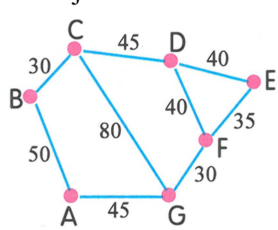
2. Na obrázku je graf deliteľnosti. Šípka vedie od deliteľa k delencovi. Doplňte odpovede:
   a) Najviac deliteľov má číslo____ .
   b) Najmenej deliteľov má číslo____ .
   c) Rovnaký počet deliteľov majú čísla______ .



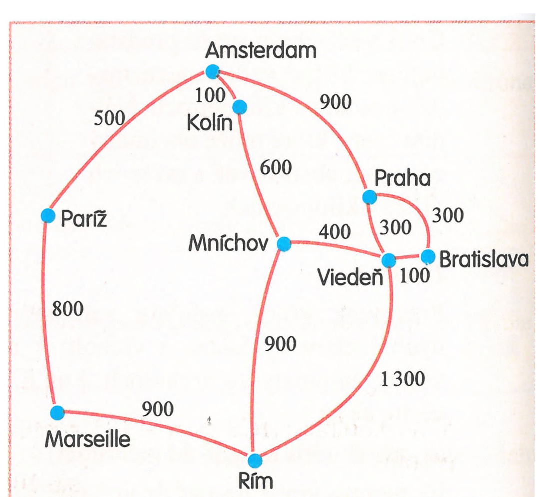
3. Zistite výpočtom a presvedčte sa kreslením, že nasledujúce grafy sú eulerovské a určte, či majú otvorený alebo uzavretý eulerovský ťah.

a)  b)  c) 

4. Vyriešte podľa grafu:
   a) Koľko existuje ciest medzi mestami ***A*** a ***E***?
   b) Existujú medzi nimi také cesty, ktoré majú rovnakú dĺžku?



5. Najmenej koľko kilometrov by sme museli prejsť na ceste po niekoľkých európskych mestách, aby sme každé navštívili práve raz? Vychádzate:
   a) z Bratislavy, skončíte v Mníchove,
   b) z Viedne a tiež tam skončíte,
   c) z Mníchova a tiež tam skončíte,
   d) zvoľte si ľubovoľnú trasu.



11 GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

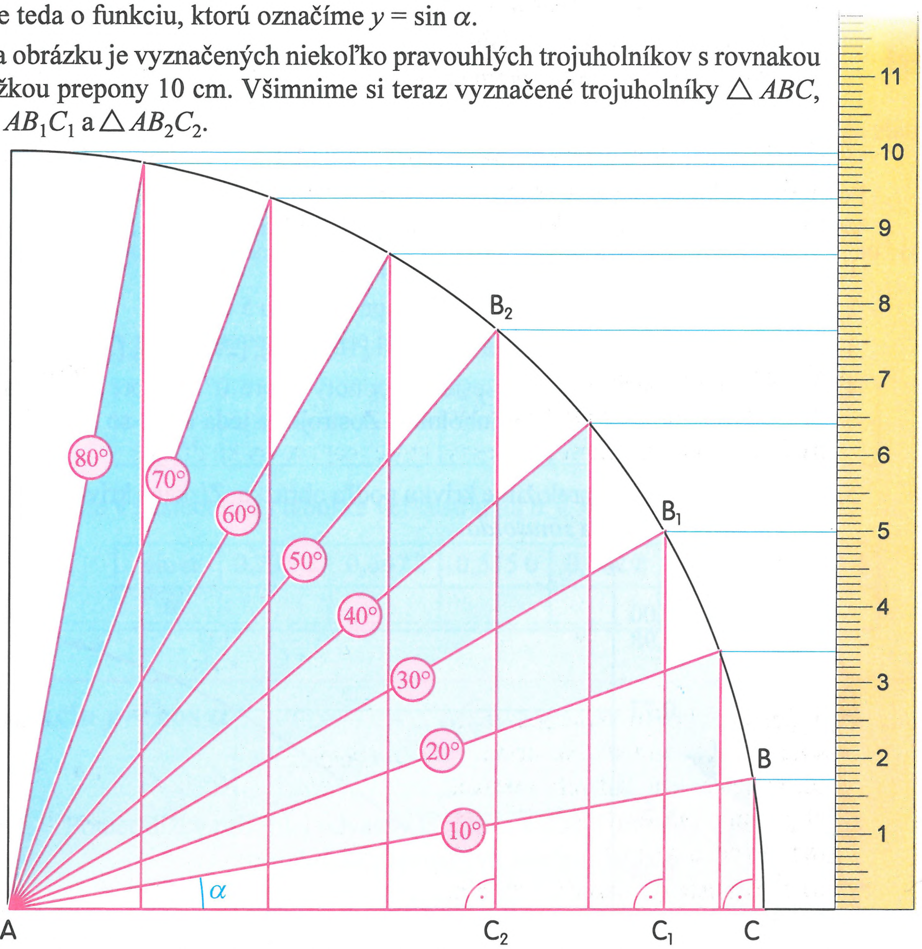
11.1 Funkcia $y = \sin \alpha$

Sínus uhla α je pomer dĺžky protiľahlej odvesny k uhlu α a dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

R Ak budeme meniť veľkosti uhla, bude sa meniť aj pomer dĺžok uvedených strán pravouhlého trojuholníka.
Ide teda o funkciu, ktorú označíme $y = \sin \alpha$.

Na obrázku je vyznačených niekoľko pravouhlých trojuholníkov s rovnakou dĺžkou prepony 10 cm. Všimnime si teraz vyznačené trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle AB_1C_1$ a $\triangle AB_2C_2$.



V trojuholníku ACB sa $\alpha = 10°$, protiľahlá odvesna $a = 1{,}7$ cm a prepona $c = 10$ cm, potom

$$\sin 10° = \frac{1{,}7}{10} = 0{,}17$$

V trojuholníku AC_1B_1 sa $\alpha_1 = 30°$, protiľahlá odvesna $a_1 = 5$ cm a prepona $c_1 = 10$ cm platí

$$\sin 30° = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

V trojuholníku AC_2B_2 sa $\alpha_2 = 50°$, protiľahlá odvesna $a_2 = 7{,}7$ cm a prepona $c_2 = 10$ cm, platí

$$\sin 50° = \frac{7{,}7}{10} = 0{,}77$$

Z obrázka môžeme zistiť aj ďalšie približné hodnoty funkcie $y = \sin \alpha$. Z týchto hodnôt zostavme tabuľku.

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin \alpha$	0,17	0,34	0,5	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98

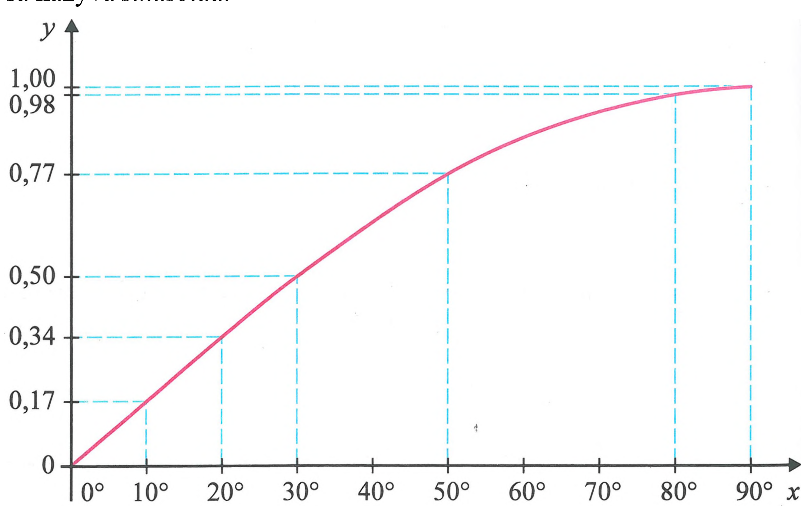
Vidíme:

So zväčšujúcim sa uhlom α sa zväčšuje aj hodnota funkcie $y = \sin \alpha$.
Funkcia $y = \sin \alpha$ je rastúca funkcia pre uhol α v intervale $(0°, 90°)$
a nadobúda hodnoty z intervalu $(0, 1)$.

Uvedenú tabuľku využijeme na zostrojenie grafu funkcie $y = \sin \alpha$.

Postup na zostrojenie grafu funkcie $y = \sin \alpha$: Zostrojíme navzájom kolmé osi x a y. Veľkosť uhlov v stupňoch znázorníme na osi x a funkčné hodnoty na osi y.

1. Veľkosť 10° znázorníme úsečkou 1 cm na osi x.
2. Na osi y zvolíme za jednotku úsečku, napr. s dĺžkou 5 cm.
3. Postupne zostrojíme body so súradnicami [10; 0,17], [20; 0,34], [30; 0,5] atď.
4. Funkciu $y = \sin \alpha$ doplníme ešte o hodnoty 0 pre 0° a 1 pre 90° (tieto hodnoty už neplatia pre pravouhlý trojuholník). Zostrojíme teda body so súradnicami [0, 0], [90, 1].
5. Zostrojenými bodmi preložíme krivku podľa obrázka. Získaná krivka, teda graf funkcie $y = \sin \alpha$ sa nazýva *sínusoida*.



Funkcia $y = \sin \alpha$ má definičný obor uzavretý interval $\langle 0°, 90° \rangle$.
a funkčné hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
Funkcia $y = \sin \alpha$ je rastúca.

1 R

ÚLOHA

Z grafu zistite hodnoty funkcie $y = \sin \alpha$ pre $\alpha = 40°$ (60°, 70°, 80°).

2 R

ÚLOHA

Odmerané hodnoty porovnajte s hodnotami uvedenými v tabuľkách hodnôt funkcie sínus.

R

CVIČENIA

1. Na štvorčekovanom papieri zostrojte graf funkcie $y = \sin \alpha$. Pomocou grafu zistite:
   a) funkčné hodnoty pre $\alpha = 15°$ (20°, 45°),
   b) veľkosti uhlov pre funkčné hodnoty 0,6 (0,1; 0,8).

2. Pomocou tabuliek a kalkulačky zistite hodnoty funkcie $y = \sin \alpha$ pre $\alpha = 30°$ (45°, 67°30').

3. Doplňte v nasledujúcej tabuľke hodnoty funkcie sínus:

α	25°	49°	58°50'	60°	74°40'	84°40'
$\sin \alpha$						

4. Doplňte v nasledujúcej tabuľke veľkosti uhla ***a*** v stupňoch:

$\sin \alpha$	0,731 4	0,647 2	0,515 0	0,182 2	0,336 5	0,673 4
α						

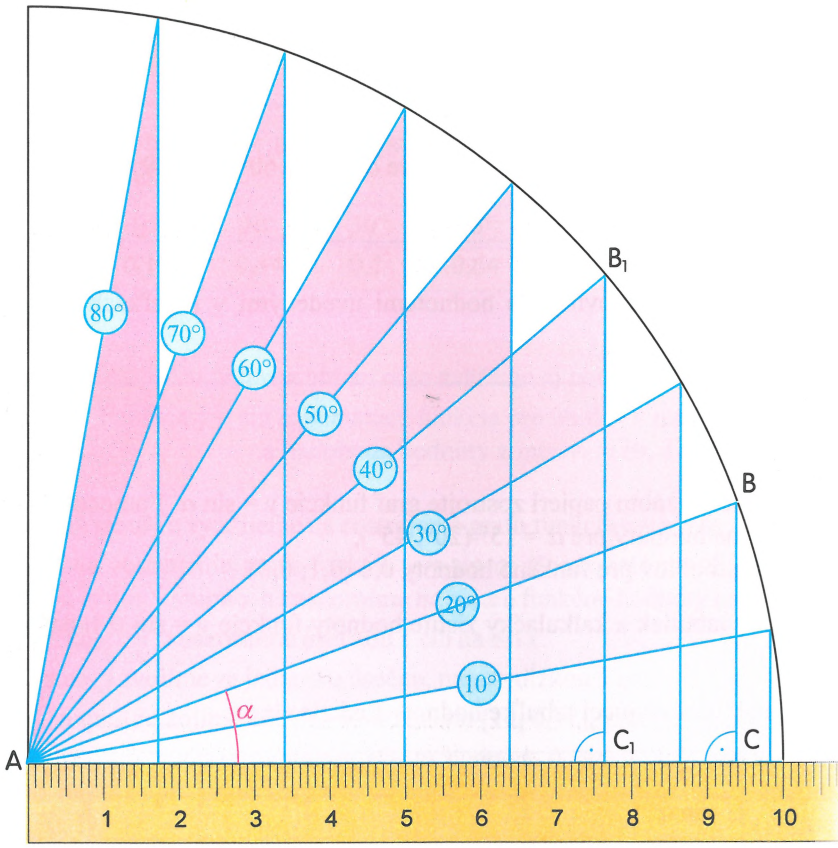
11.2 Funkcia $y = \cos \alpha$

Pomer dĺžky priľahlej odvesny k uhlu α a dĺžky prepony v pravouhlom trojuholníku sa nazýva **kosínus uhla** α

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Ak sa bude meniť veľkosti uhla α, bude sa meniť aj hodnota funkcie $\cos \alpha$, teda $y = \cos \alpha$.

Sledujme obrázok, na ktorom sú znázornené pravouhlé trojuholníky s preponami dĺžky 10 cm.



Všimnime si trojuholníky $\triangle ACB$ a $\triangle AC_1B_1$.

V trojuholníku ACB sa $\alpha = 20°$, priľahlá odvesna $b = 9{,}4$ cm, prepona $c = 10$ cm.

$$\cos 20° = \frac{9{,}4}{10} = 0{,}94$$

V trojuholníku AC_1B_1 sa $\alpha = 40°$, priľahlá odvesna $b_1 = 7{,}7$ cm, prepona $c = 10$ cm.

$$\cos 40° = \frac{7{,}7}{10} = 0{,}77$$

Vidíme, že

$$20° < 40°$$

$$\cos 20° > \cos 40°$$

Teda:

So zväčšujúcim sa uhlom, hodnota funkcie kosínus sa zmenšuje.

Čítajme z obrázka a zostavme tabuľku:

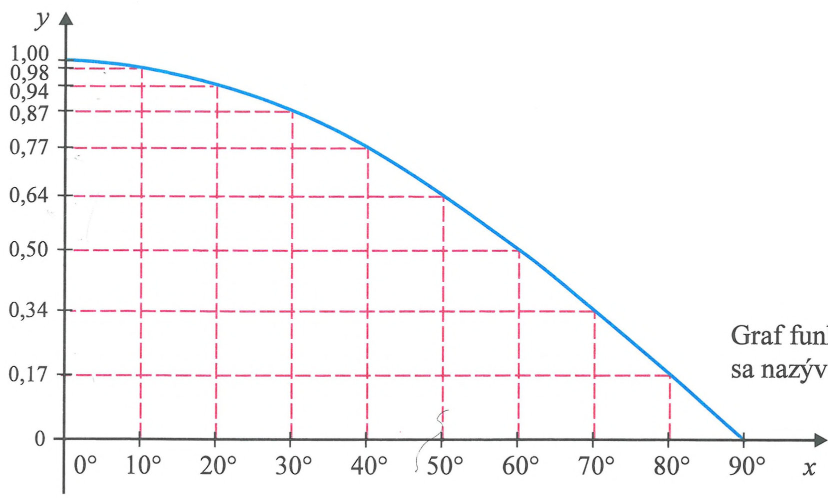
α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,5	0,34	0,17

Podobne ako pri funkcii $y = \sin \alpha$, doplňme aj pre funkciu $y = \cos \alpha$ hodnoty takto: pre $\alpha = 0°$ doplňme hodnotu 1 a pre $\alpha = 90°$ doplňme hodnotu 0.

Potom platí:

> Definičný obor funkcie $y = \cos \alpha$ je uzavretý interval $\langle 0°, 90° \rangle$.
> Funkčné hodnoty sú v intervale $\langle 0, 1 \rangle$.
> Funkcia $y = \cos \alpha$ je klesajúca.

Údaje uvedené v tabuľke hodnôt funkcie $y = \cos \alpha$ využijeme na zostrojenie grafu tejto funkcie. Budeme postupovať podobne ako pri zostrojovaní sínusoidy.



Graf funkcie $y = \cos \alpha$ sa nazýva *kosínusoida.*

ÚLOHA 1

V tabuľkách vyhľadajte hodnoty funkcie $y = \cos \alpha$ pre uhly:

a) 10°, b) 55°, c) 82°30'.

Pre veľkosti uhlov platí 10° < 55° < 82°30'. Porovnajte príslušné hodnoty funkcie pre dané veľkosti uhlov.

ÚLOHA 2

V tabuľkách zistite veľkosti uhlov α, ak:

a) $\cos \alpha = 0{,}912\,4$, b) $\cos \alpha = 0{,}717\,3$, c) $\cos \alpha = 0{,}272\,8$.

CVIČENIA

1. Na štvorčekovanom papieri zostrojte graf funkcie $y = \cos \alpha$. Z grafu zistite:
   a) hodnoty funkcie pre $\alpha = 15°$ (25°, 65°),
   b) veľkosť uhla pre $\cos \alpha = 0{,}42$ (0,82).

2. Bez použitia tabuliek porovnajte veľkosti uhlov α a β, keď platí: $\cos \alpha = 0{,}414\,7$, $\cos \beta = 0{,}873\,2$.

3. Pomocou tabuliek (alebo kalkulačky) doplňte v tabuľke chýbajúce údaje:

α	0°30'	15°	25°	45°	68°30'	75°
cos α						

4. Doplňte v nasledujúcej tabuľke veľkosti uhla α v stupňoch:

cos α	1,000	0,987 2	0,827 4	0,512 5	0,500 0	0,014 5
α						

11.3 Funkcia $y = \text{tg}\ \alpha$

Pomer dĺžky protiľahlej a dĺžky priľahlej odvesny v pravouhlom trojuholníku sa nazýva **tangens uhla** α

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$$

Ak sa uhol α bude meniť, dostaneme funkciu $y = \text{tg}\ \alpha$

Opäť budeme postupovať ako v predchádzajúcich prípadoch pre sínus a kosínus uhla.

Pravouhlé trojuholníky $\triangle\ ACB$, $\triangle\ ACB_1$ a $\triangle\ ACB_2$ majú spoločnú odvesnu s dĺžkou 10 cm.

V trojuholníku ACB sa $\alpha = 20°$, dĺžka protiľahlej odvesny $a = 3{,}6$ cm, dĺžka priľahlej odvesny $b = 10$ cm

$$\text{tg}\ 20° = \frac{3{,}6}{10} = 0{,}36$$

V trojuholníku ACB_1 sa $\alpha_1 = 45°$, dĺžka protiľahlej odvesny $a_1 = 10$ cm, dĺžka priľahlej odvesny $b_1 = 10$ cm

$$\text{tg}\ 45° = \frac{10}{10} = 1$$

V trojuholníku ACB_2, dĺžka protiľahlej odvesny $a_2 = 11{,}9$ cm, dĺžka priľahlej odvesny $b_2 = 10$ cm.

$$\text{tg}\ 50° = \frac{11{,}9}{10} = 1{,}19$$

Uveďme hodnoty funkcie tangens uhla pre vybrané uhly α.

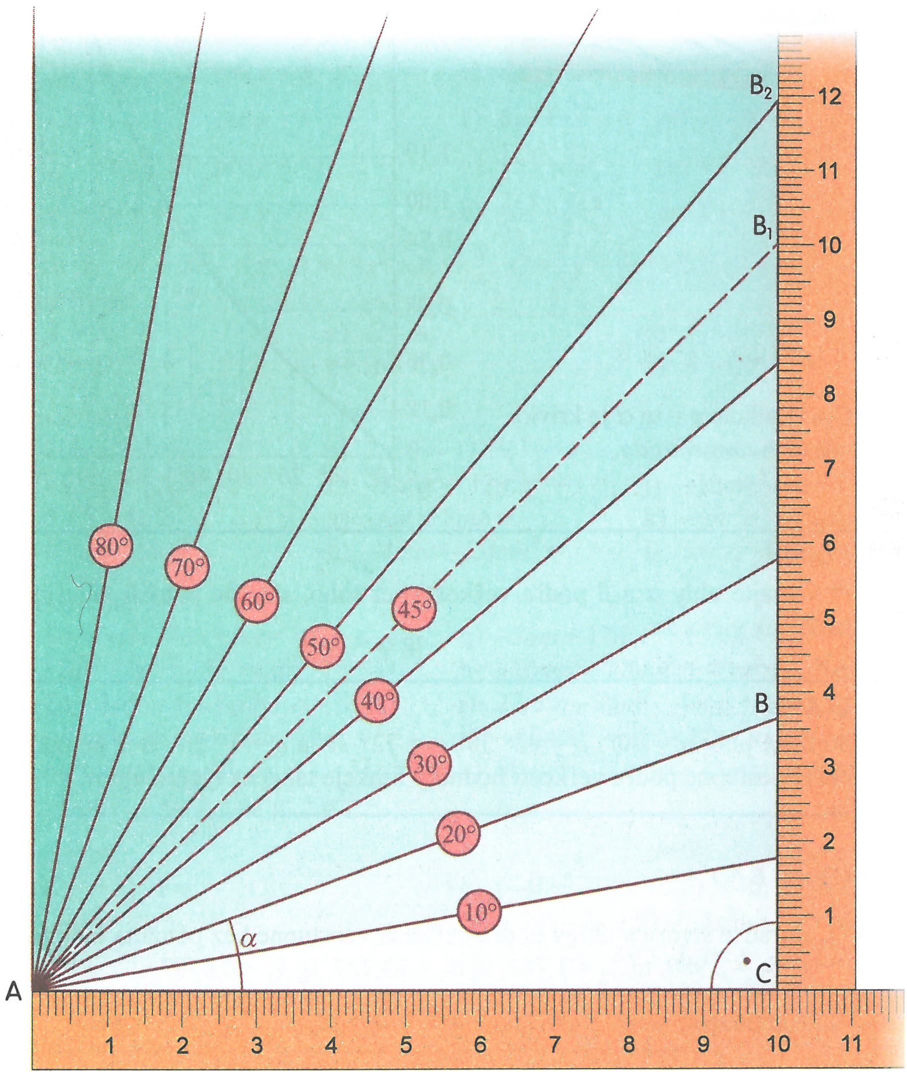
α	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°
tg α	0,18	0,36	0,58	0,84	1,00	1,19	1,73	2,75

Na obrázku sú zvolené tieto jednotky: Na polpriamke OX jednotka 1 cm odpovedá veľkosti uhla 10°. Na osi OY je jednotka dĺžky 5 cm.

Zistíme, že

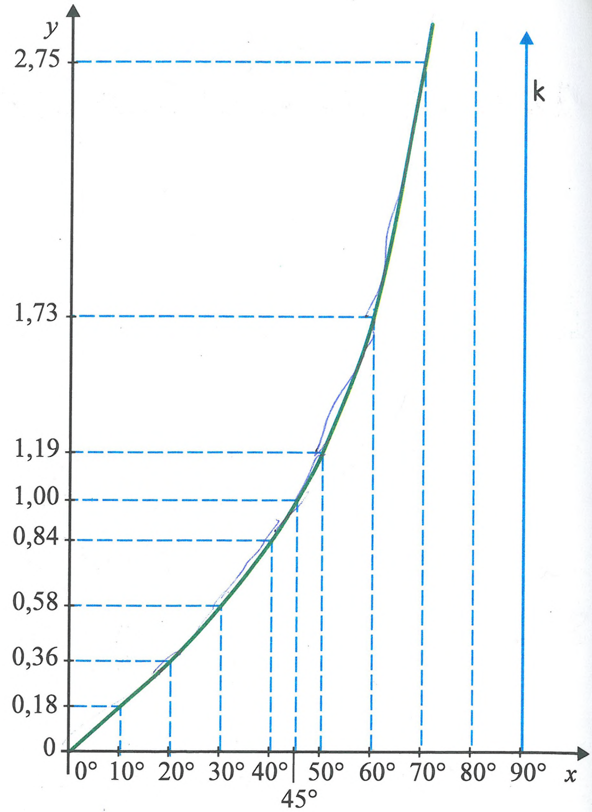
$$20° < 45° < 50°$$
$$\mathrm{tg}\ 20° < \mathrm{tg}\ 45° < \mathrm{tg}\ 50°$$

Hodnoty funkcie $y = \mathrm{tg}\ \alpha$ rastú s rastúcimi veľkosťami uhla α.



Funkcia $y = \mathrm{tg}\ \alpha$ je definovaná na intervale $\langle 0°, 90°)$.
Je rastúca na celom definičnom obore a nadobúda kladné hodnoty.

Graf funkcie $y = \text{tg}\, \alpha$ je krivka nazvaná *tangentoida.*



1 R

ÚLOHA

Porovnajte uhly α a β podľa veľkosti bez toho, aby ste použili tabuľky alebo kalkulačku, ak viete, že

$$\text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, \beta$$

2 R

ÚLOHA

Sú dané uhly $\alpha = 70°$, $\beta = 42° 30'$, $\gamma = 72° 30'$ a $\delta = 1° 20'$. Bez použitia tabuliek zoraďte postupne podľa veľkosti hodnoty funkcie tangens týchto uhlov.

R

CVIČENIA

1. Zoraďte štvoricu uhlov podľa veľkosti vzostupne bez použitia tabuliek, ak viete, že $\text{tg}\, \delta_1 = 2{,}989$, $\text{tg}\, \delta_2 = 1{,}767$, $\text{tg}\, \delta_3 = 13{,}727$, $\text{tg}\, \delta_4 = 0{,}6787$.

2. Pomocou tabuliek alebo kalkulačky doplňte hodnoty funkcie tangens:

α	12° 30'	25° 40'	42°	72°	56°	5° 20'
tg α						

3. Na štvorčekovaný papier narysujte graf funkcie $y = \text{tg}\, \alpha$ a odmeraním zistite hodnoty funkcie tg α pre uhly 5°, 10°, 15°, 20°. Výsledky porovnajte s hodnotami uvedenými v tabuľke.

12 CVIČENIA NA OPAKOVANIE

1. Určte hodnotu mnohočlena pre danú hodnotu premennej:

a) $3x - 9$ pre $x = 5$

b) $-2x^2 + x$ pre $x = 4$

c) $5y^2 + 6y - 20$ pre $y = -1$

d) $y^3 - 3y + 4$ pre $y = -2$

e) $8a^2 + a - 10$ pre $a = -\frac{1}{3}$

f) $6a^3 + a^2 - a$ pre $a = 0$

g) $\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{2}b$ pre $b = -6$

h) $\frac{2}{5}b^3 - \frac{4}{3}b^2$ pre $b = -\frac{1}{2}$

2. Nech $A = x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}x$; $B = -3x^2 + 6x + \frac{3}{4}$; $C = \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + 11$; $D = \frac{-7x^3}{4} + \frac{x^2}{6} + \frac{9}{10}$
Vypočítajte:

a) $A + B$;

b) $C + D$;

c) $C - A$;

d) $A - C$;

e) $A + D - B$;

f) $B - (D - C)$

3. Vypočítajte:

a) $2ab + 7ab =$

b) $-9ab^2 + 17ab^2 =$

c) $6a^2b - 4a^2b =$

d) $-3ab^2 - 5ab^2 =$

e) $2a^2b^2 - 11a^2b^2 =$

f) $-5a^2b^2 - 13a^2b^2 =$

g) $-mn + 8mn =$

h) $-4mn^2 - 20mn^2 =$

i) $5m^2n - 14m^2n =$

j) $-12mn^2 - 9mn^2 =$

k) $-6m^2n^2 - 18m^2n^2 =$

l) $5m^2n^2 - 13m^2n^2 =$

4. Vypočítajte:

a) $6a + 3ab - 7ab + 8a =$

b) $-ab^2 + 3ab^2 - 8b + 8a =$

c) $24 + 3a^2b + 6 - 8a^2b + a =$

d) $-4ab^2 + ab + 6 - 5ab^2 - 8ab =$

e) $6a^2b^2 + 3a^2b - 15a^2b^2 + 1 - 11a^2b =$

f) $-12a^2b^2 + 4a^2b - 9a^2b^2 + a^2b =$

g) $-5mn + 17mn^2 + 13mn - mn^2 =$

h) $-16mn^2 - 18mn^2 + 40m^2n - 25mn^2 =$

i) $22m^2n - 7mn^2 - 4mn^2 + 4m^2n =$

j) $-40mn^2 - m^2n^2 - 80m^2n^2 + 50mn^2 =$

k) $90mn^2 - 27m^2n^2 - 33m^2n^2 + 4mn^2 =$

5. Vynásobte:

a) $(2x^2 + x) \,.\, x =$

b) $(-3x^2 + 2x^3) \,.\, 3x =$

c) $(4x^2 - 5x + 1) \,.\, (-x) =$

d) $(-3x^3 - 7x^2 + 10) \,.\, (-2x) =$

e) $(11 + 2x - 4x^2) \,.\, 15x^2 =$

f) $(5x^2 - 6x + 9) \,.\, 0{,}5x^2 =$

g) $(-40x^2 - 30x + 20) \,.\, (-0{,}1x^2) =$

h) $(-7x^3 - 7x + 8) \,.\, (-3x^2) =$

i) $(12 - 8x - 4x^2) \,.\, 1{,}5x^2 =$

j) $(-10x^2 + 24x + 16) \,.\, 2{,}5x^2 =$

k) $(-100x^2 + 500x + 2\,000) \,.\, (-0{,}01x^2) =$

6. Vynásobte:

a) $(3 + a) \,.\, (3 - a) =$

b) $(a + 2) \,.\, (a - 2) =$

c) $(8 + m) \,.\, (8 - m) =$

d) $(m + 100) \,.\, (m - 100) =$

e) $(a + b) \,.\, (a - b) =$

f) $(m + n) \,.\, (m - n) =$

g) $(9 - a) \,.\, (9 + a) =$

h) $(a - 11) \,.\, (a + 11) =$

i) $(-5 - m) \,.\, (-5 + m) =$

j) $(-m - 10) \,.\, (-m + 10) =$

k) $(2a - 2b) \,.\, (2a + 2b) =$

l) $(-2m - 2n) \,.\, (-2m + 2n) =$

7. Vynásobte:

a) $\frac{2}{3}x^2 \,.\, (9 - 6x + 3x^2) =$

b) $\frac{-1}{2}x^2 \,.\, (4 - 10 + 8x^2) =$

c) $\frac{-3}{2}x^2 \,.\, (-2 - 6x + 4x^2) =$

d) $\frac{-3}{2}x^2 \,.\, \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}\right) =$

e) $\frac{-2}{5}x^2 \,.\, \left(\frac{5}{2}x + \frac{4}{3}\right) =$

8. Vynásobte dvojčleny:

a) $\left(\frac{1}{2}a^2 + a\right) . (9 - 6a) =$

b) $\left(\frac{-a^2}{3} + \frac{3}{2}\right) . \left(\frac{7}{2} - 10a\right) =$

c) $\left(\frac{-3b^2}{2} + \frac{4}{3}\right) . \left(\frac{6}{5} + \frac{b}{2}\right) =$

d) $\left(\frac{-9c^2}{10} - \frac{-4}{5}c\right) . \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}c\right) =$

9. Umocnite podľa vzorcov:

a) $(3 + a)^2 =$ d) $(m + 10)^2 =$ g) $(7 - a)^2 =$ j) $(-m - 10)^2 =$

b) $(a + 5)^2 =$ e) $(a + b)^2 =$ h) $(a - 4)^2 =$ k) $(a - b)^2 =$

c) $(5 + m)^2 =$ f) $(m + n)^2 =$ i) $(-2 - m)^2 =$ l) $(-m - n)^2 =$

10. Akým výrazom musíme vynásobiť nasledujúce jednočleny, aby sa výsledok rovnal 1?

a) x; b) $4x$; c) $-x$; d) $-5x$; e) x^2; f) $6x^2$; g) $-3x^3$; h) $\frac{2}{3}x$; i) $-\frac{4}{7}x$

11. Vynásobte:

a) $(2x^2 + 5x - 3) . (x^2 - x + 1) =$

b) $(x^2 - 8x - 6) . (4x^2 + 2x - 2) =$

c) $(u^3 + 2u^2 - 7) . (u^2 - u + 1) =$

d) $(-u^3 - 8u^2 - u) . (2u^2 + 9u - 4) =$

12. Vydeľte:

a) $12x^3 : x^2 =$

b) $-20x^5 : (-4x^2) =$

c) $-15x^4 : 3x^2 =$

d) $-70x^4 : (-10x^2) =$

e) $(21x^2 + 6x - 9) : (-3) =$

f) $(-26 + 80x - 14x^2) : 2 =$

g) $(9x - 7x^2) : x =$

h) $(-7x^4 + 19x^2) : (-x^2) =$

i) $(-25x^3 + 15x^4 - 50x^5) : (-5x^2) =$

j) $(14x^5 - 21x^4 + 7x^3 - 35x^2) : (-7x^2) =$

13. Rozložte na súčin:

a) $6x - 6y$ c) $2ab + 2a$ e) $m^2n - mn^2$ g) $12a^3c^3 - 6a^3c^2$

b) $mp - m$ d) $ax^2 + xy$ f) $6x^2y - 3xy^2$

14. Vyjadrite v tvare súčinu:

a) $m^2 + 4mn + 4n^2$ c) $25x^2 - 30x^2y + 9x^2y^2$ e) $4x^2 - 4y^2$

b) $4x^2 - 16xy + 16y^2$ d) $36m^4n^2 - 24m^3n^3 + 4m^2n^4$ f) $a^2 - b^2$

15. Rozložte na súčin:

a) $x^2 + 9x + 20$ c) $x^2 + 13x + 30$ e) $m^2 - m - 56$

b) $x^2 + 20x + 99$ d) $m^2 - 8m - 65$ f) $a^2 - 5a + 4$

16. Určte najmenší spoločný násobok výrazov:

a) a, ab^2, ab^3 c) $m, 4m^4, 2mn, m - 2$ e) $3x - 3, 4x - 1, x^2 + 1$

b) $4x, 6y^2, 8x^2y^2$ d) $a - b, a^2 - b^2$

17. Vypočítajte. Vo výrazoch s neznámou v menovateli určte podmienky platnosti:

a) $xy + \frac{(x-y)^2}{2}$ c) $a - b + \frac{a^2 + b^2}{a + b}$ e) $a^2 - b^2 - \frac{a^4 - 2a^2b^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

b) $\frac{(a+b)^2}{2ab} - (a + b)$ d) $x + 3 - \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

18. Vypočítajte a určte podmienky platnosti:

a) $\frac{1}{8m^2} - \frac{4m - n}{12m^2n} - \frac{2n - 3n}{9mn^2} + 2$ d) $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y}$

b) $\frac{(p+q)^2}{p^2} - \frac{(p-q)^2}{q^2} - \frac{2(p+q)(p-q)}{pq}$ e) $\frac{5}{2a - 5} - \frac{2}{2a + b} - \frac{a - 1}{9 - 4a^2}$

c) $\frac{m}{1 - m} - \frac{n}{1 - n}$

19. Vynásobte. Určte, pre ktoré neznáme má výraz zmysel:

a) $c^2d \cdot \frac{8ab^2}{5cd^2}$ d) $(a^2 + 2ab) \cdot \frac{a}{a^2 - 4b^2}$

b) $(-6ab^2c) \cdot \left(-\frac{3m - 2n^2}{4a^2b^3c^4}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{m^2 + 2mn + n^2}\right) \cdot \left(-\frac{m + n}{m - n}\right)$

c) $(x - 1) \cdot \frac{x + 1}{x^2 - 1}$ f) $\left(\frac{x^2 - a^2}{(x - a)^2}\right) \cdot \left(\frac{bx - ab}{3x + 3a}\right)$

20. Vydeľte a určte podmienky platnosti výrazov:

a) $\frac{4x}{5y} : \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ e) $\frac{a^2 - a - 6}{x - y} : \frac{a - 3}{(x - y)^2}$

b) $\frac{5a^2}{4b^2} : \frac{3b}{5a}$ d) $\frac{27a^2b^3c}{64x^2y^3z} : \frac{9a^2bc}{32x^2yz}$ f) $\frac{9a^2 + 6a + 1}{4x^2 - 36} : \frac{12a + 4}{x - 3}$

21. Vypočítajte a určte podmienky platnosti výrazov:

a) $\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right) : \left(\frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} - \frac{2}{3}\right)$ d) $\left(1 + \frac{a}{1 - a}\right) : \frac{1 + a}{1 - a}$

b) $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a} + 3x^2\right) : \left(\frac{1}{x} + a\right)$ e) $\left(\frac{a^2b}{x} : \frac{x}{b}\right) : \left(\frac{1}{ab} : \frac{x^2}{b}\right)$

c) $\left(1 - \frac{a - 2b}{a + 2b}\right) : \left(\frac{a}{a - 2b} - \frac{2b}{a + 2b}\right)$

22. Upravte zložené zlomky. Určte, pre ktoré premenné má zlomok zmysel.

a) $x - \frac{x - 1}{x + \frac{1}{x}}$ b) $\frac{\frac{a}{m - n}}{\frac{b}{m + n}}$ c) $\frac{\frac{1 + a}{1 - a} - 1}{\frac{1 - a}{1 + a} + 1}$ d) $\frac{a + \frac{a^2 + ab - 1}{a - b}}{a - \frac{a^2 - ab + 1}{a + b}}$

23. Dokážte, že platí:

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a}}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)} = ab$$

Určte podmienky, pre ktoré má výraz na ľavej strane zmysel.
[Využite vzťah $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$]

24. Riešte rovnice a urobte skúšku správnosti:

a) $6(x - 3) = 10 - 2(x + 2)$ d) $\frac{2x - 10}{3} - 15 = \frac{3x - 40}{11} - \frac{57 - x}{5}$

b) $(2x - 25) - 3x + [8x + 5(6 - x)] = 7$ e) $4\frac{1}{2}x - 8{,}5 - 5(1{,}4x + 5) = -31$

c) $\frac{7x - 5}{6} - \frac{5x + 3}{7} = \frac{2x - 7}{3}$

25. Riešte rovnice s neznámou v menovateli:

a) $\frac{5}{x}+\frac{6}{x}=5\frac{1}{2}$ c) $\frac{3x+5}{1-x}=1$ e) $\frac{4}{x^2+3x}+\frac{2}{x^2-6x}+\frac{3}{(x+3)(x-6)}=0$

b) $\frac{10}{x}+\frac{4}{9}=\frac{11}{x}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{1+x}{x+1}+\frac{3+x}{x+1}=\frac{4}{x+1}$ f) $\frac{x+2}{2x+2}-\frac{1}{2}=\frac{-(x+4)}{4(x+1)}$

26. Riešením rovnice $2-\frac{4x+3}{x+x^2}=\frac{2x}{x+1}-\frac{5}{x}$ je:

A $x=-1$ **B** $x=-\frac{2}{3}$ **C** $x=\frac{2}{7}$ **D** $x=-3$

27. Z nasledujúcich rovností vyjadrite neznámu x:

a) $3(a-2b+3c)=2(3c-b)-(a-x)-4(4a-3b-2c)$ c) $(a-x)(b-x)=x^2$

b) $4m-5px+x=5(m+p)-3x$ d) $\frac{1+x}{x+1}=\frac{m}{n}$

28. Riešte nasledujúce rovnice:

a) $8x-\frac{x}{4}=\frac{x}{10}+153$ d) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-1\right]=1$

b) $x=\frac{4x+3}{15}+\frac{x-9}{10}-\frac{15-x}{12}$ e) $3-\frac{3}{2}\left(\frac{5}{6}x-2\right)=1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{x-4}{3}+\frac{3}{4}=\frac{3x-8}{5}-3\frac{1}{4}$

29. Napíšte všetky dvojice prirodzených čísel menších ako 20, ktorých súčet sa rovná 20.

30. Napíšte všetky dvojice celých čísel s absolútnou hodnotou menšou ako 10, ktorých súčet je 5.

31. a) Koľko existuje dvojíc celých čísel, ktorých súčet je 15?
b) Napíšte tri (príklady) dvojíc také, že absolútna hodnota obidvoch sčítancov je väčšia ako 15, ale súčet sa rovná 15.

32. Presvedčte sa, že pre hodnoty $x=2$ a $y=5$ je splnená rovnosť: $4+3x=7+y-2$.

33. Koľko dvojíc prirodzených čísel x, y vyhovuje rovnici: $2x+y=6$?

34. Riešte:

a) $x+y=5$, $x=8$ c) $x-y=-11$, $3x-y=-1$ e) $0{,}4a+b=1$, $3a+5b=6$

b) $x-y=4$, $x+y=10$ d) $8m-25n=-3$, $m-n=6$ f) $-4a+9b=47$, $12a+15b=-15$

35. Riešte:

a) $3x+2y=2$, $2x+y=13$ c) $6x-5y=33$, $3x+3y=33$ e) $x=28-y$, $3x-11y=8y-48$

b) $x-2y=94$, $2x+y=13$ d) $8m+3n=10$, $7m+6n=-25$ f) $7x-9=-4y$, $4x+7(x+y)=7$

36. V sústave dvoch rovníc s dvoma neznámymi určte k tak, aby sústava nemala riešenie.

$$18x+42y=-12$$
$$-3x-7y=k$$

37. Napíšte tri hodnoty premennej k tak, aby sústava rovníc mala riešenie.

$$-25x + 40y = -15$$
$$-10x + 16y = k$$

38. Irena upravovala rovnicu $x = \frac{3}{2}y$ tak dlho, až jej vyšiel čudný výsledok. Kde urobila chybu?

$$x = \frac{3}{2}y$$
$$2x = 3y$$
$$4x = 6y$$
$$14x - 10x = 21y - 15y$$
$$15y - 10x = 21y - 14x$$
$$5 \,.\, (3y - 2x) = 7 \,.\, (3y - 2x)$$
$$5 = 7$$

39. V škole pri kontrole učebníc zistili, že každú deviatu učebnicu treba vyradiť. Spolu ich vyradili 83. Koľko učebníc bolo v sklade pred vyradením a po vyradení?

40. 800 grošov má rovnakú hodnotu ako 100 dukátov. 100 grošov má rovnakú hodnotu ako 250 toliarov. Koľko dukátov má rovnakú hodnotu ako 100 toliarov?

41. Istý farmár prijal do služby robotníka na jeden rok a sľúbil mu 12 dolárov a zimný kabát. Robotník chcel ale po siedmich mesiacoch odísť a žiadal príslušnú časť platu a kabát. Okrem kabáta dostal ešte 5 dolárov. Akú cenu mal kabát?

42. Muž, 180 cm vysoký, kráča po nábreží priamo k majáku. Mužov tieň, spôsobený svetlom majáka, je na začiatku dlhý 5,4 m. Keď sa muž priblíži k majáku o 90 metrov, skráti sa jeho tieň o 3 metre. Aký vysoký je maják a ako ďaleko je muž od neho vzdialený?

43. Vyparením 15 kg morskej vody sa získa 517,5 g soli.
a) Koľko soli sa získa odparením 25 kg morskej vody?
b) Koľko morskej vody potrebujeme na získanie 6,45 kg soli?

44. Za štyri čokolády a päť žuvačiek zaplatíme 43 korún. Za jednu žuvačku a sedem čokolád zaplatíme 52 korún. Koľko zaplatíme za desať čokolád a štyri žuvačky?

45. Deti si medzi sebou vymieňali ceruzky, gumy a perá tak, že za 15 ceruziek boli dve perá a za dve gumy boli 3 ceruzky. Koľko gúm bolo za jedno pero?

46. Komín neznámej výšky vrhá tieň dlhý 45 m v čase, keď metrová tyč stojaca kolmo na povrch má tieň dlhý 85 cm. Vypočítajte výšku komína.

47. Z jedného hektára sa pozbieralo 3 000 kg raže, z čoho sa potom namlelo 2 500 kg múky. Z troch kilogramov múky sú štyri kilogramy chleba. Vypočítajte, na koľkých štvorcových metroch pôdy sa urodilo také množstvo raže, ktoré je potrebné na jeden dvojkilogramový bochník chleba.

48. Auto má v lete spotrebu 8 litrov benzínu na 100 km, v zime 8,8 litra.
a) O koľko percent je spotreba auta v zime väčšia než v lete?
b) O koľko percent je spotreba auta v lete menšia než v zime?

49. Benzínová nádrž má tvar kvádra s rozmermi 70 cm, 30 cm, 25 cm. Hladina benzínu siaha 5 cm pod vrchný okraj nádoby. Na koľko percent je nádoba naplnená? Vypočítajte percento naplnenia pre všetky tri možné polohy nádrže, ak sa vždy zachová podmienka, že benzín siaha 5 cm pod vrchný okraj nádrže.

50. V škole bolo 560 žiakov. Za výborný prospech odmenili 8 % zo všetkých chlapcov a 10 % zo všetkých dievčat. Riaditeľstvo vyhlásilo, že bolo odmenených 9 % zo všetkých žiakov. Koľko chlapcov a koľko dievčat navštevovalo školu?

51. Nádoba je naplnená vodou na 55 %. Keď do nej nalejeme dve vedrá vody, bude naplnená na 73 %. Aký je objem nádoby, ak v jednom vedre je 9 litrov vody?

52. Z repy uloženej na kope sa stráca denne 16 gramov cukru na každých 100 kg repy.
a) Koľko kilogramov sa stratilo z kopy 328 ton cukrovej repy, keď ju odviezli až za osem dní?
b) Stratu cukru vyjadrite v korunách, ak cena 1 kg kryštálového cukru je 20,70 Sk.

53. Koľko gramov kuchynskej soli máme rozpustiť v 400 gramoch vody, aby sme dostali 20-percentný roztok?

54. Zemiaky obsahujú 76,1 % škrobu. Koľko zemiakov potrebujeme, ak chceme získať 12,5 kg škrobu?

55. Z dreva sa získa asi 47 % buničiny a z nej asi 65 % papiera. Koľko ton papiera sa vyrobí zo 150 ton dreva?

56. Hmotnosť kocky cukru je 6,25 g. Koľko takýchto kociek dostaneme z jednej repy, ktorej hmotnosť je 0,5 kg a cukornatosť 15 %?

57. Obchodník predal štvrtinu tovaru so ziskom 20 % a dostal zaň 1 680 Sk. Druhú štvrtinu predal so ziskom 10 %, ďalšiu štvrtinu za nákupnú cenu a poslednú štvrtinu so stratou 5 %. Vypočítajte celkovú nákupnú cenu tovaru a obchodníkov zisk v percentách.

58. Záhradníctvo má pripraviť pre drobný predaj 5 000 ks priesad v kvetináčoch. Klíčivosť semien je 70 % a pestovateľský odpad, t. j. množstvo uhynutých rastlín z vyklíčených semien je asi 20 %. Určte počet semien, ktoré treba vysadiť, aby bola zaručená dodávka 5 000 ks priesad. Výsledok zaokrúhlite na stovky nahor.

59. Dámsky sveter bol dvakrát zlacnený. A to najprv o 10 %, potom ešte o 10 % z novej ceny. Jeho konečná cena bola 324 Sk. Vypočítajte pôvodnú cenu svetra.

60. Počet žiakov, ktorí do školy dochádzajú autobusom, k počtu žiakov, ktorí dochádzajú pešo je daný pomerom 2 : 7.
a) Koľkokrát viac žiakov dochádza pešo, než autobusom?
b) Koľko žiakov dochádza do školy pešo, keď autobusom chodí 96 žiakov?
c) Koľko všetkých žiakov má táto škola?

61. Rozhlasový prijímač, ktorého pôvodná cena bola 2 200 Sk zdražel po technickom zdokonalení o 20 %. Neskôr ho o 15 % z novej ceny zlacnili. Aká bola jeho konečná cena?

62. Rozdiel dvoch čísel je 37. Ak delíme väčšie číslo menším, dostaneme podiel 3 a zvyšok 3. Určte obidve čísla.

63. Pracovníci jednej dielne opracovávali počas troch mesiacov rovnaké súčiastky. Ich výkon stúpal tak, že nasledujúci mesiac opracovali o 10 % viac súčiastok ako v predchádzajúcom mesiaci. V poslednom mesiaci opracovali 484 súčiastok.
a) Koľko súčiastok opracovali v prvom mesiaci?
b) Koľko súčiastok opracovali počas troch mesiacov?

64. Meter látky zlacnel o 42 Sk, takže 4 m látky za novú cenu boli o 20 Sk lacnejšie ako 3 m látky za starú cenu. Aká bola pôvodná a aká bola nová cena 1 metra látky?

65. Počet odpracovaných hodín dvoch zamestnancov pri rovnakej hodinovej mzde bol v pomere 4 : 5 . Vypočítajte, koľko dostal každý z nich po zrážke 15 %, ak ich spoločná hrubá mzda bola 5 400 Sk.

66. Sud s pitnou vodou mal hmotnosť 64 kg. Keď z neho prvý deň spotrebovali 28 % vody a druhý deň tretinu zo zvyšku množstva vody, bola jeho hmotnosť 38 kg.
a) Akú hmotnosť mal prázdny sud?
b) Koľko kilogramov vody v ňom bolo?

67. Na jednom úseku novovybudovanej cesty kladú dva stroje s rôznou výkonnosťou živičný koberec. Položenie živičného koberca by trvalo jedným strojom 78 hodín, druhým menej výkonným, by trvalo 91 hodín. Ako dlho bude trvať práca pri súčasnom nasadení oboch strojov.

68. Pavol mal do školy dosť ďaleko. Keď prišiel na okraj námestia, odbilo na veži 7 hodín. To mal za sebou štvrtinu cesty. Keď prechádzal okolo kostola, ukazovali hodiny 7 hodín a päť minút. To mal za sebou tretinu cesty.
a) O koľkej hodine prišiel do školy?
b) Kedy vyšiel z domu?
c) Ako dlho išiel do školy?

69. Aká vysoká je rozhľadňa? Keby bol každý schod o 3 cm nižší, bolo by ich na rozhľadňu o 60 viac. Keby bol zase o 3 cm vyšší, bolo by ich o 40 menej, než ich je teraz v skutočnosti.

70. Polovicu povrázka spotrebovala matka na balenie, polovicu zvyšku si vzal syn, polovicu zo zvyšku spotreboval otec a dve pätiny z toho, čo zostalo si vzala dcéra. Zostalo 30 cm povrázka. Aký dlhý bol povrázok pôvodne?

71. V akváriu tvaru kvádra s rozmermi dna 35 cm, 250 mm je 17,5 litra vody. Ako vysoko je voda v akváriu?

72. Pavol mal vrecúško lieskových orieškov. Chcel sa s nimi podeliť so svojimi kamarátmi. Keby im dal po 30 orieškoch, zostalo by mu 62 orieškov. Keby im dal po 40 orieškoch, chýbalo by mu 8 orieškov. Koľko mal Pavol kamarátov a koľko bolo orieškov vo vrecúšku?

73. Spoločnosť piatich ľudí má priemerný vek 46 rokov. Priemerný vek prvých štyroch nich je 43 rokov. Koľko rokov má piaty?

74. Dvaja súrodenci si chceli kúpiť pastelky. V papiernictve zistili, že jednému z nich chýba 15 Sk, druhému 2 Sk. Ani vtedy, keď dali peniaze dokopy, si pastelky nemohli kúpiť.
a) Koľko korún stáli pastelky?
b) Koľko korún mal každý zo súrodencov?

75. Nádoba s vodou mala hmotnosť 11 kg. Po odliatí polovice množstva vody bola jej hmotnosť 6 kg. Vypočítajte hmotnosť prázdnej nádoby.

76. V dvoch sudoch je spolu 140 litrov vody. Keby sme odliali z prvého suda 26 l a z druhého 60 l vody, bolo by v prvom sude dvakrát viac ako v druhom. Koľko litrov vody je v každom sude?

77. V šiestej a siedmej triede je spolu 58 žiakov, v šiestej a ôsmej triede je celkom 57 žiakov, v siedmej a ôsmej triede je 59 žiakov. Vypočítajte, koľko žiakov je:
a) vo všetkých triedach spolu,
b) v jednotlivých triedach.

78. Reorganizáciou sa zmenšil počet pracovných síl v podniku o jednu osminu. Pracovný pomer bol ukončený so 40 zamestnancami. Koľko zamestnancov pracuje v podniku po reorganizácii?

79. Výherného zájazdu do Paríža sa zúčastnilo 48 osôb. Rodinných príslušníkov bolo o 4 viac než osôb, ktoré zájazd vyhrali. Osôb, ktoré síce nevyhrali, ale zájazd si od niektorého z výhercov odkúpili, bolo o 6 menej ako je polovica cestujúcich v autobuse. Koľko výhercov sa zúčastnilo zájazdu?

80. Pani Nováková dávala do albumu fotografie z dovolenky. Keby umiestnila na každú stranu dve fotografie, zostalo by jej 11 fotografií. Keby dala na každú stranu 3 fotografie, zostali by jej 3 stránky prázdne.
a) Koľko fotografií majú Novákovci z dovolenky?
b) Koľko stránok má album?

81. V škatuli máme pavúky a chrobáky. Všetkých je ich 8 a majú spolu 54 nôh. Koľko je ktorých, keď pavúk má 8 a chrobák 6 nôh?

82. Z výskumného ústavu boli prepustené dve sedminy zamestnancov. V ústave zostalo pracovať 80 zamestnancov.
a) Koľko zamestnancov mal ústav pôvodne?
b) Koľko vedeckých pracovníkov zostalo v ústave, ak ich odišlo 14, čo je štvrtina ich pôvodného počtu?

83. Ovocný sad budovali počas troch rokov. V druhom roku vysadili o 15 % viac stromčekov ako v prvom roku a v treťom roku vysadili o 40 % menej stromčekov ako v prvom a druhom roku spolu. Celkom vysadili 4 128 stromčekov. Koľko stromčekov vysadili v jednotlivých rokoch?

84. Poľnohospodársky podnik zožal 300 ton obilia. Z toho bolo 13 ton jačmeňa, pšenice bolo o 250 % viac ako ovsa a raže bolo o 40 % viac než pšenice. Koľko ton ovsa, koľko ton pšenice a koľko ton raže zožal poľnohospodársky podnik?

85. Záhradník sadí do pripravených riadkov na záhone priesady karfiolu. Ak ich zasadí do riadka sedem, zvýši na posledný riadok iba jedna priesada. Ak ich zasadí do riadka šesť, nebude mať miesto pre jednu priesadu.

a) Koľko je riadkov na záhone?

b) Koľko priesad karfiolu má záhradník?

86. Dva vlaky vyšli súčasne oproti sebe zo staníc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, vzdialených 600 km. Prvý prišiel do stanice $\boldsymbol{A}$ o tri hodiny skôr než druhý do stanice $\boldsymbol{B}$. Za čas, v ktorom prvý prešiel 250 km, prešiel druhý vlak 200 km. Vypočítajte rýchlosť oboch vlakov.

87. Auto prešlo cestu z $\boldsymbol{M}$ do $\boldsymbol{K}$ dlhú 360 km. Na spiatočnej ceste, z $\boldsymbol{K}$ do $\boldsymbol{M}$, šofér zvýšil priemernú rýchlosť o $\frac{1}{3}$ pôvodnej priemernej rýchlosti, preto mu cesta späť trvala o 1 h a 15 min menej ako z $\boldsymbol{M}$ do $\boldsymbol{K}$. Aká bola pôvodná rýchlosť auta?

88. Turista prešiel po vyasfaltovanej ceste na bicykli 28 km a 25 km po prašnej ceste, za 3 hodiny a 36 minút. Akou rýchlosťou prešiel turista obidva úseky cesty, ak po vyasfaltovanej išiel 1,4-krát rýchlejšie ako po prašnej ceste?

89. Vetroň vzlietol nad letisko o 10.00 h a letel k určenému cieľu vzdialenému 302 km rýchlosťou 80 km za hodinu. O jeden a pol hodiny neskôr vzlietlo za ním motorové lietadlo rýchlosťou 180 km za hodinu. Kedy dostihne motorové lietadlo vetroň a v akej vzdialenosti od cieľa?

90. Na cyklistických pretekoch vyštartuje o 10 h z mesta $\boldsymbol{A}$ peletón cyklistov. Do cieľa majú 225 km. Prvej skupine namerali rýchlosť 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Z cieľa vyjde oproti nim o 11.30 h osobné auto priemernou rýchlosťou 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kedy stretne osobné auto prvú skupinu cyklistov a v akej vzdialenosti od cieľa?

91. Rýchlik prejde vzdialenosť od východiskovej po konečnú stranicu za 4 hodiny a 20 minút. Osobný vlak, ktorého priemerná rýchlosť je o 30 km menšia, prejde túto vzdialenosť za 7 hodín 40 minút. Aká je priemerná rýchlosť rýchlika a aká osobného vlaku?

92. Keď rozložíme číslo 96 na súčin prvočísel, dostaneme:
A 3 . 2 . 2 . 2 . 2 . 1 **C** 6 . 2 . 2 . 2 . 2 **E** 3 . 2 . 2 . 2 . 4 . 1
B 3 . 2 . 2 . 2 . 2 . 4 **D** 3 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2

93. Rozdeľte 80 súťažiacich do skupín s rovnakým počtom. Koľko je rôznych rozdelení?
A 10 **B** 8 **C** 6 **D** 9 **E** 11

94. Zo zastávky číslo 7 odišli súčasne modrá a červená električka. Kým sa červená opäť dostane na zastávku číslo 7, uplynie 1 h 40 min. Modrá príde za 1 h 20 min. Koľkokrát sa v čase od 6.00 h do 22.00 h stretnú obidve električky na zastávke číslo 7?
A 3-krát **B** 4-krát **C** 7-krát **D** 2-krát **E** 5-krát

95. V triede je 32 žiakov, z toho 18 dievčat. Dve z nich odišli. Pomer chlapcov a dievčat v triede je:
A 7 : 9 **B** 9 : 7 **C** 7 : 8 **D** 8 : 7 **E** žiadna z možností

96. Veľkosti strán v trojuholníku s obvodom 108 cm sú v pomere 3 : 4 : 5. Veľkosti strán sú dané v centimetroch.
A 29, 34, 45 **B** 27, 36, 45 **C** 30, 33, 45 **D** 40, 41, 27 **E** 30, 36, 42

97. Banka má na kurzovom liste vypísané 1 USD – nákup 49,97 Sk – predaj 51,30 Sk.
a) Koľko Sk dostaneme, ak ponúkneme banke 500 US dolárov?
b) Koľko US dolárov by sme dostali za 10 000 Sk (bez poplatku)?

98. Dvojnásobok čísla 4^{152} je
A 8^{152} **B** 4^{304} **C** 2^{305} **D** 8^{304} **E** žiadna z možností

99. Upravte výraz $\left[\left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 . (3xy)^3\right]^2$.

100. $(10^3)^2$ mm je **A** 1 m **B** 1 km **C** 100 m **D** 10 m **E** 1 000 cm

101. Na školskom výlete bolo z celej triedy 24 žiakov. Zo $\frac{4}{7}$ všetkých dievčat nešla $\frac{1}{4}$. Keďže chlapci išli všetci, bol na výlete rovnaký počet chlapcov a dievčat. Koľko je v triede žiakov? Koľko je chlapcov?

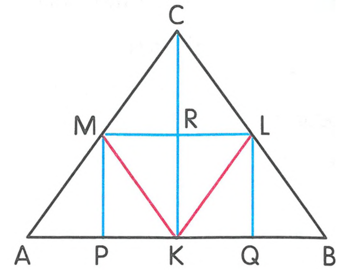
102. Ak k neznámemu číslu pričítame jeho štvrtinu a výsledok vynásobíme $\frac{1}{7}$ dostaneme číslo 8. Aké je neznáme číslo?

103. Súčet dvoch neznámych čísel sa rovná $\frac{1}{2}$, ich rozdiel je $-\frac{2}{9}$. O ktoré čísla ide?

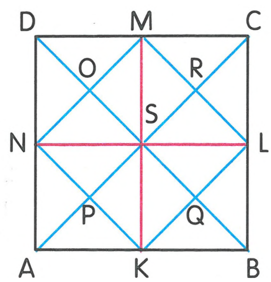
104. Narysujte štvorec *ABCD* so stranou $a = 6$ cm a rozdeľte ho aspoň dvoma rôznymi spôsobmi na:
a) 4 zhodné trojuholníky,
b) 8 zhodných trojuholníkov.

105. Narysujte obdĺžnik *KLMN* (|*KL*| = 6 cm, |*LM*| = 4 cm) a rozdeľte ho na:
a) 6 zhodných trojuholníkov,
b) 3 zhodné trojuholníky.

106. Rovnoramenný trojuholník *ABC* je rozdelený na zhodné trojuholníky. Popíšte ich. Pre každý z nich určte, z koľkých takých trojuholníkov možno zostaviť trojuholník *ABC.*



107.



Štvorec *ABCD* je rozdelený na zhodné geometrické útvary. Popíšte ich a určte, koľko zhodných útvarov toho istého typu potrebujeme na zostavenie štvorca *ABCD.*

108. Nakreslite na štvorčekovaný papier pravouhlý trojuholník s odvesnami 1 cm a jeho obrazy v podobnostiach s pomermi podobnosti 2:1, 3:1, 4:1 a 5:1.

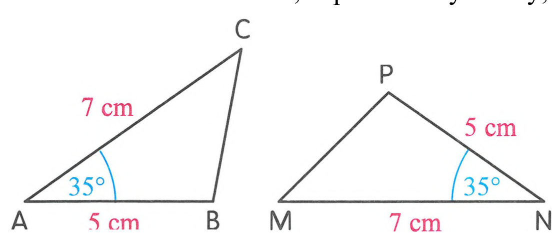
109. Nakreslite na štvorčekovaný papier dva podobné obdĺžniky.

110. Nakreslite na štvorčekovaný papier dva podobné lichobežníky.

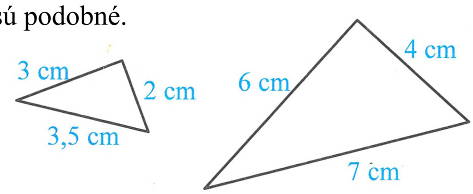
111. Nakreslite na štvorčekovaný papier dva podobné štvoruholníky.

112. Vyslovte vety:
a) o zhodnosti trojuholníkov,
b) o podobnosti trojuholníkov.

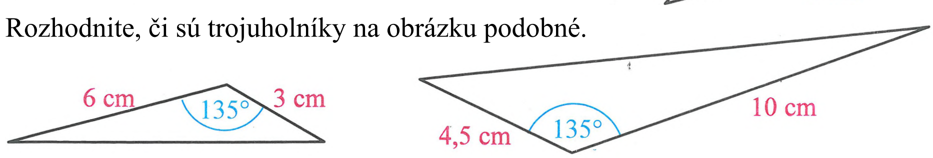
113. Rozhodnite, či trojuholníky na obrázku sú zhodné. Ak áno, zapíšte strany a uhly, ktoré si v zhodnosti odpovedajú.



114. Rozhodnite, či trojuholníky na obrázku sú podobné.

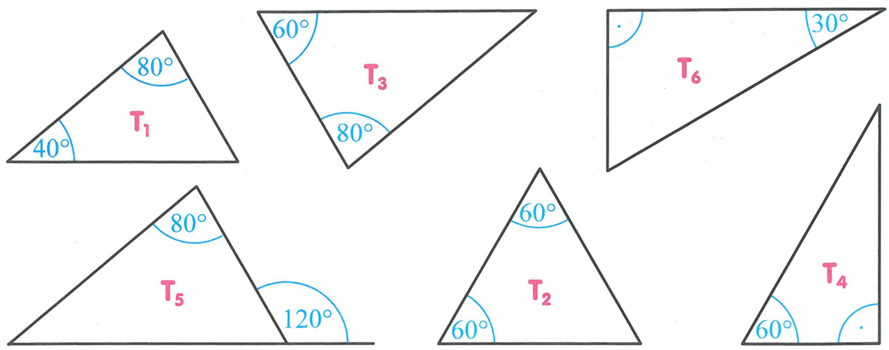


115. Rozhodnite, či sú trojuholníky na obrázku podobné.



116. Výška na preponu delí ľubovoľný pravouhlý trojuholník na dva podobné trojuholníky. Platí uvedené tvrdenie? Ak áno, odôvodnite.

117. Na obrázku sú narysované trojuholníky. Vyhľadajte medzi nimi všetky dvojice (trojice...) podobných trojuholníkov.



118. Zistite, či sú trojuholníky ABC, $A'B'C'$ podobné, ak

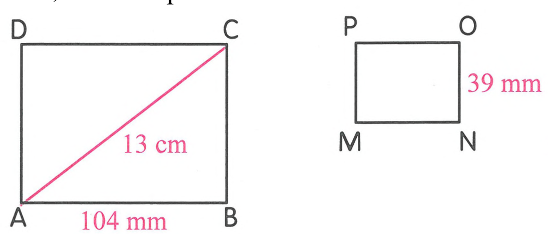
a) $a = 18$ cm, $b = 24$ cm, $|\sphericalangle ACB| = 100°$
   $a = 9$ cm, $c' = 12$ cm, $|\sphericalangle C'A'B'| = 100°$

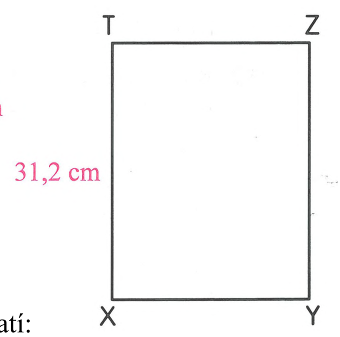
b) $a = 160$ mm, $c = 120$ mm, $|\sphericalangle CBA| = 56°$
   $c' = 30$ mm, $b' = 40$ mm, $|\sphericalangle C'A'B'| = 56°$

119. Úsečku AB ($|AB| = 13$ cm) rozdeľte na 7 zhodných úsečiek.

120. Narysujte tupouhlý trojuholník ABC a zmenšite ho v pomere 5 : 8.

121. Na obrázku doplňte chýbajúce údaje tak, aby bolo zrejmé, že obdĺžniky *ABCD, MNOP, XYZT* sú podobné.





122. Narysujte štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 4 cm.
Zostrojte množinu všetkých bodov X, pre ktoré platí:

a) sú rovnako vzdialené od bodu A a od bodu B ($|AX| = |BX|$),

b) sú rovnako vzdialené od bodu A a od bodu C ($|AX| = |CX|$),

c) sú vzdialené aspoň 3 cm od bodu D ($|DX| \geq 3$ cm),

d) sú vzdialené najviac 4 cm od bodu C ($|CX| \leq 4$ cm).

123. Narysujte rovnostranný trojuholník ABC so stranou dĺžky 6 cm. Zostrojte množinu všetkých jeho bodov, pre ktoré platí:

a) sú vzdialené aspoň 3 cm od každého z jeho vrcholov,

b) nie sú vzdialené viac ako 5 cm od žiadneho z jeho vrcholov,

c) sú vzdialené od každého ž vrcholov aspoň 2 cm.

124. Zostrojte trojuholník *ABC,* ak je daná strana a, strana c a uhol α.

125. Zostrojte pravouhlý trojuholník *ABC* s preponou dĺžky 6 cm a odvesnou dĺžky 4 cm.

126. Zostrojte trojuholník *ABC,* ak je daná strana $c = 6$ cm, ťažnica $t_c = 1$ cm a výška $v_c = 4$ cm.

127. Zostrojte trojuholník *MNP,* ak je dané $|MN| = 6$ cm, $|NP| = 4$ cm, výška na stranu *MV* je 3 cm.

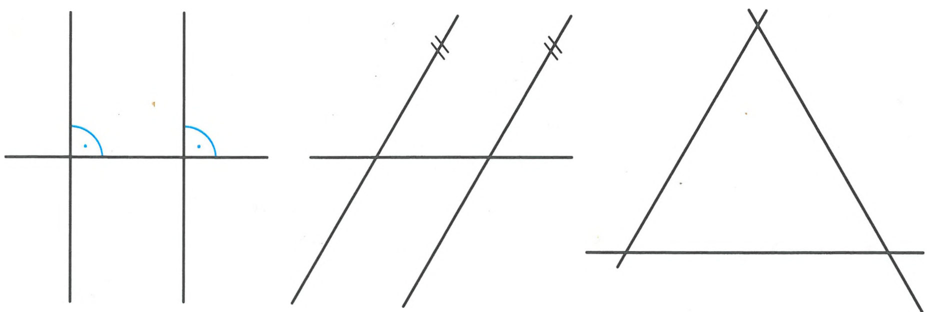
128. Zostrojte štvoruholník *ABCD,* ak sú dané dĺžky jeho strán $|AB| = a = 8$ cm, $|BC| = b = 4$ cm, $|CD| = c = 6$ cm a uhlopriečok $|AC| = e = 7$ cm, $|BD| = f = 9$ cm.

129. Zostrojte lichobežník *ABCD,* ak sú dané dĺžky jeho strán $|AB| = a = 5{,}5$ cm, $|BC| = b = 4{,}5$ cm a uhlopriečok $|AC| = e = 5$ cm, $|BD| = f = 7$ cm.

130. Zostrojte kružnicu vpísanú a opísanú danému trojuholníku.

131. Sú dané rôznobežné priamky $m, n,$ ktoré určujú uhol 60°. Zostrojte všetky kružnice s polomerom 3 cm, ktoré sa dotýkajú priamok $m, n.$

132. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú daných priamok.



133. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú daných dvoch sústredných kružníc a prechádzajú daným bodom.

134. Zostrojte rovnoramenný trojuholník *MNO* so základňou *MN,* pre ktorý platí:

a) $|MN| = 5{,}2$ cm, $|\sphericalangle OMN| = 45°$,
b) $|MO| = 4{,}2$ cm, $|\sphericalangle MON| = 75°$,
c) $|MN| = 5$ cm, $v_o = 8$ cm,
d) $|MO| = 4$ cm, $v_m = 3$ cm.

135. Na záhrade s výmerou 800 m^2 je vybudovaný kruhový bazén s priemerom 6 m a hĺbkou 1,2 m. Vypočítajte:

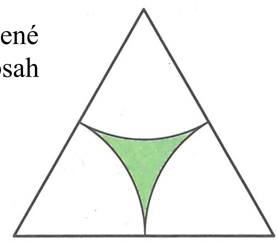
a) koľko m^2 záhrady zaberá tento bazén,
b) koľko Sk treba zaplatiť za vodu, ktorá bazén naplní na $\frac{5}{6}$, keď za 1 m^3 vody sa platí 14 Sk vodného a 6,50 Sk stočného?

136. Prenájom 1 m^2 reklamnej tabule stojí 780 Sk mesačne. Reklamná tabuľa tvaru obdĺžnika má dĺžku 3 m a jej uhlopriečka zviera s dlhšou stranou uhol veľkosti 34°.

a) Vypočítajte, koľko Sk podnikateľ zaplatí za 4 mesiace prenájmu tabule.

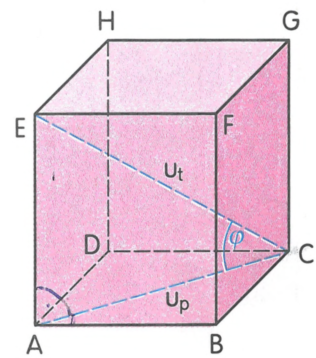
b) Narysujte reklamnú tabuľu v mierke 1 : 50.

137. Okolo vrcholov rovnostranného trojuholníka sú zostrojené oblúky kružníc s polomerom r = 4 cm. Vypočítajte obsah vyfarbenej časti.



138. Tabuľku prekreslite do zošita a doplňte.

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
3			
	1		
		3 000	
			5 000 000
0,1			

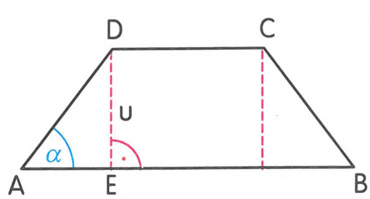


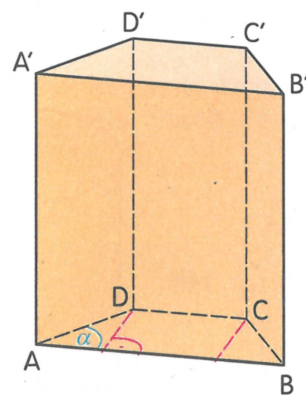
139. Daný je pravidelný štvorboký hranol *ABCDEFGH* s podstavnou hranou dĺžky 5 cm a veľkosť uhla φ, ktorý určuje telesová uhlopriečka *EC* a uhlopriečka *AC,* je 55°. Vypočítajte

a) objem,

b) povrch daného hranola.

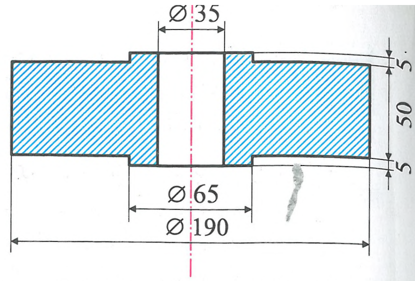
140. Vypočítajte povrch štvorbokého hranola, ktorého podstava je rovnoramenný lichobežník *ABCD* so základňami a = 11 cm, c = 5 cm, veľkosť uhla ramena s dlhšou základňou je α = 53°. Výška hranola v = 12 cm.

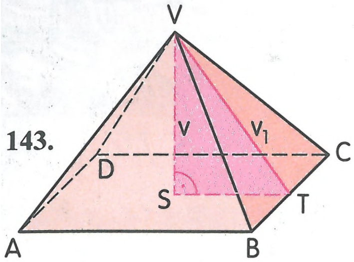




141. Rovnostranný valec (valec, ktorého výška sa rovná priemeru podstavy) má povrch S = 650 cm^2. Vypočítajte jeho polomer, výšku a objem.

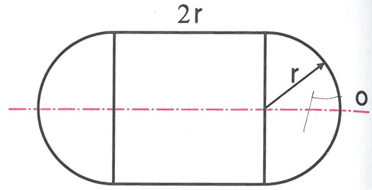
142. Vypočítajte objem kolesa, ktorého osový rez je na obrázku (rozmery sú v mm, ∅ je značka priemeru).

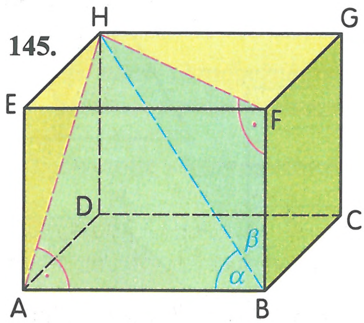




143. Vypočítajte povrch pravidelného štvorbokého ihlana s podstavnou hranou dĺžky $a = 10$ cm a výškou $v = 7$ cm.

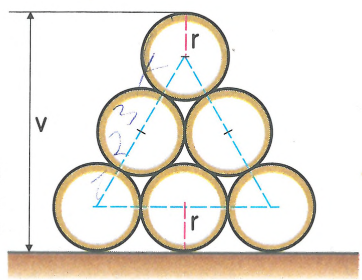
144. Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré vznikne rotáciou štvorca a dvoch polkruhov s polomerom r okolo osi o.



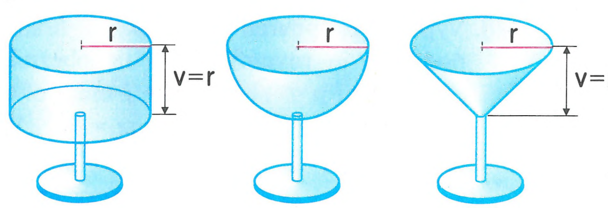


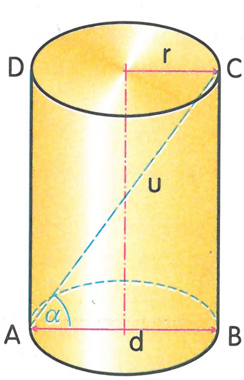
145. Vypočítajte povrch a objem kvádra $ABCDEFGH$, ak je daná dĺžka jeho uhlopriečky $|BH| = 4{,}5$ cm. Veľkosť uhlov tejto uhlopriečky s hranou AB je $|\sphericalangle ABH| = \alpha = 45°$, s hranou BF je $|\sphericalangle FBH| = \beta = 60°$.

146. Šesť valcových rúr s vonkajším priemerom 2 dm má byť položených na seba tak, ako je to na obrázku. Aká bude výška celej tejto skládky?



147. Mišo, Jakub a Peťo si pri oslave narodenín pripíjali pohármi rôznych tvarov. Ktorý z pohárov má najväčší objem?



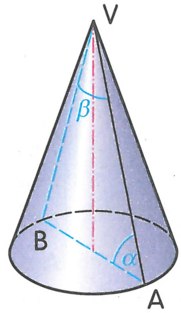


148. Daný je rotačný valec. Jeho osovým rezom je obdĺžnik $ABCD$. Pri použití označenia podľa obrázka vypočítajte:

a) obsah plášťa, ak $d = 40$ cm, $u = 41$ cm;
b) povrch valca, ak $v = 1{,}8$ dm, $\alpha = 30°$;
c) objem valca, ak $r = 34$ mm, $\alpha = 55°$.

149. Do nádoby tvaru valca s polomerom podstavy 14 cm a výškou 0,25 m vsunuli rovnako vysoký celokovový valec s polomerom 1,2 dm. Zvyšný priestor v nádobe naplnili vodou. Koľko decilitrov vody použili?

150. V kuželi je vyznačený $\Delta\ ABV$, ktorého jedna strana má veľkosť priemeru podstavy, jeho výška je súčasne výška kužeľa, jedna strana je súčasne strana kužeľa. Ďalej sú v ňom vyznačené uhly α a β.



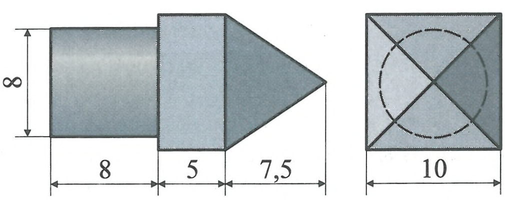
V tabuľke sú uvedené údaje pre kužeľ. Doplňte chýbajúce údaje.

Priemer podstavy	Výška	Dĺžka strany	α	β	Povrch	Objem
18 cm	mm	dm	30°		cm^2	mm^3
1,2 dm	cm	mm		64°	mm^2	cm^3
mm	cm	2,5 dm	75°		cm^2	1 liter
cm	1,1 dm	cm		40°	dm^2	cm^3

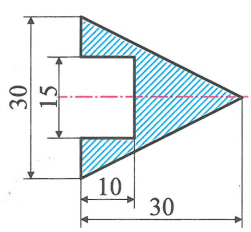
151. Tabuľové sklo má hustotu 2 400 $\frac{kg}{m^3}$. Aká je hmotnosť sklenenej dosky na písacom stole, ak sklo má hrúbku 3 mm a rozmery sklenenej dosky sú 90 cm, 50 cm?

152. Bubon v sušičke má tvar valca s priemerom podstavy 32 cm a výškou 36 cm. Vypočítajte sušiacu plochu (plášť valca).

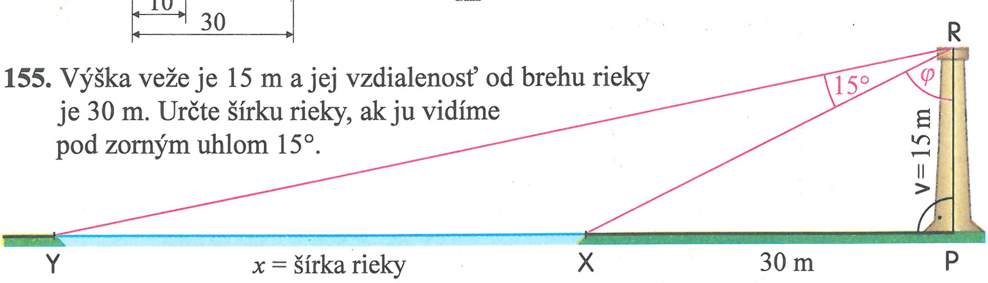
153. Vypočítajte hmotnosť oceľovej súčiastky (na obrázku). Hustota použitej ocele je 7,85 $\frac{kg}{dm^3}$. Rozmery sú uvedené v centimetroch.



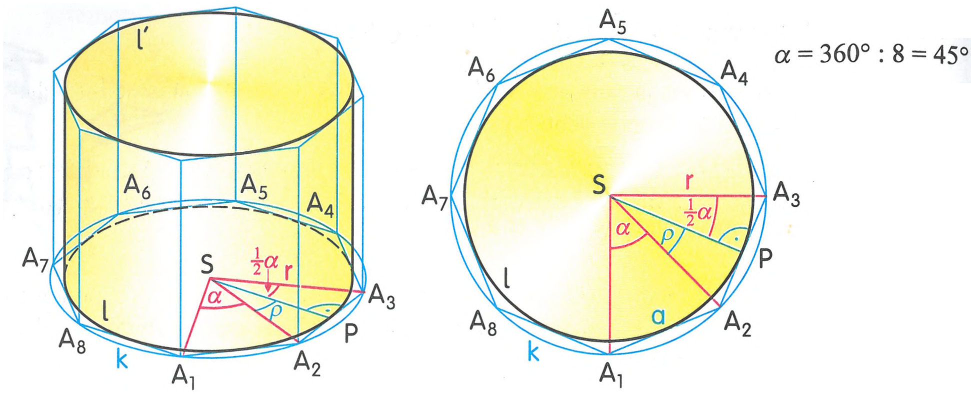
154. Vypočítajte hmotnosť oceľového otočného hrotu, ktorý je znázornený na obrázku. Hrot je vyrobený z ocele s hustotou 7,85 $\frac{kg}{dm^3}$. Rozmery sú uvedené v mm.



155. Výška veže je 15 m a jej vzdialenosť od brehu rieky je 30 m. Určte šírku rieky, ak ju vidíme pod zorným uhlom 15°.



156. Vypočítajte objem a povrch valca vpísaného do pravidelného osembokého hranola s podstavnou hranou dĺžky $a = 15{,}2$ cm. Výška hranola je $v = 2{,}24$ dm.

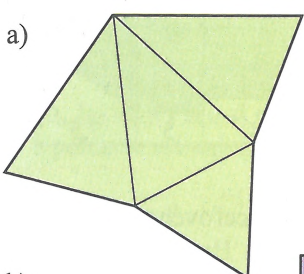


157. Vypočítajte výšku rozhľadne, keď z jej vrcholu vidíme kameň ležiaci 60 m od jej päty pod hĺbkovým uhlom 44°.

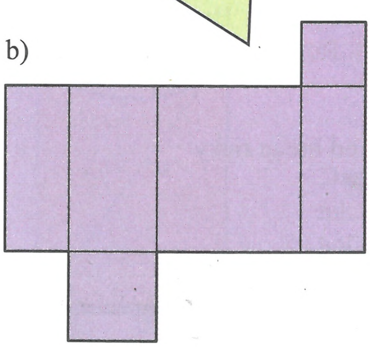
158. Akú dĺžku má tetiva v kružnici s polomerom $r = 4$ cm, ktorej prislúcha stredový uhol veľkosti 72°?

159. Rozhodnite, či rovinné útvary na obrázkoch sú siete ihlanu, hranola, kužeľa, valca:

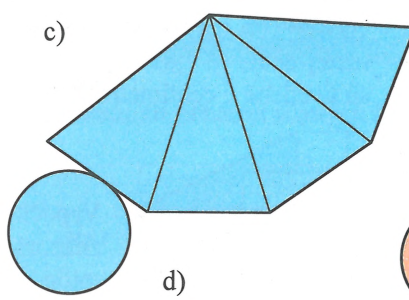
a)



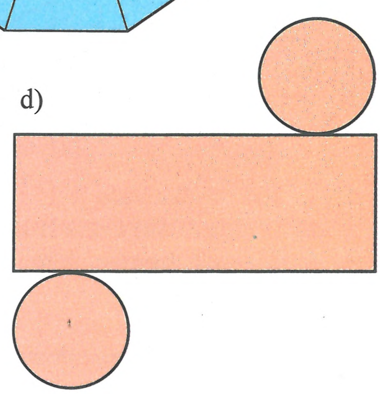
b)



c)



d)



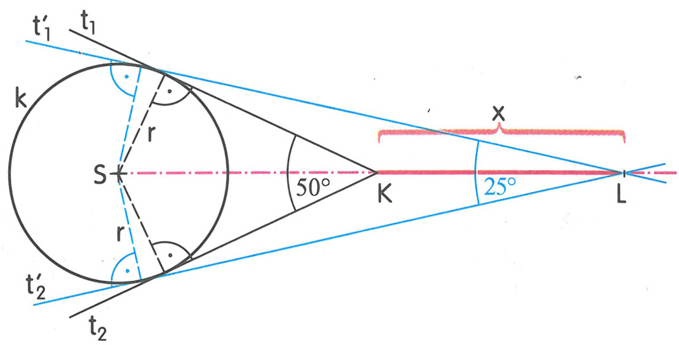
160. Vypočítajte hmotnosť oceľovej gule s polomerom 40 mm. Guľa je vyrobená z ocele hustoty $7{,}85\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

161. Určte objem kocky (gule), ak jej povrch je 1 m^2.

162. Aký vysoký je valec, ktorého obsah plášťa sa rovná obsahu jeho podstavy? Vypočítajte aj jeho objem.

163. Šírka rieky je 80 m. Z terénnych dôvodov sa most cez rieku odkláňa od kolmice na breh o uhol veľkosti 14°30'. Vypočítajte, o koľko metrov je most nad riekou dlhší než šírka rieky.

164. Kruh s polomerom $r = 5$ cm vidíme z bodu K v rovine kruhu pod zorným uhlom $\alpha = 50°$. O koľko centimetrov sa musíme vzdialiť od stredu kruhu, aby zorný uhol bol polovičný?

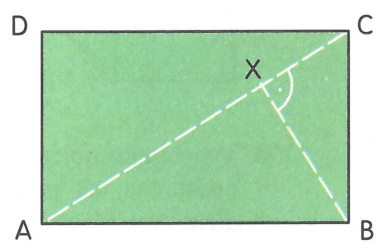


165. V pravouhlom trojuholníku PQR s pravým uhlom pri vrchole Q sa $|\sphericalangle QRP| = 30°$, $|PQ| = 6$ cm. Vypočítajte polomer kružnice opísanej trojuholníku PQR.

166. Vyjadrite obsah pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C pomocou veľkosti jeho ostrého uhla α a dĺžky odvesny protiľahlej k uhlu α.

167. Lanom dlhým 10 m chceme ohraničiť obdĺžnik, ktorého uhlopriečky spolu zvierajú uhol s veľkosťou $\alpha = 30°$ (45°, 60°). Vypočítajte rozmery tohto obdĺžnika.

168. Vo vnútri záhrady tvaru obdĺžnika s rozmermi 40 m a 25 m určte miesto, kam možno postaviť altánok tak, aby stál na spojnici dvoch protiľahlých vrcholov a bol čo najmenej vzdialený od jedného zo zvyšných vrcholov záhrady.

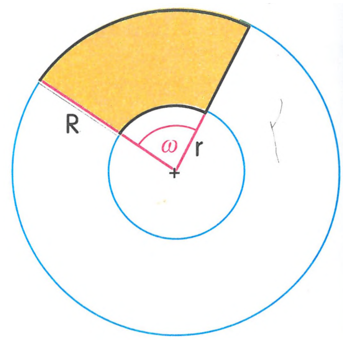


169. Určte aspoň päť pravidelných mnohouholníkov, ktoré sú súmerné:
a) podľa stredu,
b) podľa osi (určte aj počet osí súmernosti).

170. Dokážte, že úsečka, ktorá spája stredy základní lichobežníka, delí tento lichobežník na dve časti s rovnakým obsahom.

171. Dokážte: Obsah pravidelného n-uholníka sa rovná obsahu trojuholníka, ktorého dĺžka základne sa rovná obvodu n-uholníka a jeho výška sa rovná polomeru Kružnice n-uholníku opísanej.

172. Odvoďte vzorec pre obsah výseku medzikružia, ktoré na kružniciach s polomermi R a r prislúcha stredovému uhlu ω.



173. Dokážte, že stredné priečky ľubovoľného štvoruholníka sú stranami rovnobežníka.

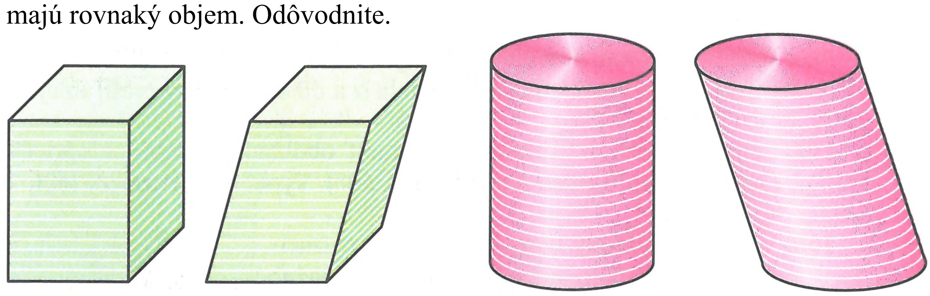
174. Dokážte: V ľubovoľnom rovnobežníku $ABCD$ delia úsečky AP, AQ uhlopriečku DB na tri zhodné časti. P je stred strany DC, Q je stred strany BC.

175. Dokážte, že stredná priečka ľubovoľného lichobežníka so základňami a, c má dĺžku $\frac{1}{2}(a + c)$.

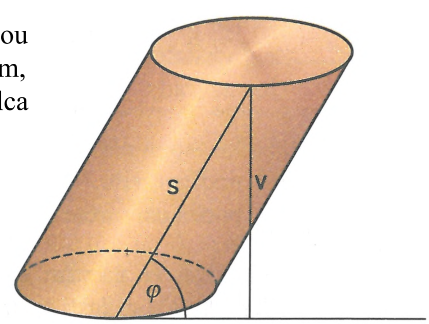
176. Dokážte, že zo vzťahu $a^2 + b^2 = c^2$ pre dĺžky strán pravouhlého trojuholníka ABC s vnútornými ostrými uhlami α, β vyplýva:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

177. Ak majú dva hranoly (alebo dva valce) rovnaké podstavy a rovnakú výšku, potom majú rovnaký objem. Odôvodnite.

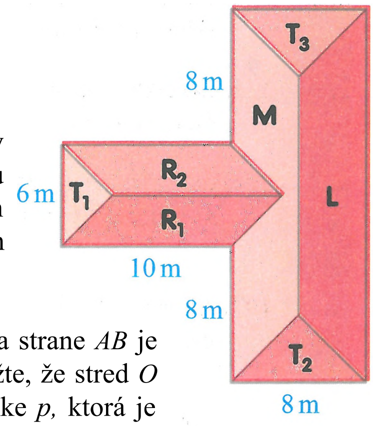


178. Vypočítajte objem šikmého valca s kruhovou podstavou, ak polomer podstavy $r = 3$ cm, dĺžka strany $s = 8$ cm a odchýlka strany valca od roviny podstavy je $\varphi = 30°$.



ROZUM DO HRSTI

Milí deviataci, dostávate posledný už desiaty súbor úloh, ktorých riešenie vyžaduje väčšiu sústredenosť a vytrvalosť. Sme presvedčení, že aj túto skupinu úloh so záujmom vyriešite. Spolu s vami sa z toho tešíme. Prajeme vám veľa úspechov a chuti do práce.



1. Na obrázku je zobrazený pôdorys strechy, rozmery sú uvedené v metroch. Všetky strešné plochy majú rovnaký spád, pričom nižší hrebeň je vo výške 2 m nad rovinou odkvapov. Vypočítajte celkový povrch strechy.

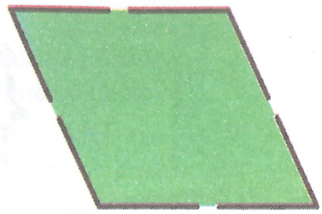
2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC ($AB > BC$). Na strane AB je vyznačený bod X, pre ktorý platí $AX \cong CX$. Dokážte, že stred O kružnice vpísanej trojuholníku XCB leží na priamke p, ktorá je rovnobežná so stranou AC a prechádza bodom X.

3. Nájdite najmenšie šesťciferné číslo s navzájom rôznymi číslicami, ktoré má tieto dve vlastnosti:
a) je deliteľné číslom 72,
b) v jeho desatinnom zápise sa nevyskytujú číslice 0, 8, 9.

4. Nájdite aspoň jedno prirodzené číslo n, pre ktoré platí $\frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5}$.

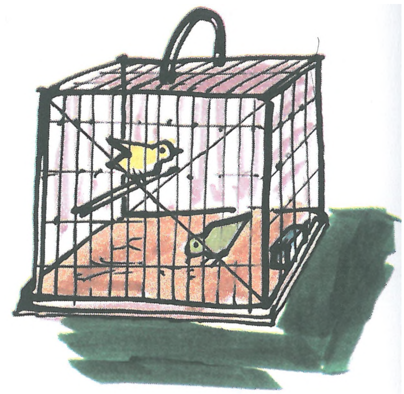
5. Známe je, že 80 % mužov má výšku aspoň 170 cm, 85 % mužov má hnedé vlasy, 90 % má aspoň 70 kg a 95 % nenosí fúzy. Koľko percent mužov má zaručene všetky tieto vlastnosti?

6. V ostrouhlom trojuholníku ABC je z vrcholu C spustená výška, z vrcholu B vychádza ťažnica a z vrcholu A os vnútorného uhla. Ich priesečníky sú vrcholy trojuholníka MNP. Dokážte, že trojuholník MNP nemôže byť rovnostranný.

7. 

Naša záhrada má tvar konvexného štvoruholníka, ktorý má každú stranu dlhú 100 m. V strede každej strany je bránka. Dokážte, že z ľubovoľného miesta záhrady je k najbližšej bránke najviac 50 m.

8. V klietke tvaru kocky *ABCDEFGH* sú dve tyče *CF* a *AH* a krmítko v strede hrany *AB s* dĺžkou 40 cm. Žltý kanárik letel z *K* najkratšou cestou na tyčku *AH,* odtiaľ najkratšou cestou na tyčku *CF* a späť do bodu *K.* Zelený kanárik letel obrátene z *K* najkratšou cestou na CF, potom najkratšou cestou na *AH* a späť do *K.* Vypočítajte, ktorý kanárik preletel kratšiu dráhu a o koľko centimetrov?



9. Pravidelný šesťuholník *ABCDEF* so stranou a = 6 cm je rozdelený úsečkami *AM* a *DN* (kde *M*, *N* sú stredy strán *DE* a *AB)* na 3 časti. Porovnajte obsahy všetkých troch častí.

10. Vypočítajte dĺžky strán pytagorejských trojuholníkov, ktorých jedna odvesna má dĺžku 12 cm.

Genialita je percento inšpirácie a deväťdesiatdeväť percent vytrvalosti.

T. A. Edison

TABUĽKA HODNÔT FUNKCIE SÍNUS

0° – 30°

sin

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0	0,000 0	002 9	005 8	008 7	011 6	014 5
1	017 5	020 4	023 3	026 2	029 1	032 0
2	034 9	037 8	040 7	043 6	046 5	049 4
3	052 3	055 2	058 1	061 0	064 0	066 9
4	069 8	072 7	075 6	078 5	081 4	084 3
5	0,087 2	090 1	092 9	095 8	098 7	101 6
6	104 5	107 4	110 3	113 2	116 1	119 0
7	121 9	124 8	127 6	130 5	133 4	136 3
8	139 2	142 1	144 9	147 8	150 7	153 6
9	156 4	159 3	162 2	165 0	167 9	170 8
10	0,173 6	176 5	179 4	182 2	185 1	188 0
11	190 8	193 7	196 5	199 4	202 2	205 1
12	207 9	210 8	213 6	216 4	219 3	222 1
13	225 0	227 8	230 6	233 4	236 3	239 1
14	241 9	244 7	247 6	250 4	253 2	256 0
15	0,258 8	261 6	264 4	267 2	270 0	272 8
16	275 6	278 4	281 2	284 0	286 8	289 6
17	292 4	295 2	297 9	300 7	303 5	306 2
18	309 0	311 8	314 5	317 3	320 1	322 8
19	325 6	328 3	331 1	333 8	336 5	339 3
20	0,342 0	344 8	347 5	350 2	352 9	355 7
21	358 4	361 1	363 8	366 5	369 2	371 9
22	374 6	377 3	380 0	382 7	385 4	388 1
23	390 7	393 4	396 1	398 7	401 4	404 1
24	406 7	409 4	412 0	414 7	417 3	420 0
25	0,422 6	425 3	427 9	430 5	433 1	435 8
26	438 4	441 0	443 6	446 2	448 8	451 4
27	454 0	456 6	459 2	461 7	464 3	466 9
28	469 5	472 0	474 6	477 2	479 7	482 3
29	484 8	487 4	489 9	492 4	495 0	497 5
30	0,500 0	502 5	505 0	507 5	510 0	512 5
°	0'	10'	20'	30'	40'	50'

sin

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
30	0,500 0	502 5	505 0	507 5	510 0	512 5
31	515 0	517 5	520 0	522 5	525 0	527 5
32	529 9	532 4	534 8	537 3	539 8	542 2
33	544 6	547 1	549 5	551 9	554 4	556 8
34	559 2	561 6	564 0	566 4	568 8	571 2
35	0,573 6	576 0	578 3	580 7	583 1	585 4
36	587 8	590 1	592 5	594 8	597 2	599 5
37	601 8	604 1	606 5	608 8	611 1	613 4
38	615 7	618 0	620 2	622 5	624 8	627 1
39	629 3	631 6	633 8	636 1	638 3	640 6
40	0,642 8	645 0	647 2	649 4	651 7	653 9
41	656 1	658 3	660 4	662 6	664 8	667 0
42	669 1	671 3	673 4	675 6	677 7	679 9
43	682 0	684 1	686 2	688 4	690 5	692 6
44	694 7	696 7	698 8	700 9	703 0	705 0
45	0,707 1	709 2	711 2	713 3	715 3	717 3
46	719 3	721 4	723 4	725 4	727 4	729 4
47	731 4	733 3	735 3	737 3	739 2	741 2
48	743 1	745 1	747 0	749 0	750 9	752 8
49	754 7	756 6	758 5	760 4	762 3	764 2
50	0,766 0	767 9	769 8	771 6	773 5	775 3
51	777 1	779 0	780 8	782 6	784 4	786 2
52	788 0	789 8	791 6	793 4	7951	796 9
53	798 6	800 4	802 1	803 9	805 6	807 3
54	809 0	810 7	812 4	814 1	815 8	817 5
55	0,819 2	820 8	822 5	824 1	825 8	827 4
56	829 0	830 7	832 3	833 9	835 5	837 1
57	838 7	840 3	841 8	843 4	845 0	846 5
58	848 0	849 6	851 1	852 6	854 2	855 7
59	857 2	858 7	860 1	861 6	863 1	864 6
60	0,866 0	867 5	868 9	870 4	871 8	873 2
°	0'	10'	20'	30'	40'	50'

sin

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
60	0,866 0	867 5	868 9	870 4	871 8	873 2
61	874 6	876 0	877 4	878 8	880 2	881 6
62	882 9	884 3	885 7	887 0	888 4	889 7
63	891 0	892 3	893 6	894 9	896 2	897 5
64	898 8	9001	901 3	902 6	903 8	905 1
65	0,906 3	907 5	908 8	910 0	911 2	912 4
66	913 5	914 7	915 9	917 1	918 2	919 4
67	920 5	921 6	922 8	923 9	925 0	926 1
68	927 2	928 3	929 3	930 4	931 5	932 5
69	933 6	934 6	935 6	936 7	937 7	938 7
70	0,939 7	940 7	941 7	942 6	943 6	944 6
71	945 5	946 5	947 4	948 3	949 2	950 2
72	951 1	952 0	952 8	953 7	954 6	955 5
73	956 3	957 2	958 0	958 8	959 6	960 5
74	961 3	962 1	962 8	963 6	964 4	965 2
75	0,965 9	966 7	967 4	968 1	968 9	969 6
76	970 3	971 0	971 7	972 4	973 0	973 7
77	974 4	975 0	975 7	976 3	976 9	977 5
78	978 1	978 7	979 3	979 9	980 5	981 1
79	981 6	982 2	982 7	983 3	983 8	984 3
80	0,984 8	985 3	985 8	986 3	986 8	987 2
81	987 7	988 1	988 6	989 0	989 4	989 9
82	990 3	990 7	991 1	991 4	991 8	992 2
83	992 5	992 9	993 2	993 6	993 9	994 2
84	994 5	994 8	995 1	995 4	995 7	995 9
85	0,996 2	996 4	996 7	996 9	997 1	997 4
86	997 6	997 8	998 0	998 1	998 3	998 5
87	998 6	998 8	998 9	999 0	999 2	999 3
88	999 4	999 5	999 6	999 7	999 7	999 8
89	999 8	999 9	999 9	1,000 0	1,000 0	1,000 0
90	1,000 0					
°	0'	10'	20'	30'	40'	50'

tg

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0	0,000 0	002 9	005 8	008 7	011 6	014 5
1	017 5	020 4	023 3	026 2	029 1	032 0
2	034 9	037 8	040 7	043 7	046 6	049 5
3	052 4	055 3	058 2	061 2	064 1	067 0
4	069 9	072 9	075 8	078 7	081 6	084 6
5	0,087 5	090 4	093 4	096 3	099 2	102 2
6	105 1	108 0	111 0	113 9	116 9	119 8
7	122 8	125 7	128 7	131 7	134 6	137 6
8	140 5	143 5	146 5	149 5	152 4	155 4
9	158 4	161 4	164 4	167 3	170 3	173 3
10	0,376 3	179 3	182 3	185 3	188 3	191 4
11	194 4	197 4	200 4	203 5	206 5	209 5
12	212 6	215 6	218 6	221 7	224 7	227 8
13	230 9	233 9	237 0	240 1	243 2	246 2
14	249 3	252 4	255 5	258 6	261 7	264 8
15	0,267 9	271 1	274 2	277 3	280 5	283 6
16	286 7	289 9	293 1	296 2	299 4	302 6
17	305 7	308 9	312 1	315 3	318 5	321 7
18	324 9	328 1	331 4	334 6	337 8	341 1
19	344 3	347 6	350 8	354 1	357 4	360 7
20	0,364 0	367 3	370 6	373 9	377 2	380 5
21	383 9	387 2	390 6	393 9	397 3	400 6
22	404 0	407 4	410 8	414 2	417 6	421 0
23	424 5	427 9	431 4	434 8	438 3	441 7
24	445 2	448 7	452 2	455 7	459 2	462 8
25	0,466 3	469 9	473 4	477 0	480 6	484 1
26	487 7	491 3	495 0	498 6	502 2	505 9
27	509 5	513 2	516 9	520 6	524 3	528 0
28	531 7	535 4	539 2	543 0	546 7	550 5
29	554 3	558 1	561 9	565 8	569 6	573 5
30	0,577 4	581 2	585 1	589 0	593 0	596 9
°	0'	10'	20'	30'	40'	50'

tg

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
30	0,577 4	581 2	585 1	589 0	593 0	596 9
31	600 9	604 8	608 8	612 8	616 8	620 8
32	624 9	628 9	633 0	637 1	641 2	645 3
33	649 4	653 6	657 7	661 9	666 1	670 3
34	674 5	678 7	683 0	687 3	691 6	695 9
35	0,700 2	704 6	708 9	713 3	717 7	722 1
36	726 5	731 0	735 5	740 0	744 5	749 0
37	753 6	758 1	762 7	767 3	772 0	776 6
38	781 3	786 0	790 7	795 4	800 2	805 0
39	809 8	814 6	819 5	824 3	829 2	834 2
40	0,839 1	844 1	849 1	854 1	859 1	964 2
41	869 3	874 4	879 6	884 7	889 9	895 2
42	900 4	905 7	911 0	916 3	921 7	927 1
43	932 5	938 0	943 5	949 0	954 5	960 1
44	965 7	971 3	977 0	982 7	988 4	994 2
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
°	0'	10'	20'	30'	40'	50'

tg

°	0'	10'	20'	30'	40'	50'
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77
90	nedef.					
°	**0'**	**10'**	**20'**	**30'**	**40'**	**50'**

VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ

5 Goniometria ostrého uhla

5.1 Pravouhlý trojuholník, podobnosť trojuholníkov

Úlohy: **1.a)** prepona; **b)** $\alpha + \beta = 90°$; **c)** $a^2 + b^2 = c^2$; **d)** dva pravouhlé trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v jednom ostrom uhle; **e)** vnútorné uhly podobných trojuholníkov sú zhodné; **3.** áno; **4.a)** a, b; **b)** r, t; **c)** x, y.

Cvičenia: **2.** áno; **3.** sú podobné podľa vety *uu*; **4.** 4 m; **5.a)** 60 mm; **b)** 50 mm; **c)** 40 mm; **d)** 20 mm; **6.** $b = 12$ cm; $a : b = 4 : 3$; $a : c = 4 : 5$; $b : c = 3 : 5$.

5.2 Sínus uhla, kosínus uhla, tangens uhla

Cvičenia: **1.** $\sin\delta = \frac{|NP|}{|MN|}$; $\cos\delta = \frac{|MP|}{|MN|}$; $\mathrm{tg}\,\delta = \frac{|NP|}{|MP|}$; **2.** $\sin\alpha = \frac{p}{u}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p}{q}$; **5.** $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **6.** $\cos 60° = \frac{1}{2}$; **9.** použijeme pravouhlý trojuholník, v ktorom napr. $b = 6$ cm, $c = 10$ cm.

5.3 Hodnoty sínusu uhla, kosínusu uhla, tangensu uhla

Cvičenia: **1.a)** 0,422 6; **b)** 0,754 7; **c)** 0,920 5; **d)** 0,427 9; **e)** 0,936 7; **f)** 0,998 3; **2.a)** 0,956 3; **b)** 0,777 1; **c)** 0,380 0; **3.a)** 0,404 0; **b)** 0,753 6; **c)** 1,76 7; **4.** použite pravouhlý trojuholník; **5.a)** $\sin 28° = \cos 62° = 0{,}469\,5$; **b)** $\sin 62° = \cos 28° = 0{,}882\,9$; **c)** $\cos 12°\,30' = \sin 77°\,30' = 0{,}976\,2$; **d)** $\cos 77°\,30' = \sin 12°\,30' = 0{,}216\,4$; **6.** $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **7.** $\alpha = 36°$; **8.** $\alpha = 45°$.

5.3 Výpočty v geometrii

Cvičenia: **1.a)** $a \doteq 50{,}2$ mm; **b)** $a \doteq 87{,}7$ mm; **c)** $a \doteq 45$ cm; **d)** $a \doteq 59$ cm; **2.a)** $b \doteq 29{,}7$ mm; $c \doteq 61{,}6$ mm; **b)** $a \doteq 639{,}7$ mm; $c \doteq 654$ mm; **c)** $a \doteq 2{,}4$ dm; $c \doteq 4{,}8$ dm; **d)** $b \doteq 293{,}6$ cm; $c \doteq 296{,}7$ cm; **3.a)** 5,12 m; **b)** 21,5 m; **c)** 0,9 cm; **d)** 25,9 dm; **4.** $\alpha = 37°$, $\beta = 53°$; **5.a)** $a = 50$ cm, $b = 26{,}2$ cm, $\beta = 27°\,40'$; **b)** $a = 11{,}7$ cm, $b = 3{,}9$ cm, $\alpha = 71°\,30'$; **c)** $a = 28{,}3$ m, $c = 29{,}8$ m, $\beta = 18°$; **d)** $a = 9{,}2$ cm, $c = 12{,}5$ cm, $\alpha = 47°\,10'$; **e)** $b = 0{,}37$m, $c = 0{,}45$ m, $\beta = 55°$; **f)** $a = 1{,}96$ m, $c = 2{,}2$ m, $\beta = 27°$; **6.** 57 m; **7.** 55'; **8.** 10,5 %; **9.** 3,7 m; **10.** 3 128 m; **11.** 86,6 m; **12.** 43,8 m^2; **13.a)** $o = 22{,}46$ cm; **b)** $S = 21$ cm^2.

Vyskúšajte sa!

1.a) 0,675 6; **b)** 0,6755 9; **2.a)** 0,906 3; **b)** 0,390 7; **c)** 0,064 0; **3.** použite pravouhlý trojuholník, $\sin 20° = 0{,}342 = \frac{3{,}42}{10}$; **4.** $r = 6$ cm; **5.** 80 m; **6.** 410 m; **7.** 6,9 m, 5,3 m; **8.a)** $o = 19{,}94$ cm.

6 Funkcie, lineárna funkcia

6.1 Funkcia, definičný obor funkcie, obor hodnôt funkcie

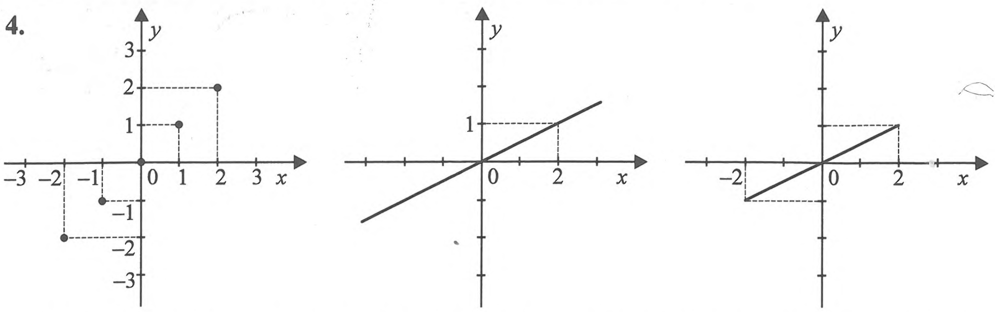
Úlohy: **1.a)** $D = \{1, 2, 3, 5, 10\}$, $H = \{6, 24, 54, 150, 600\}$; **b)** $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $H = \{8{,}93; 17{,}86; 26{,}79; 35{,}72\}$; **2.** $y = 10x$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

x	1	2	3	4	5
y	5	10	15	20	25

.

Cvičenia: **1.** $H = \{-49, -42, -7, -1, 0, 7, 1, 49\}$; **2.** **C** – nie je, **E** – nie je;

4.



5.a) $D = \{-2 \leq x \leq 2\}$, $H = \{2\}$; **b)** $D = R$; $H = R$; **c)** $D = \{x \leq 0\}$, $H = \{y \leq 0\}$; **d)** $D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $H = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

6.2 Lineárna funkcia, graf lineárnej funkcie a jej vlastnosti

Úlohy: **1.** $q = -3$; **2.** [0, 0]; **3.** $y = 6x$; **5.** [5, 0]; **6.** $y = \frac{2}{7}x - 2$.

Cvičenia: **1.** $y = 50x + 500$, 850 Sk; **2.** $V = V_o + \frac{t}{273}V_o$; **3.b)** [0, 1]; **4.** 500, 1 000, 2 500, 10 000;

5.

m	50	60	70	80
F_g	500	600	700	800

; priamky, ktoré sú grafmi, sú rovnobežné; **7.** grafmi sú priamky rovnobežné, $k = -2$; **8.** grafy sa pretínajú v bode [0, 4]; **10.a)** $\left[\frac{5}{7}, 0\right]$; **b)** $\left[-\frac{5}{4}, 0\right]$; **c)** $\left[-\frac{1}{27}, 0\right]$; **11.a)** $y = x + 1$; **b)** $y = -\frac{9}{4}x + \frac{11}{4}$; **c)** $y = -\frac{6}{7}x$; **d)** $y = x$; **e)** $y = -5$; **f)** $y = 5 - x$.

6.3 Grafické riešenie sústavy lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Úlohy: **1.** o tom sa presvedčíme dosadením súradníc bodu N do danej rovnice; **3.** narysujeme grafy, ich priesečník je [–1, 4]; **4.** nemá riešenie; **5.** grafy splývajú, nekonečne veľa riešení.

Cvičenia: **1.** napr. [0, –3], [2, 0], $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{10}{3}, 2\right]$, [6, 6]; **2.a)** [–1, 1]; **b)** [1, 2]; **c)** [2, –1]; **3.a)** nemá riešenie; **b)** nemá riešenie; **c)** nemá riešenie; **4.a)** nekonečne veľa riešení; **b)** nekonečne veľa riešení; **c)** nekonečne veľa riešení; **5.** [4, 1]; **6.** o 9 h 30 min.

Vyskúšajte sa!

1.a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $\frac{2}{a} + \frac{2}{b}$ ... $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$; **b)** $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b}\right)$; $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b}\right)$; $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$; **2.** D neleží; **3.** $H = \{2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4\}$; **4.** **C** nepravdivé; **5.** **A**; **6.** **B**; **7.** **B**; **8.** **C**; **9.** **E**; **10.** **D**; **11.** FUNKCIE.

7 Objem a povrch telies

7.1 Objem a povrch kocky, kvádra a hranola

Úlohy: **1.a)**

m	dm	cm	mm
5	50	500	5 000
3	30	300	3 000
0,857	8,57	85,7	857
1,75	17,5	175	1 750

b)

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
7	700	70 000	7 000 000
3	300	30 000	3 000 000
0,3	30	3 000	300 000
3	300	30 000	3 000 000
0,7	70	7 000	700 000

c)

m^3	dm^3	cm^3	mm^3	l	hl
2,2	2 200	2 200 000	2 200 000 000	2 200	22
18	18 000	18 000 000	18 000 000 000	18 000	180
0,5	500	500 000	500 000 000	500	5
4,2	4 200	4 200 000	4 200 000 000	4 200	42
0,14	140	140 000	140 000 000	140	1,4
0,076	7,6	7 600	7 600 000	7,6	0,076
34	34 000	34 000 000	34 000 000 000	34 000	340

2. kocka, kváder, trojboký hranol, štvorboký ihlan, valec, kužeľ.

Cvičenia: **1.a)** $V = 343$ cm^3; $S = 294$ cm^2; **b)** $V = 46{,}656$ dm^3; $S = 77{,}76$ dm^2; **2.a)** $V = 4\,950$ cm^3; $S = 1\,890$ cm^2; **b)** $V = 4$ m^3; $S = 39{,}5$ m^2; **c)** $V = 378$ dm^3; $S = 159$ dm^2; **3.** približne 1,66 tony; **4.** približne 0,35 m; **5.** 18 892 t uhlia; **6.** 2,86 kg; **7.** $S = 82{,}35$ cm^2, $V = 17$ cm^2; **8.** $S = 9\,276$ mm^2, $V = 62{,}28$ cm^3; **9.a)** 5,832 kg; **b)** 5,832 kg; **c)** 7,776 kg.

7.2 Povrch a objem valca

Cvičenia: **1.** $S = 227{,}75$ cm^2, $V = 235{,}5$ cm^3; **3.** 4,286 kg; **4.** 763,02 cm^3; **5.** $r = 5{,}87$ cm, $v = 11{,}74$ cm, $V = 1\,270$ cm^3; **6.** 0,62 mm; **7.** $V_1 : V_2 : V_3 = 26 : 25 : 30$.

7.3 Povrch a objem ihlana

Cvičenia: **1.** $S = 1\,021$ cm^2, $V \doteq 60$ cm^3; **2.** $v = 8$ cm; **3.** $V = 2\,076$ cm^3, $S \doteq 1\,024{,}5$ cm^2; **4.** 601 717 t; **5.a)** $S = 72\sqrt{3}$ cm^2 = 124,7 cm^2; **b)** $V = 72\sqrt{2}$ cm^3 = 101,8 cm^3; **6.** 4,16 m^3; **7.** 27,68 m^2; **8.a)** $a = 7{,}5$ cm; **b)** $S = 163$ cm^2; **c)** $V = 112$ cm^3.

7.4 Povrch a objem kužeľa

Cvičenia: **1.a)** $S = 655{,}9$ cm^2, $V = 932{,}58$ cm^3; **b)** $S = 60{,}29$ cm^2, $V = 15{,}1$ cm^3; **c)** $S = 57{,}21$ cm^2, $V = 28{,}41$ cm^3; **d)** $S = 25{,}15$ dm^2, $V = 8{,}31$ dm^3;

2.

Kužeľ	r	S_p	v	s	V
A	5 cm	78,5 cm^2	15 cm	15,8 cm	392,7 cm^3
B	4 cm	50 cm^2	10 cm	10,7 cm	167,5 cm^3
C	10 m	314 m^2	17 m	20 m	1 780 m^3
D	4 m	50 m^2	3 m	5 m	50 m^3
E	4 m	16 π m^2	12 m	12,6 m	64 π m^3

3. 9 cm; **4.** $V = 46\,442$ cm^2; **5.** 8,26 cm.

7.5 Guľa, guľová plocha

Úlohy: **1.** neplatí. rovnosť povrchu a objemu závisí od polomeru gule.

Cvičenia: **1.a)** 6,15m^2; **b)** 254,34 km^2; **c)** 1 519 cm^2; **2.a)** 904,32 cm^3; **b)** 411,6 m^3; **3.** $S = 510 \,.\, 10^6$ km^2; $V = 1\,082 \,.\, 10^9$ km^3.

7.6 Úlohy z praxe

Úlohy: **1.a)** povrch kupole 226,08 m^2, obsah podlahy 113,04 m^2; **b)** $S_k = 4\pi r^2$; obsah podlahy $S_p = \pi r^2$; povrch kupole je väčší ako obsah podstavy; **2.** všetky telesá majú rovnaké objemy $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ale rôzne povrchy $S_g = 4\pi r^2$, $S_v = \frac{14}{3}\pi r^2$, $S_k = \pi r^2(1 + \sqrt{17})$, $S_{kv} = 2r^2\left(\frac{7}{3}\pi + \frac{4}{3}\right)$.

Cvičenia: **1.** 91 m; **2.** približne 205,4 dm^2; **3.**

Škatuľa č.	Povrch cm^2	Potreba cm^2
1	380,00	456,00
2	294,85	353,82
3	246,43	295,72
4	272,64	327,17

4. približne o 1,7 cm; **5.** asi 25 %; **6.** približne 1 059,16 cm^2; **7.a)** približne 50,95 cm; **b)** 0,5 cm; **8.** približne 173 hodín.

Vyskúšajte sa!

1. Rozmery K: $2a$, $2b$, $2c$; rozmery K': a, b, c; **a)** $V_{K'} = \frac{1}{8}V_K$, $S_{K'} = \frac{1}{4}S_K$; **b)** $V_A = \frac{7}{8}V_K$, $S_A = S_K$; **c)** $V_B = \frac{7}{8}V_K$, $S_B = S_K + 2(ac + bc - ab)$; **d)** $V_A : V_B = 1 : 1$; **e)** $4(ab + bc + ac) : [6(ab + bc) + 3ac]$; **2.** približne 37,7 dm^3; **3.** $S = 38{,}9$ cm^2, $V = 16{,}2$ cm^3; **4.** asi 85 m; **5.** objem veľkej gule je miliónkrát väčší ako objem 1 000 kusov menších guliek; **6.** objem polguľovitého pohára je približne päťkrát väčší ako objem hrnčeka; **7.** približne 8 480 hl; **8.** približne 80 %; **9.** $V_A = V_B$, $S_A > S_B$.

8 Kombinatorika, štatistika, pravdepodobnosť

8.1 Štatistický súbor, štatistická jednotka, znak

Úlohy:

2.

Počet súrodencov	Počet žiakov
0	
1	
2	
3	
4	

3.

Počet bodov	Počet bodiek					
	1	2	3	4	5	6
50						

8.2 Početnosť, relatívna početnosť, aritmetický priemer

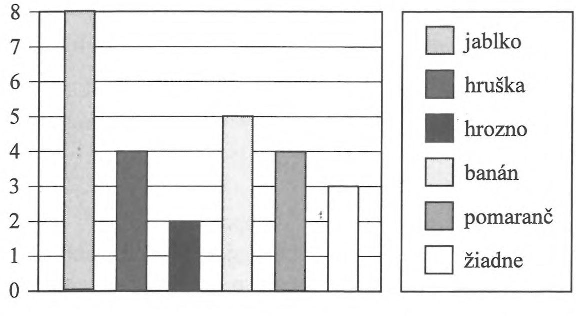
Úlohy: **1.a)** 9. A (8), 9. B (14), 9. C (11), 9. ročník 33; **b)** 9. A (2), 9. B (3), 9. C (1), 9. ročník 6; **c)** 9. A (5), 9. B (7), 9. C (5); **2.** napríklad koľko žiakov získalo polovicu alebo menej bodov; **3.** $f7 = 15$, $f4 = 6$, viac ako $f5 = 45$; **4.** 9. A = 134, 9. B = 170, 9. C = 154, celkom 458 bodov; **5.** 9. A (58,3 %), 9. B (63 %), 9. C (61,6 %); **8.** v prípade zlomku a desatinného čísla je to 1, v prípade percent 100 %.

8.3 Grafické znázornenie údajov

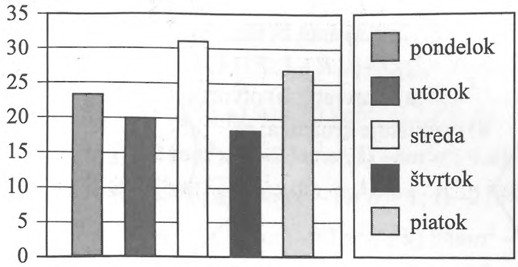
Úlohy:

1.

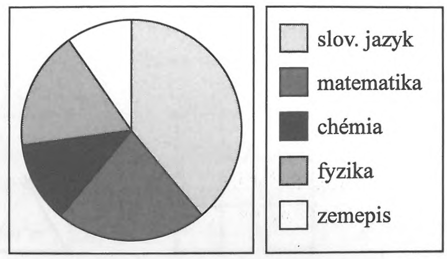
Zlomkom	Desatinným číslom	%
$\frac{8}{26}$	0,31	31
$\frac{4}{26}$	0,15	15
$\frac{2}{26}$	0,07	7
$\frac{5}{26}$	0,19	19
$\frac{4}{26}$	0,15	15



2.



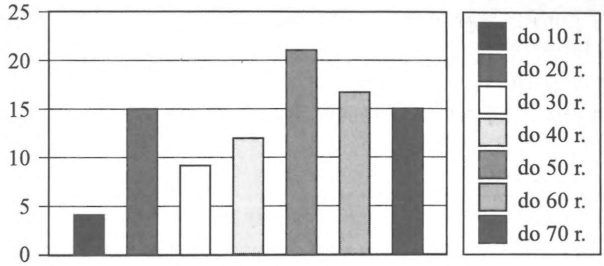
3.



$x = \frac{23+20+31+18+27}{5} = \frac{119}{5}\ 23{,}8$

4. viac ako 15 minút trvá 18 žiakom; menej ako 11 minút trvá 8 žiakom; **5.** jednotkárov bolo 80, dvojkárov 120, trojkárov 140, štvorkárov 20; **6.** pravdivé tvrdenie: **D** úroda pšenice a ovsa spolu je väčšia ako úroda kukurice; **7.** celkom 11 žiakov dosiahlo viac ako 6 bodov; nikto.

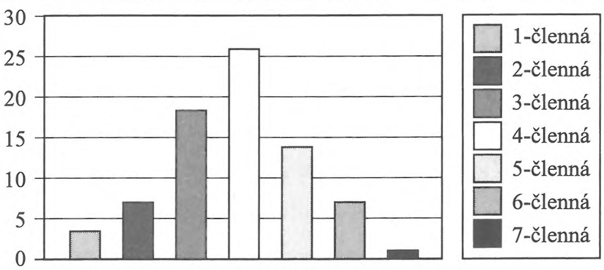
Cvičenia: **1.**



počet obyvateľov starších ako 50 rokov je 32;

2.

Počet členov rodiny	1	2	3	4	5	6	7
Počet rodín	3	7	18	26	14	7	1



a) najviac je 4-členných rodín;
b) 48 rodín je viac ako 3-členných;
c) 54 je menej ako 5-členných rodín;
d) priemerná početnosť rodín je 4,45 osôb;

3. v stredu; v prvých; piatok.; **4.** 33; **5. B**.

Vyskúšajte sa!

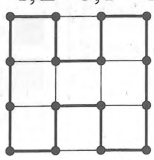
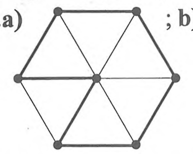
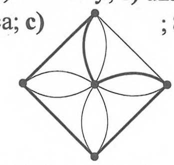
1. štatistický súbor: *viac ako 50–ročný*; štatistická jednotka: *všetky osobné autá v meste X*; štatistický znak: *základná škola v meste*, *všetky okná na našej škole*, *pán Suchý*, *býva od školy aspoň jeden kilometer*, *všetci obyvatelia z nášho domu*, *získal aspoň 5 bodov*;

2.

Samohlásky	Záznam	Číslom
a	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
e	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
i	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
o	~~||||~~ ~~||||~~	10

4. $fz = \frac{432}{3\,765} = 0{,}11$; relatívna početnosť výskytu žien na futbalovom zápase je 0,11; **5.** na x-ovú os naneste dni v týždni, na y-ovú desiatky minút; nad jednotlivé dni narysujte stĺpec takej výšky, koľko ste v daný deň v desiatkach minút študovali.

10 Riešenie elementárnych úloh z teórie grafov

Úlohy: **1.** G_2, G_3; **2.a)** 4; **b)** 8,9; 10,9; 11,10; 13,12; **3.a)** áno; **b)** nie; **c)** áno; **d)** nie; **4.a)** $A-3$; $B-2$; $C-1$; $D-4$; $E-2$; **b)** $K-3$; $L-3$; $M-3$; $N-2$; $O-2$; $P-1$; $R-4$; $S-2$; ; **c)** $A-3$; $B-1$; $C-1$; $D-1$; $E-3$; $F-1$; $G-1$; $H-3$; $I-1$; $J-1$; **5.a)** uzavretý; **b)** otvorený; **c)** uzavretý; **d)** uzavretý; **6.**  ; **7.a)**  ; **b)** neexistuje kružnica; **c)**  ; **8.a)** áno; **b)** Maroš;

9. napr.: Bratislava, Košice, Brno, Praha, Ostrava, Poprad, Bratislava, 1 960 km; **10.a)** X, E, D, C, B, A, X; **b)** X, A, B, E, D, C; 300.

Cvičenia: **1.a)** $S-4$; $Z-3$; $K-4$; $N-5$; $H-3$; $T-3$; **b)** X_1-2; X_2-2; X_3-4; X_4-2; X_5-4; X_6-2; X_7-2; **c)** $A-4$; $B-3$; $C-1$; $D-4$; $E-6$; **2.a)** 100; **b)** 15; **c)** 2, 5, 25; 10, 15; ; **3.a)** áno, otvorený; **b)** áno, uzavretý; **c)** nie; **4.a)** 8; **b)** nie; **5.a)** 4 800 km; **b)** nedá sa; **c)** nedá sa.

11 Goniometrické funkcie

11.1 Funkcia $y = \sin\alpha$

Cvičenia: **2.** sin 30° = 0,5000, pomocou kalkulačky 0,5; sin 45° = 0,707 1 – 0,707 106 781; sin 61°30' = 0,923 9 – 0,923 879 532;

3.

α	25°	49°	58°50'	60°	74°40’	84°40'
$\sin\alpha$	0,422 6	0,754 7	0,855 7	0,866 0	0,964 4	0,995 9

4.

$\sin\alpha$	0,731 4	0,647 2	0,515 0	0,182 2	0,336 5	0,673 4
α	47°	40°20’	31°	10°30'	19°40'	42°20'

11.2 Funkcia $y = \cos\alpha$

Úlohy: **1.a)** 0,984 8; **b)** 0,573 6; **c)** 0,135 3; cos 10° > cos 55° > cos 82°30'; **2.a)** 24°10'; **b)** 44°10', **c)** 74°10'.

Cvičenia: **2.** $\alpha > \beta$;

3.

α	0°30'	15°	25°	45°	68°30'	75°
$\cos\alpha$	0,999 9	0,965 9	0,906 3	0,707 1	0,366 5	0,258 8

4.

$\cos\alpha$	1,000 0	0,987 2	0,827 4	0,512 5	0,500 0	0,014 5
α	0°	10°	34°10'	59°10'	60°	80°10'

11.3 Funkcia $y = \mathrm{tg}\,\alpha$

Úlohy: **1.a)** $\alpha < \beta$; **2.** $\mathrm{tg}\,\delta < \mathrm{tg}\,\beta < \mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\gamma$.

Cvičenia: **1.** $\delta_4 < \delta_2 < \delta_1 < \delta_3$;

3.

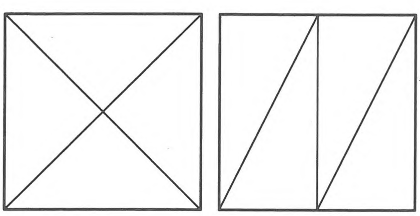
α	12°30'	25°40'	42°	72°	56°	5°20'
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0,221 7	0,480 6	0,900 4	3,077 7	1,482 6	0,093 4

12 Cvičenia na opakovanie

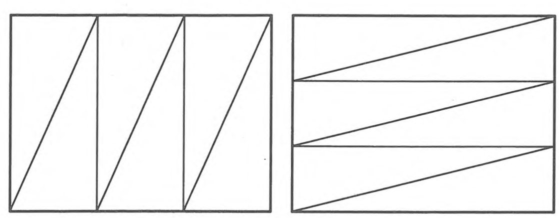
1.a) 6; **b)** -28; **c)** -21; **d)** 2; **e)** $-\frac{82}{9}$; **f)** 0; **g)** 9 ; **h)** $\frac{397}{2}$; **2.a)** $x^4 - x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{3}{4}$; **b)** $-\frac{11}{8}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{119}{10}$; **c)** $-x^4 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{17}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 11$; **d)** $x^4 - \frac{3}{8}x^3 + \frac{17}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - 11$; **e)** $x^4 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{31}{6}x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{3}{20}$; **f)** $\frac{17}{8}x^3 - 4x^2 + \frac{217}{20}$; **3.a)** $9ab$; **b)** $8ab^2$; **c)** $2a^2b$; **d)** $-8ab^2$; **e)** $-9a^2b^2$; **f)** $-18a^2b^2$; **g)** $7mn$; **h)** $-24mn^2$; **i)** $-9m^2n$; **j)** $-21mn^2$; **k)** $-24m^2n^2$; **l)** $-8m^2n^2$; **4.a)** $14a - 4ab$; **b)** $2ab^2 + 8a - 8b$; **c)** $a - 5a^2b + 30$; **d)** $-9ab^2 - 7ab + 6$; **e)** $-9a^2b^2 - 8a^2b + 1$; **f)** $-21a^2b^2 + 5a^2b$; **g)** $8mn + 16mn^2$; **h)** $40m^2n - 59mn^2$; **i)** $26m^2n - 11mn^2$; **j)** $10mn^2 - 81m^2n^2$; **k)** $94mn^2 - 60m^2n^2$; **5.a)** $2x^3 + x^2$; **b)** $-9x^3 + 6x^4$; **c)** $-4x^3 + 5x^2 - x$; **d)** $6x^4 + 11x^3 - 20$; **e)** $165x^2 + 30x^3 - 60x^4$; **f)** $2{,}5x^4 - 3x^3 + 4{,}5x^2$; **g)** $4x^4 + 3x^3 - 2x^2$; **h)** $21x^5 + 21x^3 - 24x^2$; **i)** $18x^2 - 12x^3 - 6x^4$; **j)** $-25x^4 + 60x^3 + 40x^2$; **k)** $x^4 - 5x^3 - 20x^2$; **6.a)** $9 - a^2$; **b)** $a^2 - 4$; **c)** $64 - m^2$; **d)** $m^2 - 10\,000$; **e)** $a^2 - b^2$; **f)** $m^2 - n^2$; **g)** $81 - a^2$; **h)** $a^2 - 121$; **i)** $25 - m^2$; **j)** $m^2 - 10$; **k)** $4a^2 - 4b^2$; **l)** $4m^2 - 4n^2$; **7.a)** $6x^2 - 4x^3 + 2x^4$; **b)** $-2x^2 + 5x^3 - 4x^4$; **c)** $3x^2 + 9x^3 - 6x^4$; **d)** $-\frac{9}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$; **e)** $-x^3 - \frac{8}{15}x^2$; **8.a)** $-3a^3 - \frac{3}{2}a^2 + 9a$; **b)** $\frac{10}{3}a^3 - \frac{7}{6}a^2 - 15a + \frac{21}{4}$; **c)** $-\frac{3}{4}b^3 - \frac{9}{5}b^2 + \frac{2}{3}b + \frac{8}{5}$; **d)** $-\frac{41}{50}c^2 + \frac{9}{20}c^3 + \frac{16}{25}c$; **9.a)** $9 + 6a + a^2$; **b)** $a^2 + 10a + 25$; **c)** $25 + 10m + m^2$; **d)** $m^2 + 20m + 100$; **e)** $a^2 + 2ab + b^2$; **f)** $m^2 + 2mn + n^2$; **g)** $49 - 14a + a^2$; **h)** $a^2 - 8a + 16$; **i)** $4 + 4m + m^2$; **j)** $m^2 + 20m + 100$; **k)** $a^2 - 2ab + b^2$; **l)** $m^2 + 2mn + n^2$; **10.a)** $\frac{1}{x}$; **b)** $\frac{1}{4x}$; **c)** $-\frac{1}{x}$; **d)** $-\frac{1}{5x}$; **e)** $\frac{1}{x^2}$; **f)** $\frac{1}{6x^2}$; **g)** $-\frac{1}{3x^3}$; **h)** $\frac{3}{2x}$; **i)** $-\frac{7}{4}x$; **11.a)** $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3$; **b)** $4x^4 - 30x^3 - 42x^2 + 4x + 12$; **c)** $u^5 + u^4 - u^3 - 5u^2 + 7u - 7$; **d)** $-2u^5 - 25u^4 - 70u^3 + 23u^2 + 4u$; **12.a)** $12x$; **b)** $5x^3$; **c)** $-5x^2$; **d)** $7x^2$; **e)** $-7x^2 - 2x + 3$; **f)** $-13 + 40x + 7x^2$; **g)** $9 - 7x$; **h)** $7x^2 - 19$; **i)** $5x - 3x^2 + 10x^3$; **j)** $-2x^3 + 3x^2 - x + 5$; **13.a)** $6(x - y)$; **b)** $m(p - 1)$; **c)** $2a(b + 1)$; **d)** $x(ax + y)$; **e)** $mn(n - m)$; **f)** $3xy(2x - y)$; **g)** $6a^3c^2(2c - 1)$; **14.a)** $(m + 2n)(m + 2n)$; **b)** $(2x - 4y)(2x - 4y)$; **c)** $(5x - 3xy)(5x - 3xy)$; **d)** $(6m^2n - 2mn^2)(6m^2n - 2mn^2)$; **e)** $(2x - 2y)(2x + 2y)$; **f)** $(a + b)(a - b)$; **15.a)** $(x + 4)(x + 5)$; **b)** $(x + 9)(x + 11)$; **c)** $(x + 3)(x + 10)$; **d)** $(m - 13)(m + 15)$; **e)** $(m - 8)(m + 7)$; **f)** $(m - 1)(m - 4)$; **16.a)** ab^3; **b)** $24x^2y^2$; **c)** $(m - 2) \,.\, 4m^4n$; **d)** $a^2 - b^2$; **e)** $3(x^2 - 1)(4x - 1)$; **17.a)** $\frac{x^2+y^2}{2}$; **b)** $\frac{(a+b)(a-2ab+b)}{2ab}$; $a, b \neq 0$; **c)** $\frac{2a^2}{a+b}$; $a \neq -b$; **d)** $\frac{x^2+2x-4}{x-1}$; $x \neq 2$, $x \neq 1$; **e)** $\frac{2a^2b^2}{a^2b^2}$; $a^2 + b^2 \neq 0$ alebo $a^2 \neq -b^2$; **18.a)** $\frac{15n^2 + 144m^2n^2 - 16n^2}{72m^2n^2}$; $m, n \neq 0$; **b)** $\frac{q^4 + 4pq^3 - p^4}{p^2q^2}$; $p, q \neq 0$; **c)** $\frac{m-n}{1-m-n+mn}$; $m, n \neq 1$; **d)** $\frac{(2x^2+y^2)}{x^2-y^2}$; $x \neq \pm y$; **e)** $\frac{15a+8}{4a^2-9}$; $a \neq \pm\frac{3}{2}$; **19.a)** $\frac{8ab^2c}{5d}$; $c, d \neq 0$; **b)** $\frac{9m-6n^2}{2a^2c}$; $a, b, c \neq 0$; **c)** 1; $x \neq \pm 1$; **d)** $\frac{a^2}{a-2b}$; $a \neq \pm 2b$; **e)** $\frac{1}{m^2-n^2}$; $m \neq \pm n$; **f)** $\frac{b}{3}$; $x \neq \pm a$; **20.a)** $\frac{16x}{15y}$; $y \neq 0$; **b)** $\frac{25a^3}{12b^3}$; $a, b \neq 0$; **c)** $\frac{y}{x}$; $x, y \neq 0$; **d)** $\frac{3b^2}{2y^2}$; $a, b, c, x, y, z \neq 0$; **e)** $(a + 2)(x - y)$; $x \neq y$; $a \neq 3$; **21.a)** $\frac{100x^2 - 24x - 120}{42x^2 - 75x - 40}$; $42x^2 + 75x - 40 \neq 0$; **b)** $\frac{x + 2ax^2 + 3a^2x^2}{a^2(1+x)}$; $x \neq 0$; $ax \neq -1$; **c)** $\frac{4b(a-2b)}{a^2+4b^2}$; $a \neq \pm 2b$; $a \neq 0$; $b \neq 0$; **d)** $\frac{1}{1+a}$; $a \neq \pm 1$; **e)** a^3b^2; $x, a, b \neq 0$; **22.a)** $\frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2+1}$; $x \neq 0$; **b)** $\frac{am+an}{bm-bn}$; $b \neq 0$, $m \neq \pm n$; **c)** $\frac{a^2+a}{1-a}$; $a \neq \pm 1$; **d)** $\frac{(a+b)(2a^2-1)}{(a-b)(2ab-1)}$; $a \neq \pm b$, $ab \neq \frac{1}{2}$; **23.** podmienky: $a, b \neq 0$; **24.a)** $x = 3$; Ľ = P = 0; **b)** $x = 1$; Ľ = P = 7; **c)** $x = 5$; Ľ = P = 1; **d)** $x = 17$; Ľ = P = –7; **e)** $x = -1$; Ľ = P = –31; **25.a)** $x = 2$; Ľ = P = $5\frac{1}{2}$; **b)** $x = 9$; Ľ = P = $\frac{14}{9}$ **c)** $x = -1$; Ľ = P = 1; **d)** $x = 0$; Ľ = P = 4; **e)** $x = 2$; Ľ = P = 0; **f)** $x = -6$; Ľ = P = $-\frac{1}{10}$; **26. B**; Ľ = P = $\frac{10}{3}$; **27.a)** $x = 20a - 16b - 5c$; **b)** $x = \frac{m+5p}{4-5p}$; **c)** $x = \frac{ab}{a+b}$; **d)** $x = \frac{m-n}{m+n}$; **28.a)** $x = 20$, Ľ = P = 155; **b)** $x = \frac{39}{11}$; Ľ = P = $-\frac{39}{11}$; **c)** $x = 16$; Ľ = P = $\frac{19}{4}$; **d)** $x = 40$; Ľ = P = 1; **e)** $x = \frac{1}{2}$; Ľ = P = $\frac{43}{8}$; **29.** [1, 19], [2, 18], [3, 14], ..., [10, 10], ..., [19, 1]; **30.** [–4, 9], [–3, 8], [–2, 7], [–1, 6], [0, 5], [1, 4], [2, 3], [3, 2], [5, 0], [6, –1], [9, –4]; **31.a)** nekonečne veľa;

b) $31 + (-16)$; $1\,000 + (-985)$; **33.** [1, 4], [2, 2]; **34.a)** [8, –3]; **b)** [7, 3]; **c)** $\left[\frac{9}{2}, \frac{29}{2}\right]$; **d)** [9, 3]; **e)** [1; 0,6]; **f)** [–5; 3]; **35.a)** [4, 5]; **b)** [24, –35]; **c)** [8, 3]; **d)** [5, –10]; **e)** [22, 6]; **f)** [7, –10]; **36.** $k \neq 2$; **37.** $k = -6$; nekonečne veľa riešení $x = \frac{8y-3}{2}$; **38.** v poslednej úprave by malo platiť: $3y - 2x \neq 0$; teda $x \neq \frac{3}{2}y$, čo pre danú rovnosť neplatí; **39.** pred 747 ... až 755; po 664 ... až 672; **40.** 5 dukátov; **41.** $4\frac{4}{5}$; **42.** maják 55,8; muž vzdialený 72 m; **43.a)** 862,5 g; **b)** 186,96 kg; **44.** 82 korún; **45.** 5 gúm; **46.** 52,94 m; **47.** 6 m^2; **48.a)** o 10 %; **b)** o 9,1 %; **49.** 80 %; 92 %; 83,33 %; **50.** 260 dievčat; 300 chlapcov; **51.** 100 l; **52.a)** 1 024 kg; **b)** 21 196,80 Sk; **53.** 80 g; **54.** 16,4 kg; **55.** 45,825 t; **56.** 12 kociek; **57.** cena 5 600 Sk; zisk 6,25 %; **58.** 9 000; **59.** 400 Sk; **60.a)** 3,5-krát; **b)** 336; **c)** 432; **61.** 2 244 Sk; **62.** 54 a 17; **63.a)** 400; **b)** 1 324; **64.** 148 Sk, 106 Sk; **65.** 2 040 Sk, 2 550 Sk; **66.a)** 14 kg; **b)** 50 l; **67.** 42 h; **68.a)** 7 : 45; **b)** 6 : 45; **c)** 1 hodinu; **69.** 36 m; **70.** 4 m; **71.** 20 cm; **72.** 7 kamarátov, 272 orieškov; **73.** 58 rokov; **74.a)** 16 Sk; **b)** jeden mal 14 Sk a druhý 15 Sk; **75.** 1 kg; **76.** 62 litrov, 78 litrov; **77.a)** spolu 87 žiakov; **b)** v jednotlivých triedach 28 žiakov, 30 žiakov, 29 žiakov; **78.** 280 zamestnancov; **79.** 13 výhercov; **80.** 51 fotografií, 20 strán; **81.** 3 pavúky, 5 chrobákov; **82.a)** 112 zamestnancov; **b)** 42 zamestnancov; **83.** 1 200 stromčekov; 1 380 stromčekov; 1 548 stromčekov; **84.** 30 t ovsa, 105 t pšenice, 147 t raže; **85.a)** 7 riadkov; **b)** 43 priesad; **86.** 50 $\frac{km}{h}$, 40 $\frac{km}{h}$; **87.** 72 $\frac{km}{h}$; **88.** 17,5 $\frac{km}{h}$, 12,5 $\frac{km}{h}$; **89.** o 11 h 12 min, 86 km; **90.** po 13 km, 105 km; **91.** 69 $\frac{km}{h}$, 39 $\frac{km}{h}$; **92.** D; **93.** B; **94.** C; **95.** E; **96.** B; **97.a)** 24 985 Sk; **b)** 194,93 USD; **98.** C; **99.** $x^{18} . y^6$; **100.** B; **101.** 26 žiakov, 12 chlapcov; **102.** $\frac{224}{5} = 44,8$; **103.** $\frac{5}{36}$ a $\frac{13}{36}$;

104.

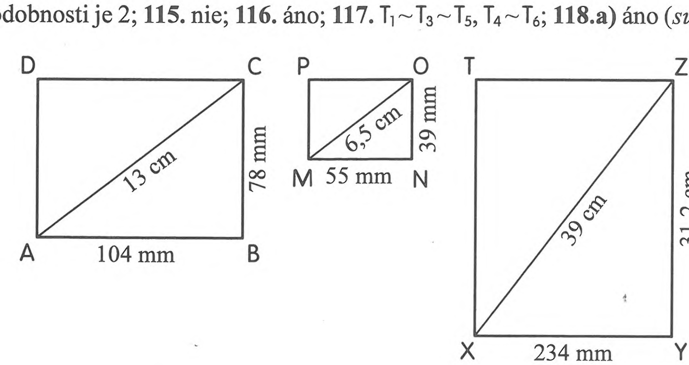


105.a)

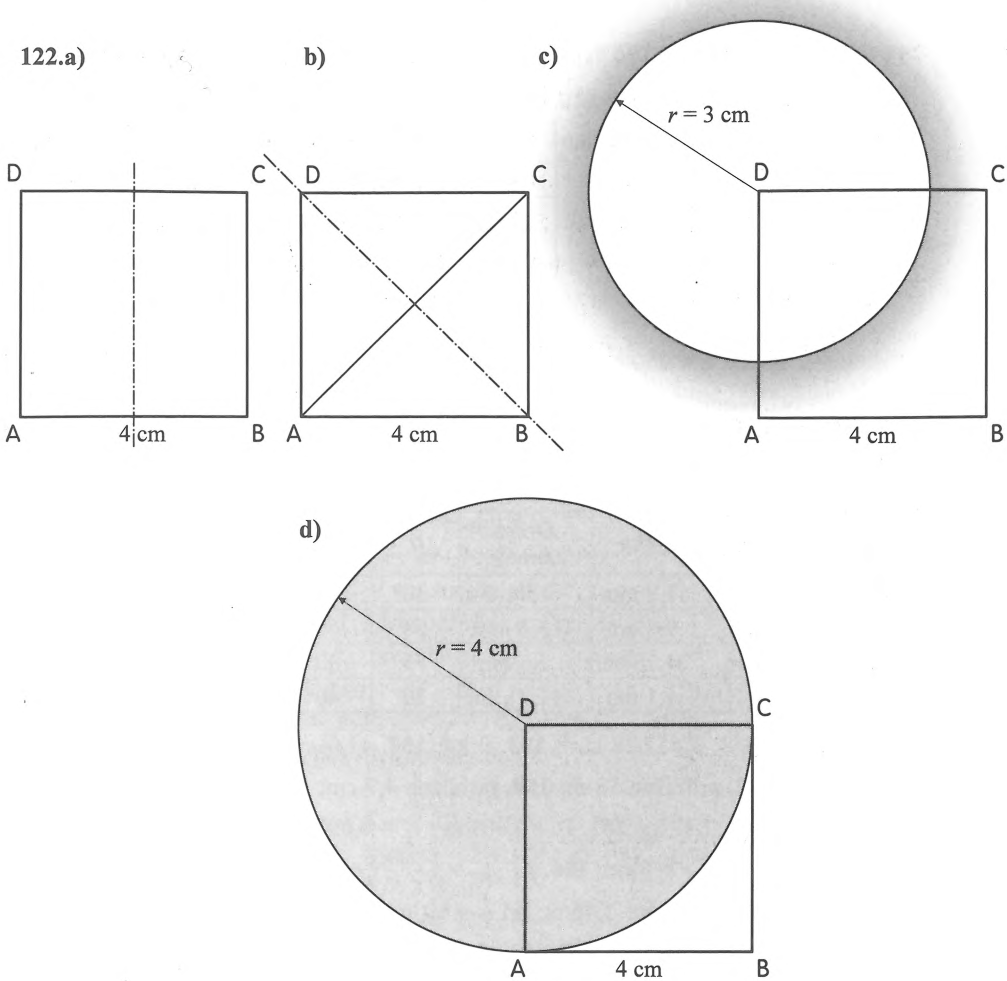


105.b) nemá riešenie; **106.** △ *AKC* (2), △ *AKM* (4), △ *AMP* (8); **107.** obdĺžnik *AKMD* (2), štvorec *AKSN* (4), △ *ABC* (2), △ *ABS* (4), △ *AKS* (8), △ *AKP* (16); **113.** △ *ABC* ≅ △ *NMP*; **114.** áno, koeficient podobnosti je 2; **115.** nie; **116.** áno; **117.** $T_1 \sim T_3 \sim T_5$, $T_4 \sim T_6$; **118.a)** áno (*sus*); **b)** áno (*sus*);

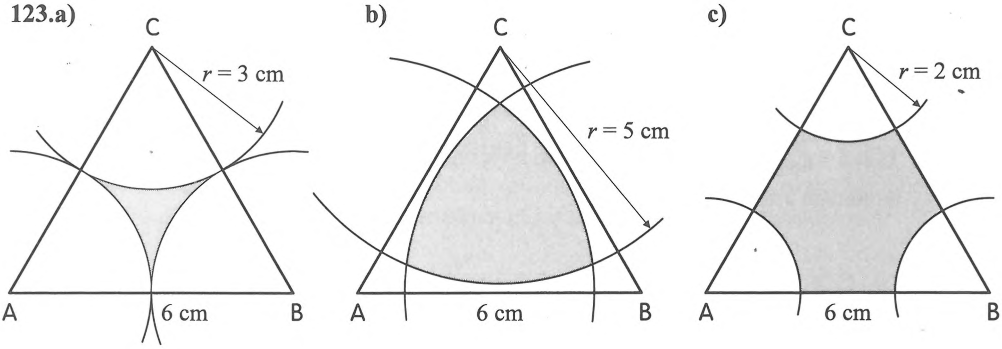
121.



122.a)



123.a)



127. $P \in m$, $P \in k$, $m \parallel MN$, $|m, MN| = 3$ cm, $k(N, 4$ cm); **128.** zostrojíme $\triangle\ ABC$ (*sss*), potom $\triangle\ BCD$ (*sss*); **129.** zostrojíme $\triangle\ ABC$, v ktorom $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AC| = e$; **130.** zostrojíme priesečník osí strán a priesečník osí uhlov; **133.** ich stredy budú ležť na sústrednej kružnici s polomerom $\frac{r_1 + r_2}{2}$; **134.** využite vety o určenosti trojuholníka a vlastnosti rovnoramenného trojuholníka;

135.a) $S \doteq 28{,}3$ m^2; **b)** asi 580 Sk; **136.a)** asi 18 900 Sk; **b)** obdĺžnik so stranami dĺžky 6 cm a 4 cm; **137.** približne 2,6 cm^2; od obsahu trojuholníka s dĺžkou strany 8 cm odčítame polovicu obsahu kruhu s polomerom $r = 4$ cm; **138.**

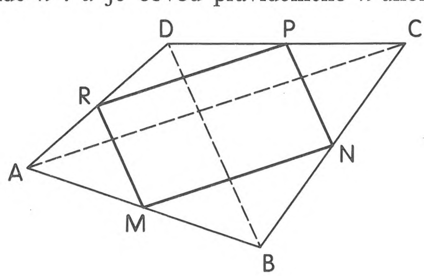
m^3	dm^3	cm^3	mm^3
3	3 000	3 000 000	3 000 000 000
0,001	1	1 000	1 000 000
0,003	3	3 000	3 000 000
0,005	5	5 000	5000 000
0,1	100	100 000	100 000 000

139. $V = 250$ cm^3, $S = 250$ cm^2; **140.** 376 cm^2; **141.** $r \doteq 5{,}87$ cm, $v = 11{,}74$ cm, $V \doteq 1\,270$ cm^3; **142.** $V = 1\,392{,}39$ cm^3; **143.** $V = 272$ cm^3; **144.** $V = \frac{10}{3}\pi r^3 \doteq 10{,}5r^3$, $S \doteq 8\pi r^2 = 25r^2$; **145.** $V = 16{,}2$ cm^3; $S = 38{,}9$ cm^2; **146.** $v = 54{,}64$ cm; **147.** valcovitého tvaru; **148.a)** 1 130,4 cm^2; **b)** 34,16 dm^2; **c)** 352,46 cm^3; **149.** 40,82 dl;

150.

Priemer podstavy	Výška	Dĺžka strany	α	β	Povrch	Objem
18 cm	51,9 mm	1,04 dm	30°	120°	548,24 cm^2	347 669 mm^3
1,2 dm	9,6 cm	113,2 mm	58°	64°	32 631 mm^2	361,73 cm^3
129,4 mm	24,15 cm	2,5 dm	75°	30°	639,34 cm^2	1,06 l
8 cm	1,1 dm	11,71 cm	70°	40°	1,97dm^2	184,21cm^3

151. 3,24 kg; **152.** 3 617,28 cm^2; **153.** 9 kg; **154.** 41,6 g; **155.** 43,3 cm; **156.** $V = 23{,}7$ dm^3, $S = 79$ cm^2; **157.** približne 58 m; **158.** približne 4,7 cm; **159.a)** trojboký ihlan; **b)** nie; **c)** nie; **d)** áno, valec; **160.** 2,12 kg; **161.** $V_k \doteq 0{,}069$ m^3; $V_g \doteq 0{,}092$ m^3; **162.** $v = \frac{r}{2}$; $V = \frac{1}{2}\pi r^3$; **163.** o 2,6 m; **164.** o 11,3 cm; **165.** $r = 6$ cm; **166.** $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BC|^2}{\operatorname{tg} \alpha}$; **167.** pri $\alpha = 30°$ $a = 3{,}94$ m, $b = 1{,}06$ m; pri $\alpha = 45°$ $a = 3{,}54$ m, $b = 1{,}46$ m; pri $\alpha = 60°$ $a = 3{,}17$ m, $b = 1{,}83$ m; **168.** je to bod P (päta kolmice z bodu B na priamku AC) od bodu A vzdialený približne 33,9 m; **169.a)** štvorec, pravidelný šesťuholník, pravidelný osemuholník, pravidelný desaťuholník, pravidelný dvanásťuholník; **b)** rovnostranný trojuholník (3 osi), štvorec (4 osi), pravidelný päťuholník (5 osí), pravidelný šesťuholník (6 osí), pravidelný osemuholník (8 osí); **170.** oba majú zhodné stredné priečky a rovnaké výšky; **171.** $S = \left(\frac{1}{2}ar\right)n = \frac{1}{2}(na)v$, kde $n\,.\,a$ je obvod pravidelného n-uholníka; **172.** $S = \frac{\pi}{360}\omega(R^2 - r^2)$; **173.** vyplýva z vlastností stredných priečok trojuholníka:



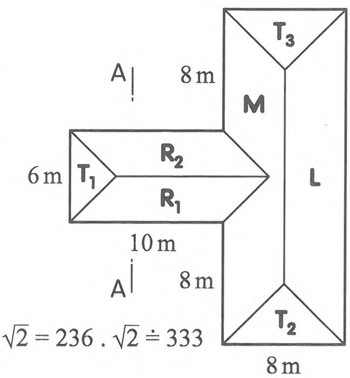
174. použite vlastnosti ťažníc v trojuholníkoch ABC a ADC; **175.** zostrojte trojuholník $AB'C$, kde $B' \in \overrightarrow{AB}$ a platí $|AB'| = a + c$; **176.** $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \frac{b}{c}$; $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$; **177.** tvrdenie platí, použite vzorec pre objemy; **178.** 113,04 cm^3, $v = 4$ cm.

ROZUM DO HRSTI (VÝSLEDKY)

1. Zostrojíme rez nižšej časti strechy rovinou kolmou na hrebeň strechy. Dostaneme rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky 6 m a výškou 3 m. Preto majú všetky strechy na obrázku sklon 45°. Odtiaľ ľahko zistíme, že trojuholník T_1 a rovnobežníky R_1 a R_2 majú v skutočnosti výšky $x = 3\sqrt{2}$. Podobne zistíme, že trojuholníky T_1, T_2 a rovnobežník L majú v skutočnosti výšky $w = 4 \cdot \sqrt{2}$.

Rovnobežníky R_1 a R_2 majú rovnaké obsahy S_1:

$$S_1 = 10 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 30 \cdot \sqrt{2}$$



Súčet obsahov trojuholníka T_1 a mnohouholníka M sa rovná obsahu S_2 lichobežníka L. Lichobežník L má dlhšiu základňu – 22 m (2 . 8 m + 6 m), kratšiu základňu – hrebeň – 14 m (22 m – 2 . 4 m) a výšku $w = 4 \cdot \sqrt{2}$ m.

Preto $$S_2 = \frac{22+14}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$$

Trojuholníky T_2, T_3 majú tiež rovnaké obsahy:

$$S_3 = \frac{8}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

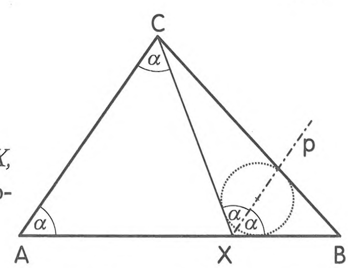
Obsah celej strechy sa rovná $S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + 2 \cdot S_3$

$$S = 60 \cdot \sqrt{2} + 144 \cdot \sqrt{2} + 32 \cdot \sqrt{2} = 236 \cdot \sqrt{2} \doteq 333$$

$$S \doteq 333 \text{ m}^2$$

Obsah celej strechy sa rovná približne 333 m^2.

2. Situácia je znázornená na obrázku:



Existenciu bodu X na strane AB, pre ktorý platí $AX \cong CX$, zaručuje podmienka $AB > BC$. Trojuholník ACX je rovnoramenný, a preto

$\sphericalangle XCA \cong \sphericalangle XAC = \alpha$; $\sphericalangle BXC = 2\alpha$ (vonkajší uhol $\sphericalangle ACX$)

Os uhla BXC, na ktorej leží stred kružnice vpísanej trojuholníku BXC, rozpoľuje uhol BXC. Pretože $\frac{1}{2} \sphericalangle BXC = \alpha$, $\sphericalangle XCA = \alpha$ (striedavé uhly) sú priamky AC a p rovnobežné.

3. Číslo 72 = 9 . 8. Preto je hľadané číslo deliteľné obidvoma číslami 9 a 8. V hľadanom čísle sa môžu vyskytnúť len číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pretože hľadáme šesťciferné číslo, musíme jednu číslicu vynechať. Hľadané číslo má byť deliteľné deviatimi, takže jeho ciferný súčet musí byť deliteľný deviatimi. Pretože

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

musíme vynechať číslicu 1. Hľadané číslo má byť čo najmenšie a musí byť párne (inak by nemohlo byť deliteľné číslom 8). Také číslo je 234 576. Je deliteľné číslom 8, je to hľadané číslo.

4. Pre zjednodušenie označíme $n = 300 + m$. Potom prepíšeme zadanie

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{302+m} > \frac{2}{5}$$

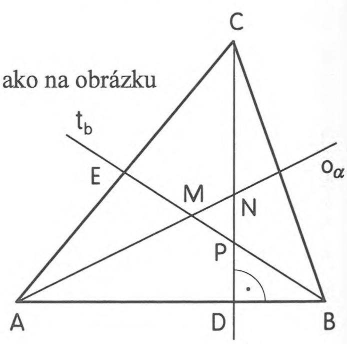
Výraz $$V = \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{302+m}$$

je súčinom m sčítancov, z ktorých každý, s výnimkou posledného je väčší než $\frac{1}{300+m}$.
Zároveň každý z týchto sčítancov (bez výnimky) je menší než $\frac{1}{300}$. Teda $\frac{m}{300} > V > \frac{m}{300+m}$.
Teraz nájdeme prirodzené číslo m tak, aby $\frac{2}{3} \geq \frac{m}{300}$ a $\frac{m}{300+m} \geq \frac{2}{5}$.
V obidvoch nerovnostiach rošírime známe zlomky číslom 100, dostaneme

$$\frac{200}{300} \geq \frac{m}{300} \text{ a } \frac{m}{300+m} \geq \frac{200}{500}$$

Z toho vidieť, že stačí zvoliť m tak, aby $200 \geq m$ a $m \geq 200$.
Tomu vyhovuje číslo $m = 200$ a hľadané prirodzené číslo n je preto $n = 300 + m = 500$.
Číslo $n = 500$ nie je jediné, ktoré vyhovuje daným nerovnostiam. Môžeme vykonať presnejšie odhady. Napríklad, najprv odhadneme súčet $a = \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{400}$.
Pre každý z týchto sčítancov platí, že je väčší alebo sa rovná $\frac{1}{400}$ a menší než $\frac{1}{301}$.
Preto $\frac{1}{3} = \frac{100}{300} > a > \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$.
Môžeme teda hľadať n tak, aby platilo $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} > \frac{1}{401} + \frac{1}{402} \dots + \frac{1}{n} > \frac{2}{5} - \frac{1}{4}$,
pretože $\frac{1}{3} > \frac{1}{401} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{3}{20}$.
Ľahko sami rovnakým spôsobom odhadneme, že tieto nerovnosti platia pre všetky n spĺňajúce nerovnosti $533 \geq n \geq 471$.

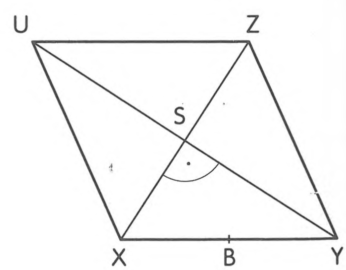
5. Označme M_1, M_2, M_3 a M_4 po rade množinu mužov, ktorí nemajú prvú, druhú, tretiu a štvrtú vlastnosť. Množina všetkých mužov, ktorí nemajú aspoň jednu vlastnosť je daná zjednotením $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ a hľadaná množina mužov, ktorí majú zaručene všetky vlastnosti je doplnkom (vzhľadom na množinu všetkých mužov) tohto zjednotenia. Toto zjednotenie má najväčší počet prvkov, ak sú tieto množiny disjunktné (ich prienik je prázdna množina). Tento počet je potom 20 % + 15 % + 10 % + 5 % = 50 %. Pretože vyšiel súčet menší než 100, môže tento prípad nastať a najmenší počet prvkov doplnku je 100 % – 50 % = 50 %. Zaručene všetky vlastnosti má 50 % mužov.



6. Predpokladajme, že je $\triangle MNP$ rovnostranný. Pri označení ako na obrázku platí

$|\sphericalangle PBD| = 180° - 90° - 60° = 30°$
$|\sphericalangle BMA| = 180° - 60° = 120°$
$|\sphericalangle BAM| = 180° - |\sphericalangle BMA| - |\sphericalangle PBD| = 30°$

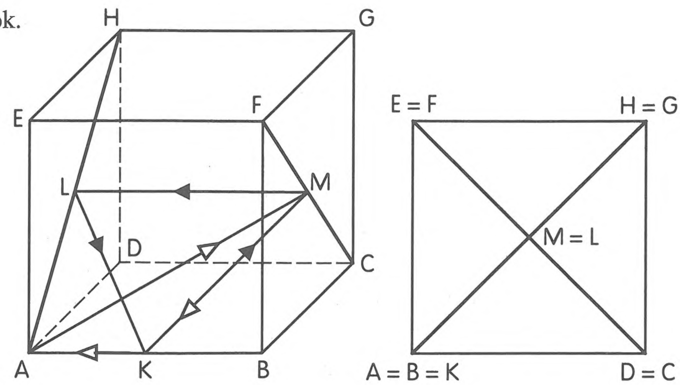
Pretože o_α je os uhla CAD, tak $|\sphericalangle CAB| = 2 \,.\, 30° = 60°$.
Ďalej $|\sphericalangle AEB| = 180° - |\sphericalangle EBA| - |\sphericalangle EAB| = 90°$
a pretože $|AE| = |EC|$ je $\triangle BEA \cong \triangle BEC$ podľa vety *sus*.
Teda $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle CAB| = 60°$ a trojuholník ABC je rovnostranný. V tomto prípade sú body $M = N = P$ totožné, takže netvoria trojuholník, čo je spor.



7. Štvoruholník $XYZU$ tvoriaci záhradu je kosoštvorec. Označme S priesečník uhlopriečok a B stred strany XY. Pretože uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé, je $\sphericalangle XSY$ pravý a bod S leží na Talesovej kružnici $k(B, 50\,\text{m})$.

Trojuholník XYS je tak obsiahnutý v kruhu s polomerom 50 m so stredom v bode B a každý jeho bod má od bodu B vzdialenosť najviac 50 m.

8. Situáciu znázorňuje obrázok.



Dráha žltého kanárika je vyznačená bielymi šípkami, dráha zeleného kanárika čiernymi šípkami. Porovnaním na obrázkoch zistíme, že žltý kanárik letel po lomenej čiare $KAMK$ a zelený po lomenej čiare $KMLK$, kde M a L sú po rade stredy úsečiek CF a AH.
Vypočítame dĺžky v centimetroch $|KA| = 20$, $|LM| = 40$.
Ďalej počítame pomocou Pytagorovej vety:

$$|KL| = \sqrt{20^2 + 20^2 + 20^2} = 20 \,.\, \sqrt{3} = 34$$

$$|KM| = |KL| = 34$$

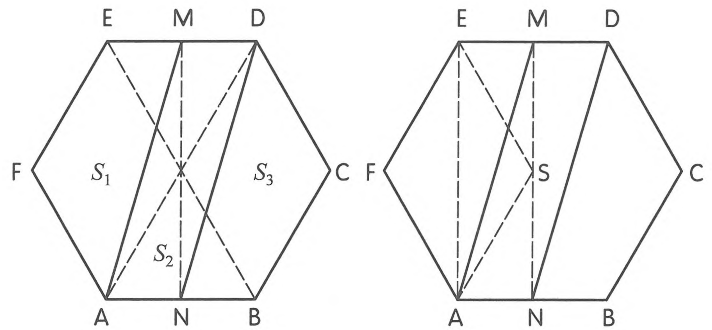
$$|AB| = \sqrt{40^2 + 20^2 + 20^2} = 49$$

Dĺžky lomených čiar sú $|KAMK| = 20 + 49 + 34 = 103$

$$|KMLK| = 34 + 40 + 34 = 108$$

Dráha žltého kanárika je približne 103 cm, dráha zeleného je 108 cm. Dráha žltého je teda asi o 5 cm kratšia.

9. Obsah rovnobežníka $ANDM$ sa rovná obsahu obdĺžnika $ANME$, ale ten sa rovná obsahu kosoštvorca $ASEF$.



Obsah tohto kosoštvorca sa rovná tretine obsahu šesťuholníka $ABCDEF$. Podobne sa obsah štvoruholníka $AMEF$ rovná obsahu kosoštvorca $ASEF$, lebo trojuholníky AME a ASE majú spoločnú stranu AE a rovnakú výšku k tejto strane. Teda obsah štvoruholníka $AMEF$ sa rovná tretine obsahu šesťuholníka $ABCDEF$.

10. Označme dĺžky odvesien daného pytagorejského trojuholníka a, b = 12 cm a dĺžku prepony c. Potom platí

$$12^2 = c^2 - a^2$$
$$144 = (c - a)(c + a)$$

Rozložíme 144 na súčin dvoch činiteľov:

144	1	2	3	4	6	8	9	12
	144	72	48	36	24	18	16	12

Pretože $c - a < c + a$ sú v 1. riadku tabuľky čísla $c - a$ a v 2. riadku čísla $c + a$. Aby čísla a, c boli celé, musia byť obidva činitele párne. Dostaneme štyri sústavy rovníc:

① $c - a = 2$, $c + a = 72$; $a = 35$, $c = 37$

② $c - a = 4$, $c + a = 36$; $a = 16$, $c = 20$

③ $c - a = 4$, $c + a = 24$; $a = 9$, $c = 15$

④ $c - a = 8$, $c + a = 18$; $a = 5$, $c = 13$

Existujú teda štyri pytagorejské trojuholníky, ktoré majú odvesnu dlhú 12 cm. Ich dĺžky strán sú:

① 35 cm, 12 cm, 37 cm
② 16 cm, 12 cm, 15 cm
③ 9 cm, 12 cm, 15 cm
④ 5 cm, 12 cm, 13 cm.

Matematike nemožno porozumieť len bezbolestným a zábavným spôsobom.

R. Courant

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.

Matematika

pre 9. ročník základných škôl
2. časť

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MEDIA TRADE, spol. s r. o. - Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

ISBN 80-08-02947-1

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

ISBN 80-08-02947-1