Matematika

pre 8. ročník základných škôl • 1. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

Matematika

pre 8. ročník základných škôl

I. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 2000

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

Illustrations © akademická maliarka Táňa Žitňanová, 2000
Design © Igor Imro, 2000

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky
dňa 12. júna 2000 pod číslom 1016/2000-41
ako alternatívnu učebnicu matematiky pre 8. ročník ZŠ, 1. časť.

Prvé vydanie, 2000

ISBN 80-08-03031-3

OBSAH

Johannes Kepler

(27. 12. 1571 až 15. 11. 1630)

Nemecký astronóm, fyzik a matematik. Bol prívržencom Koperníkovej teórie. V roku 1600 prišiel do Prahy, kde žil význačný astronóm Tycho de Brahe. Na základe jeho pozorovaní oblohy vypočítal dráhu Marsu. Známe sú tri základné Keplerove zákony pohybu planét okolo Slnka. Objasnil tiež príliv a odliv oceánov v závislosti od príťažlivosti Mesiaca.

Milí ôsmaci!

V našej učebnici matematiky nájdete učivo, ktoré je z hľadiska vašich budúcich potrieb veľmi dôležité. Zopakujete si svoje vedomosti zo 7. ročníka, naučíte sa počítať mocniny a odmocniny, na riešenie pravouhlého trojuholníka vám poslúži Pytagorova veta, oboznámite sa s úpravami algebrických výrazov, naučíte sa používať vzorce $(a \pm b)^2$.
Nové poznatky o kruhu a kružnici vám pomôžu rozriešiť veľa praktických úloh.

Ste ôsmaci. Už teraz budete rozmýšľať nad tým, kam pôjdete po skončení základnej školy. Matematiku však budete potrebovať na všetkých druhoch stredných škôl. Využite túto učebnicu na hlboké osvojenie a prehĺbenie svojich vedomostí z matematiky.

Veľa úspechov!

Autori

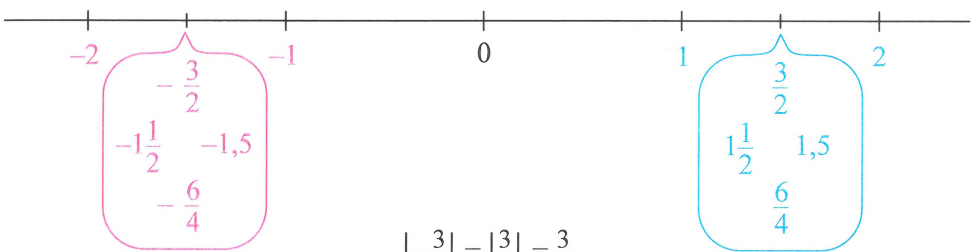
V učebnici používame tieto symboly:

- príklad
- problém
- riešenie
- zapamätať si
- zhrnutie alebo poučka
- úloha
- cvičenia
- vyskúšajte sa
- poznámka
- rozširujúce učivo

1 OPAKOVANIE A PREHĹBENIE UČIVA MATEMATIKY ZO 7. ROČNÍKA

1. 1 Racionálne čísla
Počtové výkony s racionálnymi číslami

ZOPAKUJME SI



Záporné racionálne čísla

$$\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$$
$$|-2| = |2| = 2$$

Kladné racionálne čísla

1 ***ÚLOHA***

Znázornite čísla na číselnej osi a určte ich absolútne hodnoty:

a) $-\frac{1}{5}$; -1; $\frac{4}{5}$; $-1\frac{1}{2}$; $0{,}2$ b) $1{,}2$; $3\frac{1}{10}$; $-2{,}5$; 0; $-1{,}7$

Pre sčítanie a odčítanie racionálnych čísel platia tieto pravidlá:

$$-a + (-b) = -(a+b)$$
$$a + (-b) = a - b$$
$$a - (-b) = a + b$$

2 ***ÚLOHA***

Odhadnite, či po sčítaní (odčítaní) bude výsledok väčší ako jedna:

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{9}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{8}-\frac{5}{8}$ f) $\frac{9}{2}-\frac{2}{5}$ g) $\frac{5}{5}-\frac{1}{7}$ h) $\frac{14}{2}-\frac{7}{7}$

Svoj odhad odôvodnite.

3 ***ÚLOHA***

a) Sčítajte: $2\frac{1}{4}+0{,}7$ $\frac{8}{9}+1\frac{2}{3}+0{,}1$ b) Odčítajte: $2\frac{1}{4}-0{,}7$ $\frac{8}{9}-1\frac{2}{3}-0{,}1$

Pre sčítanie racionálnych čísel platia vlastnosti: **komutatívnosť** a **asociatívnosť.**

4 ***ÚLOHA***

Uľahčite si počítanie s využitím vlastností sčítania:

a) $2\frac{1}{2}+4\frac{3}{8}-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+1\frac{7}{10}$ b) $0{,}9+1{,}4+0{,}6+\left(-\frac{9}{10}\right)+(-2)$

5 ***ÚLOHA***

Vypočítajte:

a) $6-\left(2\frac{1}{2}-3{,}5\right)+1\frac{1}{5}$ b) $-1{,}7+(-1{,}7+3{,}4)-2$ c) $\left(\frac{1}{3}-3\right)-\left(3-\frac{2}{3}\right)+\left(10\frac{1}{3}+2\frac{1}{9}\right)$

ZOPAKUJME SI

Násobenie racionálnych čísel:

$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\,.\,2}{5\,.\,3}=\frac{8}{15}$

$-3\cdot\frac{2}{7}=\frac{-3\,.\,2}{7}=-\frac{6}{7}$

$-4\frac{1}{2}\cdot 9=-\frac{9}{2}\cdot 9=-\frac{9\,.\,9}{2}=-\frac{81}{2}=-40\frac{1}{2}$

Asociatívnosť násobenia racionálnych čísel platí

6 ***ÚLOHA***

Utvorte z čísel $\frac{2}{5}, -3\frac{1}{2}, \frac{9}{10}$ všetky možné dvojice súčinov a vypočítajte ich.

7 ***ÚLOHA***

Napíšte k daným číslam prevrátené čísla: $\frac{2}{11}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, -2, -\frac{1}{3}, 2\frac{3}{4}, -0{,}5$

ZOPAKUJME SI

Delenie racionálnych čísel:

$\frac{2}{9}:\frac{1}{4}=\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{1}=\frac{8}{9}$

$-2\frac{1}{2}:8\frac{1}{5}=-\frac{5}{2}:\frac{41}{5}=\frac{-5}{2}\cdot\frac{5}{41}=\frac{25}{82}$

$-0{,}2:\left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{2}{10}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{2}{3}$

8 ***ÚLOHA***

Vypočítajte:

a) $\frac{1}{3}:\frac{5}{12}$ b) $\frac{3}{4}:\left(-\frac{5}{6}\right)$ c) $-2\frac{3}{8}:\left(-\frac{1}{4}\right)$ d) $12:(-0{,}5)$ e) $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}:\frac{1}{56}$

9 ***ÚLOHA***

Vypočítajte a navzájom porovnajte dvojice výsledkov. Akú vlastnosť využijete pri riešení?

a) $\left(\frac{7}{9}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$ $\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$

b) $\left(3\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}$ $3\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}-2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$

ÚLOHA 10

Upravte na základný tvar zlomky:

a) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}}$ b) $\dfrac{2}{-\frac{1}{9}}$ c) $\dfrac{-8}{-\frac{15}{4}}$ d) $\dfrac{3\frac{2}{7}}{1{,}5}$

ÚLOHA 11

Vypočítajte:

a) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot 8}{-\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{4}\right)}$ b) $\dfrac{0{,}2 : \frac{1}{9}}{-\frac{1}{2}}$

ÚLOHA 12

Hala má rozmery $6\frac{1}{4}$ m a $6\frac{3}{4}$ m. Izba má tvar štvorca s dĺžkou strany $6\frac{1}{2}$ m. Na ktorú miestnosť potrebujeme viac podlahovej krytiny. O koľko?

ÚLOHA 13

Krajčírka odstrihla z kusa látky $\frac{1}{2}$. Z nej na ušitie sukne potrebovala iba $\frac{3}{4}$ látky. Aká časť z pôvodného kusa látky ešte zostala?

CVIČENIA

1. Vypočítajte spamäti:

a) 0, 218. 10	d) 1, 231. 100	g) -0, 0586. 1000
b) 1, 5: 10	e) -4, 5. 0, 1	h) 15: 100
c) 425: 0, 1	f) 0, 001. (-79, 2)	i) 0, 44. 0, 01

2. Vypočítajte spamäti:

a) 6, 21 + 32, 5	d) 7, 005 + 21, 3	g) 28, 6 - (-14, 2)
b) 8, 4 - 1, 5	e) -3, 8 + (-3, 8)	h) 7 - (-9, 9)
c) 4, 01-3, 99	f) -0, 426 - 5	i) 1, 1 + 0, 001 - (-1, 11)

3. Na číselnej osi znázornite čísla: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{5}$; $-1{,}4$; 2; $\frac{3}{4}$; -2; $-(-5)$

4. Zo zlomkov $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{8}$ a $\frac{1}{2}$ utvorte všetky možné dvojice súčtov a rozdielov a výsledky usporiadajte od najväčšieho po najmenší.

5. O koľko je zlomok $\frac{7}{8}$ väčší ako:

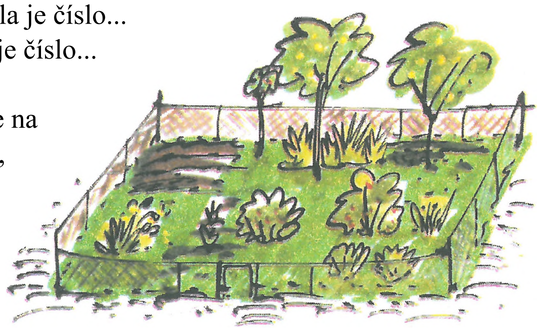
a) súčet zlomkov $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{3}$ b) rozdiel zlomkov $\frac{3}{4}$ a $\frac{2}{5}$

6. Utvorte slovné úlohy tak, aby ich riešenie viedlo k zápisom:

a) $\left(3\frac{2}{5}+2\frac{5}{7}\right)\cdot 7$ b) $1\frac{2}{5}\,\mathrm{m}^2-\frac{3}{10}\,\mathrm{m}^2$ c) $(172{,}1\ \mathrm{kg}+48{,}5\ \mathrm{kg}):2$

7. Doplňte tvrdenie tak, aby bolo pravdivé a ku každému tvrdeniu uveďte príklad:

a) Súčet dvoch záporných racionálnych čísel je vždy číslo...
b) Súčet kladného a záporného čísla je číslo...
c) Rozdiel dvoch záporných čísel je číslo...



8. Koľko metrov pletiva potrebujeme na oplotenie záhrady tvaru obdĺžnika, ak dĺžka záhrady meria $25\frac{1}{2}$ m a šírka je o 3, 75 m kratšia ako dĺžka? Brána má dĺžku 2, 5 m.

9. Vypočítajte:

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$ c) $-\frac{9}{10}\cdot(-3)$ e) $-8\frac{1}{2}\cdot 5\frac{1}{4}$ g) $\frac{7}{4}\cdot\left(-\frac{4}{10}\right)\cdot\left(-\frac{25}{100}\right)$

b) $\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{14}$ d) $4\cdot 6\frac{2}{3}$ f) $2{,}3\cdot\left(-\frac{10}{11}\right)$ h) $-\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\right)$

10. Vypočítajte: a) $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}$ c) $1\frac{5}{8}:\left(-\frac{10}{3}\right)$ e) $-4:\frac{8}{7}$

b) $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$ d) $2\frac{1}{2}:\left(-3\frac{1}{4}\right)$ f) $-0{,}32:\left(-1\frac{2}{5}\right)$

11. Upravte na základný tvar:

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$ b) $\dfrac{-\frac{4}{7}}{\frac{8}{9}}$ c) $\dfrac{2\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}$ d) $\dfrac{0{,}5}{\frac{3}{4}}$ e) $\dfrac{\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}}{\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}$

12. Vypočítajte: a) $\left(2\frac{1}{4}+4{,}5\right)\cdot\frac{4}{5}$ b) $\left(10\frac{1}{10}:\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}$

13. Zo zberu liečivých rastlín získali žiaci 8. A triedy 5 616 Sk. Odmenu si rozdelili tri skupiny podľa množstva vykonanej práce. Prvá skupina nazbierala 1, 5-krát viac ako druhá skupina a druhá $3\frac{1}{2}$-krát viac ako tretia. Koľko Sk dostala každá skupina?

14. Aká je hmotnosť $\frac{1}{4}$ kmeňa smreka, ktorého objem je 436, 6 dm^3, ak 1 dm^3 smrekového dreva má hmotnosť 0, 85 kg?

15. Aká je výmera pozemku, ktorý má tvar obdĺžnika? Jeho šírka je 196, 4 m a dĺžka je $2\frac{1}{2}$-krát väčšia.

16. Ktoré najmenšie celé kladné číslo môžeme napísať dvoma číslicami a ktoré dvoma číslami?

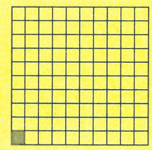
17. Napíšte číslo 10 pomocou piatich deviatok.

1. 2 Percentá

ZOPAKUJME SI

1 % jedno percento je jedna stotina základu

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\ \%$$



ÚLOHA

1

a) Vypočítajte spamäti 1 % zo základu:

2 000 m, 1 500 kg, 800 Sk, 750 km, 25 l

b) Vypočítajte spamäti základ, ak 1 % sa rovná:

40 kg, 75 m, 1 km; 5, 2 Sk; 0, 18 l

ÚLOHA

2

Na štvorčekovaný papier si narysujte tri ľubovoľné štvoruholníky, ktorých obsahy budú postupne 100, 150 a 200 štvorčekov. Vyfarbite 1 % z obsahu každého štvoruholníka. Svoje obrázky si porovnajte.

základ = celok = 100 %
percentová časť = časť základu
počet percent = určuje koľko stotín zo základu tvorí percentová časť

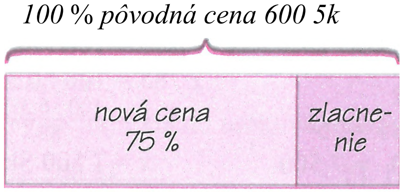
PRÍKLAD

[1]

Korčule boli zlacnené na 75 % z ich pôvodnej ceny. Koľko korún stoja teraz, ak pôvodná cena bola 3 600 Sk?

RIEŠENIE

100 % pôvodná cena 600 5k



Jana rieši výpočtom cez jedno percento:

základ...	100 %...	3 600 Sk
1 %. . .	3 600 : 100 =	36 Sk
75 %. . .	36. 75 =	2 700 Sk

Odpoveď: Korčule teraz stoja 2 700 Sk.

Peter rieši trojčlenkou:

100 %................. 3 600Sk
75 % x Sk

x: 3 600 = 75: 100

x. 100 = 75. 3 600

$$x = \frac{75\ .\ 3\,600}{100}$$

<u>x = 2 700 Sk</u>

3 *ÚLOHA*

V predajni KNIHA vybrané knihy zlacneli na 60 % z ich pôvodnej ceny. Na zozname je i encyklopédia, ktorej pôvodná cena bola 800 Sk. Koľko stojí teraz?

4 *ÚLOHA*

Ktorému zlacneniu dáte prednosť a prečo?

LEGO 1 200 Sk	LEGO 1 200 Sk
zlacnenie o 40 %	zlacnenie na 40 %

5 *ÚLOHA*

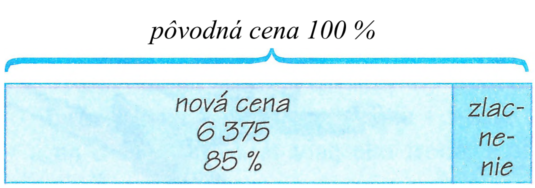
V závode plánovali za mesiac vyrobiť 8 000 kusov výrobkov.
Plán prekročili o 8%.

a) Na koľko percent splnili plán?
b) Koľko kusov výrobkov vyrobili?

[2] *PRÍKLAD*

Automatickú práčku zlacnili na 85 % pôvodnej ceny. Teraz stojí 6 375 Sk.
Aká bola jej pôvodná cena?

RIEŠENIE



Jana rieši výpočtom cez jedno percento:

pôvodná cena	...	100 %	... mám vypočítať	
cena po zlacnení	...	85 %	... 6 375 Sk	
		1 %	... 6 375: 85	= 75
		100 %	... 75. 100	= 7 500

Peter rieši trojčlenkou:

85 %.................. 6 375Sk
100 %......................... xSk

x : 6 375 = 100 : 85

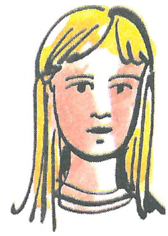
x . 85 = 100. 6 375

$$x = \frac{100\ .\ 6\,375}{85}$$

<u>x = 7 500 Sk</u>

Skúška: 100% ... 7 500 Sk
1 % ... 7500: 100 = 75
85 % ... 75. 85 = 6 375 to je údaj zo zadania

Odpoveď: Pôvodná cena automatickej práčky bola 7 500 Sk.



6

ÚLOHA

Nájdite číslo, z ktorého 20 % je toľko, ako 15 % z 1 500.

7

ÚLOHA

91 % z mesačnej výroby papierenského stroja závod vyviezol do zahraničia. Bolo to 1 092 ton papiera. Koľko ton papiera vyrobí papierenský stroj mesačne?

ZOPAKUJME SI

vklad = počiatočná istina = základ = 100 %
ročná úroková miera = počet percent
úrok = percentová časť

[3]

PRÍKLAD

Juraj uložil do banky na začiatku roka 5 000 Sk. Na konci roka mu k nim pripíšu úrok 700 Sk. Aká je ročná úroková miera vkladu?

RIEŠENIE

Jana rieši výpočtom cez jedno percento:

vklad = základ = 100 %... 5 000 Sk
úrok = percentová časť ... 700 Sk
mám vypočítať počet percent
1 %... 5 000: 100 = 50 Sk
počet percent ... 700: 50 = 14 %

Skúška: 100 % ... 5 000 Sk
1% ... 5 000: 100 = 50 Sk
14 % ... 50. 14 = 700 Sk

Odpoveď: Úroková miera vkladu je 14 %.

Peter riešitrojčlenkou:

$\uparrow$ 5 000 Sk.................. 100% $\uparrow$
700 Sk..................... x%

$$x : 100 = 700 : 5\,000$$
$$x \,.\, 5\,000 = 700 \,.\, 100$$
$$x = \frac{700 \,.\, 100}{5\,000}$$
$$x = \frac{70}{5}$$
$$x = 14\ \%$$

8

ÚLOHA

Vypočítajte ročnú úrokovú mieru, ak ku vkladu 10 000 Sk na konci roka pripíšu:

a) 500 Sk b) 1 000Sk c) 1 400 Sk

9 *ÚLOHA*

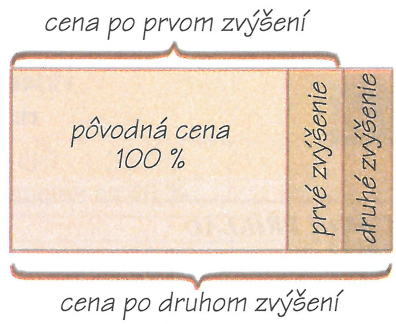
Náklady na výrobu športovej tašky sú 900 Sk. Koľko percent z ceny tašky tvorí zisk, ak výrobca tašku predáva po:

a) 990 Sk b) 1 350 Sk c) 1 800 Sk

[4] *PRÍKLAD*

Kniha stála 95 Sk. Najskôr jej cenu zvýšili o 20 %, potom ešte raz o 15 % a jej cenu zaokrúhlili na celé koruny. Koľko korún stála kniha po druhom zdražení?

! *RIEŠENIE*



Martin uvažuje takto:

pôvodná cena... 95 Sk
1. zvýšenie... 95 Sk + 20 % z 95
20 % z 95 vypočítam ako 95. 0, 2 = 19 Sk

po 1. zdražení kniha stála 95 + 19 = 114 Sk

2. zvýšenie... 114 Sk + 15 % zo 114
15 % zo 114 vypočítam ako 114. 0, 15 = 17, 1 Sk

po 2. zdražení kniha stála 114 + 17, 1 = 131, 1 □ 131 Sk

Odpoveď: Po druhom zdražení stála kniha 131 Sk.

10 *ÚLOHA*

a) Ukážte, že Martinov výpočet percentovej časti s použitím desatinného čísla bol správny, teda, že:
20 *% zo* základu sú 0, 2 zo základu, 15 % zo základu je 0, 15 zo základu.

b) Katka a Miško si výpočet príkladu 4 zapísali takto:
Katka: 95 . 1, 2 = 114 Miško: (95. 1, 2). 1, 15 = 131, 1 □ 131
114. 1, 15 = 131, 1 □ 131

Odôvodnite, prečo sú i tieto zápisy a výpočty správne.

11 *ÚLOHA*

a) Akými desatinnými číslami môžeme nahradiť nasledujúce počty percent:
10 %, 40 %, 55 %, 72 %, 105 %, 150 %, 225 %?

b) Akými zlomkami v základnom tvare môžeme nahradiť nasledujúce počty percent:
1 %, 2 %, 4 %, 5 %, 10 %, 20 %, 25 %, 50 %, 75 %?

12 ***ÚLOHA***

Lyže na konci lyžiarskej sezóny zlacneli o 30 % z pôvodnej ceny ale na začiatku druhej lyžiarskej sezóny ich opäť zdražili o 20 %. Aká bola ich pôvodná cena, ak ich na začiatku druhej lyžiarskej sezóny predávali po 5 460 Sk?

13 ***ÚLOHA***

V obchodnom dome bol oznam:

ZLACNENIE
VYBRANÝCH DRUHOV TOVAROV
O 10 – 40 %

Doplňte nasledujúcu tabuľku. Nové ceny zaokrúhlite na desiatky.

Tovar	Pôvodná cena v Sk	Minimálna cena po zlacnení	Maximálna cena po zlacnení
kuchynský robot	8 000		
elektrická vŕtačka	5 400		
televízor	11 300		
mikrovlnná rúra	7 400		
LEGO	3 200		

C V I Č E N I A

1. Vypočítajte spamäti jedno percento (1 %):
   a) z 3 200 km b) z 500 kg c) z 12 800 Sk d) zo 150 hl e) z 23 m

2. Vypočítajte jedno percento (1 %):
   a) z 1, 2 b) z $\frac{1}{4}$ c) z 0,05 d) z $\frac{5}{3}$ e) z $\frac{133}{20}$

V cvičeniach 3-7 vyberte správnu odpoveď.

3. Koľko percent je 9 metrov zo 180 metrov?
   A 0,5 % B 20 % C 5 % D 50 % E 2%

4. 24 % z 540 kg je

A 12, 96 kg **B** 48 kg **C** 564 kg **D** 129, 6 kg **E** 22, 5 kg

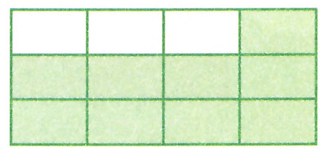
5. Voda tvorí $\frac{9}{10}$ hmotnosti melóna.
Koľko percent hmotnosti melóna tvoria ostatné látky?

A 90 % **B** 10 % **C** 1 % **D** 0, 1 % **E** 0, 9 %

6. Janko má nasporených 2 400 korún, čo predstavuje 60 % z ceny počítačovej hry. Koľko korún mu ešte chýba?

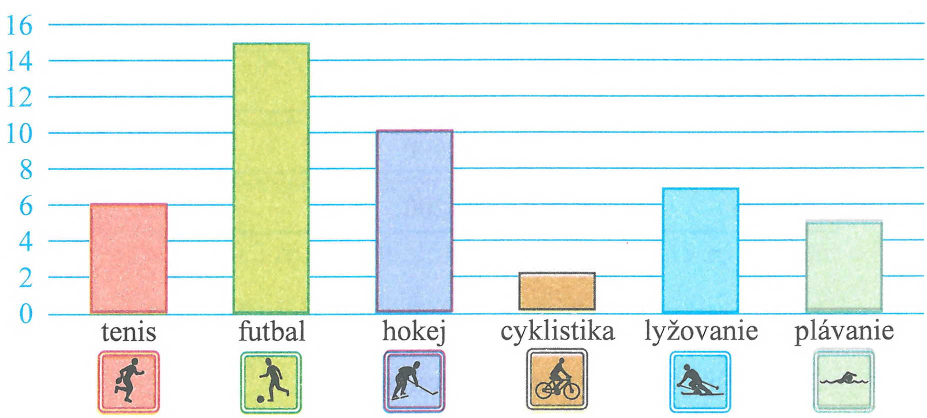
A 2 400 **B** 4 000 **C** 1 440 **D** 2 600 **E** 1 600

7. Koľko percent z plochy útvaru na obrázku zaberá vyfarbená časť?



A 9% **B** 90% **C** $\frac{9}{12}$ % **D** 75% **E** 10, 8%

8. Stĺpcový diagram vyjadruje výsledky prieskumu, v ktorom si žiaci ôsmeho ročníka základnej školy vyberali svoj obľúbený šport. Koľko percent žiakov obľubuje jednotlivé športy?



9. Banka ponúka na vklady uložené na vkladnú knižku bez výpovednej lehoty ročnú úrokovú mieru 7, 5%.
   a) Na začiatku roka sme vložili 5 000 Sk. Aký úrok nám pripíšu na konci roka?
   b) Koľko korún sme vložili, ak na konci roka ku vkladu pripísali úrok 900 Sk?
   c) Koľko korún by sme mali vložiť, ak chceme, aby sa úrok na konci roka rovnal 15 000 Sk?

10. Vo svete sa najrozšírenejšie platidlá nazývajú dolár a frank. Dolármi možno platiť v 51 krajinách sveta, 31 krajín používa franky. Na začiatku roku 2000 bolo na svete 216 štátov, štátikov, kráľovstiev, kniežatstiev atď., ktoré používali vlastnú menu.
   a) Koľko percent krajín sveta používa ako platidlo dolár, koľko frank?
   b) Koľko percent krajín sveta používa ako platidlo menu, ktorá nemá názov ani dolár ani frank?
   c) Názov koruna používa 5 % krajín sveta. Koľko je to krajín?

11. Nájdite číslo, z ktorého je 13 % toľko, ako 3, 25 % z 800.

12. Číslo 85 zväčšite o: a) 10 % b) 100 % c) 250 %

13. Vypočítajte: a) 1 % z 12 % zo 100 c) 0, 5 % z 200 % z 15
   b) 20 % z 50 % z 5 000 d) $\frac{2}{5}$ % z 4 % z 10

14. Odhadnite základ, ak:
   a) 28 % je 15 b) 74, 7 % je 0, 7 c) 148 % je 12 d) 51 % je 10, 5

1. 3 Pomer, priama a nepriama úmernosť
Riešenie úloh

ZOPAKUJME SI

2 : 3	3 : 2
zmenšenie	zväčšenie

navzájom prevrátené pomery

1 ***ÚLOHA***

Čo znamenajú pomery 1: 1, 2: 2, 3: 3 . . . ?

2 ***ÚLOHA***

Napíšte prevrátené pomery k daným pomerom: 7: 4; 12: 3; 9: 7; 3: 100

$\frac{8}{9}$; 4; $\frac{1}{7}$; 1,2; $3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{4}$

UVEDOMTE SI

Pomer a podiel nie je to isté, i keď zápisy sú rovnaké.

Futbalový zápas môže skončiť výsledkom 2 : 0, ale podiel 2 : 0 nemá zmysel.

V praxi sa však pomery, kde sa jeden z členov pomeru rovná nule nevyskytujú a preto s pomerom môžeme počítať ako s podielom.

3 ***ÚLOHA***

Utvorte úlohu, kde nie je možné považovať pomer dvoch veličín za podiel.

4 ***ÚLOHA***

Upravte pomery na základný tvar:

a) 28 : 49
46 : 23
17 : 51
39 : 12

b) 4 : 0, 2
0,3 : 0,5
1,2 : 4,8
3,7 : 1

c) $3\frac{1}{2} : 5$
$9{,}4 : 2\frac{1}{2}$
$15 : 2{,}1$
$6\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$

5 ***ÚLOHA***

Zmeňte úsečku s dĺžkou 212 cm v pomere 3: 4. Bude nová úsečka dlhšia?

6 ***ÚLOHA***

Rozdeľte 100 Sk v pomere:

a) 3 : 7 b) 2 : 3 : 5 c) 1 : 2 : 4 : 13

ZOPAKUJME SI

6 : 11 = 30 : 55 - úmera - rovnosť dvoch pomerov
4 : 7 = 40 : 60 - nie je úmera

7 ***ÚLOHA***

Zistite, či nasledujúce zápisy sú úmerou:

a) 14 : 2 = 42 : 6
b) 9,5 : 15 = 1,9 : 3
c) $4\frac{1}{2} : 5 = 9 : 5{,}5$
d) 3,1 : 60 = 3,1 : 1,2

8 ***ÚLOHA***

Určte neznámu tak, aby platila úmera:

a) x : 12 = 5 : 30
b) 7 : n = 21 : 27
c) 3: 4 = z: 2
d) 50: 13 = 100 : y

ZOPAKUJME SI

Priama úmernosť

Za 7 kg cukru zaplatíme 147 Sk.
Za 5 kg cukru zaplatíme 105 Sk.
hmotnosť 7 kg: 5 kg = 7: 5
cena 147 Sk: 105Sk = 7: 5

ROVNAKÝ POMER

Nepriama úmernosť

5 murárov omietne dom za 9 dní.
15 murárov omietne dom za 3 dni.
murári 5: 15 = 1: 3
počet dní 9: 3 = 3 : 1

PREVRÁTENÝ POMER

V priamej úmernosti sa obe veličiny menia v rovnakom pomere.
V nepriamej úmernosti sa veličiny menia v prevrátenom pomere.

9 ***ÚLOHA***

Uveďte aspoň dva príklady na priamu a dva na nepriamu úmernosť.

10 ***ÚLOHA***

Osobné auto prešlo za 4 hodiny 360 km. Akú vzdialenosť prejde za 7 hodín, ak pôjde tou istou priemernou rýchlosťou za hodinu?

11 ***ÚLOHA***

Pouvažujte čo sa stane v predchádzajúcej úlohe, ak sa priemerná rýchlosť auta zvýši o 10 km/h.

12 ***ÚLOHA***

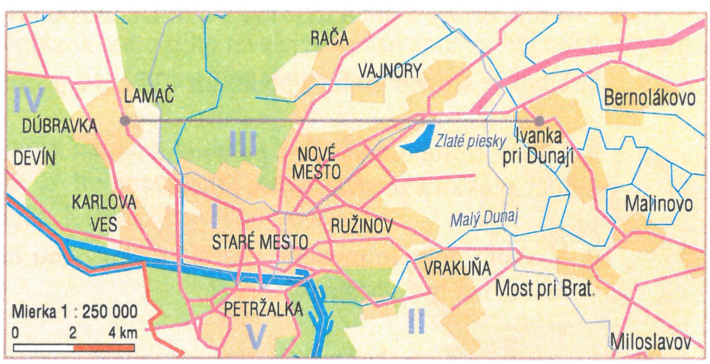
Stroj vytlačí za $\frac{1}{4}$ hodiny 31 vizitiek. Koľko ich vytlačí za 1 zmenu (8 hodín)?

13 ***ÚLOHA***

Na zhotovenie textilnej aplikácie potrebujeme 3,3 m 140 cm širokej látky. V obchode majú 150 cm širokú látku. Koľko metrov z nej kúpime na textilnú aplikáciu?

14 ***ÚLOHA***

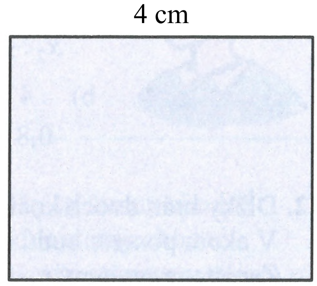
Aká je skutočná vzdialenosť dvoch miest, ak na mape s mierkou 1: 250 000 je ich vzdialenosť vyjadrená úsečkou dlhou 5,5 cm?



15 ***ÚLOHA***

Je možné, aby sme na miestnosť znázornenú na pláne s mierkou 1 : 200, ktorá je v tvare obdĺžnika s rozmermi 4 cm a 3,2 cm, potrebovali 51,2 m² podlahovej krytiny?

4 cm



3, 2 cm

1 : 200

CVIČENIA

1. Upravte pomery na základný tvar:

a) $8 : 16$	b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$	c) $0,7 : 0,9$
$14 : 7$	$4 : \frac{1}{3}$	$2,3 : 4,6$
$90 : 25$	$2 : 3\frac{1}{2}$	$7 : 1,4$
$117 : 30$	$7\frac{1}{4} : 3\frac{2}{9}$	$2\frac{3}{5} : 0,5$

2. Nájdite z cvičenia 1 aspoň jednu dvojicu navzájom prevrátených pomerov.

3. Napíšte päť usporiadaných dvojíc čísel, ktoré budú v pomere
   a) 8: 5 b) 3: 11 c) $\frac{1}{2} : 0,5$

4. Rozdeľte 3 120 t v pomere 5: 7.

5. Janka s Petrom nasporili 1 200 Sk. O koľko Sk nasporila viac Janka, ak ich úspory sú v pomere 19: 11?

6. Na koncoch dvojramennej páky s dĺžkou 180 cm sú zavesené závažia s hmotnosťami 4 kg a 5 kg. Vypočítajte dĺžku ramien páky pri rovnováhe.

7. Rozdeľte odmenu 5 220 Sk trom zamestnancom, ak vieme, že jeden pracoval 4 dni, druhý 3 dni a tretí iba 2 dni. Denne podávali rovnaké výkony.

8. Utvorte slovnú úlohu s použitím 420 cm a pomerom 6 : 7.

9. Strany trojuholníka sú v pomere 1 : 1,4 : 1,75. Obvod meria 166 cm. Môže mať niektorá zo strán dĺžku 20 cm?

10. V akom pomere musíme zväčšiť dĺžku rámu obrazu, ak jeho pôvodná dĺžka 55 cm má byť väčšia o 30 cm?

11. 

Určte neznáme, aby platila úmera:

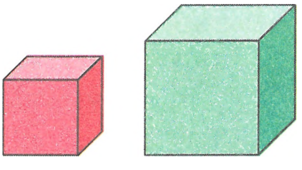
a) $x_1 : 7 = 70 : 49$
   $x_2 : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} : 1$

b) $4 : m_1 = 16 : 24$
   $0,8 : m_2 = 40 : \frac{1}{4}$

c) $y : 2 : 3 = 12 : 6 : 9$

d) $0,2 : 0,4 : 0,5 = x : 4 : 5$

12. Dĺžky hrán dvoch kociek sú v pomere 2 : 3.
    V akom pomere budú ich povrchy?
    Zapíšte prevrátený pomer ich objemov.



13. Zapíšte mierku plánu, ak detské ihrisko s výmerou 640 m^2, bolo na ňom znázornené obdĺžnikom s dĺžkou jednej strany 4 cm.

14. Na mape *Stojeden hradov a zámkov Slovenska,* ktorá má mierku 1: 750 000 je vzdialenosť Nitrianskeho hradu a Budatínskeho zámku (Žilina) 15 cm. Aká je skutočná vzdialenosť hradu a zámku?

15. Vstupenka do múzea stojí 10 Sk pre dieťa, 20 Sk pre dospelého. V nedeľu prišlo do múzea 50 ľudí, ktorí zaplatili 700 Sk. Koľko detí bolo v nedeľu v múzeu?

16. Hmotnosť oceľovej tyče tvaru kvádra s rozmermi 6 m, 50 mm, 20 mm je 47 kg. Aká bude hmotnosť tyče z toho istého materiálu, ak rozmery tyče sú 4, 5 m, 60 mm a 15 mm?

17. Kanál na káblovú televíziu by vykopalo 12 robotníkov za 8 dní. Traja z nich boli preradení na inú prácu. Ako dlho bude trvať práca ostatným robotníkom?

18. V Kanade na meranie objemu používali jednotky gallon a pint. Pint (pt) má 8 gallonov (gal) a gallon má objem 4, 5 l. Farmár predal 500 000 pint pšenice. Koľko m^3 pšenice predal?

19. Predstavitelia 15 štátov boli na konferencii rozdelení na 2 skupiny. Prvá mala pripravených 30 testových otázok. Prerokovanie každej trvalo 10 minút. Druhá skupina mala 25 otázok. Ako dlho trvalo prerokovanie jednej otázky v druhej skupine, ak bol rokovací čas pre obe skupiny rovnaký?

20. Z pokazeného kohútika odtečie za deň (24 hodín) 126 l vody. Peter po $2\frac{1}{2}$ hodine od poškodenia kohutika chybu odstránil. Koľko litrov vody odtieklo za tento čas?

1. 4 Zhodnosť trojuholníkov

1

ÚLOHA

Ako sa nazýva trojuholník, ktorý má:

a) všetky tri strany zhodné
b) iba dve strany zhodné
c) všetky tri strany navzájom rôzne

2 ***ÚLOHA***

Urobte náčrt:
a) rovnostranného trojuholníka
b) rovnoramenného trojuholníka
c) rôznostranného trojuholníka

3 ***ÚLOHA***

Ako sa nazýva trojuholník, ktorý má:
a) všetky uhly ostré
b) jeden uhol pravý
c) jeden uhol tupý

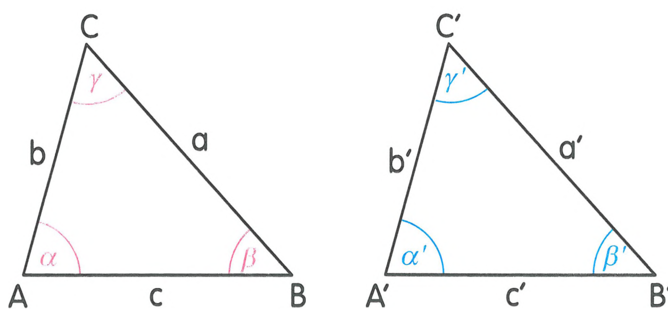
4 ***ÚLOHA***

Načrtnite trojuholník *ABC* a vyznačte v ňom:
a) výšky
b) ťažnice a ťažisko
c) stredné priečky

5 ***ÚLOHA***

Na obrázku sú narysované dva zhodné trojuholníky Δ ABC a Δ A′B′C′

Zapíšte:
a) strany a uhly, ktoré si v tejto zhodnosti odpovedajú;
b) zhodnosť Δ ABC, Δ A′B′C′.

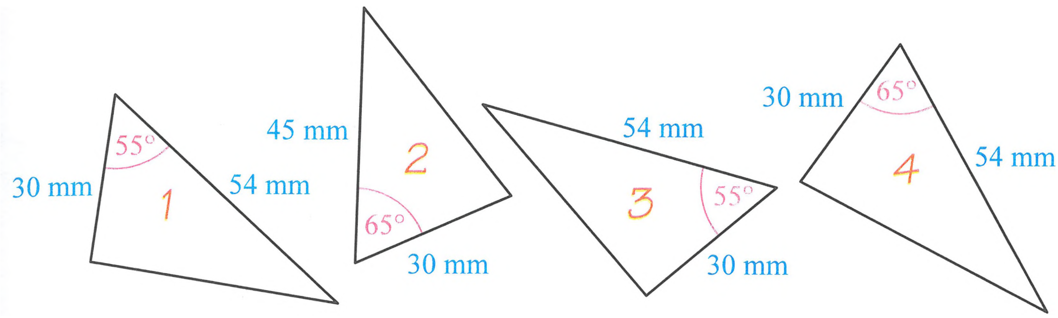


***ZOPAKUJME** SI*

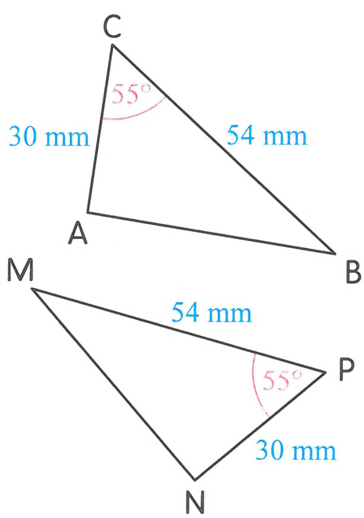
1. *Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhoduj vo všetkých odpovedajúcich si stranách a vo všetkých odpovedajúcich si uhloch.*
2. *Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých stranách **(veta sss).***
3. *Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom **(veta sus).***
4. *Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch k nej priľahlých **(veta usu).***

PRÍKLAD

Na obrázku sú narysované trojuholníky. Nájdite dvojicu zhodných trojuholníkov. Označte ich vrcholy a napíšte, ktoré vrcholy, strany a uhly si navzájom odpovedajú.
Určte aj vetu o zhodnosti, podľa ktorej ste určili zhodnosť trojuholníkov.



RIEŠENIE



Zhodné sú trojuholníky 1 a 3, lebo sa zhodujú vo dvoch stranách a v uhle nimi určenom (veta ***sus***).

$$A \to N, \quad AC \cong NP$$
$$B \to M, \quad BC \cong MP \qquad \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle NMP$$
$$C \to P, \quad \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle NPM$$

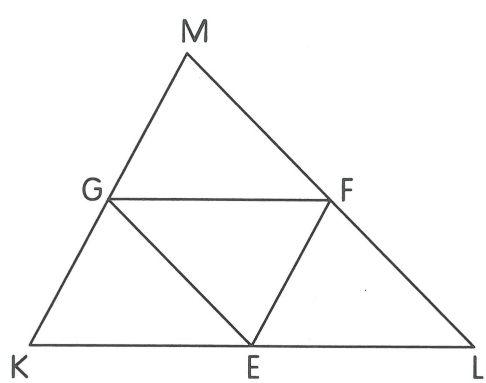
$$AB \to NM, \quad AC \to NP, \quad BC \to MP$$
$$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle MNP$$
$$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle NPM$$
$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle NMP$$

6 ÚLOHA

Zostrojte ľubovoľný trojuholník *KLM* a stredy strán *KL, LM, MK* postupne označte *E, F, G.*

a) Odôvodnite, prečo sú trojuholníky *KEG, ELF, GFM* a *FGE* navzájom zhodné?

b) Koľko trojuholníkov *KEG* sa „vmestí“ do trojuholníka *KLM?*

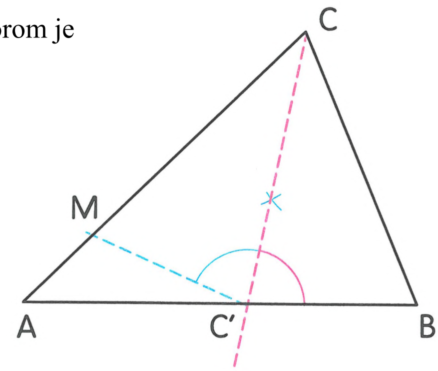


CVIČENIA

1. Uhlopriečka rovnobežníka delí tento rovnobežník na dva zhodné trojuholníky. Odôvodnite toto tvrdenie.

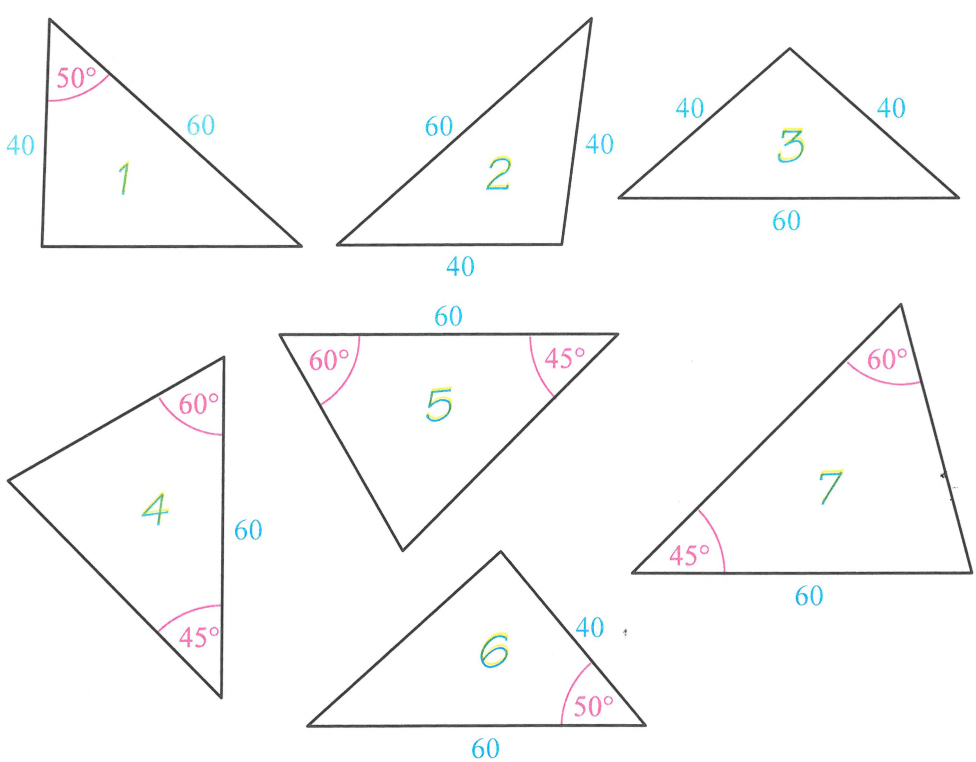
2. Odôvodnite, že v obdĺžniku sú obidve uhlopriečky rovnako dlhé.

3. Na obrázku je trojuholník ABC, v ktorom je polpriamka CC' osou uhla BCA. Ďalej platí $\sphericalangle CC'M \cong \sphericalangle CC'B$. Dokážte, že platí $CM \cong CB$.



4. Odôvodnite, že uhlopriečka delí kosoštvorec na dva zhodné trojuholníky.

5. Na obrázku sú trojuholníky. Vypíšte dvojice zhodných trojuholníkov, napíšte aj vetu, podľa ktorej sú trojuholníky zhodné.



1. 5 Objem a povrch hranola

1 ***ÚLOHA***

Doplňte tabuľku:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2, 5			
		50 000	
			120 000
	500		

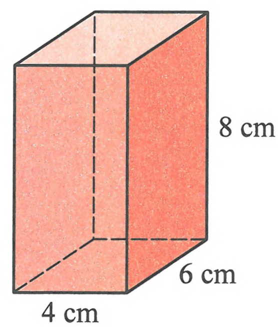
2 ***ÚLOHA***

Doplňte tabuľku:

m^3	dm^3	cm^3	l
	1 000		
			2 000
3			
		1 500 000	

3 ***ÚLOHA***

Narysujte sieť kvádra, ktorý je znázornený na obrázku.



4 ***ÚLOHA***

Napíšte vzorec na výpočet:

a) povrchu kvádra
b) objemu kvádra
c) povrchu hranola
d) objemu hranola

5 ***ÚLOHA***

Aký je rozdiel medzi povrchom hranola a obsahom plášťa hranola?

6 ***ÚLOHA***

Máte pred sebou štyri vzorce:

$$S = 2 \cdot S_p + Q$$
$$V = S_p \cdot v$$
$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$Q = o \cdot v$$

Opíšte ich do zošita a ku každému napíšte, čo možno podľa každého z nich vypočítať.

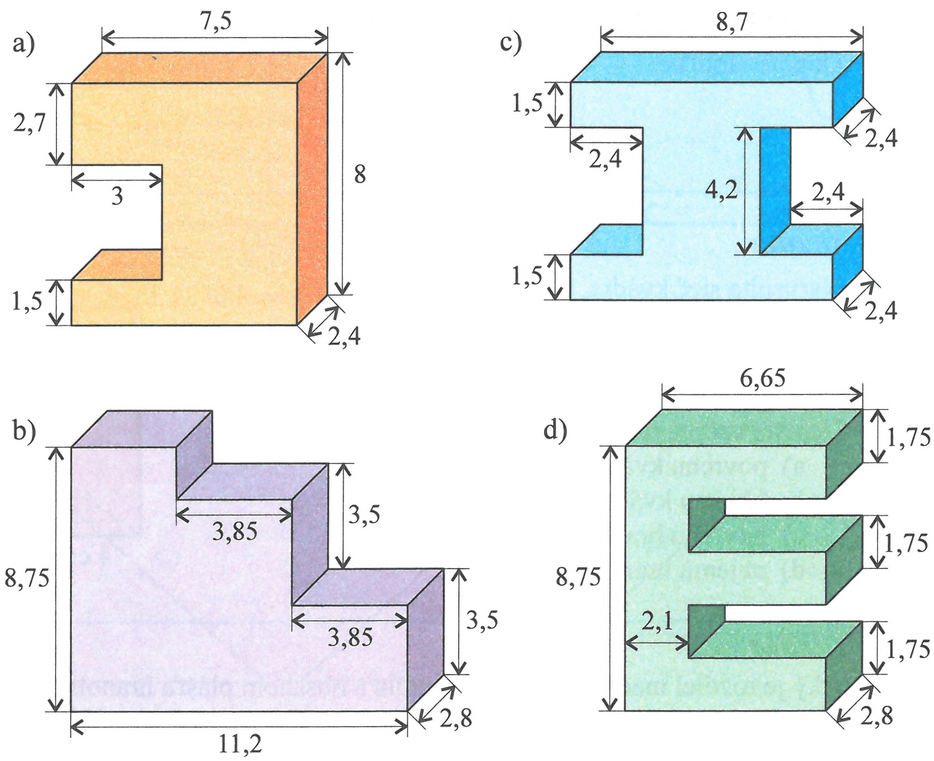
CVIČENIA

1. Bazén tvaru kvádra s rozmermi 8 m, 25 m, 3 m treba zvnútra obložiť štvorcovými obkladačkami so stranou 10 cm. Koľko obkladačiek treba na obloženie celého bazénu?

2. Pravidelný štvorboký hranol má podstavnú hranu dĺžky 5 cm a výšku 7 cm. Ako sa zmení jeho objem, ak dĺžku podstavnej hrany zväčšíme o 2 cm a výšku zmenšíme o 2 cm?

3. Kocka má hranu dĺžky 7 cm. Ako sa zmení jej povrch a objem, keď dĺžku hrany zväčšíme.
   a) dvakrát
   b) o 2 cm

4. Vypočítajte povrch a objem telies znázornených na obrázku (rozmery sú v cm).



5. Ložný priestor nákladného auta má tvar kvádra s rozmermi $a = 4,6$ m, $b = 1,9$ m, $c = 80$ cm.

Vypočítajte:
a) Koľko plechu treba na oplechovanie ložného priestoru, keď počítame 10 % plechu na zahnutie;
b) jeho objem (objem zaokrúhlite na kubické metre).

1. 6 Konštrukčné úlohy

1 ***ÚLOHA***

Rozhodnite, či je možné, aby mali strany trojuholníka tieto dĺžky (v cm):

a) 3; 4; 5   c) 3, 9; 4; 5   e) 5, 5; 7; 18

b) 3; 4; 7   d) 5, 5; 6, 5; 12   f) 10; 20; 30

2 ***ÚLOHA***

Rozhodnite, či je možné, aby uhly trojuholníka mali tieto veľkosti:

a) $\alpha = 75°$; $\beta = 47°$ c) $\alpha = 120°$; $\beta = 60°$

b) $\beta = 125°$; $\gamma = 61°$ d) $\alpha = 80°$; $\gamma = 47°20'$

3 ***ÚLOHA***

Zostrojte trojuholník *ABC,* keď je dané (dĺžky úsečiek sú v cm):

a) $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$ b) $a = 7$, $b = 5$, $\gamma = 45°$ c) $b = 6$, $\alpha = 30°$, $\gamma = 60°$

4 ***ÚLOHA***

Zostrojte kosoštvorec *ABCD,* keď je daná dĺžka strany $|AB| = 6$ cm a uhlopriečka $|AC| = 8$ cm.

5 ***ÚLOHA***

Zostrojte trojuholník *ABC,* v ktorom poznáte strany $c = 6$ cm, $b = 5$ cm a ťažnicu $t_c = 4$ cm.

6 ***ÚLOHA***

Zostrojte trojuholník *ABC,* ak sú dané dĺžky strán $b = 6$ cm, $c = 6$ cm, a dĺžka výšky $v_c = 5$ cm.

7 ***ÚLOHA***

Zostrojte trojuholník *ABC,* ak je dané: $a = 7, 5$ cm, $v_a = 5, 5$ cm, $\gamma = 62°$.

8 ***ÚLOHA***

Zostrojte trojuholník *ABC,* ak $|AB| = 7, 6$ cm, $|BT| = 5, 2$ cm, $|AT| = 4, 5$ cm, kde bod *T* je ťažisko trojuholníka *ABC.*

9 ***ÚLOHA***

Zostrojte rovnobežník *ABCD*, v ktorom poznáte:

$|AB| = 7$ cm, $|AD| = 5$ cm, $\sphericalangle ABC = 110°$.

10 ***ÚLOHA***

Zostrojte kosoštvorec *ABCD,* v ktorom poznáte dĺžky uhlopriečok $e = 7$ cm, $f = 4$ cm.

C V I Č E N I A

1. Zostrojte rovnoramenný trojuholník, keď je daný jeho obvod a dĺžka ramena:
   a) 17, 5 cm; 6 cm b) 13cm; 4, 5 cm c) 19 cm; 6, 5 cm

2. Sú dané veľkosti dvoch úsečiek a) 5 cm, 4 cm, b) 7, 2 cm, 5, 4 cm. Ako musíme zvoliť veľkosť tretej úsečky *x,* aby bolo možné z týchto úsečiek zostrojiť trojuholník? Pre jednu voľbu zostrojte trojuholník.

3. Zostrojte trojuholník ABC, ak a = 6 cm, $v_a = 4$ cm, $t_a = 5$ cm.

4. Zostrojte trojuholník ABC, kde c = 8 cm, $t_c = 7, 5$ cm, $t_b = 6, 6$ cm.

5. Zostrojte trojuholník ABC, keď $t_a = 9$ cm, $t_b = 12$ cm, $t_c = 7, 5$ cm.

V Y S K Ú Š A J T E S A !

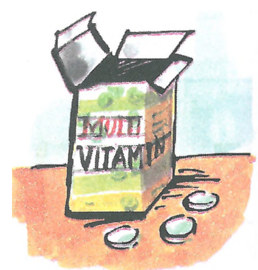
1. Vypočítajte: a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{8}$ b) $1{,}1 + 0{,}002 - 2{,}22$

2. Vypočítajte: a) $\left(10\frac{1}{10} : \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) . 3\frac{2}{3}$ b) $\dfrac{\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4}}{\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}}$

3. Ak neznáme číslo zväčšíme o 5 %, dostaneme číslo 63. Určte neznáme číslo.

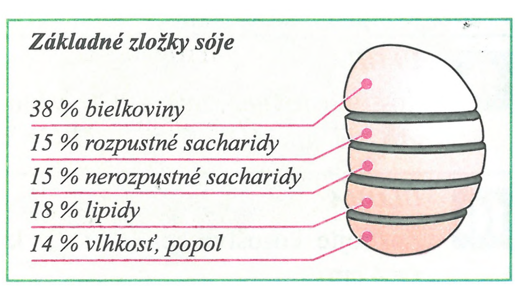
4. O koľko percent je číslo 60 väčšie ako číslo 45?

5. Jedna multivitamínová tabletka obsahuje 125 mg fosforu, čo predstavuje 13 % dennej odporučenej dávky pre dospelých.
   a) Aká je denná odporučená dávka fosforu pre dospelých?
   b) Aká je denná odporučená dávka fosforu pre deti, ak predstavuje 40 % až 70 % odporučenej dávky pre dospelých?



6. Hľuzy veľkokvetých georgín ponúkajú v objednávkovom katalógu v balení po 8 kusov. Ak si objednáme dve balenia, teda 16 kusov, zaplatíme za ne 680 Sk a ušetríme 15 %. Koľko stojí jedno balenie po 8 kusov?

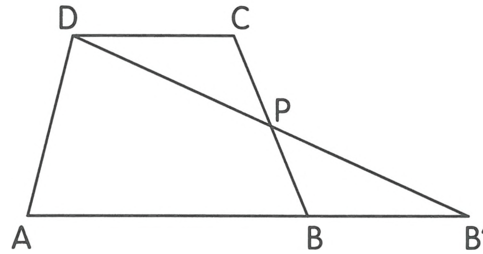
7. Pozrite si pozorne obrázok a vyjadrite, koľko gramov jednotlivých látok obsahuje 2, 5 kg sóje.



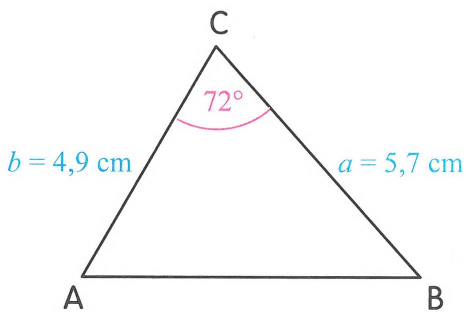
8. Vypočítajte: a) $7\frac{2}{4} : 4\frac{4}{9}$ b) $3\frac{2}{5} : 0{,}5$

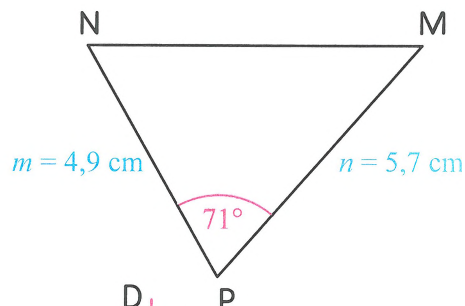
9. Určte neznámu: a) x: 8 = 80: 64 b) 0, 3: 0, 4: 0, 5 = 3: y: 5

10. Odôvodnite, že trojuholník *BB'P* je zhodný s trojuholníkom *CDP,* ak |*BP*| = |*PC*|.
Možno túto vlastnosť využiť na potvrdenie správnosti vzorca na výpočet obsahu lichobežníka?

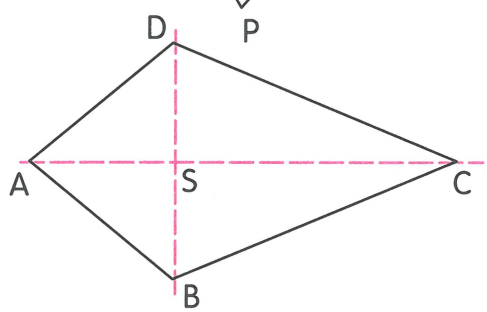


11. Sú trojuholníky *ABC* a *MNP* zhodné? Odôvodnite svoje tvrdenie.





12. Narysujte deltoid *ABC* (t. j. štvoruholník, v ktorom sú strany *AB* a *AD, BC* a *CD* zhodné), narysujte jeho uhlopriečky. Vypíšte dvojice zhodných trojuholníkov, ktoré na obrázku vznikli.



13. Narysujte obrázok pravidelného štvorbokého hranola, ktorého podstavná hrana má dĺžku 4 cm a jeho výška je 7 cm. Zostrojte jeho sieť a vypočítajte jeho povrch a objem.

14. Zostrojte trojuholník *ABC,* ak poznáte: c = 5 cm, a = 4, 5 cm, t_c = 4 cm.

15. V rovnobežníku *ABCD* poznáte: |*AB*| = *a* = 7 cm, |*BC*| = 4 cm, |∢ *ADC*|= = 110°. Je tým rovnobežník určený? Ak áno, narysujte ho.

16. Zostrojte trojuholník *ABC,* keď c = 6 cm, v_c= 4 cm, t_c = 5, 5 cm.

Matematika má v sebe niečo, čo vyvoláva v človeku nadšenie.

F. Hausdorff

2 MOCNINY A ODMOCNINY

2. 1 Druhá mocnina a tretia mocnina

PRÍKLAD

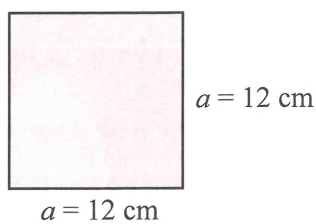
Vypočítajte obsah štvorca s dĺžkou strany 12 cm.

RIEŠENIE

Katka zapisuje a rieši:

$a = 12$ cm
S =... cm^2

$S = a.\ a$
$S = 12.\ 12$
$\underline{S = 144}$
S = 144 cm^2



Peter hovorí:
Pri výpočte obsahu štvorca
12. 12
sme zjednodušene zapisovali
$12.\ 12 = 12^2 = 144$

Odpoveď: Obsah štvorca je 144 cm^2.

ZAPAMÄTAJTE SI

Súčin dvoch rovnakých činiteľov zapisujeme:

$2.\ 2 = 2^2$	čítame:	dve na druhú
$0,7.\ 0,7 = 0,7^2$		nula celých sedem desatín na druhú
$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \left(\frac{3}{8}\right)^2$		tri osminy na druhú

Pre každé a platí: $\boldsymbol{a \,.\, a} = \boxed{a^2}$

- 2 – mocniteľ, exponent
- a – základ mocniny
- a^2 – **druhá mocnina čísla *a***

***ÚLOHA* 1**

Zapíšte ako druhú mocninu súčin čísel: $9 \,.\, 9$; $0,5 \,.\, 0,5$; $(-7) \,.\, (-7)$; $\frac{10}{11} \cdot \frac{10}{11}$

***ÚLOHA* 2**

Zapíšte v tvare súčinu: 3^2; $\left(\frac{15}{16}\right)^2$; $(-1,8)^2$

ÚLOHA

Určte druhé mocniny čísel od nuly po 20 a zapamätajte si ich.

PRÍKLAD

Vypočítajte: a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ b) $\frac{3^2}{5}$ c) $\frac{3}{5^2}$

RIEŠENIE

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ znamená $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

b) $\frac{3^2}{5} = \frac{3\,.\,3}{5} = \frac{9}{5}$

c) $\frac{3}{5^2} = \frac{3}{5\,.\,5} = \frac{3}{25}$

ÚLOHA

Vypočítajte: $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $\left(\frac{7}{8}\right)^2$ $\frac{4^2}{11}$ $\frac{15}{19^2}$ $\frac{10}{10^2}$

PROBLÉM 1

Môžeme medzi výrazy $(-2)^2$ a -2^2 dať znak rovnosti?

RIEŠENIE

Janka si myslí, že áno. Peter vraví nie, lebo

$$(-2)^2 = (-2).\,(-2) = 4 \text{ a } -2^2 = -\,(2.\,2) = -\,4$$

Odpoveď: Výrazy $(-2)^2$ a -2^2 sa nerovnajú. Zapíšeme

$$(-2)^2 \neq -2^2$$

ÚLOHA

Overte si na niekoľkých príkladoch, že Peter má v probléme 1 pravdu.

PROBLÉM 2

Zistite, či je rovnaká hodnota výrazov $(7.\,3)^2$ a $7^2.\,3^2$.

RIEŠENIE

Katka rieši: $(7.\,3)^2 = 21^2 = 441$

$7^2.\,3^2 = 49.\,9 = 441$

Odpoveď: Výrazy $(7.\,3)^2$ a $7^2.\,3^2$ sa rovnajú.

Janka je zvedavá, či platí, že $(7 + 3)^2 = 7^2 + 3^2$

Rieši: $(7 + 3)^2 = 10^2 = 100$

$7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$ $100 \neq 58 \Rightarrow (7 + 3)^2 \neq 7^2 + 3^2$

Odpoveď: Výrazy $(7 + 3)^2$ a $7^2 + 3^2$ sa nerovnajú.

ÚLOHA 6

Doplňte chýbajúce čísla vo výrazoch:

a) $(4.\ 12)^x = 4^2.\ 12^2$ b) $5^2.\ x^2 = (5.\ 7)^2$

Pre všetky a, b platí $\boldsymbol{(a\ .\ b)^2 = a^2\ .\ b^2}$

Čítame: Druhá mocnina súčinu dvoch čísel sa rovná súčinu ich druhých mocnín.

lebo $(a\ .\ b)^2 = (ab)\ .\ (ab) = a\ .\ b\ .\ a\ .\ b = a\ .\ a\ .\ b\ .\ b = a^2\ .\ b^2$

ale $\boldsymbol{(a + b)^2 \neq a^2 + b^2}$

VŠIMNIME SI

$10^2 = 100$	$0{,}1^2 = 0{,}01$
$100^2 = 10\ 000$	$0{,}01^2 = 0{,}0\ 001$
$1\ 000^2 = 1\ 000\ 000$	$0{,}001^2 = 0{,}000\ 001$
dvojnásobný počet núl	dvojnásobný počet desatinných miest

PRÍKLAD [3]

Vypočítajte a) 30^2 b) $1\ 700^2$ c) $0,\ 4^2$ d) $0,\ 08^2$

RIEŠENIE

a) $30^2 = (3.\ 10)^2 = 3^2.\ 10^2 = 9.\ 100 = 900$

b) $1\ 700^2 = (17.\ 100)^2 = 17^2.\ 100^2 = 289.\ 10\ 000 = 2\ 890\ 000$

c) $0,\ 4^2 = (4.\ 0,\ 1)^2 = 4^2.\ 0,\ 1^2 = 16.\ 0,\ 01 = 0,\ 16$

d) $0,\ 08^2 = (8.\ 0,\ 01)^2 = 8^2.\ 0,\ 01^2 = 64.\ 0,\ 000\ 1 = 0,\ 006\ 4$

ÚLOHA 7

Vypočítajte: a) 60^2 b) $(-2\ 500)^2$ c) $0{,}11^2$ d) $1{,}1^2$

VŠIMNIME SI

$15^2 = 225$	$\overset{1\,.\,2}{15^2} = 225$
$25^2 = 625$	$\overset{2\,.\,3}{25^2} = 625$
$95^2 = 9\ 025$	$\overset{9\,.\,10}{95^2} = 9\ 025$

ÚLOHA 8

Vysvetlite postup výpočtu druhej mocniny čísla, ktoré má na mieste jednotiek číslicu 5.

9 *ÚLOHA*

Vypočítajte spamäti: 35^2 75^2 105^2 $4,5^2$ $8,5^2$

[4] *PRÍKLAD*

Riešte s použitím kalkulačky: a) 89^2 b) $0,256^2$

RIEŠENIE

a)

Tlačidlá	Displej	Vysvetlenie
C	0.	Kalkulačka je pripravená
8 9	89.	Zapísali sme základ
* =	7921.	Vykonané: $89^2 = 7\,921$

b)

Tlačidlá	Displej	Vysvetlenie
C	0.	Kalkulačka je pripravená
0 . 2 5 6	0.256	Zapísali sme základ
* =	0.065536	Vykonané: $0,256^2 = 0,065\,536$

Na niektorých kalkulačkách namiesto tlačidla $\boxed{*}$ používame tlačidlo $\boxed{x^2}$.

10 *ÚLOHA*

Vypočítajte: 198^2; 539^2; $0,459^2$; $28,07^2$. Pomôžte si kalkulačkou.

? *PROBLÉM 3*

Predstavte si, že nemáte ani kalkulačku, ani tabuľky druhých mocnín čísel. Dokážete bez násobenia čísel 43 . 43 vypočítať druhú mocninu čísla 43?

RIEŠENIE

Janka navrhuje takýto postup:

Číslo 43 si rozložíme na súčet čísel 40 a 3.

$$43 = 40 + 3$$
$$43^2 = (40 + 3)^2$$

Umocníme oba sčítance a vzniknuté mocniny sčítame:

$$\begin{array}{rr} 40^2 = & 1\,600 \\ 3^2 = & \underline{\quad 9} \\ & 1\,609 \\ & \underline{+ \quad ?} \\ & 1\,849 \end{array}$$

Pri skúške správnosti Janka zistí, že 43 . 43 = 1 849

Kde urobila Janka chybu?

Na pomoc prichádza Peter a vysvetľuje:

$$43^2 = (40 + 3)^2$$

$$\underbrace{2 \,.\, 40 \,.\, 3}$$

$$40^2 + 2 \,.\, 40 \,.\, 3 + 3^2$$

$$1\,600 + \quad 240 \quad + 9 = 1\,849$$

[5] *PRÍKLAD*

Vypočítajte rozkladom na súčet dvoch čísel: a) 67^2 b) 503^2

RIEŠENIE

a) $67^2 = (60 + 7)^2 = 60^2 + 2 . 60 . 7 + 7^2 =$
$= 3\,600 + 840 + 49 = 4\,489$

b) $503^2 = (500 + 3)^2 = 500^2 + 2 . 500 . 3 + 3^2 =$
$= 250\,000 + 3\,000 + 9 = 253\,009$

11 ***ÚLOHA***

Pokúste sa vyjadriť vzorcom, ako vypočítame druhú mocninu súčtu dvoch čísel.

[6] ***PRÍKLAD***

Vypočítajte: a) 69^2 b) 87^2

RIEŠENIE

a) $69^2 = (70 - 1)^2 =$
$= 70^2 + 2 . 70 . (-1) + (-1)^2 =$
$= 4\,900 \quad - 140 \quad + \quad 1 \quad = 4\,761$

Skúška: $69^2 = 4\,761$

b) $87^2 = (90 - 3)^2 =$
$= 90^2 + 2 . 90 . (-3) + (-3)^2 =$
$= 8\,100 \quad - 540 \quad + \quad 9 \quad = 7\,569$

Skúška: $87^2 = 7\,569$

12 ***ÚLOHA***

Vyjadrite vzorcom druhú mocninu rozdielu dvoch čísel.

13 ***ÚLOHA***

Vypočítajte: a) 63^2 b) 108^2 c) 47^2 d) 210^2

[7] ***PRÍKLAD***

Nádrž, ktorá má tvar kocky s hranou 6 dm napĺňame ekologickým postrekom.
Koľko litrov postreku bude v plnej nádrži?

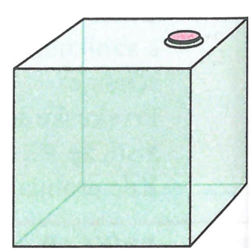
RIEŠENIE

Eva zapisuje a rieši:

$a = 6$ dm
$V = \dots$ dm^3 $= \dots$ l
$V = a . a . a$
$V = 6 . 6 . 6$
$V = 216$
$V = 216$ dm^3 $= 216$ l

Martin použije skrátený zápis:

$V = a . a . a = a^3$
$V = 6^3$
$V = 216$
$V = 216$ dm^3 $= 216$ l



Odpoveď: V nádrži je 216 litrov ekologického postreku.

ZAPAMÄTAJTE SI

Súčin troch rovnakých činiteľov zapisujeme skrátene:

napr. $7 .\ 7 .\ 7 = 7^3$ čítame: sedem na tretiu

$0,5 .\ 0,5 .\ 0,5 = 0,5^3$ nula celých päť desatín na tretiu

Pre každé a platí: $\boldsymbol{a . a . a} = \boxed{a^3}$

mocniteľ

exponent

základ mocniny

tretia mocnina čísla *a*

14 ***ÚLOHA***

Zapíšte skrátene: $12 .\ 12 .\ 12$ $\quad 0,09 .\ 0,09 .\ 0,09$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

15 ***ÚLOHA***

Zapíšte v tvare súčinu: 17^3 $\quad 1,5^3$ $\quad 320^3$ $\quad \left(\frac{4}{9}\right)^3$

16 ***ÚLOHA***

Určte tretie mocniny čísel: $2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{5}$

PROBLÉM 4

Porovnajte hodnoty výrazov: $(-2)^3$ a -2^3

RIEŠENIE

Janka tvrdí, že výsledky sú rovnaké. Peter nás o tom presvedčí:

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$-2^3 = -(2 .\ 2 .\ 2) = -8$$

Odpoveď: Jankino tvrdenie je správne. Hodnoty výrazov $(-2)^3$ a -2^3 sú rovnaké.

Tretia mocnina záporného čísla je záporné číslo.
Tretia mocnina kladného čísla je kladné číslo.

17 ***ÚLOHA***

Čo je tretia mocnina nuly?

[8] ***PRÍKLAD***

Porovnajte výsledky: a) $(3 .\ 4)^3$ a $3^3 .\ 4^3$ b) $(2 + 3)^3$ a $2^3 + 3^3$

RIEŠENIE

a) $(3 .\ 4)^3 = 12^3 = 1\,728$

$3^3 .\ 4^3 = 27 .\ 64 = 1\,728$

Odpoveď: $(3 .\ 4)^3 = 3^3 .\ 4^3$

b) $(2 + 3)^3 = 5^3 = 125$

$2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35 \quad 125 \neq 35$

Odpoveď: $(2 + 3)^3 \neq 2^3 + 3^3$

Pre všetky a, b platí $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$
Tretia mocnina súčinu dvoch čísel sa rovná súčinu ich tretích mocnín.

VŠIMNIME SI

$10^3 = 1\,000$
$100^3 = 1\,000\,000$
$1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$

trojnásobný počet núl

$0,1^3 = 0,001$
$0,01^3 = 0,000\,001$
$0,001^3 = 0,000\,000\,001$

trojnásobný počet desatinnýchmiest

18 ***ÚLOHA***

Vypočítajte: 20^3 500^3 $0,03^3$ $0,001^3$

Oveľa rýchlejšie, pohodlnejšie a s menšou pravdepodobnosťou omylu určujeme druhé a tretie mocniny čísel pomocou kalkulačky alebo tabuliek.

Ukážka z Tabuliek pre základné školy čísel 1 až 40

1. Druhá mocnina čísla
2. Druhá odmocnina čísla
3. Tretia mocnina čísla
4. Tretia odmocnina čísla

	1	2	3	4
n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
0	**0**	**0,00**	**0**	**0,00**
1	1	1,00	1	1,00
2	4	1,41	8	1,26
3	9	1,73	27	1,44
4	16	2,00	64	1,50
5	25	2,24	125	1,71
6	36	2,45	216	1,82
7	49	2,65	343	1,91
8	64	2,83	512	2,00
9	81	3,00	729	2,08
10	**100**	**3,16**	**1 000**	**2,15**
11	121	3,32	1 331	2,22
12	144	3,46	1 728	2,29
13	169	3,61	2 197	2,35
14	196	3,74	2 744	2,41
15	225	3,87	3 375	2,47
16	256	4,00	4 096	2,52
17	289	4,12	4 913	2,57
18	324	4,24	5 832	2,62
19	361	4,36	6 859	2,67
20	**400**	**4,47**	**8 000**	**2,71**
n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$

	1	2	3	4
n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
21	441	4,58	9 261	2,76
22	484	4,69	10 648	2,80
23	529	4,80	12 167	2,84
24	576	4,90	13 824	2,88
25	625	5,00	15 625	2,92
26	676	5,10	17 576	2,96
27	729	5,20	19 683	3,00
28	784	5,29	21 952	3,04
29	841	5,39	24 389	3,07
30	**900**	**5,48**	**27 000**	**3,11**
31	961	5,57	29 791	3,14
32	1 024	5,66	32 768	3,17
33	1 089	5,74	35 937	3,21
34	1 156	5,83	39 304	3,24
35	1 225	5,92	42 875	3,27
36	1 296	6,00	46 656	3,30
37	1 369	6,08	50 653	3,33
38	1 444	6,16	54 872	3,36
39	1 521	6,24	59 310	3,39
40	**1 600**	**6,32**	**64 000**	**3,42**
n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$

[9]

PRÍKLAD

Využite tabuľky pri výpočtoch: a) $0{,}6^2$ a $0{,}6^3$ b) $75{,}8^2$ a $75{,}8^3$

RIEŠENIE

Janka rieši takto:

a) $0,\ 6^2 = (6.\ 0,\ 1)^2 = 6^2.\ 0,\ 1^2 = 36.\ 0,\ 01 = 0,\ 36$

$0,\ 6^3 = (6.\ 0,\ 1)^3 = 6^3.\ 0,\ 1^3 = 216.\ 0,\ 001 = 0,\ 216$

b) $75,\ 8^2 = (758.\ 0,\ 1)^2 = 574\ 564.\ 0,\ 01 = 5\ 745,\ 64$

$75,\ 8^3 = (758.\ 0,\ 1)^3 = 435\ 519\ 512.\ 0,\ 001 =$

$= 435\ 519,\ 512$

Peter píše desatinné čísla v tvare zlomku a rieši:

a) $0{,}6^2 = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100} = 0{,}36$

$0{,}6^3 = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{216}{1\ 000} = 0{,}216$

b) $75{,}8^2 = \left(\frac{758}{10}\right)^2 = \frac{574\ 564}{100} = 5\ 745{,}64$

$75{,}8^3 = \left(\frac{758}{10}\right)^3 = \frac{435\ 519\ 512}{1\ 000} = 435\ 519{,}512$

19

ÚLOHA

Vypočítajte $21{,}3^2$ $\quad 0{,}001\ 2^3$ $\quad 7{,}23^2$ $\quad 5{,}09^3$

?

***PROBLÉM* 5**

Vypočítajte druhú mocninu čísla 79,28.

RIEŠENIE

V tabuľkách nájdeme iba druhú mocninu trojciferného čísla, preto 79, 28 zaokrúhlime na 79, 3.

$$79,\ 3^2 = (793.\ 0,\ 1)^2 = 793^2.\ 0,\ 1^2 = 628\ 849.\ 0,\ 01 = 6\ 288,\ 49$$

20

ÚLOHA

Vypočítajte pomocou tabuliek: $350,\ 8^2$; $49{,}25^2$; $6{,}492^2$; $8\ 046^2$; $9{,}1005^2$

$4{,}051^3$; $92{,}41^3$; $7\ 629^3$

[10]

PRÍKLAD

Vypočítajte: a) $\dfrac{(-5)^2 - 2^2}{-2^3 - 4}$ b) $\dfrac{4\ .\ 5^2 - (2\ .\ 3)^2}{-7^2 - 2^3}$

RIEŠENIE

a) $\dfrac{(-5)^2 - 2^2}{-2^3 - 4} = \dfrac{25 - 4}{-8 - 4} = \dfrac{21}{-12} = -\dfrac{7}{4} = -1\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{4\ .\ 5^2 - (2\ .\ 3)^2}{-7^2 - 2^3} = \dfrac{4\ .\ 25 - 36}{49 - 8} = \dfrac{100 - 36}{41} = \dfrac{64}{41} = 1\dfrac{23}{41}$

CVIČENIA

1. Zapíšte v tvare mocniny: 3. 3; 7. 7; 0, 2. 0, 2; 700. 700; 0, 001. 0, 001; 0. 0; (-2)(-2); (-8)(-8); (-0, 1)(-0, 1)

2. Zapíšte v tvare súčinu: 15^2; 28^2; $0,08^2$; 900^2; $(-14)^2$; $(-800)^2$; $(-0,4)^2$

3. Umocnite spamäti: a) 9^2; 6^2; $0,5^2$; $0,8^2$; $0,02^2$; 10^2; 100^2; $1,1^2$; $0,001^2$; 700^2; 150^2; $(-12)^2$; -3^2

   b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; $\left(\frac{7}{8}\right)^2$; $\frac{2^2}{11}$; $\frac{5^2}{100}$; $\frac{17}{12^2}$; $\frac{8}{11^2}$

   c) $(2.3)^2$; $(4.5)^2$; $\left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)^2$; $(10.4)^2$; $(6.5)^2$

   d) 3^3; $0,2^3$; 4^3; $0,4^3$; 400^3; $0,1^3$; 10^3 $(-2)^3$

   e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$; $\frac{3^3}{7}$; $\frac{2^3}{11}$; $\frac{3}{10^3}$

   f) $(2.2)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{3}\cdot 4\right)^3$; $\left(\frac{1}{10}\cdot 2\right)^3$

4. Vypočítajte pomocou tabuliek:

   a) 48^2; 127^2; 254^2; 393^2; 427^2; 853^2; 967^2

   b) $6,9^2$; $1,25^2$; $0,254^2$; $48,7^2$; $5,09^2$; $9\,720^2$

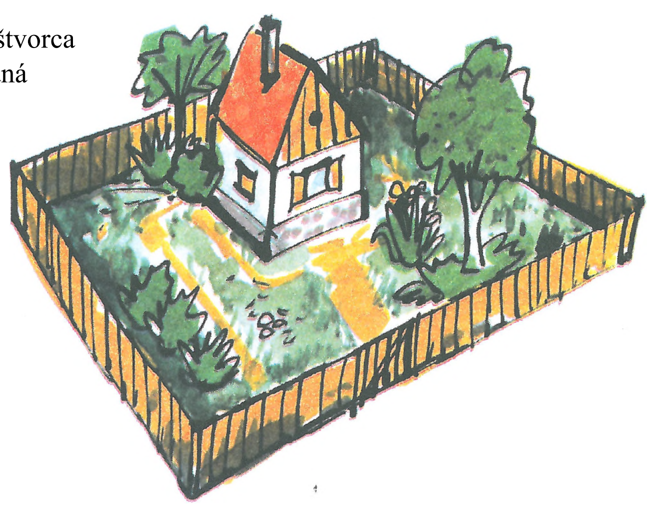
   c) $421,3^2$; $98,15^2$; $4\,268^2$; $8\,046^2$; $9,456^2$

   d) 75^3; 192^3; 436^3; 384^3; 935^3

   e) $3,2^3$; $5,21^3$; $5,07^3$; $0,21^3$; $2\,380^3$; $14\,500^3$

   f) $(-4,1)^2$; $(-3,8)^3$; $(-0,008\,1)^2$; $-2,5^3$

5. Aká časť záhrady tvaru štvorca s dĺžkou 50 m je zastavaná chatkou, ktorej pôdorys má tvar štvorca s dĺžkou strany 6 m?



6. Vypočítajte odstredivú silu $O = \frac{G \cdot v^2}{g \cdot r}$, ktorá vznikla otáčaním telesa s hmotnosťou $G = 400$ kg rýchlosťou v = 9, 5 m/s na polomere r = 1 m, ak g = 10 m/s.

2. 2 Odmocnina

PROBLÉM 1

Aká je dĺžka strany štvorca, ktorého obsah je 1 m², 4 m², 25 m², 64 m², 100 m²?

RIEŠENIE

Riešime tabuľkou:

S (m²)	1	4	25	64	100
a (m)	1	2	5	8	10

Čísla 1, 2, 5, 8, 10, nazývame druhými odmocninami čísel 1, 4, 25, 64, 100.

Vieme, že platí: $2^2 = 4$ a $\sqrt{4} = 2$

$10^2 = 100$ a $\sqrt{100} = 10$

$\boxed{\sqrt{a}}$ — znak odmocnenia
— základ odmocniny (odmocnenec)
— **druhá odmocnina čísla a, $a \geq 0$**

Všeobecne pre $a \geq 0$ platí: $a \,.\, a = a^2$

$\sqrt{a^2} = a$

Ak $a \geq 0$, $b \geq 0$, tak $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

PRÍKLAD 1

Vypočítajte: $\sqrt{144}$; $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt{\frac{16}{81}}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{7{,}2^2}$

RIEŠENIE

$\sqrt{144} = 12$, lebo $12^2 = 144$

$\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$, lebo $0{,}7^2 = 0{,}49$

$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, lebo $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$

$\sqrt{0} = 0$, lebo $0^2 = 0$

$\sqrt{7{,}2^2} = 7{,}2$, lebo $7{,}2^2 = 7{,}2^2$

VŠIMNIME SI

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{10\,000} = 100$

$\sqrt{1\,000\,000} = 1\,\underbrace{000}$

polovičný počet núl

$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

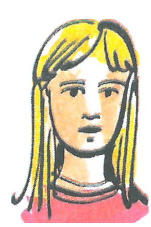
$\sqrt{0{,}000\,1} = 0{,}01$

$\sqrt{0{,}000\,001} = 0{,}\underbrace{001}$

polovičný počet desatinných miest

PRÍKLAD 2

Zistite, či sa rovnajú výrazy: $\sqrt{9 \,.\, 25}$ a $\sqrt{9} \,.\, \sqrt{25}$



RIEŠENIE

Zuzka rieši:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{9 \,.\, 25} = 255 = 15 \\ \sqrt{9} \,.\, \sqrt{25} = 3 \,.\, 5 = 15 \end{array}\right\} \text{výsledky sú rovnaké}$$

Odpoveď: Výrazy $\sqrt{9 \,.\, 25}$ a $\sqrt{9} \,.\, \sqrt{25}$ sa rovnajú.

ÚLOHA

Zvoľte si druhú odmocninu súčinu dvoch čísel, ktoré viete odmocniť spamäti a ukážte, že:
Pre všetky nezáporné čísla *a, b* platí:

Druhá odmocnina súčinu sa rovná súčinu druhých odmocnín.

PRÍKLAD

Vypočítajte: a) $\sqrt{14\,400}$ b) $\sqrt{0{,}006\,4}$

RIEŠENIE

Peter navrhuje rozložiť dané číslo na súčin čísel, ktoré vieme odmocniť spamäti takto:

a) $\sqrt{14\,400} = \sqrt{144\,.\,100} = \sqrt{144}\,.\,\sqrt{100} = 12\,.\,10 = 120$

Skúška: $120^2 = 14\,400$

b) $\sqrt{0{,}006\,4} = \sqrt{64\,.\,0{,}000\,1} = \sqrt{64}\,.\,\sqrt{0{,}000\,1} = 8\,.\,0{,}01 = 0{,}08$

Skúška: $0{,}08^2 = 0{,}006\,4$

PROBLÉM 2

Odmocnite číslo 269 125.

Pretože Janka nevie nájsť v tabuľkách $\sqrt{269\,125}$ navrhuje toto číslo zaokrúhliť takto:

$$\sqrt{269\,125} \doteq \sqrt{269\,000}$$

Ondrej ju upozorňuje na chybu, či skôr zdĺhavosť pri riešení,

$$\text{lebo } \sqrt{269\,000} = \sqrt{269}\,.\,\sqrt{1\,000}$$

$$\underbrace{16{,}4\ .\ 31{,}62}_{\text{dlho násobíme}} \doteq 518{,}568$$

Ondrej navrhuje takýto postup:

$$\sqrt{269\,125} \doteq \sqrt{270\,000} = \sqrt{27}\,.\,\sqrt{10\,000} \doteq 5{,}196\,.\,100 = 519{,}6$$

V každom prípade sme zistili len približnú hodnotu $\sqrt{269\,125}$.

ÚLOHA

Vypočítajte pomocou tabuliek a výsledky porovnajte s výpočtom na kalkulačke:

a) $\sqrt{0{,}9}$ b) $\sqrt{72{,}46}$ c) $\sqrt{863{,}567}$

PRÍKLAD

Vypočítajte: $\sqrt{20}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt{48}$

RIEŠENIE

Výsledky nájdeme priamo v tabuľkách: $\sqrt{20} = 4{,}47$ $\sqrt{75} = 8{,}66$ $\sqrt{48} = 6{,}93$

Peter navrhuje takýto postup: Každé z týchto čísel vieme rozložiť na súčin dvoch čísel, z ktorých jedného činiteľa vieme odmocniť:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \,.\, 5} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \,.\, 3} = \sqrt{25} \,.\, \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \,.\, 3} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

3 ***ÚLOHA***

Overte výpočtom, že $2\sqrt{5} = 4{,}47$ $5\sqrt{3} = 8{,}66$ $4\sqrt{3} = 6{,}93$

4 ***ÚLOHA***

Vypočítajte:

a) $7\sqrt{25} - 3\sqrt{25}$

b) $\dfrac{\sqrt{169}}{26} + \sqrt{\dfrac{9}{25}}$

c) $3\sqrt{49} + 5\sqrt{9} + 7\sqrt{16}$

d) $-4\sqrt{100 + 189} - 10\sqrt{0{,}25}$

5 ***PRÍKLAD***

V tabuľke sú dané objemy kociek. Doplňte chýbajúce údaje.

V (cm^3)	8	64	125	729
a (m)	?	?	?	?

RIEŠENIE

Vieme, že objem kocky $V = a^3$. Ak $a^3 = 8$, hľadáme číslo, ktorého tretia mocnina je číslo osem. Je to číslo 2, lebo $2^3 = 8$. Hľadáme tretie odmocniny čísel 8, 64, 125 a 729. Hľadanými číslami sú 2, 4, 5 a 9.

Pri tretej odmocnine čísla pri znaku odmocnenia píšeme malú trojku, ktorú nazývame odmocniteľ.

Píšeme: $\sqrt[3]{8} = 2$
Čítame: tretia odmocnina z čísla osem sa rovná dva.

$\boxed{\sqrt[3]{a}}$

odmocniteľ
znak odmocnenia
základ odmocniny (odmocnenec)
tretia odmocnina čísla *a*

Všeobecne pre $a \geq 0$ platí: $a \,.\, a \,.\, a = a^3$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

Ak $a \geq 0$, $b \geq 0$, tak $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$

5 ***ÚLOHA***

Vyhľadajte v tabuľkách $\sqrt[3]{1}$ $\sqrt[3]{0}$ $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[3]{923}$

6

ÚLOHA

Máme natrieť nádrž tvaru kocky emailovou farbou zvonka i zvnútra. Zanedbáme otvor do nádrže, ktorá je uzatvorená zo všetkých strán. Zistite ostatné údaje, keď vieme iba to, že v nádrži je 12 167 000 1 vzduchu.

CVIČENIA

1. Vypočítajte spamäti:
   a) $\sqrt{36}$; $\sqrt{3\,600}$; $\sqrt{0{,}36}$; $\sqrt{0{,}000\,036}$
   b) $\sqrt{81}$; $\sqrt{8\,100}$; $\sqrt{0{,}008\,1}$; $\sqrt{0{,}000\,081}$

2. Využite tabuľky pri výpočte druhých odmocnín čísel a výsledky overte pomocou kalkulačky:
   a) 29; 328; 704; 995
   b) 8 300; 70 000; 26 500; 450 000
   c) 0, 21; 0, 46; 0, 0081; 3, 08
   d) 1, 6; 0, 004; 0, 064; 0, 008
   e) 51 326; 421 539; 192, 32; 14, 26

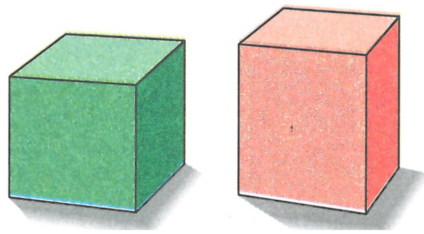
3. Vypočítajte spamäti:
   a) $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{0{,}125}$; $\sqrt[3]{0{,}008}$; $\sqrt[3]{216}$; $\sqrt[3]{0{,}064}$
   b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$; $\sqrt[3]{\frac{343}{729}}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{1\,000\,000}}$
   c) $\sqrt[3]{8\,.\,8}$; $\sqrt[3]{27\,.\,8}$; $\sqrt[3]{25\,.\,5}$; $\sqrt[3]{720\,.\,0}$; $\sqrt[3]{40\,.\,200}$

4. Aká dlhá je hrana kocky, ktorej objem je 9 261 cm^3?

5. Vypočítajte pomocou tabuliek:
   a) 43; 189; 338; 765; 902
   b) 0, 041; 0, 835; 432 000; 0, 001; 4, 8

6. Pozemok tvaru obdĺžnika s rozmermi 12 m a 27 m má rovnakú výmeru ako susedný štvorcový pozemok oddelený chodníkom. Na ktorý z pozemkov sme potrebovali viac pletiva na oplotenie? O koľko viac?

7. Objem kocky a kvádra je zhodný a rovná sa 3 375 m^3. Vypočítajte rozmery kvádra, ak jeden jeho rozmer je zhodný s rozmerom kocky a ďalšie dva rozmery sú vyjadrené celými číslami. Nájdite aspoň dve riešenia.



2. 3 Mocniny s prirodzeným mocniteľom

2. 3. 1 Operácie s mocninami s prirodzeným mocniteľom, mocniteľ nula

PROBLÉM 1

Napíšte súčin: a) piatich rovnakýchčiniteľov
b) siedmich rovnakých činiteľov.

RIEŠENIE

Peter navrhuje:

a) Hanka píše: 2 . 2 . 2 . 2 . 2 .... 2^5
(-3)(-3)(-3)(-3)(-3) .... $(-3)^5$
$a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a$ .... a^5

b) Ivan zapisuje: 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5 .... 5^7
$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^7$
$x.\,x.\,x.\,x.\,x.\,x.\,x$ .... x^7

ZAPAMÄTAJTE *SI*

Súčin rovnakých činiteľov zapisujeme v tvare

$$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,\dots\,.\,a}_{n \text{ činiteľov}}$$

Výraz a^n je n–tá mocnina ľubovoľného čísla, kde n je prirodzené číslo.

$\boxed{a^n}$ — n: mocniteľ – exponent; a: základ mocniny; a^n: ***n*–tá mocnina čísla *a***

ÚLOHA 1

Napíšte súčin a) troch ľubovoľných čísel
b) ôsmich ľubovoľných čísel

ÚLOHA 2

Zapíšte v tvare mocniny: a) 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9
b) 0,7 . 0,7 . 0,7
c) 10. 10. 10. 10

PROBLÉM 2

Mocniteľ je prirodzené číslo. Aký môže byť základ?
Ako to ovplyvní výsledok?

RIEŠENIE

Katka uvažuje takto:

1. Ak $a = 0$, potom platí: $0^1 = 0^2 = 0^3 = \dots = 0^n = 0$

Platí: $\boxed{a^n = 0, \text{ ak } a = 0}$

2. Ak $a > 0$, potom mocnina je kladne číslo

$2^3 = 8 \qquad 4^5 = 1\,024$

3. Ak $a < 0$ →

- n je párne, mocnina je kladné číslo
  napríklad $(-3)^2 = 9 \qquad (-5)^4 = 625$
- n je nepárne, mocnina je záporné číslo
  napríklad $(-3)^3 = -27 \qquad (-5)^3 = -125$

$a < 0$ →

- $a^{2n} > 0$
- $a^{2n-1} < 0$

$n \in N$

POZNÁMKA

Párne čísla majú tvar $2n$. *Nepárne čísla majú tvar* $2n - 1$, *resp.* $2n + 1$, *kde* $n \in N$, *resp.* $n \in Z$.

ÚLOHA

Aké znamienka majú hodnoty výrazov: $(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \dots, (-1)^n$?

ÚLOHA

Predpokladajte, že $n = 1$. Aké budú hodnoty mocnín?

2.3.2 Sčitovanie a odčitovanie mocnín

PRÍKLAD

Zjednodušte výrazy: a) $5x^2 - 3 + 7x^2 + 2$ b) $2x^3 + 5x^2$

RIEŠENIE

a) $5x^2 - 3 + 7x^2 + 2 = (5x^2 + 7x^2) + (-3 + 2) = x^2(5 + 7) + (-3 + 2) = 12x^2 - 1$

b) $2x^3 + 5x^2$ - nemôžeme vynímať, a preto:

Sčitovať a odčitovať môžeme iba tie mocniny, ktoré majú **rovnaký základ aj rovnakého mocniteľa (exponent).**

ÚLOHA

Zjednodušte:

a) $12x^5 + 10x^4 - 7x^3 + 2x^5 - 3x^4 + 5x^3$

b) $4a^2 - b - (3a^2 - b) + 7a^2 + 5$

c) $0{,}21k^4 - 1{,}4k^3 - 0{,}21k^3 - 12k^4$

d) $-76ab^2 - (-32a^2) + 21\,ab^2 - 40a^2b + 2ab$

2.3.3 Súčin a podiel mocnín s rovnakým základom

PRÍKLAD

Vypočítajte: a) $3^3 . 3^5$ b) $a^4 . a^3$ c) $2x . 3x^3$

RIEŠENIE

Ivan rieši: a) $3^3 . 3^5 = \underbrace{3 . 3 . 3}_{\text{3 činitele}} . \underbrace{3 . 3 . 3 . 3 . 3}_{\text{5 činiteľov}} = \underbrace{3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3}_{\text{8 činiteľov}} = 3^8$

Peter b) $a^4 . a^3 = \underbrace{a . a . a . a}_{\text{4 činitele}} . \underbrace{a . a . a}_{\text{3 činitele}} = \underbrace{a . a . a . a . a . a . a}_{\text{7 činiteľov}} = a^7$

c) $2x . 3x^3 = 2 . x . 3 . x . x . x = 2 . 3 . x . x . x . x = 6x^4$

Peter má nápad:

$$3^3 . 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$$
$$a^4 . a^3 = a^{4+3} = a^7$$
$$2^x . 3x^3 = 6 . x^{1+3} = 6x^4$$

Mocniny s rovnakým základom násobíme tak, že základ umocníme **súčtom mocniteľov.**

$$\boldsymbol{a^m . a^n = a^{m+n}} \qquad m,n \in N$$

ÚLOHA

Vypočítajte: a) $7^{10} . 7^6$ b) $x^2 . x^{11}$ c) $5d^2 . (-7d)$ d) $(x + 1)^3 (x + 1)^7$

ÚLOHA

Zistite, či platí pravidlo o násobení mocnín aj pre viac činiteľov.

PROBLÉM 3

Aké prípady môžu nastať pri delení mocnín s rovnakým základom?

RIEŠENIE

Katka rieši problém takto: Základ musí byť rovnaký, ale mocniteľ delenca a deliteľa môžu byť rôzne alebo rovnaké čísla.

1. Mocniteľ delenca je väčší ako mocniteľ deliteľa:

Napríklad: $5^5 : 5^3 = \frac{5^5}{5^3} = \frac{5 . 5 . 5 . 5 . 5}{5 . 5 . 5} = \frac{1 . 1 . 1 . 5 . 5}{1 . 1 . 1} = \frac{5^2}{1} = 5^2$

$$x^7 : x^4 = \frac{x^7}{x^4} = \frac{x . x . x . x . x . x . x}{x . x . x . x} = \frac{1 . 1 . 1 . 1 . x . x . x}{1 . 1 . 1 . 1} = \frac{x^3}{1} = x^3$$

$x \neq 0$

Peter dopĺňa Katku: $5^5 : 5^3 = 5^{5-3} = 5^2$

$$x^7 : x^4 = x^{7-4} = x^3$$

Mocniny s rovnakým základom delíme tak, že základ umocníme **rozdielom mocniteľov.**

Ak $m > n$, $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} \quad m, n \in N \;\; a \neq 0}$

2. Mocniteľ delenca aj deliteľa sa rovnajú:

Napríklad:

$$\left.\begin{aligned} &2^3 : 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = \frac{2\,.\,2\,.\,2}{2\,.\,2\,.\,2} = \frac{1\,.\,1\,.\,1}{1\,.\,1\,.\,1} = 1 \\ &2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 \end{aligned}\right\} \boxed{2^0 = 1}$$

$$\left.\begin{aligned} &x^4 : x^4 = \frac{x^4}{x^4} = \frac{x\,.\,x\,.\,x\,.\,x}{x\,.\,x\,.\,x\,.\,x} = \frac{1\,.\,1\,.\,1\,.\,1}{1\,.\,1\,.\,1\,.\,1} = 1 \\ &x^4 : x^4 = x^{4-4} = x^0 \end{aligned}\right\} \boxed{x^0 = 1}$$

$x \neq 0$

Každé číslo (rôzne od nuly) umocnené na 0 (nultú) sa rovná 1.

$\boxed{a^0 = 1 \qquad a \neq 0}$

3. Mocniteľ delenca je menší ako mocniteľ deliteľa:

$$6^2 : 6^6 = \frac{6^2}{6^6} = \frac{6\,.\,6}{6\,.\,6\,.\,6\,.\,6\,.\,6\,.\,6} = \frac{1\,.\,1}{1\,.\,1\,.\,6\,.\,6\,.\,6\,.\,6} = \frac{1}{6^4}$$

$$x^3 : x^5 = \frac{x^3}{x^5} = \frac{x\,.\,x\,.\,x}{x\,.\,x\,.\,x\,.\,x\,.\,x} = \frac{1\,.\,1\,.\,1}{1\,.\,1\,.\,1\,.\,x\,.\,x} = \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$$

$$8a^6b^5 : 4a^7b^2 = \frac{8\,.\,a^6\,.\,b^5}{4\,.\,a^7\,.\,b^2} = \frac{2\,.\,1\,.\,b^3}{1\,.\,a\,.\,1} = \frac{2b^3}{a} \qquad a \neq 0,\; b \neq 0$$

Peter počíta takto:

$$6^2 : 6^6 = \frac{1}{6^{6-2}} = \frac{1}{6^4}$$

$$x^3 : x^5 = \frac{1}{x^{5-3}} = \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$$

Ak $m < n$, $\boxed{a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \quad m, n \in N \;\; a \neq 0}$

8 ***ÚLOHA***

Vydeľte:

a) $3^5 : 3^2$ $\quad(-5)^7 : (-5)^3$ $\quad(-4)^4 : 4^2$

b) $12a^3 : 6a$ $\quad 4x^{12} : 8x^5$ $\quad(7a + 2b)^{10} : (7a + 2b)^7$

9 **ÚLOHA**

Vydeľte: $9^2 : 9^2$ $\quad(2a - 1)^2 : (2a - 1)^2$ $\quad(-19)^4 : (-19)^4$

10 **ÚLOHA**

Vydeľte:

a) $a^4 : a^9$ $\quad(-7)^3 : (-7)^8$ $\quad(-5)^6 : 5^{16}$

b) $8a^6b : 4a^7b^5$ $\quad 3x^5y : 6x^6y^3$ $\quad -(a + b) : (a + b)^{10}$

11 **ÚLOHA**

Vypočítajte: $10^2 : 10^5$ $\quad 10^7 : 10^9$ $\quad 10^3 : 10^{10}$ $\quad 50^3 : 50^7$

2.3.4 Mocnina súčinu a podielu

[3] ***PRÍKLAD***

Umocnite: a) $(x \,.\, y)^5$ b) $(4ab)^3$

RIEŠENIE

a) $(xy)^5 = xy \,.\, xy \,.\, xy \,.\, xy \,.\, xy = x \,.\, x \,.\, x \,.\, x \,.\, x \,.\, y \,.\, y \,.\, y \,.\, y \,.\, y = x^5y^5$

b) $(4ab)^3 = 4ab \,.\, 4ab \,.\, 4ab = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, b = 4^3a^3b^3$

Súčin umocníme tak, že umocníme každého činiteľa.

$$\boxed{(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n \qquad n \in N}$$

12 ***ÚLOHA***

Vypočítajte: a) $(7 \,.\, 3)^3$ b) $(-8x)^2$ c) $(-7xy)^3$

[4] ***PRÍKLAD***

Umocnite: a) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^5$

RIEŠENIE

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3}$

b) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^5 = \frac{2x}{3y} \cdot \frac{2x}{3y} \cdot \frac{2x}{3y} \cdot \frac{2x}{3y} \cdot \frac{2x}{3y} = \frac{2^5x^5}{3^5y^5}$ $\qquad y \neq 0$

Zlomok umocníme tak, že umocníme čitateľa aj menovateľa zlomku.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0, \quad n \in N}$$

13 ***ÚLOHA***

Umocnite: a) $\left(\frac{14}{19}\right)^2$ b) $\left(\frac{7abc}{20ab}\right)^3$ c) $\left(-\frac{4xy}{5z}\right)^4$

2.3.5 Umocňovanie mocnín

[5] ***PRÍKLAD***

Umocnite: a) $(2^3)^2$ b) $(a^2)^4$

RIEŠENIE

a) Ivan počíta: $(2^3)^2$ znamená $2^3 . 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$

$(a^2)^4$ znamená $a^2 \,.a^2 \,.a^2 \,.a^2 = a^{2+2+2+2} = a^8$

b) Peter rieši príklad takto: $(2^3)^2 = 2^{3\,.\,2} = 2^6$

$(a^2)^4 = a^{2\,.\,4} = a^8$

Mocninu umocníme tak, že základ umocníme súčinom mocniteľov.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n} \qquad m, n \in N}$$

14 ***ÚLOHA***

Umocnite: a) $(4x^2y^3z)^3$ b) $\left(-\frac{5}{7}xy^5\right)^2$

15 ***ÚLOHA***

Umocnite: a) $\left(\frac{1}{x+2}\right)^2$ b) $\left(\frac{x}{a-b}\right)^5$ c) $\left[\frac{a+b}{(x+y)^2}\right]^3$

16 ***ÚLOHA***

Umocnite: $[m^2(2^m - m^2)]^3$

CVIČENIA

1. Napíšte ako mocninu, ktorá má:
   a) základ 5 a mocniteľa 7
   b) základ -9 a mocniteľa 1
   c) základ 8 a mocniteľa 5
   d) základ a a mocniteľa $2b$
   e) základ $x + 1$ a mocniteľa n
   f) základ $a + 2b$ a mocniteľa $x - y$

2. Zapíšte v tvare mocniny:
   a) $4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4$
   b) $0{,}2 . 0{,}2 . 0{,}2$
   c) $\frac{4}{7}m \cdot \frac{4}{7}m \cdot \frac{4}{7}m \cdot \frac{4}{7}m$
   d) $(2a + 5)(2a + 5)(2a + 5)$

3. Určte, či bude výsledok kladný alebo záporný:
   $\left(\frac{1}{2}\right)^{125}$ $\left(-\frac{7}{2}\right)^{10}$ $(-2)^{25}$ 0^{15} $(-8 + 2 . 3)^{10}$ $-5(-4-3)^{12}$

4. Vypočítajte: a) 2^3, 5^4, 1^{12} b) $(-7 + 5)^5$, $2^4 - 6^2$, $(3 . 8 - 3^3)^3$

5. Odôvodnite sami, prečo platí:
   a) $1^1 = 1^2 = 1^3 = ... = 1^n \quad n \in N$
   b) $0^1 = 0^2 = 0^3 = ... = 0^n \quad n \in N$

6. V mocninách nemožno vo všeobecnosti zameniť základ za mocniteľa. V niektorých prípadoch sa to výnimočne dá. Zapíšte takýto prípad.

7. Zjednodušte:
   a) $x^2 + 3x^2 + 4x^2 - 5x^2$
   b) $3a^5 + 2a^5 + 14a^5 - a^5$
   c) $7b^2 - 9b^3 - 10b^3 - 10b^2$
   d) $10m - 10m^2 - 10m^3 - 10m$

8. Zjednodušte:
   a) $4x^2 + 2y^3 - 5z - 10x^2 - 2y^3 + 7z$
   b) $14x^2-(-2x^2) + x^3 - (+x^3) + 2x^3$
   c) $120 + 121a + 122b + 123a$
   d) $0{,}86x^5 + 12{,}3x^4 - 1{,}7x^5 - 10x^4$
   e) $(5a^2-b) - (3a^2 - 2b) - (-7a^2 - 4b)$
   f) $2(3x+y^2) - 6(4x + y^2) - (-7y^2)$

9. Upravte: a) $-9c + (-0{,}9c) - (+6c^2) - (-6c^2)$
b) $4d^3 - 4d^2 - 4d$
c) $12a^2b - (4a^2b) + 9ab^2 - 7a^2b - 3ab^2$

10. Vynásobte: a) $7^2 \,.\, 7^5$ c) $10^3 \,.\, 10^{15}$ e) $4m^5 \,.\, (-m)^3$
b) $(-5)^3\,(-5)^2$ d) $a^4 \,.\, a^8$ f) $6(x+1)^2 \,.\, 7(x+1)^5$

11. Vypočítajte hodnotu výrazov: a) $5^2 \,.\, (-5)^2$ c) $10^5 \,.\, (-10)^5$
b) $5^2 \,.\, (-5)^3$ d) $10^5 \,.\, (-10)^8$

12. Vynásobte: a) $4x^2y^5r^6 \,.\, 5x^3y^7z^2$ c) $-5a^2b^3 \,.\, (-7a^3bc)(-3bc^2)$
b) $0{,}1xy^2z^3 \,.\, 10x^2yz$ d) $-\frac{4}{7}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^3c^5$

13. Vynásobte: a) $(x+y)^3\,(x+y)^9$ d) $(12-6m)^x\,(12-6m)^{2y}$
b) $(2+3x)^5\,(2+3x)^6$ e) $(7-4a)^a\,(-4a+7)^{a+2}$
c) $(3-10z)^9(3-10z)^6$ f) $(-3d+5e)(-3d+5e)(-3d+5e)^{7x}$

14. Dosaďte za x číslo tak, aby platila rovnosť:
a) $x \,.\, 5^6 = 5^{10}$ b) $x \,.\, 3 \,.\, 9^2 = 3^8$

15. Vydeľte: a) $8^6 : 8^3$ c) $(-14)^6 : (-14)^4$ e) $40a^{11} : (-7a^4)$
b) $0{,}7^5 : 0{,}7^3$ d) $121x^5 : 11x^0$ f) $(-100z^{13}) : (-50z^2)$

16. Vydeľte: a) $321a^5 : 3a^4$ c) $(-36a^7) : (-0{,}4a^2)$
b) $321a^5 : (-3a^4)$ d) $(-2a)^5 : (-2a)^2$

17. Vydeľte: a) $a^7 : a^9$ c) $4m^2 : (-7m^6)$ e) $-0{,}02x^5y : 20x^5y^2$
b) $30x : (-3)x^5$ d) $16a^2b^3c : 12a^3b^4c$ f) $-7x^3y^4z : (-21x^5y^2z)$

18. Vydeľte: a) $(4m+1)^5 : (4m+1)^3$ d) $(x-y)^4 : (y-x)^2$
b) $(7x-2)^3 : (-2+7x)$ e) $(9a-2b)^5 : (-2b+9a)^5$
c) $(5a+b)^3 : (5a+b)$ f) $(2x-y)^3 : (y-2x)^4$

19. Vydeľte: a) $12x^5\,(m+n)^2 : 6x^3\,(m+n)$
b) $16z^2\,(2x+y) : 4z^5\,(2x+y)^3$
c) $[-21x^2y^3(a-2b)] : [(-3x^5y)(a-2b)^7]$

20. Umocnite: a) $(7 \,.\, 8)^3$ c) $(0{,}3 \,.\, 0{,}5)^3$ e) $\left(-8\frac{1}{2}xy\right)^3$
b) $(-2 \,.\, 4)^4$ d) $(2abc)^5$ f) $(-mn)^4$

21. Umocnite: a) $\left(\frac{2}{13}\right)^3$ c) $\left(\frac{8x}{9y}\right)^n$ e) $(2^2 \,.\, x^5 \,.\, y^7)^4$
b) $\left(-\frac{4a}{3b}\right)^5$ d) $(-5a^2b)^3$ f) $(-a^2bc^5)^7$

22. Umocnite: a) $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^5$ b) $\left[\frac{4x^2y}{5\,.\,(x-y)}\right]^3$ c) $\left[\left(\frac{3a+2b}{10^2}\right)^2\right]^3$

23. Ktoré z čísel je väčšie: a) 2^6 alebo 6^2 b) 4^3 alebo $(2 \,.\, 4)^2$

R 24. Napíšte ako mocninu so základom 2:

a) 32 b) 64 . 16 c) $\frac{128}{4}$ d) $16^2 . 16^3$ e) $(8^2)^3$ f) $\frac{8^5}{16^3}$

R 25. Vypočítajte: a) $\frac{3^2 . 5^2}{9^2 . 2^3} : \frac{5}{8^2 . 2}$ b) $\left(\frac{4 . 2^2}{3 . 8}\right)^5 : \left(\frac{3^2 . 2^5}{3}\right)^2$

2.4 Zápis čísla typu a. 10^n, kde $1 \leq a < 10$ a $n \in N$

PROBLÉM

Zapíšte čísla 10, 100, 1 000, 10 000, ... ako mocninu so základom 10.

RIEŠENIE

Zuzka zapisuje takto:

$$\begin{aligned} 10 &= & &10^1 \\ 100 &= 10 . 10 & &= 10^2 \\ 1\,000 &= 10 . 10 . 10 & &= 10^3 \\ 10\,000 &= 10 . 10 . 10 . 10 & &= 10^4 \\ &\vdots \\ 1\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{v zápise je } n \text{ núl}} & & &= 10^n \end{aligned}$$

ZAPAMÄTAJTE SI

1 000 000 = 10^6 – milión	$\frac{1}{10^6}$	– jedna milióntina
1 000 000 000 = 10^9 – miliarda	$\frac{1}{10^9}$	– jedna miliardtina
1 000 000 000 000 = 10^{12} – bilión	$\frac{1}{10^{12}}$	– jedna bilióntina
1 000 000 000 000 000 = 10^{15} – biliarda	$\frac{1}{10^{15}}$	– jedna biliardtina
1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18} – trilión	$\frac{1}{10^{18}}$	– jedna trilióntina

1 ***ÚLOHA***

Ako mocninu so základom 10 napíšte číslo:

a) desať tisíc c) desať miliárd e) desať biliárd g) desať milióntin

b) sto miliónov d) sto triliónov f) sto biliónov h) sto miliardtin

POZNÁMKA

V prírodných vedách, v dejinných údajoch a pod., často pracujeme s veľmi veľkými alebo s veľmi malými číslami, ktoré vieme jednoduchšie zapísať ako súčin dvoch čísel. Jeden z činiteľov je číslo a, ktoré je väčšie alebo sa rovná jednej a menšie ako desať a druhý činiteľ je mocnina čísla desať.

Píšeme $a . 10^n$ *kde* $1 \leq a < 10$, $n \in N$

[1] ***PRÍKLAD***

Rýchlosť svetla vo vákuu je približne 300 000 000 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zapíšte daný údaj v tvare $a . 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$.

RIEŠENIE

Peter ho pozná. Vie, že 300 000 000 = 3 . 100 000 000 = $3 . 10^8$

Odpoveď: 300 000 000 $\frac{m}{s} = 3 . 10^8 \frac{m}{s}$.

ÚLOHA

Najdlhšími riekami Európy sú Volga a Dunaj. Dĺžka toku Volgy je 3 690 km a Dunaja 2 860 km. Zapíšte tieto údaje v metroch ako mocninu so základom 10.

ÚLOHA

Rozloha povodia Volgy je 1 380 000 km^2, Dunaj má rozlohu povodia 817 000 km^2. Zapíšte obe rozlohy povodí v tvare $a . 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$.

PRÍKLAD

Vypočítajte: a) $7 . 10^5 + 3 . 10^4 + 2 . 10^2 + 3 . 10^0$

b) $4{,}1 . 10^7 + 5{,}3 . 10^3 - 1{,}4 . 10^2 - 8$

RIEŠENIE

a) $7 . 10^5 + 3 . 10^4 + 2 . 10^2 + 3 . 10^0 = 7 . 100\,000 + 3 . 10\,000 + 2 . 100 + 3 . 1 =$
$= 700\,000 + 30\,000 + 200 + 3 = 730\,203$

b) $4{,}1 . 10^7 + 5{,}3 . 10^3 - 1{,}4 . 10^2 - 8 = 4{,}1 . 10\,000\,000 + 5{,}3 . 1000 - 1{,}4 . 100 - 8 =$
$= 41\,000\,000 + 5\,300 - 140 - 8 = 41\,005\,152$

ÚLOHA

Vypočítajte: $6 . 10^6 + 5 . 10^5 + 4 . 10^4 - 3 . 10^3 - 2 . 10^2 - 1 . 10 + 1 . 10^0$

C V I Č E N I A

1. Greenpeace - Zelený mier, hnutie, ktoré vzniklo v roku 1971 ako odpor proti francúzskym jadrovým pokusom, združuje 15 štátov a má celkove okolo 400 000 členov. Napíšte počet členov hnutia v tvare $a . 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$.

2. Napíšte v tvare $a . 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$ aj ďalšie údaje:
   a) Výskum a objavenie nového liečiva stojí priemerne 5 miliárd Sk.
   b) Koľko sekúnd trvá vyučovanie, ak máte 5 vyučovacích hodín.
   c) Lano môžeme zaťažiť silou 15 000 N.
   d) Hmotnosť je 81 000 000 g.

3. Zapíšte v tvare $a . 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$ nasledujúce údaje:

a) 4 km = . . . mm	b) 43 m^3 = . . . mm^3	c) 4,5 kg = . . . g
22 km^2 = . . . m^2	305 m^2 = . . . cm^2	170 t = . . . kg
962 km^2 = . . . ha	8 600 hl = . . . m^3	5 200 kg = . . . g

4. Vypočítajte:
   a) $3 . 10^5 + 8 . 10^4 - 4 . 10^2$
   b) $5{,}1 . 10^3 + 4{,}8 . 10^2 + 9{,}2 . 10^0$
   c) $2{,}8 . 10^3 - 2{,}9 . 10^2 - 2{,}7 . 10$
   d) $\frac{4 . 10^7}{3 . 10^8} + \frac{3 . 10^3 + 3 . 10^2}{3{,}3 . 10^4}$

VYSKÚŠAJTE SA !

1. Z kvetu rumančeka pripravujeme inhalácie. Do nádoby s objemom 1 l dáme 400 ml vody, ktorú zohrejeme na bod varu. Pridáme 9 g kvetu rumančeka, 16 g medu a 25 g jedlej sódy. Zapíšte všetky údaje v tvare druhej mocniny čísel.

2. Doplňte za písmená a, b, c, d, x, y čísla:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= a^2 \\ 1+3+5 &= b^2 \\ 1+3+5+7 &= c^2 \\ 1+3+5+5+7 &= d^2 \\ 1+3+\ldots\ldots\ldots+21 &= x^2 \\ 1+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+99 &= y^2 \end{aligned}$$

3. Vypočítajte obsah štvorca, ak a je dĺžka strany štvorca a doplňte tabuľku:

a	16 m	536 dm	0,15 km	$1\frac{3}{4}$ cm	1 200 mm
$S = a^2$					

4. Areál školy s výmerou 15 000 m^2 má tvar štvorca. Akú cenu zaplatíme za oplotenie celého areálu, ak za 1 m pletiva vysokého 1,2 m zaplatíme 82 Sk?

5. Vypočítajte súčet všetkých tretích mocnín všetkých jednociferných prvočísel. Zapíšte tento súčet v tvare druhej mocniny.

6. Objem kocky je 364 dm^3. Aký veľký je jej povrch?

7. Na výrobu kocky spotrebovali 8,496 dm^3 plastického materiálu. Aká dlhá je hrana kocky?

8. Upravte dané výrazy:

a) $3x + 5y^2 + 7x - 2y^3$

b) $4x \,.\, 3y^2 \,.\, x^5 \,.\, (-y)^2$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$

d) $\left(\frac{4a^2}{5a^5}\right)^7 \cdot \frac{2^3 \,.\, a}{20a^7}$

9. Aké najväčšie číslo môžeme napísať pomocou štyroch jednotiek?

10. Zapíšte bez mocniny desiatich:

a) Priemer Slnka je 1,392 . 10^9 m

b) Hmotnosť Zeme je 5,983 . 10^{21} t

c) Vzdialenosť najbližšej hviezdy Proxima Centauri od Zeme je 4,27 . 10^{13} km.

11. Zapíšte v tvare $a \,.\, 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$:

a) Výmera je 935 000 000 m^2

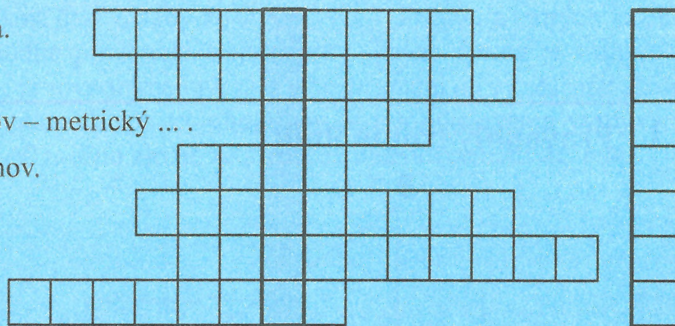
b) 4 500 000 000 svetelných rokov

c) 5,36 . 5 000 000 g

12. Krížovka

Zopakujme si jednotky dĺžky a miery

1. Tisícina metra.
2. Tisíc metrov.
3. Sto kilogramov – metrický ... .
4. Tisíc kilogramov.
5. Desatina litra.
6. Stotina litra.
7. Tisíc gramov.



Všetky údaje v krížovke zapíšte v tvare mocniny desiatich.

13. Osemsmerovka

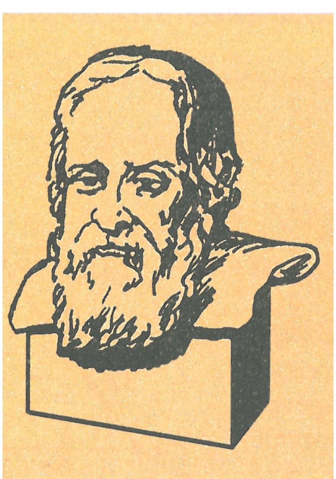
Protagoras (481 až 410 pred n. l.) povedal:

„Pravdu má ten, kto dokáže o svojom názore ....“

P	R	I	E	M	E	R	Z	M	G
S	E	O	P	A	R	A	E	O	E
A	M	L	S	R	R	V	A	C	O
R	O	S	E	B	R	Ľ	D	N	M
O	L	Í	O	E	U	Č	N	I	E
G	O	Č	T	G	I	S	Ó	N	T
A	P	E	O	L	Ť	T	I	A	R
T	M	L	I	A	N	E	L	Ý	I
Y	O	K	R	U	Ž	N	I	C	A
P	R	I	A	M	K	A	M	C	H

Dokončenie (15 písmen) v osemsmerovke.

ALGEBRA, GEOMETRIA, ČÍSLO, KRUŽNICA, METER, MILIÓN, MOCNINA, OBRAZ, PYTAGORAS, POLOGUĽA, POLOMER, PRIAMKA, PRIEMER, STENA



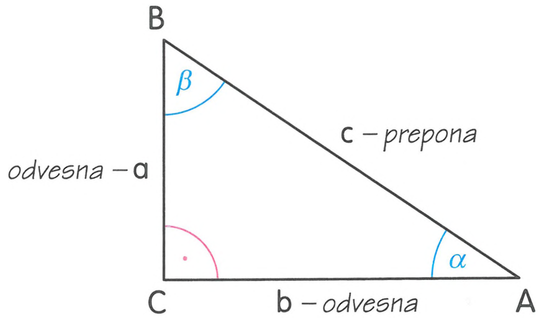
Galileo Galilei

(15. 2. 1564 až 8. 1. 1642)

Taliansky fyzik, mechanik, astronóm a matematik. Intenzívne študoval diela Euklida a Archimeda. Známe sú mnohé jeho fyzikálne zákony, najmä zákon o voľnom páde. Preslávil sa svojimi prácami z astronómie. Bol zástancom Kopernikovej heliocentrickej sústavy. Jemu vďačíme za ideu organického spojenia experimentu a teórie vo vedeckom bádaní s dôrazom na matematické spracovanie. Je zaujímavé, že už u neho sa objavujú zmienky o aktuálnom nekonečne.

3 PYTAGOROVA VETA

3.1 Pravouhlý trojuholník



AC, BC - odvesny
AB - prepona

Prepona pravouhlého trojuholníka leží oproti pravému uhlu.
Je to najdlhšia strana pravouhlého trojuholníka.

V každom pravouhlom trojuholníku je vždy jeden uhol pravý. Preto sa pravouhlý trojuholník určuje ďalšími už len dvoma prvkami:

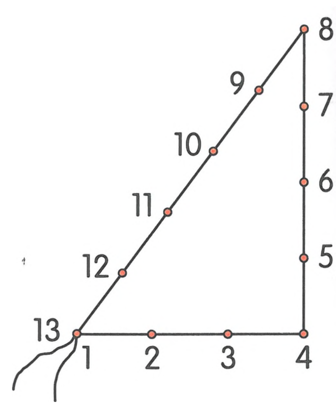
a) dvoma stranami,
b) stranou a jedným ostrým uhlom.

Keď sú dané napríklad dĺžky dvoch odvesien, nemôžeme už ľubovoľne voliť dĺžku prepony.

Dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka je jednoznačne určená dĺžkami oboch jeho odvesien.

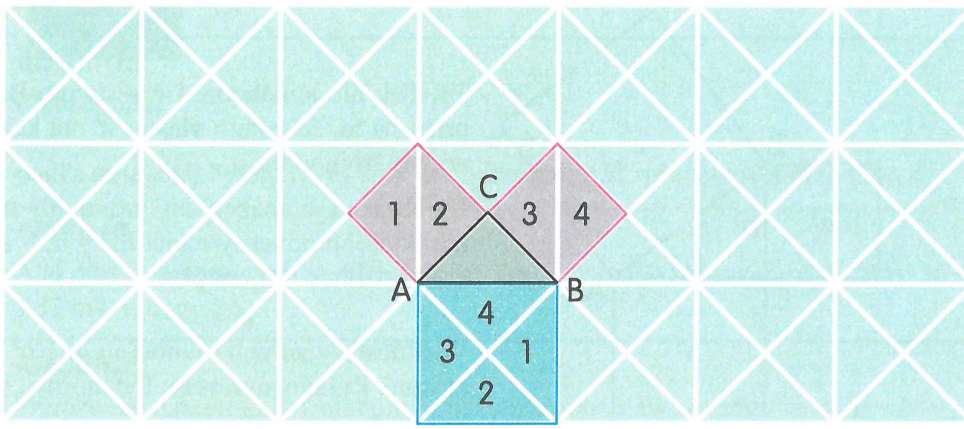
3.2 Pytagorova veta

Starí Egypťania a Indovia stavali pozoruhodné stavby. Pri týchto stavbách potrebovali vytyčovať aj pravé uhly. Často to robili takto:
Na napnutom špagáte uviazali 13 uzlov tak, aby vzdialenosti medzi uzlami boli rovnaké (napríklad po 50 cm). Špagát napli tak, že uzol *1 a 13* upevnili na tom istom mieste a uzly *4* a *8* tiež upevnili (pozri obrázok). Potom uhol $\sphericalangle$ *148* je pravý.



Vieme odôvodniť, prečo je uvedený uhol pravý? Pravdepodobne nie. V ďalšom texte sa to dozvieme.

Na obrázku je znázornená časť dlažby zo štvorcových dlaždíc, z ktorých každá je rozdelená na štyri zhodné pravouhlé trojuholníky. Jeden z nich je trojuholník *ABC,* tento trojuholník je rovnoramenný; nad jeho stranami sú vyznačené štvorce zložené zo zhodných pravouhlých trojuholníkov. Z ich očíslovania vyplýva, že štvorec nad preponou *AB* možno zložiť zo štvorcov nad odvesnami *AC* a *BC.*

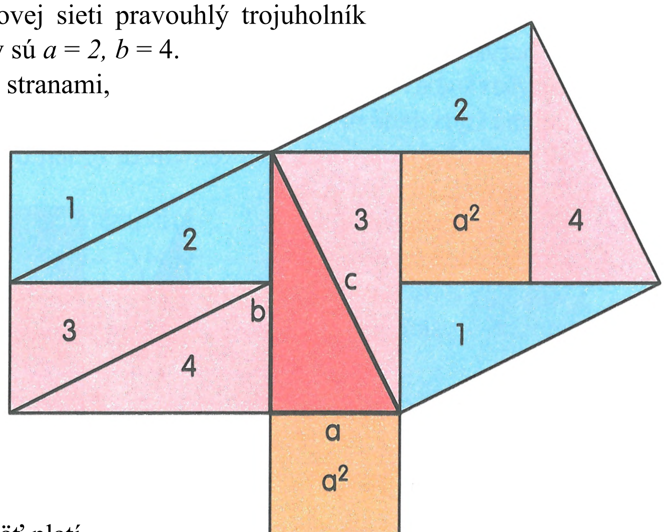


PROBLÉM 1

Platí to aj pre iné pravouhlé trojuholníky?

RIEŠENIE

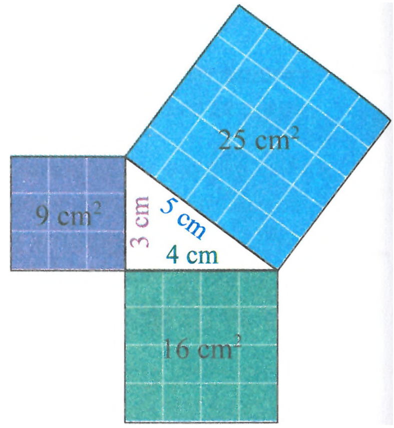
Miško narysoval v štvorcovej sieti pravouhlý trojuholník s odvesnami, ktorých dĺžky sú $a = 2$, $b = 4$. Zostrojil štvorce nad jeho stranami, označil a vyfarbil.

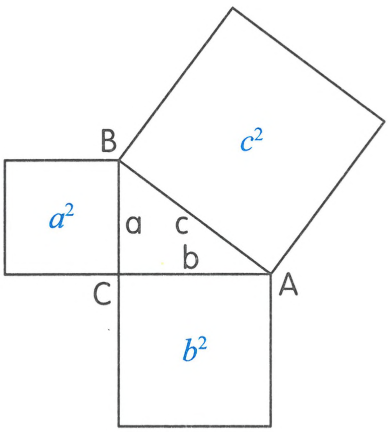


Z obrázka je jasné, že to opäť platí.

Vráťme sa teraz k obrázku, ktorý sme už uviedli pri vytyčovaní pravého uhla. Vznikol pravouhlý trojuholník, ktorého strany mali dĺžky 3 diely, 4 diely a 5 dielov. Narysujme trojuholník ABC so stranami dĺžok 3 cm, 4 cm, 5 cm. Nad každou stranou zostrojíme štvorec. Všimnime si, že o obsahoch týchto štvorcov platí:

$$9 + 16 = 25$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$





To však nie je náhoda. Už v starom Babylone prišli na to, že takúto vlastnosť má každý pravouhlý trojuholník.

Na obrázku je znázornený pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny majú dĺžky a, b a prepona má dĺžku c. Potom platí:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

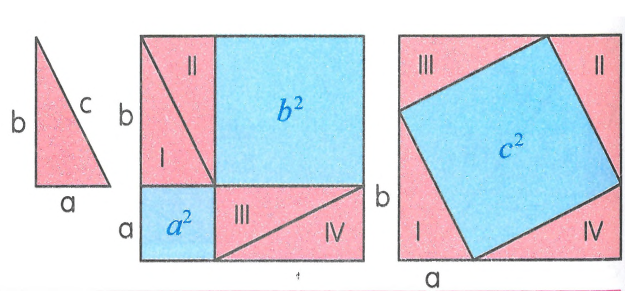
Vlastnosť vyjadrenú rovnosťou $a^2 + b^2 = c^2$ nazývame **Pytagorova veta.** Pytagorovu vetu vyjadrujeme slovami:

Obsah štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad oboma jeho odvesnami.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Správnosť tvrdenia môžeme overiť aj takto. Sledujte nasledujúce obrázky. Vľavo je narysovaný pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b a preponou c. Vedľa sú narysované dva zhodné štvorce so stranou $a + b$. Od každého tohto štvorca sú oddelené štyri dané pravouhlé trojuholníky, v každom iným spôsobom. V prvom tak, že zostanú dva štvorce so stranami a, b; ich obsahy sú a^2, b^2. V druhom zostane štvorec so stranou c, ktorého obsah je c^2. Pretože sme zhodné štvorce zmenšili vždy o rovnaký obsah, musí o zvyšku platiť:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



POZNÁMKA

Podľa uvedeného návodu možno zhotoviť názornú učebnú pomôcku.

V praxi sa často používa **obrátená Pytagorova veta:**

Ak pre veľkosti strán *a*, *b*, *c* trojuholníka platí vzťah

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

potom je tento trojuholník pravouhlý s preponou *c* a odvesnami *a*, *b*.

PRÍKLAD

Zistite, či trojuholník ABC so stranami $a = 12$ cm, $b = 5$ cm a $c = 13$ cm je pravouhlý.

RIEŠENIE

Pretože platí $\quad 13^2 = 12^2 + 5^2$

t.j. $\quad c^2 = a^2 + b^2$

podľa obrátenej Pytagorovej vety je trojuholník ABC pravouhlý s preponou c.

PRÍKLAD

Aká dlhá je prepona pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny majú dĺžky 56 m a 33 m?

RIEŠENIE

Pretože ide o pravouhlý trojuholník, môžeme použiť Pytagorovu vetu $a^2 + b^2 = c^2$ Do tohto vzorca dosadíme dané hodnoty. Rozmery sú v metroch. Dostaneme

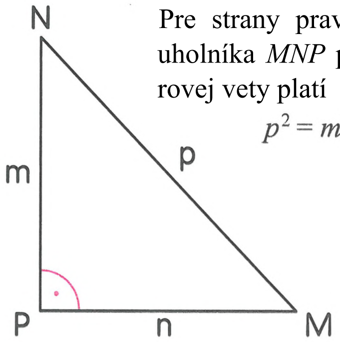
$$c^2 = 56^2 + 33^2$$
$$c^2 = 3\,136 + 1\,089$$
$$c^2 = 4\,225$$
$$c = \sqrt{4\,225} = 65 \text{ m}$$

Odpoveď: Prepona pravouhlého trojuholníka má dĺžku 65 m.

PRÍKLAD

Vypočítajte dĺžku odvesny m pravouhlého trojuholníka MNP, ak prepona p má dĺžku 12,4 cm a druhá odvesna n má dĺžku 8,5 cm.

RIEŠENIE



Pre strany pravouhlého trojuholníka MNP podľa Pytagorovej vety platí

$$p^2 = m^2 + n^2$$

$n = 8{,}5$ cm
$p = 12{,}4$ cm
$\underline{m = \ldots \text{ cm}}$

$\underline{p^2 = m^2 + n^2}$

$12{,}4^2 = m^2 + 8{,}5^2$
$153{,}76 = m^2 + 72{,}25$
$m^2 = 153{,}76 - 72{,}25$
$m^2 = 81{,}51$

Ferko napísal riešenie takto:

$n = 8{,}5$ cm
$p = 12{,}4$ cm
$\underline{m = \ldots \text{ cm}}$

$\underline{m^2 = p^2 - n^2}$

$m^2 = 12{,}4^2 - 8{,}5^2$
$m^2 = 153{,}76 - 72{,}25$
$m^2 = 81{,}51$
$m \doteq 9{,}03 - 9$

Pomocou tabuliek alebo kalkulačky m = 9,03 ≐ 9

Odpoveď: Odvesna *m* pravouhlého trojuholníka *MNP* meria približne 9 cm.

CVIČENIA

1. Sú dané dĺžky strán trojuholníka. Rozhodnite, ktorý z nich je pravouhlý:
   a) 5 cm, 6 cm, 7 cm
   b) 80 mm, 150 mm, 170 mm
   c) 10 m, 24 m, 26 m
   d) 7 dm, 9 dm, 11 dm
   e) 16 m, 30 m, 34 m
   f) 105 mm, 208 mm, 223 mm

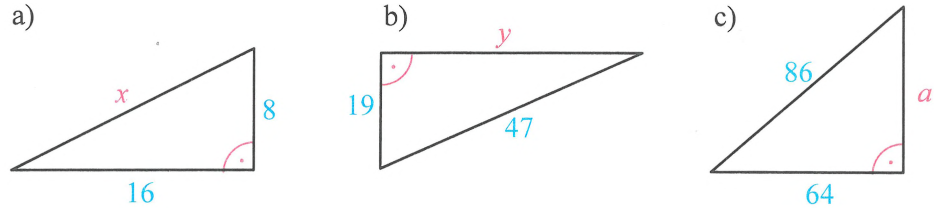
2. Vypočítajte dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka, ak dĺžky jeho odvesien sú:
   a) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm
   b) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm
   c) $a = 56$ mm, $b = 105$ mm
   d) $m = 4{,}5$ m, $n = 2{,}8$ m
   e) $m = 12$ m, $n = 2$ m
   f) $m = 6$ dm, $n = 2$ dm

3. Vypočítajte dĺžku odvesny, ak je daná dĺžka prepony a druhej odvesny:
   a) $c = 15$ cm, $a = 8$ cm
   b) $c = 18$ m, $b = 15$ m
   c) $c = 89$ m, $b = 40$ m
   d) $c = 730$ mm, $a = 480$ mm
   e) $c = 14{,}9$ m, $a = 5{,}1$ m
   f) $c = 15{,}7$ mm, $b = 8{,}5$ mm
   g) $c = 6\frac{1}{2}$ dm, $a = 3\frac{3}{4}$ dm
   h) $c = 8\frac{1}{2}$ cm, $a = 4{,}3$ cm

4. V tabuľke sú prázdne štvorčeky. Doplňte prázdne štvorčeky tak, aby čísla uvedené v tom istom stĺpci predstavovali číselné hodnoty dĺžok strán pravouhlého trojuholníka. Pritom *p*, *q* sú dĺžky odvesien, *r* je dĺžka prepony. Dĺžky sú uvedené v metroch.

p	5	6		16		28		13
q	12		8	12	9		33	84
r		10	17		15	53	65	

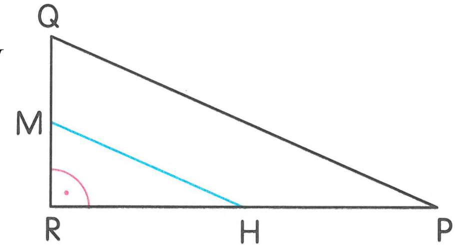
5. Vypočítajte dĺžku písmenom označenej strany pravouhlého trojuholníka.



6. Prekreslite tabuľku a doplňte dĺžky prepony trojuholníkov.

a	10	10	10	10	10
b	10	20	30	40	50
c					

7. Vypočítajte dĺžku strednej priečky *HM* a dĺžku prepony *PQ* pravouhlého trojuholníka *PQR*.
($|QR| = 28$ mm, $|PR| = 64$ mm.)
Porovnajte dĺžky úsečiek *HM a PQ*.



3.3 Použitie Pytagorovej vety

V predchádzajúcom článku sme riešili úlohy na:

a) výpočet dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka pomocou dĺžok jeho odvesien,

b) výpočet dĺžky jednej odvesny pravouhlého trojuholníka pomocou dĺžky prepony a dĺžky druhej odvesny.

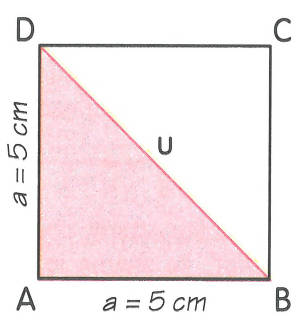
Teraz si ukážeme riešenie úloh z praxe pomocou Pytagorovej vety. Pomocou Pytagorovej vety môžeme vypočítať dĺžky úsečiek rôznych geometrických obrazcov; stačí vhodne rozdeliť daný útvar tak, aby vznikol pravouhlý trojuholník, v ktorom je hľadaná úsečka jedna jeho strana.

[1] ***PRÍKLAD***

Daný je štvorec *ABCD* so stranou dĺžky $a = 5$ cm. Vypočítajte dĺžku jeho uhlopriečky *u*.

RIEŠENIE

Na obrázku uhlopriečka $u = BD$ rozdeľuje daný štvorec *ABCD* na dva zhodné pravouhlé trojuholníky s preponou *u*. Jeden z nich je zafarbený.



Podľa Pytagorovej vety platí: $u^2 = a^2 + a^2$

Dosadením a - 5 dostaneme $u^2 = 5^2 + 5^2$

$$u^2 = 25 + 25$$
$$u^2 = 2 \,.\, 25$$
$$u = 5 \,.\, \sqrt{2}$$
$$u \doteq 5 \,.\, 1{,}41 \doteq 7{,}1$$

Odpoveď: Uhlopriečka daného štvorca má dĺžku $5 \,.\, \sqrt{2}$ cm, čo je približne 7,1 cm.

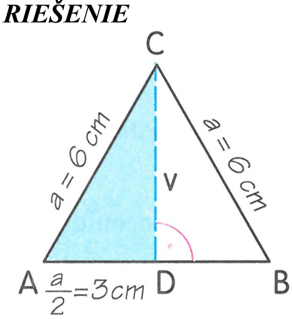
POZNÁMKA

Často sa používa výpočet dĺžky uhlopriečky štvorca, preto si zapamätajte, že $\boldsymbol{u = a \,.\, \sqrt{2}}$, *kde a je dĺžka strany štvorca.*

PRÍKLAD 2

Vypočítajte výšku rovnostranného trojuholníka, ktorého strana a = 6 cm.

RIEŠENIE



Výška CD rozdeľuje rovnostranný trojuholník ABC na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Hľadaná výška $v = CD$ je v každom z nich odvesnou. Použijeme napr. trojuholník ADC.

Podľa Pytagorovej vety platí $v^2 + 3^2 = 6^2$

$$v^2 = 36 - 9$$
$$v^2 = 27$$
$$v = \sqrt{27} \doteq 5{,}2$$

Odpoveď: Výška rovnostranného trojuholníka, ktorého strana je 6 cm, meria približne 5,2 cm.

ÚLOHA 1

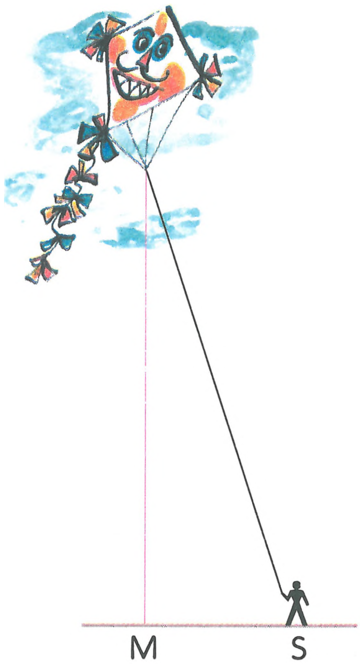
Odvoďte vzorec na výpočet veľkosti výšky rovnostranného trojuholníka so stranou a.

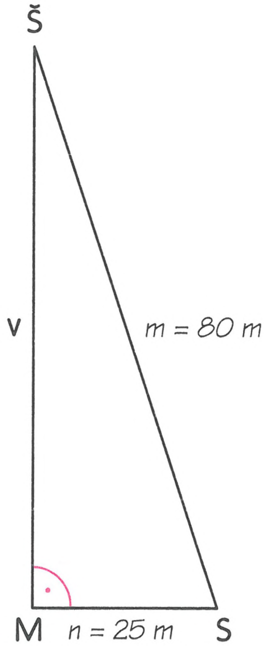
PRÍKLAD 3

Papierového šarkana drží Miško na lanku dlhom 80 m a šarkan sa vznáša nad miestom M. Miesto M je vzdialené 25 m od stanovišťa S, kde stojí Miško. Ako vysoko je šarkan nad vodorovným terénom?

RIEŠENIE

Označme strany pravouhlého trojuholníka $SMŠ$ písmenami v, n, m. Z obrázka vidieť, že známa je dĺžka odvesny n = 25 m, dĺžka prepony m = 80 m. Treba vypočítať dĺžku druhej odvesny v. Použijeme Pytagorovu vetu.





$n = 25$ m
$m = 80$ m
$v = \ldots$ m

$$m^2 = n^2 + v^2$$

$$80^2 = 25^2 + v^2$$
$$v^2 = 6\,400 - 625$$
$$v^2 = 5\,775$$
$$v = \sqrt{5\,775} \doteq 76$$

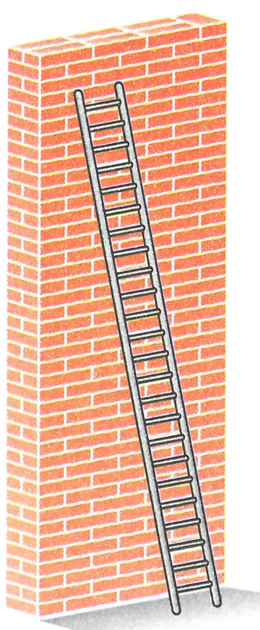
$$v \doteq 76 \text{ m}$$

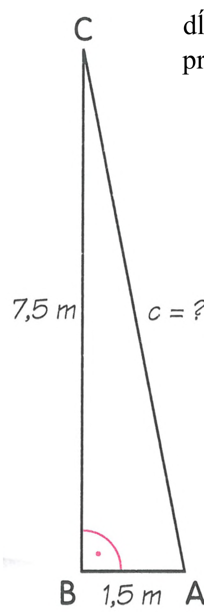
Odpoveď: Šarkan je od terénu vzdialený približne 76 m.

[4] *PRÍKLAD*

Rebrík má dosiahnuť do výšky 7,5 m a dolný koniec má byť od múru vzdialený 1,50 m. Aká musí byť dĺžka rebríka?

RIEŠENIE





Zrejme trojuholník ABC je pravouhlý, dĺžka rebríka sa rovná dĺžke jeho prepony, dĺžky odvesien sú známe.

$a = 7{,}5$ m
$b = 1{,}5$ m
$c = \ldots$ m

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 7{,}5^2 + 1{,}5^2$$
$$c^2 = 56{,}25 + 2{,}25$$
$$c^2 = 58{,}5$$
$$c = \sqrt{58{,}5} \doteq 7{,}6$$

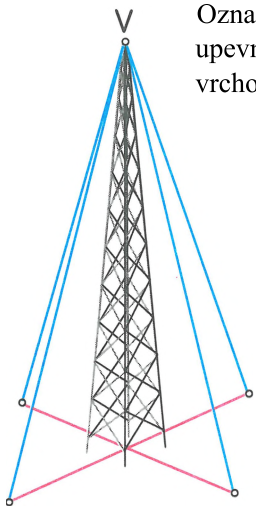
$$c \doteq 7{,}6 \text{ m}$$

Odpoveď: Dĺžka rebríka musí byť väčšia ako 7,6 m.

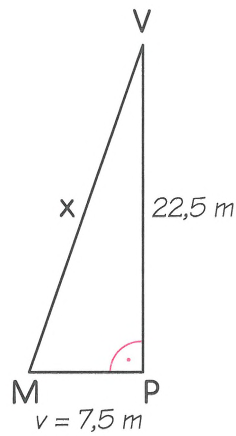
[5] PRÍKLAD

Pri prieskumnom vŕtaní postavili vrtnú vežu vysokú 22,5 m. Ako dlhými lanami vežu upevnili, ak ich konce boli pripevnené v zemi vo vzdialenosti 7,5 m od päty veže?

RIEŠENIE



Označme vrchol veže písmenom *V,* pätu písmenom *P* a miesto upevnenia *M* Trojuholník *VMP* je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole *P.* Opäť použijeme Pytagorovu vetu.



$v = 7{,}5$ m
$m = 22{,}5$ m
$x = \ldots$ m

$x^2 = v^2 + m^2$

$x^2 = 7{,}5^2 + 22{,}5^2$
$x^2 = 56{,}25 + 506{,}25$
$x^2 = 562{,}5$
$x = \sqrt{562{,}5} \doteq 24$

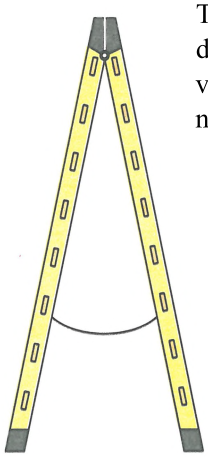
$x \doteq 24$ m

Odpoveď: Dĺžka lán na upevnenie veže je približne 24 m.

[6] PRÍKLAD

Do akej výšky dosiahne dvojitý rebrík, ktorý má dĺžku 3 m, ak spodné časti sú od seba vzdialené 1,2 m?

RIEŠENIE

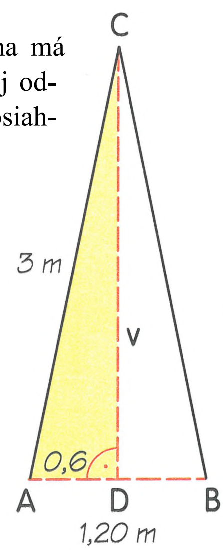


Trojuholník *ADC* je pravouhlý, ktorého prepona má dĺžku 3 m a jedna odvesna 0,6 m. Dĺžka druhej odvesny nám určí výšku, ktorá sa dá rebríkom dosiahnuť. Použijeme na jej výpočet Pytagorovu vetu.

$|AD| = 0{,}6$ m
$|AC| = 3$ m
$|DC| = v = \ldots$ m

$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2$

$0{,}6^2 + |DC|^2 = 3^2$
$|DC|^2 = 3^2 - 0{,}6^2$
$|DC|^2 = 9 - 0{,}36$
$|DC|^2 = 8{,}64$
$|DC| = v = \sqrt{8{,}64} \doteq 2{,}9$
$v \doteq 2{,}9$ m



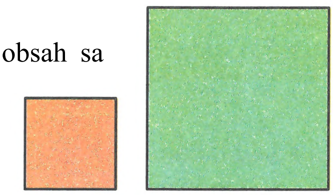
Odpoveď: Dvojitý rebrík dosiahne výšku približne 2,9 m.

3.4 Použitie Pytagorovej vety pri konštrukčných úlohách

Pytagorovu vetu môžeme využiť aj pri riešení niektorých konštrukčných úloh.

[1] ***PRÍKLAD***

Dané sú dva štvorce. Zostrojte štvorec, ktorého obsah sa rovná súčtu obsahov daných štvorcov.



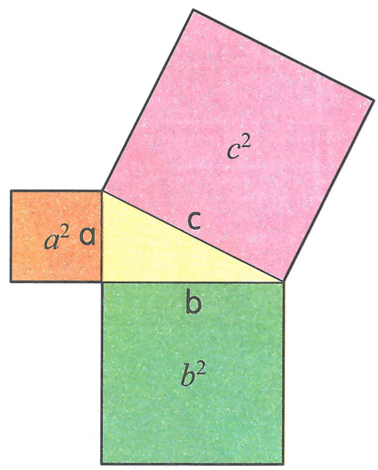
RIEŠENIE

Označme stranu prvého štvorca písmenom a, potom jeho obsah bude $S_1 = a^2$.
Označme stranu druhého štvorca písmenom b, potom jeho obsah bude $S_2 = b^2$.
Našou úlohou je zostrojiť štvorec so stranou c, pričom bude pre jeho obsah S platiť:

$$S = S_1 + S_2$$

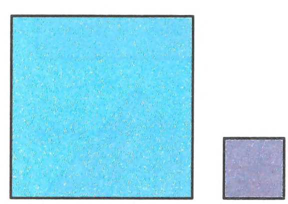
$$\text{čiže} \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

To je ale Pytagorova veta. Stačí zostrojiť pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny budú mať dĺžky a, b, jeho prepona c bude stranou hľadaného štvorca.



1 ***ÚLOHA***

Dané sú dva štvorce. Zostrojte štvorec, ktorého obsah sa rovná rozdielu obsahov daných štvorcov.



[2] ***PRÍKLAD***

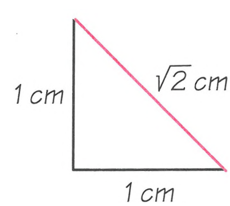
Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{2}$ pri zvolenej jednotkovej úsečke.

RIEŠENIE

Pytagorova veta nám umožňuje zostrojiť preponu pravouhlého trojuholníka.
Zaveďme označenie

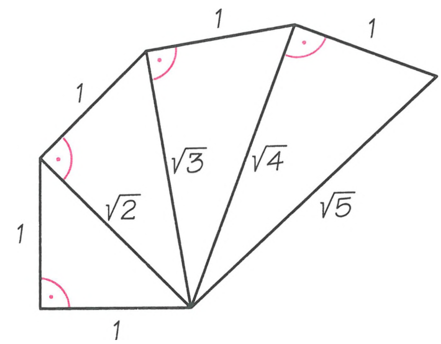
$$\sqrt{2} = x \qquad |^2$$
$$2 = x^2$$
$$1^2 + 1^2 = x^2$$

Teda úsečku $x = \sqrt{2}$ môžeme považovať za preponu pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny majú dĺžku 1.
Na obrázku je zostrojená úsečka dĺžky $\sqrt{2}$ cm .



2 ***ÚLOHA***

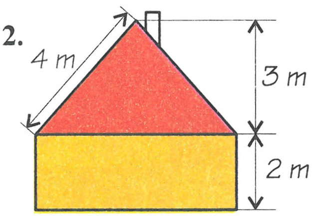
Odôvodnite konštrukciu úsečiek veľkosti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ ... .



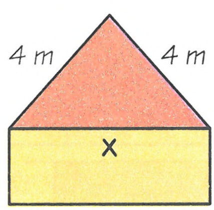
C V I Č E N I A

1. Vypočítajte dĺžku základne rovnoramenného trojuholníka s výškou v = 7,5 cm a dĺžkou ramena a = 8,5 cm.

2.

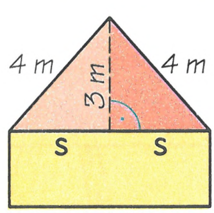


Na obrázku je náčrt domčeka. Juraj a Miško riešili domácu úlohu s údajmi vyznačenými na obrázku. Mali vypočítať šírku domčeka.



Juraj riešil úlohu jednoducho podľa náčrtu:

$$x^2 = 4^2 + 4^2$$
$$x^2 = 32$$
$$x = \sqrt{32}$$
$$x = 5{,}66 \doteq 5{,}7 \qquad x = 5{,}7 \text{ m}$$



Miško opäť riešil podľa náčrtu, ale takto:

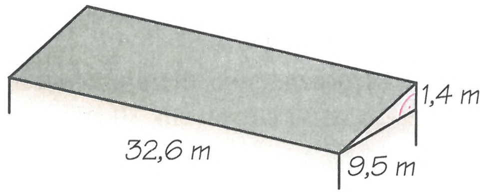
$$4^2 = s^2 + 3^2$$
$$s^2 = 4^2 - 3^2$$
$$s^2 = 7$$
$$s = \sqrt{7}$$
$$s \doteq 2{,}65$$
$$2s \doteq 5{,}30 \qquad 2s = 5{,}3 \text{ m}$$

Vysvetlite, prečo dostali rôzne výsledky. Ktorý z nich riešil úlohu chybne a akej chyby sa dopustil?

3. Na križovatke dvoch kolmých ciest sa rozdelila skupina turistov. Jedna skupina išla jednou cestou rýchlosťou 5,3 km/h, druhá skupina išla druhou cestou rýchlosťou 4,1 km/h. Ako boli od seba obidve skupiny vzdialené po 1 h 25 min?

4. Pultová strecha má iba jednu strešnú plochu obdĺžnikového tvaru. Pultová strecha nad skladom 32,60 m dlhým a 9,50 m širokým je na jednej strane

o 1,40 m vyššia než na druhej. Vypočítajte, koľko m² lepenky je potrebné na jej pokrytie. K výsledku pričítajte 15 % na prekrývanie lepenky.

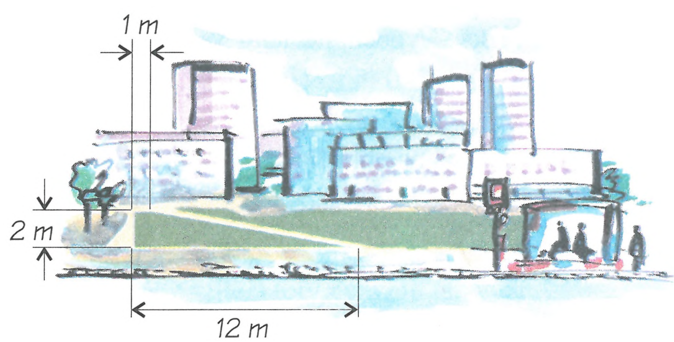


5. Z kmeňa stromu sa má vytesať trám s obdĺžnikovým prierezom s rozmermi 50 mm a 120 mm. Aký najmenší priemer musí mať kmeň?

6. Otec naplánoval štít na chatke v tvare rovnoramenného trojuholníka s dĺžkami základne 6 m a ramien 3,4 m. Budete sa môcť na povale chatky postaviť?

7. Prierez odvodňovacieho kanála je rovnoramenný lichobežník, ktorého základne majú dĺžky 1,80 m, 0,90 m a rameno má dĺžku 0,60 m. Vypočítajte hĺbku kanála.

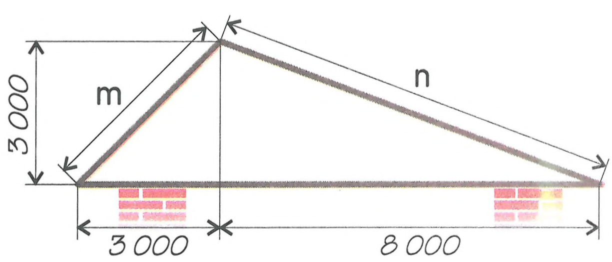
8. Na sídlisku si ľudia skracujú cestu na zastávku cez trávnik. Koľko krokov si takto ušetria, keď počítame s dĺžkou kroku 75 cm? Oplatí sa im za tak málo krokov ničiť trávnik?



9. Aké dlhé je zábradlie schodišťa s 18 schodmi, z ktorých každý schod je 25 cm široký a 15 cm vysoký?

10. Vypočítajte dĺžky stenových a telesových uhlopriečok kocky, ktorej hrana má dĺžku 6 cm.

11. Vypočítajte dĺžky *m* a *n* dvoch traverz použitých pri montáži železnej strešnej konštrukcie. Rozmery sú vyznačené na obrázku.



12. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky štvorca, ak je daný jeho obsah 121 cm².

VYSKÚŠAJTE SA !

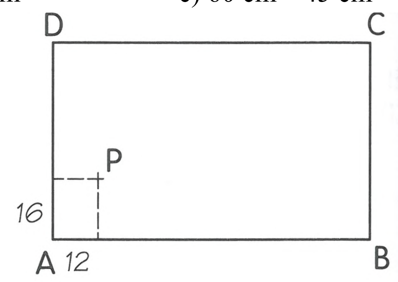
1. Rozhodnite, či trojuholník so stranami daných dĺžok je pravouhlý.
a) 50 cm, 60 cm, 70 cm b) 10 m, 24 m, 26 m c) 15 mm, 2 cm, 0,25 dm

2. Vypočítajte dĺžku b odvesny pravouhlého trojuholníka, keď poznáte dĺžku prepony c = 17 cm a dĺžku odvesny a = 15 cm.

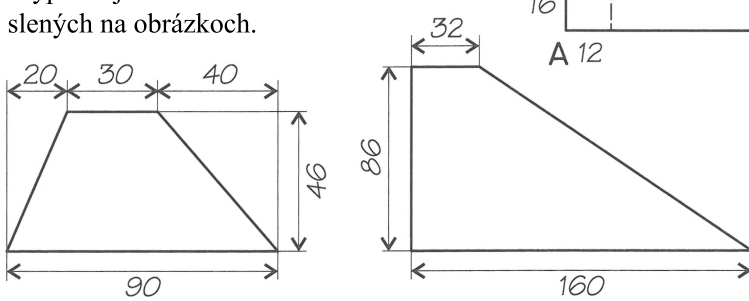
3. V pravouhlom trojuholníku je známa dĺžka prepony a jednej odvesny. Vypočítajte dĺžku druhej odvesny.
a) b = 15 cm c = 17 cm a = ?
b) c = 16cm a = 0,1m b = ?
c) a = 26,8 cm c = 0,38 m b = ?

4. Veľkosť obrazovky televízora sa určuje dĺžkou uhlopriečky. Vypočítajte ju pre televízor s rozmermi obrazovky:
a) 50 cm × 40 cm b) 30 cm × 20 cm c) 60 cm × 45 cm

5. V obdĺžniku so stranami $|AB|$ = 84 mm, $|BC|$ = 52 mm je daný bod P podľa obrázka. Vypočítajte jeho vzdialenosti od vrcholov A, B, C, D.



6. Vypočítajte obvod lichobežníkov nakreslených na obrázkoch.

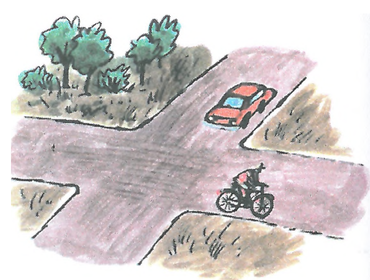


7. Priemer kmeňa stromu na najužšom mieste je 27 cm. Možno z neho vyrezať hranol štvorcového prierezu so stranou 20 cm?

8. Vypočítajte dĺžky stenových a telesových uhlopriečok kvádra s rozmermi a = 20 cm, b = 30 cm, c = 50 cm.

9. Bambus vysoký 32 stôp bol v určitej výške zlomený vetrom tak, že sa vrchol bambusu dotkol zeme vo vzdialenosti 16 stôp od kmeňa. V akej výške od zeme bol bambus zlomený?

10. Auto a cyklista idú od križovatky po dvoch na seba kolmých cestách. Určte, aká bude ich vzdialenosť po 1 minúte, ak auto ide priemernou rýchlosťou 60 km/h, cyklista priemernou rýchlosťou 15 km/h.



4 ÚPRAVA CELISTVÝCH ALGEBRICKÝCH VÝRAZOV

4.1 Celistvý výraz, Sčitovanie a odčitovanie celistvých výrazov

ZOPAKUJME SI

Jednočleny: 7; b; $5a$; $\frac{3}{4}k$ sú to: čísla, premenné, súčiny alebo podiely čísel a premenných.

Dvojčleny: $a + 7$; $1{,}5s - 8b$ sú to súčty alebo rozdiely jednočlenov.
Podobne poznáme trojčleny, štvorčleny... všeobecne ich nazývame **mnohočleny.**

1 ***ÚLOHA***

Napíšte 5 príkladov výrazov s ľubovoľnými premennými, ktoré sú:

a) dvojčleny b) jednočleny c) trojčleny

2 ***ÚLOHA***

Jeden z daných výrazov nie je dvojčlen. Zistite, ktorý výraz to je.

$2x + 5$ $2a + 4b - 1$ $2x + 4y : 2$

3 ***ÚLOHA***

Doplňte namiesto □ správny výraz.

a) Za x kilogramov orechov sme zaplatili 365 Sk. Za jeden kilogram sme zaplatili □ Sk.
b) Kúpili sme 3 litre mlieka po d korún. Zaplatili sme □ korún.
c) Auto prešlo za 5 hodín k kilometrov. Jeho priemerná rýchlosť bola □ kilometrov za hodinu.
d) Nákladné auto s nákladom má hmotnosť z metrických centov. Auto bez nákladu má hmotnosť y metrických centov. Hmotnosť nákladu je □ metrických centov.

4 ***ÚLOHA***

Napíšte ako výrazy:

a) 2-krát viac ako y
b) o 4 menej ako z
c) jedna tretina z a
d) o 7 viac ako t

[1] ***PRÍKLAD***

Zistite hodnotu výrazu $\frac{2a-5}{4}$, ak a postupne nadobúda hodnoty -1, 0, 1.

RIEŠENIE

Peter postupne dosadzuje jednotlivé hodnoty premenných a počíta hodnotu výrazu.

Pre $a = -1$ $\quad \frac{2\,.\,(-1)-5}{4} = \frac{-2-5}{4} = \frac{-7}{4}$

$a = 0$ $\quad \frac{2\,.\,0-5}{4} = \frac{-5}{4}$

$a = 1$ $\quad \frac{2\,.\,1-5}{4} = \frac{2-5}{4} = \frac{-3}{4}$

ÚLOHA 5

Vypočítajte obvod štvorca, ak strana a bude mať postupne dĺžku: 2; 4,2; 0,6; $\frac{9}{4}$.

ZOPAKUJME SI

$5x = 5\,.\,x$ — koeficient, premenná $\qquad x = 1\,.\,x$, $\quad -x = -1\,.\,x$

Výrazy sčitujeme tak, že sčítame koeficienty pri členoch s rovnakou premennou.

PRÍKLAD [2]

Sčítajte výrazy: (6,4x + 2,9y - 7,1) + (1,7 - 9,2y + 4,6x)

RIEŠENIE

Rieši Zuzana, popíšte jej úpravy.

(6,4x + 2,9y - 7,1) + (1,7 - 9,2y + 4,6x) = 6,4x + 2,9y - 7,1 + 1,7 - 9,2y + 4,6x =
= (6,4x + 4,6x) + (2,9y - 9,2y) + (-7,1 + 1,7) = 11x - 6,3y - 5,4

ÚLOHA 6

Sčítajte spamäti:

a) 6x + (3x + 7)
b) (5x + 2) + (2x - 8)
c) 3x + (8 - 7 + 2x)
d) (20x - 5) + (x - 4)

ÚLOHA 7

Sčítajte výrazy:

a) (2 - y) + (7y - 1) + (2y + 3)
b) (2x + 4y + 1) + (4x + 2y + 6)
c) (2,5x + 1) + (2,4 - x) + x

ZOPAKUJME SI

Opačný výraz k danému výrazu dostaneme tak, že v pôvodnom výraze zmeníme všetky znamienka na opačné.
Odčítať výraz znamená pričítať opačný výraz.
Ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa menia na opačné.

ÚLOHA 8

Doplňte tabuľku:

Výraz	Opačný výraz	Výraz	Opačný výraz
10a		8y + 2z - x	
2x - y		-6 - 3b	

[3] PRÍKLAD

Vypočítajte: $\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}z-\frac{6}{5}y\right)-\left(0{,}2x-\frac{2}{3}y-2{,}5z\right)$

RIEŠENIE

Juraj postupne výraz upravuje. Skontrolujte jeho riešenie.

$$\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}z-\frac{6}{5}y\right)-\left(0{,}2x-\frac{2}{3}y-2{,}5z\right)=\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}z-\frac{6}{5}y-0{,}2x+\frac{2}{3}y+2{,}5z=$$
$$=\left(\frac{3}{2}x-0{,}2x\right)+\left(-\frac{6}{5}y+\frac{2}{3}y\right)+\left(-\frac{4}{5}z+2{,}5z\right)=\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{10}x\right)+\left(-\frac{8}{15}y\right)+\left(-\frac{4}{5}z+\frac{25}{10}z\right)=$$
$$=\frac{13}{10}x-\frac{8}{15}y+\frac{17}{10}z$$

9 ÚLOHA

Od výrazov v riadku odčítajte výrazy v stĺpci. Každé odčítanie napíšte ako príklad a potom doplňte tabuľku.

—	4x	-2x + 1	5x + 4
3x			
2x - 6			
-x + 3			

10 ÚLOHA

Jedna úsečka má dĺžku a, druhá úsečka má dĺžku b. Zvoľte si ľubovoľné a, b a narysujte úsečky týchto dĺžok:

a) $a + b$ b) $a - b$ c) $2a + b$ d) $5a + 0{,}5b$ e) $a - 4b$

Podarilo sa vám v každom prípade úsečku narysovať? Ak nie, odpovedzte prečo a upravte čísla a a b tak, aby úsečku bolo možné narysovať.

druhá mocnina $\boldsymbol{a \cdot a = a^2}$ tretia mocnina $\boldsymbol{a \cdot a \cdot a = a^3}$

všeobecne n-tá mocnina $\underbrace{\boldsymbol{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{n\text{-krát}} \boldsymbol{= a^n}$ $n \in N$

a nazývame **základ** mocniny

n nazývame **exponent** (mocniteľ)

Sčítať a odčítať môžeme iba tie mocniny, ktoré majú **rovnaký základ** a **rovnaký exponent.**

[4] PRÍKLAD

Vypočítajte: a) $a^2 + a^2$ b) $3x^3 - 2x^3$ c) $(a^2 + a^3) + (a^2 - a^3)$

RIEŠENIE

Rieši Jana, popíšte úpravy, ktoré urobila.

a) $a^2 + a^2 = 2a^2$

b) $3x^3 - 2x^3 = (3-2)x^3 = x^3$

c) $(a^2 + a^3) + (a^2 - a^3) = a^2 + a^3 + a^2 - a^3 = a^2 + a^2 + a^3 - a^3 = 2a^2$

11 ÚLOHA

Vypočítajte: a) $2x^2 + 3x^2$ b) $2a^3 - 3x^3 - x^3 + 5a^2$ c) $7x^6 - 2x^3 + 5x^6 - 3x^3$

PRÍKLAD

Sčítajte: $(7x^2 - 4x + 3y - 1) + (3x^2 + x - y^2 + 5)$

RIEŠENIE

Rieši Peter. Najskôr odstráni zátvorky:

$(7x^2 - 4x + 3y - 1) + (3x^2 + x - y^2 + 5) = 7x^2 - 4x + 3y - 1 + 3x^2 + x - y^2 + 5 =$

výraz zapíše tak, že zapíše vedľa seba členy s rovnakými premennými, začne od členov s mocninami, takémuto zápisu hovoríme, že sme členy s rovnakými premennými združili:

$= 7x^2 + 3x^2 - y^2 - 4x + x + 3y - 1 + 5 =$

sčíta koeficienty pri členoch s rovnakou premennou a rovnakou mocninou:

$= 10x^2 - y^2 - 3x + 3y + 4$

ÚLOHA 12

Vypočítajte:

a) $(4a^2 - 2a + 5) + 2a^2 - (3a^2 + 5a - 1)$

b) $(x^2 + 2x) - (y^2 + 2y) + (x + y) - (2x^2 - 3y^2 + 7)$

ÚLOHA 13

Namiesto □ doplňte znamienka tak, aby platila rovnosť:

a) $a + (a^2 \square\ b) = a + a^2 - b$

b) $1 + 6a^2 \square 3a \,.\, a = 3a^2 + 1$

c) $8b^2 \square\ 5b \,.\, b + 5b = 13b^2 \square\ 5b$

C V I Č E N I A

1. Zapíšte ako výraz a pomenujte ho (jednočlen, dvojčlen ...).
   a) jedna tretina z čísla x
   b) číslo o 7 väčšie ako číslo a
   c) osemnásobok čísla p zmenšený o 2
   d) súčet štvornásobku čísla w a štvrtiny čísla v

2. Vyjadrite slovne: a) $x - 8$ b) $2x + 5$ c) $\frac{b}{3} + 3$ d) $\frac{i-j}{4}$

3. Ktoré z výrazov A_1 až A_5 sa rovnajú výrazu $A = a - b + c - d$?
   a) $A_1 = a + c - b - d$
   b) $A_2 = c - a - b - d$
   c) $A_3 = (a - b) + (c - d)$
   d) $A_4 = c + a - d - b$
   e) $A_5 = (a - d) - (b - c)$

4. Sčítajte spamäti:
   a) $6x + (3x + 2)$
   b) $-6x + (3x - 7)$
   c) $(5x + 2) + (2x - 8)$
   d) $(18 - x) + (2x - 13)$
   e) $3x + (8 - 7 + 2x)$
   f) $(2x + 4y^2 + 7) + (3x + y^2 + 1)$

5. V tabuľke sú vypočítané hodnoty výrazov s premennou. Objavili sa v nej dve chyby. Nájdite ich.

x	1	1	2	1,5	0,35	5
y	2	0,5	3	4,5	0	3
$\frac{x+y}{2}$	$\frac{3}{2}$	0,75	$\frac{5}{2}$	2,5	0,35	4

6. Sčítajte výrazy:

a) $(2 - y) + (7y - 1) + (2y + 3)$
b) $(2x + 4y + 1) + (4x + 2y + 6)$
c) $(10x^2 + 11y) + (5x^2 + 2y + 12)$
d) $(4 + y) + (18 - 2y) + (9y - 2)$
e) $(x^2 + 2y - z) + (9y + 4x^2 + 3z)$
f) $(x^2 + 18y + 19 + 3y) + (2x^2 - 9 - 4y)$
g) $(6x^2 - 8y - 2,5) + (16,9 - y - 3x^2)$
h) $(2y + 8) + (19 + x^2) + (-x^2 - y)$

7. Doplňte tabuľku na sčítanie výrazov:

+	x + 7	2x - 6	-3x + 8
-5x + 2			
-x - 1			
2x + 19			

8. K daným výrazom napíšte opačné výrazy.

a) $4x + 6y$
b) $2x - 7z$
c) $2x - 3y - z$
d) $-5y + x^2 + x^4$
e) $x - y + \frac{1}{2}x - z$
f) $-16x + 1\frac{1}{4}x^2 + x^4$
g) $-7x - 2y + 3 - 7x$
h) $-(2y + 2x) - 4z$

9. Vypočítajte:

a) $2,5x - (6 - 3,1x) - (2,8x - 1,1)$
b) $9a - (8 - 2a)$
c) $(2a - 3b) - (a - 4b)$
d) $(9a - 7) - (-10a - 18)$
e) $(-30a + 2) - (-19a - 13)$
f) $-(-4a + 2b + 3c) - (3a + b - 7c)$
g) $(31a - 13b) - (31b - 13a - 3)$
h) $-(ab - 17b) - (3ab - 12b) + 2ab$

10. Vypočítajte:

a) $8x - [(4x + 6) + 9x - 2]$
b) $9a - [(13a - 9) + (2a - 11)]$
c) $12x - [(15x - 12) - (8x - 17)] - 2,5x$
d) $13k - [5k + 4l - (5l - 4k)]$
e) $5m - (6 - 8m) + [3m - (9m - 8)]$
f) $r^2 - [3 - (r - r^2) + (2r - 5)] - 4 + (r^2 - r)$
g) $2ab - [-(ab + 1) + a^2b - (3ab - 7)] - (a^2b + 3)$

11. Od výrazu v riadku je odčítaný výraz v stĺpci. Doplňte v tabuľke chýbajúce výrazy:

-	6x + 2		20x - 3
2x - 19		-15x - 8	
	-9x -11		
-(2x - 11)			

12. Aký výraz musíme pričítať k výrazu $5x^3 - 4x^2 + 3x - 6$, aby sme dostali výraz $x^2 - 3$?

13. Aký výraz musíme odčítať od výrazu $3a - \frac{4}{5} - \frac{1}{2}b$, aby sme dostali výsledok 3?

4.2 Násobenie a delenie celistvých výrazov

4.2.1 Násobenie jednočlena jednočlenom

PROBLÉM 1

Vypočítajte súčiny: a) $4x \,.\, 3y$ b) $2ab^2 .\, 3a^2b^3$

RIEŠENIE

a) Peter rozmýšľa:
výraz $4x \,.\, 3y$ je súčin dvoch jednočlenov, ktorý môžem rozpísať aj takto:

$4x \,.\, 3y = 4 \,.\, x \,.\, 3 \,.\, y =$ využijem to, že súčin je komutatívny a združím koeficienty a premenné

$= 4 \,.\, 3 \,.\, x \,.\, y = 12 \,.\, x \,.\, y =$ zapíšem jednoduchšie

$= 12xy$

b) Pavol násobí podobne ako Peter, využije to, že súčin je komutatívny a asociatívny a použije pravidlá pre násobenie mocnín s rovnakým základom:

$2ab^2 \,.\, 3a^2b^3 = 2 \,.\, 3 \,.\, a \,.\, a^2 \,.\, b^2 \,.\, b^3 = 6 \,.\, a^{1+2} \,.\, b^{2+3} = 6 \,.\, a^3 .\, b^5 = 6a^3b^5$

Násobíme jednočlen jednočlenom

Vynásobíme koeficienty.
Rôzne premenné napíšeme vedľa seba v ľubovoľnom poradí, napríklad podľa abecedy.
Mocniny tej istej premennej násobíme tak, že základ opíšeme a **exponenty sčítame.** Hovoríme, že sme **základ umocnili súčtom exponentov:**

$$\boxed{a^m \,.\, a^n = a^{m+n}}$$

Platí: $a = a^1$

POZNÁMKA

Ak násobíme jednočlen jednočlenom, výsledok je opäť jednočlen. Znamienko násobenia medzi premennými a koeficientmi obyčajne vynechávame.

ÚLOHA 1

Vynásobte:

a) $10x^3 \,.\, 3$
b) $2{,}1b \,.\, (-8b)$
c) $6x^2 \,.\, 5x$
d) $-3a \,.\, 6a$
e) $0{,}5z \,.\, 7z \,.\, 10z$
f) $-3c \,.\, (-9c) \,.\, 4c^2$

ÚLOHA 2

Zistite, či platí rovnosť: $[(7a) \,.\, (-a)] \,.\, (2a^2) = (7a) \,.\, [(-a) \,.\, (2a^2)]$

ÚLOHA 3

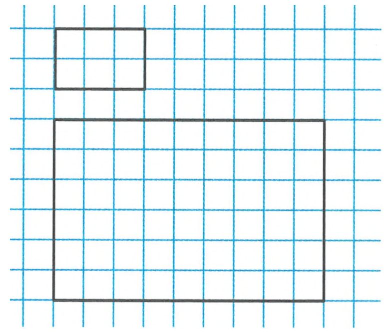
Vynásobte:

a) $2a \,.\, 3b \,.\, 4c$
b) $5r \,.\, 0{,}2s^2 \,.\, (-4)t^3$
c) $-0{,}3x^2 \,.\, (-5x^3y) \,.\, (-0{,}1z)$
d) $\frac{6}{4}a^6 \,.\, \frac{2}{8}b^3 \,.\, c$

PRÍKLAD

Strany obdĺžnika majú veľkosť a, b. Ako sa zmení obsah obdĺžnika, ak dĺžky oboch strán strojnásobíme?

RIEŠENIE



Juraj si nakreslil na štvorčekovaný papier najskôr obdĺžnik s rozmermi:

$$a = 3,\ b = 2$$

Potom dokreslil obdĺžnik, ktorý má trojnásobné rozmery: $3a = 3 . 3 = 9$

$3b = 3 . 2 = 6$

Riešenie zapísal prehľadne:

číselne platí:

$S = a . b$

$S = 2 . 3 \text{ cm}^2 \qquad S_1 = 6 . 9 \text{ cm}^2$

$S = 6 \text{ cm}^2 \qquad S_1 = 54 \text{ cm}^2$

$S_1 : S = 54 : 6 = 9$

všeobecne platí:

$S = a . b \qquad S_1 = 3a . 3b$

$S_1 = 3 . 3 . a . b$

$S_1 = 9ab$

$S_1 : S = 9ab : ab = 9$

Odpoveď: Ak dĺžky strán obdĺžnika strojnásobíme, obsah nového obdĺžnika bude deväťkrát väčší ako obsah pôvodného obdĺžnika.

4.2.2 Mocnina jednočlena

PRÍKLAD

Štvorec má stranu dĺžky $2x$. Aký je obsah štvorca?

RIEŠENIE

Miško počíta: $S = 2x . 2x = 2 . 2 . x . x = 4x^2$

Anka si napíše výraz takto: $S = (2x)^2 = 2^2 . x^2 = 4x^2$

Obaja majú rovnaký výsledok. Platí: $(2x)^2 = 2x . 2x = 2^2 . x^2$

Odpoveď: Obsah štvorca je $4x^2$.

Počítame mocninu jednočlena

Umocníme koeficient i premennú.
Mocninu premennej vypočítame tak, že základ opíšeme a **exponenty vynásobíme.**
Hovoríme, že sme základ **umocnili súčinom exponentov:**

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\,.\,n}}$$

POZNÁMKA

Rozlišujte zápisy: $2x^2$ a $(2x)^2 = 4x^2$. Pri zápise umocnenia jednočlena v tvare súčinu alebo podielu musí byť jednočlen v zátvorke.

PRÍKLAD

Umocnite: a) $(3a)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}x\right)^3$ c) $(-2y)^2$ d) $(0{,}4z^3)^3$

RIEŠENIE

Juraj počíta mocninu aj ako súčin, aj podľa pravidla umocnenia jednočlena.

a) $(3a)^2 = 3a\,.\,3a = 9a^2$
$(3a)^2 = 3^2\,.\,a^2 = 9a^2$

b) $\left(\frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot x = \frac{1}{8}x^3$
$\left(\frac{1}{2}x\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 . \, x^3 = \frac{1}{2^3} \cdot x^3 = \frac{1}{8}x^3$

c) $(-2y)^2 = (-2y^2)\,.\,(-2y^2) = (-2)\,.(-2)\,.\,y^2\,.\,y^2 = 4y^4$
$(-2y)^2 = (-2)^2\,.\,(y^2)^2 = 4y^4$

d) $(0{,}4z^3)^3 = 0{,}4z^3\,.\,0{,}4z^3\,.\,0{,}4z^3 = 0{,}4\,.\,0{,}4\,.\,0{,}4\,.\,z^3\,.\,z^3\,.\,z^3 = 0{,}064\,.\,z^9$
$(0{,}4z^3)^3 = 0{,}4^3\,.\,(z^3)^3 = 0{,}064\,.\,z^9$

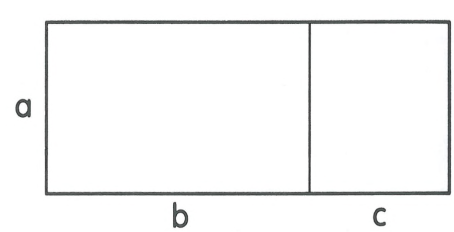
4 ***ÚLOHA***

Umocnite: a) $(5x)^2$ c) $(-3z)^3$ e) $(0{,}1b^3)^2$
b) $(2y^2)^2$ d) $\left(\frac{1}{4}a^2\right)^3$ f) $\left(\frac{1}{3}c^3\right)^3$

4.2.3 Násobenie mnohočlena jednočlenom

PRÍKLAD

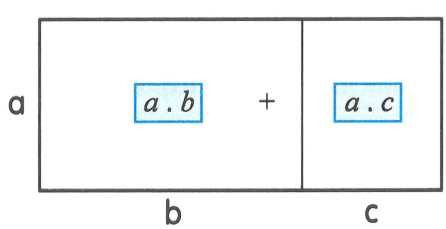
Vypočítajte obsah obdĺžnika na obrázku.



RIEŠENIE

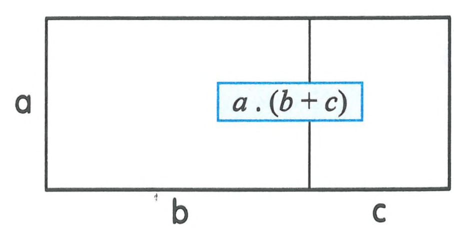
Adam najskôr vypočíta obsahy dvoch obdĺžnikov, ktoré vzniknú. Tieto obsahy potom sčíta. Martina najskôr určí dĺžku strany vyjadrenú premennými *b, c,* a potom použije vzorec na výpočet obsahu obdĺžnika.

Adam:



$S = a\,.\,b + a\,.\,c$

Martina:



$S = a\,.\,(b + c) = a\,.\,b + a\,.\,c$

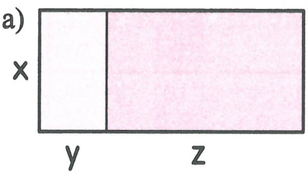
Platí: $a\,.\,(b + c) = a\,.\,b + b\,.\,c$

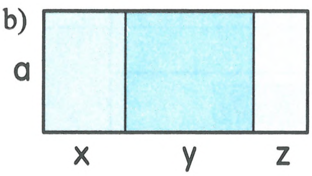
Každý člen mnohočlena vynásobíme jednočlenom.

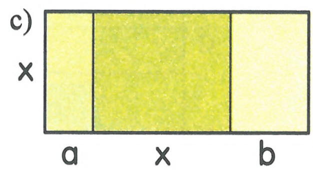
$$\boxed{a\,.\,(b+c) = a\,.\,b + a\,.\,c}$$

5 *ÚLOHA*

Vypočítajte obsahy obdĺžnikov:

a)


b)


c)


[6] *PRÍKLAD*

Vynásobte a vzniknutý výraz upravte, ak sa to dá.

a) $2a\,.\,(x - y^2)$ b) $-3u\,.\,(u - v + 1)$ c) $3x\,.\,(x + y) + 5y\,.\,(x - y)$

a) $2a\,.\,(x-y^2) = 2a\,.\,x - 2a\,.\,y^2 = 2ax - 2ay^2$ výsledok je dvojčlen, ďalej sa upraviť nedá

b) $-3u\,.\,(u-v+1) = -3u\,.\,u - 3u.\,(-v) - 3u\,.\,1 =$
$= -3u^2 + 3uv - 3u$ výsledok je trojčlen, ďalej sa upraviť nedá

c) $3x\,.\,(x+y) + 5y\,.\,(x-y) = 3x\,.\;x - 3x\,.\,y + 5yx + 5y\,.\,(-y) =$
$= 3x^2 + 3xy + 5yx - 5y^2 =$ tento štvorčlen sa ešte dá upraviť
$= 3x^2 + 3xy + 5xy - 5y^2 = 3x^2 + 8xy - 5y^2$ výsledok je trojčlen

POZNÁMKA

Ak sa v jednočlenoch vyskytuje viac premenných, upravíme ich tak, aby boli premenné zapísané v rovnakom poradí, napríklad podľa abecedy.

6 *ÚLOHA*

Vynásobte:
a) $x\,.\,(x+3)$ c) $13z\,.\,(2x+3y-z)$ e) $(-7m)\,.\,(n-3m+2)$
b) $y\,.\,(3y+z)$ d) $6k\,.\,(2k+0{,}5)$ f) $\frac{2}{3}x \cdot \left(y + \frac{3}{8}z - \frac{3}{8}x^2\right)$

7 *ÚLOHA*

Vyjadrite ako súčet alebo rozdiel:
a) $7\,.\,(3m-n)$ c) $-y\,.\,(x^2y - xy^2)$
b) $\left(-ab + \frac{1}{2}\right) \cdot 4c$ d) $2\,.\,(4b-5c)\,.\,a$

8 *ÚLOHA*

Daný je mnohočlen $b^2 + 2b - 1$. Napíšte, čomu sa rovná jeho:

a) päťnásobok b) b-násobok c) $2b$-násobok d) x-násobok

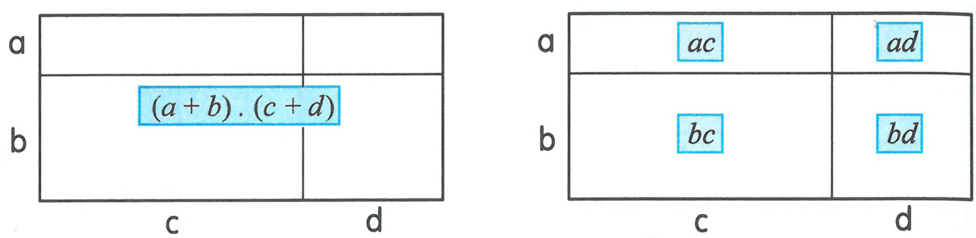
4.2.4 Násobenie mnohočlena mnohočlenom

[7] ***PRÍKLAD***

Obdĺžnik má rozmery $(a + b)$ a $(c + d)$. Čomu sa rovná jeho obsah?

RIEŠENIE

Jana si nakreslila obrázky. Pozorne si ich pozrite.



Platí: $(a + b) \,.\, (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Násobíme mnohočlen mnohočlenom

Každý člen prvého mnohočlena **vynásobíme každým členom** druhého mnohočlena. Ak sa v jednotlivých členoch výsledku nachádzajú rovnaké premenné, usporiadame ich v rovnakom poradí, napríklad podľa abecedy.

$$\boxed{\boldsymbol{(a + b) \,.\, (c + d) = ac + ad + bc + bd}}$$

[8] ***PRÍKLAD***

Vynásobte:

a) $(2a + 3b) \,.\, (x + y)$

b) $(2a + b) \,.\, (a - 1)$

c) $(5a - 2) \,.\, (4a - 3)$

d) $(x^2 + 3x + 2) \,.\, (x + 1)$

e) $(x - 1) \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 3)$

RIEŠENIE

Počítajte spolu s Adamom.

a) $(2a + 3b) \,.\, (x + y) = 2a \,.\, x + 2a \,.\, y + 3b \,.\, x + 3b \,.\, y = 2ax + 2ay + 3bx + 3by$

b) $(2a + b) \,.\, (a - 1) = 2a \,.\, a + 2a \,.\, (-1) + b \,.\, a + b \,.\, (-1) = 2a^2 - 2a + ba - b$

c) $(5a - 2) \,.\, (4a - 3) = 5a \,.\, 4a + 5a \,.\, (-3) - 2 \,.\, 4a - 2 \,.\, (-3) = 20a^2 - 15a - 8a + 6 =$
$= 20a^2 - 23a + 6$

d) $(x^2 + 3x + 2) \,.\, (x + 1) = x^2 \,.\, (x + 1) + 3x \,.\, (x + 1) + 2 \,.\, (x + 1) =$
$= x^2 \,.\, x + x^2 \,.\, 1 + 3x \,.\, x + 3x \,.\, 1 + 2 \,.\, x + 2 \,.\, 1 = x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x + 2x + 2 =$
$= x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

e) $(x - 1) \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 3) = [x \,.\, x + x \,.\, 2 + (-1) \,.\, x + (-1) \,.\, 2] \,.\, (x - 3) =$
$= (x^2 + 2x - x - 2) \,.\, (x - 3) = (x^2 + x - 2) \,.\, (x - 3) =$
$= x^2 \,.\, x + x^2 \,.\, (-3) + x \,.\, x + x \,.\, (-3) + (-2) \,.\, x + (-2) \,.\, (-3) =$
$= x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

POZNÁMKA

Pri zápise násobenia mnohočlenov požívame tie isté pravidlá ako pri počítaní s číselnými výrazmi. Ak majú činitele viac členov, musíme ich dať do zátvoriek.

$$a \cdot a + 1 = a^2 + 1$$
$$a \cdot (a + 1) = a^2 + a$$

9

ÚLOHA

Vypočítajte: a) $x \cdot x + x^2$ b) $a \cdot (a + a^2)$ c) $2x \cdot 3x^2 + x$ d) $-a^2 + a^2 \cdot (-a)$

10

ÚLOHA

Vynásobte: a) $(a + x) \cdot (b + y)$ c) $(a + x) \cdot (a - 2)$
b) $(a + b) \cdot (x + 2)$ d) $(x - a) \cdot (b - x)$

11

ÚLOHA

Vynásobte: a) $(a + b + 5) \cdot (a - 1)$ c) $(1 + y) \cdot (-y + 1) \cdot (y - 2)$
b) $(1 + b + x) \cdot (x - b - 1)$ d) $(m + n) \cdot (n - 5) \cdot (-m + 2)$

12

ÚLOHA

Majú nasledujúce príklady rovnaký výsledok? Ak nie, povedzte prečo.

a) $x + 3 \cdot 2x - 1$ c) $(x + 3) \cdot 2x - 1$
b) $x + 3 \cdot (2x - 1)$ d) $(x + 3) \cdot (2x - 1)$

13

ÚLOHA

Vypočítajte neznámu u, ak platí:
a) $(2u - 1) \cdot (u - 2) - (u + 1) \cdot (2u - 6) = 0$
b) $(u + 1) \cdot (u - 2) - (u - 1) \cdot (u + 4) = 10$
c) $(u - 1) \cdot (u - 3) = (u - 2) \cdot (u - 4)$

14

ÚLOHA

Vypočítajte dĺžku strany štvorca a dĺžky strán obdĺžnika, ktorý má jednu stranu o 5 cm dlhšiu a druhú o 2 cm kratšiu ako strana štvorca. Obsah obdĺžnika je o 11 cm^2 väčší ako obsah štvorca.

15

ÚLOHA

Prázdny nákladný vagón má hmotnosť 5,4 tony. Aká je hmotnosť celého vlaku bez lokomotívy, ak vlak má 20 vagónov, na pätnástich je x ton nákladu a na ostatných je o y ton nákladu menej?

4.2.5 Delenie mnohočlena jednočlenom

9

PRÍKLAD

Vydeľte:

a) $(6a + 2) : 2$
b) $(3a + 6b) : 3$
c) $(15x^2 - 5x) : 5x$
d) $(8ab + 12ac) : 4a$

RIEŠENIE

a) $(6a + 2) : 2 = 6a : 2 + 2 : 2 = 3a + 1$
b) $(3a + 6b) : 3 = 3a : 3 + 6b : 3 = a + 2b$
c) $(15x^2 - 5x) : 5x = 15x^2 : 5x - 5x : 5x = 3x - 1$
d) $(8ab + 12ac) : 4a = 8ab : 4a + 12ac : 4a = 2b + 3c$

Delíme mnohočlen jednočlenom

Každý člen mnohočlena **vydelíme** jednočlenom.
Delíme koeficient koeficientom a premennú premennou.
Mocninu premennej delíme tak, že základ opíšeme a **exponenty odčítame.**
Hovoríme, že sme základ **umocnili rozdielom exponentov:**

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

Platí: $x^2 : x = x^{2-1} = x$ $\quad x : x = x^1 : x^1 = x^{1-1} = x^0 = 1$
$x^5 : x^3 = x^{5-3} = x^2$ $\quad a^2x : ax = a \,.\, 1 = a$

16

ÚLOHA

Vypočítajte:

a) $(2x + 4y) : 4$
b) $(21a + 7) : 7$
c) $(a^2 + ab) : a$
d) $(cd + de) : d$
e) $(9x^2 + 3x) : 3x$
f) $(16y^3 + 16y^2) : 16y$

17

ÚLOHA

Vydeľte:

a) $z^6 : z^2$
b) $a^4 : a^3$
c) $x^5 : x^5$
d) $ab^4 : b$
e) $ax^8y : x^2$
f) $z^2y : zy$

18

ÚLOHA

Vypočítajte:

a) $(3x - 4y) : (-1)$
b) $(8a + 4b) : (-4)$
c) $(-18ab - 6b) : (-6b)$
d) $(24x^2y^2 - 4xy) : (-4xy)$

CVIČENIA

1. Vynásobte:
a) $5a \,.\, 6$
b) $12a^3 \,.\, 2$
c) $0{,}5a \,.\, a$
d) $-4x^2 \,.\, x^3$
e) $\frac{1}{3}z \cdot \frac{6}{2}z^3$
f) $-2y \,.\, (-4y^2) \,.\, 7y^3$
g) $4a \,.\, 5b$
h) $-2x \,.\, 0{,}4y^2$
i) $\frac{1}{2}x^2 \,.\, z \,.\, 4y^3$

2. Umocnite:
a) $(3x)^2$
b) $(-2y)^2$
c) $\left(\frac{1}{3}z\right)^3$
d) $(0{,}2u^2)^2$
e) $\left(\frac{5}{2}a^3\right)^3$
f) $\left(\frac{-3}{4}b\right)^2$

3. Podlaha predsiene má tvar štvorca so stranou $4x$ metrov. Chodba, ktorá k nej vedie, má podlahu tvaru obdĺžnika s rozmermi $8x$ a $3x$ metrov.
   a) Ktorá miestnosť má menšiu podlahu a o koľko štvorcových metrov?
   b) Koľko m^2 podlahovej krytiny musíme kúpiť na pokrytie oboch miestností?

4. Vypočítajte: a) $a \cdot (1+b)$ c) $3x \cdot (1+x)$ e) $-3 \cdot (x^2+x+1)$
   b) $(-1) \cdot (x-y)$ d) $(8a+1) \cdot a$ f) $2x \cdot (x+z)$

5. Vynásobte: a) $10x^2 \cdot 3$ c) $(-0{,}5z^2) \cdot 4yz$ e) $(-7x^2y) \cdot (-3xy^2)$
   b) $2cb \cdot 8b$ d) $6x^2 \cdot 6y \cdot 2x^3$ f) $\frac{9}{5}c^2d \cdot \frac{10}{3}cd^3$

6. Vypočítajte: a) $(y-2) \cdot y+2$ c) $(x-4) \cdot 4-x$
   b) $(b-b^2) \cdot 2-b^2$ d) $y-1 \cdot (y+5)$

7. Vypočítajte: a) $(a-1) \cdot (a+3)$ c) $(b-2) \cdot (b+2)$ e) $(2c^3-3) \cdot (1+c)$
   b) $(2a+5) \cdot (a-1)$ d) $(c^2-5) \cdot (c-2)$ f) $(3b-4) \cdot (b^2+5)$

8. Vynásobte: a) $\frac{1}{3}c \cdot (9ac-12c^2)$ e) $\left(\frac{5}{2}a-1\right) \cdot \left(\frac{2}{5}ab-b\right)$
   b) $0{,}5a \cdot (4-3a^2-5ab)$ f) $1{,}2uv^2 \cdot (0{,}5u^2v-2u^2-v)$
   c) $\frac{2}{3}xy \cdot (9x^2y-6y)$ g) $(y^2-2y) \cdot (-y+4y^2+1)$
   d) $(1{,}2ab-a) \cdot (4a^2b-b)$ h) $(2x+y) \cdot \left(3y-\frac{3}{2}x-1\right)$

9. Doplňte tabuľku na násobenie výrazov:

	$a - 7$	$a^2 + 2$	$4a^2 - 3a$
$3a - 1$			
$4a^2 + 2$			
$5a^3 + a^2$			

10. Vynásobte: a) $(-3x) \cdot (3-6x) \cdot (1-x)$
    b) $(2x-1) \cdot (5-x) \cdot (-2x^2)$
    c) $(2x-1) \cdot (2-5x^2) \cdot (4-6x)$

11. Vypočítajte: a) $-7x-2x \cdot (8x-3)$
    b) $2x^2-4x \cdot (2x^2-6x-1)$
    c) $-3x \cdot (-1-8x)-3x^2 \cdot (x+5)$

12. Vypočítajte a**,** ak platí:
    a) $(a+1) \cdot (a+2)=(a+3) \cdot (a+4)$
    b) $(1-a) \cdot (a-1)+(a-2) \cdot (a+2)=0$
    c) $(3a-2) \cdot (2a+4)-(a-3) \cdot (6a-1)=16$

13. Vydeľte: a) $a^5 : a$ c) $-y^2 : y$ e) $x^2y : xy$
    b) $x^3 : x^2$ d) $z^3 : (-z^2)$ f) $-abc : (-ab)$

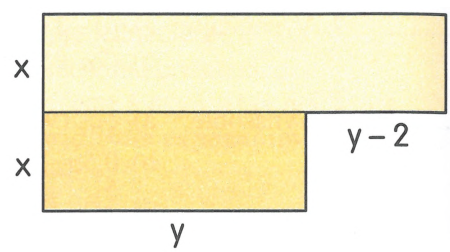
14. Vydeľte: a) $(8a+5b) : 1$ c) $(-10z+20v) : (-10)$ e) $(27x-9y) : 9$
    b) $(16x-8y) : 8$ d) $(-8a+4b) : (-4)$ f) $(-28z-32u) : (-4)$

15. Vypočítajte: a) $(15p - 6t) : (-3)$ c) $(8x^2 - 32\,xy) : 8x$
b) $(7a - 14ab) : 7a$ d) $(45a^2b^2 + 27ac) : (-9a)$

16. Vypočítajte a overte správnosť riešenia dosadením za $x = 3$, $y = -2$.
a) $3x - 2x\,.\,(8y - 2) + 4y\,.\,(2y - 8)$ c) $(2x - y - 3)\,.\,(2y - 3x) + y\,.\,(6 - 3x)$
b) $(7x - 1)\,.\,2y - 8x\,.\,(2x - 6y) - 6y$ d) $(y - 2)\,.\,(3 - x) + (2 - x)\,.\,(y - 3)$

17. Zapíšte a upravte výraz, ktorý je:
a) $(2n + 3)$-krát väčší ako dvojčlen $5 - 4n$
b) $(k - 1)$ násobkom trojčlena $7k^2 - 3k - 5$
c) súčinom trojčlenov $3x^2 - 2x - 5$, $4x^2 - 9x + 7$
d) súčtom súčinu dvojčlenov $x - 3y$, $12y - 7$ a súčinu výrazov $3x$, $2x^2 + 7y - 1$

18. Vypočítajte a zapíšte čo najjednoduchším výrazom obsah obrazca zloženého z dvoch obdĺžnikov. Nájdite dva rôzne postupy riešenia.



4.3 Úprava výrazov vynímaním pred zátvorku

1

PRÍKLAD

Upravte na súčin: a) $18a + 3$ b) $12a^2 + 4$ c) $20ab - 5bc$

RIEŠENIE

Adam si spomenul na vynímanie najväčšieho deliteľa zo všetkých členov výrazu:

a) $18a + 3$ každý člen výrazu môžeme vydeliť číslom 3
platí $18a : 3 + 3 : 3 = 6a + 1$
preto $18a + 3 = 3\,.\,6a + 3\,.\,1 = 3\,.\,(6a + 1)$

b) $12a^2 + 4a$ každý člen výrazu môžeme vydeliť číslom 4
platí $12a^2 : 4 + 4a : 4 = 3a^2 + a$
preto $12a^2 + 4a = 4\,.\,3a^2 + 4\,.\,a = 4\,.\,(3a^2 + a)$
každý člen výrazu $(3a^2 + a)$ môžeme deliť premennou a
platí $3a^2 : a + a : a = 3a + 1$
preto $12a^2 + 4a = 4\,.\,(3\,.\,a\,.\,a + a\,.\,1) = 4a\,.\,(3a + 1)$

c) $20ab - 5bc$ každý člen výrazu môžeme vydeliť jednočlenom $5b$
platí $20ab : 5b - 5bc : 5b = 4a - c$
preto $20ab - 5bc = 5b\,.\,a - 5b\,.\,c = 5b\,.\,(4a - c)$

Vynímanie jednočlena pred zátvorku

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov mnohočlena (koeficienty aj premenné) napíšeme pred zátvorku. V zátvorke zostanú členy, ktoré sme týmto deliteľom vydelili. Hovoríme, že sme mnohočlen **upravili na súčin.**

PRÍKLAD

Z výrazu $(-5y^2 + 3y - 4)$ vyjmite pred zátvorku číslo (-1).

RIEŠENIE

Juraj rozmýšľa: Ak každý člen daného mnohočlena vydelím číslom (-1), zmenia sa všetky znamienka mnohočlena.

Platí: $(-5y^2 + 3y - 4) = (-1) \,.\, (5y^2 - 3y + 4)$

Farebne je vyznačený **opačný mnohočlen** k danému mnohočlenu.

ÚLOHA

Vyjmite pred zátvorku:
a) z výrazu $21x^2 - 7x$ jednočlen $7x$
b) z výrazu $-21a^3 + 33a^2$ jednočlen $-3a^2$
c) z výrazu $45x^2y + 18xy^2$ jednočlen $9xy$

ÚLOHA

Upravte na súčin:
a) $4x^2 + 36x$
b) $12a - 9ab$
c) $-8u - 10u^3$
d) $20c^3 - 120c^4$

ÚLOHA

Namiesto $\square$ doplňte taký člen, aby platila rovnosť:
a) $12a + \square - 15b = 3 \,.\, (4a + 7c - 5b)$
b) $\square + 12ac - 4ab = 4a \,.\, (-b^2 + 3c - b)$

PRÍKLAD

Upravte na súčin: a) $5 \,.\, (a - 2) + 4b \,.\, (a - 2)$ b) $a \,.\, (b - 1) + (1 - b) \,.\, 6$
O správnosti riešenia sa presvedčte dosadením za $a = 5$, $b = 3$.

RIEŠENIE

a) Andrej rozmýšľa: vo výraze $5 \,.\, (a - 2) + 4b \,.\, (a - 2)$ sa nachádzajú dva súčiny s rovnakým činiteľom. Z každého súčinu môžem vyňať výraz $(a - 2)$:

$$5 \,.\, (a - 2) + 4b \,.\, (a - 2) = (a - 2) \,.\, (5 + 4b)$$

Overenie dosadením:
pôvodný výraz: $5 \,.\, (5 - 2) + 4 \,.\, 3(5 - 2) = 5 \,.\, 3 + 12 \,.\, 3 = 15 + 36 = 51$
upravený výraz: $(5 - 2) \,.\, (5 + 4 \,.\, 3) = 3 \,.\, 17 = 51$
Hodnoty sa rovnajú. Výraz bol upravený správne.

b) Vo výraze $a\ .\ (b-1)+(1-b)\ .\ 6$ sa nachádzajú v súčinoch opačné dvojčleny. Ak z dvojčlena $(1-b)$ vyjmem pred zátvorku číslo -1, dostanem:

$(1-b)=-1(-1+b)=-1(b-1)$

$a\ .\ (b-1)+(1-b)\ .\ 6=a\ .\ (b-1)+(-1)\ .\ (b-1)\ .\ 6=a\ .\ (b-1)-6\ .\ (b-1)=$
$=(b-1)(a-6)$

Overenie dosadením: pôvodný výraz: $5.\ (3-1)+(1-3)\ .\ 6=10-12=-2$
upravený výraz: $(3-1)(5-6)=2\ .\ (-1)=-2$

Hodnoty sa rovnajú. Výraz bol upravený správne.

Vynímanie dvojčlena pred zátvorku

Ak sa v mnohočlene nachádzajú násobky toho istého dvojčlena, dvojčlen napíšeme pred zátvorku.
V zátvorke zostanú členy, ktoré sme týmto dvojčlenom vydelili.
Hovoríme, že sme mnohočlen **upravili na súčin dvojčlena a mnohočlena.**

POZNÁMKA

Ak sa v mnohočlene nachádzajú opačné dvojčleny, z jedného z nich vyjmeme -1.

4 ***ÚLOHA***

Vyjmite pred zátvorku:

a) z výrazu $5\ .\ (x-2)+4a\ .\ (x-2)$ — dvojčlen $(x-2)$
b) z výrazu $x\ .\ (a+b)+c\ .\ (a+b)$ — dvojčlen $(a+b)$
c) z výrazu $x\ .\ (3a-1)+y\ .\ (3a-1)-z\ .\ (3a-1)$ — dvojčlen $(3a-1)$

O správnosti výpočtu sa presvedčte dosadením:
$a=1,\ b=-2,\ c=3,\ x=1,\ y=2,\ z=-2$

5 ***ÚLOHA***

Vyjmite pred zátvorku vhodný dvojčlen:

a) $3(x-1)+5x(x-1)$
b) $y(8x-y)-4(8x-y)$
c) $(6-x)\ .\ 2+2y(x-6)$
d) $x^2(x-1)-(1-x)$

O správnosti riešenia sa presvedčte dosadením za $x=5,\ y=2$.

4 ***PRÍKLAD***

Upravte na súčin výraz: $22a-22+18b-18ab$

RIEŠENIE

Barbora postupne upravuje:

$22a-22+18b-18ab=(22a-22)+(18b-18ab)=$
$=22\ .\ (a-1)+18b\ .\ (1-a)=$ — z druhého dvojčlena vyjmem (-1)
$=22\ .\ (a-1)+18b\ .\ (-1)\ .\ (a-1)=$ — upravím
$=22\ .\ (a-1)-18b\ .\ (a-1)=$ — z obidvoch členov vyjmem $(a-1)$
$=(a-1)\ .\ (22-18b)=$ — z druhého činiteľa vyjmem 2
$=2\ .\ (a-1)\ .\ (11-9b)$

Skúška:

$2 \cdot (a - 1) \cdot (11 - 9b) = (2a - 2) \cdot (11 - 9b) = 22a - 18ab - 22 + 18b =$

$= 22a - 22 + 18b - 18ab$

Dostala som pôvodný mnohočlen.

ÚLOHA

Rozložte na súčin a urobte skúšku:

a) $2xa + 2x + a + 1$ c) $2kd^2 - 7d^2 - 7 + 2k$

b) $2a^2 - 2ac - 4a + 4c$ d) $8s^2 \cdot (3 - a) - 3 + a$

ÚLOHA

Rozložte na súčin:

a) $a^2n + b^3n + a^2m + b^3m$ c) $91x^2y - 39x^2z + 49t^2y - 21t^2z$

b) $25a^2x + 5a^2y + 15b^2x + 3b^2y$ d) $10ax + 2ay + 15bx + 3by$

C V I Č E N I A

1. Vyjmite pred zátvorku:
   a) z výrazu $25x^3 - 15x$ jednočlen $5x$
   b) z výrazu $-13uv - 26vy$ jednočlen $-13v$
   c) z výrazu $16abc + 20bcd$ jednočlen $4bc$

2. Z nasledujúcich výrazov vyjmite pre zátvorku číslo (–1).
   a) $a - b$ b) $1 - 4x - x^2$ c) $-14 - 5c$ d) $x^2 - 2xy + y^2$

3. Vyjmite pred zátvorku najväčšieho spoločného deliteľa z výrazov:
   a) $21a^2 - 7a$ b) $-27a^3 + 33a^2$ c) $42x^2y + 18xy^2$ d) $-30rs - 12r^2s^3$

4. Vyjmite pred zátvorku:
   a) z výrazu $6a(x - 1) + 4b(x - 1)$ dvojčlen $(x - 1)$
   b) z výrazu $3(3x + 2) + 2a(3x + 2)$ dvojčlen $(3x + 2)$
   c) z výrazu $ab(x + y) + a^2(x + y)b$ dvojčlen $(x + y)$

   O správnosti počítania sa presvedčte dosadením: $a = 2$, $b = -1$, $x = 2$, $y = -2$.

5. Rozložte na súčin a urobte skúšku správnosti:
   a) $-2 \cdot (a - 2) + 5a(a - 2)$ c) $(2y + 3x)z - 6(2y + 3x)$
   b) $z(x + y) - (x + y)$ d) $a(1 - b) + c(b - 1)$

6. Rozložte na súčin výrazy:
   a) $20a^2 + 10ab - 30a$ c) $-3x - 6y - 12z$
   b) $-34x^2 - 51xy - 17x$ d) $0{,}24a^2 + 0{,}18ab - 0{,}36$

7. Upravte na súčin výrazov:
   a) $2a \cdot (x - 1) - 3 \cdot (1 - x) + (1 - x)$
   b) $4 \cdot a \cdot (x + y) - (x + y) + 2 \cdot b \cdot (x + y)$
   c) $5 \cdot (a - 1) - 10 \cdot (1 - a) - a + 1$

8. Doplňte taký člen, aby platila rovnosť:
   a) $12a + \square - 15b = 3 \cdot (4a + 7c - 5b)$
   b) $\square + 12ac - 4ab = 4a \cdot (-b^2 + 3c - b)$

9. Doplňte tabuľku násobenia:

	$3a$	a^2
	$6a^3 - 3a$	
$a + 2a^2$		
	$3ab - 12ac$	
		$4a^3b + 5a^2c + a^2$

10. Rozložte nasledujúce výrazy na súčin:

a) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{5}{4}xy^2$

b) $2x \,.\, (x + 1) - 3x \,.\, (x + 1)$

c) $7x \,.\, (3x - 1) + 3x - 1$

d) $6y^3 - 5y^2 - 6yx^3 + 5x^3$

4.4 Úprava výrazov pomocou vzorcov $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$

[1]

PRÍKLAD

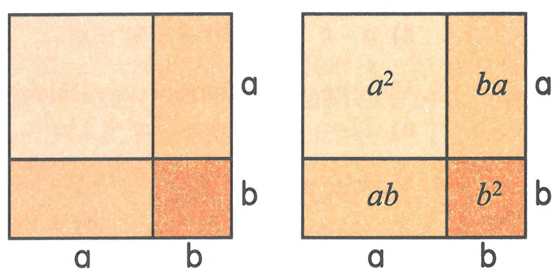
Vypočítajte, čomu sa rovná: a) $(a + b)^2$ b) $(a - b)^2$

RIEŠENIE

Počítajte spolu s Jurajom:

a) $(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Juraj si k príkladu nakreslil obrázok:



b) $(a - b)^2 = (a - b) \,.\, (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ZAPAMÄTAJTE SI

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

POZNÁMKA

Zápisom tvaru $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ *hovoríme* ***druhá mocnina dvojčlena.***

Slovne môžeme vzorce popísať takto:

Druhá mocnina dvojčlena	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$
sa rovná súčtu:		
druhej mocniny prvého člena	a^2	a^2
dvojnásobku súčinu oboch členov	$2ab$	$2a(-b) = -2ab$
druhej mocniny druhého člena	b^2	$(-b)^2 = b^2$

1 ***ÚLOHA***

Umocnite vynásobením aj podľa vzorcov. O správnosti sa presvedčte dosadením za $x = 1$, $y = 2$.

a) $(x + y)^2$ b) $(2x + y)^2$ c) $(4x + 3y)^2$ d) $(x - y)^2$ e) $(x - 4y)^2$ f) $(5x - 2y)^2$

2 ***ÚLOHA***

Umocnite použitím vzorcov. Výsledok overte pre $u = 2$, $v = 3$.

a) $(2u + v)^2$ b) $(4 - v)^2$ c) $\left(\frac{1}{2}v - 3u\right)^2$ d) $(2u + 0{,}2v)^2$

3 ***ÚLOHA***

Presvedčte sa, že platí: a) $(x - y)^2 = (y - x)^2$ b) $(x + y)^2 = (-x - y)^2$

[2] ***PRÍKLAD***

Rozložte na súčin podľa vzorcov. Overte dosadením *za* $x = 2$.

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $4x^2 + 12x + 9$

! ***RIEŠENIE***

Adam si pomáha vhodným rozkladom koeficientov.

a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, x + 3^2 = (x - 3)^2$

Overenie:

pôvodný výraz $x^2 - 6x + 9 = 2^2 - 6 \,.\, 2 + 9 = 4 - 12 + 9 = 1$

upravený výraz $(2 - 3)^2 = (-1)^2 = 1$

Hodnoty sa rovnajú. Výraz bol upravený správne.

b) $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \,.\, 6x + 3^2 = (2x)^2 + 2 \,.\, 3 \,.\, 2x + 3^2 = (2x + 3)^2$

Overenie:

pôvodný výraz $4 \,.\, 2^2 + 12 \,.\, 2 + 9 = 4 \,.\, 4 + 24 + 9 = 16 + 33 = 49$

upravený výraz $(2 \,.\, 2 + 3)^2 = 7^2 = 49$

Hodnoty sa rovnajú. Výraz bol upravený správne.

4 ***ÚLOHA***

Rozložte na súčin podľa vzorcov pre druhú mocninu dvojčlena. Zvoľte si ľubovoľné hodnoty premenných a výsledok overte.

a) $x^2 + 6xy + 9y^2$ b) $81x^2 + 90xy + 25y^2$ c) $9x^2 - 6xy + y^2$ d) $16x^2 - 56xy + 49y^2$

5 ***ÚLOHA***

Presvedčte sa, že dané výrazy nie je možné rozložiť podľa vzorcov pre druhú mocninu dvojčlena. Odôvodnite prečo.

a) $x^2 - 6x - 9$ b) $x^2 + y^2$ c) $3x^2 + 6xy + y^2$

6 ***ÚLOHA***

Vypočítajte: a) $2 \,.\, (3x + y)^2$ b) $0{,}1(x + 10)^2$ c) $\frac{1}{2}(2x + 1)^2$

7 ***ÚLOHA***

Vypočítajte: a) $(4x-1)^2+(x-2)^2-3(x+3)^2$ b) $5(t-s)^2-(5t+s)^2+(s-5t)^2$

8 ***ÚLOHA***

Vypočítajte neznámu v, ak platí: $(v+5)^2+2(v-3)^2=3(v+1)^2$
Vykonajte aj skúšku správnosti.

[3] ***PRÍKLAD***

Vypočítajte súčin $(a-b).(a+b)$. Výsledok overte dosadením za $a=5,\ b=2$.

RIEŠENIE

Adam násobí dvojčlen dvojčlenom.

$(a-b).(a+b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

Overenie:
pôvodný výraz $(5-2).(5+2)=3\,.\,7=21$
upravený výraz $5^2-2^2=25-4=21$
Hodnoty sa rovnajú. Výraz bol upravený správne.

ZAPAMÄTAJTE SI

$$\boldsymbol{(a+b)\,.\,(a-b)=a^2-b^2}$$

POZNÁMKA

Vzorec $\boldsymbol{(a+b)\,.\,(a-b)=a^2-b^2}$ *slovne čítame:*
Súčin súčtu a rozdielu tých istých dvoch čísel sa rovná rozdielu ich druhých mocnín.

9 ***ÚLOHA***

Pokúste sa určiť výsledok spamäti:

a) $(a+1).(a-1)$ c) $(z+3).(z-3)$ e) $(2t-1).(2t+1)$
b) $(x+y).(x-y)$ d) $(c-d).(c+d)$ f) $(b-4).(4+b)$

10 ***ÚLOHA***

Vypočítajte. Výsledok overte dosadením za $x=2, y=3, z=-1$.

a) $(3+x).(x-3)$ b) $\left(\frac{1}{2}y+1\right).\left(\frac{1}{2}y-1\right)$ c) $(3x-yz).(3x+yz)$

11 ***ÚLOHA***

Vypočítajte, výsledok overte dosadením za $\boldsymbol{s}=5$.

a) $3(s^2-3)-(s-3).(s+3)$ b) $(s-1).(s+4)-(s+2).(s-2)$

[4] ***PRÍKLAD***

Rozložte na súčin a urobte skúšku správnosti.

a) a^2b^2-9 b) $9x^4-16y^6$ c) $100u-u^3$

RIEŠENIE

a) Jana si dvojčlen $a^2b^2 - 9$ upraví na tvar $a^2b^2 - 3^2$ a ten rozloží podľa vzorca takto:

$a^2b^2 - 9 = a^2b^2 - 3^2 = (ab)^2 - 3^2 = (ab - 3) \,.\, (ab + 3)$

Skúška: $(ab - 3) \,.\, (ab + 3) = a^2 + 3ab - 3ab - 9 = a^2b^2 - 9$

b) Adam si dvojčlen $9x^4 - 16y^6$ upraví na tvar $3^2(x^2)^2 - 4^2(y^3)^2$ a rozloží podľa vzorca:

$9x^4 - 16y^6 = 3^2(x^2)^2 - 4^2(y^3)^2 = (3x^2)^2 - (4y^3)^2 = (3x^2 - 4y^3) \,.\, (3x^2 + 4y^3)$

Skúška: $(3x^2 - 4y^3) \,.\, (3x^2 + 4y^3) = 9x^4 + 12x^2y^3 - 12x^2y^3 - 16y^6$

c) Martin z dvojčlena $100u - u^3$ najskôr vyjme pred zátvorku u, dostane: $u \,.\, (100 - u^2)$ a tento výraz rozloží podľa vzorca:

$100u - u^3 = u \,.\, (100 - u^2) = u \,.\, (10^2 - u^2) = u \,.\, (10 - u) \,.\, (10 + u)$

Skúška: $u \,.\, (10 - u) \,.\, (10 + u) = (10u - u^2) \,.\, (10 + u) = 100u + 10u^2 - 10u^2 - u^3$

POZNÁMKA

Vzorec zapísaný takto: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b) \,.\, (a - b)}$ *slovne čítame:*
Rozdiel druhých mocnín sa rovná súčinu súčtu a rozdielu ich základov.

12 ***ÚLOHA***

Rozložte na súčin použitím vzorca $a^2 - b^2$. O výsledku sa presvedčte dosadením ľubovoľných hodnôt za premenné.

a) $x^2 - 16$ c) $y^2 - 9a^2$ e) $4a^2 - 49b^2$
b) $36m^2 - y^2$ d) $100 - a^2$ f) $x^4 - y^2$

13 ***ÚLOHA***

Doplňte namiesto $\square$ výrazy tak, aby vznikla rovnosť.

a) $\square - 25 = (a - \square)(a + \square)$
b) $x^2 - 64 = (x - \square)(\square + \square)$
c) $16y^2 - \square = (\square - x)(\square + \square)$

14 ***ÚLOHA***

Rozložte na súčin: a) $3^2z^2 - 0{,}5^2$ b) $t^2 - v^4u^2$ c) $y^2 - 1$ d) $64r^2 - 9$

5 ***PRÍKLAD***

Vypočítajte rozdiel: $43^2 - 37^2$.

RIEŠENIE

Vlasta počítala pomocou kalkulačky: $43^2 - 37^2 = 1\,849 - 1\,369 = 480$

Karol si napísal riešenie takto:
$43^2 - 37^2 = (43 - 37).\, (43 + 37) = 6 \,.\, 80 = 480$

Karolovo riešenie je výhodnejšie, vhodne použil rozklad rozdielu druhých mocnín dvoch čísel podľa vzorca: $a^2 - b^2 = (a + b) \,.\, (a - b)$

15

ÚLOHA

Vypočítajte s použitím vhodného vzorca:

a) $35^2 - 28^2$ b) $42^2 - 22^2$ c) $6{,}5^2 - 5{,}6^2$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(3\frac{2}{4}\right)^2$

CVIČENIA

1. Vypočítajte vynásobením aj podľa vzorca $(a + b)^2$:

a) $(u + v)^2$ c) $(10 + y)^2$ e) $(3a + 5c)^2$
b) $(x + 5)^2$ d) $(4x + y)^2$ f) $(ab + cd)^2$

2. Vypočítajte vynásobením aj podľa vzorca $(a - b)^2$:

a) $(u - v)^2$ c) $(8 - y)^2$ e) $(3c - 5d)^2$
b) $(x - 4)^2$ d) $(x - 2y)^2$ f) $(ab - cd)^2$

3. Umocnite podľa príslušného vzorca:

a) $(1 + x)^2$ c) $(2x - 7y)^2$ e) $(-x + y)^2$ g) $(-6xy - 1)^2$
b) $(2x + y)^2$ d) $(x^2 - y)^2$ f) $(2x + 3z)^2$ h) $(xyz - 3)^2$
Správnosť overte dosadením za $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$.

4. Vypočítajte: a) $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$ b) $\left(m - \frac{2}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{a}{4} + 2b\right)^2$ d) $\left(\frac{1}{3}d - \frac{3}{2}k\right)^2$

5. Vypočítajte: a) $(0{,}5v - 1{,}2w)^2$ b) $(0{,}6s + 1{,}1t)^2$ c) $(1{,}3 + 0{,}2u)^2$

6. Napíšte ako druhú mocninu dvojčlena:

a) $x^2 + 6xy + 9y^2$ c) $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{3}yz + \frac{1}{9}z^2$
b) $a^2 - 14a + 49$ d) $0{,}01 + 0{,}04c + 0{,}04c^2$

7. Doplňte výrazy v tabuľke tak, aby každý výraz predstavoval druhú mocninu dvojčlena:

1	$a^2 - 2ab + \square$	$x^2 - \square + 1$	$4x^2 - 24x + \square$
2	$9u^2 + \square + 16$	$49 - 14e + \square$	$\square + 4mn + n^2$
3	$\square - 30v + 25$	$\square + 14cd + d^2$	$c^2 - \square + 64a^2$
4	$\square - 6xy + 9y^2$	$k^2 - \square + 4d^2$	$81u^2 - 36uv + \square$
5	$4m^2 - \square + s^2$	$c^2 - \square + 9d^2$	$\square - 4rs + s^2$

8. Doplňte na vynechané miesta výrazy tak, aby platila rovnosť:

a) $(a + \square)^2 = a^2 + 6a + \square$ c) $(\square + 2xy)^2 = 25z^4 + \square + \square$
b) $(3a - \square)^2 = \square - 24ab + \square$ d) $(\square - \square)^2 = 4x^2 - \square + 16y^4$

9. Zistite, či platí rovnosť:

a) $(x + y)^2 = (y + x)^2$ b) $(a - b)^2 = (b - a)^2$ c) $(-2x + y)^2 = (-y + 2x)^2$

10. Vypočítajte: a) $(a - 1)^2 - (a + 2)^2 + (a - 3)^2$ c) $(2y - 3z)^2 + (3y + 2z)^2$
b) $(d + c)^2 + (d - c)^2$ d) $4(x + 3y)^2 - (4x + 3y)^2$

11. Vypočítajte neznámu $\boldsymbol{x}$**,** ak platí:

a) $x^2 - (x+3)^2 = -3$

b) $3(x-5)^2 - x(3x-5) = 0$

c) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$

d) $4(x+0{,}2)^2 = (2x - 0{,}2)^2$

12. Pokúste sa určiť výsledok spamäti:

a) $(x-1) \,.\, (x+1)$

b) $(c+2d) \,.\, (c-2d)$

c) $(3x-1) \,.\, (3x+1)$

d) $(2b-4a) \,.\, (2b+4a)$

13. Vypočítajte. Výsledok overte dosadením za $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$

a) $(5-a) \,.\, (5+a)$

b) $(b+0{,}4) \,.\, (b-0{,}4)$

c) $(ab-c) \,.\, (ab+c)$

d) $\left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{2}a\right) \cdot \left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{2}a\right)$

14. Vypočítajte. Výsledok overte dosadením za $d = 3$.

a) $(d-2) \,.\, (d+2) - 2d \,.\, (d-1)$

b) $(6-d) \,.\, (d+6) + d + 4 \,.\, (d-6)$

c) $(d+1)^2 + (d-1)^2 - (2d+1) \,.\, (2d-1)$

15. Rozložte na súčin. O správnosti výsledku sa presvedčte dosadením ľubovoľných hodnôt za premenné.

a) $x^2 - 36$

b) $81c^2 - 100$

c) $4y^2 - 16z^2$

d) $49v^4 - 1$

e) $d^4e^2 - f^6$

f) $144a^5 - a^3$

16. Vypočítajte s použitím vhodného vzorca:

a) $27^2 - 19^2$

b) $35^2 - 15^2$

c) $53^2 - 75^2$

d) $1{,}2^2 - 0{,}6^2$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$

17. Rozložte na súčin:

a) $(a+b) + (a+b) \,.\, (a-b)$

b) $(x-1) + (x^2-1)$

c) $(x^2-y^2) - (x+y)$

18. Vypočítajte x, ak platí:

a) $(x+5)^2 - (x-2) \,.\, (x+2) = -1$

b) $(3-x) \,.\, (x+3) = 1 - (x-4)^2$

c) $(2x+5) \,.\, (2x-5) - (2x-5)^2 = 10$

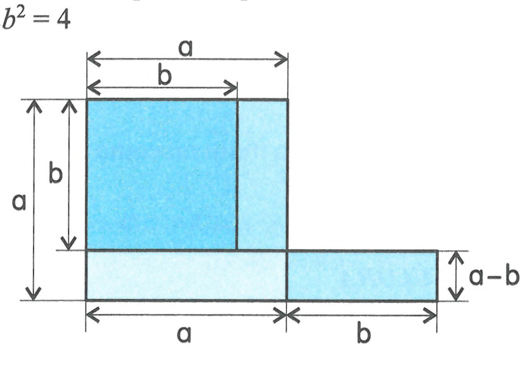
19. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b pre ktoré platí:

$2b \,.\, (a+2b) + (a-b) \,.\, (b+a) - 2b^2 = 4$

20. Pozorne si pozrite obrázok. Pokúste sa na ňom nájsť geometrický význam vzorca

$a^2 - b^2 = (a+b) \,.\, (a-b)$

pre čísla $a > b > 0$.



4.5 Vzorce $(a \pm b)^3$

[1] ***PRÍKLAD***

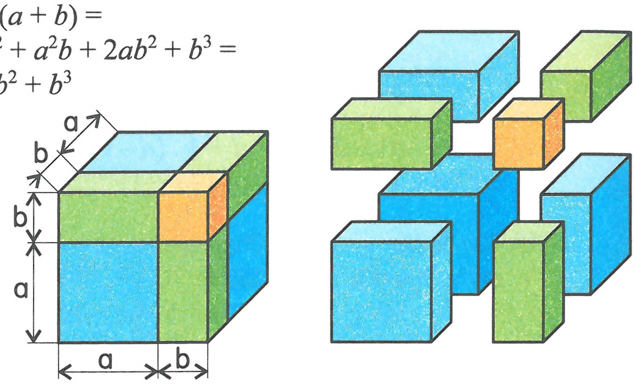
Vypočítajte: a) $(a+b)^3$ b) $(a-b)^3$

RIEŠENIE

Lukáš postupne násobí:

a) $$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = \\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Obrázok ilustruje výpočet tretej mocniny dvojčlena. Nájdite v ňom jednotlivé členy výsledku.



$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

b) $$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b) = \\ &= (a^2-2ab+b^2)(a-b) = \\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 = \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

1 ***ÚLOHA***

Vypočítajte vynásobením aj priamo použitím vzorcov. Výsledok overte dosadením za $x = 1$, y = 2.

a) $(x-y)^3$ b) $(2x+y)^3$ c) $(y+3x)^3$ d) $(3x-2y)^3$

2 ***ÚLOHA***

Vyjadrite ako tretiu mocninu dvojčlena:

a) t^3-3t^2+3t-1
b) $(t^2+2ta+a^2)(a+t)$
c) $8t^3-12t^2u+6tu^2-u^3$
d) $27+9t+9t^2+t^3$

3 ***ÚLOHA***

Vypočítajte: $(2x-3)^3+(3x-2)^3$

4

ÚLOHA

Doplňte vhodné členy tak, aby platila rovnosť:

a) $(x + \square)^3 = \square + 3x^2z + \square + \square$ b) $(2a - \square)^3 = \square - 12a^2 + 6a - \square$

CVIČENIA

1. Vypočítajte vynásobením aj priamo použitím vzorcov. Výsledok overte dosadením za $p = 1, q = 2$.
   a) $(p + 1)^3$ b) $(3p + q)^3$ c) $(2 + q)^3$ d) $(q - p)^3$ e) $(4 - q)^3$ f) $(2p - 3q)^3$

2. Vyjadrite ako tretiu mocninu dvojčlena:
   a) $b^3 - 3b^2 + 3b - 1$ b) $8s^3 - 12s^2r + 6sr^2 - r^3$ c) $(d^2 + 2de + e^2)(d + e)$ d) $(x - y)(x^2 - 2xy + y^2)$

3. Vypočítajte: a) $(2x + y)^3 + (2x - y)^3$ b) $(2x + y)^3 - (2x - y)^3$

4. Doplňte chýbajúce údaje tak, aby platila rovnosť:
   a) $(a + \square)^3 = \square + 3a^2z + \square + \square$ b) $(2c - \square)^3 = \square - 12c^2 + 6c - \square$

VYSKÚŠAJTE SA !

1. Zapíšte ako výraz:
   a) tri osminy čísla p
   b) päťnásobok čísla x zmenšený o tri
   c) číslo päťkrát väčšie ako číslo a zmenšené o päť

2. Vyjadrite slovne: a) $5x - 3y$ b) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ c) $\frac{3}{2}(m + 2n)$ d) $(v + u)^2$

3. Zjednodušte:
   a) $6p^2 - (3p + 1) - (2p^2 - 2p)$
   b) $-(2a^2 + 5a - 1) + (a - 3)$
   c) $2m^2 - 2mn - 3(mn - 2n^2) - (m^2 - n^2)$

4. Rozložte ako súčin. Využite vynímanie a vzorce $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$.
   a) $a(u - v) + 3(u - v)$ b) $16a^2 - 16ab + 4b^2$ c) $-x^2 + 4x - 4$ d) $4p^2 - 9$

5. Doplňte chýbajúce údaje tak, aby platila rovnosť:
   a) $4a^2 - \square = (\square - 3)(\square + 3)$ b) $h^3 \square 4h = h(h - \square)(\square + 2)$ c) $k^2 \square \square = (k - 4)(\square + 4)$ d) $\square - 4x \square 4 = (\square \square \square)^2$

6. Vynásobte:
   a) $2m(-3n)(-mn)$ b) $(a - 1)(3b + 2)$ c) $(x^2 + 3x + 2)(x + 1)$ d) $(a^2 + 3ab - b^2)(a + b)$

7. Odôvodnite, prečo sa dané výrazy nedajú rozložiť na súčin podľa vzorca $(a + b)^2$: a) $x^2 + 3xy + y^2$ b) $4a^2 + 4a - 1$

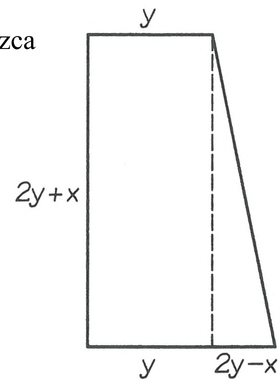
8. Vypočítajte a výsledok overte dosadením za $x = -2$: $(x + 3)^3$

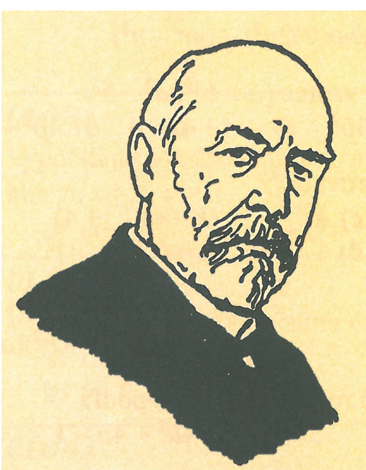
9. Nahraďte □ takým výrazom, aby ste dostali mnohočlen, ktorý sa dá vyníma-ním upraviť na súčin dvoch dvojčlenov:

a) $ab + ac + bx + \square$ b) $ax + x - ay + \square$

10. Vyjadrite obvod obdĺžnika, ak jeho obsah je $2x^2 + 3x$ a jedna strana má dĺžku x.

11. Zapíšte čo najjednoduchším výrazom obsah obrazca na obrázku.





Georg Cantor

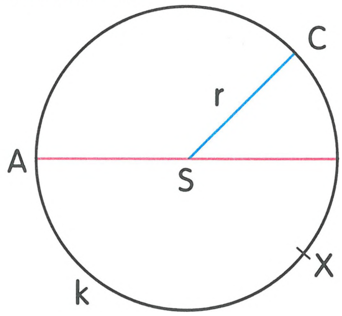
(3. 3. 1845 až 6. 1. 1918)

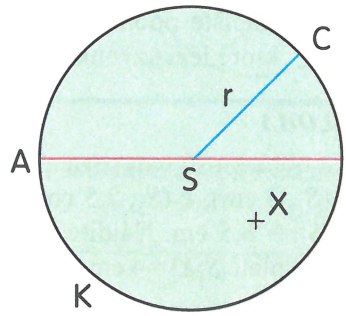
Nemecký matematik, zakladateľ teórie množín, ktorá podstatne ovplyvnila vývoj matematiky. Rozpracoval teóriu nekonečných množín a teóriu transfinitných čísel, začal používať pojem mohutnosť množiny. Ukázal, že na úsečke je rovnako veľa bodov ako v priestore. Systematicky študoval princípy nekonečna, pomocou množín dokázal existenciu transcendentných čísel Známe sú aj jeho výsledky z teórie čísel Zaviedol tiež presnú konštrukciu reálnych čísel.

5 KRUH, KRUŽNICA

5.1 Kružnica a kruh

ZOPAKUJME SI





Kružnica k so stredom S a polomerom r

$k(S, r)$ … kružnica
$SC = r$ ... polomer kružnice
$AB = d$ ... priemer kružnice
$d = 2r$

Pre všetky body X kružnice platí:
$|SX| = r$

r má dva významy: úsečka SC
dĺžka úsečky SC

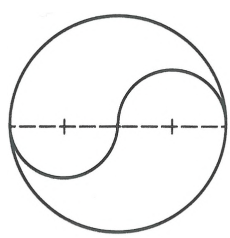
Kruh K so stredom S a polomerom r

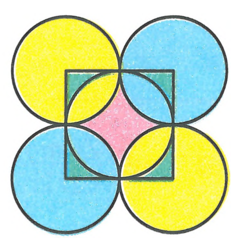
$K(S, r)$ … kruh
$SC = r$ ... polomer kruhu
$AB = d$ ... priemer kruhu
$d = 2r$

Pre všetky body X kruhu platí:
$|SX| \leq r$

1 ***ÚLOHA***

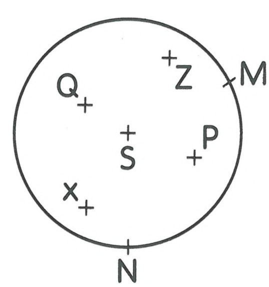
Prerysujte obrázky do zošita a vyfarbite.





2 ***ÚLOHA***

Na obrázku je narysovaná kružnica $k(S, 3\text{ cm})$. Súčasne je vyznačených niekoľko bodov. Zapíšte vzťahy, ktoré platia pre vzdialenosti týchto bodov od stredu S.



3 *ÚLOHA*

Narysujte kružnicu $k(S,$ 4 cm).

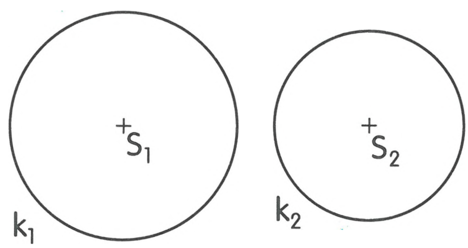
a) Kde ležia všetky body $X,$ pre ktoré platí $|SX| = 4$ cm?

b) Napíšte podmienku pre vzdialenosti všetkých bodov Y od stredu $S,$ ktoré ležia vo vnútri kružnice $k.$

c) Napíšte podmienku pre vzdialenosti všetkých tých bodov Z od stredu $S,$ ktoré ležia zvonku kružnice $k.$

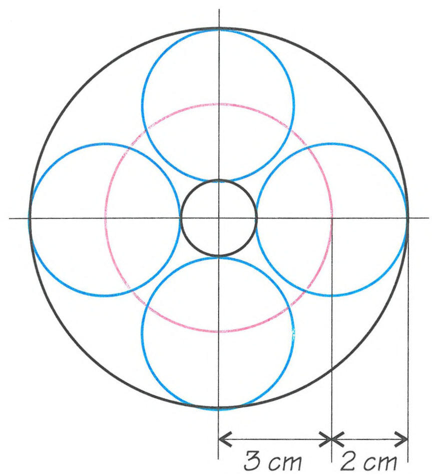
4 *ÚLOHA*

Na obrázku sú narysované kružnice $k_1(S_1,$ 3 cm), $k_2(S_2;$ 2,5 cm), pričom $|S_1S_2| = 6{,}5$ cm. Nájdite bod $X,$ pre ktorý platí $|S_1X| = 4$ cm, $|S_2X| = 3$ cm.



CVIČENIA

1. Prerysujte tento obrázok do zošita.



2. Daný je bod S a bod M. Zostrojte kružnicu k, ktorá má stred v bode S a prechádza bodom M.

+S +M

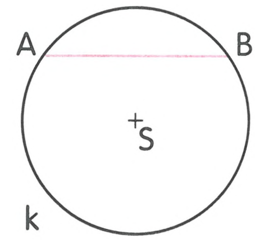
3. Zostrojte kružnicu $k(S;$ 2,5 cm). Vyznačte dva navzájom kolmé priemery $AB,$ CD kružnice $k.$ Zapíšte všetky pravé uhly, ktoré takto vznikli.

4. Zostrojte kruh $K(S,$ 3 cm). Vyznačte aspoň dva body $M_1,$ $M_2,$ pre ktoré platí: 2,5 cm $< |SM_1| <$ 4 cm; 2,5 cm $< |SM_2| <$ 4 cm.

5. Daná je kružnica $k(S;$ 2,5 cm) a priamka $p,$ ktorá má s kružnicou spoločný jeden bod. Zostrojte obraz k' kružnice k v osovej súmernosti s osou $p.$ Popíšte postup.

6. Daný je kruh K $(S,$ 3 cm). Mimo neho je daný bod $O.$ Zostrojte obraz K' kruhu K v stredovej súmernosti so stredom v bode $O.$

5.2 Tetiva kružnice



Na obrázku je narysovaná kružnica $k(S,\ 3\ \text{cm})$. Na kružnici k sú vyznačené dva rôzne body A, B.

Úsečka AB sa nazýva **tetiva kružnice.**

1

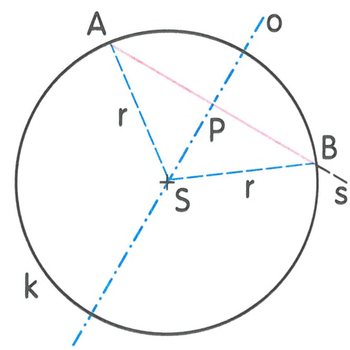
ÚLOHA

Zostrojte kružnicu $k(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$. Vyznačte tetivu kružnice k, ktorá prechádza bodom S. Ako sa nazýva táto tetiva?

2

ÚLOHA

Daná je úsečka AB. Zostrojte os o tejto úsečky. Čo platí o bodoch priamky o vzhľadom na body A, B?



Na obrázku je narysovaná kružnica $k(S,\ 2\ \text{cm})$. Úsečka AB je jej tetivou. Os o tetivy AB je osou úsečky AB; preto $o \perp AB$ a prechádza stredom P úsečky AB. Body A, B ležia na kružnici k; platí teda

$$|AS| = |BS| = r$$

Pretože body, ktoré majú rovnaké vzdialenosti od krajných bodov úsečky, ležia na jej osi, leží na priamke o aj bod S.

Os tetivy kružnice prechádza stredom kružnice.

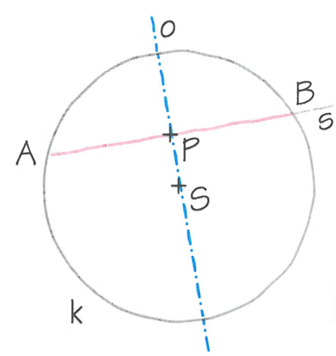
[1]

PRÍKLAD

Vo vnútri kružnice $k\ (S,\ 3\ \text{cm})$ leží bod P rôzny od stredu S. Zostrojte tetivu AB kružnice k tak, aby bod P bol stredom tetivy.

RIEŠENIE

Rozbor: *Náčrt:*

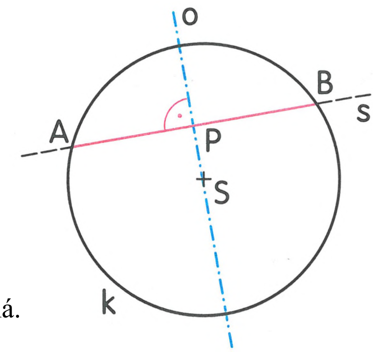


Načrtnutá kružnica k má tetivu AB, ktorej stredom je daný bod P. Priamka PS je osou hľadanej tetivy AB. Preto

$$AB \perp PS$$

Konštrukcia:

1. $o;\ o = \overleftrightarrow{PS}$
2. $s;\ s \perp o;\ P \in s$
3. $A, B;\ A, B \in s \cap k$



Diskusia:

Z konštrukcie vyplýva, že zostrojená tetiva je jediná.

3 ***ÚLOHA***

Koľko by mal príklad 1 riešení, keby bod P splýval s bodom S.

4 ***ÚLOHA***

Daná je priamka p a bod M, ktorý neleží na priamke p. Určte vzdialenosť bodu M od priamky p. Zapíšte postup, ktorým ste zistili vzdialenosť bodu M od priamky p.

[2] ***PRÍKLAD***

Určte dĺžku tetivy, ktorej vzdialenosť od stredu S kružnice $k(S,\ 5$ cm) sa rovná polovici polomeru.

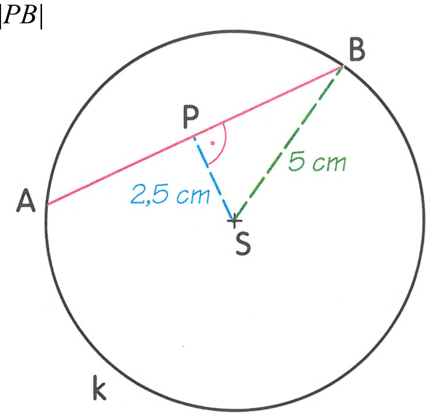
RIEŠENIE

Ak zostrojíme stred P tetivy AB, dostaneme pravouhlý trojuholník SPB, v ktorom poznáme preponu SB a odvesnu SP.
Ak podľa Pytagorovej vety vypočítame dĺžku úsečky PB, potom dĺžka tetivy bude $2 \,.\, |PB|$

$|SB| = 5$ cm
$|SP| = 2{,}5$ cm
$PB = \ldots$ cm

$$|SB|^2 = |SP|^2 + |PB|^2$$

$$5^2 = 2{,}5^2 + |PB|^2$$
$$|PB|^2 = 5^2 - 2{,}5^2$$
$$|PB|^2 = 25 - 6{,}25$$
$$|PB|^2 = 18{,}75$$
$$|PB| = \sqrt{18{,}75} \doteq 4{,}3$$
$$|AB| = 2 \,.\, |PB|$$
$$|AB| \doteq 8{,}6 \text{ cm}$$



Odpoveď: Dĺžka danej tetivy je približne 8,6 cm.

CVIČENIA

1. Dané sú dve tetivy AB, BC kružnice k. Nájdite stred S kružnice k.
2. Daná je kružnica $k(S,\ 3$ cm) a jej tetiva AB dĺžky 4 cm. Vypočítajte jej vzdialenosť od stredu S kružnice k.

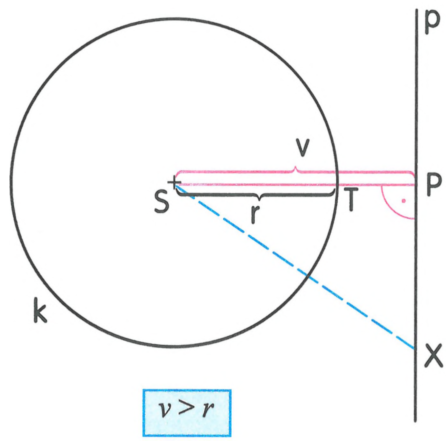
5.3 Vzájomná poloha kružnice a priamky

Budeme skúmať vzájomnú polohu kružnice a priamky. Táto závisí od vzdialenosti stredu S kružnice k a priamky p. Označme vzdialenosť bodu S od priamky p písmenom v.

Na obrázku je narysovaná kružnica $k(S, r)$ a priamka p, ktorej vzdialenosť $v = |SP|$ od stredu kružnice k je väčšia než polomer r. Z pravouhlého trojuholníka SPX s preponou SX platí pre ľubovoľný bod $X \neq P$ priamky p

$$|SX| > |SP| > r$$

Slovami: Bod X má od bodu S väčšiu vzdialenosť ako bod P; pritom vzdialenosť bodu P od bodu S je väčšia ako polomer. Preto žiadny bod priamky p neleží na kružnici.



Ak má priamka od stredu kružnice vzdialenosť v > r, tak priamka kružnicu nepretína.
Priamka p sa nazýva **nesečnica** kružnice k.

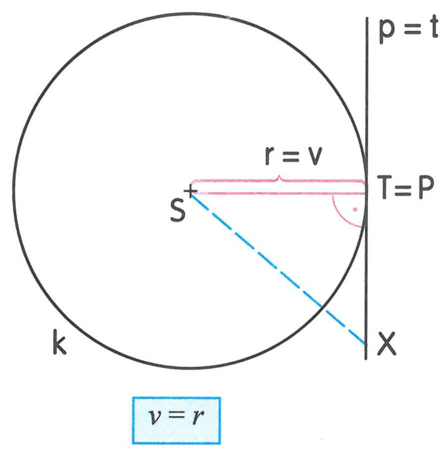
Na ďalšom obrázku je narysovaná kružnica $k(S, r)$ a priamka p, ktorej vzdialenosť v od stredu kružnice sa rovná polomeru, $v = r$.

Päta T kolmice vedenej bodom S na priamku p je bodom kružnice k, lebo platí

$$|ST| = v = r$$

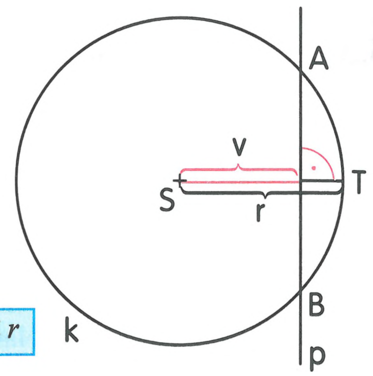
Každý iný bod X priamky t je vonkajší bod kružnice k, lebo z pravouhlého trojuholníka STX pre preponu SX vyplýva

$$|SX| > |ST| = r$$



Ak má priamka od stredu kružnice vzdialenosť $v = r$, tak má priamka s kružnicou jediný spoločný bod.
Priamka, ktorá má s kružnicou jediný spoločný bod, sa nazýva **dotyčnica** kružnice.
Spoločný bod priamky a kružnice je **bod dotyku.**

Na obrázku je narysovaná kružnica $k(S, r)$ a priamka p, ktorej vzdialenosť v od stredu S kružnice k je menšia než polomer. V tomto prípade vidieť, že priamka p má s kružnicou k dva spoločné body A, B.

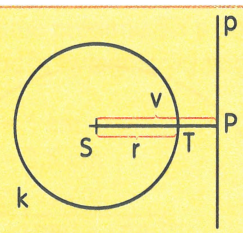
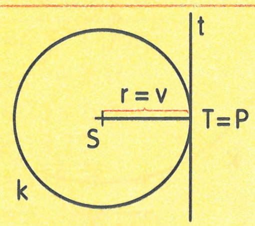
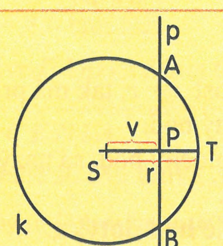


$\boxed{v < r}$

Ak má priamka od stredu kružnice vzdialenosť $v < \boldsymbol{r}$, tak má priamka a kružnica dva rôzne spoločné body.
Priamka, ktorá má s kružnicou dva rôzne spoločné body, sa nazýva **sečnica** kružnice.
Spoločné body priamky a kružnice sú ich **priesečníky.**

ZAPAMÄTAJTE SI

Daná je kružnica $k(S, r)$ a priamka p. Vzdialenosť stredu S od priamky je v.
Všetky možnosti vzájomnej polohy priamky p a kružnice k sú uvedené v tabuľke:

	priamka nemá s kružnicou nijaký spoločný bod $p \cap k = \emptyset$	$v > r$	**nesečnica** kružnice
	priamka má s kružnicou jeden spoločný bod – bod dotyku $p \cap k = T$	$v = r$	**dotyčnica** kružnice
	priamka má s kružnicou dva spoločné body – priesečníky A, B $p \cap k = \{A, B\}$	$v < r$	**sečnica** kružnice

1 ***ÚLOHA***

Charakterizujte priamku *p,* ktorá prechádza stredom *S* kružnice *k.* Zaraďte ju medzi tri možné vzájomné polohy priamky a kružnice.

[1] ***PRÍKLAD***

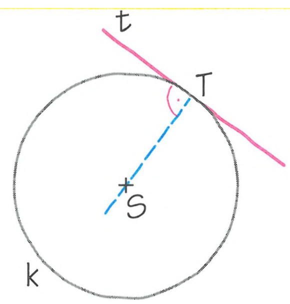
Narysujte kružnicu $k(S,\ 3\ \text{cm})$. Na kružnici zvoľte bod *T*. Zostrojte dotyčnicu, ktorá má s kružnicou *k* bod dotyku *T*.

RIEŠENIE

Rozbor:

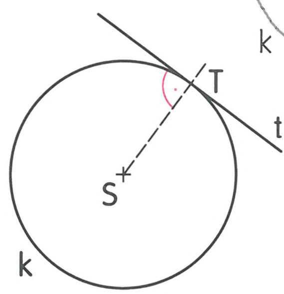
Načrtneme kružnicu *k* a zvolíme na nej ľubovoľný bod *T*. Priamku, ktorá prechádza bodom *T* a je kolmá na úsečku *ST,* označme *t.* Priamka *t* je dotyčnicou kružnice *k* a prechádza bodom *T*.

Náčrt:



Konštrukcia:

1. $k;\ k\,(S,\ 3\ \text{cm})$
2. $T;\ T \in k$
3. $\overleftrightarrow{ST}$
4. $t;\ t \cap \overleftrightarrow{ST},\ T \in t$



Skúška:

Priamka *t* má s kružnicou jediný spoločný bod *T*. Priamka *t* je dotyčnica kružnice *k* v bode dotyku *T*.

ZAPAMÄTAJTE SI

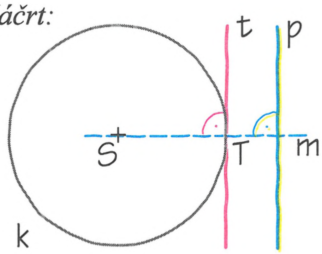
Dotyčnica ku kružnici je vždy kolmá na polomer kružnice.

[2] ***PRÍKLAD***

Daná je kružnica $k(S,\ 3\ \text{cm})$ a priamka *p,* ktorej vzdialenosť od stredu *S* kružnice *k* je 5 cm. Zostrojte dotyčnicu *t* kružnice, rovnobežnú s priamkou *p.*

RIEŠENIE

Náčrt:

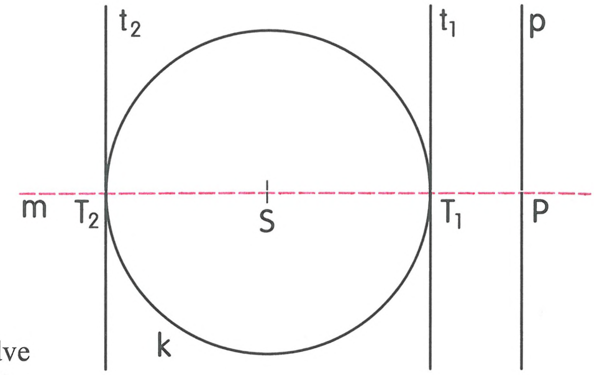


Rozbor:

Na obrázku je načrtnutá dotyčnica *t* kružnice *k*, pričom podľa podmienky úlohy platí $t \parallel p$, *T* je bod dotyku. Priamka $m = ST$ je kolmá na dotyčnicu *t*, $t \parallel p$, potom $ST \perp p$.

Konštrukcia:

1. k; $k\ (S, 3\ \text{cm})$
2. m; $m \perp p$, $S \in m$
3. T_1, T_2; $T_1, T_2 \in k \cap m$
4. t_1; $T_1 \in t_1$, $t_1 \perp m$
   t_2; $T_2 \in t_2$; $t_2 \perp m$



Diskusia:

Z konštrukcie vyplýva, že obidve priamky t_1 a t_2 spĺňajú podmienky úlohy. Sú to dotyčnice kružnice k a platí $t_1 \| p$, $t_2 \| p$, lebo priamky t_1, t_2 a p sú kolmé na tú istú priamku m. Úloha má teda dve možné riešenia.

CVIČENIA

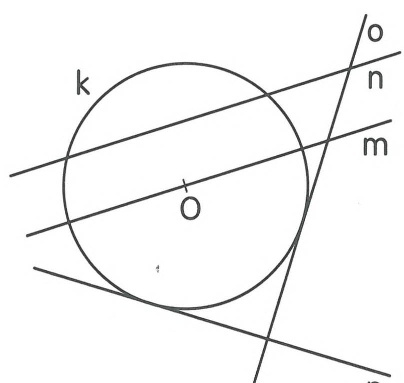
1. Daná je priamka p a vzdialenosť $v = 3$ cm. Narysujte niekoľko bodov v rovine, ktoré majú od priamky p vzdialenosť 3 cm.

2. Aký útvar vytvoria v rovine všetky body majúce vlastnosť uvedenú v cvičení 1.

3. Narysujte štyri navzájom rovnobežné priamky a, b, c, d. Vzdialenosť medzi každými dvoma susednými priamkami je 1 cm. Na priamke a zvoľte bod S. Narysujte kružnicu $k(S,\ 2\ \text{cm})$. Určte vzájomné polohy priamok a, b, c, d a kružnice k.

4. Zostrojte kružnicu $k(S,\ 3\ \text{cm})$ a jej ľubovoľnú tetivu AB, ktorá nie je priemerom.
   a) Zostrojte dotyčnice kružnice k s bodmi dotyku A, B.
   b) Aká je vzájomná poloha týchto dotyčníc?
   c) Zostrojte priamku o, ktorá je určená priesečníkom zostrojených dotyčníc a stredom S. Je priamka o kolmá na tetivu AB? Odôvodnite svoje tvrdenie.

5. Narysujte do zošita kružnicu $k(O;\ 3{,}5\ \text{cm})$ a priamky m, n, o, p. Odmerajte vzdialenosť každej priamky od stredu O kružnice k a porovnajte ju s polomerom. Pomenujte polohu každej z priamok vzhľadom na kružnicu k.



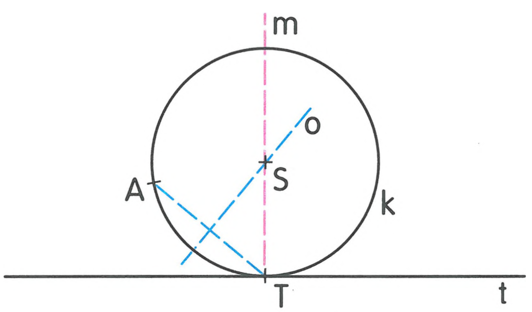
6. Daná je kružnica $k(S;\ 2{,}7\ \text{cm})$ a priamka p vo vzdialenosti 5,2 cm od bodu S. Zostrojte dotyčnicu kružnice k, ktorá je kolmá na priamku p. Je jediná?

7. Daný je bod S. Narysujte:
   a) ľubovoľnú priamku t, ktorá je od bodu S vzdialená 3 cm;
   b) kružnicu k so stredom v bode S tak, aby sa dotýkala priamky t.

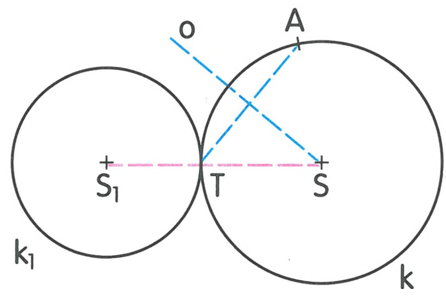
8. Daná je priamka t a na nej bod T. Zostrojte zhodné kružnice k_1, k_2, ktorých polomery sú $r_1 = r_2 = 3$ cm a dotýkajú sa priamky t v bode T. Určte, či kružnice k_1 a k_2 sú súmerné
   a) podľa osi t,
   b) podľa stredu T.

9. Narysujte kružnicu $k(S, 3 \text{ cm})$. Zvoľte na nej bod A. Zostrojte:
   a) tetivu kružnice, ktorá prechádza stredom S,
   b) tetivy AC, AD, pričom body C, D ležia na kružnici k a platí $CD \perp AS$.

10. Na obrázku je daná priamka t, na nej bod T a bod A, ktorý neleží na priamke t. Ďalej je zostrojená kružnica k, ktorá sa dotýka priamky t v bode T a prechádza bodom A. Napíšte postup konštrukcie kružnice k.



11. Na obrázku je daná kružnica $k_1(S_1, r_1 = 2{,}5 \text{ cm})$, na nej je vyznačený bod T. Daný je aj bod A, ktorý neleží na kružnici k_1. Ďalej je narysovaná kružnica k, ktorá prechádza aj bodom T aj bodom A. Napíšte postup konštrukcie kružnice k. Postup odôvodnite.



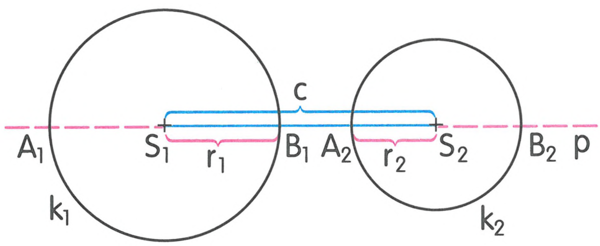
Človek musí bežať čo vládze, aby zostal tam, kde je,
a ešte rýchlejšie, ak sa chce niekam dostať.

Lewis Carroll

5.4 Vzájomná poloha dvoch kružníc

Pri skúmaní vzájomnej polohy dvoch kružníc si všímame, či kružnice majú spoločné body alebo nemajú. Súčasne si budeme všímať podmienky, za ktorých jednotlivé prípady nastanú.

1. Na obrázku sú narysované dve kružnice s rôznymi stredmi. Nech sú to $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 > r_2$. Priamka S_1S_2 (niekedy tiež úsečka S_1S_2) sa nazýva stredná. Dĺžka úsečky S_1S_2, $|S_1S_2| = c$, je **dĺžka strednej úsečky.**



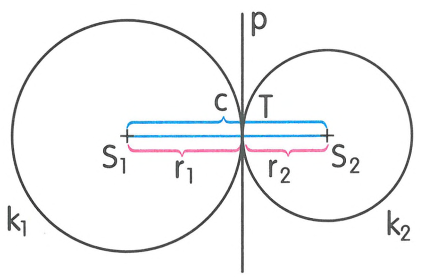
Kružnice k_1 a k_2 nemajú žiadny spoločný bod; pritom všetky body každej kružnice ležia zvonka druhej. Hovoríme, že **kružnice ležia mimo seba.** Vidíme, že

$$\boxed{c > r_1 + r_2}$$

$$k_1 \cap k_2 = \emptyset$$

Ak pre dve kružnice platí $c > r_1 + r_2$, leží jedna kružnica mimo druhej (a kružnice nemajú žiadny spoločný bod).

2. Na ďalšom obrázku kružnice k_1 a k_2 majú **jediný spoločný bod** T. Každý bod jednej kružnice rôzny od bodu T leží zvonka druhej kružnice.



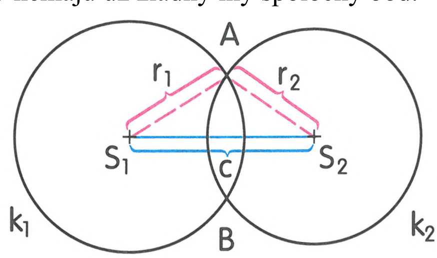
Hovoríme, že tieto **kružnice majú vonkajší dotyk,** alebo že sa dotýkajú zvonka. Ľahko zistíme, že

$$\boxed{c = r_1 + r_2}$$

$$k_1 \cap k_2 = T$$

Ak pre dve kružnice platí $c = r_1 + r_2$, obidve kružnice majú vonkajší dotyk (t.j. spoločný bod).

3. Dve kružnice k_1 a k_2 sa **pretínajú v dvoch rôznych bodoch** A, B**.** Okrem týchto bodov nemajú už žiadny iný spoločný bod.



Z trojuholníka S_1S_2A vyplýva, že

$$\boxed{r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2}$$

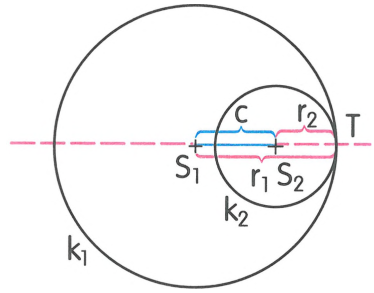
$$k_1 \cap k_2 = \{A,B\}$$

Ak pre dve kružnice platí $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$, kružnice sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch.

④ Kružnice k_1 a k_2 **majú jediný spoločný bod** $\boldsymbol{T}$. Body kružnice k_2 rôzne od bodu T ležia vnútri kružnice k_1; v tomto prípade hovoríme, že **kružnice majú vnútorný dotyk,** alebo že sa dotýkajú zvnútra.

$$\boxed{c = r_1 - r_2}$$

$$k_1 \cap k_2 = T$$

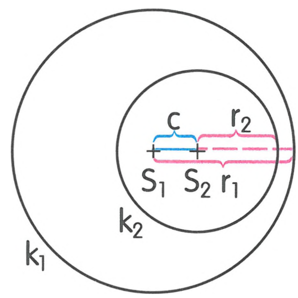


Ak pre dve kružnice platí $c = r_1 - r_2$, majú obidve kružnice vnútorný dotyk (t.j. jeden spoločný bod; kružnica k_2 leží vnútri kružnice k_1.

⑤ Jedna kružnica leží **vnútri druhej** a **nemajú spoločný žiadny bod.**

$$\boxed{c < r_1 - r_2}$$

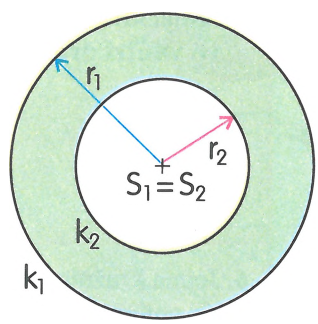
$$k_1 \cap k_2 = \emptyset$$



Ak pre dve kružnice platí $c < r_1 - r_2$, leží jedna kružnica vnútri druhej (a nemajú žiadny spoločný bod).

⑥ Nakoniec si všimneme prípad, keď kružnice **majú spoločný stred.**

Sústredné kružnice

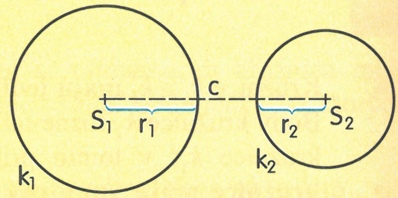


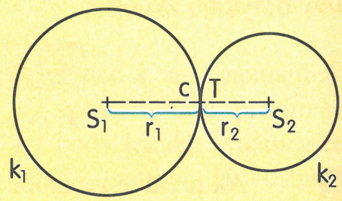
Farebne vyznačená oblasť medzi sústrednými kružnicami sa nazýva **medzikružie.**

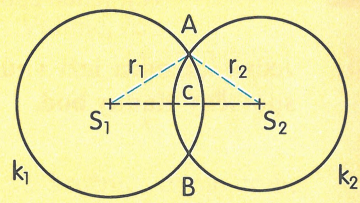
Dve sústredné kružnice, ktoré majú ten istý polomer, splývajú (t.j. majú všetky body spoločné), sú **totožné.**
Dve sústredné kružnice, ktoré majú rôzne polomery, nemajú žiadny spoločný bod (jedna leží vo vnútri druhej).

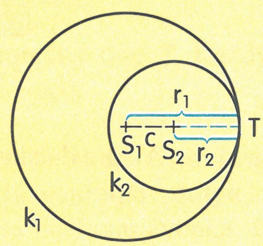
Prehľadná tabuľka

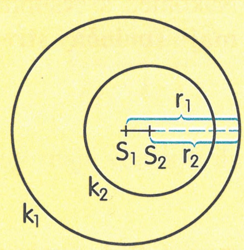
<table>
<tr><td>1. Kružnice ležia mimo seba

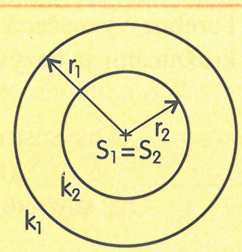
$k_1 \cap k_2 = \emptyset$</td><td>$c > r_1 + r_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Kružnice majú vonkajší dotyk

$k_1 \cap k_2 = T$</td><td>$c = r_1 + r_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Kružnice sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch

$k_1 \cap k_2 = \{A,B\}$</td><td>$r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Kružnice majú vnútorný dotyk

$k_1 \cap k_2 = T$</td><td>$c = r_1 - r_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5. Jedna kružnica leží vo vnútri druhej

$k_1 \cap k_2 = \emptyset$</td><td>$c < r_1 - r_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6. Jedna kružnica leží vo vnútri druhej – sústredné kružnice

$k_1 \cap k_2 = \emptyset$</td><td>$c = 0$</td><td>
</td></tr>
</table>

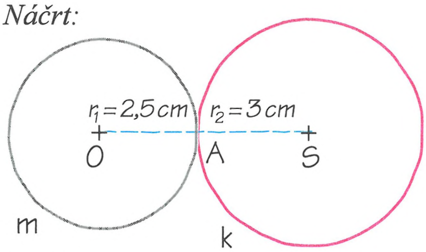
[1] ***PRÍKLAD***

Daná je kružnica *m(O;* 2,5 cm) a na nej bod *A*. Zostrojte kružnicu *k* s polomerom 3 cm, ktorá má s kružnicou *m*

a) vonkajší dotyk v bode *A*;
b) vnútorný dotyk v bode *A*.

RIEŠENIE

a) *Náčrt:*



Rozbor:

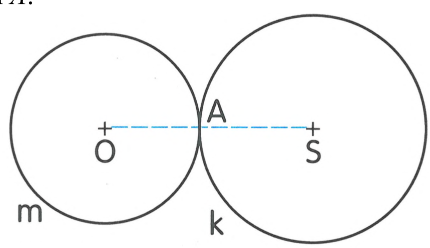
Daná a hľadaná kružnica majú mať vonkajší dotyk v bode *A*. Platí

$$|OS| = r_1 + r_2$$

pričom stredná úsečka *OS* prechádza bodom *A*.

Konštrukcia:

1. m; $m(O$; 2,5 cm)
2. A; $A \in m$
3. $\overleftrightarrow{OA}$
4. S; $S \in \overrightarrow{OA}$ (za bodom A), $|AS|$ = 3 cm
5. k; $k(S$, 3 cm)



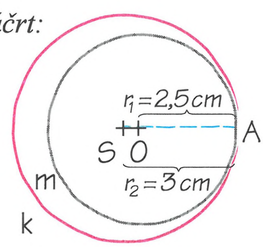
Diskusia:

Zostrojená kružnica *k* je hľadaná kružnica, lebo pre kružnice *m* a *k* podľa konštrukcie platí

$$|OS| = (2{,}5 + 3) \text{ cm}$$

takže kružnice *m* a *k* majú vonkajší dotyk v bode *A*.

b) *Náčrt:*

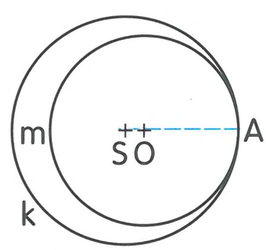


Rozbor:

$$|OS| = r_2 - r_1$$

Konštrukcia:

1. m; $m(O$; 2,5 cm)
2. A; $A \in m$
3. S; $S \in \overrightarrow{AO}$, $|AS|$ = 3 cm
5. k; $k(S$, 3 cm)



Diskusia:

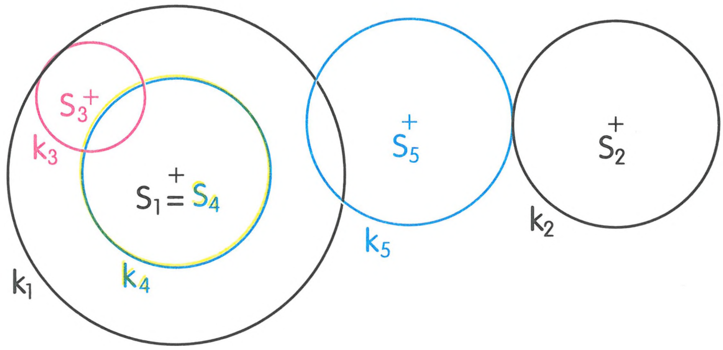
Zostrojená kružnica *k* je hľadaná kružnica, lebo pre kružnice *m* a *k* podľa konštrukcie platí $|OS| = r_2 - r_1 = (3 - 2{,}5)$ cm

takže kružnice *m* a *k* majú vnútorný dotyk v bode *A*.

CVIČENIA

1. Na obrázku je narysovaných 5 kružníc k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Popíšte vzájomnú polohu kružníc:

   a) k_1 a k_2;
   b) k_2 a k_5;
   c) k_1 a k_4;
   d) k_3 a k_4.



2. Zistite možnosti vzájomnej polohy dvoch kružníc s rovnakými polomermi. Urobte prehľadnú tabuľku.

3. Bod M leží vnútri kružnice $k(S, 4\text{ cm})$ a platí $|MS| = 1{,}5$ cm. Zostrojte kružnicu so stredom M tak, aby sa dotýkala danej kružnice k zvnútra.

4. Daná je kružnica $k(S, 3\text{ cm})$. Zostrojte niekoľko kružníc s polomerom $r = 2$ cm tak, aby sa dotýkali zvonka kružnice k. Kde budú ležať stredy takto zostrojených kružníc?

5. Daná je kružnica $k(S; 4{,}5\text{ cm})$. Zostrojte niekoľko kružníc s polomerom $r = 1{,}5$ cm tak, aby sa dotýkali zvnútra kružnice k. Kde budú ležať stredy takto zostrojených kružníc?

5.5 Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku

ZOPAKUJME SI

Os tetivy kružnice prechádza stredom kružnice.

V ďalšom sa oboznámime s kružnicou, ktorá prechádza vrcholmi trojuholníka. Je to **kružnica opísaná trojuholníku.**

1 *ÚLOHA*

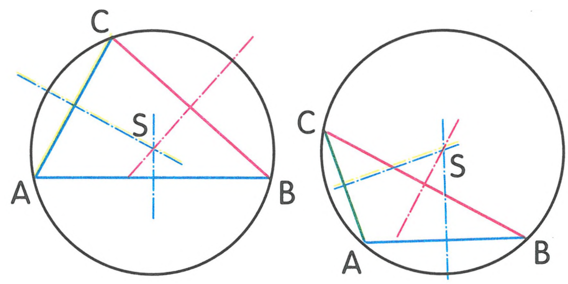
Zostrojte osi strán trojuholníka ABC, Rysujte presne! Dve z nich sa určite pretínajú. Prechádza aj os tretej strany týmto ich spoločným bodom?

2 *ÚLOHA*

Zistili ste, že osi strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Čo platí o vzdialenostiach tohto priesečníka od vrcholov trojuholníka?

Priesečník osí strán trojuholníka je stred kružnice opísanej trojuholníku.

Každému trojuholníku možno opísať kružnicu.

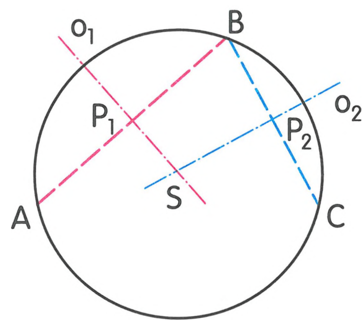


PRÍKLAD

Dané sú tri body *A, B, C,* ktoré neležia na jednej priamke. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodmi *A, B, C.*

RIEŠENIE

Tri body neležiace na jednej priamke určujú trojuholník. Hľadaná kružnica bude opísaná tomuto trojuholníku. Jej stred zostrojíme ako priesečník osí ktorýchkoľvek dvoch úsečiek určených bodmi *A, B, C.*



Postup konštrukcie si zapíšete sami.

Príklad má jedno riešenie.

ÚLOHA 3

Daný je uhol *AVB.* Zostrojte jeho os. Čo platí o vzdialenostiach ľubovoľného bodu osi uhla od ramien uhla?

ÚLOHA 4

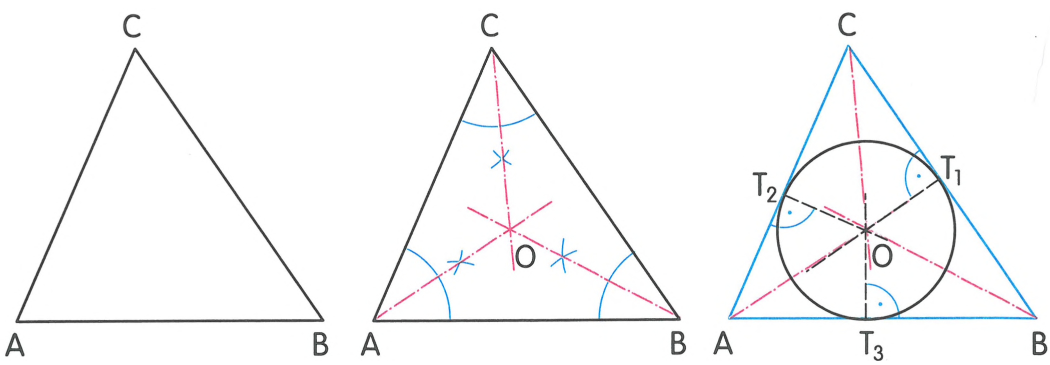
Daný je uhol *AVB.* Zostrojte ľubovoľnú kružnicu, ktorá sa dotýka ramien uhla *AVB.* Kde bude ležať jej stred? Ako zostrojíte dotykové body kružnice a ramien?

ÚLOHA 5

Daný je trojuholník *ABC.* Zostrojte osi jeho vnútorných uhlov. Dve z nich sa pretnú v bode *O.* Bude nimi prechádzať aj os tretieho uhla? Čo bude platiť o vzdialenostiach bodu *O* od strán trojuholníka *ABC?*

Kružnica, ktorá sa dotýka strán trojuholníka sa nazýva
kružnica vpísaná trojuholníku.
Stredom kružnice vpísanej trojuholníku je priesečník osí vnútorných uhlov trojuholníka.

Na obrázkoch sledujte postup konštrukcie kružnice vpísanej trojuholníku *ABC*.



6 ***ÚLOHA***

Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *C*. Vpíšte do neho kružnicu.

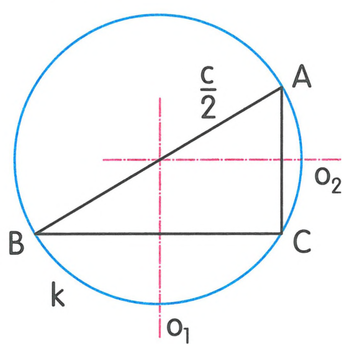
7 ***ÚLOHA***

Daný je tupouhlý trojuholník *ABC*. Vpíšte do neho kružnicu.

[2] ***PRÍKLAD***

Dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka sú $a = 5$ cm, $b = 3$ cm. Opíšte danému trojuholníku kružnicu a vypočítajte dĺžku jej polomeru.

! ***RIEŠENIE***



Os o_1 odvesny *BC* prechádza stredom strany *BC* a je kolmá na priamku *BC*, z čoho vyplýva, že je rovnobežná s priamkou *AC*. Os o_1 obsahuje teda strednú priečku trojuholníka *ABC* a prechádza preto stredom prepony *AB*. To isté platí aj o osi o_2 odvesny *AC*. Obe osi o_1, o_2 sa teda skutočne pretínajú v strede prepony *AB*.

Teraz už ľahko vypočítame polomer *r* kružnice *k*. Zrejme $r = \frac{c}{2}$, z čoho podľa Pytagorovej vety

$$r = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \doteq 2{,}92$$

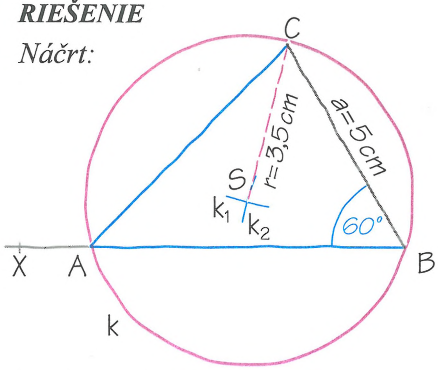
Odpoveď: Polomer kružnice opísanej danému trojuholníku je približne 2,9 cm.

[3] ***PRÍKLAD***

Zostrojte trojuholník *ABC*, v ktorom je daná strana $a = 5$ cm, uhol $\beta = 60°$ a polomer $r = 3{,}5$ cm kružnice opísanej trojuholníku.

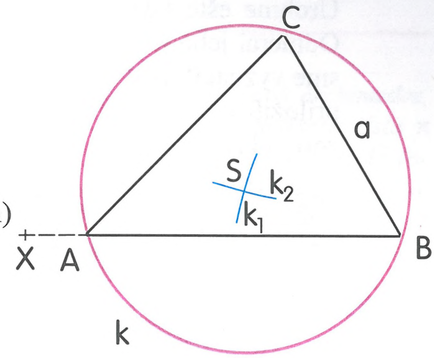
RIEŠENIE

Náčrt:



Rozbor:

1. Úsečku BC vieme zostrojiť, $|BC| = 5$ cm.
2. Bod A leží na kružnici k, ktorej stred S zostrojíme pomocou polomeru $r = 3{,}5$ cm.
3. Bod A leží aj na polpriamke BX, pričom $|\sphericalangle CBX| = 60°$.



Konštrukcia:

1. BC; $|BC| = a = 5$ cm.
2. $\overrightarrow{BX}$; $|\sphericalangle CBX| = 60°$
3. S; $S \in k_1(B; r = 3{,}5 \text{ cm}) \cap k_2(C; r = 3{,}5 \text{ cm})$
4. k; $k(S; r = 3{,}5 \text{ cm})$
5. A; $A \in k \cap \overrightarrow{BX}$
6. $\triangle ABC$

Skúška: Urobte ju sami.

CVIČENIA

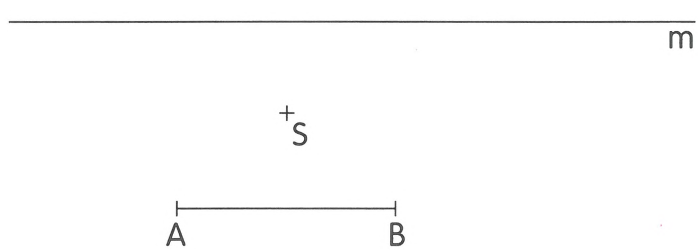
1. Zostrojte kružnicu opísanú trojuholníku ABC, ak $c = 8$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

2. Zostrojte kružnicu opísanú i vpísanú rovnostrannému trojuholníku.

3. Zostrojte ľubovoľný tupouhlý trojuholník ABC a opíšte mu kružnicu. Akú polohu má stred tejto kružnice vzhľadom na daný trojuholník?

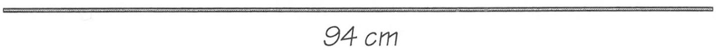
4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Zostrojte kružnice, ktoré sa dotýkajú:
   a) strany AB a priamok AC a BC;
   b) strany BC a priamok AB, AC;
   c) strany AC a priamok BC, BA.

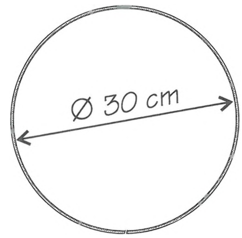
5. Na obrázku je daná úsečka AB, bod S, ktorý je rovnako vzdialený od bodov A, B, ďalej je daná priamka $m \parallel AB$. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom bod S je stredom opísanej kružnice a C leží na priamke m.



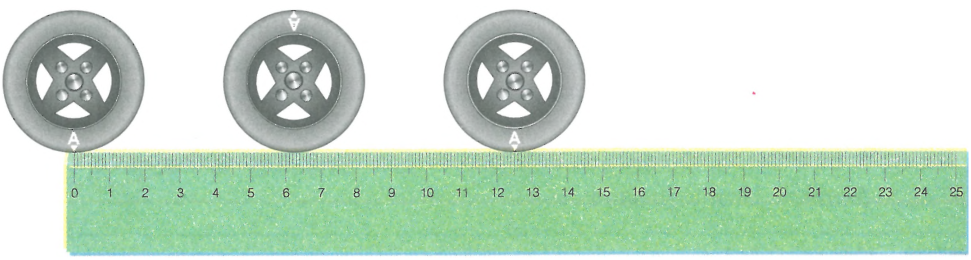
5.6 Dĺžka kružnice

Majme drôt dĺžky napr. 94 cm. Naviňme tento drôt do tvaru kružnice. Odmeraním zistíme, že priemer tejto kružnice je 30 cm. Ak vydelíme dĺžku drôtu dĺžkou priemeru kružnice, dostaneme približne číslo 3,1.





Urobme ešte takýto pokus: Miško má koliesko z autíčka. Odmeral jeho priemer, zistil, že je 4 cm. Na tomto koliesku sme vyznačili bod A. Zobrali sme pravítko, koliesko k nemu priložili tak, že bod A splynul na stupnici s bodom 0 (pozoruj obrázok).



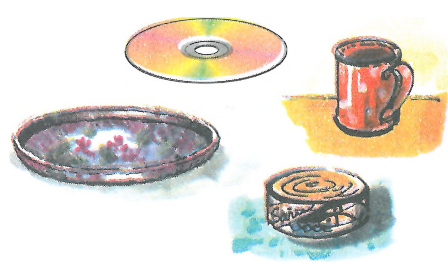
Po jednom otočení klieskom po hrane pravítka sa bod A stotožnil s bodom 12,5. Opäť sme vydelili číslo 12,5 číslom 4, dostali sme podiel približne 3,1.
V prvom i druhom prípade udávajú čísla 94 cm a 12,5 cm dĺžku kružnice alebo obvod kruhu.

Obvod kruhu je dĺžka kružnice, ktorá ohraničuje kruh.
Obvod kruhu alebo dĺžku kružnice označíme o.

1 ***ÚLOHA***

Urobte podobné merania na predmetoch, na ktorých sa nachádzajú tvary kružnice alebo kruhu. Odmerajte priemer d kružnice (kruhu) na vybraných predmetoch. Potom niť alebo krajčírsky meter naviňte na obvod kruhu (kružnice) tohto predmetu a odmerajte dĺžku o navinutej nite. Vypočítajte podiel $o : d$, výsledky zapíšte do pripravenej tabuľky.

Dĺžka o kružnice				
Priemer d				
Podiel $o : d$				



Odmeraním dostaneme, že podiel o : d je pre všetky kružnice (kruhy) približne 3,1.

Tento podiel je pre všetky kružnice (kruhy) rovnaký a jeho hodnota sa označuje písmenom gréckej abecedy π (čítaj pí). Poznáme len približnú hodnotu čísla π. Napríklad na kalkulačke môžete prečítať:

3.141592654

POZNÁMKA

*Číslo π nie je racionálne (nemožno ho vyjadriť zlomkom). Grécky matematik Archimedes, ktorý žil v 3. storočí pred naším letopočtom, používal ako približnú hodnotu čísla π zlomok $\frac{22}{7}$ čo je 3,142 857 143. My budeme používať približnú hodnotu 3,14. Okolo roku 1600 vypočítal Holanďan **Ludolf van Ceulen** hodnotu čísla π na 35 desatinných miest. Po ňom sa toto číslo nazýva **Ludolfovo číslo.***

$\frac{22}{7} \doteq 3{,}142857143$

ÚLOHA

2 Indický matematik Arjabhata (žil okolo roku 500) zapísal toto pravidlo na výpočet čísla π: „Ku stu pričítaj štyri, potom výsledok vynásob ôsmimi a k tomu pričítaj šesťdesiatdva tisíc a nakoniec všetko vydeľ číslom dvadsať tisíc".

Vyjadrite výrazom približnú hodnotu čísla π podľa tohto pravidla. S akou presnosťou sa tu vyjadruje hodnota čísla π?

Z uvedeného vyplýva $o : d = \pi$

$$\boxed{o = \pi d}$$

Pretože $d = 2r$ (kde r je polomer kružnice), môžeme písať

$$\boxed{o = 2\pi r}$$

V tomto tvare si vzorec budeme pamätať.

Dĺžku kružnice alebo **obvod kruhu** vypočítame podľa vzorca

$$\boxed{o = 2\pi r}$$

kde r je polomer kružnice (kruhu).

CVIČENIA

1. Vypočítajte dĺžku kružnice, ktorej polomer má veľkosť:
a) 7 cm b) 24 dm c) 1,3 m d) $5\frac{1}{3}$ dm

2. Vypočítajte polomer kružnice, ktorej dĺžka je:
a) 13,28 dm b) 25,42 m c) $5\frac{1}{2}$ m d) 16,48 cm

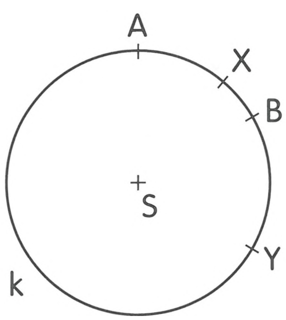
3. Kružnici k, ktorej polomer má veľkosť r, je vpísaný pravidelný šesťuholník. O koľko je dĺžka kružnice väčšia než obvod pravidelného šesťuholníka? Numericky:
   a) $r = 3,5$ cm   b) $r = 3,7$ dm   c) $r = 13,5$ m   d) $r = 0,42$ m

4. Kruh a pravidelný šesťuholník, ktorého strana má veľkosť a, majú rovnaké obvody. Aký je polomer kruhu K? Numericky:
   a) $a = 4$ m   b) $a = 2,5$ dm   c) $a = 0,38$ m

5. Vypočítajte polomer kružnice, ktorej dĺžka je o 107 cm väčšia než jej priemer.

6. Aký má polomer kruhová dráha, ktorú musí bežec prebehnúť trikrát, aby zabehol 2 km?

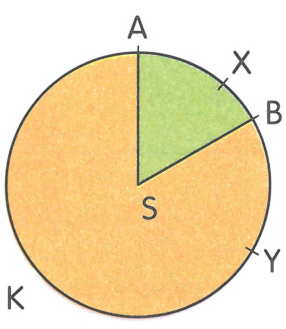
5.7 Oblúk kružnice. Kruhový výsek



Na obrázku je narysovaná kružnica $k(S, r)$. Body A, B delia kružnicu k na dve časti, ktoré nazývame **oblúky kružnice** alebo **kružnicové oblúky.**

$\overset{\frown}{AXB}$ je oblúk kružnice k s krajnými bodmi A, B, ktorý obsahuje bod X.

$\overset{\frown}{AYB}$ je oblúk kružnice k s krajnými bodmi A, B, ktorý obsahuje bod Y.



Na obrázku je kruh $K(S, r)$ ohraničený kružnicou $k(S, r)$. Zvoľme si dva polomery SA, SB. Tieto dva polomery rozdelia kruh K na dve časti, ktoré nazývame **kruhové výseky.**

Kruhový výsek ASB (X) - obsahuje bod X.

Kruhový výsek ASB (Y) - obsahuje bod Y.

Pokiaľ netreba odlíšiť jeden kruhový výsek od iného, budeme ho stručne označovať ASB.

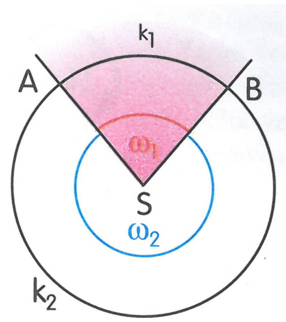
PROBLÉM

„Naučili sme sa vypočítať dĺžku kružnice. Vieme vypočítať aj dĺžku kružnicového oblúka?“ pýta sa Peter.

RIEŠENIE

Pani učiteľka vysvetľuje, Peter kreslí obrázky na tabuľu.
Dva rôzne body A, B kružnice $k(S, r)$ ju rozdeľujú na dva kružnicové oblúky k_1 a k_2. Peter zvýrazní jeden oblúk, je to oblúk k_1.

Body A, B spolu s bodom S určujú dve polpriamky SA, SB.
Polpriamky SA a SB tvoria dva tzv. **stredové uhly,** označme ich ω_1, ω_2.

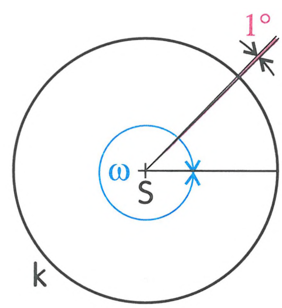


Stredovému uhlu ω_1 prislúcha oblúk k_1 a obrátene:
oblúku k_1 prislúcha stredový uhol ω_1.

Taký istý vzťah je aj medzi stredovým uhlom ω_2 a oblúkom k_2.

Naučili sme sa, že dĺžku o kružnice vypočítame podľa vzorca

$$o = 2\pi r$$

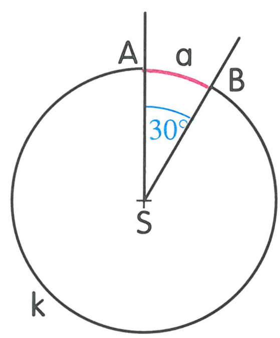


Kružnica prislúcha stredovému uhlu 360°.
Dĺžka a_1 kružnicového oblúka, ktorý prislúcha stredovému uhlu 1°, sa rovná $\frac{1}{360}$ dĺžky celej kružnice;

$$a_1 = \frac{2\pi r}{360}$$

Ak napr. stredový uhol $\alpha = 30°$, dĺžka a prislúchajúceho kružnicového oblúka je 30-krát väčšia ako oblúk prislúchajúci uhlu 1°, platí teda:

$$a = \frac{2\pi r}{360} \cdot 30$$



Vzorec na výpočet dĺžky kružnicového oblúka vzhľadom na veľkosť a prislúchajúceho stredového uhla α (v stupňoch) je:

$$a = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$$

Dĺžku oblúka ***a*** vypočítame, keď dĺžku kružnice $2\pi r$ delíme číslom 360
a násobíme veľkosťou prislúchajúceho stredového uhla α v stupňoch.

[1]

PRÍKLAD

Vypočítajte dĺžku oblúka a, ktorý prislúcha stredovému uhlu $\alpha = 85°$ v kružnici s polomerom $r = 42$ mm.

RIEŠENIE

Príklad rieši Miško.
Pretože polomer kružnice je daný v milimetroch, dĺžku oblúka a dostaneme tiež v milimetroch.

$r = 42$ mm
$\alpha = 85°$
$a = \ldots$ mm

$$a = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$$

$$a = \frac{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 42}{360} \cdot 85$$

$$a \doteq 62{,}3$$

$$a \doteq 62{,}3 \text{ mm}$$

Odpoveď: Dĺžka prislúchajúceho oblúka je približne 62,3 mm.

CVIČENIA

1. Daná je kružnica $k(S,$ 3 cm$)$. Zvoľte bod A na kružnici k. Vyznačte kružnicový oblúk k_1, ktorý prislúcha stredovému uhlu ASB veľkosti 60°. Je určený jednoznačne?

2. Určte kružnicový oblúk, ktorý prislúcha stredovému uhlu $\omega_1 = 180°$.

3. Určte stredový uhol, ktorý prislúcha štvrťkružnici.

4. Daný je kruh $K(S,$ 3 cm$)$. Vyznačte priemer AB kruhu K. Farebne vyznačte kruhové výseky určené priemerom.

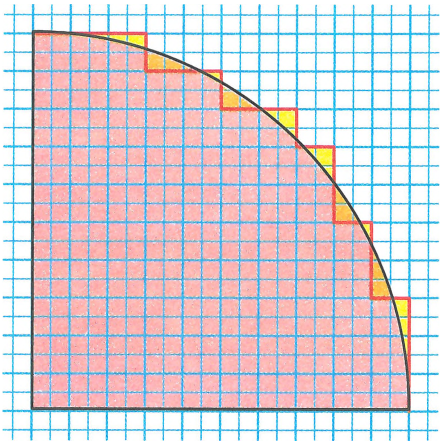
5. Daný je kruh $K(S,$ 3 cm$)$. Farebne vyznačte kruhové výseky, ktoré sú určené dvoma na seba kolmými priemermi.

6. Aká je dĺžka oblúka a kružnice $k(S,$ 12 mm$)$, ktorý prislúcha stredovému uhlu
   a) $\alpha = 5°$; b) $\beta = 20°$; c) $\gamma = 78°$; d) $\delta = 153°$.

7. Veľká ručička na hodinách je 12 cm dlhá. Akú dráhu opíše hrot ručičky za
   a) 1 hodinu
   b) $\frac{1}{4}$ hodiny
   c) 5 minút
   d) 35 minút

5.8 Obsah kruhu

Už vieme vypočítať obsahy štvorca, obdĺžnika, trojuholníka, lichobežníka a rovnobežníka.
V ďalšom sa naučíme vypočítať obsah kruhu.
Najskôr budeme hľadať vzťah medzi obsahom kruhu a jeho polomerom.
Narysujte na štvorčekovaný papier do štvorca s dĺžkou strany 10 cm štvrťkruh podľa obrázka.



Obsah štvrťkruhu sa približne rovná útvaru ohraničeného lomenou čiarou. Tento vyznačený útvar sa skladá zo štvorcov s dĺžkou strany 1 cm, ktorých stredy ležia vo vnútri štvrťkruhu. Počet týchto štvorcov označme n.

Zostavte tabuľku:

približný obsah štvrťkruhu	n	
obsah celého kruhu	$S = 4 \,.\, n$	
polomer	r	
druhá mocnina polomeru	r^2	
podiel	$S : r^2$	

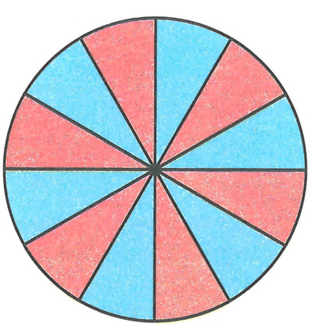
V poslednom poli tabuľky vám vyšlo približne $\boxed{3{,}16}$

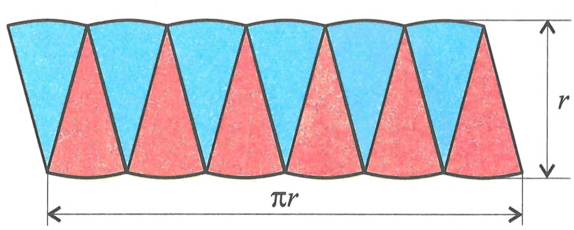
Ak by sme v predchádzajúcom obrázku urobili štvorcovú sieť tak, že strana štvorčeka bude mať dĺžku 1 mm, obsah švrťkruhu by sme vyjadrili presnejšie, potom by sa podiel $S : r^2$ viac priblížil k číslu π, ktoré sme uviedli pri odvodení vzorca pre obvod kruhu.

Z toho vyplýva, že podiel obsahu kruhu a polomeru umocneného na druhú je vždy rovnaký a jeho hodnota je π

$$S : r^2 = \pi \qquad \text{čiže} \qquad \boxed{S = \pi r^2}$$

Na odvodenie vzorca na výpočet obsahu kruhu použijeme ešte tento postup:
Narysujte kruh $K(S,\ 5\ \text{cm})$ a rozdeľte ho na 12 zhodných kruhových výsekov. Tieto kruhové výseky striedavo zafarbite červenou a modrou farbou. Kruh rozstrihajte na kruhové výseky a zostavte ich do útvaru tak ako je to znázornené na obrázku.





Vzniknutý útvar je približne rovnobežník, ktorého dve protiľahlé strany sú zložené z kružnicových oblúkov. Celková dĺžka týchto oblúkov na jednej strane sa rovná πr. Výška tohto útvaru sa rovná približne r. Pre obsah S tohto „rovnobežníka" platí:

$$S = (\pi r)\ .\ r = \pi r r = \pi r^2$$

Obsah tohto rovnobežníka sa približne rovná obsahu pôvodného kruhu.

Obsah S kruhu K s polomerom r vypočítame

$$\boxed{S = \pi r^2}$$

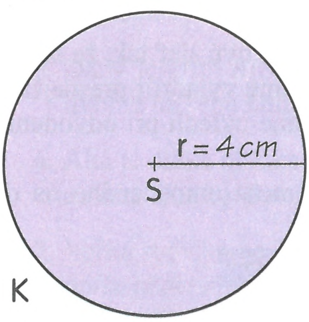
ÚLOHA 1

Z kartónu vystrihnite kruh, rozdeľte ho na 24 kruhových výsekov a z týchto potom zložte „rovnobežník". Odôvodnite prečo sa bude obsah tohto „rovnobežníka" rovnať obsahu kruhu s väčšou presnosťou.

PRÍKLAD [1]

Vypočítajte obsah kruhu, ktorého polomer sa rovná 4 cm.

RIEŠENIE

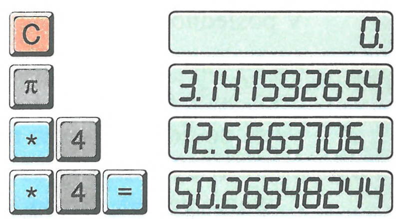


$r = 4$ cm
$S = \dots$ cm^2

$S = \pi r^2$

$S = 3{,}14\ .\ 4^2$
$S = 3{,}14\ .\ 16$
$S = 50{,}24$

$S = 50{,}24$ cm^2



$\doteq 50{,}27$ cm^2

Odpoveď: Obsah kruhu je približne $50{,}24$ cm^2, pre $\pi = 3{,}14$.
Pri výpočte kalkulačkou $S \doteq 50{,}27$ cm^2.

PRÍKLAD [2]

Vypočítajte polomer kruhu, ktorého obsah je $78{,}5$ cm^2.

RIEŠENIE

$S = 78{,}5$ cm^2
$r = \dots$ cm

$S = \pi r^2$

$78{,}5 = 3{,}14\ .\ r^2$
$r^2 = 78{,}5 : 3{,}14$
$r^2 = 25$
$r = 5$

$r = 5$ cm

Odpoveď: Polomer kruhu je 5 cm.

C V I Č E N I A

1. Vypočítajte obsah kruhu, ktorého polomer je:
   a) 37 cm b) 5 dm c) 0,82 m d) $3\frac{1}{2}$ m

2. Vypočítajte polomer kruhu, ktorého obsah je:
   a) 113,04 cm^2 b) 122,7 dm^2 c) 38,5 m^2 d) 95 cm^2

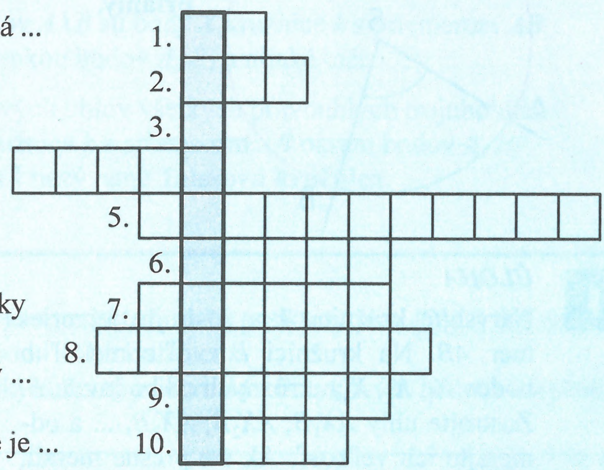
3. Vypočítajte obsah medzikružia ohraničeného kružnicami, ktorých polomery majú veľkosti 6,4 dm a 3,7 dm. Medzikružie je časť roviny ohraničenej sústrednými kružnicami.

4. Vypočítajte obsah kruhu, ak jeho obvod je 21,98 dm.

5. Aký je polomer kružnice, ktorej dĺžka je
   a) dvakrát,
   b) trikrát väčšia než dĺžka kružnice s polomerom r = 3,5 cm?

6. Kružnici k s polomerom r = 5 cm je vpísaný štvorec. Vypočítajte, o koľko je obsah štvorca menší než obsah kruhu ohraničeného kružnicou k.

7. Riešte krížovku:
   1. Osová súmernosť má ...
   2. Na priamke leží ...
   3. Označenie obsahu
   4. Na kocke štvorec *ABCD* je ...
   5. Úsečka spájajúca protiľahlé vrcholy štvorca
   6. Teleso, ktorého všetky steny sú štvorce
   7. Pravidelný šesťboký ...
   8. $k(S, r)$ je ...
   9. Úsečka AB na kocke je ...
   10. Pravý ...

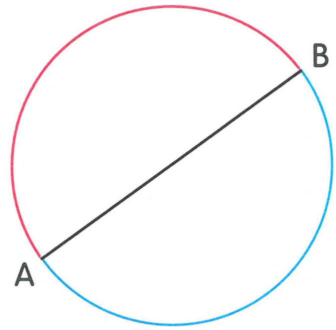


Štúdium umenia riešiť úlohy je výchovou vôle.

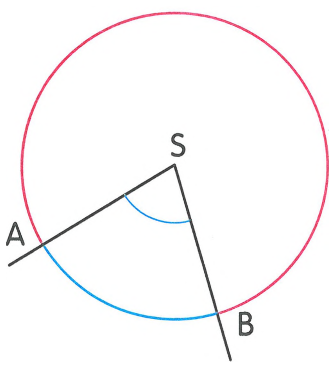
G. Polya

5.9 Stredový uhol. Talesova kružnica

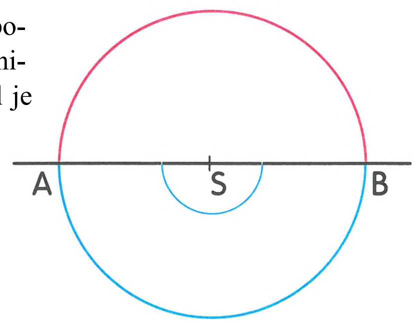
Dva body A, B na kružnici rozdelia kružnicu na dva oblúky. Ak sú tieto dva body koncové body priemeru kružnice, rozdelia kružnicu na dva zhodné kružnicové oblúky, každý z nich je **polkružnica.**



Nech je daná kružnica $k(S, r)$ a body A, B, ktoré ju rozdeľujú na dva kružnicové oblúky. Zostrojme uhol ASB. Jeden z oblúkov leží vo vnútri tohto uhla. Uhol ASB nazývame **stredový uhol** prislúchajúci k oblúku AB.

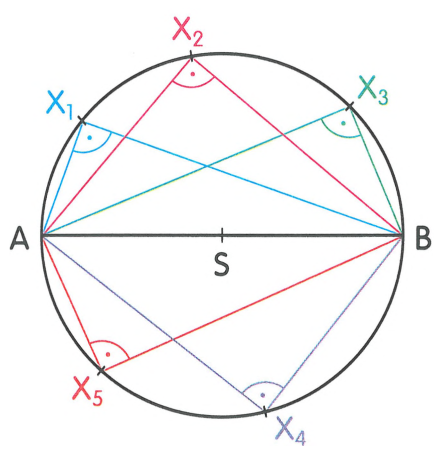


Ak body A, B sú body priemeru kružnice, **stredový uhol** je **priamy.**



1 ***ÚLOHA***

Narysujte kružnicu k a zostrojte jej priemer AB. Na kružnici k zvoľte niekoľko bodov X_1, X_2, X_3, ... rôznych od bodov A, B. Zostrojte uhly AX_1B, AX_2B, AX_3B, ... a odmerajte ich veľkosť. Ak ste presne merali, dostali ste vždy výsledok 90°.
Je to pravda?

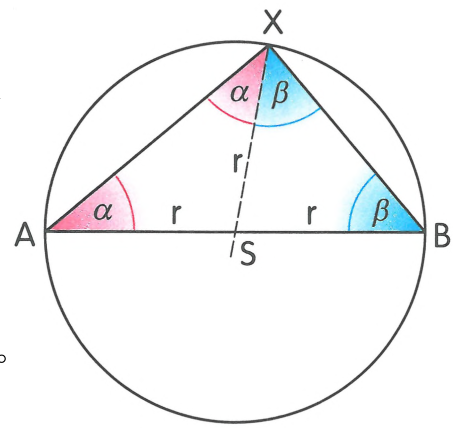


PROBLÉM

Musí to platiť pre ľubovoľnú kružnicu k s priemerom AB?

RIEŠENIE

Narysujme kružnicu k s priemerom AB. Na nej zvolíme bod X rôzny od bodov A, B. Polpriamka XS rozdelí trojuholník ABX na dva rovnoramenné trojuholníky AXS a BXS s ramenami dĺžky r. Trojuholník AXS má pri základni AX zhodné uhly veľkosti α. Trojuholník BXS má pri základni BX zhodné uhly veľkosti β.



V trojuholníku ABX potom platí

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

čiže uhol AXB je pravý, $|\sphericalangle AXB| = 90°$

Dá sa ukázať, že body, ktoré neležia na kružnici k nemôžu byť vrcholom pravého uhla s ramenami, z ktorých jedno prechádza bodom A a druhé bodom B.
Teda platí:

Talesova veta

Vrcholmi pravých uhlov AXB sú body X kružnice k s priemerom AB (s výnimkou bodov A, B) a nijaké iné.

Množinou vrcholov pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou AB je kružnica k s priemerom AB okrem bodov A, B.
Kružnicu k nazývame **Talesova kružnica.**

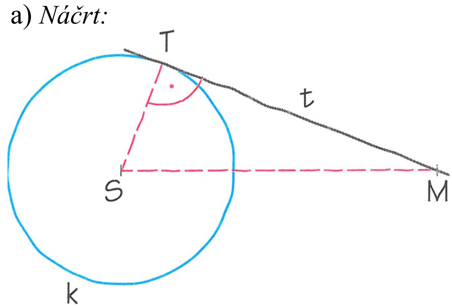
[1] ***PRÍKLAD***

Narysujte kružnicu $k(S, 2\text{ cm})$ a vyznačte bod M, pre ktorý platí $|SM| = 5{,}5$ cm.

a) Zostrojte dotyčnice z bodu M ku kružnici k.
b) Vypočítajte dĺžku úsečky určenej bodom M a dotykovým bodom dotyčnice ku kružnici.

RIEŠENIE

a) *Náčrt:*

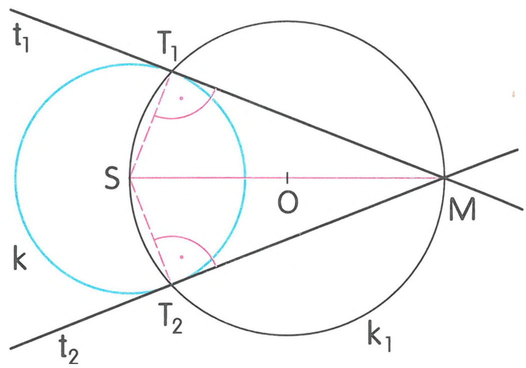


Rozbor:

Na obrázku je znázornená kružnica k a jej dotyčnica t prechádzajúca bodom M. Dotykový bod označíme T. Zrejme platí, že $ST \perp t$. Bod T je vrchol pravého uhla pravouhlého trojuholníka SMT s preponou SM. Preto bod T leží na Talesovej kružnici s priemerom SM.

Konštrukcia:

1. k; k $(S, 2\text{ cm})$
2. M; $|MS| = 5{,}5\text{ cm}$
3. k_1; k_1 $(O, \frac{1}{2}|SM|)$,
   O je stred SM
4. T_1, T_2; $T_1, T_2 \in k \cap k_1$
5. t_1; $t_1 = \overleftrightarrow{MT_1}$
6. t_2; $t_2 = \overleftrightarrow{MT_2}$



Skúška:

Z vlastnosti Talesovej kružnice k_1 vyplýva, že bod T_1 je vrchol pravého uhla ST_1M. Preto priamka t_1 je kolmá na polomer ST_1 kružnice k a teda je jej dotyčnicou. Podobne by sme urobili odôvodnenie pre bod T_2 a priamku t_2.

b) Dĺžku úsečky MT_1 vypočítame z pravouhlého trojuholníka ST_1M podľa Pytagorovej vety:

$$|MS|^2 = |MT_1|^2 + |ST_1|^2$$
$$|MS| = 5{,}5\text{ cm}$$
$$|ST_1| = 2\text{ cm}$$
$$|MT_1| = \dots\text{ cm}$$

$$5{,}5^2 = |MT_1|^2 + 2^2$$
$$|MT_1|^2 = 30{,}25 - 4$$
$$|MT_1| = \sqrt{26{,}25}$$
$$|MT_1| \doteq 5{,}12$$

$$|MT_1| \doteq 5{,}12\text{ cm}$$

Odpoveď: Dĺžka úsečky MT_1 je približne 5,1 cm.

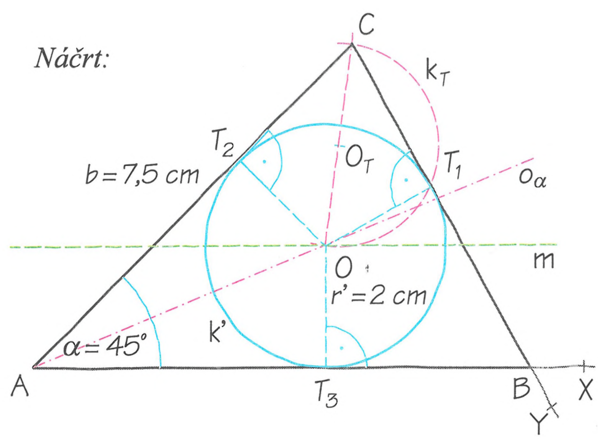
2

PRÍKLAD

Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom je daná strana $b = 7{,}5$ cm, uhol $\alpha = 45°$ a polomer $r' = 2$ cm kružnice vpísanej danému trojuholníku.

RIEŠENIE

Náčrt:

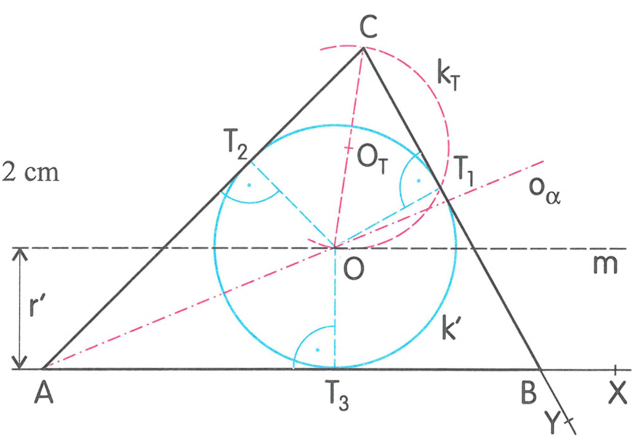


Rozbor:

1. Úsečku AC vieme zostrojiť, $|AC| = 7{,}5$ cm.
2. Nezostrojený je bod B. Bod B leží na polpriamke AX a na dotyčnici ku kružnici zostrojenej z bodu C.
3. Teda potrebujeme zostrojiť stred O kružnice k', ktorá je vpísaná do hľadaného trojuholníka.
4. Stred O je priesečník osi uhla α a priamky $m \parallel AX$, ktorej vzdialenosť od AX je 2 cm.
5. Dotyčnicu CY zostrojíme pomocou Talesovej kružnice (príklad 1).

Konštrukcia:

1. AC; $|AC| = b = 7{,}5$ cm
2. AX; $|\sphericalangle CAX| = 45°$
3. o_α
4. m; $m \parallel AX$; $|AX, m| = r' = 2$ cm
5. O; $O \in o_\alpha \cap m$
6. k'; $k'(O, r' = 2 \text{ cm})$
7. O_T; $|OO_T| = |O_TC|$
8. k_T; $(O_T; |O_TC|)$
9. T_1; $T_1 \in k_T \cap k'$
10. $\overrightarrow{CT_1}$;
11. B; $B \in \overrightarrow{AX} \cap \overrightarrow{CT_1}$
12. $\triangle ABC$



Diskusia: Prenecháme ju žiakom.

C V I Č E N I A

1. Daná je úsečka MN. Zostrojte Talesovu kružnicu, ktorej priemer je úsečka MN.

2. Narysujte kružnicu $k_1(S, 3 \text{ cm})$ a kružnicu $k_2(S, 6 \text{ cm})$. Na kružnici k_2 zvoľte bod N.
   a) Zostrojte bodom N dotyčnice ku kružnici k_1.
   b) Vypočítajte vzdialenosti dotykových bodov týchto dotyčníc od bodu N.

3. Zostrojte trojuholník ABC, keď je daná strana $c = 7$ cm, $v_a = 5$ cm, $v_b = 4$ cm.

4. Narysujte kružnicu $k(S, 3 \text{ cm})$. Zvoľte bod M tak:
   a) aby ním prechádzala jediná dotyčnica ku kružnici k,
   b) aby ním prechádzali dve dotyčnice ku kružnici k a napíšte podmienku pre dĺžku úsečky SM,
   c) aby ním neprechádzala žiadna dotyčnica ku kružnici k a napíšte podmienku pre dĺžku úsečky SM.

5.10 Slovné úlohy na výpočet obsahu kruhu a dĺžky kružnice

[1] ***PRÍKLAD***

Stavebný žeriav má vodorovné rameno dlhé 20 m. Akú rozlohu stavby možno obslúžiť z tohto žeriavu, keď sa otáča len okolo svojej osi?

! ***RIEŠENIE***

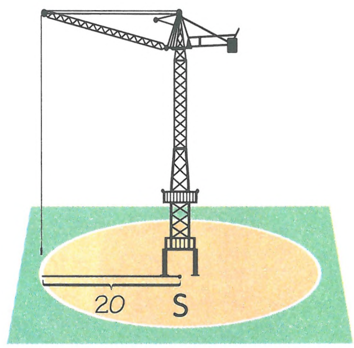
Ak sa žeriav otáča okolo svojej osi, opíše kružnicu s polomerom 20 m. Všetky miesta vo vnútri tejto kružnice možno so žeriavom obslúžiť. Stačí vypočítať obsah kruhu s polomerom 20 m.

$r = 20$ m
$S = \dots$ m^2

$S = \pi r^2$

$S = 3{,}14 \,.\, 20^2$
$S = 3{,}14 \,.\, 400$
$S = 1\,256$

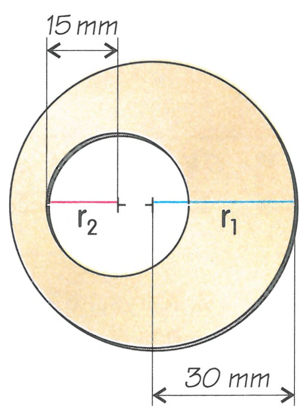
$S = 1\,256$ m^2



Odpoveď: Žeriav obslúži $1\,256$ m^2 rozlohy stavby.

[2] ***PRÍKLAD***

Podložka z plechu má tvar ako na obrázku. Vypočítajte hmotnosť 1 000 kusov takýchto podložiek, keď 1 m^2 plechu má hmotnosť 10 kg.



! ***RIEŠENIE***

Obsah kruhovej podložky vypočítame ako rozdiel obsahov S_1, S_2 dvoch kruhov s polomermi $r_1 = 30$ mm a $r_2 = 15$ mm.

1. $r_1 = 30$ mm
   $S_1 = \dots$ mm^2

   $S_1 = \pi r_1^2$

   $S_1 = 3{,}14 \,.\, 30^2$
   $S_1 = 3{,}14 \,.\, 900$
   $S_1 = 2\,286$

   $S_1 = 2\,286$ mm^2

2. $r_2 = 15$ mm
   $S_2 = \dots$ mm^2

   $S_2 = \pi r_2^2$

   $S_2 = 3{,}14 \,.\, 15^2$
   $S_2 = 3{,}14 \,.\, 225$
   $S_2 = 706{,}5$

   $S_2 = 706{,}5$ mm^2

3. $S_1 = 2\,286$ mm^2
   $S_2 = 706{,}5$ mm^2
   $S = \dots$ mm^2

   $S = S_1 - S_2$

   $S = 2\,826 - 706{,}5$
   $S = 2\,119{,}5$

   $S = 2\,119{,}5$ mm^2

Miško celý postup výpočtu zjednodušil takto:

$S = S_1 - S_2$
$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$
$S = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

$S = 3{,}14 \,.\, (30^2 - 15^2)$
$S = 3{,}14 \,.\, (900 - 225)$
$S = 3{,}14 \,.\, 675$
$S = 2\,119{,}5$

$S = 2\,119{,}5 \text{ mm}^2$

Obsah jednej podložky je $2\,119{,}5 \text{ mm}^2$.
Obsah 1 000 kusov podložiek je
$2\,119\,500 \text{ mm}^2 = 2{,}12 \text{ m}^2$.
Hmotnosť 1 m^2 plechu je 10 kg,
hmotnosť $2{,}12 \text{ m}^2$ plechu je 21,2 kg.

Odpoveď: Hmotnosť 1 000 takých podložiek je 21,2 kg.

[3] ***PRÍKLAD***

Zadné kolesá traktora majú priemer 1,25 m a predné kolesá majú priemer 75 cm. Koľkokrát sa otočí každé koleso na dráhe 2 km?

RIEŠENIE

Vypočítame obvod o_1 zadného kolesa a obvod o_2 predného kolesa

$d_1 = 1{,}25$ m	$d_2 = 75$ cm $= 0{,}75$ m
$o_1 = \ldots$ m	$o_2 = \ldots$ m
$o_1 = \pi d_1$	$o_2 = \pi d_2$
$o_1 = 3{,}14 \,.\, 1{,}25$	$o_2 = 3{,}14 \,.\, 0{,}75$
$o_1 = 3{,}925$	$o_2 = 2{,}355$
$o_1 = 3{,}925$ m	$o_2 = 2{,}355$ m

2 km = 2 000 m
Počet otáčok zadného kolesa
$2\,000 : 3{,}925 \doteq 510$
Počet otáčok predného kolesa
$2\,000 : 2{,}355 \doteq 849$

Odpoveď: Na dráhe 2 km sa zadné koleso otočí približne 510-krát a predné približne 849-krát.

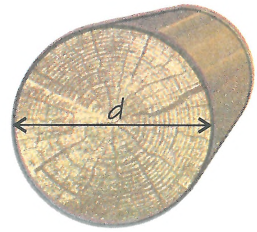
[4] ***PRÍKLAD***

Aký veľký je priemer a prierez kmeňa stromu, ktorý má obvod 2 m?

RIEŠENIE

Prierez kmeňa je kruh, ktorého obvod poznáme.
Vypočítame polomer a potom obsah rezu.

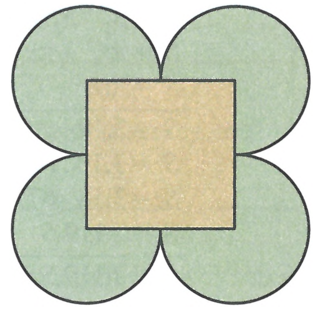
1.	2.
$o = 2$ m	$r = 0{,}32$ m
$r = \ldots$ m	$S = \ldots \text{ m}^2$
$o = 2 \,.\, \pi r$	$S = \pi r^2$
$2 = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, r$	$S = 3{,}14 \,.\, 0{,}32^2$
$r = \frac{2}{2\,.\,3{,}14} \cdot \frac{1}{3{,}14}$	$S = 3{,}14 \,.\, 0{,}102\,4$
$r = 0{,}32$	$S = 0{,}32$
$r = 0{,}32$ m	$S = 0{,}32 \text{ m}^2$
$2r = d = 0{,}64$ m	



Odpoveď: Priemer kmeňa je 0,634 m a prierez má obsah približne $0{,}32 \text{ m}^2$.

5 ***PRÍKLAD***

Vypočítajte, koľko humusovitej zeminy treba na záhon v tvare uvedenom na obrázku. Strana jeho štvorcovej časti je 2,6 m. Stredy kruhových častí sú vo vrcholoch štvorca. Vrstva humusu má byť 30 cm vysoká.



RIEŠENIE

Ide o výpočet objemu telesa s podstavou ako na obrázku a výškou 30 cm. Objem vypočítame, keď obsah podstavy vynásobíme výškou.
Riešenie uskutočníme v dvoch krokoch:

a) vypočítame obsah S podstavy,
b) vypočítame objem V.

a) Obsah podstavy sa rovná súčtu obsahu štvorca so stranou 2,6 m a štvornásobku troch štvrtín obsahu kruhu s polomerom 1,3 m.

$a = 2{,}6$ m
$r = 1{,}3$ m

$S = a^2 + 4 \cdot \frac{3}{4}\pi r^2$

$S = a^2 + 3 \,.\, \pi r^2$
$S = 2{,}6^2 + 3 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1{,}3^2$
$S = 6{,}76 + 15{,}9$
$S \doteq 22{,}66$

$S \doteq 22{,}66 \text{ m}^2$

Obsah záhona je 22,66 m².

b) $S = 22{,}66 \text{ m}^2$
$v = 30 \text{ cm} = 0{,}3$ m
$V = \ldots \text{ m}^3$

$V = S \,.\, v$

$V = 22{,}66 \,.\, 0{,}3$
$V \doteq 6{,}8$

$V \doteq 6{,}8 \text{ m}^3$

Odpoveď: Na záhon treba približne 6,8 m³ humusovitej zeminy.

6 ***PRÍKLAD***

Vypočítajte obsah kruhového výseku *ASB,* keď $r = 4$ cm a $\alpha = 72°$.

RIEŠENIE

Obsah kruhu vieme vypočítať, to je $S = \pi r^2$. Tento obsah prislúcha vlastne výseku so stredovým uhlom 360°. Obsah výseku S_1 so stredovým uhlom 1° sa rovná $\frac{1}{360}$ obsahu celého kruhu:

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360}$$

Ak je stredový uhol $\alpha = 72°$, obsah bude 72-krát väčší, ako je obsah výseku, ktorý prislúcha uhlu 1°; platí teda

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$$

$r = 4$ cm
$\alpha = 72°$
$S_\alpha = \ldots$ cm²

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$$

$$S_\alpha = \frac{3{,}14 \,.\, 4^2}{360} \cdot 72$$

$$S_\alpha = \frac{3{,}14 \,.\, 16}{360} \cdot 72$$

$$S_\alpha = 10{,}05$$

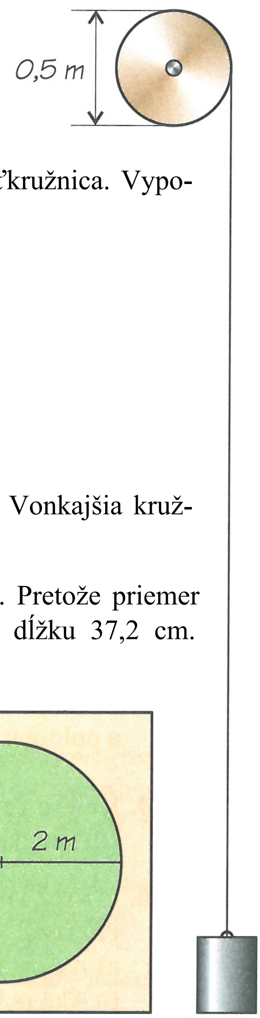
$$S_\alpha \doteq 10 \text{ cm}^2$$

Odpoveď: Obsah výseku *ASB* je približne 10 cm².

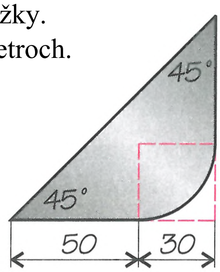
CVIČENIA

1. Priemer kolesa motocykla je 60 cm. Koľkokrát sa otočí koleso motocykla na ceste 1 km dlhej?

2. Na kolese, ktorého priemer je 0,5 m, je upevnené lano a na ňom zavesené bremeno. O koľko sa zdvihne bremeno, keď sa koleso otočí päťkrát?



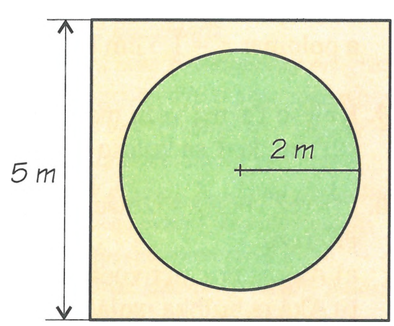
3. Podložka má tvar znázornený na obrázku. Oblúk je štvrťkružnica. Vypočítajte obvod a obsah podložky.
   Rozmery sú dané v milimetroch.



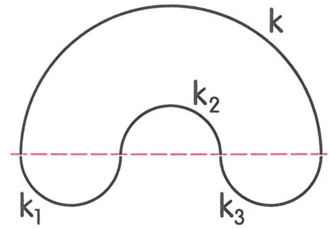
4. Dve sústredné kružnice tvoria medzikružie šírky 12 cm. Vonkajšia kružnica má priemer 56 cm. Vypočítajte obsah medzikružia.

5. Ku kachliam v predajni treba kúpiť nové dymové rúrky. Pretože priemer rúrok nie je známy, zmerali ich obvod motúzom. Mal dĺžku 37,2 cm. Rúrky akého priemeru treba kúpiť?

6. Polomer kruhového záhona je 2 m. Okolo neho je plocha vysypaná pieskom, ktorej hranicu tvoria strany štvorca s dĺžkou 5 m a obvod záhonu. Aký je obsah plochy vysypanej pieskom?



7. Na obrázku sú zhodné polkružnice k_1, k_2, k_3. Vypočítajte obvod aj obsah obrazca ohraničeného polkružnicami k, k_1, k_2, k_3, keď $r = 3$ cm je polomer polkružnice k.



VYSKÚŠAJTE SA!

1. Daný je bod S. Zostrojte kružnicu $k(S,\ 3\text{ cm})$. Vyznačte na nej niekoľko bodov $M, N, P, \ldots$

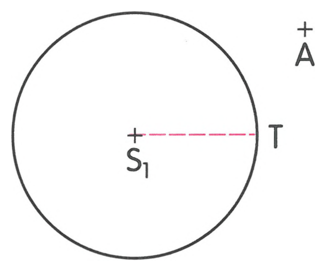
2. Zostrojte kružnicu $k(S;\ 3{,}5\text{ cm})$. Zvoľte na nej ľubovoľný bod T. Zostrojte v bode T dotyčnicu t ku kružnici k.

3. Zostrojte kružnicu $k(S;\ 3{,}5\text{ cm})$. Mimo kružnice k zvoľte bod M. Bodom M veďte dotyčnice ku kružnici k.

4. Daná je kružnica $k(S,\ 3\text{ cm})$ a t je jej dotyčnica s dotykovým bodom T. Zostrojte obraz k' kružnice k
   a) v osovej súmernosti s osou t;
   b) v stredovej súmernosti so stredom T.

5. Zostrojte kružnicu k, ktorá prechádza bodom A a priamky t sa dotýka v danom bode T. (Bod A neleží na priamke t).

6. Zostrojte kružnicu k, ktorá prechádza bodom A a kružnice $k_1(S_1;\ 2{,}5\text{ cm})$ sa dotýka v bode T.



7. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom je daná strana $c = 5$ cm, uhol $\alpha = 45°$ a polomer $r = 4$ cm kružnice danému trojuholníku opísanej.

8. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom je daná strana $c = 5$ cm, uhol $\beta = 60°$ a polomer $r' = 1{,}5$ cm kružnice danému trojuholníku vpísanej.

9. Koleso ťažnej veže má priemer 3 m. O koľko metrov vystúpi (klesne) kabína výťahu, keď sa koleso otočí tým istým smerom 12-krát?

R

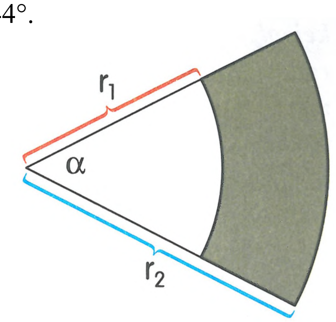
10. Prierez vodiča s izoláciou je 1,65 mm^2 (obsah kruhu). Izolácia tvorí 10 % jeho prierezu.
    a) Aký je priemer vodiča bez izolácie
    b) Aká je hrúbka izolácie?

11. Zostrojte z bodu A dotyčnice ku kružnici $k(S,\ 4)$ cm. Body dotyku označte T_1, T_2, dĺžka úsečky AS je 8,5 cm. Vypočítajte dĺžky úsečiek AT_1 ,AT_2.

12. Priemer kmeňa na najužšom mieste je 30 cm. Možno z neho vyrezať hradu s obdĺžnikovým prierezom 15 cm × 20 cm?

13. Určte obsah výseku v kruhu s polomerom r = 12 dm. Stredový uhol výseku je: a) $\alpha = 10°$; b) $\beta = 64°$; c) $\gamma = 180°$; d) $\delta = 144°$.

14. Vypočítajte obsah vyfarbeného geometrického obrazca, ktorý predstavuje tesniacu podložku hlavy jednovalcového motora, r_1 = 52 mm, r_2 = 80 mm, $\alpha = 54°$.



Felix Christian Klein

(25. 4. 1849 až 22. 6. 1925)

Nemecký matematik.
Známy je jeho Erlangenský program, ktorý zahŕňal geometriu a jeho základom sa stal pojem grupy. Pričinil sa o zostrojenie modelu Lobačevského geometrie (Kleinov model). Študoval diskrétne grupy, algebrické rovnice, transformácie, neeuklidovskú geometriu a iné.
Veľký dôraz kládol na vzťahy medzi matematikou a technickými vedami.

ROZUM DO HRSTI

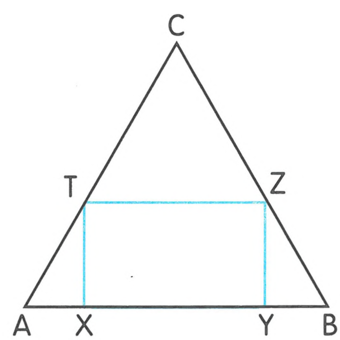
Milí ôsmaci, opäť sa vám prihovárame vybranými úlohami z matematickej olympiády. Ich riešenie spôsobilo radosť mnohým úspešným riešiteľom, resp. víťazom niektorých kôl MO. Veríme, že aj vás ich úspešné vyriešenie poteší. Veľa úspechov!

1. Nájdite všetky štvorciferné prirodzené čísla deliteľné číslom 99, ktoré majú túto vlastnosť: Ak vymeníme medzi sebou prvé dve číslice, dostaneme štvorciferné číslo deliteľné číslom 91.

2. Do rovnostranného trojuholníka *ABC* so stranou dĺžky 8 cm je vpísaný pravouholník *XYZT* tak, že body *X, Y* ležia na úsečke *AB,* bod Z na úsečke *BC* a bod *T* na úsečke *AC.*

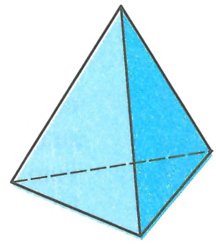
a) Vypočítajte obsah pravouholníka v závislosti od veľkosti úsečky *AX* a zistite, pre ktorú hodnotu $|AX_0|$ je obsah najväčší.

b) Nájdite vzdialenosť $|AX|$, pre ktorú sa obsah pravouholníka *XYZT* rovná obsahu trojuholníka.



3. Juraj si chce nastrihať rovnaké obdĺžnikové kartičky s rozmermi v celých centimetroch. Počet kartičiek chce mať väčší ako 20, ale menší ako 40, obsah jednej kartičky väčší ako 10 cm^2, ale menší ako 20 cm^2. Zo všetkých kartičiek chce zložiť obdĺžnik tak, aby počet kartičiek v jednom rade sa rovnal počtu radov. Obsah zloženého obdĺžnika chce mať väčší ako 550 cm^2, ale menší ako 580 cm^2. Určte všetky možné rozmery kartičiek, ktoré si môže Juraj nastrihať.

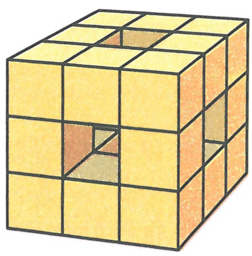
4. a) Očíslujte hrany štvorstena piatimi najmenšími nepárnymi prvočíslami a číslom 15 tak, aby sa súčet čísel prislúchajúcich hranám podstavy rovnal súčtu čísel prislúchajúcich zvyšným hranám (nepatriacim podstave) a zároveň, aby sa rovnali súčty čísel prislúchajúcich každej dvojici mimobežných hrán. Riešenie načrtnite.



b) Nech číslo pripísané ku hrane určuje dĺžku hrany. Dá sa potom každý štvorsten vyhovujúci podmienkam z časti a) vymodelovať? Svoje tvrdenie odôvodnite.

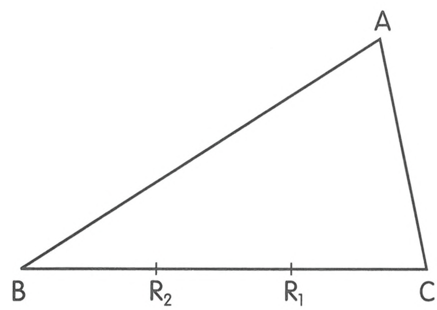
5. Vo vnútri strany *AD* rovnobežníka *ABCD* zvoľte bod *M*. Priamka *BM* pretne priamku *CD* v bode *N*. Dokážte, že súčin dĺžok $|AM| \cdot |CN|$ nezávisí od voľby bodu *M*.

6.

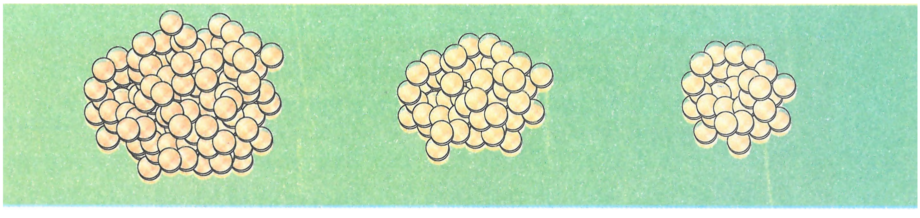


Kocka s dĺžkou hrany 3 cm je zložená z 27 rovnakých malých kociek. Odstránime z nej tri „stĺpčeky“ kociek tak, ako je to znázornené na obrázku. Vznikne teleso zložené z 20 kociek. Zistite súčet hrán a súčet plôch stien takto vzniknutého telesa.

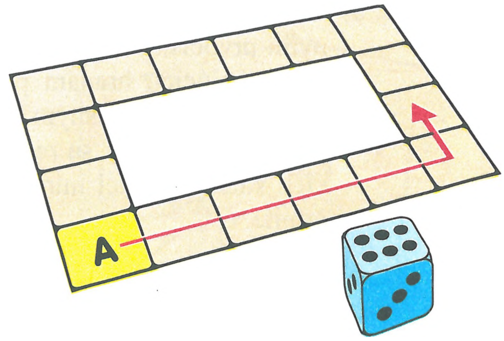
7. Daný je trojuholník *ABC*. Bodmi R_1, R_2, ktoré delia stranu *BC* na tretiny, veďte rovnobežky so stranou *AC*. Ich priesečníky so stranou *AB* označte postupne P_1, P_2 a zostrojte úsečky P_1C a P_2C. Týmto spôsobom rozdelíte trojuholník *ABC* na 6 častí. Určte ich obsahy, ak viete, že obsah trojuholníka *ABC* je 18 cm^2.



8. Na stole sú 3 hromady rovnakých mincí. Z prvej z nich premiestnime na zvyšné dve toľko mincí, aby sa v každej z nich počet mincí zdvojnásobil. Potom urobíme to isté s druhou a nakoniec s treťou hromadou. Zostanú tri hromady s rovnakým počtom mincí. Spolu je to viac ako 150 mincí a menej ako 190. Koľko bolo pôvodne mincí na jednotlivých hromadách?



9. Hracia kocka sa preklápa po obdĺžnikovom páse, ktorý sa skladá zo štvorcov zhodných so stenami kocky. Vo východiskovom mieste A je na hornej stene kocky šestka. Kde bude šestka, keď kocka obehne stokrát obdĺžnikový pás a zostane v mieste A (hore, vpravo, vľavo, vpredu, vzadu alebo dole).



10. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC $(AB > BC)$. Na strane AB je vyznačený bod X, pre ktorý platí $AX \cong CX$. Dokážte, že stred O kružnice vpísanej trojuholníku XCB leží na priamke p, ktorá je rovnobežná so stranou AC a prechádza bodom X.

Matematika je jazykom, v ktorom vyjadrujeme svoje vysvetlenia, je prostriedkom, ktorý nám umožňuje vysvetliť skupinu faktov pomocou inej.

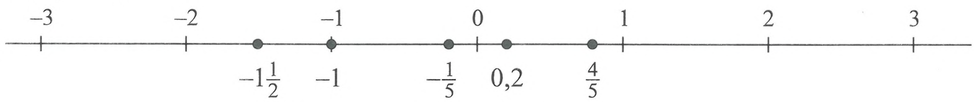
S. Weinberg

VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ

1 Opakovanie a prehĺbenie učiva matematiky zo 7. ročníka

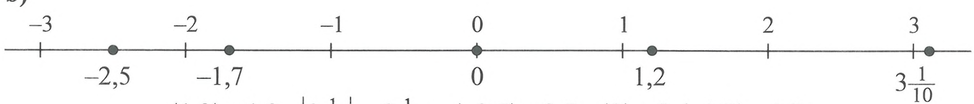
1.1 Racionálne čísla. Počtové výkony s racionálnymi číslami

Úlohy: **1.a)**



$\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$; $|-1| = 1$; $\left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$; $\left|-1\frac{1}{2}\right| = 1\frac{1}{2}$; $|0,2| = 0,2$

b)

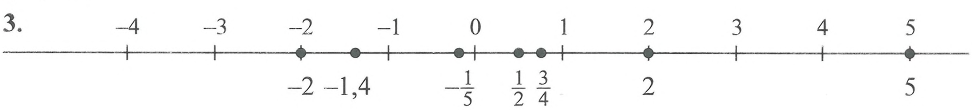


$|1,2| = 1,2$; $\left|3\frac{1}{10}\right| = 3\frac{1}{10}$; $|-2,5| = 2,5$; $|0| = 0$; $|-1,7| = 1,7$

3.a) $2\frac{19}{20}$, $2\frac{59}{90}$; **b)** $1\frac{11}{20}$, $-\frac{79}{90}$; **4.a)** $8\frac{7}{10}$, **b)** 0; **5.a)** $8\frac{1}{5}$; **b)** 2; **c)** $7\frac{4}{9}$; **6.** $\frac{2}{5} \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) = -1\frac{2}{5}$, $-3\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = -3\frac{3}{20}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{25}$; **7.** $\frac{11}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{5}{7}$, $-\frac{1}{2}$, –3, $\frac{4}{11}$, –2; **8.a)** $\frac{4}{5}$; **b)** $-\frac{9}{10}$; **c)** $9\frac{1}{2}$; **d)** –24; **e)** 15; **9.a)** $\frac{13}{8} = \frac{13}{8}$; **b)** $\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$; **10.a)** $2\frac{2}{5}$; **b)** –18; **c)** $2\frac{2}{15}$; **d)** $2\frac{4}{21}$; **11.a)** $-21\frac{7}{13}$; **b)** $-1\frac{3}{5}$; **12.** na štvorcovú podlahu viac o $\frac{1}{16}$ m^2; **13.** $\frac{5}{8}$.

Cvičenia: **1.a)** 2,18; **b)** 0,15; **c)** 42,5; **d)** 123,1; **e)** –0,45; **f)** –0,079 2; **g)** –58,6; **h)** 0,15; **i)** 0,004 4; **2.a)** 38,71; **b)** 6,9; **c)** 0,02; **d)** 28,305; **e)** –7,6; **f)** –5,426; **g)** 42,8; **h)** 16,9; **i)** 2,211;

3.



4. $\frac{2}{7} + \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{56}$, $\frac{2}{7} + \frac{1}{2} = \frac{11}{14}$, $\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$, $\frac{2}{7} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{37}{56}$, $-\frac{3}{8} - \frac{2}{7} = -\frac{37}{56}$, $\frac{2}{7} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{14}$, $\frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{3}{14}$, $\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{8}$, $-\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8}$; $\frac{7}{8} > \frac{11}{14} > \frac{37}{56} > \frac{3}{14} > \frac{1}{8} > -\frac{5}{56} > -\frac{3}{14} > -\frac{37}{56} > -\frac{7}{8}$; **5.a)** o $\frac{17}{120}$; **b)** o $\frac{21}{40}$; **7a)** záporné –3 + (–5) = –8; **b)** môže byť kladný 9 + (–5) = 4, alebo záporný 3 + (–10) = –7; **c)** môže byť kladný –5 – (–10) = 5, alebo záporný –10 – (–5) = –5; **8.** 92 m; **9.a)** $\frac{15}{28}$; **b)** $\frac{1}{8}$; **c)** $\frac{27}{10}$; **d)** $\frac{80}{3}$; **e)** $-\frac{357}{8}$; **f)** $-\frac{23}{11}$; **g)** $\frac{7}{40}$; **h)** –2; **10.a)** $\frac{10}{21}$; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $-\frac{39}{80}$; **d)** $-\frac{10}{13}$; **e)** $-3\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{8}{35}$; **11.a)** $1\frac{7}{8}$; **b)** $-\frac{9}{14}$; **c)** $-6\frac{2}{3}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** $19\frac{1}{2}$; **12.a)** $5\frac{3}{5}$; **b)** $\frac{23}{24}$; **13.** 1. skupina 3 024 Sk, 2. skupina 2 016 Sk a 3. skupina 576 Sk; **14.** 92,78 kg; **15.** 96 432,4; **16.** 01, 10; $\frac{1}{1} = 1$; **17.** $\frac{99}{99} + 9 = 10$.

1.2 Percentá

Úlohy: **3.** 480 Sk; **5.a)** 108 %; **b)** 8 640; **6.** 1 125; **7.** 1 200; **8.a)** 5 %; **b)** 10 %; **c)** 14 %; **9.a)** 10 %; **b)** 50 %; **c)** 100 %; **11.a)** 0,1; 0,4; 0,55; 0,72; 1,05; 1,5; 2,25; **b)** $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{20}$,

$\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$; **12.** 6 500 Sk; **13.** kuchynský robot 4 800 – 7 200, elektrická vŕtačka 3 240 – – 4 860, televízor 6 780 – 10 170, mikrovlnná rúra 4 440 – 6 660, LEGO 1 920 – 2 880.

Cvičenia: **2.a)** 0,012; **b)** $\frac{1}{400}$; **c)** 0, 000 5; **d)** $\frac{1}{60}$; **e)** $\frac{133}{2\,000}$; **3.** C; **4.** D; **5.** B; **6.** E; **7.** D; **8.** tenis 13,3 %, futbal 33,3 %, hokej 22,2 %, cyklistika 4,4 %, lyžovanie 15,6 %, plávanie 11,1 %; **9.a)** 357 Sk, **b)** 12 000; **c)** 200 000; **10.a)** dolár 23,6 %; frank 14,4 %; **b)** 62 %; **c)** 11; **11.** 200; **12.a)** 93,5; **b)** 170; **c)** 297,5; **13.a)** 0,12; **b)** 500; **c)** 0,15; **d)** $\frac{1}{250}$; **14. a)** 45; **b)** 1; **c)** 8; **d)** 21.

1.3 Pomer, priama a nepriama úmernosť
Riešenie úloh

Úlohy: **1.** žiadna zmena, ani zväčšenie ani zmenšenie; **2.** $\frac{4}{7}, \frac{3}{12}, \frac{7}{9}, \frac{100}{3}, \frac{9}{8}, \frac{1}{4}, 7, \frac{10}{12}, \frac{17}{14}$; **3.** 1 : 0, 3 : 0, ... ; **4.a)** 4 : 7, 2 : 1, 1 : 3, 13 : 4; **b)** 20 : 1, 3 : 5, 1 : 4, 37 : 10; **c)** 7 : 10, 94 : 25, 50 : 7, 20 : 1; **5.** 159 cm – zmenšenie; **6.a)** 30, 70; **b)** 20, 30, 50; **c)** 5, 10, 20, 65; **7.a)** áno; **b)** áno; **c)** nie; **d)** nie; **8.a)** 2; **b)** 9; **c)** 1,5; **d)** 26; **10.** 630 km; **11.** 700 km; **12.** 992; **13.** 3,08 m; **14.** 13,75 km; **15.** áno.

Cvičenia: **1.a)** 1 : 2, 2 : 1, 18 : 5, 39 : 10; **b)** 5 : 4, 12 : 1, 4 : 7, 9 : 4; **c)** 7 : 9, 1 : 2, 5 : 1, 26 : 5; **2.** 8 : 16 a 14 : 7; 14 : 7 a 2,3 : 4,6; **4.** 1 300 t a 1 820 t; **5.** o 320 Sk; **6.** 100 cm od 4 kg, 80 cm od 5 kg; **7.** 2 320 Sk, 1 740 Sk, 1 160 Sk; **9.** nemôže, lebo najmenšia má dĺžku 40 cm; **10.** 17 : 11; **11.a)** $x_1 = 10$, $x_2 = 00{,}125$; **b)** $m_1 = 6$, $m_2 = 0{,}005$; **c)** $y = 4$; **d)** $x = 2$; **12.** 4 : 9, 27 : 8; **13.** 1 : 100; **14.** 112,5 km; **15.** 30 detí; **16.** 31,725 kg; **17.** $10\frac{2}{3}$ dňa; **18.** 18 000 m^3; **19.** 12 minút; **20.** 13,125 l.

1.4 Zhodnosť trojuholníkov

Úlohy: **1.a)** rovnostranný; **b)** rovnoramenný; **c)** rôznostranný; **3.a)** ostrouhlý; **b)** pravouhlý; **c)** tupouhlý; **5.a)** $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$, $\gamma \cong \gamma'$; **b)** $\triangle ABC \cong$ $\cong \triangle A'B'C'$; **6.a)** podľa vety (*sss*); **b)** štyri.

Cvičenia: **1.** sú zhodné podľa vety *sss*; **2.** $\triangle ABC \cong \triangle BAD \Rightarrow AC \cong BD$; **3.** $\triangle CC'M \cong$ $\cong \triangle CC'B$ (*usu*) $\Rightarrow CM \cong CB$; **4.** trojuholníky sú zhodné podľa vety *sss*; **5.** 1,6 (*sus*), 2,3 (*sss*), 4,5 (*usu*).

1.5 Objem a povrch hranola

Úlohy: **1.**

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2,5	250	25 000	2 500 000
5	500	50 000	5 000 000
0,12	12	1 200	120 000
5	500	50 000	5 000 000

2.

m^3	dm^3	cm^3	l
1	1 000	1 000 000	1 000
2	2 000	2 000 000	2 000
3	3 000	3 000 000	3 000
1,5	1 500	1 500 000	1 500

4.a) $S = 2(ab + bc + ac)$; **b)** $V = a \,.\, b \,.\, c$; **c)** $S = 2 \,.\, S_p + Q$; **d)** $V = S_p \,.\, v$; **5.** $S = 2 \,.\, S_p + Q$ – povrch; Q je súčet obsahov bočných stien, $Q = o \,.\, v$; **6.** $S = 2 \,.\, S_p + Q$ – povrch hranola, $V = S_p \,.\, v$ – objem hranola, $V = a \,.\, b \,.\, c$ – objem kvádra, $Q = o \,.\, v$ – obsah plášťa.

Cvičenia: **1.** 39 500 kusov; **2.** zväčší sa o 70 cm^3; **3.a)** objem sa zväčšil 8-krát, povrch sa zväčšil 4-krát; **b)** objem sa zväčšil o 386 cm^3, povrch sa zväčšil o 192 cm^2; **4.a)** $S = 186$ cm^2, $V = 116{,}64$ cm^3; **b)** $S = 253{,}57$ cm^2, $V = 198{,}94$ cm^2; **c)** $S = 184{,}32$ cm^2, $V = 101{,}91$ cm^3; **d)** $S = 221{,}72$ cm^2, $V = 118{,}335$ cm^3; **5.a)** približne 21,1 m^2, **b)** 7 m^3.

1.6 Konštrukčné úlohy

Úlohy: **1.a)** áno, **b)** nie; **c)** áno; **d)** nie; **e)** nie; **f)** nie; **2.a)** áno; **b)** nie; **c)** nie; **d)** áno.

Cvičenia: **2.a)** $1 < x < 9$ (cm); **b)** $1{,}8 < x < 12{,}6$ (cm).

Vyskúšajte sa!

1.a) $\frac{13}{24}$; **b)** –1,118; **2.a)** $\frac{10\,219}{180}$; **b)** 75; **3.** 60; **4.** o 33,3 %; **5.a)** 961,5 mg; **b)** 384,6 mg až 675,6 mg; **6.** 400 Sk; **7.** bielkoviny 0,95 kg, rozpustné sacharidy 0,375 kg; nerozpustné sacharidy 0,375 kg, lipidy 0,45 kg, vlhkosť, popol 0,35 kg; **8.a)** $\frac{27}{16}$; **b)** $\frac{36}{5}$; **9.a)** $x = 10$; **b)** $y = 4$; **10.** $CP \cong PB$, $\sphericalangle DPC \cong \sphericalangle B'PB$, $\sphericalangle DCP \cong \sphericalangle B'BP$; **11.** nie sú zhodné odpovedajúce uhly; **12.** $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, $\triangle ASB \cong \triangle ASD$, $\triangle BSC \cong \triangle DSC$; **13.** $S = 144$ cm^2, $V = 112$ cm^3.

2 Mocniny a odmocniny

2.1 Druhá mocnina a tretia mocnina

Úlohy: **1.** 9^2; $0{,}5^2$; $(-7)^2$; $\left(\frac{10}{11}\right)^2$; **2.** 3 . 3; $\frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16}$; (–1,8) . (–1,8); **3.** 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400; **4.** $\frac{25}{16}$, $\frac{49}{64}$, $\frac{16}{11}$, $\frac{15}{361}$, $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; **6.a)** $x = 2$; **b)** $x = 7$; **7.a)** 3 600; **b)** 6 250 000; **c)** 0,012 1; **d)** 1,21; **9.** 1 225; 5 625; 11 025; 20,25; 72,25; **10.** 39 204; 290 521; 0,210 681; 787,924 9; **11.** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; **12.** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; **13.a)** 3 969; **b)** 11 664; **c)** 2 209; **d)** 44 100; **14.** 12^3; $0{,}09^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; **15.** 17 . 17 . 17; 1,5 . 1,5 . 1,5; 320 . 320 . 320; $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9}$; **16.** 8; 27; 64; 125; $\frac{8}{27}$; $\frac{64}{125}$; **17.** 0; **18.** 8 000; 125 000 000; 0,000 027; 0,000 000 001; **19.** 9 663,597; 0,000 000 001 728; 377,933 06; 131,872 22; **20.** 123 060,64; 2 425,562 5; ≐ 42,120 1; ≐ 649 636; ≐ 82,81; ≐ 16,402 5; ≐ 8 537,76; ≐ 58 216 900.

Cvičenia: **1.** 3^2; 7^2; $0{,}2^2$; 700^2; $0{,}001^2$; 0^2; $(-2)^2$; $(-8)^2$; $(-0{,}1)^2$; **2.** 15 . 15; 28 . 28; 0,08 . 0,08; 900 . 900; (–14) . (–14); (–800) . (–800); (–0,4) . (–0,4); **3.a)** 81; 36; 0,25; 0,64; 0,000 4; 100; 10 000; 1,21; 0,000 001; 490 000; 22 500; 144; –9; **b)** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{49}{64}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{17}{144}$, $\frac{8}{121}$; **c)** 36; 400; $\frac{9}{4}$; 1 600; 900; **d)** 27; 0,008; 64; 0,064; 64 000 000; 0,001; 1000; –8; **e)** $\frac{1}{27}$, $\frac{8}{125}$, $\frac{125}{64}$, $\frac{27}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{3}{1\,000}$; **f)** 64, $\frac{1}{8}$, $\frac{64}{27}$, $\frac{1}{125}$; **4.a)** 2 304; 16 129; 64 515; 154 449; 182 329; 727 609; 935 089; **b)** 47,61; 1,562 5; 0,064 516; 2 371,69; 25,908 1; 94 478 400; **c)** 177 241; 9 643,24; 18 232 900; 64 802 500; 89,491 6; **d)** 421 875; 7 077 888; 82 881 856; 56 623 104; 817 400 375; **e)** 32,768; 141,42; 130,32; 0,009 261; 13 481 272 000; 3 048 625 000 000; **f)** 16,81; –54,872; 0,000 065 61; –15,625; **5.** $\frac{9}{625}$.

2.2 Odmocnina

Úlohy: **2.a)** 0,949; **b)** 8,512 6; **c)** 29,388; **4.a)** 20; **b)** $1\frac{1}{10}$; **c)** 64; **d)** –73; **5.** 1; 0; 1,26; 1,91; 9,74; **6.** $a = 23$ m, treba natrieť 6 348 m^2.

Cvičenia: **1.a)** 6; 60; 0,6; 0,006; **b)** 9; 90; 0,09; 0,009; **2.a)** 5,39; 18,11; 26,53; 31,54; **b)** 91,1; 264,6; 162,8; 671; **c)** 0,458; 0,678; 0,09; 1,755; **d)** 1,265; 0,0632; 0,253; 0,894; **e)** 226; 649; 13,9; 3,8; **3.a)** 3; 0,5; 0,2; 6; 0,4; **b)** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{100}$; **c)** 4, 6, 5, 0, 20; **4.** 21 cm; **5.a)** 3,5; 5,74; 6,97; 9,11; 9,66; **b)** 0,345; 0,948; 75,9; 0,1; 1,69; **6.** viac o 6 m na obdĺžnikový pozemok; **7.** kocka 15 cm × 15 cm × 15 cm, kváder 15 cm × 3 cm × 75 cm alebo 15 cm × 9 cm × 25 cm.

2.3 Mocniny s prirodzeným mocniteľom

Úlohy: **2.a)** 9^9; **b)** $0{,}7^3$; **c)** 10^4; **3.** –, +, –, +–, ... ; **4.** rovnajú sa základu; **5.a)** $14x^5 + 7x^4 - 2x^3$; **b)** $8a^2 + 5$; **c)** $-11{,}8k^4 - 1{,}61k^3$; **d)** $-55ab^2 + 32a^2 - 40a^2b + 2ab$; **6.a)** 7^{16}; **b)** x^{13}; **c)** $-35d^3$; **d)** $(x + 1)^{10}$; **7.** platí; **8.a)** 3^3, $(-5)^4$, 4^2; **b)** $2a^2$, $\frac{1}{2}x^7$, $(7a + 2b)^3$; **9.** 1, 1, 1, **10.a)** $\frac{1}{a^5}$, $-\frac{1}{7^5}$, $\frac{1}{5^{10}}$; **b)** $\frac{1}{ab^4}$, $\frac{1}{2xy^2}$, $-\frac{1}{(a+b)^9}$; **11.** $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^7}$, $\frac{1}{50^4}$; **12.a)** $21^3 = 9\,261$; **b)** $64x^2$; **c)** $-343x^3y^3$; **13.a)** $\frac{196}{361}$; **b)** $\frac{343c^3}{800}$; **c)** $\frac{256x^4y^4}{625z^4}$; **14.a)** $64x^6y^9z^3$; **b)** $\frac{25}{49}x^2y^{10}$; **15.a)** $\frac{1}{(x+2)^2}$; **b)** $\frac{x^5}{(a-b)^5}$; **c)** $\frac{(a+b)^3}{(x+y)^6}$; **16.** $m^6(2m - m^2)^3$.

Cvičenia: **1.a)** 5^7; **b)** $(-9)^1$; **c)** 8^5; **d)** a^{2b}; **e)** $(x + 1)^n$; **f)** $(a + 2b)^{x-y}$; **2.a)** 4^8; **b)** $0{,}2^3$; **c)** $\left(\frac{4}{7}m\right)^4$; **d)** $(2a + 5)^3$; **3.** +, +, –, bez znamienka, +, –; **4.a)** 8, 625, 1; **b)** –32, –20, –27; **6.** $2^4 = 4^2$; **7.a)** $3x^2$; **b)** $18a^5$; **c)** $-19b^3 - 3b^2$; **d)** $-10m^2 - 10m^3$; **8.a)** $-6x^2 + 2z$; **b)** $16x^2 + 2x^3$; **c)** $120 + 244a + 122b$; **d)** $-0{,}84x^5 + 2{,}3x^4$; **e)** $9a^2 + 5b$; **f)** $18x + 3y^2$; **9.a)** $-9{,}9c$; **b)** $4d^3 - 4d^2 - 4d = 4(d^3 - d^2 - d)$; **c)** $a^2b + 6ab^2$; **10.a)** 7^7; **b)** $(-5)^5$; **c)** 10^{18}; **d)** a^{12}; **e)** $4(-m)^8$; **f)** $42(x + 1)^7$; **11.a)** 625; **b)** –3 125; **c)** –10 000 000 000; **d)** 10 000 000 000 000; **12.a)** $20x^5y^{12}z^2r^6$; **b)** $x^3y^3z^4$; **c)** $-105a^5b^5c^3$; **d)** $-\frac{8}{21}a^3b^4c^5$; **13.a)** $(x + y)^{12}$; **b)** $(2 + 3x)^{11}$; **c)** $(3 - 10z)^{15}$; **d)** $(12 - 6m)^{x+2y}$; **e)** $(7 - 4a)^{2a+2}$; **f)** $(-3d + 5c)^{2+7x}$; **14.a)** 5^4; **b)** 3^3; **15.a)** 8^3; **b)** $0{,}7^2$; **c)** $(-14)^2$; **d)** $11x^5$; **e)** $\frac{40}{7}a^7$; **f)** $2z^{11}$; **16.a)** $107a$; **b)** $-107a$; **c)** $90a^5$; **d)** $-8a^3$; **17.a)** $\frac{1}{a^2}$; **b)** $-\frac{10}{x^4}$; **c)** $-\frac{4}{7m^4}$; **d)** $\frac{4}{3abc}$; **e)** $\frac{1}{1\,000y}$; **f)** $\frac{y^2}{3x^2}$; **18.a)** $(4m + 1)^2$; **b)** $(7x - 2)^2$; **c)** $\frac{1}{5(a+b)^2}$; **d)** $(x - y)^2$; **e)** 1; **f)** $\frac{1}{2x-y}$; **19.a)** $2x^2(m + n)$; **b)** $\frac{4}{z^3(2x+y)^2}$; **c)** $\frac{7y^2}{x^3(a-2b)^6}$; **20.a)** 175 616; **b)** 4 096; **c)** 0,003 375; **d)** $32a^5b^5c^5$; **e)** $-\frac{4\,913}{8}x^3y^3$; **f)** m^4n^4; **21.a)** $\frac{8}{2\,197}$; **b)** $\frac{1\,024a^5}{243b^5}$; **c)** $\frac{8^nx^n}{q^ny^n}$; **d)** $-125a^6b^3$; **e)** $2^8x^{20}y^{28}$; **22. a)** $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$; **b)** $\frac{64x^6y^3}{125(x-y)^3}$; **c)** $\frac{(3a+2b)^6}{10^6}$; **23.a)** $2^6 > 6^2$; **b)** $4^3 = (2 . 4)^2$; **24.a)** 2^5; **b)** 2^{10}; **c)** $\frac{2^7}{2^2} = 2^5$; **d)** 2^{20}; **e)** 2^{18}; **f)** 2^3; **25. a)** $\frac{5}{9}$; **b)** $\frac{1}{3^7 . 2^5}$.

2.4 Zápis čísla typu $a \,.\, 10^n$, kde $1 \le a < 10$ a $n \in N$

Úlohy: **1.a)** 10^4; **b)** 10^8; **c)** 10^{10}; **d)** 10^{20}; **e)** 10^{16}; **f)** 10^{14}; **g)** $\frac{1}{10^7}$; **h)** $\frac{1}{10^{11}}$; **2.** 3,69 . 10^3, 2,86 . 10^3; **3.** 1,38 . 10^6, 8,17 . 10^5; **4.** 6 536 791.

Cvičenia: **1.** 4 . 10^5; **2.a)** 5 . 10^9; **b)** 1,35 . 10^4; **c)** 1,5 . 10^4 N; **d)** 8,1 . 10^7 g; **3.a)** 4 . 10^6 mm, 2,2 . 10^7 m^2, 9,62 . 10^4 ha; **b)** 4,3 , 10^{10} mm, 3,05 . 10^8 cm^3, 8,6 . 10^8 cm^3; **c)** 4,5 . 10^3 g, 1,7 . 10^5 kg, 5,2 . 10^6 g; **4.a)** 379 600; **b)** 5 589,2; **c)** 2 483; **d)** $\frac{1}{10}$.

Vyskúšajte sa!

1. 1^2, 20^2, 3^2, 4^2, 5^2; **2.** $x = 11$, $y = 50$; **3.** 256 m^2; 31,36 dm^2; 0,0225 km^2; 3,062 5 cm^2; 1 440 000 mm^2; **4.** približne 10 043 Sk; **5.** $503 \doteq 22{,}427^2$; **6.** 294 dm^2; **7.** $\doteq$ 2,04 dm; **8.a)** $10x + 5y^2 - 2y^3$; **b)** $12x^6y^4$; **c)** $\frac{27}{400}$; **d)** $\frac{8}{5}$; **9.** 11^{11}; **10.a)** 1 392 000 000 m; **b)** 5 983 000 000 000 000 000 000 t; **c)** 42 700 000 000 000; **11.a)** $9{,}35 \cdot 10^8$ m^2; **b)** $4{,}5 \cdot 10^{10}$ svetelných rokov; **c)** $2{,}68 \cdot 10^7$ g; **12.** MOCNINA; **13.** ... PRESVEDČIŤ INÝCH.

3 Pytagorova veta

3.2 Pytagorova veta

Cvičenia: **1.a)** nie; **b)** áno; **c)** áno; **d)** nie; **e)** áno; **f)** nie; **2.a)** 5 cm; **b)** 15 cm; **c)** 119 mm; **d)** 5,3 m; **e)** približne 12,2 m; **f)** približme 6,3 dm; **3.a)** približne 12,7 cm; **b)** približne 9,9 m; **c)** približne 79,5 m; **d)** 550 mm; **e)** 14 m; **f)** 13,2 mm; **g)** približne 5,3 dm; **h)** približne 7,3 cm;

4.

p	5	6	15	16	12	28	56	13
q	12	8	8	12	9	45	33	84
r	13	10	17	20	15	53	65	85

5.a) približne 17,6; **b)** približne 43; **c)** približne 57,4;

6.

a	10	10	10	10	10
b	10	20	30	40	50
$c \doteq$	14,1	22,4	31,6	41,2	50,9

7. $|PQ| \doteq 69{,}9$ mm; $|HM| \doteq 34{,}9$ mm; $|HM| \doteq \frac{1}{2}|PQ|$.

3.3 Použitie Pytagorovej vety

Úlohy: **1.** $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

3.4 Použitie Pytagorovej vety pri konštrukčných úlohách

Úlohy: **1.** použiť $S = S_1 - S_2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$; **2.** použiť $(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2$, $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$.

Cvičenia: **1.** $z = 8$ cm; **2.** Juraj urobil chybu, použil Pytagorovu vetu v ostrouhlom trojuholníku; **3.** približne 9,5 km; **4.** približne 360 m^2; **5.** 130 mm; **6.** áno, $v = 1{,}6$ m; **7.** približne 0,4 m; **8.** asi 5 krokov; **9.** približne 5,25 m; **10.** približne 8,5 cm, 10,4 cm; **11.** $m = 4242$, $n = 8544$; **12.** približne 15,6 cm.

Vyskúšajte sa!

1.a) nie; **b)** áno; **c)** áno; **2.** $b = 8$ cm; **3.a)** $a = 8$ cm; **b)** $b \doteq 12{,}5$ cm; **c)** $b \doteq 26{,}9$ cm; **4.a)** 64 cm; **b)** 36 cm; **c)** 75 cm; **5.** $|AP| = 20$ mm, $|BP| \doteq 73{,}8$ mm, $|CP| \doteq 80{,}5$ mm, $|DP| \doteq 38$ mm; **6.a)** približne 230; **b)** približne 432; **7.** nemožno; **8.** $u_1 \doteq 36$ cm, $u_2 \doteq 54$ cm, $u_3 \doteq 58$ cm, $u_t \doteq 62$ cm; **9.** 1,030 km = 1 030 m; **10.** 12 stôp.

4 Úprava celistvých algebrických výrazov

4.1 Celistvý výraz, sčitovanie a odčitovanie celistvých výrazov

Úlohy: **2.** $2a + 4b - 1$; **3.a)** $\frac{365}{x}$; **b)** $3d$; **c)** $\frac{k}{5}$; **d)** $z - y$; **4.a)** $2y$; **b)** $z - 4$; **c)** $\frac{a}{3}$; **d)** $t + 7$; **5.** 8; 16,8; 2,4; 9; **7.a)** $8y + 4$; **b)** $6x + 6y + 7$; **c)** $2{,}5x + 3{,}4$; **8.** $-10a$; $-2x + y$; $-9y - 2z + x$; $6 + 3b$; **9.**

$-x$	$5x - 1$	$-2x - 4$
$-2x - 6$	$4x - 7$	$-3x - 10$
$-5x + 3$	$x + 2$	$-6x - 1$

11.a) $5x^2$; **b)** $2a^3 - 4x^3 + 5a^2$; **c)** $12x^5 - 5x^3$; **12.a)** $3a^2 - 7a + 6$; **b)** $-x^2 + 3x - y^2 + 3y - 7$; **13.a)** $-$; **b)** $-$; **c)** $+$.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{x}{3}$; **b)** $7 + a$; **c)** $8p - 2$; **d)** $4w + \frac{v}{4}$; **3.** A_1; A_3; A_4; A_5; **5.** v druhom riadku a v štvrtom a piatom stĺpci; **6.a)** $8y + 4$; **b)** $6x + 6y + 7$; **c)** $15x^2 + 13y + 12$; **d)** $8y + 20$; **e)** $5x^2 + 11y + 2z$; **f)** $3x^2 + 17y + 10$; **g)** $3x^2 - 9y + 14{,}4$; **h)** $y + 27$;

7.

$-4x + 9$	$-3x - 4$	$-8x + 10$
6	$x - 7$	$-4x + 7$
$3x + 26$	$4x + 13$	$-x + 27$

8.a) $-4x - 6y$; **b)** $7z - 2x$; **c)** $-2x + 3y + z$; **d)** $5y - x^2 - x^4$; **e)** $-x + y - \frac{1}{2}x + z$; **f)** $16x - 1\frac{1}{4}x^2 - x^4$; **g)** $7x + 2y - 3 + 7x$; **h)** $2y + 2x + 4z$; **9.a)** $2{,}8x + 7{,}1$; **b)** $11a - 8$; **c)** $a + b$; **d)** $19a + 11$; **e)** $-11a + 15$; **f)** $a - 3b + 4c$; **g)** $44a - 44b + 3$; **h)** $-2ab - 5b$; **10.a)** $-5x - 4$; **b)** $-6a + 20$; **c)** $2{,}5x - 5$; **d)** $-l + 4k$; **e)** $7m + 2$; **f)** $r^2 - 2r - 2$; **g)** $-2a^2b + 6ab - 9$;

11.

$-$	$6x + 2$	$17x - 11$	$20x - 3$
$2x - 19$	$-4x - 21$	$-15x - 8$	$-18x - 16$
$-3x - 9$	$-9x - 11$	$-20x + 2$	$-23x - 6$
$-(2x - 11)$	$-8x + 9$	$-19x + 22$	$-22x + 14$

12. $-5x^3 + 5x^2 - 3x + 3$; **13.** $3a - \frac{1}{2}b - \frac{19}{5}$.

4.2 Násobenie a delenie celistvých výrazov

Úlohy: **1.a)** $30x^3$; **b)** $-16{,}8b^2$; **c)** $30x^3$; **d)** $-18a^2$; **e)** $35z^3$; **f)** $108c^4$; **2.** platí; **3.a)** $24abc$; **b)** $-4rs^2t^3$; **c)** $-0{,}15x^5y^2$; **d)** $\frac{3}{8}a^6b^3c$; **4.a)** $25x^2$; **b)** $4y^4$; **c)** $-27z^3$; **d)** $64a^6$; **e)** $0{,}01b^6$; **f)** $\frac{1}{27}c^9$; **5.a)** $x(y + z) = xy + xz$; **b)** $a(x + y + z) = ax + ay + az$; **c)** $x(a + x + b) = xa + x^2 + xb$; **6.a)** $x^2 + 3x$; **b)** $3y^2 + yz$; **c)** $26zx + 39zy - 13z^2$; **d)** $12k^2 + 3k$; **e)** $-7mn + 21m^2 - 14m$; **f)** $\frac{2}{3}xy + \frac{1}{4}xz - \frac{1}{4}x^3$; **7.a)** $21m - 7n$; **b)** $-4abc + 2c$; **c)** $-x^2y^2 + xy^3$; **d)** $8ab - 10ac$; **8.a)** $5b^2 + 10b - 5$; **b)** $b^3 + 2b^2 - b$; **c)** $2b^3 + 4b^2 - 2b$; **d)** $xb^2 + 2xb - x$; **9.a)** $2x^2$; **b)** $a^2 + a^3$; **c)** $6x^2 + x$; **d)** $-a^2 - a^3$; **10.a)** $ab + ay + bx + xy$; **b)** $ax + 2a + bx + 2b$; **c)** $a^2 - 2a + xa - 2x$; **d)** $xb - x^2 - ab + ax$; **11.a)** $a^2 + 4a + ab - b - 5$; **b)** $x^2 - 2b2 - b - 1$; **c)** $-2y^3 + 3y^2 + 3y - 2$; **d)** $-m^2n - mn^2 + 7n^2 + 5mn - 10m - 10n$; **12.** nie; **13.a)** $u = 4$; **b)** $u = -2$; **c)** $u = \frac{5}{2}$; **14.** štvorec: $a = 7$ cm; obdĺžnik: $b = 12$ cm, $c = 5$ cm; **15.** $108x - 27y$; **16.a)** $\frac{1}{2}x + y$; **b)** $3a + 1$; **c)** $a + b$; **d)** $c + e$; **e)** $3x + 1$; **f)** $y^2 + y$; **17.a)** z^4; **b)** a; **c)** 1; **d)** ab^3; **e)** ax^6y; **f)** z; **18.a)** $4y - 3x$; **b)** $-2a - b$; **c)** $3a + 1$; **d)** $-6xy + 1$.

Cvičenia: **1.a)** $30a$; **b)** $24a^3$; **c)** $0,5a^2$; **d)** $-4x^5$; **e)** z^4; **f)** $56y^6$; **g)** $20ab$; **h)** $-0,8xy^2$; **i)** $2x^2y^3z$; **2.a)** $9x^2$; **b)** $4y^2$; **c)** $\frac{1}{27}z^3$; **d)** $0,04u^4$; **e)** $\frac{125}{8}a^9$; **f)** $\frac{9}{16}b^2$; **3.a)** predsieň o $8x$; **b)** $40x^2$; **4.a)** $a + ab$; **b)** $y - x$; **c)** $3x + 3x^2$; **d)** $8a^2 + a$; **e)** $-3x^2 - 3x - 3$; **f)** $2x^2 + 2xz$; **5.a)** $30x^2$; **b)** $16b^2c$; **c)** $-2yz^3$; **d)** $72x^5y$; **e)** $21x^3y^3$; **f)** $6c^3d^4$; **6.a)** $y^2 - 2y + 2$; **b)** $2b - 3b^2$; **c)** $3x - 16$; **d)** -5; **7.a)** $a^2 + 2a - 3$; **b)** $2a^2 + 3a - 5$; **c)** $b^2 - 4$; **d)** $c^3 - 2c^2 - 5c + 10$; **e)** $2c^4 + 2c^3 - 3c - 3$; **f)** $3b^3 - 4b^2 + 15b - 20$; **8.a)** $3ac^2 - 4c^3$; **b)** $2a - 1,5\,a^3 - 2,5\,a^2b$; **c)** $6x^3y^2 - 4xy^2$; **d)** $4,8a^3b^2 - 4a^3b - 1,2ab^3 + ab$; **e)** $a^2b - \frac{29}{10}ab + b$; **f)** $0,6u^3v^3 - 2,4u^3v^2 - 1,2uv^3$; **g)** $-9y^3 + 7y^2 - 2y$; **h)** $3y^2 - 3x^2 + \frac{9}{2}xy - 2x - y$;

9.

$3a^2 - 22a + 7$	$3a^3 - a^2 + 6a - 2$	$12a^3 - 13a^2 + 3a$
$4a^3 - 28a^2 + 2a - 14$	$4a^4 + 10a^2 + 4$	$16a^4 - 12a^3 + 8a^2 - 6a$
$5a^4 - 34a^3 - 7a^2$	$5a^5 + a^4 + 10a^3 + 2a^2$	$20a^5 - 11a^4 - 3a^3$

10.a) $-18x^3 + 27x^2 - 9x$; **b)** $4x^4 - 22x^3 + 10x^2$; **c)** $60x^4 - 70x^3 - 4x^2 + 28x - 8$; **11.a)** $-16x^2 - x$; **b)** $-8x^3 + 26x^2 + 4x$; **c)** $-3x^3 + 9x^2 + 3x$; **12.a)** $a = -\frac{5}{2}$; **b)** $a = \frac{5}{2}$; **c)** $a = 1$; **13.a)** a^4; **b)** x; **c)** $-y$; **d)** $-z$; **e)** x; **f)** c; **14.a)** $8a + 5b$; **b)** $2x - y$; **c)** $z - 2v$; **d)** $2a - b$; **e)** $3x - y$; **f)** $7z + 8u$; **15.a)** $-5p + 2t$; **b)** $1 - 2b$; **c)** $x - 4y$; **d)** $-5ab^2 - 3c$; **16.a)** $7x - 16xy + 8y^2 - 32y$; **b)** $-16x^2 + 62xy - 8y$; **c)** $6x^2 + 4xy + 9x - 6y - 2y^2$; **d)** $5x + 5y - 2xy - 12$; **17.a)** $-8n^2 - 2n + 15$; **b)** $7k^3 - 10k^2 - 2k + 5$; **c)** $12x^4 - 35x^3 + 19x^2 + 31x - 35$; **d)** $6x^3 + 33xy - 10x + 21y - 36y^2$; **18.** $2x \,.\, (y + y - z) - x\,(y - z)$ alebo $x\,(y + y - z) + xy$, výsledok: $3xy - 2x$;

4.3 Úprava výrazov vynímaním pred zátvorku

Úlohy: **1.a)** $7x(3x - 1)$; **b)** $-3a^2(7a - 11)$; **c)** $9xy(5x + 2y)$; **2.a)** $4x(x + 9)$; **b)** $3a(4 - 3b)$; **c)** $-2u(4 + 5u^2)$; **d)** $20c^3(1 - 6c)$; **3.a)** $21c$; **b)** $-4ab^2$; **4.a)** $(x - 2)(5 + 4a)$; **b)** $(a + b)(x + c)$; **c)** $(3a-1)(x+y-z)$; **5.a)** $(x-1)(3+5x)$; **b)** $(8x-y)(y-4)$; **c)** $(x-6)(-2+2y)$; **d)** $(x-1)(x^2+1)$; **6.a)** $(a+1)(2x+1)$; **b)** $2(a-2)(a-c)$; **c)** $(2k-7)(d^2+1)$; **d)** $(3-a)(8s^2-1)$; **7.a)** $(a^2+b^3)(n+m)$; **b)** $(5x+y)(5a^2+3b^2)$; **c)** $(13x^2+7t^2)(7y-3z)$; **d)** $(5x+y)(2a+3b)$.

Cvičenia: **1.a)** $5x(5x^2 - 3)$; **b)** $-13v(u + 2y)$; **c)** $4bc(4a + 5d)$; **2.a)** $-(b - a)$; **b)** $-(x^2 + 4x - 1)$; **c)** $-(14 + 5c)$; **d)** $-(2xy - x^2 - y^2)$; **3.a)** $7a(3a - 1)$; **b)** $3a^2(-9a + 11)$; **c)** $6xy(7x + 3y)$; **d)** $6rs(-5 - 2rs^2)$; **4.a)** $(x - 1)(6a + 4b)$; **b)** $(3x + 2)(3 + 2a)$; **c)** $(x + y)(ab + a^2b)$; **5.a)** $(a-2)(5a-2)$; **b)** $(x+y)(z-1)$; **c)** $(2y+3x)(z-6)$; **d)** $(1-b)(a-c)$; **6.a)** $10a(2a+b-3)$; **b)** $-17x(2x + 3y + 1)$; **c)** $-3(x + 2y + 4z)$; **d)** $0,6(0,4a^2 + 0,3ab - 0,6)$; **7.a)** $(1 - x)(-2 - 2a)$; **b)** $(x+y)(4a+2b-1)$; **c)** $(1-a)(-4)$; **8. a)** $21c$; **b)** $-4ab^2$;

9.

.	$3a$	a^2
$2a^2 - 1$	$6a^3 - 3a$	$2a^4 - a^2$
$a + 2a^2$	$3a^2 + 6a^2$	$a^3 + 2a^3$
$b - 4c$	$3ab - 12\,ac$	$a^2b - 4a^2c$
$4ab + 5c + 1$	$12a^2b + 15ac + 3a$	$4a^3b + 5a^2c + a^2$

10. a) $\frac{1}{4}x(3x + y + 5y^2)$; **b)** $-x(x + 1)$; **c)** $(3x - 1)(7x + 1)$; **d)** $(6y - 5)(y^2 - x^3)$.

4.4 Úprava výrazov pomocou vzorcov $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$

Úlohy: **1.a)** $x^2 + 2xy + y^2$; **b)** $4x^2 + 4xy + y^2$; **c)** $16x^2 + 24xy + 9y^2$; **d)** $x^2 - 2xy + y^2$; **e)** $x^2 - 8xy + 16y^2$; **f)** $25x^2 - 20xy + 4y^2$; **2.a)** $4u^2 - 4uv + v^2$; **b)** $16 - 8v + v^2$; **c)** $\frac{1}{4}v^2 - 3uv + 9u^2$; **d)** $4u^2 + 0{,}8uv + 0{,}04v^2$; **4.a)** $(x + 3y)^2$; **b)** $(9x + 5y)^2$; **c)** $(3x - y)^2$; **d)** $(4x - 7y)^2$; **6.a)** $18x^2 + 12xy + 2y^2$; **b)** $0{,}1x^2 + 2x + 10$; **c)** $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$; **7.a)** $14x^2 - 30x - 22$; **b)** $5t^2 + 5s^2 - 30ts$; **8.** $v = 5$; **10.a)** $x^2 - 9$; **b)** $\frac{1}{4}y^2 - 1$; **c)** $9x^2 - y^2z^2$; **11.a)** $2s^2$; **b)** $3s$; **12.a)** $(x - 4)(x + 4)$; **b)** $(6m - y)(6m + y)$; **c)** $(y - 3a)(y + 3a)$; **d)** $(10 - a)(10 + a)$; **e)** $(2a - 7b)(2a + 7b)$; **f)** $(x^2 - y)(x^2 + y)$; **13.a)** $a^2 - 25 = (a - 5)(a + 5)$; **b)** $x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$; **c)** $16y^2 - x^2 = (4y - x)(4y + x)$; **14.a)** $(3z - 0{,}5)(3z + 0{,}5)$; **b)** $(t - v^2u)(t + v^2u)$; **c)** $(y - 1)(y + 1)$; **d)** $(8z - 3)(8z + 3)$; **15.a)** 441; **b)** 1 280; **c)** 10, 89; **d)** $-\frac{195}{16}$.

Cvičenia: **1.a)** $u^2 + 2uv + v^2$; **b)** $x^2 + 10x + 25$; **c)** $100 + 20y + y^2$; **d)** $16x^2 + 8xy + y^2$; **e)** $9a^2 + 30ac + 25c^2$; **f)** $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$; **2. a)** $u^2 - 2uv + v^2$; **b)** $x^2 - 8x + 16$; **c)** $64 - 16y + y^2$; **d)** $x^2 - 4xy + 4y^2$; **e)** $9c^2 - 30cd + 25d^2$; **f)** $a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2$; **3.a)** $1 + 2x + x^2$; **b)** $4x^2 + 4xy + y^2$; **c)** $4x^2 - 28xy + 49y^2$; **d)** $x^4 - 2x^2y + y^2$; **e)** $x^2 - 2xy + y^2$; **f)** $4x^2 + 12xz + 9z^2$; **g)** $36x^2y^2 + 12xy + 1$; **h)** $x^2y^2z^2 - 6xyz + 9$; **4.a)** $t^2 + t + \frac{1}{4}$; **b)** $m^2 - \frac{4}{3}m + \frac{4}{9}$; **c)** $\frac{a^2}{16} + ab + 4b^2$; **d)** $\frac{1}{9}d^2 - dk + \frac{9}{4}k^2$; **5.a)** $0{,}25v^2 - 1{,}2vw + 1{,}44w^2$; **b)** $0{,}36s^2 + 1{,}32st + 1{,}21t^2$; **c)** $1{,}69 + 0{,}52u + 0{,}4u^2$; **6.a)** $(x + 3y)^2$; **b)** $(a - 7)^2$; **c)** $\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z\right)^2$; **d)** $(0{,}1 + 0{,}2c)^2$; **7.** 1. riadok b^2 ; $-2x$; 9; 2. riadok $24u$; e^2; $4m^2$; 3. riadok $9v^2$; $49c^2$; $-16ca$; 4. riadok y^2; $-4kd$; $16v^2$; 5. riadok $-4ms$; $-6cd$; $4u^2$; **8.a)** $(a + 3)^2$; **b)** $(3a - 4b)^2$; **c)** $(5z + 2xy)^2$; **d)** $(2x + 4y^2)^2$; **10.a)** $a^2 - 12a + 6$; **b)** $2(c^2 + d^2)$; **c)** $13(y^2 + z^2)$; **d)** $27y^2 - 12x^2$; **11. a)** $x = -1$; **b)** $x = 3$; **c)** $x = \frac{1}{6}$; **d)** $x = 0$; **13.a)** $25 - a^2$; **b)** $b^2 - 0{,}16$; **c)** $a^2b^2 - c^2$; **d)** $\frac{4}{9}c^2 - \frac{1}{4}a^2$; **14.a)** $-d^2 - 3$; **b)** $-d^2 + 5d + 12$; **c)** $d^2 + 3$; **15.a)** $(x - 6)(x + 3)$; **b)** $(9c - 10)(9c + 10)$; **c)** $(2y - 4z)(2y + 4z)$; **d)** $(7v^2 - 1)(7v^2 + 1)$; **e)** $(d^2e + f^3)(d^2e - f^3)$; **f)** $a^3(12a - 1)(12a + 1)$; **16. a)** 368; **b)** 1 000; **c)** -2 816; **d)** 1,08; **e)** $\frac{39}{20}$; **17.a)** $(a + b)(1 + a - b)$; **b)** $(x - 1)(x + 2)$; **c)** $(x + y)(x - y - 1)$; **18.a)** $x = -3$; **b)** $x = 1$; **c)** $x = 3$; **19.** $a = 1, b = 1$.

4.5 Vzorce $(a \pm b)^3$

Úlohy: **1.a)** $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$; **b)** $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$; **c)** $y^3 + 9x^2y + 27xy^2 + y^3$; **d)** $27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$; **2.a)** $(t - 1)^3$; **b)** $(a + t)^3$; **c)** $(2t - u)^3$; **d)** $(3 + t)^3$; **3.** $35x^3 - 72x^2 + 75x - 35$; **4.a)** $(x + z)^3 = x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z$; **b)** $(2a - 1)^3 = 8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$.

Cvičenia: **1.a)** $p^3 + 3p^2 + 3p + 1$; **b)** $27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3$; **c)** $8 + 12q + 6q^2 + q^3$; **d)** $q^3 + 3q^2p + 3qp^2 - p^3$; **e)** $64 - 48q + 12q^2 - q^3$; **f)** $8p^3 - 36p^2q + 54pq^2 - 27q^3$; **2.a)** $(b - 1)^3$; **b)** $(2s - r)^3$; **c)** $(d + e)^3$; **d)** $(x - y)^3$; **3.a)** $16x^3 + 12xy^2$; **b)** $24x^2y + 2y^3$; **4. a)** $(a + z)^3$; **b)** $(2c - 1)^3$.

Vyskúšajte sa!

1.a) $\frac{3}{8}p$; **b)** $5x - 3$; **c)** $5(z - 5)$; **3.a)** $4p^2 - p - 1$; **b)** $-2a^2 - 4a - 4$; **c)** $m^2 - 5mn + 7n^2$; **4.a)** $(u - v)(a + 3)$; **b)** $4(2a - b)^2$; **c)** $-(x - 2)^2$; **d)** $(2p - 3)(2p + 3)$; **5.a)** $4a^2 - 9$; **b)** $h^3 - 4h$; **c)** $k^2 - 16$; **d)** $(x^2 - 4x + 4)$; **6.a)** $6m^2n^2$; **b)** $3ab + 2a - 3b - 2$; **c)** $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$; **d)** $a^3 + 4a^2b + 2ab^2 - b^3$; **8.** $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; **9. a)** xc; **b)** $-y$; **10.** $6x + 6$; **11.** $4y^2 + xy - \frac{x^2}{2}$.

5 Kruh, kružnica

5.1 Kružnica a kruh

Úlohy: **2.** $|SM| = |SN| = 3$ cm, $|SQ| < 3$ cm, $|SP| < 3$ cm, $|SX| < 3$ cm $|SZ| < 3$ cm; **3.a)** $X \in k$; **b)** $|SY| < 4$ cm; **c)** $|SZ| > 4$ cm.

Cvičenia: **3.** $\sphericalangle ASC$, $\sphericalangle ASD$, $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle BSD$.

5.2 Tetiva kružnice

Úlohy: **1.** priemer; **2.** sú rovnako vzdialené od bodov A, B; **3.** nevypočítateľne veľa, každý priemer kružnice; **4.** $|MP|$, $\overleftrightarrow{MP} \perp p$, $P \in \overleftrightarrow{MP} \cap p$.

Cvičenia: **2.** $v \doteq 2{,}24$ cm.

5.3 Vzájomná poloha kružnice a priamky

Úlohy: **1.** sečnica.

Cvičenia: **3.** a, b – sečnice, c – dotyčnica, d – nesečnica; **4.b)** sú rôznobežné, **c)** $o \perp AB$, na nej leží výška rovnoramenného trojuholníka ABP; **6.** nie, sú dve; **8.a)** áno; **b)** áno.

5.4 Vzájomná poloha dvoch kružníc

Cvičenia: **1.a)** nepretínajú sa; **b)** majú vonkajší dotyk v jednom bode; **c)** sústredné; **d)** majú spoločné dva body; **4.** na kružnici $k_1(S, 5\text{ cm})$; **5.** na kružnici $k_2(S, 3\text{cm})$.

5.5 Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku

Úlohy: **1.** áno; **2.** sú rovnaké; **3.** sú rovnaké; **4.** na osi; **5.** áno, sú rovnaké.

Cvičenia: **3.** leží mimo trojuholníka.

5.6 Dĺžka kružnice

Úlohy: **2.** 3,1416

Cvičenia: **1.a)** 43,96 cm; **b)** 150,72 dm; **c)** 8,164 m; **d)** 33,49 dm; **2.a)** približne 2,11 dm; **b)** približne 4 m; **c)** približne 0,87 m; **d)** približne 2,62 cm; **3.a)** 0,98 cm; **b)** 1,036 dm; **c)** 3,78 m; **d)** 0,117 6 m; **4.a)** približne 3,82 m; **b)** približne 2,39 dm; **c)** približne 0,06 m; **5.** 25 cm; **6.** približne 106 m.

5.7 Oblúk kružnice. Kruhový výsek

Cvičenia: **1.** nie; **6.a)** 6,28 mm; **b)** 25,12 mm; **c)** 97,978 mm; **d)** 192,2 mm; **7.a)** 75,36 cm; **b)** 18,84 cm; **c)** 6,28 cm; **d)** 43,96 cm.

5.8 Obsah kruhu

Cvičenia: **1.a)** 4 298,66 cm^2; **b)** 78,5 dm^2; **c)** 2,11 m^2; **d)** 38,5 m^2; **2.a)** 6 cm; **b)** približne 6,25 dm; **c)** približne 3,5 m; **d)** približne 5,5 cm; **3.** približne 85,6 dm^2; **4.** približne 38,5 dm^2; **5.a)** 7 cm; **b)** 10,5 cm; **6.** o 28,5 cm^2; **7.** OBSAH KRUHU.

5.9 Stredový uhol, Talesova kružnica

Úlohy: **1.** áno.

Cvičenia: **2.** 5 cm.

5.10 Slovné úlohy na výpočet obsahu kruhu a dĺžky kružnice

Cvičenia: **1.** asi 530,8-krát; **2.** asi o 7,85 m; **3.** $o \doteq 26$ cm, $S \doteq 301$ cm^2; **4.** približne 1 658 cm^2; **5.** približne 12 cm; **6.** približne 12,44 m^2; **7.** $o \doteq 18{,}84$ cm, $S \doteq 15{,}70$ cm^2.

Vyskúšajte sa!

9. približne 113 m; **10.a)** približne 1,375 mm; **b)** približne 0,04 mm; **11.** $|AT_1| = |AT_2| =$ $= 7{,}5$ cm; **12.** áno; **13.a)** 12,56 dm^2; **b)** 80,39 dm^2; **c)** 226,1 dm^2; **d)** 180,9 dm^2; **14.** približne 1 741 mm^2.

Matematika je učiteľkou presného a poctivého myslenia a vedie k triezvemu, ale pravdivému životu

B. Bydžovský

ROZUM DO HRSTI *(VÝSLEDKY)*

1. Hľadané štvorciferné čísla majú byť deliteľné číslom 99, to znamená, že musia byť deliteľné deviatimi a súčasne jedenástimi. Ak uvážime deliteľnosť číslom 9 (prirodzené číslo vyjadrené v desiatkovej sústave je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď ciferný súčet tohto čísla je deliteľný deviatimi), a ďalej tú skutočnosť, že zámenou prvej a druhej číslice hľadaných čísel sa ich ciferný súčet nezmení, je zrejmé, že prirodzené čísla vzniknuté z hľadaných čísel zámenou prvej a druhej číslice budú deliteľné číslom 9 a podľa podmienky úlohy číslom 91, t.j. budú deliteľné číslami 9, 7 a 13, pretože 91 = 7 . 13. Vezmime všetky štvorciferné násobky prirodzeného čísla 7 . 9 . 13 = 819. Sú to čísla 1 638, 2 457, 3 276, 4 095, 4 914, 5 733, 7 371, 8 190, 9 009 a 9 828. Ľahko sa presvedčíme (napr. použitím kritéria deliteľnosti číslom 11), že podmienkam úlohy vyhovujú práve čísla 6 138, 4 257 a 2 376.

2. a) Obsah pravouholníka $XYZT$ sa rovná

$$(8-2x)x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(4x-x^2) = 2\sqrt{3}(4-4+4x-x^2) = 2\sqrt{3}[4-(x-2)^2]$$

Tento nadobudne najväčšiu hodnotu pre $x = 2$ cm.

b) $2\sqrt{3}[4-(x-2)^2] = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}8 \,.\, 4\sqrt{3}\right)$

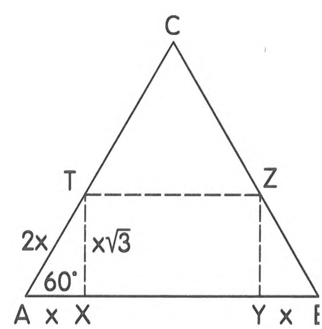
$4-(x-2)^2 = 3$

$(x-2)^2 = 1$

ak $x > 2$, dostaneme $x - 2 = 1, x = 3$

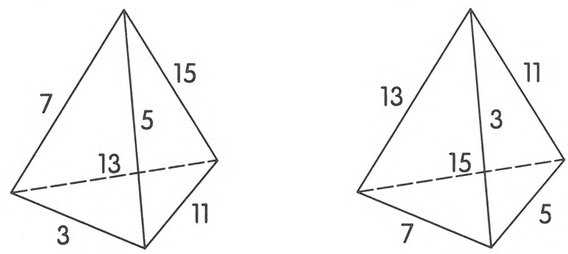
ak $x < 2$, dostaneme $2 - x = 1, x = 1$

Teda $|AX| = 3$ cm alebo 1 cm.

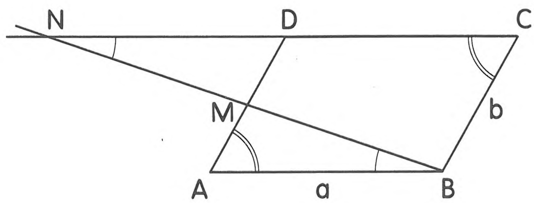


3. Pretože Juraj chce kartičky zložiť do obdĺžnika tak, aby v každom rade bol rovnaký počet kartičiek ako je počet radov, je počet kartičiek druhou mocninou prirodzeného čísla. Má ich byť viac ako 21 a menej ako 40, prichádzajú do úvahy čísla 25 a 36. Ak by ich bolo 25, bol by celkový obsah všetkých kartičiek menší ako 25 . 20 cm^2 = 500 cm^2, čo by neodpovedalo ďalšej požiadavke úlohy. Počet kartičiek teda musí byť 36. Ak by bol obsah všetkých kartičiek väčší ako 550 cm^2, musí byť obsah jednej kartičky väčší ako 550 : 36 cm^2, teda väčší ako 15 cm^2. Podobne dostaneme, že obsah kartičky musí byť menší ako 17 cm^2. Preto je obsah jednej kartičky 16 cm^2, jej rozmery sú buď 1 cm a 16 cm, alebo 2 cm a 8 cm. Kartička s rozmermi 4 cm a 4 cm by bola totiž štvorcová, nebola by obdĺžniková.

4. Hrany budeme číslovať číslami 3, 5, 7, 11, 13, 15. Pretože 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 15 = = 54 a 54 : 2 = 27. Hrany podstavy môžeme očíslovať číslami 3, 11, 13 alebo číslami 5, 7, 15. Pretože 54 : 3 = 18, jednu dvojicu mimobežných hrán môžeme očíslovať číslami 3, 15, druhú 7, 11 a tretiu číslami 5, 13. Existujú dve riešenia.



5. V rovnobežníku $ABCD$ označme $|AB| = a$, $|BC| = b$.



Pretože $|\sphericalangle BNC| = |\sphericalangle MBA|$ a $|\sphericalangle NCB| = |\sphericalangle BAM|$ platí, že $\triangle BCN \sim \triangle MAB$.
Potom

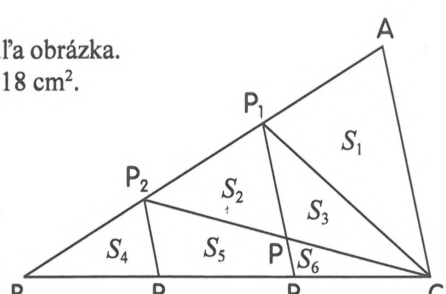
$$\frac{|CN|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|AM|} \quad \text{t.j.} \quad \frac{|CN|}{b} = \frac{a}{|AM|}$$

Z toho dostaneme $|CN| \,.\, |AM| = a \,.\, b$.

6.

Súčet dĺžok hrán pôvodnej kocky	12 . 3 cm = 36 cm
súčet dĺžok „vnútorných" hrán	12 . 3 cm = 36 cm
súčet dĺžok hrán, ktoré vzniknú na stenách	6 . 4 . 1 cm = 24 cm
Celkový súčet	96 cm
súčet plôch „vonkajších" stien	6 . 9 cm^2 – 6 cm^2 = 48 cm^2
súčet plôch „vnútorných" stien	6 . 4 . 1 cm^2 = 24 cm^2
Celkový súčet	72 cm^2

7. Obsahy častí trojuholníka ABC označte podľa obrázka.
Obsah celého trojuholníka označíme S; $S = 18$ cm^2.



Pretože body R_1, R_2 delia stranu BC na tretiny a priečky P_1R_1, P_2R_2 sú rovnobežné so stranou AC, delia body P_1, P_2 stranu AB tiež na tretiny.
Úsečky CP_1 a CP_2 delia teda trojuholník ABC na tri trojuholníky rovnakého obsahu, preto

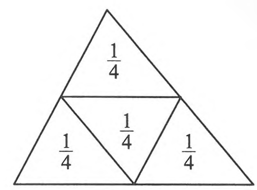
$$S_1 = S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6 = \tfrac{1}{3}S = 6 \text{ cm}^2$$

Úsečka P_2R_2 rozdelí trojuholník BCP_2 na dve časti s obsahmi S_4 a $S_5 + S_6$. Pretože R_2 je v tretine strany BC, obsah trojuholníka BR_2P_2 sa rovná tretine obsahu s BP_2C:

$$S_4 = \tfrac{1}{3}(S_4 + S_5 + S_6) = \tfrac{1}{3} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$
$$S_5 + S_6 = 4 \text{ cm}^2$$

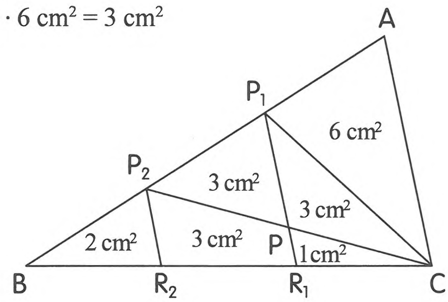
Úsečka PR_1 je stredná priečka trojuholníka P_2R_2C a zároveň PP_1 je ťažnica trojuholníka P_1P_2C. Preto obsah S_6 sa rovná štvrtine obsahu trojuholníka P_2R_2C a obsahy S_2, S_3 sa navzájom rovnajú.

$$S_6 = \tfrac{1}{4}(S_5 + S_6) = \tfrac{1}{4} \cdot 4 \text{cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$$
$$S_5 = 3 \text{ cm}^2$$



$$S_2 = S_3 = \tfrac{1}{2}(S_2 + S_3) = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2$$

Celkový výsledok znázorňuje obrázok



8. ***1. riešenie***

Úlohy tohoto typu sa najlepšie riešia „od konca“. Napíšeme počty mincí na hromadách po treťom, druhom a prvom premiestnení a nakoniec na začiatku

po 3. premiestnení	x	x	x
po 2. premiestnení	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$2x$
po 1. premiestnení	$\frac{x}{4}$	$\frac{7x}{4}$	x
na začiatku	$\frac{13x}{8}$	$\frac{7x}{8}$	$\frac{x}{2}$

Výpočet kontrolujeme pomocou súčtu všetkých troch čísel, t.j. celkového počtu mincí na troch hromadách, ktorý musí byť $3x$.

Počet x musí byť násobkom čísla 8, inak by $\frac{13x}{8}$ a $\frac{7x}{8}$ neboli celé čísla.

Súčet $x + x + x = 3x$ musí byť násobkom 3 a 8, teda násobkom 24.
Medzi číslami 150 a 190 je jediný násobok 24, je to číslo 168.
Odtiaľ dostaneme $x = 56$. Počet mincí na hromadách bol na začiatku 91, 49, 28.

2. riešenie

Úlohu možno riešiť aj „od začiatku“. Napíšeme si počty mincí na hromadách.

na začiatku

1.	2.	3.
x	y	z

po 1. premiestnení

1.	2.	3.
$x-y-z$	$2y$	$2z$

po 2. premiestnení

1.	2.	3.
$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $=3y-x-z$	$4z$

po 3. premiestnení

1.	2.	3.
$4(x-y-z)$	$2(3x-y-z)$	$4z-2(x-y-z)-$ $-(3y-x-z)=$ $=-x-z+7z$

Odtiaľ porovnaním dostaneme $7x=13y,\ 4y=7z$

Zistíme, že $x:y:z=13:7:4$

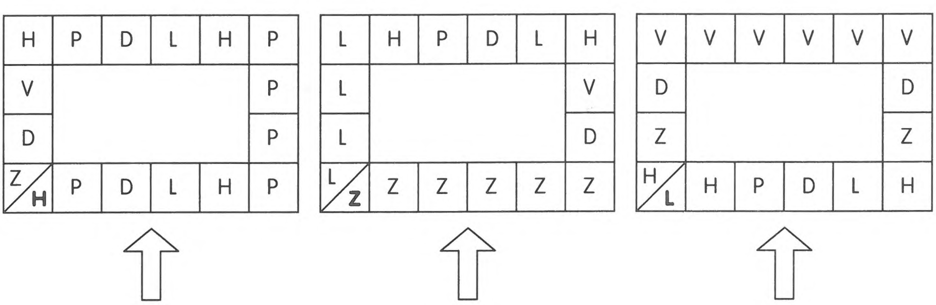
$x=13k, y=7k, z=4k$, k je celé číslo.

Počet mincí je $x+y+z=24k$

Podľa podmienky úlohy $24k=168,\ k=7$

Odtiaľ $x=91, y=49, z=28$

. Obrázok ukazuje, ako sa mení poloha šestky pri obehoch po páse.



1. obeh 2. obeh 3. obeh

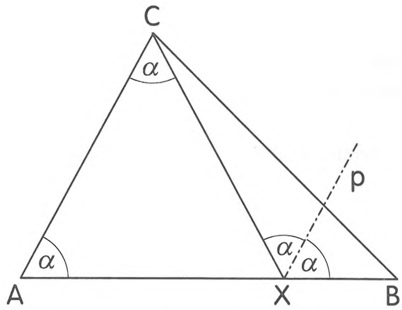
Na pás sa dívame v smere šípky, označenie je takéto:

H – hore L – vľavo Z – vzadu

D – dole P – vpravo V – vpredu

Po ukončení 1. obehu (po 16 preklopeniach) je šestka vzadu. Podobne zistíme, že po 2. obehu bude šestka vľavo a po 3. obehu opäť hore. Situácia sa teda opakuje po každých troch obehoch. Po 99. obehoch bude kocka hore. Po stom obehu – rovnako ako po prvom – bude šestka vzadu.

10. Nakreslite si obrázok:



Existenciu bodu X na strane AB, pre ktorý platí $AX \cong CX$, zaručuje podmienka $AB > BC$. Trojuholník ACX je rovnoramenný a preto

$$\sphericalangle XCA \cong \sphericalangle XAC = \alpha$$

$$\sphericalangle BXC = 2\alpha \quad \text{(vonkajší uhol } \triangle ACX\text{)}.$$

Os uhla BCX, na ktorej leží stred kružnice vpísanej trojuholníku BXC, rozpoľuje uhol BXC. Pretože

$$\tfrac{1}{2} \sphericalangle BXC = \alpha, \ \sphericalangle XCA = \alpha \ \text{(uhly striedavé)}$$

sú priamky AC a p rovnobežné.

Záznam o použití učebnice

Por. číslo	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na začiatku škol. roku	na konci škol. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.

Matematika

pre 8. ročník základných škôl
1. časť,

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MEDIA TRADE, spol. s r. o. - Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Litografie SHS, spol. s. r. o., Leškova 10, 811 05 Bratislava
Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

ISBN 80-08-03031-3

ISBN 80-08-03031-3