Matematika

pre 7. ročník základných škôl • 1. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Ondrej Šedivý • Soňa Čeretková • Mária Malperová • Ľudovít Bálint

Matematika

pre 7. ročník základných škôl

1. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autori © Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc., 1999

Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc.
(Slovenská matematická spoločnosť, sekcia JSMF)
Anna Ištoková
RNDr. Emília Petrovajová
Mgr. Ingrid Stupáková
Mgr. Eva Šišková

Illustrations © akademická maliarka Táňa Žitňanová, 1999
Design © Igor Imro, 1999

Schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky rozhodnutím
z 8. júla 1998 pod číslom 2677/98–44
ako alternatívnu učebnicu matematiky pre 7. ročník ZŠ, 1. časť.

Prvé vydanie, 1999

ISBN 80-08-02679-0

OBSAH

Jacob Bernoulli

(1654 až 1705)

Švajčiarsky matematik.
Narodil sa v Bazileji. Najskôr študoval teológiu, neskôr sa pod vplyvom G. W. Leibniza rozhodol pre matematiku. Od roku 1687 bol profesorom matematiky. Jeho vedecké výsledky podsatatne ovlyvnili predovšetkým počet pravdepodobnosti. Bol prvým matematikom z dynastie Bernoulliovcov, celkove ich bolo osem.

Milí siedmaci!

Cez prázdniny ste si oddýchli. Opäť ste v škole. Dostávate do rúk učebnicu matematiky, ktorá vám bude spoločníkom počas celého školského roka. Nájdete v nej veľa zaujímavých úloh, mnoho vyriešených príkladov a dostatok cvičení, na ktorých si môžete vyskúšať svoje vedomosti a schopnosti. Úlohy a cvičenia riešte samostatne, výsledky si porovnajte s výsledkami na konci učebnice.

Veľa úspechov a chuti do učenia.

Autori

V učebnici používame tieto symboly:

 – príklad

 – problém

 – riešenie

 – zapamätať si
– zhrnutie alebo poučka

 – úloha

 – cvičenia

 – vyskúšajte sa

 – poznámka

1 OPAKOVANIE A PREHĹBENIE UČIVA MATEMATIKY ZO 6. ROČNÍKA

1.1 Celé čísla, kladné a záporné desatinné čísla. Počtové výkony s celými a desatinnými číslami

ZOPAKUJME SI

–10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10

záporné čísla — nula — kladné čísla
prirodzené čísla

celé čísla

ÚLOHA 1

Dané sú čísla: 15, –6, 22, –59, 87, –110, 59, 110, –12.
Vypíšte z nich čísla: a) kladné,
b) záporné.
Pri riešení si pomôžte číselnou osou.

POZNÁMKA

Ukážeme si riešenie úlohy pomocou množinového zápisu.
Dané čísla môžeme zapísať aj takto:

$$M = \{15, -6, 22, -59, 87, -110, 59, 110, -12\}$$

Hovoríme, že sme zapísali ***množinu*** *M celých čísel. Množiny označujeme veľkými písmenami, napr. A, B, C, ... Pri zápise množiny používame* ***zložené zátvorky*** *{}, ktoré nazývame aj* ***množinové zátvorky.***
Množinu tých čísel z množiny M, ktoré sú ***kladné,*** *označíme písmenom A, množinu tých čísel z množiny M, ktoré sú* ***záporné,*** *označíme písmenom B.*
Platí:

$$A = \{15, 22, 87, 59, 110\}$$
$$B = \{-6, -59, -110, -12\}$$

ÚLOHA 2

Znázornite dané čísla na číselnej osi:

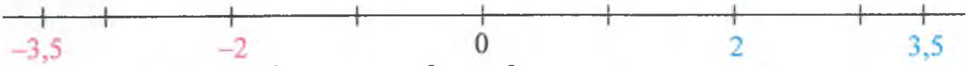
a) 0, 5, –6, 8, –1, –4, 3, 4, –2 (jednotková úsečka je 1 cm)

b) 0, 10, –20, 30, –25, 45, 50, –55 (jednotková úsečka je 1 mm)

c) 0, 1, –3,5; –1,5; 4,2; –5,9; 3,7 (jednotková úsečka je 1 cm)

d) 0, 1, –1, –0,3; 0,7; –0,65; 0,22 (jednotková úsečka je 10 cm)

ZOPAKUJME SI



opačné dvojice čísel: –2 a 2

–3,5 a 3,5

Ku každému zápornému celému (desatinnému) číslu
existuje práve jedno kladné celé (desatinné) číslo, ktoré je k nemu **opačné.**

A naopak:

Ku každému kladnému celému (desatinnému) číslu
existuje práve jedno záporné celé (desatinné) číslo, ktoré je k nemu **opačné.**

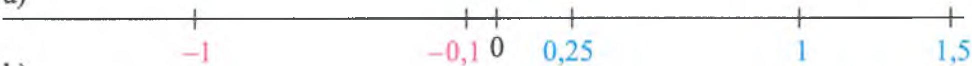
Obrazy opačných čísel ležia na opačných častiach číselnej osi
a sú **rovnako vzdialené** od obrazu čísla **nula.**

K číslu nula je opačné číslo nula.

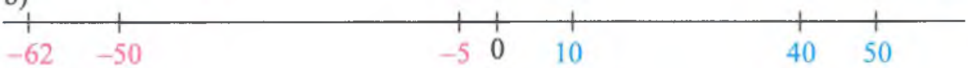
ÚLOHA 3

Prekreslite si do zošita číselnú os a nájdite pre vyznačené čísla obrazy čísel k nim opačných.

a)

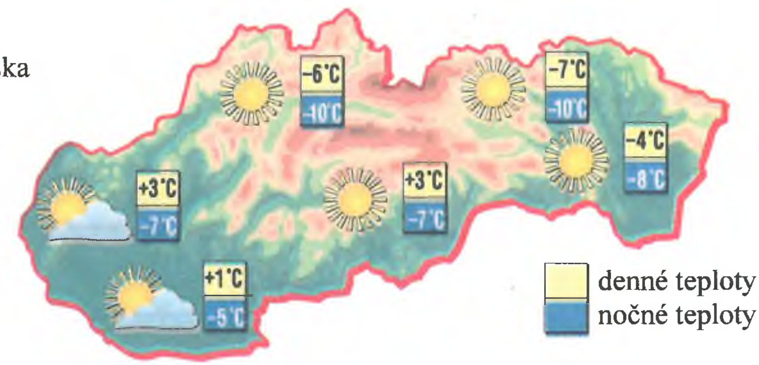


b)

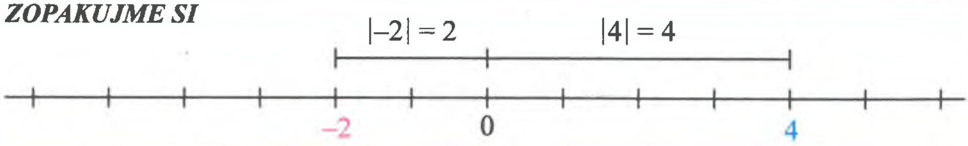


ÚLOHA 4

Z mapky Slovenska prečítajte teploty vzduchu.



ZOPAKUJME SI



Vzdialenosť obrazu čísla na číselnej osi od obrazu čísla nula nazývame **absolútna hodnota čísla.** Je to vždy **kladné číslo.**

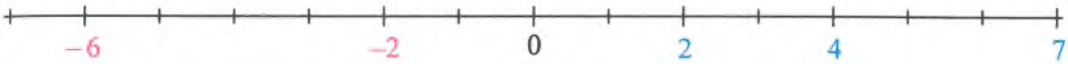
Zapisujeme: $|-2| = 2$ $\quad |6{,}5| = 6{,}5$

$|4| = 4$ $\quad |-3{,}2| = 3{,}2$

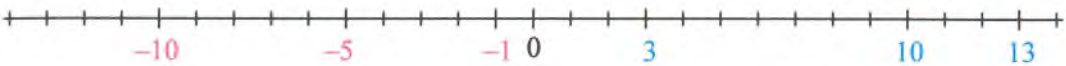
ÚLOHA 5

Určte a zapíšte absolútne hodnoty čísel vyznačených na číselnej osi.

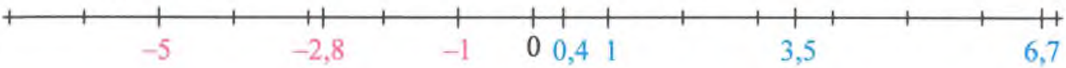
a)



b)



c)



Dve navzájom opačné celé (desatinné) čísla majú rovnaké absolútne hodnoty.

ÚLOHA 6

Určte a zapíšte absolútne hodnoty daných čísel a k nim opačných čísel.

a) 10, 6, –5, 1, 3, –12, –9, 22, –110
b) 0,23; –0,59; 11,2; –15,6; 126,8; –54,2

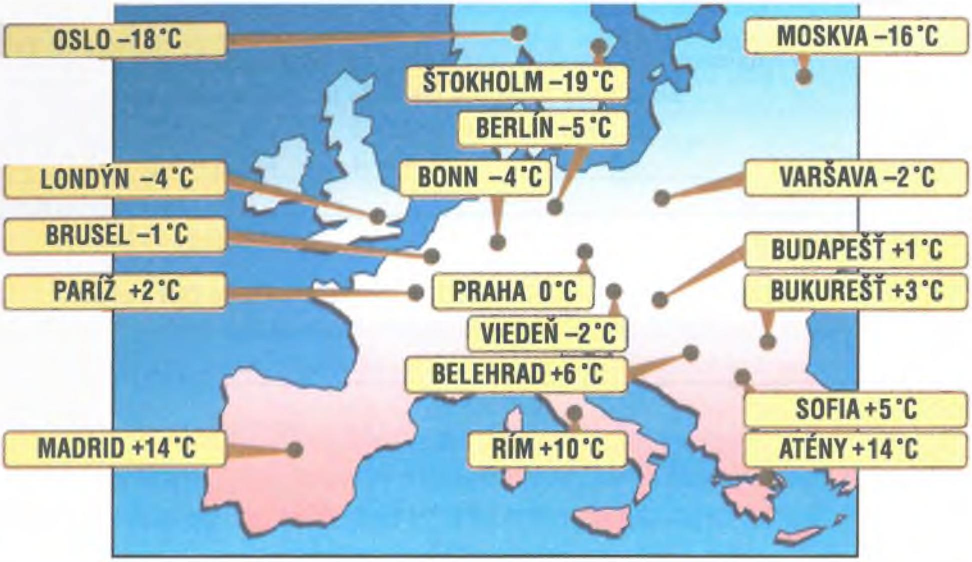
ÚLOHA 7

Na číselnej osi s jednotkovou úsečkou 1 cm nájdite obrazy všetkých čísel a, b, c, d, pre ktoré platí:

a) $|a| = 5$ $\quad |b| = 1{,}5$
b) $|c| = 2$ $\quad |d| = 2{,}8$

ÚLOHA 8

Zoraďte teploty vzduchu v európskych mestách od najnižšej po najvyššiu.



Každé **záporné** celé (desatinné) číslo **je menšie** ako **nula** aj ako každé **kladné** celé (desatinné) číslo.

ZOPAKUJME SI

–5 –3 0 3 5

$-5 < -3$ $3 < 5$

Ak pre **kladné** celé (desatinné) čísla platí nerovnosť $\boldsymbol{a < b}$, tak pre **opačné záporné** celé (desatinné) čísla $-a$, $-b$ platí nerovnosť $\boldsymbol{-a > -b}$ a obrátene.

$-5 > -12$ lebo $5 < 12$ $-7 < -4$ lebo $7 > 4$

$-1{,}1 > -1{,}5$ lebo $1{,}1 < 1{,}5$ $-11{,}5 < -9{,}2$ lebo $11{,}5 > 9{,}2$

ÚLOHA 9

Porovnajte podľa veľkosti dvojice čísel:

a) 0 a -6
b) 5 a 0
c) $-1{,}2$ a $1{,}3$
d) $10{,}4$ a $-11{,}5$
e) $-5{,}5$ a $-10{,}5$
f) $-2{,}15$ a $-22{,}72$
g) $-6{,}4$ a $-4{,}6$
h) $-0{,}15$ a $-0{,}01$

ÚLOHA 10

Z čísel $-3{,}6$; -3; $-3{,}9$; $-3{,}4$; -4; $-4{,}1$ vyberte tie, ktoré sú:

a) menšie ako $-3{,}5$

b) väčšie ako $-3{,}7$

Pomôžte si číselnou osou.

PRÍKLAD 1

Peter počíta príklady:

$-10-28$ $\qquad$ $10-28$ $\qquad$ $28+(-10)$ $\qquad$ $-28-(-10)$

RIEŠENIE

Peter zapíše:	Nahlas rozmýšľa:
$-10-28=$	čísla majú **rovnaké znamienka**
$-$	výsledok bude mať **také isté znamienko**
$=-(10+28)=$	čísla **sčítam**
$=-38$	výsledok
$10-28=$	čísla majú **rôzne znamienka,** lebo $10=+10$
$-$	**výsledok** má také znamienko ako číslo, ktoré je po odmyslení znamienok **väčšie**
$=-(28-10)=$	**odčítam** teda **menšie** číslo od **väčšieho**
$=-18$	výsledok
$28+(-10)=$	**pričítame záporné** číslo
$=28-10=$	**sčítanie** môžem **zameniť za odčítanie**
$=18$	výsledok
$-28-(-10)=$	**odčítať záporné** číslo je to isté,
$=-28+10=$	ako **pričítať kladné** číslo
$=-(28-10)=$	výsledok má znamienko mínus, lebo $28>10$
	odčítam menšie číslo **od väčšieho**
$=-18$	výsledok

Pre sčítanie a odčítanie celých (desatinných), kladných a záporných čísel platia tieto pravidlá:

$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$
$$a+(-b)=a-b$$
$$a-(-b)=a+b$$

ÚLOHA 11

Vypočítajte dvojice príkladov a porovnajte výsledky:

a) $25 + 65$ $\quad 25 - (-65)$

b) $-147 + 122$ $\quad -147 - (-122)$

c) $205 - 128$ $\quad 205 + (-128)$

d) $-500 - 647$ $\quad -500 - (+647)$

ÚLOHA 12

Aká je výsledná teplota vzduchu, ak ráno je –5 °C a teplota sa počas dňa zvýši o:

a) 10 °C b) 3 °C c) 1,2 °C d) 5,1 °C e) 0 °C ?

ÚLOHA 13

Upravte dvojice príkladov tak, aby mali iba jedno znamienko a vypočítajte ich. Využite výsledok prvého príkladu na určenie výsledku druhého príkladu.

a) $15 + (-9)$ $\quad 1{,}5 + (-0{,}9)$

b) $33 - (-44)$ $\quad 3{,}3 - (-4{,}4)$

c) $70 + (-28)$ $\quad 0{,}07 + (-0{,}028)$

ÚLOHA 14

Určte najskôr znamienko výsledku, a potom vypočítajte:

a)
$280 - 324$
$-280 + 324$
$-280 - (-324)$
$280 - (-324)$

b)
$1{,}249 + (-3)$
$1{,}249 - (-3)$
$-1{,}249 - (-3)$
$-1{,}249 - 3$

c)
$-0{,}487 - (-1{,}25)$
$-0{,}487 - (+1{,}25)$
$-0{,}487 + (-1{,}25)$
$0{,}487 + (-1{,}25)$

ÚLOHA 15

Vypočítajte.
Pokúste sa čísla výhodne združiť alebo zameniť, aby ste si počítanie uľahčili.

a) $12 + 25 - 22 + 75 - 55 + 22 - 100$

b) $1{,}5 - 4{,}3 + 10{,}6 - 22{,}5 + 2{,}3 - 5{,}8 + 11{,}4$

ÚLOHA 16

Ak jeden sčítanec je 5 a druhý –3,25; čo musí platiť o treťom sčítancovi, aby súčet všetkých troch sčítancov bol

a) kladný b) záporný c) nula?

Znamienkové pravidlá pre násobenie a delenie kladných a záporných celých (desatinných) čísel:

násobenie	$+ \cdot + = +$	delenie	$+ : + = +$
	$+ \cdot - = -$		$+ : - = -$
	$- \cdot + = -$		$- : + = -$
	$- \cdot - = +$		$- : - = +$

ÚLOHA 17

Vynásobte. Povedzte najskôr, aké znamienko bude mať výsledok.

a) 18 . 15	b) 2,5 . 13	c) 0,6 . 2,4
18 . (–15)	–2,5 . 13	–0,6 . (–2,4)
–18 . 15	2,5 . (–13)	–0,6 . 2,4
–18 . (–15)	–2,5 . (–13)	0,6 . (–2,4)

ÚLOHA 18

Určte podiely a urobte skúšku správnosti. Povedzte najskôr, aké znamienko bude mať výsledok:

a) 684 : (–1)	b) 3,5 : 0,1	c) 8,4 : (–12)
–684 : 10	–3,5 : (–0,01)	84 : (–1,2)
–684 : (–100)	–3,5 : 0,001	–0,84 : 0,12
–684 : 1 000	3,5 : (–1)	–8,4 : (–0,12)

ÚLOHA 19

Vydeľte na dve desatinné miesta, určte zvyšok a urobte skúšku správnosti:

a) 55 : (–15)	c) 0,15 : 64	e) –1,22 : (–0,08)
b) –102 : 305	d) –4,8 : (–14)	f) –55,5 : 4,44

ÚLOHA 20

Určte, aké znamienko majú súčiny, a potom čísla vynásobte. Pokúste sa výhodne využiť pravidlá o zámene a združovaní činiteľov.

a) 7 . (–6) . 5 . (–0,4) . (–1)	c) 11 . 0,1 . (–0,001) . (–100)
b) –3 . 0,3 . (–0,03) . 3,33	d) –4,5 . 0 . 5,2 . (–24,5)

CVIČENIA

1. Na vhodne zvolenej časti číselnej osi nájdite obrazy čísel:

a) 269, 251, 280, 240, 275

b) 0,45; 1,15; 0,8; 0,95; 0,23

c) –11, –15, –14, –17, –21

.... **2.** Medzi ktorými dvoma za sebou idúcimi celými číslami leží číslo:

a) 8,35	c) 47,3	e) –1 115,3
b) –8,35	d) –47,3	f) 1 115,3

Pomôžte si číselnou osou.

.... **3.** Zapíšte symbolicky:

a) číslo *x* je väčšie ako nula	d) číslo *b* je kladné
b) číslo *a* je menšie ako –10	e) číslo *z* je záporné
c) číslo *y* je väčšie ako –1,5	f) číslo *c* je menšie ako nula

.... **4.** Určte, či je celé číslo x kladné alebo záporné, ak platí:

a) $x > 0$ c) $x > 18$ e) $x > -1$ g) $-5 > x$

b) $x < 0$ d) $x < -10$ f) $x > 1$ h) $12 < x$

.... **5.** Napíšte aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo, pre ktoré platí:

a) $a < 4$ b) $b < 1$ c) $c > -0{,}2$ d) $d > -0{,}02$

Pomôžte si číselnou osou.

.... **6.** Určte súčet a rozdiel čísel. (Odčítajte menšie číslo od väčšieho).

a) 48,2 a 10,23 c) –12,3 a –13,2

b) 15 a –154 d) –151,4 a 504,66

.... **7.** Vypočítajte:

a) $1\,236 + 547 - 200 - 47 + 64$

b) $-55 + 278 + (-38) + (-78) - (-54) + 39$

c) $-9 + 2{,}6 + 11 - 1{,}4 + 10{,}4 - 8{,}6$

.... **8.** Vynásobte:

a) $0{,}25 \,.\, 0{,}4$; $0{,}05 \,.\, 0{,}8$; $0{,}008 \,.\, 23$; $0{,}09 \,.\, 0{,}02$

b) $0{,}6 \,.\, 11$; $0{,}9 \,.\, 1{,}05$; $5 \,.\, 1{,}5$; $0{,}002 \,.\, 2{,}57$

.... **9.** Vypočítajte. Môžete pri určovaní súčinu na poslednom riadku použiť predchádzajúce výsledky?

a) $254 \,.\, 7$ b) $30{,}4 \,.\, 2{,}4$

$254 \,.\, 18$ $30{,}4 \,.\, 2{,}5$

$254 \,.\, 25$ $30{,}4 \,.\, 4{,}9$

.... **10.** Vydeľte na jedno desatinné miesto:

a) $17{,}79 : 0{,}8$ b) $113{,}28 : (-3{,}48)$ c) $-2{,}295 : 0{,}52$

.... **11.** Rozhodnite najskôr, ktorý z dvoch podielov bude väčší a ktorý menší ako delenec, a potom vypočítajte:

a) $684 : 6$ $684 : 0{,}6$ b) $17{,}82 : 0{,}9$ $17{,}2 : 1{,}1$

.... **12.** Nájdite číslo, ktoré je:

a) o 5,6 väčšie ako 4,5 c) 5,6-krát väčšie ako 36,4

b) o 5,6 menšie ako 4,5 d) 5,6-krát menšie ako 36,4

.... **13.** Doplňte do tabuľky správne čísla:

x	74	11,1	29,6
$x + 0{,}37$			
$x - 0{,}37$			
$x \,.\, 0{,}37$			
$x : 0{,}37$			

.... **14.** Vynásobte:

a) 0,02 . 0,4 . (–0,11)

b) (–2) . 3 . (–4) . (–5)

c) 5,8 . (–2,5) . 1,11 . (–3,4)

d) –0,6 . (–0,7) . 0,8 . (–0,9)

.... **15.** Vydeľte na dve desatinné miesta:

a) 122 : (–4) b) –4,8 : 7 c) 0,45 : (–0,6) d) –22,2 : (–33,3)

.... **16.** Odpíšte do zošita a doplňte tabuľku:

a	40	–330	700	–36	–1	–8
b	–10	33	–70	–6	0,2	–16
c	5	–11	–35	–0,2	0,5	100
$a : b$						
$b - c$						
$b : c$						
$a + c$						
$a : c$						

.... **17.** Zapíšte a vypočítajte:

a) súčet súčtu a podielu čísel 12 a –3,

b) rozdiel podielu a súčinu čísel 0,1 a 4,55.

.... **18.** Doplňte a uveďte príklad:

a) Každé kladné číslo je väčšie ako číslo ... .

b) Podiel záporného a kladného čísla je číslo ... .

c) Rozdiel menšieho a väčšieho čísla je číslo ... .

d) Súčet dvoch záporných čísel je číslo ... .

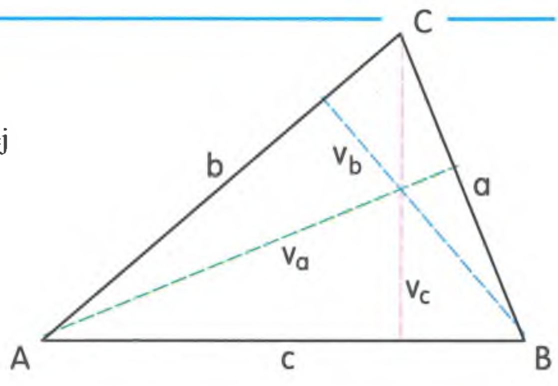
e) Číslo, ktorým nikdy nedelíme je číslo ... .

f) Ak delíme menšie číslo väčším, podiel je vždy ... ako ... .

1.2 Obsah a obvod trojuholníka, rovnobežníka a lichobežníka

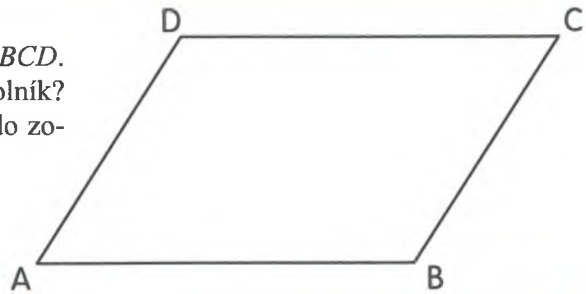
ÚLOHA 1

Na obrázku je trojuholník ABC. Určte, ktorá výška prislúcha každej strane daného trojuholníka.



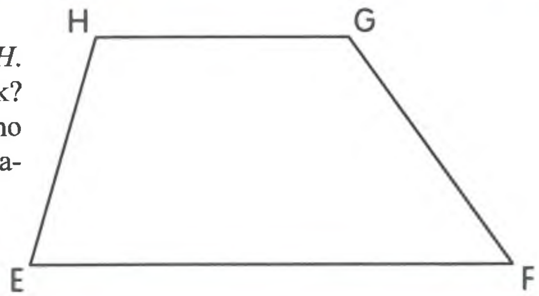
ÚLOHA 2

Na obrázku je štvoruholník *ABCD*. Ako nazývame tento štvoruholník? Narysujte štvoruholník *ABCD* do zošita a zostrojte jeho výšky.

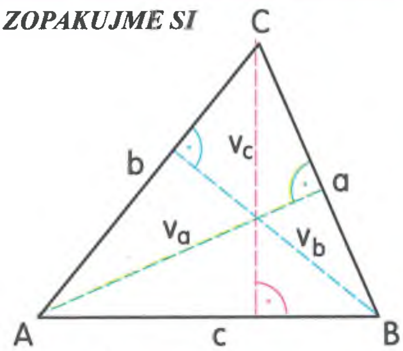


ÚLOHA 3

Na obrázku je štvoruholník *EFGH*. Ako nazývame tento štvoruholník? Pomenujte jeho strany. Narysujte ho do zošita a zostrojte výšku na stranu *EF*.



ZOPAKUJME SI



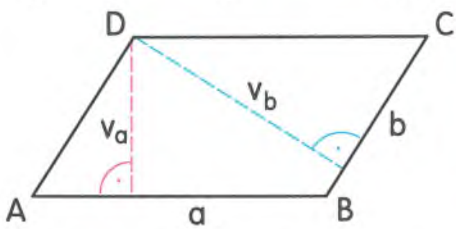
o – obvod *S* – obsah

$$o = a + b + c$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}(a \cdot v_a) = \frac{1}{2}(b \cdot v_b) = \frac{1}{2}(c \cdot v_c)$$

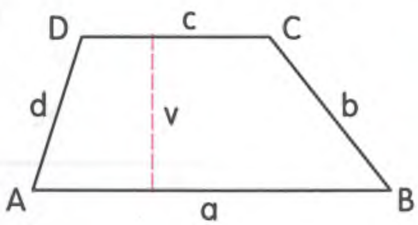
trojuholník



$$o = 2(a + b)$$

$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

rovnobežník



$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$$

lichobežník

ÚLOHA 4

Doplňte tabuľku

mm	cm	dm	m
1 225			
	526		
			2
		11	

ÚLOHA 5

Doplňte tabuľku

dm	m	km
		1,2
26 000		
	560	

ÚLOHA 6

Doplňte tabuľku

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2			
	156		
		12 000	
			100 000

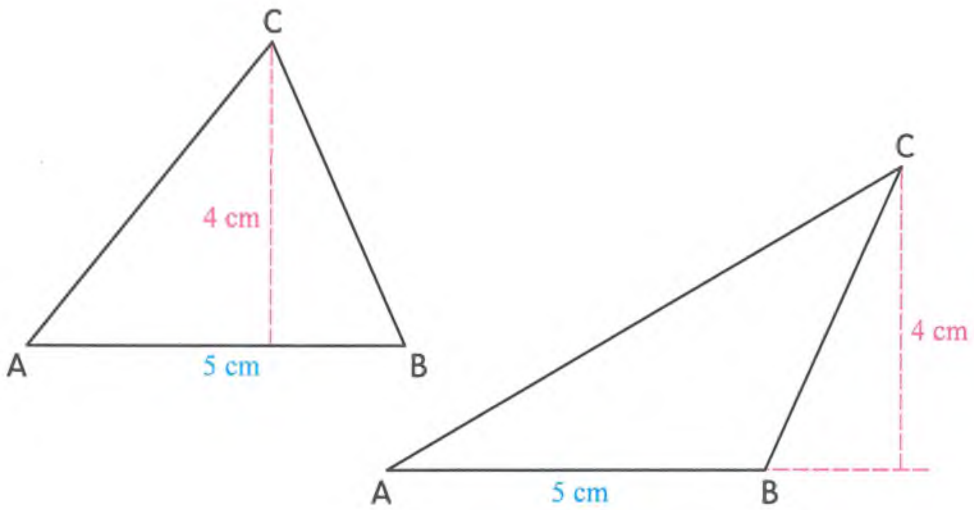
ÚLOHA 7

Doplňte tabuľku

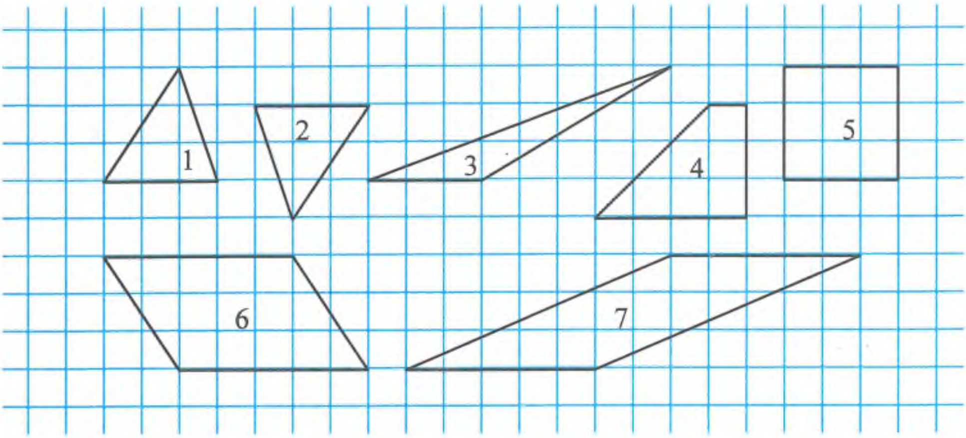
m^2	a	ha
		1,2
	540	
1 000		

ÚLOHA 8

Na obrázku sú narysované dva trojuholníky. Čo platí o ich obsahoch?



ÚLOHA 9

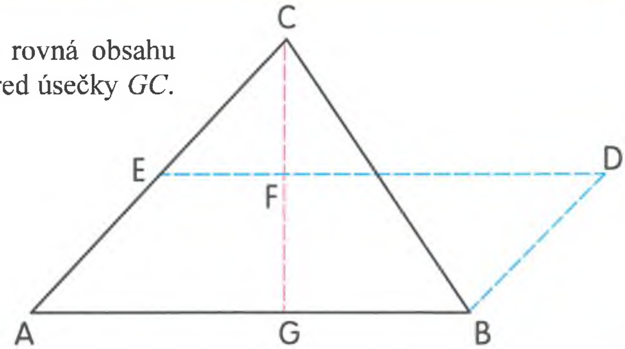


Do zošita si nakreslite tabuľku a vpíšte do nej obsahy jednotlivých útvarov znázornených v štvorcovej sieti. Výsledky oddôvodnite!

	1	2	3	4	5	6	7
S							

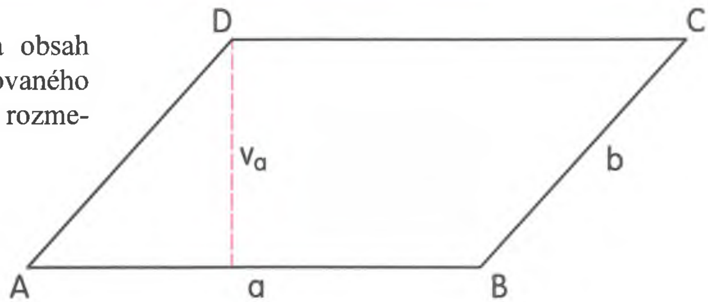
ÚLOHA 10

Obsah trojuholníka *ABC* sa rovná obsahu rovnobežníka *ABDE*; *F* je stred úsečky *GC*. Odôvodnite!



PRÍKLAD 1

Vypočítajte obvod a obsah rovnobežníka, narysovaného na obrázku. Potrebné rozmery zistite z obrázka.



RIEŠENIE

Najskôr odmeriame dĺžky strán a, b a výšku v_a.
Odmeraním sme zistili, že $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $v_a = 3$ cm.

$a = 6$ cm
$b = 4$ cm
$o = \ldots$ cm

$o = 2(a + b)$

$o = 2(6 + 4)$
$o = 20$

$o = 20$ cm

$a = 6$ cm
$v_a = 3$ cm
$S = \ldots$ cm^2

$S = a \,.\, v_a$

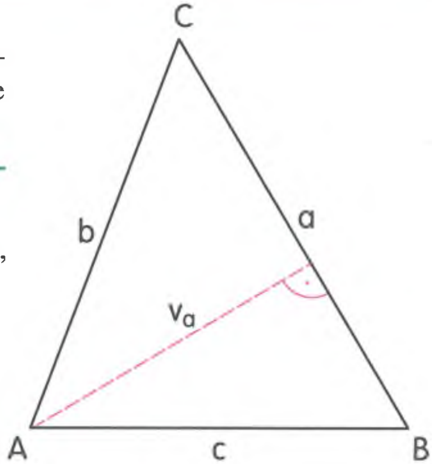
$S = 6 \,.\, 3$
$S = 18$

$S = 18$ cm^2.

Odpoveď: Obvod rovnobežníka je 20 cm a jeho obsah je 18 cm^2.

PRÍKLAD 2

Vypočítaje obvod a obsah $\triangle\, ABC$ narysovaného na obrázku. Potrebné rozmery zistite z obrázka.



RIEŠENIE

Odmeraním zistíme, že $a = 6$ cm, $b = 5{,}5$ cm, $c = 5$ cm, $v_a = 4{,}2$ cm.

$a = 6$ cm
$b = 5{,}5$ cm
$c = 5$ cm
$o = \ldots$ cm

$o = a + b + c$
$o = 6 + 5{,}5 + 5$
$o = 16{,}5$

$o = 16{,}5$ cm

$a = 6$ cm
$v_a = 4{,}2$ cm
$S = \ldots$ cm^2

$S = \dfrac{a \,.\, v_a}{2}$

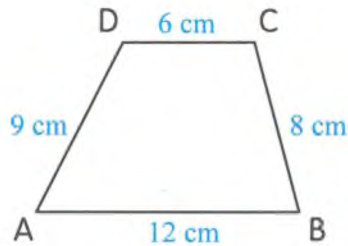
$S = \dfrac{6 \,.\, 4{,}2}{2}$
$S = 12{,}6$

$S = 12{,}6$ cm^2

Odpoveď: Obvod $\triangle\, ABC$ je 16,5 cm a obsah $\triangle\, ABC$ je 12,6 cm^2.

PRÍKLAD 3

Vypočítajte obvod lichobežníka s rozmermi $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 6$ cm, $d = 9$ cm.



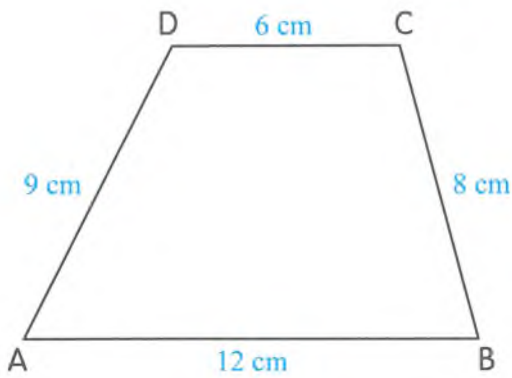
RIEŠENIE

$a = 12$ cm
$b = 8$ cm
$c = 6$ cm
$d = 9$ cm
$o = \ldots$ cm

$o = a + b + c + d$

$o = 12 + 8 + 6 + 9$
$o = 35$

$o = 35$ cm



Odpoveď: Obvod lichobežníka je 35 cm.

ÚLOHA 11

Vypočítajte obsah lichobežníka, ak dĺžky základní sú $a = 8{,}5$ dm, $c = 40$ cm a príslušná výška $v = 6{,}5$ dm.

CVIČENIA

1. Vypočítajte obsah trojuholníka, ak je daná dĺžka jednej jeho strany a dĺžka príslušnej výšky:
a) $a = 46$ mm, $v_a = 65$ mm
b) $b = 6{,}8$ cm, $v_b = 4{,}5$ cm
c) $c = 5{,}5$ dm, $v_c = 7{,}2$ dm

………… **2.** Vypočítajte obvod trojuholníka, ak sú dané dĺžky jeho strán:
a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm
b) $a = 6{,}2$ m, $b = 4{,}7$ m, $c = 8$ m
c) $c = 2{,}5$ dm, $b = 2{,}5$ dm, $c = 3$ dm

………… **3.** Vypočítajte obvod rovnobežníka, ktorého strany majú dĺžky:
a) $a = 12$ dm, $b = 5$ dm
b) $a = 31{,}8$ cm, $b = 14{,}3$ dm
c) $a = 6{,}2$ m, $b = 20$ dm

………… **4.** Vypočítajte obsah rovnobežníka, ak je daná dĺžka strany a k nej príslušná výška:
a) $a = 7{,}6$ cm, $v_a = 4{,}7$ cm
b) $a = 6{,}2$ m, $v_a = 35$ dm
c) $a = 4{,}5$ dm, $v_b = 5{,}2$ dm

………… **5.** Daný je $\triangle ABC$ so stranou $c = 5$ cm, výškou $v_c = 4$ cm a uhlom $\alpha = 75°$. Aká musí byť výška v_p $\triangle MNP$, ktorý je daný stranou $p = 5$ cm a $|\sphericalangle NMP| = 60°$ tak, aby sa jeho obsah rovnal obsahu $\triangle ABC$?

.... **6.** Vypočítajte obsah kosoštvorca $ABCD$, v ktorom $|AB| = a = 7{,}4$ cm a výška v zostrojená na túto stranu má dĺžku 5,5 cm.

.... **7.** Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny majú dĺžky:
a) $a = 64$ mm, $b = 25$ mm
b) $a = 5{,}6$ cm, $b = 6{,}5$ cm
c) $a = 4{,}8$ m, $b = 7{,}5$ m

.... **8.** Vypočítajte obsah rovnoramenného trojuholníka, ak je daná dĺžka základne c a príslušná výška v_c:
a) $c = 8{,}4$ cm, $v_c = 7{,}5$ cm
b) $c = 96$ mm, $v_c = 55$ mm
c) $c = 6{,}5$ m, $v_c = 7{,}2$ m

.... **9.** Rovnobežník má obvod 20,4 m. Jedna jeho strana má dĺžku 5,5 m. Vypočítajte dĺžku druhej strany.

.... **10.** Rovnobežník má obsah 9,66 m^2 a výšku 2,3 m. Vypočítajte dĺžku príslušnej strany.

.... **11.** Vypočítajte obvod lichobežníka, ktorého základne a, c a ramená b, d majú dĺžky:
a) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm, $d = 0{,}4$ dm
b) $a = 53$ cm, $b = 4$ dm, $c = 2{,}7$ dm, $d = 3$ dm
c) $a = 12$ m, $b = 6$ m, $c = 7$ m, $d = 70$ dm

.... **12.** Vypočítajte obsah lichobežníka, ktorého základne majú dĺžky 55 mm, 35 mm a výška má dĺžku 40 mm.

.... **13.** Vypočítajte spotrebu farby na tlač 10 000 plagátov, ktorých potlačená plocha má tvar rovnoramenného trojuholníka s dĺžkou strany 40 cm a príslušnou výškou 24 cm. Spotreba farby je 1 kg na 22 m^2 potlačenej plochy.

.... **14.** Mozaiková kachlička má tvar rovnoramenného trojuholníka, ktorého základňa má dĺžku 2 cm a k nej príslušná výška má dĺžku 4 cm. Najmenej koľko takých trojuholníkov treba na pokrytie steny s obsahom 1,5 m^2?

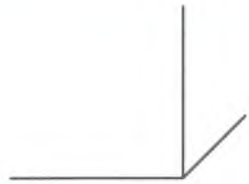
1.3 Objem a povrch kvádra a kocky

ÚLOHA 1

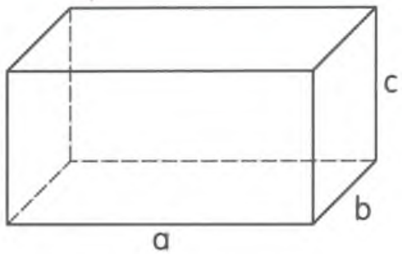
Narysujte vo voľnom rovnobežnom premietaní v nadhľade sprava obraz kvádra, ktorého rozmery sú $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm.
Kváder je v priečelnej polohe.

ÚLOHA 2

Dokreslite do zošita obraz kocky, keď poznáte obrazy troch hrán.



ZOPAKUJME SI

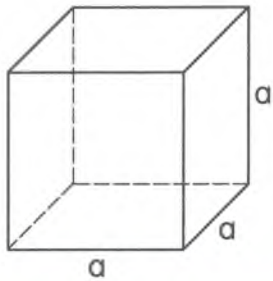


V – objem S – povrch

$V = a \cdot b \cdot c$

$S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

kváder



$V = a \cdot a \cdot a$

$V = a^3$

$S = 6 \cdot a \cdot a$

$S = 6 \cdot a^2$

kocka

Povrch telies meriame v štvorcových jednotkách.
Objem telies meriame v kubických jednotkách.

ÚLOHA 3

Premeňte: a) 3 m^3 na dm^3 b) 4,2 dm^3 na cm^3 c) 5,8 cm^3 na mm^3

ÚLOHA 4

Premeňte: a) 327 dm^3 na m^3 b) 135 cm^3 na dm^3 c) 1 680 mm^3 na cm^3

ÚLOHA 5

Doplňte tabuľku

m^3	dm^3	l	hl
2			
			3
		1 500	
	2 500		

ÚLOHA 6

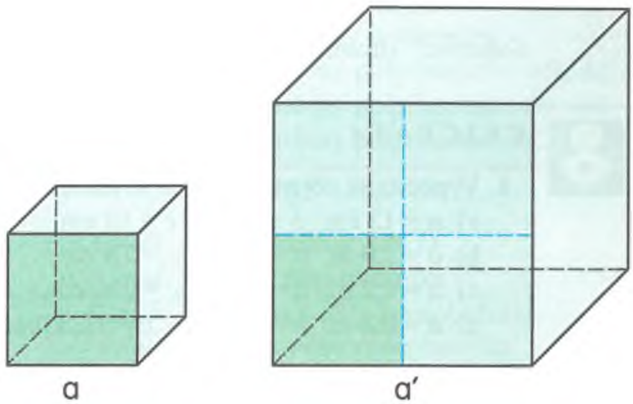
Vypočítajte objem vodnej nádrže tvaru kvádra s rozmermi a = 6,5 m, b = 4,8 m, c = 2,8 m.

PRÍKLAD 1

Koľkokrát sa zväčší povrch kocky, ak sa dĺžka jej hrany zväčší dvakrát?

RIEŠENIE

Príklad začala riešiť Lucia:



Navrhla označiť dĺžku hrany prvej kocky a, jej povrch označila S. Dĺžku hrany druhej kocky označila a', jej povrch označila S'. Hrana druhej kocky má dĺžku a' a je dvojnásobkom dĺžky hrany prvej kocky, teda

$$a' = 2 \,.\, a$$

Pre povrch kocky platí: $S = 6 \,.\, a \,.\, a$

Povrch druhej kocky: $S' = 6 \,.\, a' \,.\, a' = 6 \,.\, (2 \,.\, a) \,.\, (2 \,.\, a) = 6 \,.\, 4 \,.\, a \,.\, a =$
$= 4 \,.\, (6 \,.\, a \,.\, a) = 4 \,.\, S$

Odpoveď: Ak sa dĺžka hrany kocky zväčší dvakrát, povrch kocky sa zväčší štyrikrát.

ÚLOHA 7

Koľkokrát sa zväčší objem kocky, ak sa zväčší dĺžka jej hrany dvakrát?

PRÍKLAD 2

Vypočítajte hmotnosť plnej kocky zhotovenej zo smrekového dreva, ak dĺžka hrany kocky je 2 dm. 1 dm^3 smrekového dreva má hmotnosť 0,55 kg.

RIEŠENIE

Roman vysvetľuje: Najskôr vypočítame objem kocky, pretože z fyziky vieme, že hmotnosť telesa sa rovná súčinu jeho objemu a hustoty (ρ).

$a = 2\ \text{dm}$
$V = \dots\ \text{dm}^3$

$V = a\,.\,a\,.\,a$

$V = 2\,.\,2\,.\,2$
$V = 8$

$V = 8\ \text{dm}^3$

$V = 8\ \text{dm}^3$
$\rho = 0{,}55\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$
$m = \dots\ \text{kg}$

$m = V\,.\,\rho$
$m = 8\,.\,0{,}55$
$m = 4{,}4$

$m = 4{,}4\ \text{kg}$

Odpoveď: Hmotnosť kocky zo smrekového dreva je 4,4 kg.

CVIČENIA

1. Vypočítajte objem a povrch kvádra, ktorý má rozmery:
a) $a = 12$ cm, $b = 6$ cm, $c = 10$ cm
b) $a = 2{,}6$ m, $b = 3{,}2$ m, $c = 7{,}4$ m
c) $a = 1{,}2$ m, $b = 8$ dm, $c = 220$ cm
d) $a = 0{,}8$ m, $b = 120$ cm, $c = 12{,}5$ dm

.... **2.** Vypočítajte objem a povrch kocky, ktorej hrana má dĺžku:
a) 5 m; b) 32 cm; c) 4,5 dm; d) 74 mm.

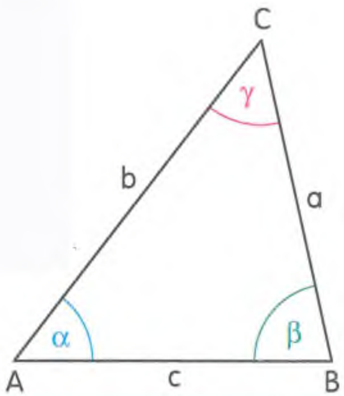
.... **3.** Aká je hmotnosť stĺpa z dubového dreva, ktorý má tvar kvádra s rozmermi 15 cm, 20 cm, 3 m. 1 m^3 dubového dreva má hmotnosť 800 kg.

.... **4.** Murovaný pilier, ktorého podstava má rozmery 30 cm a 45 cm, má výšku 3,25 m. Vypočítajte jeho objem, povrch a potrebný počet tehál na jeho postavenie, ak na 1 m^3 muriva treba 400 kusov tehál.

.... **5.** Vypočítajte hmotnosť kocky s hranou dĺžky 10 cm
vyrobenej z a) dubového dreva ($\rho = 0{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$),
b) betónu ($\rho = 2{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$),
c) železa ($\rho = 7{,}25\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

1.4 Konštrukcia trojuholníka, rovnobežníka a lichobežníka

ZOPAKUJME SI



$\triangle ABC$ – trojuholník ABC

$\left.\begin{aligned} AB &= c \\ BC &= a \\ CA &= b \end{aligned}\right\}$ strany trojuholníka

$\alpha = \sphericalangle BAC$ – vnútorný uhol pri vrchole A

$\beta = \sphericalangle ABC$ – vnútorný uhol pri vrchole B

$\gamma = \sphericalangle BCA$ – vnútorný uhol pri vrchole C

α, β – priľahlé uhly k strane c

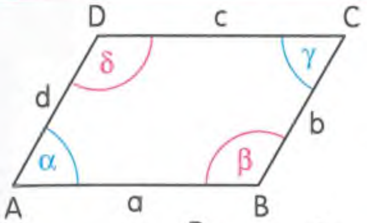
β, γ – priľahlé uhly k strane a

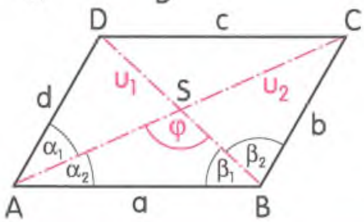
γ, α – priľahlé uhly k strane b

α – uhol určený polpriamkami AB, AC

β – uhol určený polpriamkami BA, BC

γ – uhol určený polpriamkami CA, CB





$\square ABCD$ – rovnobežník $ABCD$

a, b, c, d – strany rovnobežníka

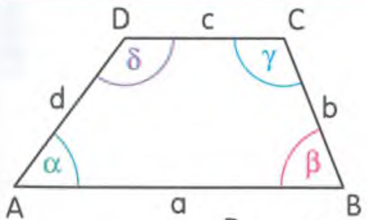
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – vnútorné uhly rovnobežníka

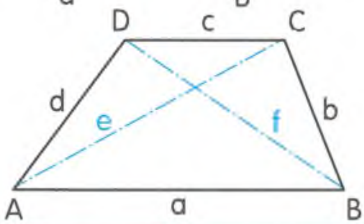
u_1, u_2 – uhlopriečky rovnobežníka

S – priesečník uhlopriečok

$\varphi = \sphericalangle ASB$ – uhol uhlopriečok

V rovnobežníku $ABCD$ platí:
$AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$
$|AB| = |DC|$, $|AD| = |BC|$





$\triangle ABCD$ – lichobežník $ABCD$

A, B, C, D – vrcholy

a, b, c, d – strany

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – vnútorné uhly

e, f – uhlopriečky

a, c – základne (sú rovnobežné) $AB \parallel DC$

b, d – ramená (sú rôznobežné) $AD \nparallel BC$

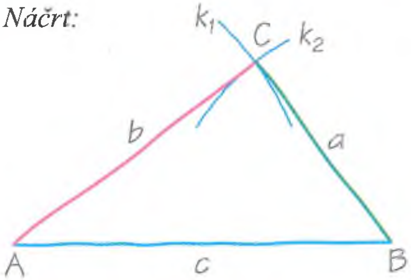
PRÍKLAD 1

Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm.

RIEŠENIE

Načrtneme si $\triangle ABC$ a farebne vyznačíme strany, ktorých dĺžky poznáme.

Náčrt:



Rozbor:

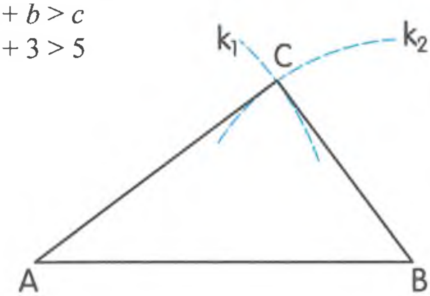
1. Strana AB má dĺžku 5 cm.
2. Bod C leží na kružnici k_1 opísanej zo stredu A s polomerom $b = 4$ cm.
3. Bod C leží aj na kružnici k_2 opísanej zo stredu B s polomerom $a = 3$ cm.
4. Bod C je priesečník kružníc k_1 a k_2.

Vieme zostrojiť všetky vrcholy trojuholníka.
Z daných prvkov môžeme trojuholník zostrojiť, lebo je splnená trojuholníková nerovnosť:

$$a + b > c$$
$$4 + 3 > 5$$

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. k_1; $k_1(A, 4\text{ cm})$
3. k_2; $k_2(B, 3\text{ cm})$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle ABC$



Skúška:

Úsečka AB má veľkosť 5 cm, úsečka AC má veľkosť 4 cm lebo bod C leží na kružnici $k_1(A, 4\text{ cm})$, úsečka BC má veľkosť 3 cm lebo bod C leží na kružnici $k_2(B, 3\text{ cm})$. Teda narysovaný trojuholník spĺňa podmienky úlohy.

ÚLOHA 1

Zostrojte $\triangle PQR$, v ktorom $q = 4$ cm, $r = 6$ cm a $QPR = 60°$.

ÚLOHA 2

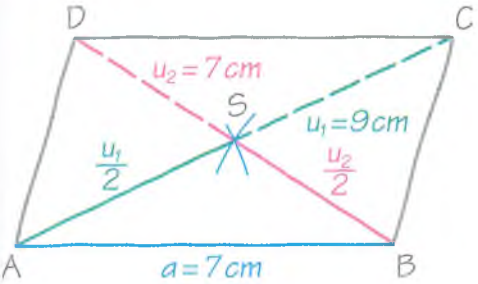
Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 9$ cm.

PRÍKLAD 2

Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom
$a = 7$ cm, $u_1 = 9$ cm, $u_2 = 7$ cm.

RIEŠENIE

Náčrt:

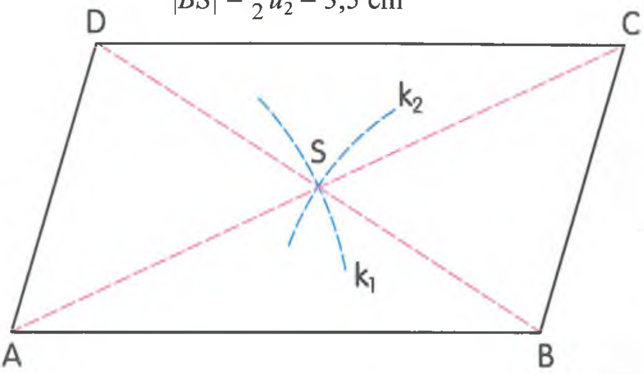


Rozbor:

1. Strana AB má dĺžku 7 cm.
2. Body C, D budeme vedieť zostrojiť, ak bude zostrojený bod S. Uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú.
3. Bod S spolu s bodmi A, B určuje $\triangle ABS$, v ktorom poznáme všetky tri strany.
   $|AS| = \frac{1}{2}u_1 = 4{,}5$ cm
   $|BS| = \frac{1}{2}u_2 = 3{,}5$ cm

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 7$ cm
2. k_1; $k_1(A;\ 4{,}5\text{ cm})$
3. k_2; $k_2(B;\ 3{,}5\text{ cm})$
4. S; $S \in k_1 \cap k_2$
5. C; $C \in \overrightarrow{AS}$, $|AS| = |SC|$
6. D; $D \in \overrightarrow{BS}$, $|BS| = |SD|$
7. $\square\ ABCD$



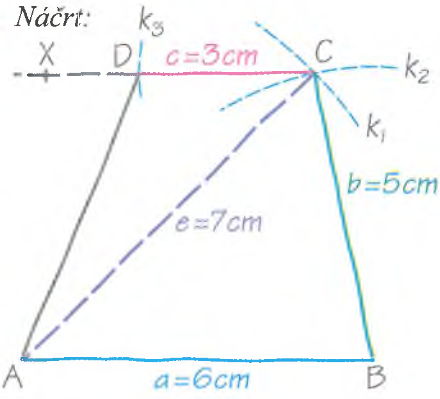
Skúška:
Strana AB má dĺžku 7 cm. Úsečka AC má veľkosť 9 cm, pretože $|AC| = 2 \,.\, |AS| = 2 \,.\, 4{,}5$ cm. Úsečka BD má veľkosť 7 cm, pretože $|BD| = 2 \,.\, |BS| = 2 \,.\, 3{,}5$ cm.

PRÍKLAD 3

Zostrojte lichobežník $ABCD$, v ktorom $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm, $e = 7$ cm.

RIEŠENIE

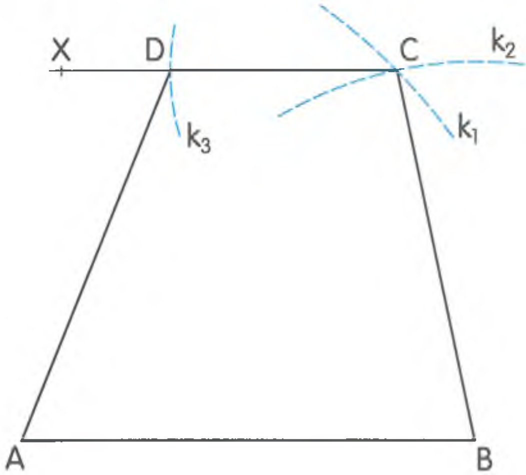
Náčrt:



Rozbor:

1. Úsečka AB má dĺžku 6 cm
2. Bod C má od bodu A vzdialenosť 7 cm, teda leží na kružnici $k_1(A, 7\text{ cm})$.
3. Bod C má od bodu B vzdialenosť 5 cm, teda leží na kružnici $k_2(B, 5\text{ cm})$.
4. Základňa CD je rovnobežná so základňou AB, teda leží na polpriamke CX rovnobežnej s polpriamkou BA.
5. $|CD| = 3$ cm, bod D leží na kružnici $k_3(C, 3\text{ cm})$.

Konštrukcia:
1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. k_1; $k_1(A, 7 \text{ cm})$
3. k_2; $k_2(B, 5 \text{ cm})$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\overrightarrow{CX}$; $\overrightarrow{CX} \parallel BA$
6. k_3; $k_3(C, 3 \text{ cm})$
7. D; $D \in k_3 \cap \overrightarrow{CX}$
8. $\triangle$ $ABCD$



Skúška:
Úsečka AB má veľkosť 6 cm, úsečka BC má veľkosť 5 cm, pretože bod C leží na kružnici k_2. Bod C leží aj na kružnici $k_1(A, 7 \text{ cm})$, preto dĺžka úsečky AC je 7 cm. CD leží na polpriamke $CX \parallel AB$, preto $CD \parallel AB$. $D \in CX$ a $D \in k_3$, preto $|CD| = 3$ cm.

ÚLOHA 3

Zostrojte lichobežník $ABCD$, v ktorom $|AB| = 80$ mm, $|CD| = 35$ mm, $|AD| = 60$ mm, a $|\sphericalangle DAB| = 75°$. V narysovanom obrázku odmerajte výšku lichobežníka a vypočítajte jeho obsah.

CVIČENIA

1. Zostrojte trojuholník ABC, ak:
a) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm
b) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 55°$
c) $c = 7$ cm, $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$
d) $a = b = c = 7$ cm
e) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 90°$

.... **2.** Zostrojte rovnobežník $ABCD$, ak:
a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 110°$
b) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $u_2 = 9$ cm
c) $a = 60$ mm, $u_1 = 60$ mm, $u_2 = 90$ mm

.... **3.** Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak:
a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $\beta = 60°$
b) $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $f = 5$ cm, $c = 3{,}5$ cm
c) $a = 6$ cm, $\alpha = 75°$, $e = 7$ cm, $c = 2$ cm
d) $a = 7$ cm, $d = 5$ cm, $c = 4$ cm, $f = 7$ cm

.... **4.** Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $u_1 = 5$ cm. Odmerajte jeho výšku a vypočítajte obvod a obsah tohto rovnobežníka.

.... **5.** Zostrojte lichobežník $ABCD$, v ktorom $a = 7$ cm, $\beta = 70°$, $f = 6$ cm, $c = 4$ cm. Odmerajte jeho výšku v a ramená b, d. Vypočítajte obvod a obsah tohto lichobežníka.

.... **6.** Zostrojte lichobežník $ABCD$, v ktorom $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $d = 5$ cm.

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Určte, či je číslo x kladné alebo záporné, ak platí:
a) $x > 0$ c) $x > 20$ e) $12 < x$
b) $x < 0$ d) $x < -20$ f) $-1 > x$

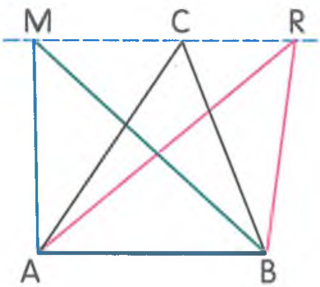
.... **2.** Určte súčet, súčin, rozdiel a podiel čísel:
a) -64 a 16 c) $-1{,}44$ a -12
b) $53{,}3$ a $6{,}5$ d) $0{,}005$ a $0{,}02$

.... **3.** Vypočítajte:
a) $1\,068 + 229 - 500 - 68 + 71$ c) $0{,}02 \,.\, 0{,}05 \,.\, (-0{,}11) + 0{,}2 : (-6)$
b) $-11 + 0{,}8 + 9 - 2{,}8 + 10{,}4 - 1{,}4$ d) $-0{,}6 \,.\, (-0{,}5) \,.\, 0{,}4 - 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \,.\, (-0{,}3)$

.... **4.** Nájdite číslo, ktoré je:
a) o 7,8 väčšie ako 5,2 c) 7,8-krát väčšie ako 1,3
b) o 7,8 menšie ako 5,2 d) 7,8-krát menšie ako 50,7

.... **5.** Myslite si číslo. Vynásobte ho piatimi, k výsledku pričítajte 12, vynásobte dvoma, pričítajte 6, deľte desiatimi. Aké číslo musíte odčítať, aby ste dostali číslo, ktoré ste si mysleli?

.... **6.**



Na obrázku sú tri trojuholníky *ABC*, *ABR*, *ABM*, body *M*, *C*, *R* ležia na jednej priamke. Porovnajte veľkosti ich obsahov.

.... **7.** V predajni lahôdok sú laminátové stoličky s operadlami tvaru rovnoramenného lichobežníka. Plocha na sedenie má tvar štvorca so stranou dlhou 42,5 cm. Dlhšia strana operadla je zhodná so stranou štvorca sedadla, výška operadla meria 45 cm a užšia strana 30 cm. Vypočítajte obsah sedadla a operadla spolu.

.... **8.** Zákazník chce kúpiť elektrický ohrievač, ktorý vyhreje priestor 100 m^3. Chce ním vyhriať dve miestnosti. Rozmery prvej miestnosti sú: dĺžka 4,5 m, šírka 3 m a výška 320 cm; rozmery druhej miestnosti sú: dĺžka 5,25 m a šírka 3,40 m. Výška oboch miestností je rovnaká. Poraďte zákazníkovi, či uvažovaný ohrievač vyhreje obidve miestnosti.

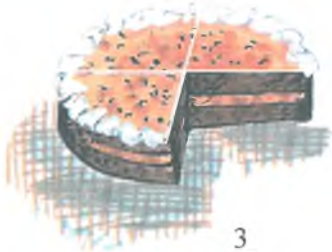
.... **9.** Zostrojte lichobežník *ABCD*, ak $|AB| = 80$ mm, $|BC| = 60$ mm, $|CD| = 40$ mm, $|\sphericalangle ABC| = 60°$ (*AB* a *CD* sú základne). Vypočítajte obvod a obsah daného lichobežníka, potrebné prvky zistite odmeraním v narysovanom obrázku.

2 RACIONÁLNE ČÍSLA. OPERÁCIE S RACIONÁLNYMI ČÍSLAMI

2.1 Zlomky

ZOPAKUJME SI

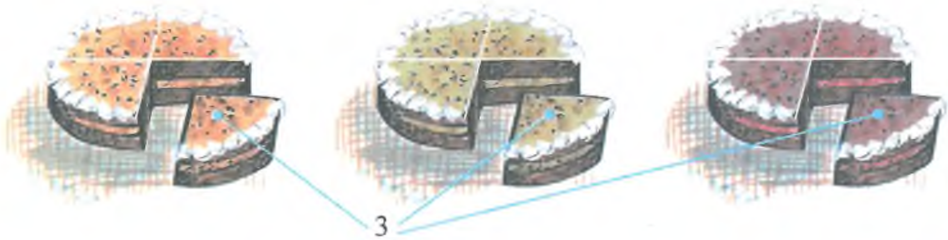
1 celok



$\frac{3}{4}$

Tortu sme rozdelili na 4 rovnako veľké časti a tri z nich sme zobrali. Máme $\frac{3}{4}$.

Alebo: Máme tri rovnako veľké torty: orieškovú, ovocnú, čokoládovú. Každú sme rozdelili na 4 rovnako veľké časti a z každej sme si zobrali 1 časť. Máme $\frac{3}{4}$.



$\frac{3}{4}$

Zlomok $\frac{3}{4}$ – čitateľ – zlomková čiara – menovateľ

Vieme tiež, že: Podiel 3 : 4 má hodnotu, ktorú vyjadríme zlomkom $\frac{3}{4}$.

$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$

ÚLOHA 1

Prečítajte zlomky:

a) $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{10}{19}$, $\frac{3}{1\,000}$

b) $\frac{12}{5}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{75}{31}$, $\frac{108}{100}$, $\frac{10\,010}{5\,000}$

c) $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{479}{1\,000}$, $\frac{389}{10}$

d) $\frac{0}{15}$, $\frac{0}{20}$, $\frac{0}{105}$, $\frac{0}{500}$, $\frac{0}{829}$

e) $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{17}{17}$, $\frac{29}{29}$, $\frac{635}{635}$

f) $\frac{12}{1}$, $\frac{21}{1}$, $\frac{89}{1}$, $\frac{100}{1}$, $\frac{473}{1}$

ÚLOHA 2

Každý zo zlomkov v úlohe 1 a) má čitateľa menšieho ako menovateľa. Vieme aj to, že je menší ako 1. Čo môžeme povedať o zlomkoch v úlohe 1 b) až f)?

ÚLOHA 3

a) Napíšte aspoň 5 zlomkov, v ktorých je čitateľ o 5 menší ako menovateľ.
b) Napíšte 3 zlomky, v ktorých je menovateľ trojciferné číslo deliteľné šiestimi.
c) Vypíšte z daných zlomkov: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{125}{250}$ tie, v ktorých je čitateľ deliteľom menovateľa.

ZOPAKUJME SI

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4}$

$\frac{3}{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$

Rovnosť zlomkov môžeme dostať takto: $\frac{1\,.\,2}{2\,.\,2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1\,.\,3}{2\,.\,3} = \frac{3}{6}$.

Rozšíriť zlomok znamená vynásobiť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom, rôznym od nuly.

PRÍKLAD 1

Zlomok $\frac{2}{7}$ rozšírte číslami 2, 3, 4.

RIEŠENIE

Rozširujeme dvoma ... $\frac{2}{7} = \frac{2\,.\,2}{7\,.\,2} = \frac{4}{14}$

tromi ... $\frac{2}{7} = \frac{2\,.\,3}{7\,.\,3} = \frac{6}{21}$

štyrmi ... $\frac{2}{7} = \frac{2\,.\,4}{7\,.\,4} = \frac{8}{28}$

ÚLOHA 4

Rozšírte zlomky a) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{8}$ číslom 3,

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{20}{9}$ číslom 8.

PRÍKLAD 2

Rozšírte zlomok $\frac{3}{4}$ číslom 2.

RIEŠENIE

$$\frac{3}{4} = \frac{3\,.\,2}{4\,.\,2} = \frac{6}{8}$$

Teraz čitateľa aj menovateľa zlomku $\frac{6}{8}$ vydeľme dvoma:

$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$, t.j. obrátený postup k rozširovaniu zlomkov.

Hovoríme, že zlomok $\frac{6}{8}$ sme krátili dvoma.

Krátiť zlomok znamená deliť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom, rôznym od nuly.

Ak sú v čitateli aj menovateli zlomku čísla nesúdeliteľné, hovoríme že zlomok je v **základnom tvare.**

ÚLOHA 5

a) Určte, ktoré zo zlomkov $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{25}$, $\frac{28}{80}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{150}{220}$, $\frac{47}{9}$, $\frac{105}{108}$, $\frac{17}{51}$, $\frac{426}{3\,321}$ sú v základnom tvare.

b) Tie, ktoré nie sú v základnom tvare, upravte na základný tvar.

PRÍKLAD 3

Usporiadajte zlomky $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ podľa veľkosti.

RIEŠENIE

Igor rieši príklad takto:
Všetky zlomky si upravíme na rovnakého menovateľa, a potom ich porovnáme:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12},\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{1}{2} = \frac{6}{12},\ \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$$

Odpoveď: $\frac{1}{6} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

Peter rieši príklad radšej graficky:

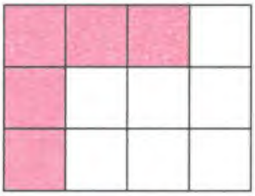
Odpoveď: $\frac{1}{6} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

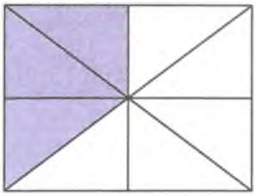
ÚLOHA 6

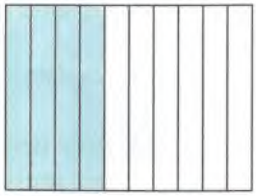
Usporiadajte čísla od najväčšieho po najmenšie: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{10}$.

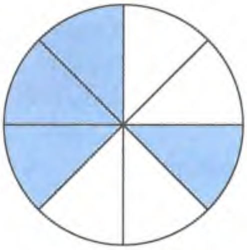
CVIČENIA

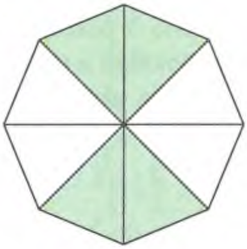
1. Vyjadrite zlomkom vyznačené časti obrázkov:

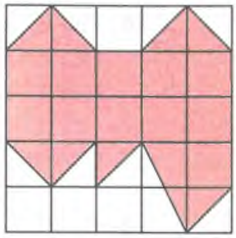
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

.... **2.** Znázornite graficky zlomky: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{13}$.

.... **3.** Koľko centimetrov je $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{45}{10}$ metra?

.... **4.** Koľko metrov je $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{3}{1\,000}$ kilometra?

.... **5.** Koľko minút je $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{53}{60}$, $\frac{120}{60}$ hodiny?

.... **6.** Vypočítajte $\frac{1}{5}$ z 250 Sk, $\frac{2}{9}$ zo 180 cm, $\frac{3}{25}$ zo 400 kg, $\frac{2}{3}$ pravého uhla.

.... **7.** Narysujte úsečku $|KL| = 12$ cm. Vyznačte na nej body X, Y, Z tak, aby platilo:
$|KX| = \frac{1}{2}\,|KL|$, $|KY| = \frac{5}{6}\,|KL|$, $|XZ| = \frac{1}{4}\,|XY|$.
Zapíšte veľkosť úsečky $|KZ|$ vzhľadom na veľkosť úsečky $|KL|$.

.... **8.** Upravte zlomky tak, aby mali rovnaké menovatele:
a) 24: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{6}$;
b) 32: $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{2}$;
c) 72: $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{7}{24}$.

.... **9.** Ktorým číslom treba rozšíriť $\frac{5}{9}$, aby sme dostali $\frac{30}{54}$?

.... **10.** Môžeme rozšíriť $\frac{2}{9}$ tak, aby sme dostali $\frac{14}{63}$?

.... **11.** Možno upraviť $\frac{3}{8}$ tak, aby sme dostali $\frac{9}{30}$?

.... **12.** Určte číslo x tak, aby platili rovnosti:

a) $\frac{17}{20}=\frac{x}{80}$, b) $\frac{x}{5}=\frac{18}{30}$, c) $\frac{1}{x}=\frac{12}{48}$, d) $\frac{2}{7}=\frac{18}{x}$.

.... **13.** Upravte zlomky $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{20}{40}$, $\frac{33}{55}$, $\frac{12}{39}$, $\frac{18}{72}$ na základný tvar.

.... **14.** Napíšte desatinné čísla 0,4; 0,15; 0,004; 0,75 ako zlomky v základnom tvare.

.... **15.** Prvý deň prešli žiaci $\frac{2}{7}$ z plánovanej trasy. Druhý deň prešli $\frac{3}{14}$ trasy. Ktorý deň prešli viac?

.... **16.** Päť chlapcov si kúpilo 3 čokolády. Podelili si ich rovnakým dielom. Desať dievčat si kúpilo 6 čokolád a tiež si ich rozdelili rovnakým dielom. Kto mal viac? Chlapec, či dievča, ak predpokladáme, že čokolády boli rovnaké.

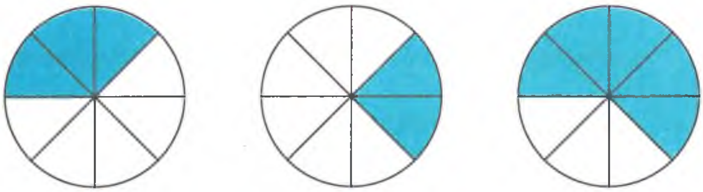
.... **17.** Usporiadajte zlomky $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$ zostupne.

.... **18.** Na karnevale sa zúčastnilo $\frac{5}{8}$ žiakov 7. A triedy, $\frac{7}{12}$ zo 7. B, $\frac{1}{2}$ zo 7. C a $\frac{2}{3}$ 7. D. Určte vzostupné poradie zastúpenia tried na karnevale.

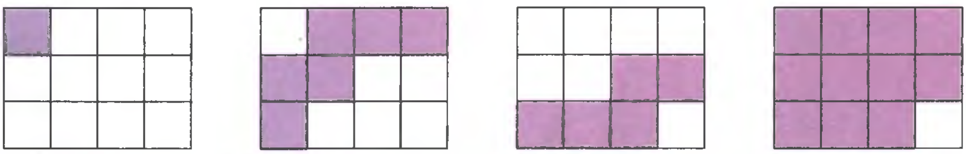
2.2 Sčítanie racionálnych čísel

2.2.1 Sčítanie zlomkov

VŠIMNIME SI



$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$



$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$

Zlomky s rovnakým menovateľom sčítame tak, že čitatele sčítame a menovateľa odpíšeme.

PRÍKLAD 1

Sčítajte $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}$.

RIEŠENIE

Eva vysvetľuje:

$$\frac{1}{8} + \boxed{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{8} + \boxed{\frac{6}{8}} = \frac{7}{8}$$

Milan počíta: $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3\,.\,2}{4\,.\,2}=\boxed{\frac{1}{8}+\frac{6}{8}}=\frac{7}{8}$

Petrov zápis je takýto: $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\boxed{\frac{1+6}{8}}=\frac{7}{8}$

Zlomky s nerovnakými menovateľmi sčítame tak, že ich najprv upravíme na rovnaké menovatele, a potom ich sčítame.

PRÍKLAD 2

Sčítajte $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$.

RIEŠENIE

Eva počíta: Najprv upravím zlomky na rovnaké menovatele, teda hľadáme spoločné násobky čísel 3 a 5. Sú to čísla: 15, 30, 45, 60 ...

Eva si zvolí číslo 15 a tretiny a pätiny upraví na pätnástiny.

Počíta: $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{13}{15}$.

Zuzka si zvolí číslo 30.

Počíta: $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{20}{30}+\frac{6}{30}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$.

ÚLOHA 1

Posúďte sami, ktoré z dievčat počítalo v príklade 2 výhodnejšie. Prečo?

ÚLOHA 2

Vypočítajte: $\frac{1}{3}+\frac{8}{15}$, $\frac{2}{7}+\frac{3}{14}$, $\frac{1}{9}+\frac{5}{18}$,

$\frac{1}{6}+\frac{2}{15}$, $\frac{3}{4}+\frac{1}{10}$, $\frac{2}{15}+\frac{3}{20}$,

$\frac{2}{5}+\frac{1}{7}$, $\frac{3}{11}+\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}+\frac{2}{9}$.

PRÍKLAD 3

Sčítajte: $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{15}$.

RIEŠENIE

$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{15} = \frac{12}{30} + \frac{9}{30} + \frac{2}{30} = \frac{23}{30}$ alebo $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{15} = \frac{12+9+2}{30} = \frac{23}{30}$

PRÍKLAD 4

V sade je 1 200 jabloní. Pätinu zo všetkých jabloní obrali prvý deň, tretinu druhý deň a štvrtinu tretí deň.

a) Akú časť sadu obrali za 3 dni spolu?

b) Koľko jabloní obrali za 3 dni?

RIEŠENIE

a) Linda počíta:

1. deň ... $\frac{1}{5}$ z celku

2. deň ... $\frac{1}{3}$ z celku

3. deň ... $\frac{1}{4}$ z celku

spolu: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{60} + \frac{20}{60} + \frac{15}{60} = \frac{47}{60}$.

Odpoveď: Za 3 dni obrali $\frac{47}{60}$ sadu.

b) Jurko počíta:

1. deň ... $\frac{1}{5}$ z 1 200 = 1 200 : 5 = 240

2. deň ... $\frac{1}{3}$ z 1 200 = 1 200 : 3 = 400

3. deň ... $\frac{1}{4}$ z 1 200 = 1 200 : 4 = 300

spolu: 240 + 400 + 300 = 940

Ondrej počíta takto:

za 3 dni ... $\frac{47}{60}$ z 1 200 = (1 200 : 60) . 47 = 20 . 47 = 940

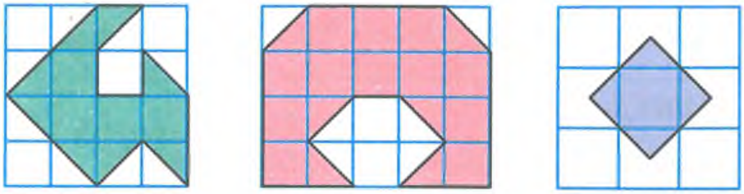
Odpoveď: Za tri dni obrali 940 jabloní.

CVIČENIA

1. Vypočítajte spamäti:

$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{7} + \frac{3}{7}$, $\frac{5}{11} + \frac{4}{11}$, $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{5}{9}$, $\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$, $\frac{12}{20} + \frac{7}{20}$, $\frac{1}{90} + \frac{89}{90}$.

.... **2.** Aká časť štvoruholníka je vyznačená na obrázku?



.... **3.** Sčítajte:

a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}+\frac{8}{25}$, $\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$, $\frac{2}{11}+\frac{5}{33}$, $\frac{3}{10}+\frac{7}{20}$, $\frac{7}{10}+\frac{9}{100}$

b) $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}$, $\frac{5}{14}+\frac{3}{10}$, $\frac{4}{15}+\frac{3}{20}$, $\frac{2}{9}+\frac{1}{15}$, $\frac{2}{4}+\frac{5}{18}$, $\frac{7}{20}+\frac{9}{30}$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$, $\frac{3}{7}+\frac{2}{9}$, $\frac{5}{12}+\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}+\frac{3}{13}$, $\frac{2}{11}+\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$, $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}$, $\frac{3}{10}+\frac{9}{100}+\frac{4}{25}$

e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{9}$, $\frac{3}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{3}{20}$

.... **4.** Nájdite zlomok, ktorý je o $\frac{2}{5}$ väčší, ako $\frac{11}{20}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{1}{2}$.

.... **5.** Určte zlomky, ktoré sú o $\frac{3}{8}$ väčšie, ako je súčet zlomkov:

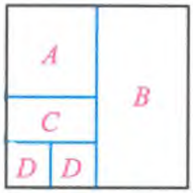
a) $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{20}$; b) $\frac{1}{4}$ a $\frac{2}{9}$; c) $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{8}$.

.... **6.** Štvorec je rozdelený na časti A, B, C, D. Vieme, že A je $\frac{1}{4}$ štvorca. Akými časťami štvorca sú:

a) B, C, D,

b) $C+D$, $B+C$,

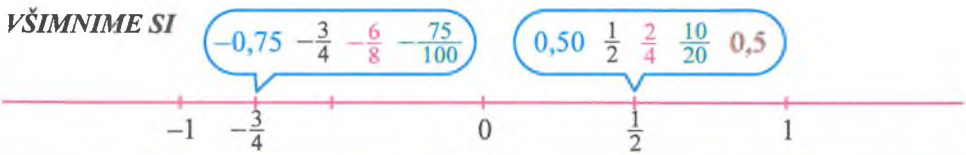
c) Vyjadrite $\frac{3}{8}$ daného štvorca.



.... **7.** Danka s Jankou si spolu ušetrili 840 Sk. Na výlete minula Danka $\frac{2}{5}$ z celkovej sumy, Janka $\frac{1}{3}$. Koľko Sk minuli dievčatá z ušetrených peňazí?

2.2.2 Sčítanie racionálnych čísel

VŠIMNIME SI



Jedno racionálne číslo môžeme vyjadriť rôznymi zápismi.

$-\frac{3}{4}=-\frac{6}{8}=-\frac{12}{16}=-0{,}75=-0{,}750\ \dots$ $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{10}{20}=0{,}5=0{,}50\ \dots$

Na číselnej osi sú tie isté racionálne čísla zobrazené v jednom bode.

ÚLOHA 1

Zapíšte desatinné čísla 0,4; –0,8; 1,6; –3,0; 2,5 v tvare zlomkov.

ÚLOHA 2

Vyjadrite $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $-\frac{7}{4}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{4}{25}$ ako desatinné čísla.

ÚLOHA 3

Zapíšte $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{1}{33}$ v tvare periodických čísel.

PROBLÉM 1

Sčítajte $\frac{2}{5} + 0{,}1$.

RIEŠENIE

1. Patrik navrhuje zapísať zlomok $\frac{2}{5}$ v tvare desatinného čísla. Potom je úloha jednoduchá:

$$\begin{aligned} &\boxed{\tfrac{2}{5}} + 0{,}1 = \\ = &\boxed{\tfrac{4}{10}} + 0{,}1 = \\ = &\boxed{0{,}4} + 0{,}1 = 0{,}5 \end{aligned}$$

2. Elenka navrhuje riešiť problém tak, že desatinné číslo 0,1 napíše v tvare zlomku, a potom ho rieši ako súčet zlomkov:

$$\begin{aligned} &\tfrac{2}{5} + \boxed{0{,}1} = \\ = &\tfrac{2}{5} + \boxed{\tfrac{1}{10}} = \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{5}{10} \end{aligned}$$

Výsledky sú rovnaké pri prvom i druhom postupe.

PRÍKLAD 1

Vypočítajte $1{,}2 + \frac{3}{8}$.

RIEŠENIE

$$1{,}2 + \frac{3}{8} = \frac{12}{10} + \frac{3}{8} = \frac{48}{40} + \frac{15}{40} = \frac{63}{40} = \boxed{1{,}575}$$

$$1{,}2 + \frac{3}{8} = 1{,}2 + \frac{375}{1000} = 1{,}2 + 0{,}375 = \boxed{1{,}575}$$

PRÍKLAD 2

Zuzka nakúpila v obchode so sušeným ovocím $\frac{1}{4}$ kg sušených jabĺk, 0,15 kg banánov, 0,6 kg hrušiek a 0,02 kg ananásu. Koľko kg sušeného ovocia Zuzka nakúpila?

RIEŠENIE

$$\boxed{\tfrac{1}{4}} + 0{,}15 + 0{,}6 + 0{,}02 =$$
$$= \boxed{0{,}25} + 0{,}15 + 0{,}6 + 0{,}02 = 1{,}02$$

Odpoveď: Zuzka nakúpila 1,02 kg sušeného ovocia.

ÚLOHA 4

Vyriešte príklad 2 tak, že desatinné čísla napíšete v tvare zlomkov.
Ktorý postup je rýchlejší? Prečo?

PROBLÉM 2

Sčítajte $\frac{1}{3} + 0{,}2$.

RIEŠENIE

Adam hovorí: Aby sme dostali presný výsledok, musíme problém riešiť v tvare zlomkov:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{10} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

Ak by sme ho chceli sčítať v tvare desatinných čísel, súčet by nebol presný, lebo

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

V takýchto prípadoch riešime úlohy sčítaním zlomkov.

ÚLOHA 5

Vypočítajte $-\frac{2}{9} + 0{,}7$; $1{,}3 + \frac{4}{7}$; $\frac{1}{6} + \frac{3}{5} + 0{,}4$.

PRÍKLAD 3

Zistite, či platí rovnosť:

a) $\frac{2}{3} + 0{,}5 = 0{,}5 + \frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{7}{15} + \left(-\frac{1}{3}\right)$

RIEŠENIE

a) Miško rieši ľavú stranu rovnosti:

$$Ľ = \frac{2}{3} + 0{,}5 = \frac{2}{3} + \frac{5}{10} = \frac{20}{30} + \frac{15}{30} =$$
$$= \frac{35}{30} = \boxed{\frac{7}{6}}$$

Andrej rieši pravú stranu rovnosti:

$$P = 0{,}5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{10} + \frac{2}{3} = \frac{15}{30} + \frac{20}{30} =$$
$$= \frac{35}{30} = \boxed{\frac{7}{6}}, \; Ľ = P$$

Odpoveď: Rovnosť platí.

b) Katka rieši:

$$Ľ = -\frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{-5}{15} + \frac{7}{15} = \boxed{\frac{2}{15}}$$
$$P = \frac{7}{15} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{15} + \left(-\frac{5}{15}\right) = \boxed{\frac{2}{15}}$$
$$Ľ = P$$

Odpoveď: Rovnosť platí.

Poradie sčítancov môžeme vymeniť, súčet sa nezmení.
Túto vlastnosť sčítania nazývame **KOMUTATÍVNOSŤ.**

ÚLOHA 6

Overte komutatívnosť sčítania racionálnych čísel:

a) $\frac{12}{5} + \frac{1}{10}$ b) $\frac{2}{9} + \left(-\frac{4}{27}\right)$ c) $-\frac{1}{8} + \left(-\frac{9}{4}\right)$

PRÍKLAD 4

Zistite, či platí rovnosť:

a) $\left(0{,}2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5} = 0{,}2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$

b) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{3}{14}\right) = \frac{3}{4} + \left[\frac{1}{7} + \left(-\frac{3}{14}\right)\right]$

RIEŠENIE

a) $Ľ = \left(0{,}2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5} = \left(\frac{4}{20} + \frac{5}{20}\right) + \frac{8}{20} = \frac{9}{20} + \frac{8}{20} = \boxed{\frac{17}{20}}$

$P = 0{,}2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{10} + \left(\frac{5}{20} + \frac{8}{20}\right) = \frac{4}{20} + \frac{13}{20} = \boxed{\frac{17}{20}}$

$Ľ = P$

Odpoveď: Rovnosť platí.

b) $Ľ = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{3}{14}\right) = \left(\frac{21}{28} + \frac{4}{28}\right) + \left(-\frac{6}{28}\right) = \frac{25}{28} + \left(-\frac{6}{28}\right) = \boxed{\frac{19}{28}}$

$P = \frac{3}{4} + \left[\frac{1}{7} + \left(-\frac{3}{14}\right)\right] = \frac{3}{4} + \left[\frac{2}{14} + \left(-\frac{3}{14}\right)\right] = \frac{21}{28} + \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{21}{28} + \left(-\frac{2}{28}\right) = \boxed{\frac{19}{28}}$

$Ľ = P$

Odpoveď: Rovnosť platí.

Sčítancov môžeme ľubovoľne združovať do skupín, súčet sa nezmení.
Túto vlastnosť nazývame **ASOCIATÍVNOSŤ.**

PRÍKLAD 5

Sčítajte $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) + 0{,}5$.

Správnosť výpočtu overte použitím asociatívnosti sčítania.

RIEŠENIE

$\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) + 0{,}5 = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10}\right) + \frac{5}{10} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} = 1$

Skúška: Použijeme asociatívnosť sčítania

$\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) + 0{,}5 = \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{10}\right) = \frac{1}{5} + \frac{8}{10} = \frac{2}{10} + \frac{8}{10} = \frac{10}{10} = 1$

ÚLOHA 7

Overte asociatívnosť sčítania racionálnych čísel

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+0{,}3$ b) $\left[-\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{4}\right)\right]+\left(-\frac{1}{20}\right)$

PRÍKLAD 6

Vypočítajte čo najvýhodnejšie:

a) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

RIEŠENIE

Eva navrhuje: V oboch prípadoch využijeme komutatívnosť a asociatívnosť sčítania a výpočet si zjednodušíme.

a) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{9}+\frac{5}{5}=1+1=2$

b) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)\right]=0+\left(-\frac{2}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

ÚLOHA 8

Počítajte s výhodou:

a) $\frac{3}{7}+0{,}6+\frac{4}{7}+\left(-\frac{2}{5}\right)$ b) $-\frac{7}{11}+\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{7}{11}+\frac{8}{7}$

CVIČENIA

1. Zapíšte v tvare desatinných čísel:

$\frac{3}{5}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{41}{4}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{1}{5}$

.... **2.** Zapíšte v tvare zlomkov: 0,4; –1,8; 3,5.

.... **3.** Na stavbu privážali tri autá stavebný materiál. Prvé auto priviezlo 1,5 tony, druhé $\frac{3}{4}$ tony a tretie $\frac{1}{2}$ tony. Aké množstvo stavebného materiálu priviezli všetky tri autá spolu?

.... **4.** Bylinkárka má v štyroch škatuliach nazbierané liečivé byliny. V prvej sú $\frac{3}{4}$ kg, v druhej 0,2 kg, v tretej je $\frac{1}{4}$ kg a v štvrtej 0,6 kg. Koľko kg byliniek nazbierala bylinkárka spolu?

.... **5.** Overte, či platí rovnosť:

a) $4{,}5 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + 4{,}5$ c) $-\frac{1}{2} + (-0{,}7) = -0{,}7 + \left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{5}{7} + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ d) $-\frac{2}{5} + 0{,}25 = 0{,}25 + \left(-\frac{2}{5}\right)$

.... **6.** Vypočítajte:

a) $\left[0{,}16 + \left(-\frac{1}{20}\right)\right] + \left(-\frac{3}{4}\right)$ b) $\left(\frac{5}{3} + 1{,}8\right) + (-2{,}5)$

Overte si správnosť výpočtu využitím asociatívnosti sčítania.

.... **7.** Zistite, či platí rovnosť: $\left(\frac{46}{5} + 5{,}3\right) + \frac{1}{2} = \frac{46}{5} + \left(5{,}3 + \frac{1}{2}\right)$

.... **8.** Počítajte s výhodou:

a) $\frac{2}{11} + \left(-\frac{3}{7}\right) + \frac{9}{11} + \left(-\frac{4}{7}\right)$ b) $-\frac{9}{2} + (-0{,}5) + \frac{7}{8} + 4{,}5 - \frac{7}{8}$

.... **9.** Využite komutatívnosť a asociatívnosť sčítania a vypočítajte:

a) $\frac{2}{7} + \frac{5}{9} + \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{5}{12} + (-2) + \frac{7}{12} + \frac{1}{9} + \left(-\frac{10}{9}\right)$

.... **10.** Vypočítajte:

a) $\left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{8}\right)\right] + [1{,}5 + (-0{,}2)]$ b) $\left[-1{,}1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right)$

2.3 Odčítanie racionálnych čísel

2.3.1 Odčítanie zlomkov

PROBLÉM 1

Na oslave Zuzkiných narodením bolo spolu so Zuzkou osem dievčat. Mamička rozkrájala tortu na osem rovnakých častí. Iba päť dievčat zjedlo svoj diel. Aká časť torty zostala?

RIEŠENIE

Ivan kreslí a vysvetľuje:

Torta rozkrájaná
na osem rovnakých častí ...... $\frac{8}{8}$

1 časť .... $\frac{1}{8}$

dievčatá zjedli 5 častí .... $\frac{5}{8}$

zostalo $\boxed{8 - 5 = 3}$ $\boxed{\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}}$

Odpoveď: Zostali $\frac{3}{8}$ torty.

Danka sa spýta: Aká časť torty by zostala, keby ju mamička rozkrájala na dvanásť rovnakých častí?
Ivan pohotovo odpovedá: $12 - 5 = 7$, teda $\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$
Odpoveď: Zostalo by $\frac{7}{12}$ torty.

To je jednoduché, vraví Ivan, lebo:

Zlomky s rovnakým menovateľom odčítame tak, že odčítame ich čitatele a menovatele odpíšeme.

PROBLÉM 2

Ako odčítame zlomky s nerovnakými menovateľmi?

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{20} = ?$$

RIEŠENIE

Eva hovorí: Keďže vieme odčítať zlomky s rovnakými menovateľmi, tak zlomky s nerovnakými menovateľmi upravíme na zlomky s rovnakými menovateľmi, a potom ich odčítame.

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{20} = \boxed{\frac{16}{20} - \frac{3}{20}} = \frac{13}{20}$$

Peter robí iný zápis:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{20} = \boxed{\frac{16 - 3}{20}} = \frac{13}{20}$$

PRÍKLAD 1

Vypočítajte: a) $\frac{2}{9} - \frac{1}{18}$, b) $\frac{4}{9} - \frac{5}{12}$, c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

RIEŠENIE

a) Janko počíta: $\frac{2}{9} - \frac{1}{18} = \frac{4}{18} - \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

b) Katka rieši: $\frac{4}{9} - \frac{5}{12} = \frac{16}{36} - \frac{15}{36} = \frac{1}{36}$

c) Ivan píše: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8 - 3}{12} = \frac{5}{12}$

Zlomky s nerovnakými menovateľmi odčítame tak, že ich najprv upravíme na rovnaké menovatele, a potom ich odčítame.

ÚLOHA 1

Vypočítajte:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$, $\frac{7}{8} - \frac{3}{16}$, $\frac{3}{14} - \frac{1}{20}$

b) $\frac{2}{3} - \frac{2}{7}$, $\frac{12}{13} - \frac{5}{9}$, $\frac{11}{12} - \frac{10}{11}$, $\frac{23}{25} - \frac{1}{2}$

PRÍKLAD 2

Vypočítajte o koľko

a) kilogramov sú $\frac{4}{5}$ tony viac ako $\frac{7}{10}$ tony,

b) minút je $\frac{1}{3}$ hodiny menej ako $\frac{5}{6}$ hodiny?

RIEŠENIE

a) Ela rieši príklad takto:

$\frac{4}{5}$ t ... $\frac{4}{5}$ z 1 000 kg = 800 kg,

lebo (1 000 : 5) . 4 = 800

$\frac{7}{10}$ t ... $\frac{7}{10}$ z 1 000 kg = 700 kg,

lebo (1 000 : 10) . 7 = 700

800 kg – 700 kg = 100 kg

Janka pozná iný spôsob:

$\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = \frac{8}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$ t ... $\frac{1}{10}$ z 1 000 kg = 100 kg

Odpoveď: $\frac{4}{5}$ t sú o 100 kg viac ako $\frac{7}{10}$ t.

b) $\frac{5}{6}$ h ... $\frac{5}{6}$ zo 60 min = 50 min

lebo (60 : 6) . 5 = 50

$\frac{1}{3}$ h ... $\frac{1}{3}$ zo 60 min = 20 min

lebo 60 : 3 = 20

50 min – 20 min = 30 min

$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ h ... $\frac{1}{2}$ zo 60 min = 30 min

Odpoveď: $\frac{1}{3}$ h je o 30 min menej ako $\frac{5}{6}$ h.

Ktoré z riešení je výhodnejšie?

ÚLOHA 2

Vypočítajte o koľko

a) milimetrov je $\frac{5}{8}$ m viac ako $\frac{1}{4}$ m,

b) litrov je $\frac{7}{10}$ hl viac ako $\frac{23}{100}$ hl?

PRÍKLAD 3

Nahraďte písmeno x správnym číslom: $x + \frac{1}{3} = \frac{7}{8}$

RIEŠENIE

Maroš hovorí: V príklade poznáme súčet dvoch sčítancov a jedného sčítanca. Druhého sčítanca vypočítame odčítaním.

$$x = \frac{7}{8} - \frac{1}{3} = \frac{21}{24} - \frac{8}{24} = \frac{13}{24}$$

Odpoveď: $x = \frac{13}{24}$.

ÚLOHA 3

Určte x, aby platilo: $x + \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$.

CVIČENIA

1. Odčítajte spamäti:

$\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$, $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$, $\frac{29}{100} - \frac{17}{100}$, $\frac{27}{5} - \frac{22}{5}$, $\frac{49}{20} - \frac{49}{20}$, $\frac{170}{1\,001} - \frac{100}{1\,001}$, $\frac{9}{1\,000} - \frac{1}{1\,000}$

2. Vypočítajte:

$\frac{3}{4} - \frac{7}{16}$, $\frac{20}{23} - \frac{5}{46}$, $\frac{11}{17} - \frac{5}{34}$, $\frac{9}{10} - \frac{4}{9}$, $\frac{5}{7} - \frac{1}{3}$, $\frac{4}{11} - \frac{1}{5}$, $\frac{8}{35} - \frac{3}{100}$, $\frac{4}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15}$

3. Nahraďte písmeno x správnym číslom:

a) $\frac{7}{15} + x = \frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{9} + x = \frac{7}{10}$ c) $\frac{2}{5} + x = \frac{5}{12}$ d) $x + \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$

4. O koľko je súčet čísel $\frac{7}{12}$ a $\frac{1}{3}$ väčší, ako ich rozdiel?

5. Zo suda naplneného do $\frac{2}{3}$ vínom odobrali ešte $\frac{1}{4}$ vína. Aká časť suda zostala naplnená?

6. Dvaja podnikatelia mali z akcie rovnaký zisk. Prvý daroval na útulok pre zvieratá $\frac{1}{6}$ z celkového zisku, druhý $\frac{2}{5}$ zo zisku. Ktorý podnikateľ daroval väčšiu sumu a o koľko?

7. Na $\frac{5}{12}$ celkovej výmery záhrady sú vysadené jahody. Na $\frac{1}{3}$ výmery sú maliny. Ktorá časť je väčšia? O koľko? Akú časť z celkovej výmery tvoria jahody a maliny spolu?

2.3.2 Odčítanie racionálnych čísel

PRÍKLAD 1

Odčítajte: $\frac{3}{7} - \frac{5}{7}$, $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$, $\frac{5}{9} - \left(-\frac{1}{2}\right)$, $0{,}7 - \frac{2}{5}$

RIEŠENIE

Zuzka počíta takto: $\frac{3}{7} - \frac{5}{7} = -\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{1}{12}$

Elenka rieši: $\frac{5}{9} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{18} + \frac{9}{18} = \frac{19}{18}$

Janko počíta: $0{,}7 - \frac{2}{5} = \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$

Peter počíta: $0{,}7 - \frac{2}{5} = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3 = \boxed{\frac{3}{10}}$

Rozdiely sa rovnajú.

ÚLOHA 1

Vypočítajte b, ak a) $a = \frac{1}{2}$
b) $a = -\frac{1}{4}$
c) $a = 0{,}4$

$$\boxed{a} \xrightarrow{+\frac{2}{3}} \boxed{} \xrightarrow{-\frac{1}{8}} \boxed{} \xrightarrow{-\frac{1}{12}} \boxed{b}$$

PROBLÉM 1

Zistite, či platí rovnosť: a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ b) $0{,}3 - 7{,}8 = 7{,}8 - 0{,}3$.

Peter si pozorne prezrie zadanie a prehlási:
Ani v a), ani v b) rovnosť neplatí. Zuzka tvrdí opak. Kto z nich má pravdu?

RIEŠENIE

a) $Ľ = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

$P = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{4}}$

$Ľ \neq P$

b) $Ľ = 0{,}3 - 7{,}8 = \boxed{-7{,}5}$

$P = 7{,}8 - 0{,}3 = \boxed{7{,}5}$ $\boxed{-7{,}5 \neq 7{,}5}$

$Ľ \neq P$

Pravdu má Peter: Rovnosť neplatí, pretože pri odčítaní nemôžeme poradie členov zameniť.

Odčítanie racionálnych čísel nie je komutatívne.

ÚLOHA 2

Presvedčte sa, že neplatí rovnosť: $\frac{7}{8} - \frac{15}{4} = \frac{15}{4} - \frac{7}{8}$

PROBLÉM 2

Je možné, aby odčítanie racionálnych čísel bolo asociatívne? Zistite to na príklade:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} - \frac{1}{10}$$

RIEŠENIE

Lenka tvrdí: Ak by odčítanie bolo asociatívne, muselo by platiť:

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{10} = \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)$$

$$Ľ = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{10} = \left(\frac{10}{15} - \frac{9}{15}\right) - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = \frac{2}{30} - \frac{3}{30} = -\frac{1}{30}$$

$$P = \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{3} - \left(\frac{6}{10} - \frac{1}{10}\right) = \frac{20}{30} - \frac{5}{10} = \frac{20 - 15}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad Ľ \neq P$$

Igor hovorí: Pri odčítaní nemôžeme čísla ľubovoľne združovať do skupín.

Odčítanie racionálnych čísel nie je asociatívne.

ÚLOHA 3

Presvedčte sa, že neplatia rovnosti:

$$\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)-\frac{12}{5}=\frac{7}{9}-\left(\frac{1}{3}-\frac{12}{5}\right)$$
$$\left(\frac{1}{8}-0{,}2\right)-1{,}6=\frac{1}{8}-(0{,}2-1{,}6)$$

PRÍKLAD 2

Rýchlik meškal 18 minút. Meškanie sa zvýšilo na 42 minút. O akú časť hodiny sa zvýšilo meškanie rýchlika?

RIEŠENIE

Alena rieši príklad takto:

$42-18=24$

$24\text{ min}=\frac{24}{60}\text{ h}=\frac{2}{5}\text{ h}$

Anka ukáže takéto riešenie:

$18\text{ min}=\frac{18}{60}\text{ h}$

$42\text{ min}=\frac{42}{60}\text{ h}$

$\frac{42}{60}-\frac{18}{60}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}\text{ h}$

Odpoveď: Meškanie rýchlika sa zvýšilo o $\frac{2}{5}$ hodiny.

ÚLOHA 4

O koľko je $\frac{7}{20}$ kg menej ako $\frac{14}{25}$ kg?

CVIČENIA

1. Odčítajte spamäti:

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$, $\frac{12}{17}-\frac{2}{17}$, $\frac{2}{50}-\frac{21}{50}$, $-\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$, $1-\frac{1}{2}$, $1-\frac{3}{7}$, $1-\frac{4}{9}$, $1-\frac{25}{40}$

.... **2.** Vypočítajte: $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{10}-\frac{2}{15}$; $\frac{5}{12}-0{,}25$; $0{,}1-\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{7}-\frac{5}{14}$; $-0{,}2-\left(-\frac{1}{8}\right)$

.... **3.** Nájdite x, aby platilo:

a) $x+\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$

b) $x+\frac{8}{11}=\frac{3}{10}$

c) $x+\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

d) $0{,}15+x=\frac{3}{4}$

.... **4.** Vypočítajte:

a) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}$

.... **5.** Vypočítajte a porovnajte výsledky a) — b); c) — d); e) — f).

a) $\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{5}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)$

d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$

e) $\left(-\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)$

f) $-\frac{1}{7}+\frac{2}{3}-1+\frac{1}{3}$

.... **6.** O koľko je $\frac{1}{10}$ kg menej ako $\frac{1}{5}$ kg?

.... **7.** Bazén sa napĺňa tromi prívodmi. Prvým sa za 1 hodinu naplní $\frac{1}{2}$ bazéna, druhým $\frac{1}{3}$ bazéna. Aká časť bazéna sa musí naplniť tretím prívodom, ak má byť bazén naplnený za 1 hodinu a všetky tri prívody sú otvorené súčasne.

.... **8.** Modrá stuha meria $\frac{7}{5}$ metra. Červená stuha meria $\frac{13}{10}$ metra. Ak skrátime modrú o $\frac{2}{15}$ metra, bude kratšia ako červená? O koľko?

.... **9.** Na turistike prešli mladí turisti prvý deň 12 km. Druhý deň prešli o $\frac{1}{10}$ km menej ako prvý deň. Tretí deň prešli o $\frac{3}{10}$ km menej ako prvý deň. Koľko km prešli turisti za tri dni?

.... **10.** Vypočítajte:

a) $\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(5+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)$ c) $\left[(-0{,}2)-\left(-\frac{2}{5}\right)\right]-10$

2.4 Použitie zmiešaných čísel

PRÍKLAD 1

Zapíšte číslami:
Peter kúpil desať a trištvrte metra látky.
Teplota v Bratislave vystúpila na 27 a pol stupňa Celzia.
Danka za týždeň vypila 5 a štvrť litra mlieka.
Zásoby uhlia klesli o jednu a pätinu tony.

RIEŠENIE

čítame	zapíšeme	skrátený zápis
desať a trištvrte metra	$\left(10+\frac{3}{4}\right)$ m	$10\frac{3}{4}$ m
dvadsaťsedem a pol stupňa Celzia	$\left(27+\frac{1}{2}\right)$ °C	$27\frac{1}{2}$ °C
päť a štvrť litra	$\left(5+\frac{1}{4}\right)$ l	$5\frac{1}{4}$ l
klesli o jednu a pätinu tony	$-\left(1+\frac{1}{5}\right)$ t	$-1\frac{1}{5}$ t

Čísla $10\frac{3}{4}$, $27\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{5}$ nazývame zmiešané čísla.

PRÍKLAD 2

Zapíšte zmiešané čísla z príkladu 1 ako zlomky.

RIEŠENIE

$$10\tfrac{3}{4}=10+\tfrac{3}{4}=\tfrac{40}{4}+\tfrac{3}{4}=\tfrac{43}{4}$$
$$27\tfrac{1}{2}=27+\tfrac{1}{2}=\tfrac{54}{2}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{55}{2}$$
$$5\tfrac{1}{4}=5+\tfrac{1}{4}=\tfrac{20}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{21}{4}$$
$$-1\tfrac{1}{5}=-\left(1+\tfrac{1}{5}\right)=-\left(\tfrac{5}{5}+\tfrac{1}{5}\right)=-\tfrac{6}{5}$$

ÚLOHA 1

Zmiešané čísla $3\frac{1}{4}$, $2\frac{5}{8}$, $10\frac{3}{7}$, $-3\frac{1}{4}$, $-5\frac{2}{7}$, $3\frac{0}{5}$ napíšte ako zlomky.

PRÍKLAD 3

Napíšte $\frac{8}{3}$ a $\frac{25}{2}$ ako zmiešané čísla.

RIEŠENIE

Peter hovorí:

$\boxed{\frac{8}{3}}$ Najväčší násobok čísla 3 menší ako 8 je 6, preto:

$$\frac{8}{3}=\frac{6+2}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$$

$\boxed{\frac{25}{2}}$ Najväčší násobok čísla 2 menší ako 25 je 24, preto:

$$\frac{25}{2}=\frac{24+1}{2}=\frac{24}{2}+\frac{1}{2}=12+\frac{1}{2}=12\frac{1}{2}$$

Linda má nápad. Jej riešenie je rýchlejšie. Posúďte sami:

$\boxed{\frac{8}{3}}$ = ... $8:3=2$ .... $8:3=2\frac{2}{3}$

zv. 2 ďalej 2 : 3 zapíšeme $\frac{2}{3}$ $\longrightarrow$

$$\boxed{\frac{25}{2}}=25:2=12\frac{1}{2}$$

ÚLOHA 2

Napíšte zlomky ako zmiešané čísla: $\frac{9}{4}$, $\frac{26}{11}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{20}{7}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{100}{99}$.

PRÍKLAD 4

Vypočítajte:

a) $3\frac{1}{6}+1\frac{2}{3}$ b) $-5\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}$ c) $6\frac{1}{3}-1\frac{1}{5}$ d) $-4\frac{2}{7}-1\frac{1}{2}$

RIEŠENIE

a) $3\frac{1}{6}+1\frac{2}{3}=\frac{19}{6}+\frac{5}{3}=\frac{19}{6}+\frac{10}{6}=\frac{29}{6}=4\frac{5}{6}$

$3\frac{1}{6}+1\frac{2}{3}=(3+1)+\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)=4+\frac{1+4}{6}=4+\frac{5}{6}=4\frac{5}{6}$

b) $-5\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}=-\frac{11}{2}+\frac{11}{4}=-\frac{22}{4}+\frac{11}{4}=-\frac{11}{4}=-2\frac{3}{4}$

$-5\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}=\boxed{(-5+2)}+\boxed{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)}=-3+\left(-\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)=-3+\frac{1}{4}=-\frac{12}{4}+\frac{1}{4}=$
$=-\frac{11}{4}=-2\frac{3}{4}$

c) Riešime spoločne:

$6\frac{1}{3}-1\frac{1}{5}=\left(6+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{5}\right)=(6-1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=5+\left(\frac{5}{15}-\frac{3}{15}\right)=$
$=5+\frac{2}{15}=5\frac{2}{15}$

alebo: $6\frac{1}{3}-1\frac{1}{5}=\frac{19}{3}-\frac{6}{5}=\frac{96}{15}-\frac{18}{15}=\frac{77}{15}=5\frac{2}{15}$

d) $-4\frac{2}{7}-1\frac{1}{2}=-\left(4+\frac{2}{7}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=(-4-1)+\left(-\frac{2}{7}-\frac{1}{2}\right)=5+\left(-\frac{4}{14}-\frac{7}{14}\right)=$
$=-5+\left(-\frac{11}{4}\right)=-5\frac{11}{4}$

alebo: $-4\frac{2}{7}-1\frac{1}{2}=-\frac{30}{7}-\frac{3}{2}=-\frac{60}{14}-\frac{21}{14}=-\frac{81}{14}=-5\frac{11}{14}$

Vyberte si spôsob riešenia podľa toho, ktorý sa vám viac páči a ktorý je výhodnejší.

ÚLOHA 3

Vypočítajte a) $2\frac{5}{7}+3\frac{1}{2}-0{,}2$ b) $1{,}25-6\frac{1}{10}+1\frac{2}{5}$

PRÍKLAD 5

Vypočítajte $252\frac{3}{4}+115\frac{1}{2}$

RIEŠENIE

Príklad rieši Laco takto:

$252\frac{3}{4}+115\frac{1}{2}=(252+115)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=367+\frac{3+2}{4}=367+\frac{5}{4}=368\frac{1}{4}$

PRÍKLAD 6

Teplomer ukazoval 12 °C. Teplota klesla za 1 hodinu o $2\frac{1}{2}$ °C. Ďalšiu hodinu klesla opäť o $1\frac{1}{4}$ °C. Koľko °C ukazuje teplomer?

RIEŠENIE

Danka rieši: teplomer ukazuje ... 12 °C

1. klesanie ... $-2\frac{1}{2}$ °C

2. klesanie ... $-1\frac{1}{4}$ °C

nový stav ... x °C

$$x = 12 - 2\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{4}$$
$$x = 12 - \tfrac{5}{2} - \tfrac{5}{4}$$
$$x = \tfrac{48}{4} - \tfrac{10}{4} - \tfrac{5}{4} \qquad x = \tfrac{33}{4} \qquad x = 8\tfrac{1}{4}$$

Odpoveď: Teplomer ukazuje $8\frac{1}{4}$ °C.

ÚLOHA 4

Zadajte príklady, v ktorých ukážete, že sčítanie zmiešaných čísel je komutatívne a asociatívne, ale pre odčítanie neplatí ani komutatívnosť, ani asociatívnosť.

CVIČENIA

1. Riešte spamäti:
$2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{7} + 2\frac{3}{7}$, $5\frac{7}{13} - 2\frac{1}{13}$, $4 + 2\frac{1}{5}$, $9 - 3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{8} - 2$, $\frac{1}{3} - 1$, $\frac{1}{4} - 5$,
$3{,}5 - \frac{35}{10}$, $3{,}07 - \frac{7}{100}$

2. Zmiešané číslo napíšte v tvare desatinných čísel:
$7\frac{1}{5}$, $3\frac{7}{20}$, $-4\frac{2}{9}$, $-8\frac{5}{11}$, $-20\frac{1}{8}$, $-100\frac{5}{17}$, $5\frac{10}{17}$

3. Zlomky napíšte ako zmiešané čísla:
$\frac{7}{2}$, $\frac{9}{4}$, $-\frac{18}{9}$, $-\frac{30}{7}$, $\frac{-42}{5}$, $\frac{29}{11}$, $\frac{105}{100}$, $\frac{39}{26}$, $\frac{51}{34}$

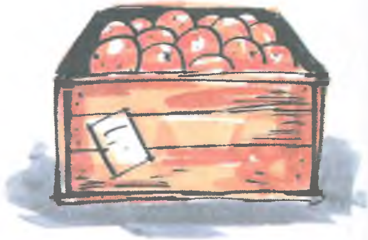
4. Vypočítajte: $4\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$, $2\frac{3}{10} + \frac{1}{2}$, $0{,}6 + 3\frac{1}{7}$, $6\frac{5}{7} - 3\frac{1}{14}$, $7\frac{1}{4} - 2\frac{3}{5}$, $0{,}8 + 1\frac{2}{5}$

5. Nahraďte písmená správnym číslom:

a) $3\frac{1}{7} + a = 8$ c) $b + 5\frac{3}{4} = 2$ e) $4\frac{1}{2} + z = -\frac{1}{5}$

b) $x + 2\frac{2}{5} = 10$ d) $y - \frac{1}{2} = 3$ f) $1\frac{1}{8} + c = 1\frac{3}{20}$

6. O koľko je súčet čísel $9\frac{1}{4}$ a $2\frac{1}{6}$ väčší, ako ich rozdiel?



.... **7.** Debnička s pomarančmi má hmotnosť $30\frac{1}{4}$ kg. Prázdna má hmotnosť $2\frac{1}{2}$ kg. Koľko kg pomarančov je v debničke?

.... **8.** Obvod trojuholníka je 30 cm. Veľkosti dvoch strán sú $9\frac{3}{4}$ cm a $8\frac{1}{5}$ cm. Vypočítajte dĺžku tretej strany trojuholníka.

.... **9.** Peter išiel na návštevu k tete. Z domu vyšiel ráno o 7. hodine. Cesta na stanicu mu trvala $\frac{1}{4}$ hodiny, vlakom cestoval $2\frac{1}{2}$ h a zo stanice k tete sa viezol autobusom 10 minút. Koľko bolo hodín, keď prišiel Peter k tete na návštevu?

.... **10.** Ktorý čas je dlhší:
0,31 hodiny alebo 31 minút
0,25 hodiny alebo 15 minút
0,85 minúty alebo 50 sekúnd?

2.5 Násobenie racionálnych čísel

2.5.1 Násobenie zlomkov

PROBLÉM 1

Zapíšte zjednodušene $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ a vypočítajte.

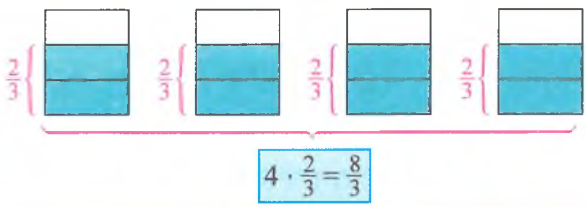
RIEŠENIE

Katka navrhuje: Súčet rovnakých sčítancov vieme zapísať v tvare súčinu:

$$\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}_{\frac{8}{3}} = 4\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \boxed{4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\,.\,2}{3}=\frac{8}{3}}$$

Adam ukazuje, ako on rieši úlohu. Využíva názorné zobrazenie:



Zlomok násobíme celým číslom tak, že čitateľa zlomku násobíme celým číslom a menovateľa ponecháme bez zmeny.

PROBLÉM 2

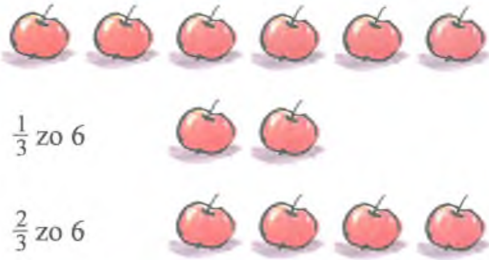
Vypočítajte $\frac{2}{3}$ zo 6.

RIEŠENIE

Peter vysvetľuje:

$\frac{1}{3}$ zo $6 = \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1 \cdot 6}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{2}{3}$ zo $6 = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$



PRÍKLAD 1

Vypočítajte: $9 \cdot \frac{5}{18}$, $63 \cdot \frac{5}{7}$, $\frac{3}{5} \cdot 45$

RIEŠENIE

$9 \cdot \frac{5}{18} = \frac{9 \cdot 5}{18} = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$63 \cdot \frac{5}{7} = \frac{63 \cdot 5}{7} = \frac{9 \cdot 5}{1} = 45$

$\frac{3}{5} \cdot 45 = \frac{3 \cdot 45}{5} = \frac{3 \cdot 9}{1} = 27$

ÚLOHA 1

Vypočítajte: $7 \cdot \frac{3}{8}$, $6 \cdot \frac{5}{4}$, $11 \cdot \frac{5}{9}$, $24 \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{1}{7} \cdot 35$, $\frac{3}{5} \cdot 45$, $\frac{8}{9}$ zo 6, $\frac{5}{7}$ zo 49.

PRÍKLAD 2

Osobné auto spotrebuje na 100 km jazdy priemerne $\frac{23}{4}$ l benzínu. S akou veľkou spotrebou musí počítať vodič auta na jazdu z Košíc do Bratislavy (400 km)?

RIEŠENIE

Janko vyhlási: Vieme, že na jazdu z Košíc do Bratislavy bude vodič potrebovať 4-krát viac benzínu, ako je spotreba na 100 km.

Preto $4 \cdot \frac{23}{4} = 4 \cdot \frac{23}{4} = \frac{23}{1} = 23$

Odpoveď: Na jazdu z Košíc do Bratislavy musí vodič počítať so spotrebou 23 l benzínu.

ÚLOHA 2

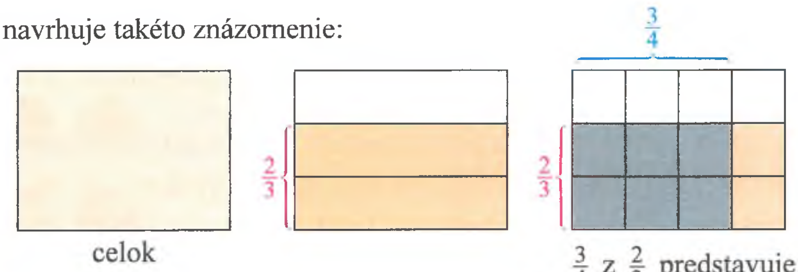
Vypočítajte obsah obdĺžnika, ak veľkosť jednej jeho strany je 8 cm a veľkosť druhej strany je $\frac{5}{4}$ cm.

PROBLÉM 3

Ako zistíme, koľko je $\frac{3}{4}$ z $\frac{2}{3}$?

RIEŠENIE

Miško navrhuje takéto znázornenie:



$\frac{3}{4}$ z $\frac{2}{3}$ predstavuje $\frac{6}{12}$ z celku, t. j. $\frac{1}{2}$

Janko sa hlási:

Ak si predstavíme, že $\frac{3}{4}$ a $\frac{2}{3}$ sú rozmery obdĺžnika, tak súčin $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ môžeme chápať ako výpočet jeho obsahu: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \,.\, 2}{4 \,.\, 3} = \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 1} = \frac{1}{2}$

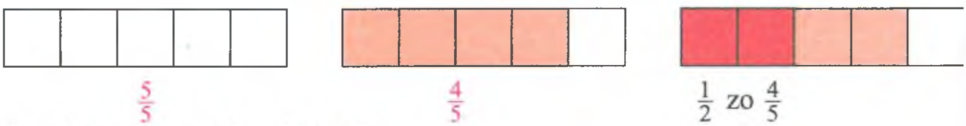
Zlomok násobíme zlomkom tak, že čitateľa násobíme čitateľom a menovateľa menovateľom.
Ak je možné zlomky krátiť, najskôr ich krátime.

PRÍKLAD 3

Vypočítajte: $\frac{1}{2}$ zo $\frac{4}{5}$ a $\frac{2}{3}$ zo $\frac{6}{11}$.

RIEŠENIE

Adam rieši príklad graficky i výpočtom:



$\frac{1}{2}$ zo $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \,.\, 4}{2 \,.\, 5} = \frac{1 \,.\, 2}{1 \,.\, 5} = \frac{2}{5}$

Podobne rieši príklad Janka:

$\frac{2}{3}$ zo $\frac{6}{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{11} = \frac{4}{11}$

PROBLÉM 4

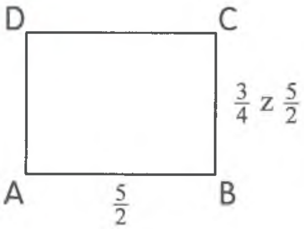
Eva sa pýta: Urobila som chybu, ak som pri násobení $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{11}$ nevyužila krátenie a vynásobila som čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom? Veď výsledok mám zhodný s Jankiným výsledkom.

Peter jej odpovedá: Nie je to chyba, ale počítaš s veľkými číslami a až konečný výsledok dáš do základného tvaru. Teda zlomok krátiš nakoniec.
Má Peter pravdu?

PRÍKLAD 4

Jedna strana obdĺžnika meria $\frac{5}{2}$ cm a druhá $\frac{3}{4}$ tejto strany. Vypočítajte obvod a obsah tohto obdĺžnika.

RIEŠENIE



Najprv vypočítame dĺžku druhej strany obdĺžnika:
$\frac{3}{4}$ z $\frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$
Potom vypočítame obvod obdĺžnika:
$\left(\frac{5}{2} + \frac{15}{8}\right) \cdot 2 = \left(\frac{20}{8} + \frac{15}{8}\right) \cdot 2 = \frac{35}{8} . 2 = \frac{35}{4} \cdot 1 = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$
Nakoniec vypočítame obsah:
$\frac{5}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{75}{16} = 4\frac{11}{16}$

Odpoveď: Obvod obdĺžnika meria $8\frac{3}{4}$ cm. Obsah obdĺžnika je $4\frac{11}{16}$ cm^2.

ÚLOHA 3

Vypočítajte povrch a objem kocky, ak hrana kocky meria $\frac{5}{6}$ dm.

2.5.2 Násobenie racionálnych čísel

ÚLOHA 1

Napíšte ako súčin a vypočítajte:

a) $0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}7$ b) $(-1{,}2) + (-1{,}2) + (-1{,}2)$

PRÍKLAD 1

Vypočítajte: a) $-6 \cdot \frac{7}{8}$ b) $9 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$ c) $8 \cdot 3\frac{2}{5}$

RIEŠENIE

a) Eva rieši: $-6 \cdot \frac{7}{8} = \frac{-6 . 7}{8} = \frac{-42}{8} = -\frac{21}{4} = -5\frac{1}{4}$
Peter využíva najskôr krátenie: $-6 \cdot \frac{7}{8} = \frac{-6 . 7}{8} = \frac{-3 . 7}{4} = -\frac{21}{4} = -5\frac{1}{4}$

b) Janka počíta: $9 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{18}{5} = -3\frac{3}{5}$

c) Julo vypočíta: $8 \cdot 3\frac{2}{5} = 8 \cdot \frac{17}{5} = \frac{136}{5} = 27\frac{1}{5}$

Pri násobení racionálnych čísel, z ktorých je aspoň jedno číslo záporné, postupujeme podobne, ako pri násobení celých čísel.

PRÍKLAD 2

Vypočítajte: a) $\frac{12}{15} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$ b) $\left(-\frac{9}{21}\right) \cdot \left(-\frac{7}{18}\right)$ c) $-5\frac{3}{4} \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)$

RIEŠENIE

a) $\frac{12}{15} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{3} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) = -1$

b) $\left(-\frac{9}{21}\right) \cdot \left(-\frac{7}{18}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$

c) $-5\frac{3}{4} \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) = -\frac{23}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{115}{8} = 14\frac{3}{8}$

PRÍKLAD 3

Vypočítajte: a) $-0{,}8 \cdot \frac{15}{10}$ b) $-4\frac{4}{5} \cdot (-0{,}15)$

RIEŠENIE

a) Zuzka rieši takto: $-0{,}8 \cdot \frac{15}{10} = -0{,}8 \cdot 1{,}5 = -1{,}20$

Julo rieši takto: $-0{,}8 \cdot \frac{15}{10} = -\frac{8}{10} \cdot \frac{15}{10} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{1} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$

Dostali obaja rovnaké výsledky?

b) $-4\frac{4}{5} \cdot (-0{,}15) = -\frac{24}{5} \cdot \left(-\frac{15}{100}\right) = -\frac{6}{1} \cdot \left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{18}{25}$

alebo: $-4\frac{4}{5} \cdot (-0{,}15) = -4{,}8 \cdot (-0{,}15) = 0{,}72$

Sú výsledky rovnaké?

ÚLOHA 2

Vypočítajte: $\frac{2}{5} \cdot (-0{,}05)$; $\left(-3\frac{3}{5}\right) \cdot (-0{,}25)$

PRÍKLAD 4

Ukážte, že platí komutatívnosť násobenia racionálnych čísel:

$$-0{,}4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \cdot (-0{,}4)$$

RIEŠENIE

Ivana rieši: Ľ $= (-0{,}4) \cdot \frac{5}{8} = -\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Zuzka rieši: P $= \frac{5}{8} \cdot (-0{,}4) = \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{4}{10}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Odpoveď: Ľ = P, komutatívnosť násobenia platí.

ÚLOHA 3

Overte komutatívnosť násobenia na nasledujúcich príkladoch:

a) $\frac{2}{11} \cdot 1\frac{5}{6}$ b) $(-0{,}16) \cdot \left(-3\frac{1}{8}\right)$

PRÍKLAD 5

Ukážte, že platí asociatívnosť násobenia racionálnych čísel:

$$\left(-5\tfrac{5}{7}\cdot 0{,}7\right)\cdot\tfrac{10}{21}=-5\tfrac{5}{7}\cdot\left(0{,}7\cdot\tfrac{10}{21}\right)$$

RIEŠENIE

Ondrej rieši: $Ľ=\left(-5\frac{5}{7}\cdot 0{,}7\right)\cdot\frac{10}{21}=\left(-\frac{40}{7}\cdot\frac{7}{10}\right)\cdot\frac{10}{21}=\left(-\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{1}\right)\,.\,\frac{10}{21}=-\frac{40}{21}=-1\frac{19}{21}$

Janka počíta: $P=-5\frac{5}{7}\cdot\left(0{,}7\cdot\frac{10}{21}\right)=-\frac{40}{7}\cdot\left(\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{21}\right)=-\frac{40}{7}\cdot\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\right)=-\frac{40}{7}\cdot\frac{1}{3}=$ $=-\frac{40}{21}=-1\frac{19}{21}$

Odpoveď: Ľ = P, asociatívnosť násobenia platí.

ÚLOHA 4

Overte asociatívnosť násobenia: a) $\left(0{,}8\cdot 6\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{8}$ b) $\left(0{,}32\cdot\frac{25}{96}\right)\cdot\left(-5\frac{3}{8}\right)$

PRÍKLAD 6

Zistite, či platí rovnosť:

$$0{,}8\cdot\left(\tfrac{2}{7}+\tfrac{3}{7}\right)=0{,}8\cdot\tfrac{2}{7}+0{,}8\cdot\tfrac{3}{7}$$

RIEŠENIE

Peter tvrdí: Rovnosť určite platí, lebo ide o distributívnosť násobenia. Pravá strana je vlastne roznásobením súčtu.

Presvedčme sa o tom, že Peter má pravdu:

$$Ľ = 0{,}8\cdot\left(\tfrac{2}{7}+\tfrac{3}{7}\right)=\tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{5}{7}=\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{5}{7}=\tfrac{4}{1}\cdot\tfrac{1}{7}=\tfrac{4}{7}$$

$$P = 0{,}8\cdot\tfrac{2}{7}+0{,}8\cdot\tfrac{3}{7}=\tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{2}{7}+\tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{3}{7}=\tfrac{8}{5}\cdot\tfrac{1}{7}+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{7}=\tfrac{8}{35}+\tfrac{12}{35}=\tfrac{20}{35}=\tfrac{4}{7}$$

Odpoveď: Ľ = P, rovnosť platí.

ÚLOHA 5

Vypočítajte čo najšikovnejšie:

a) $\left(\frac{3}{4}+0{,}25\right)\cdot\frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}$

b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{15}{9}\right)\cdot 0{,}3$ d) $2{,}5\,.\,8\,.\,4$

ÚLOHA 6

Riešte spamäti:

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{7}{23}\cdot 0\cdot(-0{,}65)$ b) $3\frac{2}{7}\cdot\frac{0}{9}\cdot\frac{9}{15}$ c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$ d) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}$

PROBLÉM 1

Čo je zaujímavé na súčine dvojíc: $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{2}$, -3 a $-\frac{1}{3}$, $0{,}7$ a $\frac{10}{7}$?

RIEŠENIE

Anička chvíľu rozmýšľa a hneď odpovedá: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$; $-3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$; $0{,}7 \cdot \frac{10}{7} = 1$
Súčin všetkých dvojíc sa rovná 1.
Števko sa hlási:
Všimol som si, že $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{2}$ sú prevrátené čísla. $-\frac{1}{3}$ je prevrátené číslo k -3.
K číslu 0,7 je prevrátené číslo $\frac{10}{7}$.

Dvojice racionálnych čísel, ktorých súčin sa rovná jednej, sa nazývajú navzájom **prevrátené čísla.**

ÚLOHA 7

Nájdite prevrátené čísla k číslam: $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{5}$; 0,3; $\frac{5}{13}$; $-3\frac{2}{4}$; -2; 2 a presvedčte sa násobením, či bolo vaše riešenie správne.

CVIČENIA

1. a) $\frac{1}{2}$ z 12, $\frac{2}{5}$ z 15, $\frac{3}{8}$ z 24, 0,3 z 20, $\frac{1}{5}$ z 25
b) $\frac{4}{7} \cdot 21$, $\frac{5}{9} \cdot 72$, $\frac{7}{12} \cdot 144$, $0{,}7 \cdot 40$, $\frac{3}{5} \cdot 125$
c) $8 \cdot \frac{1}{2}$, $42 \cdot \frac{5}{6}$, $54 \cdot \frac{4}{9}$, $120 \cdot 0{,}2$
d) $\frac{2}{5}$ z 35, $-48 \cdot \frac{5}{6}$, $-\frac{2}{3} \cdot 12$, $-0{,}4 \cdot (-11)$
e) $\frac{1}{2}$ zo $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{5}$ z $\frac{25}{32}$, $\frac{1}{3}$ z $\frac{9}{11}$, 0,1 z $\frac{10}{21}$

.... **2.** Rozmery obdĺžnika sú 16 cm a 15 cm. Jeho dlhšiu stranu sme zmenili na $\frac{3}{4}$ dĺžky tejto strany. Ako treba zmeniť druhú stranu obdĺžnika, aby zostal jeho obsah nezmenený?

.... **3.** $\frac{4}{5}$ žiakov 7. A triedy sa rovnajú $\frac{3}{4}$ žiakov zo 7. B triedy. Koľko žiakov má 7. B trieda, ak 7. A má 30 žiakov?

.... **4.** V jednom podniku sú z 1 050 zamestnancov $\frac{2}{3}$ žien. Z nich majú $\frac{4}{5}$ odbornú kvalifikáciu.
a) Koľko žien pracuje v podniku?
b) Koľko žien nemá odbornú kvalifikáciu?
c) Koľko mužov pracuje v podniku?

5. Akú hodnotu môže mať x, ak vieme, že x nie je záporné číslo a
a) $5x = 5$, b) $5x = 0$. Uvažujme, že x je zlomok.

6. Vypočítajte:
a) $\frac{1}{2}$ zo $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$ z $\frac{20}{11}$; $\frac{2}{8}$ zo $\frac{16}{7}$; $\frac{3}{4}$ z $\frac{12}{17}$
b) $\frac{1}{3}$ z $0,9$; $\frac{2}{3}$ z $(-0,9)$; $\frac{1}{2}$ z $(-0,8)$; $\frac{3}{2}$ z $(-0,8)$
c) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{8}$; $\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$; $-0,7 \cdot \frac{5}{8}$; $2\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27}$
d) $2\frac{3}{4} \cdot \left(-5\frac{7}{17}\right)$; $4\frac{3}{10} \cdot 8\frac{10}{12}$; $\left(-5\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-8\frac{4}{9}\right)$; $10\frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{18}{97}\right)$

7. Dĺžka jednej strany trojuholníka je $\frac{3}{4}$ dm, dĺžka druhej strany je $\frac{4}{5}$ dm. Dĺžka tretej strany je $\frac{2}{5}$ súčtu dĺžok prvej a druhej strany. Vypočítajte obvod trojuholníka.

8. V školskej knižnici bolo 648 učebníc. K 1. septembru vymenili $\frac{3}{4}$ z nich za nové. Z vymenených učebníc bola $\frac{1}{3}$ učebníc matematiky. Koľko starých učebníc matematiky vymenili za nové?

9. Vypočítajte povrch kocky, ktorej dĺžka hrany je $\frac{7}{6}$ dm.

10. Vypočítajte: a) $\frac{6}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)$; b) $\frac{21}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{14}\right)$; c) $\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{3}\right)$; d) $0,15 \cdot \left(4\frac{2}{5} - 1\frac{4}{3}\right)$

11. Vypočítajte, porovnajte a zapíšte znakmi <, >, =, :
a) $\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)$ a $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}$
b) $0,3 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{3}\right)$ a $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{5}$
c) $\left(2\frac{3}{4} + 5\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)$ a $4 + \frac{3}{7} \cdot \frac{9}{2}$
d) $\left(0,8 - \frac{2}{3}\right) \cdot 0,5$ a $0,5 \cdot \frac{7}{5} - 0,5 \,.\, \frac{2}{5}$
e) $\left(5 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right)$ a $\left(\frac{4}{7} - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(0,03 + \frac{7}{25}\right)$
f) $7,4 - 3\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) \cdot 0,12$ a $4 \,.\, 1\frac{7}{8} + 7 \,.\, 4\frac{5}{12} - 7\frac{3}{4}$

12. Počítajte s výhodou:
a) $\frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 40$; $120 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0,01$; $\frac{3}{7} \cdot 48 \cdot \frac{5}{8} \cdot 1\frac{14}{6}$
b) $\frac{2}{3} \cdot 0,4 + 2\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0,4$; $\left(6\frac{3}{5} - 5,6\right) \cdot \left(-4\frac{2}{7}\right)$

13. Milan mal 150 Sk a minul z nich 50 Sk. Ondrej mal 200 Sk a minul z nich 70 Sk. Ktorý z nich minul väčšiu časť svojich peňazí?

2.6 Delenie racionálnych čísel

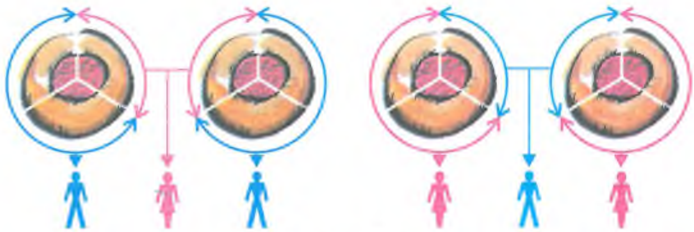
2.6.1 Delenie zlomkov

PRÍKLAD 1

Skupina chlapcov a dievčat sa vybrala na výlet. Dievčatá priniesli 4 tvarohové koláče, chlapci 9 pomarančov. Koľko detí bolo na výlete, keď si koláče i pomaranče rozdelili rovnakými dielmi a vieme, že každý z nich dostal $\frac{2}{3}$ koláča a $\frac{3}{2}$ pomaranča.

RIEŠENIE

Katka delí koláče: Každý rozdelí na tretiny.



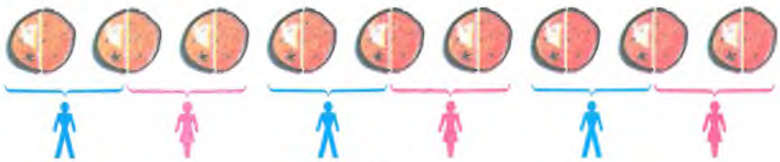
Má $\frac{12}{3}$. Každému dá $\frac{2}{3}$, t.j. $12 : 2 = 6$

Čo urobila Katka?

$$\boxed{4 : \frac{2}{3}} = \frac{12}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \boxed{4 \cdot \frac{3}{2}} = 6$$

$$\boxed{4 : \frac{2}{3}} = \boxed{4 \cdot \frac{3}{2}}$$

Števko delí pomaranče. Každý rozdelí na polovicu.



Má $\frac{18}{2}$. Každému dá $\frac{3}{2}$, t.j. $18 : 3 = 6$

Čo urobil Števko?

$$\boxed{9 : \frac{3}{2}} = \frac{18}{3} = \frac{9 \cdot 2}{3} = \boxed{9 \cdot \frac{2}{3}} = 6$$

$$\boxed{9 : \frac{3}{2}} = \boxed{9 \cdot \frac{2}{3}}$$

Odpoveď: Na výlete bolo 6 detí.

Celé číslo delíme zlomkom tak, že celé číslo násobíme prevráteným zlomkom.

PRÍKLAD 2

Vypočítajte: $1 : \frac{4}{5}$, $7 : \frac{3}{4}$

RIEŠENIE

$1 : \frac{4}{5} = 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

$7 : \frac{3}{4} = 7 \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

ÚLOHA 1

O správnosti riešenia príkladu 2 sa presvedčte tak, že vykonáte skúšku násobením.

PROBLÉM 1

Vypočítajte $5 : \frac{3}{4}$. Zapíšte delenca ako zlomok a deľte.

RIEŠENIE

Milan hovorí: Podiel musí byť rovnaký, či delíme $5 : \frac{3}{4}$ alebo $\frac{5}{1} : \frac{3}{4}$.
Všimnite si:

$$\boxed{5} : \frac{3}{4} = \boxed{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$
$$\boxed{\frac{5}{1}} : \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{1}} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

Zlomok delíme zlomkom tak, že ho násobíme prevráteným zlomkom.

PRÍKLAD 3

Vydeľte: a) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3} : 5$ c) $\frac{5}{7} : \frac{1}{3}$

RIEŠENIE

a) Zuzka rieši: $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$

Zároveň urobí aj skúšku správnosti: $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5}$

b) Adam počíta: $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ *Skúška:* $\frac{2}{15} \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

c) Igor počíta takto: $\frac{5}{7} : \frac{1}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{1} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ *Skúška:* $2\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{7}$

ÚLOHA 2

Určte k daným číslam prevrátené čísla:
$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{1}{2}$; 7; $-\frac{1}{5}$; 0; -5; $4\frac{2}{5}$; 3,8; $6\frac{4}{4}$.

ÚLOHA 3

Vyriešte spamäti: $\frac{2}{3}:\frac{3}{2}$; $0:\frac{5}{6}$; $\frac{2}{5}:\frac{4}{5}$; $3:\frac{1}{3}$.

ÚLOHA 4

Vypočítajte: $\frac{7}{8}:\frac{9}{24}$; $\frac{3}{7}:\frac{5}{14}$; $\frac{1}{2}:\frac{1}{30}$; $\frac{4}{15}:\frac{2}{5}$.

ÚLOHA 5

Koľko fliaš po $\frac{7}{10}$ l naplníme zo $\frac{49}{10}$ l sirupu?

2.6.2 Delenie racionálnych čísel

PRÍKLAD 1

Vypočítajte: a) $\frac{3}{5}:0{,}8$ b) $0{,}25:\left(-\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(-3\frac{2}{3}\right):0{,}7$

RIEŠENIE

a) Elena rieši: $\frac{3}{5}:0{,}8=\frac{3}{5}:\frac{8}{10}=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{8}=\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Ivana rieši takto: $\frac{3}{5}:0{,}8=0{,}6:0{,}8=0{,}75$

Skúste príklad vypočítať ešte iným spôsobom. Budú výsledky rovnaké?

b) $0{,}25:\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{25}{100}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{25}{25}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

c) $\left(-3\frac{2}{3}\right):0{,}7=-\frac{11}{3}:\frac{7}{10}=-\frac{11}{3}\cdot\frac{10}{7}=-\frac{110}{21}=-5\frac{5}{21}$

ÚLOHA 1

Urobte skúšky správnosti riešení v príkladoch 1 a), b), c).

ÚLOHA 2

Vypočítajte:

a) $4\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{8}:2\frac{1}{2}$; c) $8\frac{2}{5}:\left(-5\frac{4}{5}\right)$; d) $(-0{,}72):\frac{1}{2}$; e) $-\frac{7}{9}:\left(-3\frac{5}{6}\right)$, f) $\left(-4\frac{4}{7}\right):\left(-\frac{8}{7}\right)$

CVIČENIA

1. Napíšte prevrátené čísla k nasledujúcim číslam:
$\frac{5}{4}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{8}{9}$; $-\frac{1}{7}$; $7\frac{1}{2}$; $-5\frac{6}{7}$; 8; –27; 1; 0; 0,2; –0,7; 0,52; 3,5.

....

2. Vypočítajte: a) $6:\frac{3}{5}$, $12:\frac{4}{5}$, $3:\frac{11}{4}$, $5:\frac{5}{8}$, $24:\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{4}:3$, $\frac{12}{5}:2$, $\frac{18}{7}:6$, $\frac{24}{13}:8$, $\frac{35}{8}:7$, $\frac{81}{56}:9$
c) $-\frac{5}{11}:5$, $\frac{16}{13}:(-2)$, $-\frac{34}{3}:2$, $\frac{45}{2}:(-3)$, $-\frac{14}{17}:(-7)$
d) $5:\frac{5}{8}$, $-12:\frac{4}{5}$, $15:\left(-\frac{5}{6}\right)$, $-24:\frac{5}{6}$, $-42:\frac{3}{7}$

.... **3.** Koľko metrov látky treba na ušitie jednej mužskej košele, ak sa na ušitie 17 takýchto košieľ spotrebovalo $46\frac{3}{4}$ m látky?

.... **4.** Do koľkých balíčkov sa dá zabaliť 45 kg cukru, ak cukor balíme do balíčkov po $\frac{3}{4}$ kg?

.... **5.** Na vykurovanie rodinného domu na jednu sezónu, ktorá trvala $5\frac{1}{2}$ mesiaca, sa spotrebovalo 4 860 m^3 plynu. Vypočítajte priemernú mesačnú spotrebu plynu za vykurovacie obdobie.

.... **6.** Vypočítajte:

a) $\frac{3}{10} : \frac{1}{4}$, $\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$, $\frac{21}{2} : \frac{3}{5}$, $\frac{3}{10} : \frac{1}{16}$, $\frac{21}{5} : \frac{7}{15}$

b) $-\frac{45}{56} : \frac{5}{8}$, $\frac{279}{169} : \left(-\frac{9}{13}\right)$, $-\frac{243}{92} : \frac{27}{13}$, $-\frac{144}{235} : \left(-\frac{12}{5}\right)$

c) $1\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$, $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$, $14\frac{1}{2} : 4\frac{1}{9}$

d) $-4\frac{3}{5} : \frac{5}{23}$, $12\frac{3}{5} : \left(-1\frac{1}{20}\right)$, $-20\frac{1}{7} : \left(-10\frac{1}{14}\right)$, $-15\frac{7}{14} : 3\frac{1}{10}$

e) $2 : 3\frac{1}{3}$; $0{,}8 : \frac{4}{5}$; $\frac{7}{15} : 0{,}14$; $-0{,}4 : \frac{5}{2}$; $-3\frac{3}{5} : (0{,}5)$

.... **7.** Miškove hodinky meškajú za 9 hodín $1\frac{1}{2}$ minúty. Koľko minút zmeškajú za hodinu? Za aký čas budú meškať 1 minútu?

.... **8.** $\frac{3}{5}$ cesty sme už prešli, je to $\frac{6}{35}$ km. Akú veľkú celkovú cestu máme prejsť?

.... **9.** $\frac{2}{3}$ určitého čísla je 36. Aké veľké je toto číslo?

2.7 Zložené zlomky

PROBLÉM 1

Pani učiteľka hovorí: Doteraz sme sa učili zapisovať podiel dvoch celých čísel v podobe zlomku.
Pýta sa detí: Čo si myslíte, môžeme zapísať aj podiel:
– celého čísla a zlomku,
– zlomku a celého čísla,
– dvoch zlomkov?
Môže byť v čitateli aj v menovateli zlomku desatinné číslo?

RIEŠENIE

Peter si myslí, že na všetky otázky sa dá odpovedať kladne. Nesmieme však zabudnúť, že v menovateli žiadneho zlomku nesmie byť nula.

Žiaci píšu: Zuzka: $\dfrac{1}{\frac{3}{5}}, \dfrac{3}{\frac{4}{9}}$ Janka: $\dfrac{0{,}7}{\frac{3}{5}}, \dfrac{0{,}9}{1{,}2}$ Elenka: $\dfrac{\frac{1}{8}}{5}, \dfrac{-\frac{4}{7}}{9}$

vana: $\dfrac{-\frac{1}{7}}{-3\frac{1}{5}}, \dfrac{4\frac{1}{4}}{5\frac{1}{3}}$ Karol: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}}, \dfrac{\frac{4}{13}}{\frac{1}{2}}$

Zlomok, ktorý má v čitateli alebo v menovateli alebo v oboch opäť zlomok, nazývame **zložený zlomok.**

$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}}$ — čitateľ — hlavná zlomková čiara — menovateľ

Zápisy zlomkov v tejto podobe sú zložité. Preto sa ich snažíme upraviť do čo najjednoduchšieho tvaru.

PROBLÉM 2

Ako vyjadríme zlomok $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$ v jednoduchom tvare?

RIEŠENIE

Peter sa usmeje a hovorí. Vieme, že zlomok vyjadruje delenie.

čitateľ : menovateľ

Preto:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

PRÍKLAD 1

Upravte: a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}}$, b) $\dfrac{4}{\frac{3}{7}}$, c) $\dfrac{-\frac{12}{7}}{8}$, d) $\dfrac{-0{,}7}{-\frac{6}{5}}$, e) $\dfrac{1\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}}$, f) $\dfrac{-0{,}2}{-1{,}6}$

RIEŠENIE

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$

b) $\dfrac{4}{\frac{3}{7}} = 4 : \frac{3}{7} = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

c) $\dfrac{-\frac{12}{7}}{8} = -\frac{12}{7} : 8 = -\frac{12}{7} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{14}$

$$\text{d)}\quad \frac{-0{,}7}{-\frac{6}{5}} = -\tfrac{7}{10} : \left(-\tfrac{6}{5}\right) = -\tfrac{7}{10} \cdot \left(-\tfrac{5}{6}\right) = -\tfrac{7}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{7}{12}$$

$$\text{e)}\quad \frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{3}} = \tfrac{3}{2} : \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{8} = \tfrac{9}{16}$$

$$\text{f)}\quad \frac{-0{,}2}{-1{,}6} = -\tfrac{2}{10} : \left(-\tfrac{16}{10}\right) = -\tfrac{2}{10} \cdot \left(-\tfrac{10}{16}\right) = -\tfrac{1}{1} \cdot \left(-\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{8}$$

Peter si všimol niečo zaujímavé.
Vysvetľuje svojim spolužiakom, že vie veľmi rýchlo upraviť zložený zlomok.
Ako?

$$\text{Čitateľ: } 2 \cdot 5 \leftarrow \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} \rightarrow \text{menovateľ: } 7 \cdot 3$$

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3}} = \frac{10}{21} \qquad \text{lebo} \qquad \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} = \tfrac{2}{7} : \tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{5}{3} = \boxed{\frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3}} = \frac{10}{21}$$

ÚLOHA 1

Upravte na jednoduché zlomky: a) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}$, b) $\frac{\frac{3}{8}}{4}$, c) $\frac{24}{-\frac{5}{6}}$, d) $\frac{\frac{7}{5}}{0{,}9}$

CVIČENIA

1. Upravte:

a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}$, $\frac{\frac{5}{14}}{\frac{10}{21}}$, $\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{16}}$, $\frac{15}{\frac{5}{6}}$, $\frac{\frac{12}{5}}{2}$, $\frac{5\frac{7}{5}}{9\frac{1}{6}}$

b) $\frac{-3}{\frac{4}{7}}$, $\frac{-\frac{3}{5}}{7}$, $\frac{1}{-\frac{2}{5}}$, $\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$, $\frac{\frac{4}{5}}{0{,}6}$, $\frac{-0{,}14}{\frac{7}{25}}$

.... **2.** Vypočítajte: a) $\frac{2{,}4}{1{,}2}$

b) $\frac{1{,}25}{6{,}25}$

c) $\frac{0{,}48}{3{,}2}$

Aj tá najľahšia vec sa ti bude zdať obtiažnou,
ak ju budeš nerád robiť.

Terentius

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Nahraďte x takým číslom, aby každý zlomok bol:

a) menší ako 1: $\frac{2}{x}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{9}{x}$, $\frac{x}{-12}$

b) väčší ako 1: $\frac{3}{x}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x}{11}$, $\frac{-10}{x}$, $\frac{x}{-100}$

c) rovnal sa 1: $\frac{5}{x}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x}{8}$, $\frac{12}{x}$, $\frac{-15}{x}$

.... **2.** Zistite, ktoré z čísel je väčšie:

a) $\frac{2}{7}$, $\frac{-19}{20}$ b) $\frac{4}{9}$, $\frac{9}{17}$ c) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{11}$ d) $-2\frac{1}{7}$, $-\frac{15}{7}$

.... **3.** Určte najviac 3 čísla, ktoré sú väčšie ako 0,68 a zároveň menšie ako $\frac{4}{5}$.

.... **4.** Určte najviac 2 čísla, ktoré spĺňajú nerovnosť:

a) $-1{,}2 < x < -\frac{5}{6}$ b) $0{,}15 < x < \frac{1}{6}$

.... **5.** Ak pričítame k danému číslu $\frac{1}{7}$, dostaneme $\frac{1}{2}$. Určte dané číslo.

.... **6.** Dĺžka záhrady meria $27\frac{1}{4}$ m. O koľko m je tento rozmer väčší, ako šírka záhrady, ktorá meria $15\frac{1}{2}$ m. Vypočítajte obvod záhrady.

.... **7.** Janka minula v cukrárni $\frac{1}{2}$ zo svojich úspor, $\frac{1}{3}$ dala za zošit a zostalo jej 7 Sk. Koľko Sk mala Janka usporených?

.... **8.** Vypočítajte obsah obdĺžnika s rozmermi $2\frac{1}{8}$ m a $3\frac{2}{5}$ m.

.... **9.** Kamaráti oberali marhule. Peter obral $37\frac{1}{2}$ kg, Dušan o $3\frac{1}{4}$ kg menej. Janko obral 51 kg a Julo o $7\frac{2}{5}$ kg menej ako Janko. Koľko kg marhúľ obrali chlapci spolu?

.... **10.** Koľko priesad paradajok potrebujeme na vysadenie pozemku tvaru štvorca, ktorého rozmer je $14\frac{3}{4}$ m, ak na 1 m^2 potrebujeme 25 priesad?

.... **11.** Koľko korún zaplatila Zuzka v obchode s látkami, ak kúpila $3\frac{1}{2}$ m látky po 220 korún a 1,2 m po 190 korún?

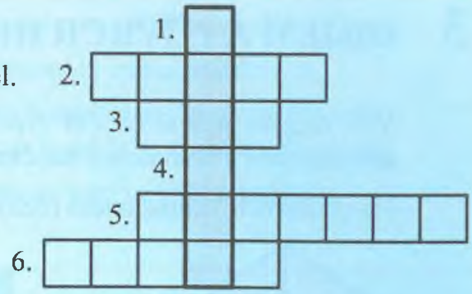
.... **12.** Ktorým číslom treba deliť $2\frac{3}{4}$, aby sme dostali $\frac{11}{12}$?

.... **13.** Ktorým číslom treba násobiť $2\frac{3}{4}$, aby sme dostali $8\frac{1}{3}$?

.... **14.** Upravte: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2+\frac{1}{3}}$, $\dfrac{3-\frac{1}{2}}{4\cdot\frac{1}{4}}$.

15. Krížovka

1. Označenie množiny celých čísel.
2. Teleso s kruhovou podstavou.
3. Základný geometrický útvar.
4. Meter.
5. $-2 = 1 - 3$
6. Teleso so zhodnými stenami.



16. Osemsmerovka

Výrok Eulera: MATEMATIKA ... (dokončenie v osemsmerovke)

V	H	R	A	N	O	L	L	J	A	P
E	A	K	A	K	O	L	E	C	Ľ	E
Ú	Z	L	O	M	O	K	I	Č	O	R
M	H	V	E	K	O	R	D	V	G	C
I	R	N	Š	C	O	E	Z	T	A	E
P	E	K	K	V	Ý	P	O	M	U	N
J	P	Y	T	A	G	O	R	A	S	T
Ľ	U	Š	D	S	K	D	Ý	Ú	S	Á
M	Ľ	E	T	A	T	I	Č	L	E	N
G	R	A	F	V	E	E	D	O	M	O
S	K	R	Á	T	T	L	T	I	A	M

CELOK, ČITATEĽ, ČLEN, GAUSS, GRAF, HRANOL, IHLAN, KOCKY, KRÁT, MENEJ, PERCENTÁ, PODIEL, PRVOK, PYTAGORAS, ROZDIEL, SÚČET, ŠTVORICA, VALEC, ZLOMOK

Johann Bernoulli

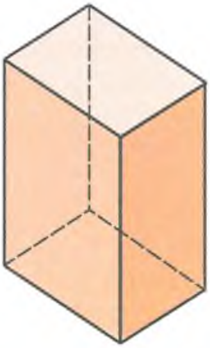
(1667 až 1748)

Švajčiarsky matematik a fyzik, narodil sa v Bazileji. Chcel sa stať kupcom. Pod vedením brata Jacoba však vyštudoval matematiku a medicínu. Dosiahol pozoruhodné výsledky takmer vo všetkých oblastiach matematiky. Napísal aj práce dôležité pre rozvoj fyziky. Jeho žiakmi boli jeho traja synovia a aj Leonhard Euler. Bol čestným členom Petrohradskej akadémie vied.

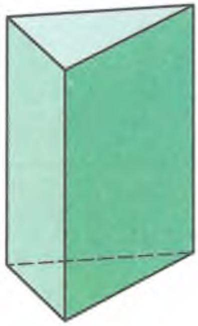
3 OBJEM A POVRCH HRANOLA

V 6. ročníku sme sa naučili vypočítať objem a povrch kvádra a kocky. Teraz sa oboznámime s hranolom a naučíme sa vypočítať jeho objem a povrch.

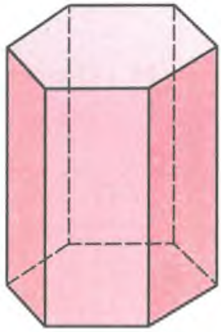
Na obrázkoch vidíme telesá rôznych tvarov.



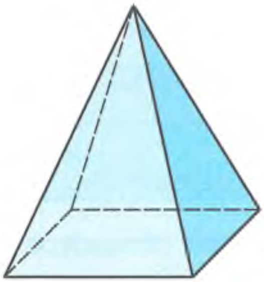
kváder – štvorboký hranol



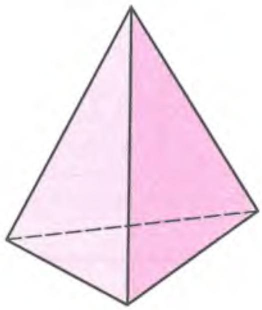
trojboký hranol



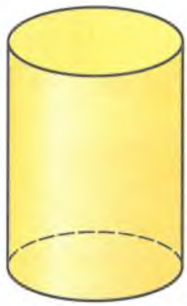
šesťboký hranol



štvorboký ihlan



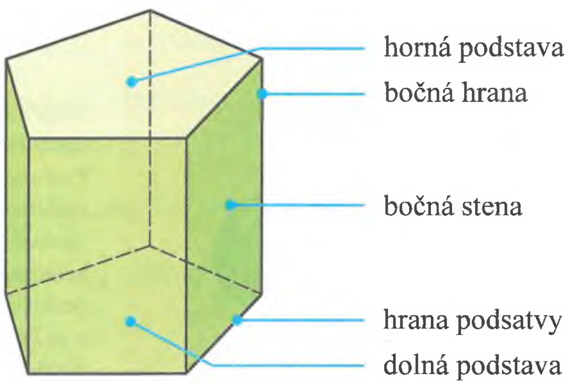
štvorsten



valec

Z nich jeden je trojboký kolmý hranol a jeden šesťboký kolmý hranol.

Na ďalšom obrázku je zobrazený päťboký kolmý hranol.



Každý kolmý hranol má bočné steny tvaru obdĺžnika alebo štvorca.

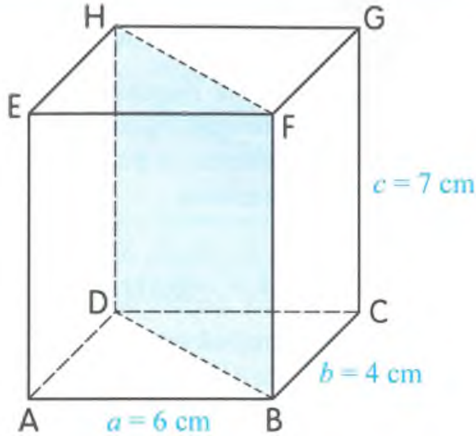
Všetky bočné steny hranola tvoria **plášť.**

Podľa toho, aký rovinný obrazec je podstavou hranola, hovoríme o trojbokom hranole, štvorbokom hranole, ... (n-bokom hranole).

Vzdialenosť podstáv hranola sa nazýva **výška hranola.**

PRÍKLAD 1

Kváder s hranami dĺžky a = 6 cm, b = 4 cm, c = 7 cm rozrežte na dva trojboké hranoly. Vypočítajte objem jedného z nich.



RIEŠENIE

Na obrázku vidíme obraz kvádra *ABCDEFGH.*

Rozdelením kvádra vzniknú dva trojboké hranoly, ktorých podstavy sú zhodné a majú rovnaké výšky.

Preto objem takto vzniknutého hranola bude polovicou objemu kvádra. V_k je objem kvádra a V_h je objem vzniknutého hranola. Vypočítajme V_k a V_h.

a)

$a = 6$ cm
$b = 4$ cm
$c = 7$ cm
$V_k = \dots$ cm^3

$V_k = a \,.\, b \,.\, c$

$V_k = 6 \,.\, 4 \,.\, 7$
$V_k = 168$

$V_k = 168$ cm^3

b)

$V_k = 168$ cm^3
$V_h = \dots$ cm^3

$V_h = \frac{1}{2}\, V_k$
$V_h = \frac{1}{2} \,.\, 168$
$V_h = 84$

$V_h = 84$ cm^3

Vráťme sa ešte k vzorcom na výpočet objemov telies:

$$V_k = a \,.\, b \,.\, c$$

$$V_h = \frac{1}{2} V_k$$

$$V_h = \frac{1}{2} a \,.\, b \,.\, c = \left(\frac{1}{2} a \,.\, b\right) . \, c$$

Podstava hranola je pravouhlý trojuholník ABD, ktorého odvesny sú a, b, potom $\frac{1}{2}(a \,.\, b)$ je obsah S podstavy ABD. Objem hranola vypočítame $V_h = S \,.\, c$, kde c je výška hranola.

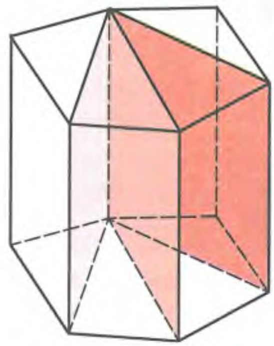
Objem trojbokého hranola vypočítame, keď vynásobíme obsah podstavy výškou hranola.

PROBLÉM 1

Peter sa pýta: Vieme vypočítať len objem trojbokého kolmého hranola?

RIEŠENIE

Pani učiteľka hovorí: Nie. Vieme vypočítať objem každého hranola, v ktorom vieme vypočítať obsah podstavy. Podstava je vždy mnohouholník. Mnohouholník vieme rozdeliť na neprekrývajúce sa trojuholníky. Obsah trojuholníka vieme vypočítať, obsah mnohouholníka (podstavy) sa potom rovná súčtu obsahov jednotlivých trojuholníkov.

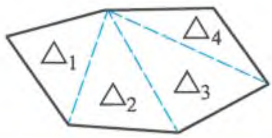


Hranol vieme rozrezať na trojboké hranoly, ktorých výšky sa rovnajú výške pôvodného hranola.
Objem hranola sa bude rovnať súčtu objemov trojbokých hranolov.

Označme S_1, S_2, S_3, S_4 obsahy trojuholníkov $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, v je výška hranolov.

Objemy trojbokých hranolov označme V_1, V_2, V_3, V_4.
V je objem celého šesťbokého hranola, teda

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = S_1v + S_2v + S_3v + S_4v =$
$= (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \,.\, v = S_p \,.\, v$
S_p je obsah podstavy.

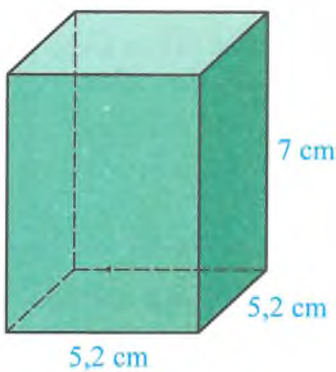


Objem ľubovoľného hranola vypočítame, keď vynásobíme obsah podstavy hranola jeho výškou.

$$\boxed{V = S_p \,.\, v}$$

PRÍKLAD 2

Vypočítajte objem pravidelného štvorbokého hranola, ktorého dĺžka podstavnej hrany je 5,2 cm a výška hranola je 7 cm.



POZNÁMKA

Pravidelný štvorboký hranol je špeciálny prípad štvorbokého hranola. Jeho podstava je štvorec.

RIEŠENIE

Vieme, že pravidelný štvorboký hranol má podstavu tvaru štvorca. Andrej hovorí: použijeme známy vzorec na výpočet objemu hranola.

$a = 5{,}2$ cm
$v = 7$ cm
$V = \dots$ cm^3

$V = S_p \,.\, v$

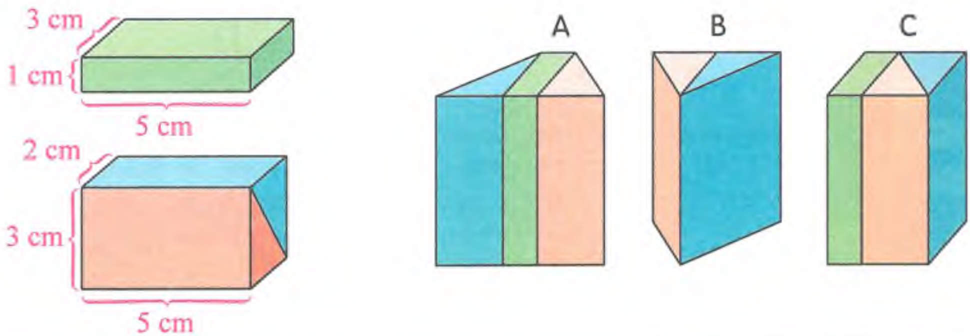
$V = 5{,}2 \,.\, 5{,}2 \,.\, 7$
$V = 189{,}28$

$V = 189{,}28$ cm^3

Odpoveď: Objem daného hranola je 189,28 cm^3.

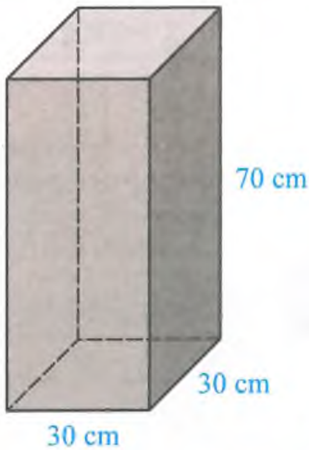
ÚLOHA 1

Na obrázku sú dané dva kvádre, ktorých rozmery sú určené. Z nich sú vytvorené hranoly *A*, *B*, *C* (pozri obrázok). Určte ich objemy.



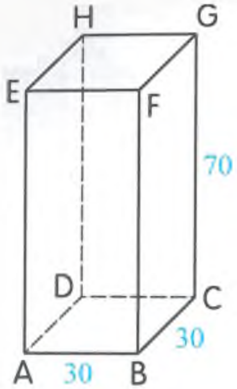
PRÍKLAD 3

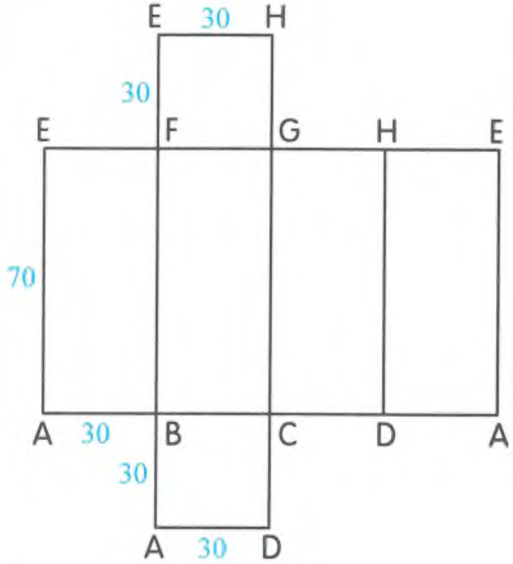
Uzatvorená lepenková škatuľa má tvar pravidelného štvorbokého hranola. Hrana podstavy má dĺžku 30 cm, výška hranola je 70 cm. Rozstrihnite a rozložte škatuľu a vypočítajte veľkosť jej povrchu.



RIEŠENIE

Tento raz sa na riešenie podujal Janko. Nakreslil obraz hranola vo voľnom rovnobežnom premietaní. Označil vrcholy a potom nakreslil sieť hranola, ktorá sa skladá zo štyroch zhodných obdĺžnikov s rozmermi 30 cm a 70 cm a z dvoch zhodných štvorcov so stranou 30 cm.





$a = 30$ cm
$S_p = \ldots$ cm^2

$S_p = a \,.\, a$
$S_p = 30 \,.\, 30$
$S_p = 900$

$S_p = 900$ cm^2

$2 \,.\, S_p = 1\,800$ cm^2

$a = 30$ cm
$v = 70$ cm
$S_1 = \ldots$ cm^2

$S_1 = a \,.\, v$
$S_1 = 30 \,.\, 70$
$S_1 = 2\,100$

$S_1 = 2\,100$ cm^2

Obsah plášťa Q je súčet obsahov bočných stien. V našom prípade súčet obsahov štyroch zhodných obdĺžnikov s obsahom S_1.

$Q = 4 \,.\, S_1$
$Q = 4 \,.\, 2\,100$
$Q = 8\,400$

$Q = 8\,400$ cm^2

$S = 1\,800 + 8\,400 = 10\,200$
$S = 10\,200$ cm^2

Odpoveď: Povrch daného hranola je 10 200 cm^2.

Povrch kolmého hranola sa skladá zo všetkých jeho neprekrývajúcich sa stien (2 podstavy a plášť).
Veľkosť S povrchu hranola vypočítame tak, že sčítame obsahy obidvoch jeho podstáv s obsahom plášťa.

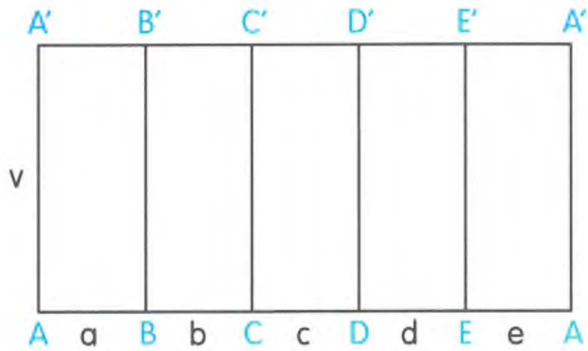
$$\boxed{S = 2 \,.\, S_p + Q}$$

PROBLÉM 1

Obsah Q plášťa musíme vždy vypočítať ako súčet obsahov bočných stien? Pýta sa Miško.

RIEŠENIE

Odpovedá Martin.
Postup môžeme zjednodušiť takto: Obsah každej bočnej steny je vždy súčinom dĺžky podstavnej hrany a výšky hranola. Výška hranola je druhý rozmer každého obdĺžnika, ktorý tvorí bočnú stenu.
Napríklad plášť päťbokého hranola je tvorený piatimi obdĺžnikmi.



Obsah plášťa Q sa rovná obsahu obdĺžnika, ktorého rozmery sú $a + b + c + d + e$ a v, kde $a + b + c + d + e = o$ je obvod podstavy hranola.

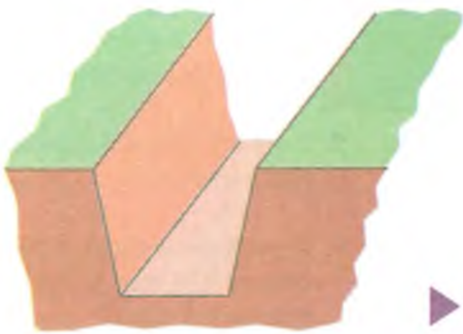
Jeho obsah vypočítame podľa vzorca $Q = o \cdot v$

Obsah plášťa vypočítame ako obsah obdĺžnika tak, že obvod podstavy vynásobíme výškou kolmého hranola.

$$\boxed{Q = o \cdot v}$$

PRÍKLAD 4

Na obrázku je nakreslená časť priekopy, ktorej rez má tvar lichobežníka. Vypočítajte koľko m^3 zeminy treba vykopať, aby vznikla priekopa 15 m dlhá, v spodnej časti 60 cm a v hornej časti 90 cm široká, pričom jej hĺbka má byť 70 cm.



RIEŠENIE

Priekopa má tvar hranola, ktorého podstava je lichobežník s rozmermi $z_1 = 0{,}90$ m, $z_2 = 0{,}60$ m a výškou $v_1 = 0{,}70$ m. Dĺžka priekopy 15 m je súčasne výškou v hranola.

$$z_1 = 0{,}90\,\mathrm{m}$$
$$z_2 = 0{,}60\,\mathrm{m}$$
$$v_1 = 0{,}70\,\mathrm{m}$$
$$S_p = \ldots\,\mathrm{m}^2$$

$$S_p = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v_1$$

$$S_p = \frac{0{,}90 + 0{,}60}{2} \cdot 0{,}70$$
$$S_p = 0{,}525$$

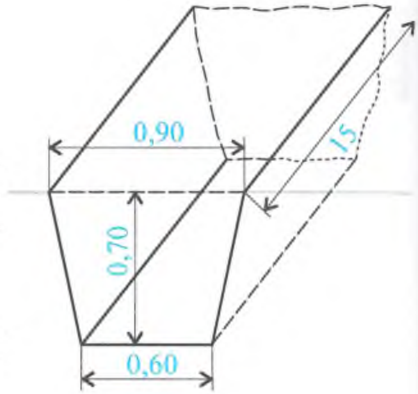
$$S_p = 0{,}525\,\mathrm{m}^2$$

$$S_p = 0{,}525\,\mathrm{m}^2$$
$$v = 15\,\mathrm{m}$$
$$V = \ldots\,\mathrm{m}^3$$

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = 0{,}525 \cdot 15$$
$$V = 7{,}875$$

$$V = 7{,}875\,\mathrm{m}^3 \doteq 8\,\mathrm{m}^3$$



Odpoveď: Na vznik požadovanej priekopy treba vykopať približne 8 m^3 zeminy.

CVIČENIA

1. Vymenujte predmety zo svojho okolia, ktoré majú tvar hranola.

2. Vypočítajte objem trojbokého hranola, ktorého podstava je pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b, ak je dané:
a) $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $v = 5{,}5$ dm
b) $a = 2{,}6$ m, $b = 2{,}6$ m, $v = 7{,}4$ m
c) $a = 120$ cm, $b = 98$ cm, $v = 3{,}2$ m.

3. Chladnička má rozmery podstavy 60 × 60 cm a výšku 83 cm. Vnútorný úžitkový priestor má objem 100 l. Aká časť objemu chladničky pripadá na jej ostatné časti?

4. Pravidelný štvorboký hranol má hranu podstavy $a = 2{,}4$ dm, bočnú hranu $h = 36$ cm. Vypočítajte jeho objem a povrch.

5. Trojboký hranol má objem 33,3 dm^3, obsah podstavy je 600 cm^2. Vypočítajte výšku hranola.

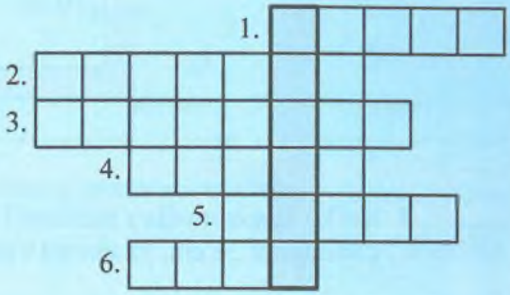
6. Vypočítajte veľkosť výhrevnej plochy ohrievača s podstavou tvaru štvorca so stranou 270 mm a bočnou výškou 850 mm. (Plocha dna sa do výhrevnej plochy nepočíta).

7. Záhradkár použil na oplotenie pozemku 18 stĺpov s podstavou 15 cm × 15 cm a výškou 150 cm nad zemou. Vypočítajte, koľko farby bude potrebovať na dvojnásobný náter stĺpov, keď na 8 m^2 treba 1 kg farby.

8. Osvetľovacie teleso tvaru valca s priemerom dna 11 cm a výškou 35 cm je uložené v kartónovom obale tvaru pravidelného štvorbokého hranola. Rozmery hranola sú vo všetkých smeroch o dva milimetre väčšie, ako rozmery svietidla, dná (obidve podstavy) sú dvojité. Vypočítajte, aký veľký je kartónový obal (celkový obsah plochy lepenky, z ktorej je kartón vyrobený).

9. Krížovka

1. bočná ...
2. dĺžky hrán kvádra nazývame
3. S_p je obsah
4. predná ... hranola
5. písmenom S označujeme
6. ostrý ...

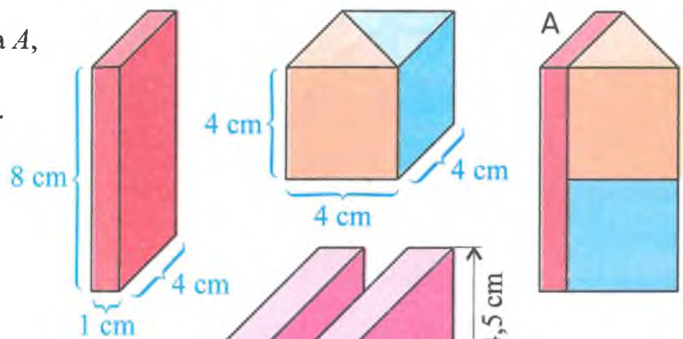


VYSKÚŠAJTE SA!

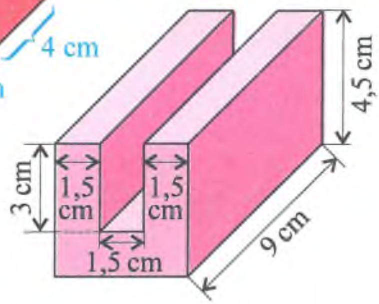
1. Doplňte tabuľku:

m^3	dm^3	cm^3	l
2			
	220		
			1 500
		1 200 000	

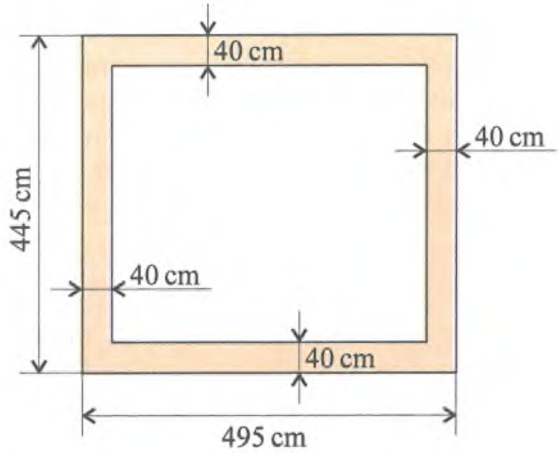
2. Určte objem hranola A, ak poznáte rozmery daných dvoch telies.



3. Vypočítajte objem a povrch telesa, ktoré vidíte na obrázku.

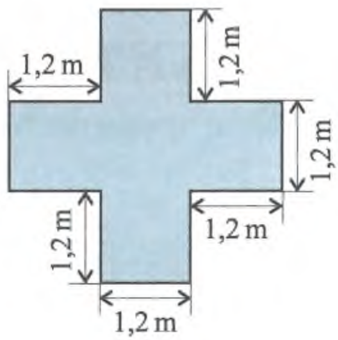


.... **4.** Koľko m^3 zeminy treba odviesť pri kopaní základov na rekreačnú chatu (rozmery sú na obrázku), ak šírka základov je 40 cm a hĺbka 0,75 m.



.... **5.** Koľko kusov mydla s rozmermi 125 mm, 55 mm a 4 cm sa zmestí do škatule s rozmermi 56 cm, 55 cm a 25 cm?

.... **6.** Koľko ton cementu treba na vybetónovanie dvoch pilierov vysokých 6,5 m s podstavou, ktorej tvar a rozmery sú na obrázku. Na 1 m^3 betónu treba 2,5 q cementu.



Veľké šťastie vždy rozpráva, ale veľká bolesť je nemá.

R. Descartes

4 VÝRAZ A JEHO ÚPRAVA

4.1 Číselný výraz

ZOPAKUJME SI

Poznáme štyri počtové operácie

$5{,}2 + 1{,}8$	$\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$	$10{,}1 \,.\, 0{,}1$	$-99 : 6$
súčet	**rozdiel**	**súčin**	**podiel**

Názov každej počtovej operácie označuje

zápis operácie pomocou čísel a znaku operácie — výsledok operácie

PRÍKLAD 1

Martin prečíta zápisy počtových operácií a vypočíta výsledok.

$5{,}4 + 2 \qquad 5{,}4 - 2 \qquad \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8} \qquad \frac{5}{3} : \frac{1}{8}$

Skontrolujte jeho riešenie.

RIEŠENIE

Súčet čísel 5,4 a 2 je 7,4.

Súčin čísel $\frac{5}{3}$ a $\frac{1}{8}$ je $\frac{5}{24}$.

Rozdiel čísel 5,4 a 2 je 3,4.

Podiel čísel $\frac{5}{3}$ a $\frac{1}{8}$ je $\frac{40}{3}$.

Príklad zapísaný pomocou čísel, znakov počtových operácií a zátvoriek, nazývame **číselný výraz.**
Hodnota číselného výrazu je výsledok príkladu.

Napríklad $5{,}4 + 2$; $(5{,}4 - 2) \cdot \frac{2}{5}$; $(33 : 3) - \frac{11}{2}$ sú číselné výrazy.

ÚLOHA 1

Napíšte číselné výrazy a určte ich hodnoty:

a) súčet čísel päťdesiattri a dvestoosem,
b) rozdiel čísel jedenásť celých šesť desatín a dvadsať,
c) súčin čísel mínus päť a nula celá tri stotiny,
d) podiel čísel stoštyridsaťštyri a mínus dvanásť.

ÚLOHA 2

Napíšte ako číselné výrazy a určte ich hodnoty:

a) od súčtu čísel 20,4 a 15,5 odčítajte súčin čísel 1,5 a –2,2;

b) k podielu čísel –16,9 a 1,3 pričítajte súčin čísel 6,9 a 1,7;

c) súčin čísel $\frac{1}{4}$ a $\frac{5}{7}$ delený číslom $-\frac{2}{3}$;

d) súčet čísel $\frac{1}{4}$ a $\frac{5}{7}$ zmenšený o $\frac{2}{3}$.

PROBLÉM 1

Vypočítajte hodnotu výrazu: $(((5 + 7) - 3) : (11 - 2)) . 8$

RIEŠENIE

Paľko si najskôr nakreslí, ktoré zátvorky k sebe patria, (každá ľavá zátvorka má svoju pravú, ktorá k nej patrí):

$$\begin{aligned} &(((5 + 7) - 3) : (11 - 2)) . 8 = \\ =\ &((\ \ 12\ \ - 3) :\ \ 9\ \ ) . 8 = \\ =\ &(\ \ 9\ \ :\ \ 9\ \ ) . 8 = \\ =\ &\ \ 1\ \ . 8 = 8 \end{aligned}$$

POZNÁMKA

Ak sa vo výraze vyskytujú viacnásobné zátvorky, môžeme použiť na prehľadnejší zápis aj zátvorky iných tvarov: hranaté [ ] a zložené (množinové) { }. Poradie „vnorenia" zátvoriek je potom takéto: {[( )]}. Predchádzajúci príklad potom zapíšeme:

$$\{[(5 + 7) - 3] : (11 - 2)\} . 8$$

Pri výpočte hodnoty výrazu môžeme zostávajúce zátvorky nahradiť jednoduchšími.

PRÍKLAD 2

Vypočítajte:

a) $(1,2 + 5,7) : 3$

b) $2 . [10 - (6 . 4)]$

c) $\{22 - [14 : (200 - 186) + 5]\} - 16$

RIEŠENIE

a) $(1,2 + 5,7) : 3 = 6,9 : 3 = 2,3$

b) $2 . [10 - (6 . 4)] = 2 . (10 - 24) = 2 . (-14) = -28$

c) $\{22 - [14 : (200 - 186) + 5]\} - 16 = [22 - (14 : 14 + 5)] - 16 = (22 - 6) - 16 =$
$= 16 - 16 = 0$

Výraz v zátvorke má vždy prednosť.
Ak vo výraze nie sú zátvorky, má násobenie a delenie vždy prednosť pred sčítaním a odčítaním.

ÚLOHA 3

V nasledujúcich výrazoch najskôr vynechajte zátvorky tam, kde je to možné, bez toho, aby ste niečo počítali, a potom vypočítajte hodnotu výrazu:

a) $2 + 9 + (6 + 5)$
b) $3 . 8 . (0{,}1 . 5)$
c) $(-2) . 3 + [4 + (-2)]$
d) $(2 + 9) . 0{,}3$
e) $(3 - 8) : 5$
f) $4 . [(-5) + (-1{,}2)]$

PRÍKLAD 3

Zapíšte a určte, čomu sa rovná:

a) trojnásobok rozdielu čísel $1{,}2$ a $0{,}24$;
b) pätina súčtu čísel 31 a -6;
c) dvojnásobok opačnej hodnoty k súčtu čísel $\frac{15}{4}$ a $\frac{7}{2}$.

RIEŠENIE

Barborka a Lukáš zapisujú a počítajú:

a) najskôr zapíšeme rozdiel: $1{,}2 - 0{,}24$
trojnásobok tohto rozdielu: $3 . (1{,}2 - 0{,}24)$
výpočet: $3 . (1{,}2 - 0{,}24) = 3 . 0{,}96 = 2{,}88$

b) súčet: $31 + (-6)$
pätina súčtu: $\frac{1}{5} \cdot [31 + (-6)]$
výpočet: $\frac{1}{5} \cdot [31 + (-6)] = \frac{1}{5} \cdot 25 = \frac{25}{5} = 5$

c) súčet: $\frac{15}{4} + \frac{7}{2}$
opačná hodnota: $-\left(\frac{15}{4} + \frac{7}{2}\right)$
dvojnásobok opačnej hodnoty: $2 . \left[-\left(\frac{15}{4} + \frac{7}{2}\right)\right]$
výpočet: $2 . \left[-\left(\frac{15}{4} + \frac{7}{2}\right)\right] = 2 . \left(-\frac{29}{4}\right) = -\frac{29}{2}$

POZNÁMKA

Zátvorky môžeme vynechať, ak výraz obsahuje iba operácie sčítanie a odčítanie alebo iba niekoľko operácií násobenia.
Platí: $[1 + (-3)] + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, *alebo* $(12 - 6) + (9 - 10) = 12 - 6 + 9 - 10 = 6 - 1 = 5$
Pozor však na prípad, keď je pred zátvorkou znamienko mínus:

$$(2 + 3) - (2 - 1) = 2 + 3 - 2 + 1 = 4$$

ÚLOHA 4

Zapíšte a určte, čomu sa rovná:
a) štvornásobok súčtu čísel 0,25 a 1,25;
b) tretina rozdielu čísel 1,5 a 0,9;
c) polovica súčinu čísel $\frac{7}{3}$ a $\frac{6}{5}$.

ÚLOHA 5

Dané sú výrazy:
a) (728 – 504) a (12 + 18)
b) (62 : 31) a (1,8 – 3)
c) (12 + 8 . 4,5) a $\frac{2,4}{2}$

Zapíšte a postupne vypočítajte hodnotu ich súčtu, rozdielu a súčinu.

ÚLOHA 6

Zapíšte podiel daných výrazov a vypočítajte jeho hodnotu.
a) (220 – 26) a (0,8 + 1,2)
b) 33 033 : 33 a 99 – 88
c) (2 – 1,72) a (0,04 + 0,1)

CVIČENIA

1. Určte hodnotu výrazov. Pri každom výraze povedzte, akú počtovú operáciu predstavuje:
a) 5,6 : 0,07 b) –24 – 108 c) $\frac{1}{11} + \frac{3}{4}$ d) $0{,}12 \cdot \frac{5}{6}$

2. Napíšte číselné výrazy a určte ich hodnoty:
a) súčet čísel pätnásť a nula celá pätnásť stotín;
b) rozdiel čísla jedna tretina a jedna polovica;
c) súčin čísel mínus jedna štvrtina a mínus dve tretiny;
d) podiel čísel mínus osem a sto.

3. Napíšte ako číselné výrazy a určte ich hodnoty:
a) od rozdielu čísel 15 a 2,8 odčítajte podiel čísel 25,6 a –8;
b) k súčtu čísel $\frac{6}{7}$ a $\frac{3}{5}$ pričítajte ich súčin a podiel;
c) podiel čísel 1 000 a 250 zmenšený o $\frac{1}{2}$.

4. Vypočítajte:

a) 0,4 + 0,02 . 8	d) 3,5 – 1,8 : 2	g) 1,4 . 0,4 – 1
b) 0,4 – 0,02 . 8	e) 0,5 . 0,6 – 0,02	h) (–0,26) : (0,03 + 0,1)
c) (1,3 + 3,7) : 2	f) 0,72 : 9 + 0,92	i) (0,2 + 1,8) . (–2)

.... **5.** Vypočítajte:
a) $100 - [31 - (17 + 4)]$
b) $5 \,.\, 13 + 6 \,.\, [(7.4 - 8) - 11 \,.\, 3 - 9]$
c) $6 \,.\, [5 \,.\, (12 - 7) - 3 \,.\, 4] - 10$
d) $\{61 - [11 - (13 + 9) : 2] + 48 : 4\} \,.\, 2 - 7 \,.\, 9$

.... **6.** Vypočítajte:
a) $\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) : 4 - \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) : 1\frac{1}{3}$
c) $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)$
b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$
d) $\left(0{,}5 + 5\frac{2}{5}\right) - \left(4{,}2 + \frac{3}{2}\right) : \frac{5}{2}$

.... **7.** Vypočítajte a porovnajte výsledky:
a) $3 - 5 : 2$ $\quad (3 - 5) : 2$
b) $3{,}5 - 1{,}8 : 2$ $\quad (3{,}5 - 1{,}8) : 2$
c) $0{,}5 \,.\, 4 + 3{,}6$ $\quad 0{,}5 \,.\, (4 + 3{,}6)$

.... **8.** V nasledujúcom zápise sú niektoré zátvorky zbytočné. Vynechajte ich a výraz prepíšte bez toho, aby ste niečo počítali:
a) $[(8-2) \,.\, 3] + [40 : (10-2)]$
b) $(-10{,}4) + \{23 - [(12 - 6) + (0{,}7 - 0{,}3)] + (-1{,}2)\}$

.... **9.** Zapíšte a určte, čomu sa rovná:
a) desaťnásobok súčtu prvých troch prirodzených čísel;
b) dvojnásobok súčinu čísla -5 a čísla od neho o 2 väčšieho;
c) polovica podielu čísel $0{,}25$ a $0{,}05$;
d) šestina súčtu čísel $\frac{5}{6}$ a $\frac{5}{3}$.

.... **10.** Dané sú výrazy:
a) $9 - 5$ a $7 - 10$
b) $18 - 20$ a $17 - 30$
c) $-1{,}2 - 0{,}6$ a $-1{,}2 + 0{,}6$
d) $8{,}8 - 2{,}2$ a $7{,}6 - 9$
e) $\frac{2}{3} + 2$ a $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$

Zapíšte a postupne vypočítajte hodnotu ich súčtu, rozdielu a súčinu.

.... **11.** Zapíšte podiel daných výrazov a určte jeho hodnotu:
a) $100 - 55$ a $1{,}5 - 0{,}6$
c) $\frac{1}{8} - \frac{3}{4}$ a $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$
b) $0{,}13 \,.\, 2$ a $520 : 2$
d) $4\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

.... **12.** Na prvej zastávke nastúpilo do autobusu 15 cestujúcich. Na nasledujúcich piatich zastávkach bol pohyb cestujúcich takýto: 10 vystúpilo a 16 nastúpilo, 5 vystúpilo a 9 nastúpilo, 3 vystúpili a 18 nastúpilo, 22 vystúpilo a 1 nastúpil, 10 vystúpilo a 6 nastúpilo.
Koľko cestujúcich priviezol autobus na nasledujúcu zastávku?

.... **13.** Zapíšte číslo 10 pomocou piatich deviatok, znakov počtových operácií a zátvoriek.

4.2 Výraz s premennou, členy výrazu

Výrazy s premennou

$5 + x$ $\quad$ $a - 8$ $\quad$ $y + y + y = 3 \,.\, y = 3y$ $\quad$ $k : 3 = \frac{k}{3}$

Písmená x, a, y, k vo výrazoch nazývame **premenné.** Za premennú môžeme do výrazu dosadiť číslo a vypočítať **hodnotu výrazu.**
Hovoríme, že sme určili hodnotu výrazu pre danú hodnotu premennej.
Súčin $3 \,.\, y$ zapisujeme zjednodušene $3y$.

ÚLOHA 1

Určte spamäti hodnoty výrazov: $5 + x$, ak $x = 5$
$a - 8$, ak $a = -4$
$3y$, ak $y = 1{,}5$
$k : 3$, ak $k = 21$

PRÍKLAD 1

Určte hodnotu výrazu s premennou:

$3x + 5$, ak x postupne nadobúda hodnoty 2; $-2{,}5$; 0; $\frac{1}{3}$.

RIEŠENIE

Adam počíta:
ak $x = 2$ $\quad$ $3x + 5 = 3 \,.\, 2 + 5 = 11$
ak $x = -2{,}5$ $\quad$ $3x + 5 = 3 \,.\, (-2{,}5) + 5 = -7{,}5 + 5 = -2{,}5$
ak $x = 0$ $\quad$ $3x + 5 = 3 \,.\, 0 + 5 = 5$
ak $x = \frac{1}{3}$ $\quad$ $3x + 5 = 3 \,.\, \frac{1}{3} + 5 = 1 + 5 = 6$

Martin si riešenie zapíše do tabuľky:

x	2	$-2{,}5$	0	$\frac{1}{3}$
$3x$	6	$-7{,}5$	0	1
$3x + 5$	11	$-2{,}5$	5	6

ÚLOHA 2

Určte hodnotu výrazu s premennou:
a) $4 - 2x$, pre $x = 1; -5, 0; \frac{3}{2}$
b) $0{,}5a + 10$, pre $a = 2; -2; 0{,}2; -\frac{4}{5}$
c) $\frac{z}{6} + 1$, pre $z = 6; -12; 3{,}6$
d) $10 - \frac{10}{y}$, pre $y = 100; -5; 0{,}4$

výraz s premennou	počet členov výrazu	názov výrazu
$x + 3$ člen člen	2	dvojčlen
$a + 6 - b$ člen člen člen	3	trojčlen
$3x - 3$ člen člen	2	dvojčlen
$3x$ člen	1	jednočlen

Jednočleny sú napríklad výrazy: 8; $6a$; $-9{,}5s : 5$ Sú to buď iba čísla, alebo súčiny a podiely čísel a premenných.
Dvojčleny sú napríklad výrazy: $x - 1{,}2$; $10r + 15$; $5k - \frac{d}{6}$
Sú to súčty alebo rozdiely jednočlenov.
Podobne poznáme trojčleny, štvorčleny...

PRÍKLAD 2

Zapíšte slovné vyjadrenia ako výrazy s premennou:
a) polovica z čísla x;
b) číslo 3-krát väčšie ako číslo a;
c) číslo o 3 väčšie ako číslo y;
d) číslo o 10 menšie ako číslo b.
Určte počet členov zapísaného výrazu.

RIEŠENIE

Betka píše: a) $\frac{x}{2}$ jednočlen b) $3a$ jednočlen c) $y + 3$ dvojčlen d) $b - 10$ dvojčlen

ÚLOHA 3

Napíšte aspoň 5 príkladov výrazov s premennou, ktoré sú:
a) jednočleny, b) dvojčleny, c) trojčleny.

ÚLOHA 4

Vyjadrite v tvare výrazu obvod rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a cm. Vypočítajte obvod takéhoto trojuholníka pre každé dvojciferné číslo menšie ako 16.

CVIČENIA

1. Určte počet členov výrazov a vypočítajte ich hodnotu pre dané hodnoty premenných:
   a) $6x$ $\quad x = 1; -5{,}6; \frac{4}{3}$
   b) $3 - 2u$ $\quad u = 0; -5; 0{,}2; \frac{1}{4}$
   c) $\frac{2}{5}y - 7$ $\quad y = -10; 5; 0{,}25$

.... 2. Napíšte ako výrazy:
   a) dvojnásobok čísla r zmenšený o 4;
   b) podiel čísel v a 7 zmenšený o 10;
   c) súčin jednočlena $3x$ a čísla $\frac{1}{3}$ zväčšený o jednočlen $8s$.

.... 3. Určte hodnotu výrazu $10{,}5 - b : 5$, ak $b = -5; 0{,}25; 0; \frac{1}{3}$. Zapíšte ich do tabuľky.

.... 4. Napíšte ako výrazy:
   a) 10-krát viac ako x;
   b) 7-krát menej ako a;
   c) o 6 viac ako z;
   d) o 15 menej ako b.
   Ktoré z nich sú jednočleny?

Riešenia nasledujúcich slovných úloh napíšte ako výrazy.

.... 5. Do 7. A triedy chodí x žiakov. Dievčat je 15. Koľko chlapcov je v triede?

.... 6. Osobné auto má priemernú spotrebu k litrov benzínu na 100 km pri jazde v meste. Pri jazde na diaľnici je spotreba o 0,75 litra vyššia.
   a) Akú spotrebu na 100 km má auto pri jazde na diaľnici?
   b) Koľko benzínu spotrebuje, ak prejde 25 km v meste a 250 km na diaľnici?

.... 7. Pohybové hry navštevuje h chlapcov, dievčat tam chodí o d menej.
   a) Koľko dievčat navštevuje pohybové hry?
   b) Koľko žiakov navštevuje pohybové hry?
   c) Koľko žiakov je dnes na pohybových hrách, ak chýbajú 2 chlapci a 3 dievčatá?

.... **8.** 4 knihy stoja m korún. Koľko stojí 5, 6, 7, 8 takýchto kníh?

.... **9.** Cestovný lístok MHD stojí v Nitre x korún. V Bratislave je o tri koruny drahší. Koľko stojí cestovný lístok MHD v Bratislave?

4.3 Sčítanie a odčítanie výrazov

PRÍKLAD 1

Sčítajte výrazy: $3x + 6$ a $5x - 4$

RIEŠENIE

Rieši Zdenka:

Súčet daných výrazov zapíše takto: $(3x + 6) + (5x - 4)$

odstráni zátvorky: $3x + 6 + 5x - 4$

združí členy výrazu tak, že najskôr napíše

členy s premennou a potom čísla: $(3x + 5x) + (6 - 4)$

sčíta členy s premennou a čísla: $8x + 2$

Stručný zápis riešenia:

$$\begin{aligned} &(3x + 6) + (5x - 4) = \\ =\ &3x + 6 + 5x - 4 = \\ =\ &(3x + 5x) + (6 - 4) = \\ =\ &8x + 2 \end{aligned}$$

Vo výraze $3x$, ktorý predstavuje súčin $3 \,.\, x$ sa číslo 3 nazýva **číselný koeficient.**

Výrazy **s tou istou premennou** sčítame tak, že **sčítame** ich číselné **koeficienty** a premennú opíšeme.

ÚLOHA 1

Sčítajte:

a) $3x + 9x$ b) $11a + 14a$ c) $1{,}3y + 5y + 0{,}6y$ d) $\frac{3}{2}d + \frac{3}{4}d$

ÚLOHA 2

Sčítajte výrazy:

a) $14x$ a $48x - 1$

b) $0{,}5c - 17$ a $6{,}2c + 17$

c) $a + 5{,}1$ a $2{,}1 + a$

d) $0{,}1s - 2$ a $\frac{s}{10} + 2$

Opačný výraz k danému výrazu dostaneme tak, že v pôvodnom výraze všetky znamienka zmeníme na opačné.

výraz	opačný výraz
$5a$	$-5a$
$x - 1$	$-x + 1$
$-6 + 8y$	$6 - 8y$
$-a - b$	$a + b$
navzájom opačné výrazy	

ÚLOHA 3

K daným výrazom napíšte opačné výrazy:

a) $4x - 9$

b) $-4 + 15a$

c) $1{,}2k + 5$

d) $-6{,}5s - 2$

PRÍKLAD 2

Od výrazu $8x - 9$ odčítajte výraz $3x - 5$.

RIEŠENIE

Rieši Janko:

Najskôr zapíše rozdiel: $(8x - 9) - (3x - 5)$

Potom si spomenie: Odčítať číslo znamená pričítať číslo opačné.

To isté platí i pri odčítaní výrazov: $(8x - 9) + (-3x + 5)$

Ďalej počíta ako pri sčítaní výrazov: $8x - 9 - 3x + 5 = (8x - 3x) + (-9 + 5) = 5x - 4$

Zápis riešenia:

$$
\begin{aligned}
&(8x - 9) - (3x - 5) = \\
&= (8x - 9) + (-3x + 5) = \\
&= 8x - 9 - 3x + 5 = \\
&= (8x - 3x) + (-9 + 5) = \\
&= 5x - 4
\end{aligned}
$$

Odčítať výraz znamená pričítať opačný výraz.

ÚLOHA 4

Vypočítajte:

a) $5x-(3x-1)$

b) $a+8-(a-7)$

c) $0{,}1d-0{,}5-(-0{,}1d-0{,}5)$

d) $0{,}5x-1-\left(\frac{x}{10}+1\right)$

POZNÁMKA

Pri odčítaní výrazov platí znamienkové pravidlo:
Ak je pred zátvorkou znamienko – (mínus) všetky znamienka v zátvorke sa menia na opačné.

ÚLOHA 5

Čomu sa rovná súčet daného výrazu a výrazu k nemu opačnému? Napíšte aspoň päť príkladov.

PRÍKLAD 3

Upravte výrazy tak, aby mali čo najmenší počet členov.

a) $10x+y-10y-x$

b) $1{,}5d-c+0{,}5d-2c$

c) $\frac{2}{5}x-3y+\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}y$

d) $3{,}5x-6y+1{,}3-0{,}5x$

RIEŠENIE

Martina v každom výraze združí členy s rovnakými premennými, potom sčíta ich koeficienty.

a) $10x+y-10y-x=10x-x-10y+y=9x-9y$

b) $1{,}5d-c+0{,}5d-2c=1{,}5d+0{,}5d-c-2c=2d-3c$

c) $\frac{2}{5}x-3y+\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}x-3y-\frac{1}{2}y=\frac{5}{5}x-\frac{6}{2}y-\frac{1}{2}y=x-\frac{7}{2}y$

d) $3{,}5x-6y+1{,}3-0{,}5x=3{,}5x-0{,}5x-6y+1{,}3=3x-6y+1{,}3$

Koeficient pri jednočlene x je 1 lebo $x=1\,.\,x$
$-x$ je -1 lebo $-x=-1\,.\,x$

PRÍKLAD 4

Jakub a Lukáš porovnávajú dva výrazy:

$3x+6y-2x+3$

$2y+x+4y+\frac{6}{2}$

RIEŠENIE

Jakub: $3x+6y-2x+3=3x-2x+6y+3=x+6y+3$

Lukáš: $2y+x+4y+\frac{6}{2}=2y+4y+x+3=6y+x+3$

Jakub vyhlási: Výrazy sa nerovnajú, majú síce tie isté členy, ale v inom poradí. Lukáš mu oponuje: Ja môj výraz môžem upraviť tak, aby jeho členy boli v tom istom poradí, ako v tvojom výraze. To isté môžeš urobiť aj ty, veď vieme, že súčet sa nezmení, ak zameníme poradie sčítancov. (Komutatívnosť sčítania.)

Odpoveď: Výrazy sa rovnajú.

Porovnanie výrazov:
Výrazy upravíme na najmenší možný počet členov.
Ak majú výrazy všetky členy rovnaké (aj so znamienkami!), tak sa rovnajú.

Výrazy, ktoré sa rovnajú:	Výrazy, ktoré sa nerovnajú:
$4x + 5y - 8z = 5y - 8z + 4x$	$4x + 5y - 8z \neq 5y + 8y + 4x$
$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$	$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b - \frac{5}{4} \neq \frac{5}{4} + \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$

ÚLOHA 6

Sú dané výrazy:
a) $a - b - a + 3b - 1 + 3a$ b) $4a + 5b + 2 - a - 3b - 3$ c) $b + 4a + 4 - 3b - 5 - a$
Zistite, ktorý z nich sa rovná výrazu $3a + 2b - 1$.

POZNÁMKA

Zjednodušiť výraz znamená upraviť ho na najmenší možný počet členov.

CVIČENIA

1. Sčítajte: a) $2a + 6a$ b) $1{,}1x + 5{,}5x$ c) $0{,}1r + \frac{1}{100}r + \frac{3}{50}r$ d) $\frac{1}{5}c + \frac{1}{10}c + \frac{1}{15}c + \frac{1}{20}c$

.... **2.** Sčítajte výrazy: a) $22b$ a $12b - 5$ b) $15k$ a $10 - 20k$ c) $2{,}2t - 0{,}2$ a $1{,}2 - 2t$ d) $-h + 6{,}2$ a $11{,}5 - 9h$

.... **3.** K daným výrazom napíšte opačné výrazy:

a) $5x - 7$
$5x + 7$
$-7 + 5x$
$-5x - 7$

b) $0{,}2y - 6z$
$6z - 0{,}2y$
$-0{,}2y + 6y$
$0{,}2y + 6z$

c) $\frac{5}{3}a - 4$
$4 + \frac{5}{3}a$
$-\frac{5}{3}a + 4$
$\frac{5}{3}a + 4$

.... **4.** Vypočítajte:

a) $7x - (9x - 2)$
$7x - (9x + 2)$
$7x - (2 - 9x)$

b) $3a + 15 - (15 - 3a)$
$3a + 15 - (15 + 3a)$
$3a - 15 - (15 - 3a)$

5. Sčítajte výrazy:

a) $(5d - 6) + (3d + 2)$
b) $(3x - 5) + (2 - 3x)$
c) $(y - 6) + (6 - y)$
d) $(4{,}1a - 4{,}1) + (2{,}1a + 3) + (3{,}2 + a)$
e) $(3{,}5p + 5) + (5{,}3p - 4) + (1{,}2 - 1{,}1p)$
f) $(m + 0{,}11) + (-3m + 2{,}22) + (m - 0{,}5m)$

6. Odčítajte výrazy:

a) $(5d - 6) - (3d + 2)$
b) $(3x - 5) - (2 - 3x)$
c) $(y - 6) - (6 - y)$
d) $(4{,}1a - 4{,}1) - (2{,}1a + 3) - (3{,}2 + a)$
e) $(3{,}5p + 5) - (5{,}3p - 4) - (1{,}2 - 1{,}1p)$
f) $(m + 0{,}11) - (-3m + 2{,}22) - (m - 0{,}5m)$

7. Zjednodušte výrazy:

a) $0{,}12p - 0{,}7 - (p - 0{,}3) + (0{,}2p - 1)$
b) $2{,}5r - (1{,}8r - 2{,}7) - (1 - 2r) + 0{,}5$
c) $1 - (0{,}9s - 0{,}2) + (0{,}7 - 0{,}3s)$

8. Od súčtu výrazov $(5a + 6)$ a $(2a - 1)$ odčítajte ich rozdiel.

9. Rozhodnite, či sa dané výrazy rovnajú:

a) $5x - 2;\ 10x - 10 + 5x + 5$
b) $a + 1;\ 1 + a$
c) $a;\ -a$
d) $1{,}6 + x - y;\ x - y + 1{,}6$

10. Zjednodušte výrazy:

a) $23x - 32 + 4x + 4x$
b) $-12x + 3y + 3{,}7x + 7$
c) $2a - 12 - 3a + 1{,}4a$
d) $\frac{1}{4}z - 2y + \frac{5}{4}z - \frac{1}{2}y$

11. Zapíšte výrazy:

a) K číslu a sme pričítali $2s$ a rozdiel čísel u a v.
b) K súčtu čísel a a $2s$ sme pričítali súčet čísel u a v.
c) Od súčtu čísel a a $2s$ sme odčítali rozdiel čísel u a v.
d) K rozdielu čísel a a $2s$ sme pričítali rozdiel čísel u a v.

Násobenie a delenie výrazu číslom

PRÍKLAD 1

Jablko má hmotnosť x gramov, hruška má hmotnosť o 25 g väčšiu a hmotnosť melóna je 12-krát väčšia ako hmotnosť hrušky.
Vyjadrite hmotnosť melóna v tvare dvojčlena.

RIEŠENIE

Zuzka zapisuje: jablko ... x g
hruška ... $(x + 25)$ g
melón ... $12 . (x + 25)$ g

$12 . (x + 25) = 12 . x + 12 . 25 = 12x + 300$

Odpoveď: Hmotnosť melóna je $(12x + 300)$ gramov.

Násobiť výraz číslom znamená vynásobiť týmto číslom každý člen výrazu.

PRÍKLAD 2

Vynásobte výraz $5b + 4$ postupne číslami: 2; –1; 0,5 a $\frac{1}{3}$.

RIEŠENIE

Tomáš si najskôr zapíše násobenie a potom počíta:

$$2 . (5b + 4) = 2 . 5b + 2 . 4 = 10b + 8$$
$$-1 . (5b + 4) = -1 . 5b + (-1) . 4 = -5b - 4$$
$$0{,}5 . (5b + 4) = 0{,}5 . 5b + 0{,}5 . 4 = 2{,}5b + 2$$
$$\tfrac{1}{3} \cdot (5b + 4) = \tfrac{1}{3} \cdot 5b + \tfrac{1}{3} \cdot 4 = \tfrac{5}{3}b + \tfrac{4}{3}$$

ÚLOHA 1

Výraz $3x - 1$ násobte postupne číslami: 5, –5, 0,05 a $-\frac{1}{5}$.

ÚLOHA 2

Vypočítajte:

a) $6 . (5a - 6)$ $\quad -6 . (5a - 6)$
b) $2{,}5 . (s + 10)$ $\quad (s + 10) . 2{,}5$
c) $(5{,}1 - d) . 3$ $\quad (5{,}1 - d) . (-3)$
d) $(12y - 8z) \cdot \frac{1}{4}$ $\quad -\frac{1}{4} \cdot (12y - 8z)$

PRÍKLAD 3

Ako sa dá zjednodušiť výraz: $(4x + 6) : 2$?

RIEŠENIE

Dáša upravuje: $(4x + 6) : 2 = 4x : 2 + 6 : 2 = 2x + 3$

Deliť výraz číslom znamená vydeliť týmto číslom každý člen výrazu.

PRÍKLAD 4

Vydeľte výraz $12a - 24$ postupne číslami: 2; -4; 0,6 a $\frac{1}{3}$.

RIEŠENIE

$(12a - 24) : 12 = 12a : 12 - 24 : 12 = a - 2$
$(12a - 24) : (-4) = 12a : (-4) - 24 : (-4) = -3a + 6$
$(12a - 24) : 0{,}6 = 12a : 0{,}6 - 24 : 0{,}6 = 20a - 40$
$(12a - 24) : \frac{1}{3} = 12a : \frac{1}{3} - 24 : \frac{1}{3} = 12a \,.\, 3 - 24 \,.\, 3 = 36a - 72$

ÚLOHA 3

Vydeľte:
a) $(10y + 9x) : 1$
b) $(18e - 12) : (-0{,}6)$
c) $(-21c - 7) : (-7)$
d) $(9 + 12x) : (-30)$
e) $(10y + 9x) : (-1)$
f) $(16b - 4) : 4$

ÚLOHA 4

Vydeľte dané výrazy postupne zlomkami: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{7}$.
Uvedomte si, že deliť zlomkom znamená vynásobiť výraz prevrátenou hodnotou zlomku.
a) $a - 8$
b) $0{,}6 + 2y$
c) $-1{,}5d - 2{,}5r$

ÚLOHA 5

Napíšte ako výraz s delením a vydeľte:
a) podiel šesťnásobku čísla x zmenšený o deväť a čísla šesť,
b) podiel jednej desatiny čísla y zväčšený o päť a čísla dva,
c) podiel jednej šestiny čísla z zmenšený o jeden a čísla $\frac{1}{12}$.

CVIČENIA

1. Výraz $2v - 5$ vynásobte postupne číslami: 3; -6; 0,1; $-4{,}5$.

.... **2.** Vypočítajte:

a) $3 \,.\, (3x - 5)$
$-3 \,.\, (3x - 5)$
$(3x + 5) \,.\, 3$
$(5 - 3x) \,.\, (-3)$

b) $5 \,.\, (0{,}3x - 0{,}5)$
$-5 \,.\, (0{,}3x - 0{,}5)$
$(-0{,}3x - 0{,}5) \,.\, 5$
$(0{,}3x + 0{,}5) \,.\, (-5)$

c) $0{,}7 \,.\, (x + 0{,}1)$
$-0{,}7 \,.\, (x + 0{,}1)$
$(0{,}1 - x) \,.\, 0{,}7$
$(-0{,}1 - x) \,.\, (-0{,}7)$

.... **3.** Vypočítajte:
a) $5 \,.\, (6{,}2d + 4)$
b) $3 \,.\, (0{,}8y - 5)$
c) $(6 - 8x) \,.\, 0{,}2$
d) $-10 \,.\, (0{,}06 - 1{,}1r)$
e) $(2s - 3{,}2) \,.\, (-0{,}2)$
f) $(3{,}3 + 2{,}2h) \,.\, 0{,}5$

.... **4.** Výraz $15x + 30y$ vynásobte postupne číslami: $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{15}$

.... **5.** Vydeľte:

a) $(2{,}8x + 1{,}2) : 4$

b) $(40c - 20) : (-50)$

c) $(64 - 24d) : 0{,}8$

d) $(-12 - 15m) : (-1)$

.... **6.** Vydeľte dané výrazy zlomkami $\frac{1}{5}$ a $-\frac{3}{4}$.

a) $y - 1$ b) $3z + 0{,}3$ c) $0{,}4 - 5x$ d) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{2}$

.... **7.** Zjednodušte dané výrazy:

a) $5 + (2x - 3) . 6$

b) $(9x - 12) : 3 + x + 1$

c) $(1 + 3x) . 1{,}1 + (-5 - 6x) : 2$

d) $7 - (14r - 28) : 7$

.... **8.** Zistite, či sa dané výrazy rovnajú:

a) $5 . (x + y)$ a $3x + 6y + 2x - y$

b) $(0{,}1z + 6) . 10$ a $(0{,}1z + 6) : 0{,}1$

.... **9.** Zapíšte ako výraz:

a) súčet čísel $5r$ a $2s$ vynásobený piatimi,

b) tretina súčtu čísel x a y,

c) rozdiel čísel $9c$ a $10d$ vydelený číslom (-1),

d) šesťnásobok rozdielu $8p$ a $18q$,

e) podiel čísel t a 7 zmenšený o ich súčet.

.... **10.** Vypočítajte obvod obdĺžnika, ak jedna jeho strana má dĺžku x a druhá strana je o 5 jednotiek dlhšia.

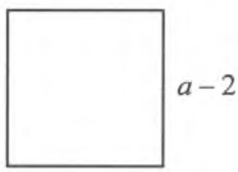
4.5 Vynímanie pred zátvorku

PRÍKLAD 1

Strana štvorca má dĺžku a. Aký obvod má štvorec so stranou o 2 jednotky kratšou?

RIEŠENIE

Lucia si nakreslila obrázok a zapísala:



strana menšieho štvorca: $a - 2$

obvod :
$(a - 2) + (a - 2) + (a - 2) + (a - 2) = a + a + a + a -2 - 2 - 2 - 2 = 4a - 8$

VŠIMNIME SI

Pre členy výrazu $4a - 8$ platí:
najväčší spoločný deliteľ čísel 4 a 8 je číslo $D(4, 8) = 4$.

Inak povedané: každý člen výrazu $4a - 8$ je deliteľný číslom 4. Výraz $4a - 8$ môžeme upraviť tak, že číslo 4 napíšeme pred zátvorku a každý člen výrazu v zátvorke ním vydelíme.

Zapíšeme: $4a - 8 = 4 \,.\, (a - 2)$

Tejto úprave hovoríme vyňatie pred zátvorku.

Vynímanie pred zátvorku

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov výrazu napíšeme (vyjmeme) pred zátvorku.
V zátvorke zostanú členy, ktoré sme týmto deliteľom vydelili.

$$4a - 8 = 4 \,.\, (a - 2)$$

POZNÁMKA

V súčine $4 \,.\, (a - 2)$ *môžeme znamienko* . *(krát) vynechať. Platí:* $4 \,.\, (a - 2) = 4(a - 2)$

PRÍKLAD 2

Upravte výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku:

a) $15u + 3$ b) $2a - 2$ c) $28 - 14x$

RIEŠENIE

a) $15u + 3 = 3(5u + 1)$
b) $2a - 2 = 2(a - 1)$
c) $28 - 14x = 7(4 - 2x) = 7 \,.\, 2\,(2 - x) = 14(2 - x)$

V poslednom prípade sme najväčšieho spoločného deliteľa hľadali postupne.

ÚLOHA 1

Vyjmite pred zátvorku:

a) z výrazu $81a - 9$ číslo 9
b) z výrazu $25b + 30$ číslo 5
c) z výrazu $16 - 4a$ číslo 4
d) z výrazu $20 - 120c$ číslo 20

ÚLOHA 2

Upravte výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku:

a) $17x + 34$
b) $12 - 9y$
c) $8 + 10z$
d) $16s - 8k$

CVIČENIA

1. Vyjmite pred zátvorku:
a) z výrazu $2a + 18b$ číslo 2
b) z výrazu $6 - 3x$ číslo 3
c) z výrazu $40y - 5$ číslo 5

2. Upravte výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku:
a) $9a - 12c$
b) $27x + 18$
c) $7 - 42d$
d) $21z + 9u$
e) $56x + 48t$
f) $100d - 120b$

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Napíšte číselné výrazy a určte ich hodnoty:
a) Súčet čísel tridsaťtri a osemnásť vydelený číslom 5.
b) Podiel súčtu a rozdielu čísel osemnásť a dvanásť.
c) Súčin čísel štyri desatiny a mínus osem.

2. Vypočítajte:
a) $2 \cdot [14 - (7 + 9) : 8]$
b) $\{2 - [121 : (-18 + 7) + 22]\} - 10$

3. Zapíšte a vypočítajte, čomu sa rovná päťnásobok opačnej hodnoty k súčtu čísel:
a) 8 a -10
b) 0,4 a 0,25
c) $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{5}$

4. Vypočítajte:
a) $3 \cdot 0{,}6 : 2 + 14 : 7 \cdot 3 + 6 : 2 + 5 \cdot 3$
b) $2 \cdot (-5) + 4 \cdot (-6) - 8 \cdot (-2{,}5) - 100 : (-10) - 8 : (-2)$
c) $3 \cdot (4 \cdot 2 - 5) - 5 \cdot (1 - 6 \cdot 4) + (2 - 8 \cdot 3)$

5. Určte hodnotu výrazu s premennou: $4 - 3x$, pre $x = 1; -4; 0{,}2; \frac{5}{6}$

6. Zapíšte ako výrazy:
a) súčet výrazov $3x$ a $4y$
b) súčin výrazov $t + 0{,}2$ a $8s$
c) podiel výrazov $1{,}4x - 0{,}7y$ a 2

7. Do 7. B chodí d dievčat a h chlapcov. Koľko žiakov je v triede?

8. K daným výrazom napíšte opačné výrazy:
a) $-7 + 6x$
b) $0{,}25c - 2{,}5d$
c) $\frac{5}{8} - \frac{2}{3}k$

9. Upravte výraz:
$1 - (0{,}9a - 0{,}2) + (1 - 2a) - (0{,}6a - 3) + 0{,}5$

.... **10.** Zapíšte výraz:
Od čísla r sme odčítali súčet čísel $2x$ a y, a potom sme ešte odčítali číslo z.

.... **11.** Vynásobte:
a) $(5k - 6d) . (-3)$ b) $(2v - 5) . 1{,}2$ c) $\left(\frac{5}{3}x - 2\right) \cdot \frac{12}{10}$

.... **12.** Vypočítajte obvod obdĺžnika, ktorého jedna strana má dĺžku s a druhá strana je o 3 jednotky kratšia.

.... **13.** Upravte výrazy vyňatím najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku:
a) $9x + 36y$ b) $24a - 56b$ c) $90 - 80f$

Bernard Bolzano

(1781 až 1848)

*Český matematik, logik a filozof.
Narodil sa v Prahe a študoval na Karlovej univerzite. Zdôrazňoval súvislosť matematiky s logikou a filozofiou. Svojimi pokrokovými myšlienkami a pochopením významu nekonečna v matematike predstihol svoju dobu. Bolzano mal veľké zásluhy na tom, že aj u nás sa v 19. storočí začal rozvoj intenzívnej práce v matematike.*

5 POMER. PRIAMA A NEPRIAMA ÚMERNOSŤ

5.1 Pomer, prevrátený pomer, postupný pomer

PROBLÉM 1

Pri spoznávaní krás Vysokých Tatier prešli siedmaci prvý deň 12 km, druhý deň 24 km. O koľko kilometrov viac prešli druhý deň ako prvý deň? Koľkokrát viac prešli druhý deň ako prvý deň?

RIEŠENIE

Zuzka porovnáva:

1. deň

2. deň

O KOĽKO? $24 - 12 = 12$ POROVNÁVAME ROZDIELOM

Odpoveď: Druhý deň prešli o 12 km viac ako prvý deň.

Miki porovnáva inak:

KOĽKOKRÁT? $24 : 12 = 2$ POROVNÁVAME PODIELOM

Odpoveď: Druhý deň prešli dvakrát viac ako prvý deň.

PODIEL $24 : 12$ zapíšeme ako zlomok $\frac{24}{12}$

Čítame: 24 ku 12 a nazývame ho POMER

Namiesto o **porovnaní podielom** hovoríme aj o **porovnaní pomerom.**

PROBLÉM 2

Do školskej jedálne priviezli 36 kilogramov jabĺk a 12 kilogramov hrušiek na kompót.
Porovnajte rozdielom i podielom a napíšte všetky možné odpovede.

RIEŠENIE

$36 - 12 = 24$

Odpoveď: Jabĺk bolo o 24 kg viac ako hrušiek.
Hrušiek bolo o 24 kg menej ako jabĺk.

$36 : 12 = 3$

Odpoveď: Jabĺk bolo trikrát viac ako hrušiek.
Hrušiek bolo trikrát menej ako jabĺk.

Všimnite si pomer jabĺk a hrušiek

36	:	12
1. člen pomeru		2. člen pomeru

Hovoríme, že $\frac{36}{12}$ je hodnota pomeru.
Zlomok $\frac{36}{12}$ môžeme upraviť na základný tvar: $\frac{36}{12} = \frac{3}{1}$.
Pomer množstva jabĺk a hrušiek je 3 : 1, čo znamená, že na 3 kg jabĺk pripadá 1 kg hrušiek.

Vieme, že hodnota zlomku sa nezmení, ak zlomok krátime alebo rozšírime číslom rôznym od nuly.

Hodnota pomeru sa nezmení ani rozšírením, ani krátením oboch členov pomeru **číslom rôznym od nuly.**

ÚLOHA 1

Napíšte najviac 5 pomerov, ktoré majú rovnakú hodnotu ako 4 : 5.

ÚLOHA 2

Upravte pomery tak, aby ich členy boli čo najmenšie čísla:
20 : 14; 30 : 40; 17 : 34; 5 : 10; 28 : 30.

PROBLÉM 3

Máte dobrú predstavu o pomere dvoch čísel $8\frac{2}{5}$ a 3,5 ?

RIEŠENIE

Ivan hovorí: $8\frac{2}{5} : 3{,}5 = \frac{42}{5} : \frac{35}{10} = \frac{42}{5} \cdot \frac{10}{35} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 12 : 5$
alebo: $8{,}4 : 3{,}5 = 84 : 35 = 12 : 5$

Odpoveď: O pomere 12 : 5, t.j. o pomere 12 dielov ku 5 dielom, máme oveľa lepšiu predstavu, ako o pomere $8\frac{2}{5} : 3{,}5$.

ÚLOHA 3

Upravte pomery na základný tvar:

a) $4:16; 25:150; 300:240$ b) $\frac{3}{4}:15$; $7:\frac{2}{5}$; $\frac{4}{3}:\frac{1}{2}$ c) $1\frac{2}{3}:2{,}6; 3{,}4:6; 5{,}8:0{,}02$

PROBLÉM 4

Žiaci 7. A a 7. B triedy hrali futbalový zápas. V školskom rozhlase oznámili, že vyhrali chlapci 7. A triedy. Na nástenke sa objavil výsledok:

FUTBALOVÝ ZÁPAS
7. A a 7. B
2 : 5

Je zápis správny?

RIEŠENIE

Ferko vysvetľuje: Ak vyhrali chlapci zo 7. A triedy, potom správny zápis má byť 5 : 2 a opraví zápis na nástenke takto:

7. A a 7. B
5 : 2

Danko navrhuje: Zápis môžeme napísať aj takto:

7. B a 7. A
2 : 5

Poradie členov pomeru je veľmi dôležité.

Keďže v pomere záleží na poradí jeho členov, nazývame čísla 2 a 5 usporiadanou dvojicou a zapisujeme

$$[2, 5]$$

ZAPAMÄTAJTE SI

$$[2, 5] \neq [5, 2]$$

ÚLOHA 4

Nájdite 5 rôznych usporiadaných dvojíc, ktoré sú v pomere 3 : 7.

ÚLOHA 5

Zistite, či sú všetky dané usporiadané dvojice v tom istom pomere:

$$[5, 12], [10, 24], [2{,}5; 6], \left[\tfrac{5}{3}; 4\right], \left[\tfrac{5}{6}; 2\right].$$

PRÍKLAD 1

Zapíšte pomerom 5 kg a 3 g; 4 m a 2 km.

RIEŠENIE

Boris pripomína, že si treba uvedomiť

$$5 \text{ kg} : 3 \text{ g} \neq 5 : 3, \text{ ale } 5\,000 : 3$$
$$4 \text{ m} : 2 \text{ km} \neq 4 : 2, \text{ ale } 4 : 2\,000 = 1 : 500$$

Odpoveď: 5 kg a 3 g sú v pomere 5 000 : 3 a 4 m a 2 km sú v pomere 1 : 500.

Pomerom môžeme porovnávať len číselné údaje vyjadrené v rovnakých jednotkách.

ÚLOHA 6

Porovnajte pomerom: 2 mm a 5 m; 0,8 m a 4 dm;
75 kg a 7 500 g; 1 hod a 24 min.

PRÍKLAD 2

Odmenu 4 000 Sk si rozdelili dvaja brigádnici v pomere 2 : 3. Koľko Sk dostal každý?

RIEŠENIE

Janka hovorí: Pomer 2 : 3 znamená, že jeden brigádnik dostal 2 diely a druhý 3 diely zo 4 000 Sk.

4 000 delíme na $\underbrace{2 + 3}_{\text{diely}} = 5$ dielov

1 diel . . . . 4 000 : 5 = 800
2 diely . . . . 800 . 2 = 1 600
3 diely . . . . 800 . 3 = 2 400

Skúška: 1 600 + 2 400 = 4 000
1 600 : 2 400 = 2 : 3

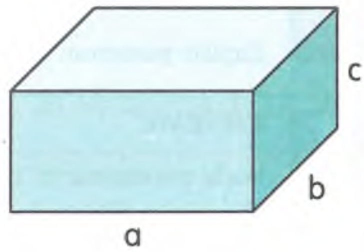
Odpoveď: Jeden brigádnik dostal 1 600 Sk a druhý 2 400 Sk.

ÚLOHA 7

Rozdeľte: 129 l v pomere 1 : 2
56 kg v pomere 5 : 2
4 500 m^2 v pomere 1 : 8

PRÍKLAD 3

Daný je kváder s rozmermi 16 dm, 12 dm a 8 dm. Zapíšte pomer jeho rozmerov. Zapíšte pomer všetkých dvojíc hrán daného kvádra.



RIEŠENIE

Janka vie, aký má byť zápis. Ak označíme hrany kvádra a, b, c, tak

$$a : b : c = 16 : 12 : 8.$$

Julo dopĺňa 16 : 12 : 8 môžeme krátiť štyrmi: 16 : 12 : 8 = 4 : 3 : 2.

Hanka píše prehľadne pomery dvojíc hrán kvádra:

$$a : b = 16 : 12 = 4 : 3$$
$$b : c = 12 : 8 = 3 : 2$$
$$a : c = 16 : 8 = 4 : 2 \text{ alebo } 2 : 1$$

Pomer 16 : 12 : 8 sa nazýva **postupný pomer.**

PROBLÉM 5

Traja robotníci si odmenu 8 200 Sk mali rozdeliť podľa výkonnosti na spoločnej práci takto: A : B = 4 : 3, B : C = 5 : 2.
Poraďte im, ako si odmenu spravodlivo rozdelia.

RIEŠENIE

Všetci v triede už vieme, že 8 200 Sk musíme rozdeliť na rovnaké diely a vypočítať tak 1 diel. Ale na koľko dielov si robotníci delili odmenu?
Peter pozná riešenie. Vysvetľuje:

A : B = 4 : 3
B : C = 5 : 2

B dostáva v 1. prípade 3 diely
a v 2. prípade 5 dielov, čo nie je rovnaká hodnota.

Aby sme mohli deliť na rovnaké diely, potom pre 3 a 5 dielov hľadáme spoločný násobok. Je ním číslo 15.

Preto 4 : 3 rozšírime číslom 5 . . . . 20 : 15
5 : 2 rozšírime číslom 3 . . . . 15 : 6

Robotníci si delia 8 200 Sk v pomere 20 : 15 : 6, spolu 20 + 15 + 6 dielov, čo je 41 dielov.

1 diel . . . . . . 8 200 : 41 =   200
20 dielov . . .   200 . 20 = 4 000
15 dielov . . .   200 . 15 = 3 000
6 dielov . . . .   200 . 6 = 1 200

Skúška: 4 000 : 3 000 : 1 200 = 20 : 15 : 6
A : B = 4 000 : 3 000 = 4 : 3
B : C = 3 000 : 1 200 = 5 : 2

Odpoveď: Prvý robotník dostane 4 000 Sk, druhý 3 000 Sk a tretí 1 200 Sk.

ÚLOHA 8

Strany trojuholníka sú v pomere 2 : 2,8 : 3,5. Obvod meria 332 mm. Vypočítajte veľkosti strán trojuholníka.

ÚLOHA 9

Rozdeľte štyrom deťom 1 148 orechov v pomere 2 : 3 : 4 : 5.

PROBLÉM 6

Zmenšite číslo 20 v pomere 2 : 5.

RIEŠENIE

Uvažujeme: nové číslo má byť menšie, teda v pomere mu prislúchajú 2 diely a číslu 20 päť dielov.

$\boxed{2} : \boxed{5}$

nové číslo 2 diely   pôvodné číslo 20 5 dielov

5 dielov 20
1 diel . . . . 20 : 5 = 4
2 diely . . .   4 . 2 = 8

Skúška: 8 : 20 = 2 : 5
Odpoveď: Zmenšené číslo je 8.

VŠIMNIME SI
Nové číslo tvorí $\frac{2}{5}$ pôvodného, čiže môžeme ho vypočítať aj takto: $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$.

PROBLÉM 7

Zmeňte číslo 36 v pomeroch: 3 : 2, 5 : 6, 4 : 4, 8 : 3, $\frac{5}{2}$, 7 : 12.
Rozdeľte použité pomery do skupín podľa toho, či sa dané číslo zväčšilo alebo zmenšilo.
Do ktorej skupiny patrí pomer 4 : 4 ? Prečo?
Viete, ktorý pomer určuje zväčšenie a ktorý zmenšenie?

RIEŠENIE

$36 \cdot \frac{3}{2} = \frac{36 \,.\, 3}{2} = \frac{18 \,.\, 3}{1} = 54$

$36 \cdot \frac{4}{4} = 36 \cdot 1 = 36$

$36 \cdot \frac{5}{2} = 18 \cdot 5 = 90$

$36 \cdot \frac{5}{6} = \frac{36 \,.\, 5}{6} = \frac{6 \,.\, 5}{1} = 30$

$36 \cdot \frac{8}{3} = \frac{36 \,.\, 8}{3} = \frac{12 \,.\, 8}{1} = 96$

$36 \cdot \frac{7}{12} = 3 \cdot 7 = 21$

Zväčšenie daného čísla: 3 : 2, 8 : 3, $\frac{5}{2}$. Zmenšenie daného čísla: 5 : 6, 7 : 12.

Pri pomere 4 : 4 sa číslo 36 nezmenilo. $4 : 4 = \frac{4}{4} = 1 \quad 36 \cdot 1 = 36$

Ak je pomer dvoch čísel väčší ako 1, ide o zväčšenie.
Ak je pomer dvoch čísel menší ako 1, ide o zmenšenie.

ÚLOHA 10

Zmeňte číslo 15 v pomere:

a) $\frac{2}{3}$, 3 : 5, 1 : 15; b) $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{5}$, 23 : 15; c) $\frac{7}{7}$, 3 : 3.

PRÍKLAD 4

Zmenšite rozmery obdĺžnika s rozmermi 15 cm a 3 dm v pomere 4 : 5. V akom pomere budú obsahy oboch obdĺžnikov?

RIEŠENIE

Janko hovorí: 3 dm = 30 cm.
Označme rozmery obdĺžnika a, b.
Rozmery nového, zmenšeného obdĺžnika označíme: a', b'.

$a' = 15 \cdot \frac{4}{5} = 12$

$b' = 30 \cdot \frac{4}{5} = 24$

$S = a \,.\, b$

$S = 15 \,.\, 30$

$S = 450$

$S = 450 \text{ cm}^2$

$S' = a' \,.\, b'$

$S' = 12 \,.\, 24$

$S' = 288$

$S' = 288 \text{ cm}^2$

Porovnajme pomerom obsahy oboch obdĺžnikov:

$$\frac{288}{450} = \frac{16}{25}$$

Odpoveď: Obsah obdĺžnika, ktorého rozmery sme zmenšili v pomere 4 : 5 je s obsahom pôvodného obdĺžnika v pomere 16 : 25.

ÚLOHA 11

Vysvetlite, prečo nastalo v príklade 4 zmenšenie obsahu obdĺžnika v pomere 16 : 25.

ÚLOHA 12

Trávnatá plocha na sídlisku má tvar obdĺžnika s rozmermi 12 m a 16 m. Zmeňte jej rozmery v pomere 9 : 4. Vypočítajte jej nové rozmery a porovnajte pomer výmery novej a pôvodnej trávnatej plochy.

CVIČENIA

1. Porovnajte rozdielom i pomerom:
a) 10 km; 1 520 m   c) 2 h; 20 min   e) 7 m^2; 49 m^2
b) 4 h; 3,6 h   d) 5 kg; 1 g   f) 25 cm^2; 2 dm^3

.... **2.** Upravte na základný tvar pomery:
2 : 16; 28 : 14; 35 : 105; 11 : 77; 123 : 102; 19 : 57; 100 : 55; 9 : 10.

.... **3.** Upravte:
a) 28,8 : 1,2; $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$; $3\frac{1}{2} : 5$
b) 0,04 : 5,6; 11 : 0,11; 1,25 : $5\frac{1}{2}$
c) 2 : 4 : 10; $\frac{1}{2} : \frac{5}{4} : 6$; 1 : 0,2 : 0,05

.... **4.** Utvorte z daných čísel 2, 3, 4 všetky možné pomery a k nim aj prevrátené pomery.

.... **5.** Turisti prešli prvý deň $\frac{2}{5}$ z plánovanej trasy. Druhý deň prešli o $\frac{1}{10}$ viac ako prvý deň. Zapíšte pomerom:
a) trasu 2. dňa k 1. dňu,
b) trasu oboch dní k plánovanej trase.

.... **6.** Rozdeľte číslo 420 na sčítance v pomere a) 7 : 8
b) 1 : 3 : 24

.... **7.** V troch dielňach vyrobili spolu 7 290 kusov žiariviek. Koľko vyrobila každá dielňa, ak ich výrobu zapíšeme v pomere 2 : 3 : 4.

.... **8.** Vek otca a syna je v pomere 10 : 3. Vek otca a dcéry je v pomere 5 : 2. Koľko rokov má otec a syn, ak má dcéra 20 rokov? V akom pomere je vek sestry a brata?

.... **9.** Obvod štvoruholníka je 216 m. Jeho strany sú v pomere 2 : 3 : 7 : 6. Vypočítajte dĺžky strán štvoruholníka.

.... **10.** Aké sú trojuholníky, v ktorých vnútorné uhly sú v pomere 1 : 2 : 3; 1 : 2 : 6; 5 : 6 : 7 ?

.... **11.** Zmenšite číslo 70 v pomere 5 : 7; 3 : 10; 0,2 : 3,5; $\frac{2}{5}$.

.... **12.** Zväčšite číslo 75 v pomere 3 : 2; 15 : $\frac{1}{3}$; 0,5 : 0,05.

.... **13.** V akom pomere sa zmenila výroba, keď pôvodne vyrobili za 1 h 2 400 výrobkov a teraz vyrobia 2 640 výrobkov?

.... **14.** V domácnosti spotrebovali za rok 216 m^3 vody. V ďalšom roku sa rozhodli šetriť a znížili spotrebu v pomere 3 : 4. Koľko m^3 vody ušetrili?

5.2 Priama a nepriama úmernosť

PROBLÉM 1

Všimnite si vzťahy medzi danými veličinami. Čo by ste o nich vedeli povedať?

1. Spotreba benzínu a prejdená vzdialenosť.
2. Pracovný výkon a mzda.
3. Množstvo rovnakého tovaru a cena.
4. Počet stravníkov a počet dní, ak sa zásoba potravín nezmení.
5. Počet robotníkov a čas, za ktorý vykonajú tú istú prácu.
6. Rýchlosť auta a čas jazdy, ak nezmeníme dráhu.

RIEŠENIE

Janka s Julom rozdelili príklady na dve skupiny.

1. skupinu tvoria prvé tri príklady.

Janka vysvetľuje:

1. Koľkokrát sa zväčší (zmenší) prejdená vzdialenosť, toľkokrát bude väčšia (menšia) spotreba benzínu.
2. Koľkokrát je pracovný výkon väčší (menší), toľkokrát väčšia (menšia) bude mzda.
3. Koľkokrát viac (menej) rovnakého tovaru kúpime, toľkokrát viac (menej) zaplatíme.

Všimnime si množstvo tovaru a jeho cenu v tabuľke:

3× viac

2× viac

Množstvo tovaru	1	2	3	4	6	9
Cena	8	16	24	32	48	72

2× viac

3× viac

Množstvo tovaru sa zmenilo v pomere $4 : 2 = \boxed{2 : 1}$
Cena sa zmenila v pomere $32 : 16 = \boxed{2 : 1}$
Pomery sú rovnaké.

> V akom pomere sa zväčší (zmenší) jedna veličina, v takom pomere sa zväčší (zmenší) druhá veličina.
> Takýto vzťah medzi dvoma veličinami nazývame **priama úmernosť.**

Môžeme tiež povedať, že množstvo tovaru a cena sú priamo úmerné.

Julo pokračuje:

V 2. skupine príkladov ide o niečo celkom iné.

4. Koľkokrát sa zväčší (zmenší) počet stravníkov, toľkokrát sa zmenší (zväčší) počet dní, na ktoré vystačia zásoby potravín.
5. Koľkokrát vzrastie (klesne) počet robotníkov vykonávajúcich tú istú prácu, toľkokrát klesne (vzrastie) počet dní práce.
6. Koľkokrát zvýšime (znížime) rýchlosť auta, toľkokrát sa zníži (zvýši) čas, za ktorý prejde auto tú istú dráhu.

Všimnime si počet robotníkov a čas práce v tabuľke:

2× viac

Počet robotníkov	1	2	3	4	6	8
Čas práce	24	12	8	6	4	3

2× menej

Počet robotníkov sa zmenil v pomere $4 : 2 = \boxed{2 : 1}$
Počet dní sa zmenil v pomere $6 : 12 = \boxed{1 : 2}$
Pomery sú prevrátené.

> V akom pomere sa zväčší (zmenší) jedna veličina, v prevrátenom pomere klesne (vzrastie) druhá veličina.
> Takýto vzťah medzi dvoma veličinami nazývame **nepriama úmernosť.**

Hovoríme, že počet robotníkov je nepriamo úmerný pracovnému času.

ÚLOHA 1

Uveďte 3 príklady na priamu úmernosť, 3 na nepriamu úmernosť.

PRÍKLAD 1

Za 12 čokolád sme zaplatili 144 Sk. Koľko Sk zaplatíme za 20 takých istých čokolád?

RIEŠENIE

Oľga rieši príklad takto:

12 čokolád . . . . 144 Sk
1 čokoláda . . . 144 : 12 = 12 Sk
20 čokolád . . . . 20 . 12 = 240 Sk

Odpoveď: Za 20 čokolád zaplatíme 240 Sk.

Martin pripomína: Vieme, že príklad môžeme riešiť priamou úmernosťou. Počet čokolád sa zväčšil v pomere $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$. V takom istom pomere vzrastie aj cena:

$$\frac{5}{3} \cdot 144 = 5 \,.\, 48 = 240$$

Odpoveď: Za 20 čokolád zaplatíme 240 Sk.

PRÍKLAD 2

Auto prešlo po diaľnici za $2\frac{1}{2}$ hodiny 260 km. Koľko km prešlo za 4 hodiny pri nezmenenej rýchlosti?

RIEŠENIE

Lucia vie, že čas auta sa mení v pomere $\frac{4}{2\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{5}$. Aj dráha sa zmení v tom istom pomere:

$$260 \cdot \frac{8}{5} = 52 \,.\, 8 = 416$$

Odpoveď: Auto prešlo za 4 hodiny 416 km.

PRÍKLAD 3

Zostavte tabuľku cien zošitov, ak za 1 zošit zaplatíme 15 Sk a kúpime ich od 1 do 6 kusov.

RIEŠENIE

Počet zošitov	1	2	3	4	5	6
Cena v Sk	15	30	45	60	75	90

PRÍKLAD 4

Murár postavil múr za 20 hodín. Na druhý deň pracovali na stavbe takého istého múra 5 murári. Za koľko hodín postavili múr?

RIEŠENIE

Peter vie, že ide o nepriamu úmernosť. Pomer murárov sa zväčšil v pomere $\frac{5}{1}$, preto toľkokrát menej hodín bude trvať stavba múra.
Pomer hodín sa bude rovnať prevrátenej hodnote počtu robotníkov, teda $\frac{1}{5}$.
Počítame:

$$20 \cdot \frac{1}{5} = 4$$

Odpoveď: Piati murári postavili múr za 4 hodiny.

PRÍKLAD 5

6 sejačok by zasialo obilie za 30 dní. Pridali sa k šiestim ešte tri sejačky a spoločne siali obilie. Koľko dní trvala sejba?

RIEŠENIE

Elena rieši príklad takto:

6 sejačok by vykonalo sejbu za 30 dní. Počet sejačok sa zvýšil o 3, takže ich pracuje 9, to znamená, že pomer je $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Počet dní je nepriamo úmerný k počtu sejačok, preto sa musí zmenšiť v pomere $\frac{2}{3}$, čiže $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$.

Odpoveď: Sejba trvala 20 dní.

PRÍKLAD 6

Zásoba potravín vystačí 20 žiakom na výlete 3 dni. Na koľko dní by vystačila 1, 2, 4, 5, 10, 20 žiakom? Riešte tabuľkou.

RIEŠENIE

Počet žiakov	1	2	4	5	10	20
Počet dní	60	30	15	12	6	3

Odpoveď: Pri danom počte žiakov by zásoba potravín vydržala na 60, 30, 15, 12, 6 a 3 dni.

PRÍKLAD 7

Zuzka má dve fotografie. Jedna má rozmery 12 cm a 8 cm a druhá 15 cm a 10 cm. Čo je na nich zaujímavé?

RIEŠENIE

Hanka zapisuje pomer rozmerov prvej fotografie 12 : 8 (dĺžka k šírke) a upravuje:

$$12 : 8 = 3 : 2$$

Janka zapisuje pomer rozmerov druhej fotografie:

$$15 : 10 = 3 : 2$$

Odpoveď: Rozmery oboch fotografií sú v rovnakom pomere.

Zapíšeme to:

$$12 : 8 = 15 : 10$$
$$3 : 2 = 3 : 2$$

Rovnosť dvoch pomerov nazývame **úmerou.**

Čítame: 12 sa má k 8 tak, ako 15 ku 10.

vnútorné členy úmery

$$12 : 8 = 15 : 10$$

vonkajšie členy úmery

Zapíšeme rovnosť dvoch pomerov v tvare zlomkov: $\frac{12}{8} = \frac{15}{10}$

Rozšírime ich tak, aby mali rovnaké menovatele: $\frac{12 \,.\, 10}{80} = \frac{15 \,.\, 8}{80}$

Menovatele zlomkov sa rovnajú, musia sa rovnať aj ich čitatele:

$$12 \,.\, 10 = 15 \,.\, 8$$

Súčin je rovnaký: $120 = 120$

Úmera je správna, ak sa súčin vonkajších členov úmery rovná súčinu jej vnútorných členov.

PRÍKLAD 8

Presvedčte sa o správnosti úmery: $5 : 3\frac{1}{2} = 6 : 4{,}2$.

RIEŠENIE

Alenka počíta:

$$5 : 3\tfrac{1}{2} = 6 : 4{,}2$$
$$5 \cdot 4{,}2 = 3\tfrac{1}{2} \cdot 6$$

$Ľ = 5 \cdot 4{,}2 = 21$

$P = 3\frac{1}{2} \cdot 6 = 3{,}5 \cdot 6 = 21$

$Ľ = P$

Odpoveď: Úmera je správna.

PRÍKLAD 9

Zistite, či aj zápis 2 : 11 = 3 : 22 je úmera.

RIEŠENIE

Ak je zápis úmerou, musí platiť: $2 \,.\, 22 = 11 \,.\, 3$

$Ľ = 2 \,.\, 22 = 44$
$P = 11 \,.\, 3 = 33$
$Ľ \neq P$

Odpoveď: Zápis nie je úmera.

ÚLOHA 2

Zistite, ktoré zápisy sú úmerami:

a) $12 : 0{,}2 = 5 : \frac{1}{2}$ b) $4{,}2 : 2{,}1 = 4 : 2$ c) $3\frac{5}{6} : 2 = 4\frac{1}{6} : 1{,}5$

PRÍKLAD 10

Určte číslo x tak, aby nasledujúci zápis bol úmera: $7 : 12 = 21 : x$

RIEŠENIE

Janko hovorí: Ak má platiť rovnosť pomerov, musí platiť:

$x \,.\, 7 = 12 \,.\, 21$
$x \,.\, 7 = 252$
$x = \frac{252}{7}$
$x = 36$

Skúška: $7 : 12 = \boxed{\begin{matrix} 21 : 36 \\ 7 : 12 \end{matrix}}$

Odpoveď: Zápis je úmera pre $x = 36$.

PROBLÉM 2

Rýchlosť chodca a rýchlosť cyklistu sú v pomere 2 : 5. Chodec prešiel 12 km. Koľko km prešiel za ten istý čas cyklista?

RIEŠENIE

Janko rieši: Ak rýchlosť je v pomere 2 : 5,
dráha bude v pomere 12 : x, píšeme:

$2 : 5 = 12 : x$
$2 \,.\, x = 5 \,.\, 12$
$2 \,.\, x = 60$
$x = 30$

Skúška: $2 : 5 = 12 : 30$
$2 : 5$

Odpoveď: Cyklista prešiel 30 km.

PRÍKLAD 11

Rozmery obrazu sú v pomere 2 : 3. Jeho dĺžka je 1,2 m. Aká je šírka obrazu?

RIEŠENIE

$Š : D = 2 : 3$
$2 : 3 = x : 1{,}2$

$2 \,.\, 1{,}2 = 3 \,.\, x$
$2{,}4 = 3x$
$x = 0{,}8$

Skúška: $2 : 3 = 0{,}8 : 1{,}2$
$8 : 12 = 2 : 3$

Odpoveď: Šírka obrazu je 0,8 m.

CVIČENIA

1. Zistite, či ide v nasledujúcich závislostiach o priamu alebo nepriamu úmernosť:
   a) Počet tehál a veľkosť stavby.
   b) Spotreba vody a platba za jej spotrebu.
   c) Výmera poľa a množstvo úrody.
   d) Počet stravníkov a zásoby jedla.
   e) Dĺžka kroku a počet krokov na rovnakej dráhe.
   f) Vek človeka a jeho hmotnosť.
   g) Veľkosť strán geometrických útvarov a ich obvod.

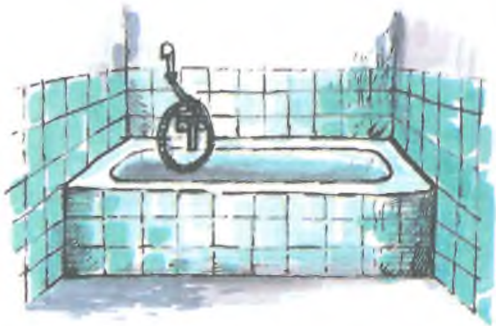
.... 2. Zistite, či sú tieto zápisy úmerou:

a) $7 : 15 = 45 : 21$ e) $40 : 3 = 400 : 30$
b) $9 : 10 = 0{,}99 : 1{,}1$ f) $5 : 1{,}3 = 6 : 1{,}56$
c) $\frac{1}{3} : 26 = 2 : 156$ g) $4\frac{1}{4} : 2\frac{2}{5} = 3 : 1\frac{7}{10}$
d) $5 : 4 = 10 : 7$ h) $2\frac{1}{2} : 5 = 1{,}2 : 2{,}4$

.... 3. Vypočítajte x v týchto úmerách:

a) $x : 3 = 10 : 5$ c) $2 : x = 8 : 20$ e) $\frac{3}{4} : 2 = 4 : x$
b) $x : 5 = 10 : \frac{1}{5}$ d) $40 : 1{,}5 = x : 0{,}1125$

.... 4. Za 12 lístkov na autobus zaplatila skupina 786 Sk. Koľko korún zaplatí za lístky skupina 20 cestujúcich?



.... 5. V hoteli obkladá murár obkladačkami vane v kúpeľniach. Za $\frac{3}{4}$ hodiny obložil $\frac{3}{5}$ jednej vane. Aký čas potrebuje na obloženie dvoch vaní?

.... 6. V školskej jedálni sa stravovalo 350 stravníkov. Za mesiac január zaplatili stravníci za stravu 81 900 Sk. Vo februári klesol počet stravníkov o 21. Koľko Sk zaplatili stravníci za stravu vo februári?

.... 7. 10 maliarov vymaľovalo budovu školy za 20 dní. Za koľko dní by školu vymaľovalo 6 maliarov. Koľko maliarov by muselo pracovať, aby školu vymaľovali za 10 dní?

.... 8. Záhon s ružami by upravilo 8 žiakov za 2 hodiny. Koľko žiakov musíme poslať upravovať záhon, ak jeho úprava nesmie trvať viac, ako $1\frac{1}{2}$ hodiny?

5.3 Využitie priamej a nepriamej úmernosti

PRÍKLAD 1

Štyria kamaráti, ktorí pracovali rovnakým tempom, obrali v sade 68 debničiek jabĺk. Koľko kamarátov museli zavolať na pomoc, aby za tú istú dobu obrali 187 debničiek?

RIEŠENIE

Alenka rieši úlohu takto:

4 kamaráti .... 68 debničiek
x kamarátov ... 187 debničiek

1 chlapec: $68 : 4 = 17$
x chlapcov: $187 : 17 = 11$

Janko rieši inak.
Zápis a výpočet je takýto:

debničky:	$\boxed{68}$	$\boxed{187}$
chlapci:	$\boxed{4}$	$\boxed{x}$

Obidve usporiadané dvojice musia byť v rovnakom pomere, preto platí:

$$\frac{68}{4} = \frac{187}{x}$$
$$x = 187 \cdot \frac{4}{68}$$
$$x = 11$$

Ondrej robí iný zápis. Tvrdí, že tento spôsob výpočtu je najrýchlejší:

↑ 4 kamaráti .... 68 debničiek ↑
x kamarátov ... 187 debničiek

Šípkami naznačí, že ide o priamu úmernosť. Potom platí:
Vynásobíme vonkajšie a vnútorné členy úmery:

$$x : 4 = 187 : 68$$
$$x \,.\, 68 = 4 \,.\, 187$$
$$x = \frac{4 \,.\, 187}{68}$$
$$x = 11$$

Odpoveď je vo všetkých troch prípadoch rovnaká: Štyria kamaráti musia zavolať na pomoc ešte 7 kamarátov, aby ich bolo 11.

VŠIMNIME SI

V príklade 1 išlo o dve dvojice hodnôt veličín, ktoré boli priamo úmerné, teda spolu o 4 čísla. Tri z nich sme poznali, štvrté sme mali vypočítať. Riešenie takého príkladu nazývame **trojčlenka.**

Pozorujte ako počítali Alenka, Janko alebo Ondrej. Všetci traja riešili príklad trojčlenkou. Alenka využila výpočet **prechodom cez jednotku,** Janko použil **zmenu v danom pomere,** Ondrej ho riešil **úmerou.**
Ktorý výpočet sa vám najviac páči?

PRÍKLAD 2

V pekárni napiekli z 25 kg múky 325 kusov koláčov. Koľko kg múky potrebujú na napečenie 195 kusov takýchto koláčov?

RIEŠENIE

Boris hovorí, že ide o trojčlenku. Čím viac koláčov chcú v pekárni napiecť, tým viac múky budú potrebovať. Zapíšeme teda priamu úmeru:

$$\begin{array}{c} \uparrow\ 25\ \text{kg} \ \ldots\ldots\ 325\ \text{ks}\ \uparrow \\ x\ \text{kg} \ \ldots\ldots\ 195\ \text{ks} \\ \hline \end{array}$$

$$x : 25 = 195 : 325$$
$$x \,.\, 325 = 25 \,.\, 195$$
$$x = \frac{25 \,.\, 195}{325}$$
$$x = 15$$

Odpoveď: Na napečenie 195 kusov koláčov potrebujú v pekárni 15 kg múky.

ÚLOHA 1

Za 4,5 m látky sme v obchode zaplatili 1 260 Sk. Koľko Sk zaplatíme za látku na 6 kostýmov, ak na jeden potrebujeme 2,3 m látky?

PRÍKLAD 3

Katka, ktorej krok meria 50 cm, napočítala z domu k tete 294 krokov. Koľko krokov urobí na ceste k tete Katkin otec, ak jeho krok meria 70 cm?

RIEŠENIE

Julo vysvetľuje: Koľkokrát je krok dlhší, toľkokrát menej krokov treba urobiť na tej istej vzdialenosti. Naše veličiny sú teda **nepriamo úmerné.** Šípkami to naznačíme tak, že jedna dvojica rastie, druhá klesá.

Zapisuje:

$$\begin{array}{c} \downarrow\ 50\ \text{cm} \ \ldots\ldots\ 294\ \text{krokov}\ \uparrow \\ 70\ \text{cm} \ \ldots\ldots\ x\ \text{krokov} \\ \hline \end{array}$$

$$x : 294 = 50 : 70$$
$$x \,.\, 70 = 294 \,.\, 50$$
$$x = \frac{294 \,.\, 50}{70}$$
$$x = 210$$

Odpoveď: Katkin otec urobí na ceste k tete 210 krokov.

PRÍKLAD 4

Zásoba materiálu pre 6 pracovníkov vystačí na 30 dní. Namiesto 6 pracovníkov firma prijala 9.
Na koľko dní im vystačí zásoba materiálu?

RIEŠENIE

Zuzka rieši príklad trojčlenkou, ide o nepriamu úmernosť:

$\downarrow$ 6 pracovníkov . . . . 30 dní $\uparrow$
9 pracovníkov . . . . x dní

$$x : 30 = 6 : 9$$
$$x \,.\, 9 = 30 \,.\, 6$$
$$x = \frac{30 \,.\, 6}{9}$$
$$x = 20$$

Zuzka píše odpoveď: Zásoba materiálu vystačí na 20 dní.

CVIČENIA

1. Zo 450 kg vápenca sa vypáli 350 kg vápna. Koľko vápenca potrebujeme na 16,2 kg vápna?

2. Na divadelnom predstavení sa zúčastnilo 220 žiakov. Za predstavenie zaplatili 17 600 Sk a za cestu autobusom 8 800 Sk. Koľko Sk bude stáť predstavenie pre 178 žiakov, ak lístok na predstavenie bude rovnaký, ale cestovné sa zvýši o 5,50 Sk na žiaka?

3. Šofér vozí piesok na stavbu ihriska. Keby išiel po piesok trikrát, navozil by piesok za 8 dní. Koľkokrát sa musí denne otočiť, aby navozil piesok o dva dni skôr?

4. Úprava mestského smetiska trvá trom bagristom 12 dní. Koľko bagristov treba poslať na úpravu mestského smetiska, aby prácu ukončili za 4 dni?

5. Na vytapetovanie izby potrebujeme 135 m tapiet 40 cm širokých. Koľko metrov tapiet potrebujeme na vytapetovanie rovnako veľkej izby, ak v obchode majú iba 60 cm široké tapety?

6. Zo 100 kg pšenice sa namelie 75 kg múky. Koľko pšenice potrebujeme na získanie 246 kg múky?

7. Desať kamarátov sa rozhodlo ísť na turistiku. Nakúpili zásoby potravín na 9 dní. Pred nástupom na turistiku štyria chlapci ochoreli. O koľko dní si môžu chlapci predĺžiť pobyt, ak si zoberú nakúpenú zásobu potravín?

.... **8.** Koľko Sk zarobila krajčírka za všetky ušité ozdobné vankúše, ak zarobila za 6 zmien, v ktorých ušila spolu 8 vankúšov, 1680 Sk a potom šila ešte 10,5 zmeny?

5.4 Mierka mapy a plánu

PROBLÉM 1

Na obrázku je plán bytu. Zistite skutočné rozmery obývacej izby a pracovne, ak má plán mierku 1 : 100.

RIEŠENIE

Janko zoberie do rúk pravítko, meria v pláne a zapisuje:

Rozmery: obývacia izba — 6 cm a 3 cm
pracovňa — 3 cm a 2,2 cm

Mierka 1 : 100 znamená, že skutočnosť je 100-krát väčšia ako plán.

Skutočné rozmery: 100 . 6 cm = 600 cm = 6 m
100 . 3 cm = 300 cm = 3 m
100 . 2,2 cm = 220 cm = 2,2 m

Odpoveď: Rozmery obývacej izby sú 6 m a 3 m a pracovňa má rozmery 3 m a 2,2 m.

ÚLOHA 1

Určte aj ostatné skutočné rozmery v byte.

PROBLÉM 2

V skutočnosti má učebňa jazykov rozmery 12 m a 8,5 m. Aké sú jej rozmery na pláne školy, ak mierka plánu je 1 : 500 ?

RIEŠENIE

Janko hovorí: 12 m = 12 000 mm
8,5 m = 8 500 mm

Mierka 1 : 500 znamená, že plán je 500-krát menší ako skutočnosť.

Preto platí: 12 000 mm : 500 = 24 mm
8 500 mm : 500 = 17 mm

Janko píše odpoveď: Na pláne školy má učebňa jazykov rozmery 24 mm a 17 mm.

Mierka plánu 1 : x znamená, že skutočné rozmery sú na pláne zmenšené x-krát.
Úsečka, ktorej veľkosť je 1 cm, predstavuje v skutočnosti x cm.

ÚLOHA 2

Nakreslite plán vašej triedy v mierke 1 : 200.

PRÍKLAD 1

Na mape s mierkou 1 : 1 000 000 je vzdušná vzdialenosť miest Bratislava a Nitra znázornená úsečkou 7,5 cm. Aká je skutočná vzdušná vzdialenosť z Bratislavy do Nitry?

RIEŠENIE

Zuzka hovorí: Mierka mapy predstavuje 1 000 000-krát zmenšenú skutočnosť. Tá bude 1 000 000-krát väčšia.

1 000 000 . 7,5 cm = 7 500 000 cm = 75 km

Odpoveď: Vzdušná vzdialenosť z Bratislavy do Nitry je 75 km.

PRÍKLAD 2

Vzdušná vzdialenosť z Nových Zámkov do Nitry je 38 km. Aká dlhá úsečka bude predstavovať túto vzdialenosť na mape s mierkou 1 : 500 000 ?

RIEŠENIE

Peter vie, že skutočnú vzdialenosť musíme 500 000-krát zmenšiť:

38 km = 3 800 000 cm

3 800 000 : 500 000 = 7,6

Odpoveď: Na mape bude vzdušná vzdialenosť z Nitry do Nových Zámkov znázornená úsečkou dlhou 7,6 cm.

ÚLOHA 3

Zistite na mape s mierkou 1 : 1 500 000 aká je vzdialenosť z vášho mesta do najbližšiehomesta a porovnajte to so skutočnosťou.

C V I Č E N I A

1. Mierka plánu bytu je 1 : 100. Aké rozmery má kuchyňa, ktorej rozmery sú na pláne 36 mm a 41 mm?

.... **2.** Plán mesta má mierku 1 : 5 000. Určte skutočné rozmery obchodného strediska, ktoré má tvar obdĺžnika s rozmermi 18 mm 25 mm.

.... **3.** Akou veľkou úsečkou bude znázornená vzdialenosť 30 km na mape s mierkou: 1 : 100 000, 1 : 75 000, 1 : 200 000, 1 : 1 000 000 ?

.... **4.** Skutočná vzdialenosť dvoch miest je 75 km; 1 100 km; 2 000 km. Akou úsečkou budú znázornené tieto vzdialenosti na mape s mierkou 1 : 1 250 000?

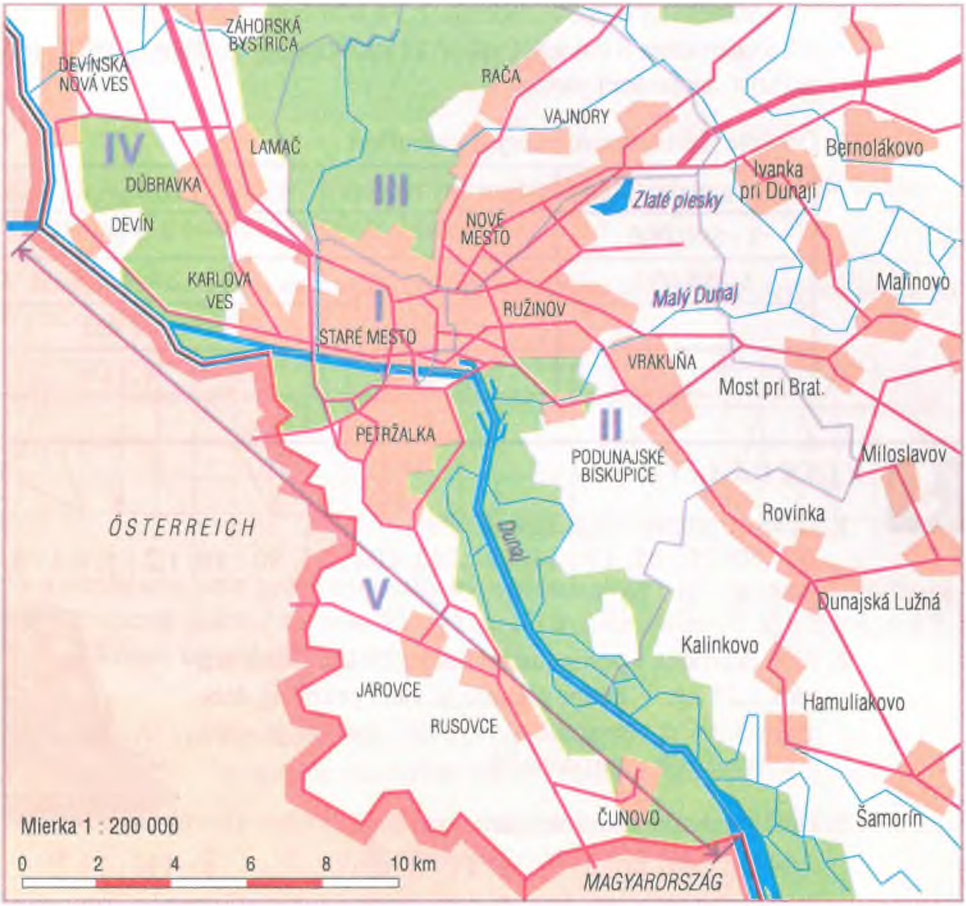
.... **5.** Zistite mierku mapy ak vzdialenosť na mape meria 4,2 cm a skutočná vzdialenosť je 84 km.

.... **6.** Na mape Bratislavy s mierkou 1 : 200 000 je dĺžka rieky Dunaj asi 12,3 cm. Koľko km Dunaja preteká približne týmto územím? (obr. 1)

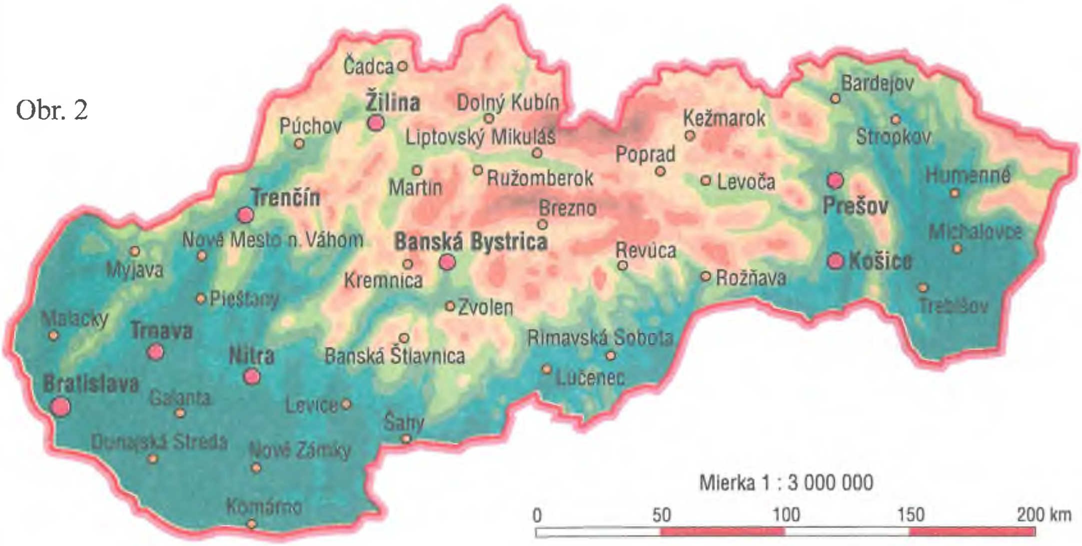
.... **7.** Odmerajte na mape vzdušnú vzdialenosť z Nitry do Banskej Bystrice (obr. 2) a vypočítajte skutočnú vzdušnú vzdialenosť týchto miest.

.... **8.** Napíšte mierku, ktorá vyjadruje, že zobrazený predmet bol 500-krát zmenšený.

Obr. 1


ZÁHORSKÁ BYSTRICA
DEVÍNSKA NOVÁ VES
RAČA
VAJNORY
LAMAČ
IV
III
DÚBRAVKA
Bernolákovo
Ivanka pri Dunaji
Zlaté piesky
DEVÍN
NOVÉ MESTO
KARLOVA VES
I
Malý Dunaj
Malinovo
RUŽINOV
STARÉ MESTO
VRAKUŇA
Most pri Brat.
PETRŽALKA
II
PODUNAJSKÉ BISKUPICE
Miloslavov
Rovinka
ÖSTERREICH
Dunaj
V
Dunajská Lužná
Kalinkovo
JAROVCE
Hamuliakovo
RUSOVCE
Mierka 1 : 200 000
ČUNOVO
Šamorín
0 2 4 6 8 10 km
MAGYARORSZÁG

Obr. 2


Čadca
Žilina
Dolný Kubín
Bardejov
Púchov
Liptovský Mikuláš
Kežmarok
Stropkov
Poprad
Martin
Ružomberok
Levoča
Humenné
Trenčín
Brezno
Prešov
Nové Mesto n. Váhom
Banská Bystrica
Michalovce
Myjava
Revúca
Kremnica
Rožňava
Košice
Piešťany
Zvolen
Trebišov
Malacky
Trnava
Rimavská Sobota
Nitra
Banská Štiavnica
Lučenec
Bratislava
Galanta
Levice
Šahy
Dunajská Streda
Nové Zámky
Mierka 1 : 3 000 000
Komárno
0 50 100 150 200 km

.... **9.** Na katastrálnej mape s mierkou 1 : 2 000 bola stavba zakreslená ako obdĺžnik s rozmermi 8 cm a 6,5 cm. Aké sú skutočné rozmery stavby? Vypočítajte veľkosť zastavanej plochy.

.... **10.** Doplňte chýbajúce rozmery do tabuľky:

Mierka mapy, plánu	Skutočný rozmer	Zmenšený rozmer na mape, pláne
1 : 500 000		4 cm
1 : 50 000	400 m	
	5 km	4 cm
	45 m	4,5 cm

VYSKÚŠAJTE SA!

1. Upravte pomery na základný tvar:
16 : 90; 25 : 15; 17 : 34; 92 : 100; 100 : 25; 80 : 40; 1,2 : 5; 4,4 : 8,2; $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; $\frac{3}{7} : \frac{4}{8}$; $2\frac{1}{5} : \frac{3}{2}$; $\frac{2}{5} : 1{,}2$

.... **2.** Plná debnička s pomarančmi váži 12,5 kg. Debnička váži 1,25 kg. V akom pomere je váha prázdnej debničky k váhe pomarančov. V akom pomere je váha pomarančov k plnej debničke.

.... **3.** Upravte pomery na základný tvar:

a) 4 km : 800 m c) 5 l : 60 dm^3 e) 4 hl : 2 l

b) 1 mm : 1 km d) $\frac{1}{2}$ kg : 280 g f) $2\frac{1}{4}$ m : 3 cm

.... **4.** Zmeňte 4 kg v pomere: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{5}{4}$, $2\frac{1}{2}$.

.... **5.** Na upečenie koláča potrebujeme: 250 g cukru, 6 vajec, 6 jogurtov, 18 g múky. Zmeňte recept tak, aby sme použili iba 3 jogurty.

.... **6.** Zo 600 kg čerstvých jabĺk získame 114 kg sušených jabĺk. Koľko kg sušených jabĺk získame zo 120 kg čerstvých jabĺk? Koľko kg čerstvých jabĺk potrebujeme, aby sme získali 22,8 kg sušených jabĺk?

.... **7.** Rozdeľte 4 301 Sk v pomere 1 : 16.

.... **8.** Rozdeľte 648 jabĺk v pomere 1 : 5 : 6.

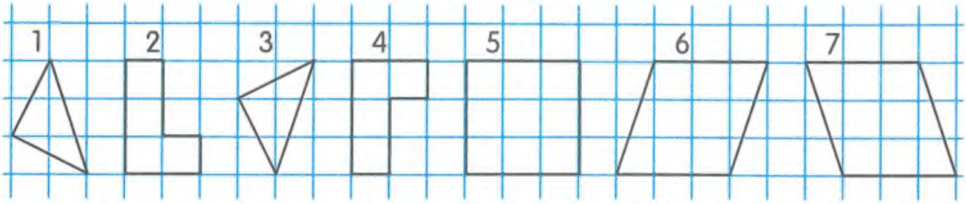
.... **9.** Výška tyče je 4 m. Jej tieň meria 7,2 m. Aký vysoký je strom, ktorého tieň je 8,1 m dlhý?

.... **10.** 4 robotníci spravia prácu za 28 dní. Koľko robotníkov treba ešte prijať, aby rovnakú prácu urobili za 14 dní?

6 ZHODNOSŤ TROJUHOLNÍKOV

6.1 Zhodnosť geometrických útvarov

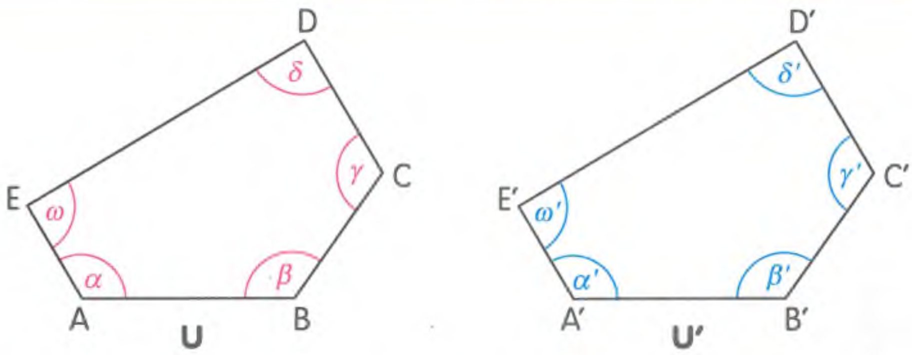
V štvorcovej sieti sú nakreslené rôzne geometrické útvary. Prekreslíme si ich na štvorčekovaný papier



Ak vystrihneme tieto geometrické útvary a premiestníme ich, zistíme, že niektoré z nich môžeme položiť na seba a kryjú sa. Sú to napr. útvary 1 a 3, 2 a 4, 6 a 7. Útvar 5 a napr. útvar 6 túto vlastnosť nemajú.

Dva útvary, ktoré môžeme premiestniť (aj prevrátiť na rub) tak, aby sa kryli, nazývame **zhodnými** (znak zhodnosti je $\cong$).

Zhodné útvary majú zhodný tvar. Odpovedajúce strany a uhly týchto útvarov sú zhodné.



$AB \cong A'B'$, $\alpha \cong \alpha'$, $BC \cong B'C'$, $\beta \cong \beta'$, $CD \cong C'D'$, $\gamma \cong \gamma'$, $DE \cong D'E'$, $\delta \cong \delta'$, $EA \cong E'A'$, $\omega \cong \omega'$.

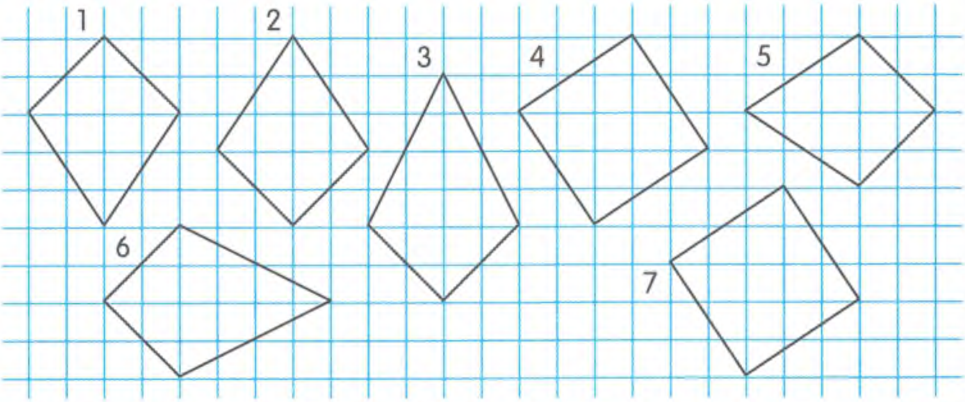
Útvar **U** je zhodný s útvarom **U'**.
U$(ABCDE) \cong$ **U'**$(A'B'C'D'E')$

ÚLOHA 1

Uveďte zo svojho okolia dvojice útvarov, ktoré sú zhodné.

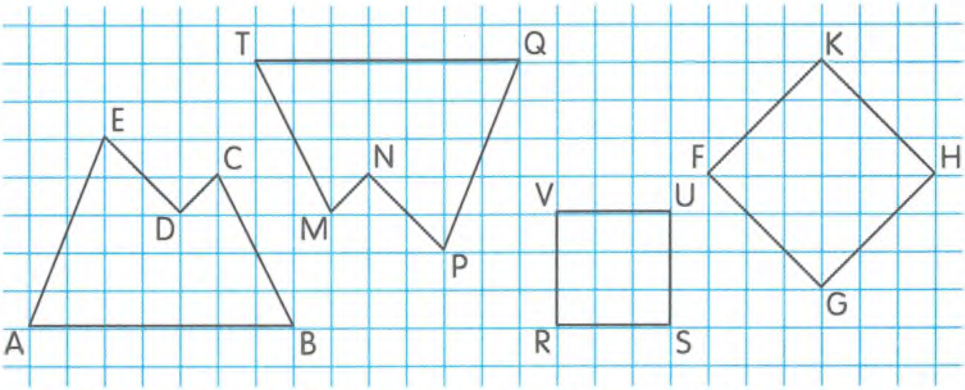
ÚLOHA 2

V štvorcovej sieti sú znázornené štvoruholníky. Zapíšte, ktoré z nich sú zhodné.



ÚLOHA 3

V štvorcovej sieti sú znázornené dve dvojice útvarov. Rozhodnite, ktoré z nich sú zhodné a zapíšte to.



PROBLÉM 1

Lucia namieta: Prečo štvorce z úlohy 3 nie sú zhodné, veď majú všetky uhly zhodné?

RIEŠENIE

Marienka jej odpovedá.
To nestačí. Zhodné útvary musia mať aj odpovedajúce strany zhodné. Tieto štvorce túto podmienku nespĺňajú.

PRÍKLAD 1

Dané sú dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Rozhodnite, ktoré z nich sú zhodné, keď:

a) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 3$ cm;
b) $r_1 = 1{,}5$ cm, $r_2 = 45$ mm;
c) $r_1 = \frac{5}{2}$ cm, $r_2 = \frac{1}{5}$ cm.

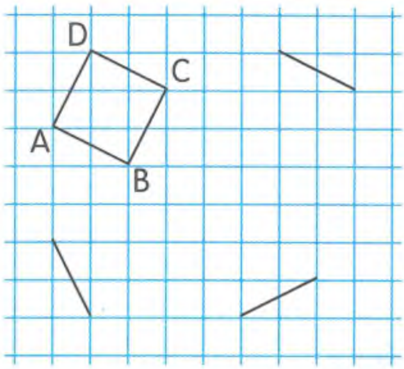
RIEŠENIE

Peter odôvodňuje: Dve zhodné kružnice musia mať rovnaké polomery:

a) kružnice k_1, k_2 sú zhodné, pretože $r_1 = r_2$,
b) kružnice k_1, k_2 nie sú zhodné, pretože $r_1 < r_2$,
c) kružnice k_1, k_2 nie sú zhodné, pretože $r_1 > r_2$.

CVIČENIA

1. Nad danými úsečkami zostrojte útvary zhodné s daným útvarom *ABCD*.



.... **2.** Kedy sú dva obdĺžniky zhodné?

.... **3.** Daný je kváder *ABCDEFGH*. Napíšte dvojice zhodných obdĺžnikov, ktoré sú stenami daného kvádra.

.... **4.** Narysujte ľubovoľný obdĺžnik *ABCD*. Narysujte útvar *MNPQ* tak, aby bol zhodný s obdĺžnikom *ABCD*. Napíšte dvojice strán, ktoré si v zhodnosti odpovedajú.

6.2 Zhodnosť trojuholníkov

Strany a uhly trojuholníka budeme najčastejšie označovať takto: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.

ÚLOHA 1

Ku ktorým stranám $\triangle ABC$ je priľahlý uhol

a) γ; b) α; c) β?

ÚLOHA 2

Ktoré uhly v $\triangle ABC$ sú priľahlé k strane a) AB; b) BC; c) CA?

ÚLOHA 3

Oproti ktorej strane trojuholníka ABC leží vrchol uhla a) β; b) α; c) $\sphericalangle ABC$?

V ďalšom sa budeme zaoberať **zhodnosťou trojuholníkov.** Ak premiestníme $\triangle ABC$ tak, aby sa kryl s $\triangle A'B'C'$, pričom vrchol A sa stotožní s vrcholom A', vrchol B s vrcholom B' a vrchol C s vrcholom C', potom

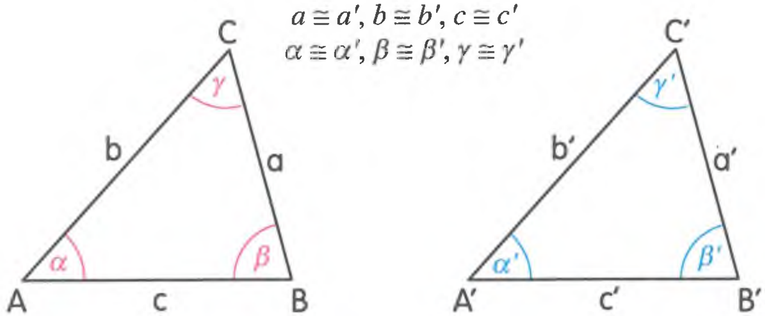
$$AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C'$$

a

$$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C', \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C', \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$$

Čo môžeme stručne zapísať:

$$a \cong a', b \cong b', c \cong c'$$
$$\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta', \gamma \cong \gamma'$$



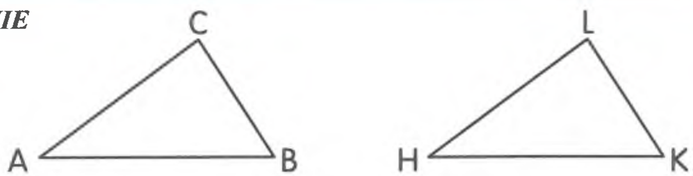
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Dva **trojuholníky sú zhodné,** ak sa zhodujú vo všetkých odpovedajúcich stranách a vo všetkých odpovedajúcich uhloch.

PRÍKLAD 1

Majme dva trojuholníky ABC, HKL, pre ktoré platí $\triangle ABC \cong \triangle HKL$. Ktorý uhol $\triangle HKL$ je zhodný s $\sphericalangle CAB$ a ktorá strana je zhodná so stranou CA?

RIEŠENIE



V zhodných trojuholníkoch si odpovedajú vrcholy:

$A \to H$

$B \to K$

$C \to L$ Potom $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle LHK$, $CA \cong LH$

ÚLOHA 4

Platí: $\triangle PLM \cong \triangle ADG$. Zmeňte poradie vrcholov trojuholníka PLM a zapíšte zhodnosť novovzniknutých trojuholníkov.

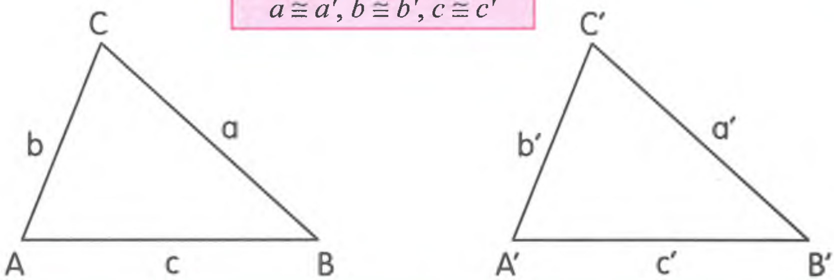
Nie vždy môžeme položiť trojuholníky na seba tak, aby sa kryli, napr. dve trojuholníkové polia. Preto sa v geometrii uvádzajú vety, ktoré poskytujú jednoduchý spôsob, ako sa dá zistiť zhodnosť trojuholníkov.

Vety o zhodnosti trojuholníkov

1. Veta *(sss)*

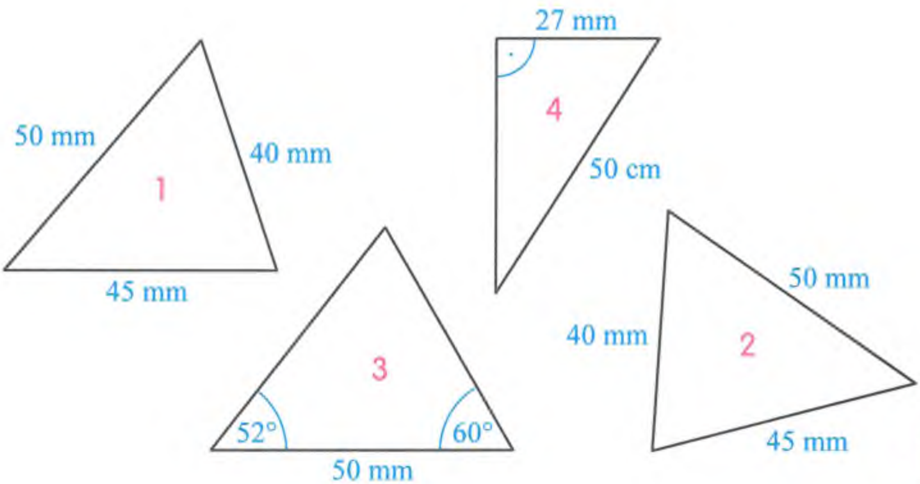
Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých stranách.

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
$a \cong a', b \cong b', c \cong c'$



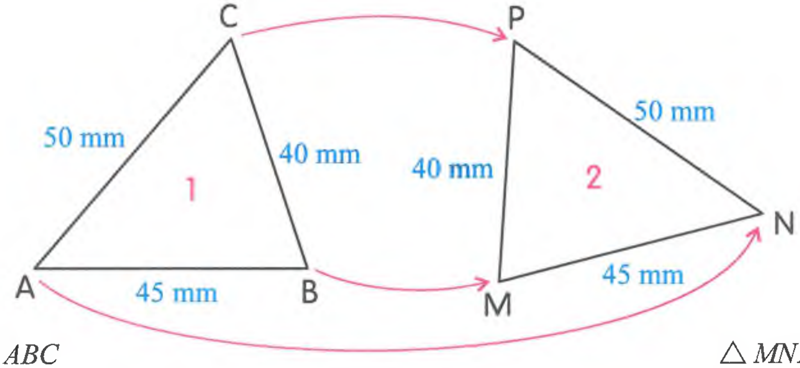
PRÍKLAD 2

Na obrázku sú narysované trojuholníky. Zistite, ktoré z nich sú zhodné. Označte ich vrcholy a napíšte, ktoré vrcholy, strany a uhly si navzájom odpovedajú.



RIEŠENIE

Zhodné sú trojuholníky 1 a 2, lebo sa zhodujú vo všetkých troch stranách.



$\triangle ABC$ $\triangle MNP$

$$\left.\begin{array}{ll} |AB| = 45\text{ mm}, |NM| = 45\text{ mm} & AB \cong NM \\ |BC| = 40\text{ mm}, |MP| = 40\text{ mm} & BC \cong MP \\ |AC| = 50\text{ mm}, |NP| = 50\text{ mm} & AC \cong NP \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\triangle ABC \cong \triangle NMP} \text{ (sss)}$$

$$A \to N, \quad B \to M, \quad C \to P$$

$$AB \to NM,\ BC \to MP,\ AC \to NP$$

$$\sphericalangle BAC \to \sphericalangle MNP$$

$$\sphericalangle ABC \to \sphericalangle NMP$$

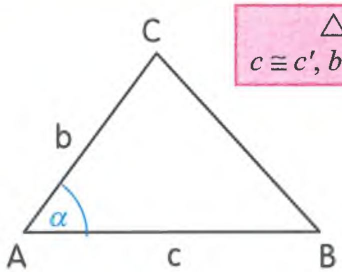
$$\sphericalangle ABC \to \sphericalangle NPM$$

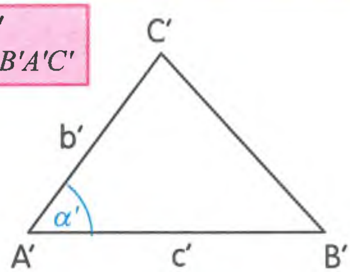
Potom platí: $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle MNP$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle NMP$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle NPM$

2. Veta (*sus*)

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom.

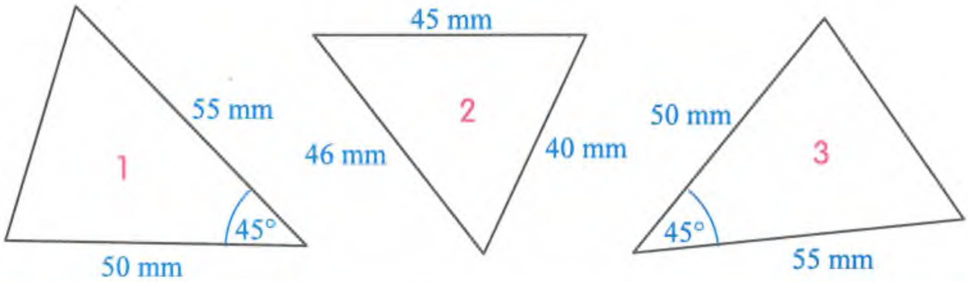
$$\boxed{\begin{array}{c}\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \\ c \cong c',\ b \cong b',\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'\end{array}}$$





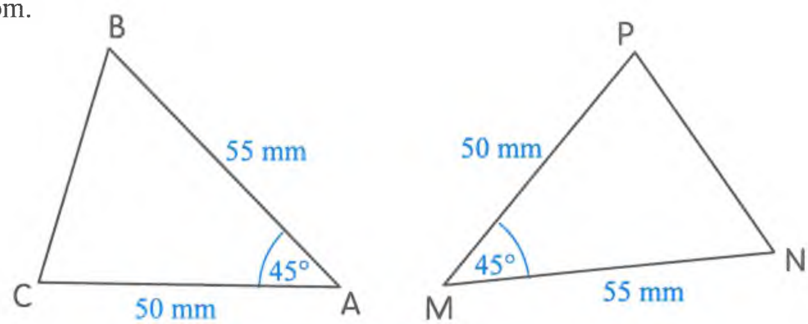
PRÍKLAD 3

Na obrázku sú narysované trojuholníky. Nájdite dvojicu zhodných trojuholníkov. Označte ich vrcholy a napíšte, ktoré vrcholy, strany a uhly si navzájom odpovedajú.



RIEŠENIE

Zhodné sú trojuholníky 1 a 3, lebo sa zhodujú vo dvoch stranách a v uhle nimi určenom.



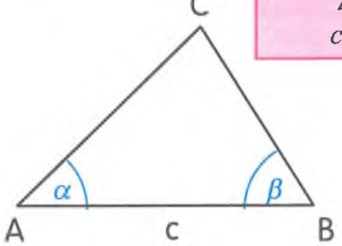
$$\left.\begin{array}{r} AB \cong MN \\ AC \cong MP \\ \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle NMP \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\triangle ABC \cong \triangle MNP} \quad \text{(sus)}$$

$$A \to M, \quad B \to N, \quad C \to P$$
$$AB \to MN, AC \to MP, BC \to NP$$
$$\sphericalangle BAC \to \sphericalangle NMP$$
$$\sphericalangle ABC \to \sphericalangle MNP$$
$$\sphericalangle BCA \to \sphericalangle NPM$$

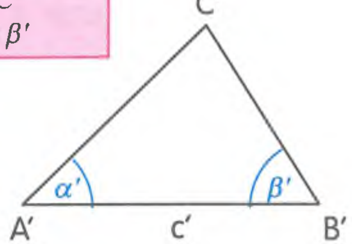
Potom platí: $BC \cong NP$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle MNP$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle NPM$.

3. Veta (*usu*)

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých.

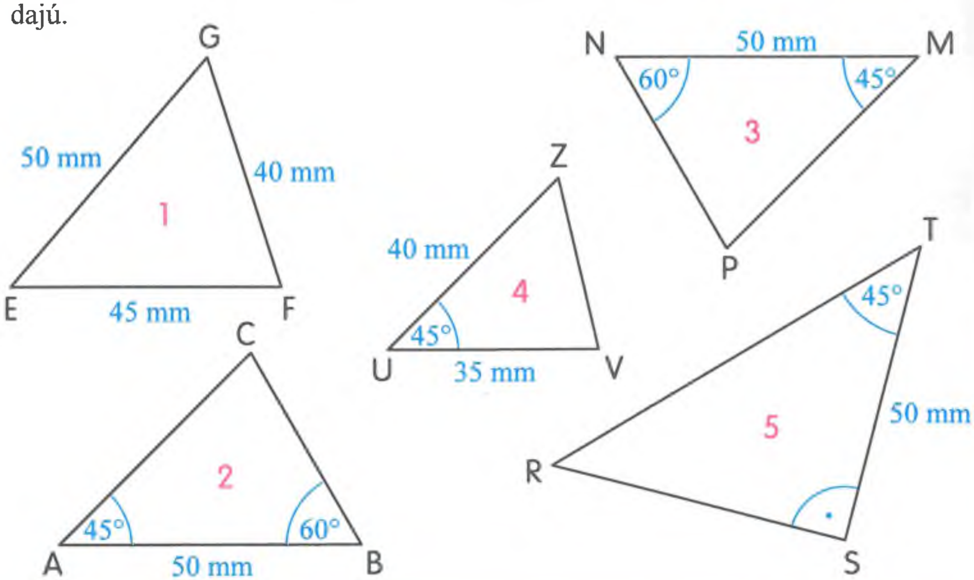


$$\boxed{\begin{array}{c} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \\ c \cong c', \alpha \cong \alpha', \ \beta \cong \beta' \end{array}}$$



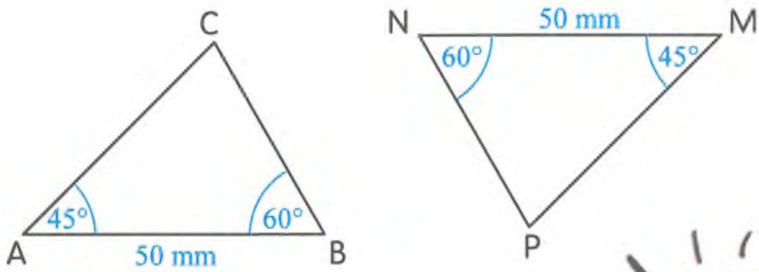
PRÍKLAD 4

Na obrázku sú narysované trojuholníky. Nájdite dvojice zhodných trojuholníkov. Označte ich vrcholy a napíšte, ktoré vrcholy, strany a uhly si navzájom odpovedajú.



RIEŠENIE

Zhodné sú trojuholníky 2 a 3 lebo sa zhodujú v jednej strane a dvoch uhloch k nej priľahlých.



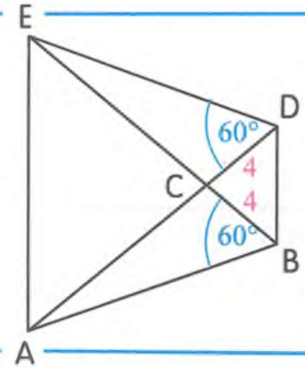
$$\left.\begin{array}{r} AB \cong MN \\ \sphericalangle\, CAB \cong \sphericalangle\, PMN \\ \sphericalangle\, ABC \cong \sphericalangle\, MNP \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\triangle\, ABC \cong \triangle\, MNP} \ \text{(usu)}$$

$$A \to M, \quad B \to N, \quad C \to P$$
$$AB \to MN,\ AC \to MP,\ BC \to NP$$
$$\sphericalangle\, CAB \to \sphericalangle\, PMN$$
$$\sphericalangle\, ABC \to \sphericalangle\, MNP$$
$$\sphericalangle\, BCA \to \sphericalangle\, NPM$$

Potom platí: $BC \cong NP$, $AC \cong MP$, $\sphericalangle\, BCA \cong \sphericalangle\, NPM$.

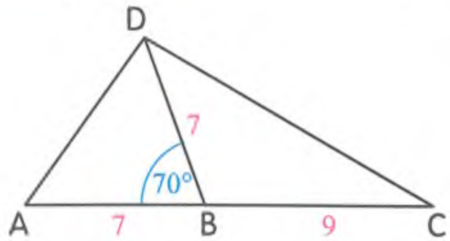
ÚLOHA 5

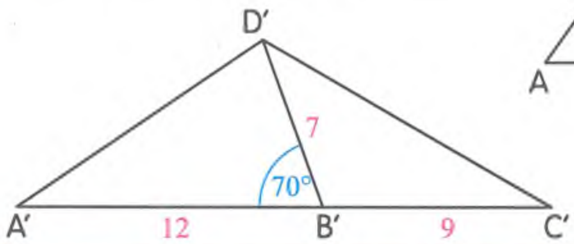
Sledujte obrázok. Odôvodnite (dokážte), že $ED \cong AB$, $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CED$.



ÚLOHA 6

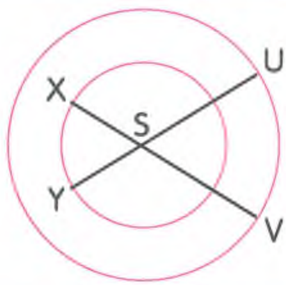
Na obrázku sú dané trojuholníky. Odôvodnite, prečo platí $DC \cong D'C'$, $\sphericalangle BDC \cong \sphericalangle B'D'C'$, $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle B'C'D'$.





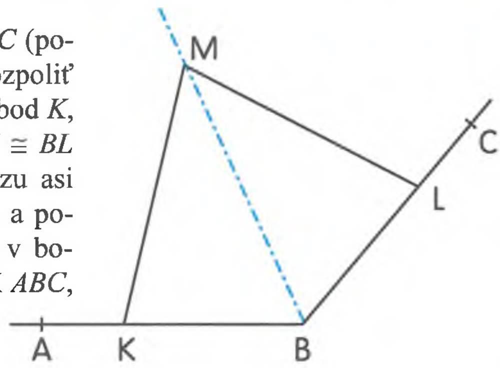
ÚLOHA 7

Na obrázku je bod S stredom oboch kružníc. Dokážte, že $UX \cong VY$.



ÚLOHA 8

Na dvore máme vyznačené body A, B, C (pozri obrázok). Uhol $\sphericalangle ABC$ môžeme rozpoliť takto: Na polpriamke BA si vyznačíme bod K, na polpriamke BC bod L tak, aby $BK \cong BL$ (napr. $|BK| = 2$ m). Dva konce povrazu asi 15 m dlhého upevníme v bodoch K, L a povraz napneme tak, že jeho stred bude v bode M. Polpriamka BM bude osou uhla $\sphericalangle ABC$, teda ho bude rozpoľovať. Odôvodnite.

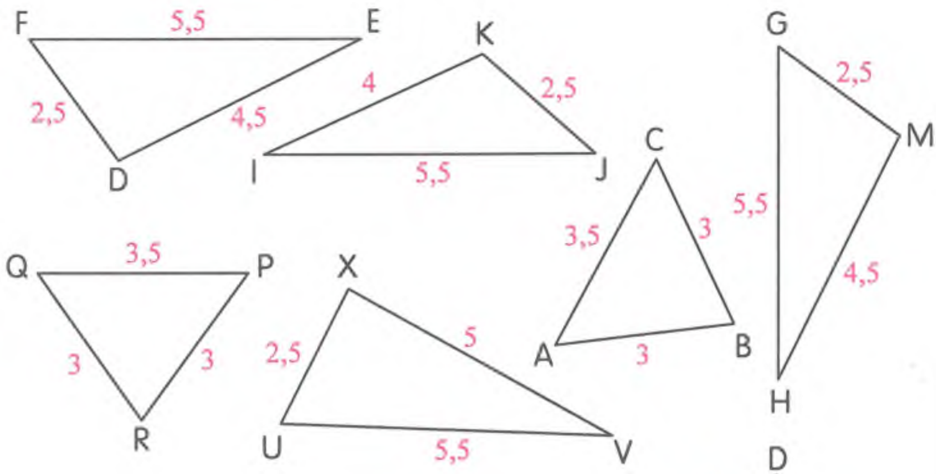


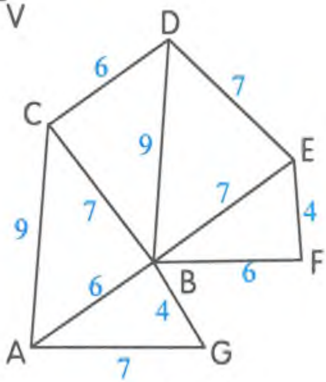
ÚLOHA 9

Znenie viet o zhodnosti trojuholníkov upravte pre
a) rovnostranné,
b) rovnoramenné,
c) pravouhlé trojuholníky.

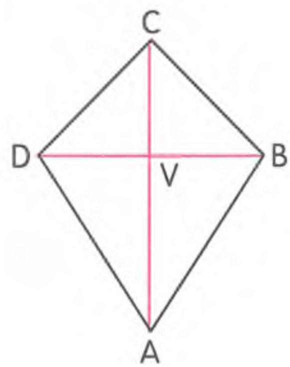
CVIČENIA

1. Na obrázku nájdite dvojice zhodných trojuholníkov. Výsledok zapíšte.





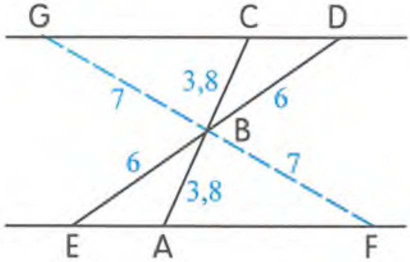
.... **2.** Na obrázku nájdite dvojice zhodných trojuholníkov. Výsledok zapíšte a svoje tvrdenie odôvodnite.



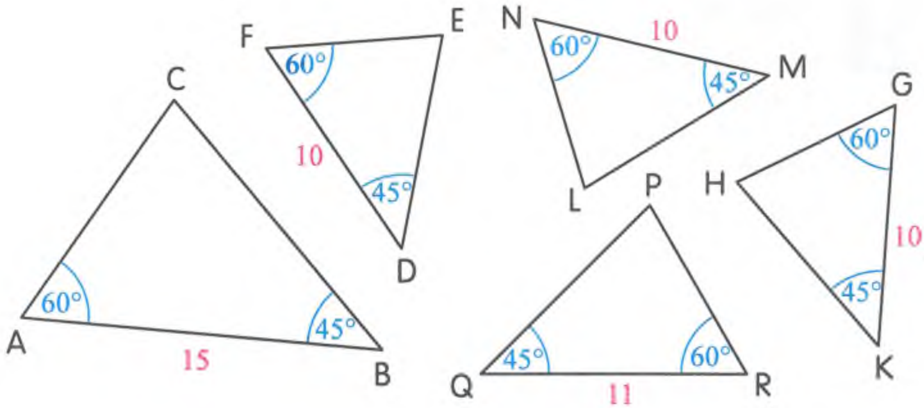
.... **3.** Na obrázku je nakreslený *deltoid,* v ktorom priamka AC je osou úsečky BD.

a) Ktoré dva trojuholníky sú zhodné, zapíšte aj vetu, podľa ktorej sú zhodné.
b) Odôvodnite, prečo sú uhly $\sphericalangle\ CBA$, $\sphericalangle\ CDA$ zhodné?

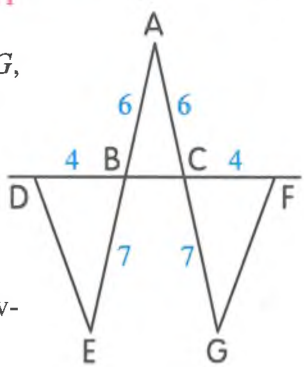
.... **4.** Na obrázku sú priamky *GD* a *EF* rovnobežné. Nájdite dvojice navzájom zhodných trojuholníkov. Zapíšte tieto dvojice a vyznačte odpovedajúce vrcholy, strany a uhly. V každom prípade uveďte aj vetu o zhodnosti, podľa ktorej sú trojuholníky zhodné.



.... **5.** Nájdite na obrázku dvojice zhodných trojuholníkov.



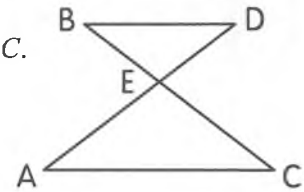
.... **6.** Sledujte obrázok. Odôvodnite, prečo platí $DE \cong FG$, $\sphericalangle DEB \cong \sphericalangle CGF$, $\sphericalangle EDB \cong \sphericalangle GFC$.



.... **7.** Pomocou vety sss dokážte, že uhlopriečka delí rovnobežník na dva zhodné trojuholníky.

.... **8.** Načrtnite rovnoramenný trojuholník a os uhla pri jeho hlavnom vrchole. Odôvodnite, prečo táto os delí rovnoramenný trojuholník na dva zhodné trojuholníky. Zapíšte túto zhodnosť rôznymi spôsobmi.

.... **9.** Na obrázku $BE \cong ED$, $AE \cong EC$. Dokážte, že $BA \cong DC$.



.... **10.** Priamka *p* je kolmá na os *o* ostrého uhla *AVB* a pretína jeho ramená *VA*, *VB* v bodoch *X*, *Y*. Dokážte, že $VX \cong VY$.

6.3 Konštrukcia trojuholníka

PROBLÉM 1

Marienka hovorí:
V 6. ročníku sme už používali vety ***sss***, ***usu***, ***sus*** a nehovorili sme im vety o zhodnosti trojuholníkov. Prečo im tak teraz hovoríme?

RIEŠENIE

Peter sa pokúsi Marienke odpovedať: Tam sme zostrojovali trojuholníky. Ak bol trojuholník daný tromi stranami, hovorili sme, že ho zostrojíme podľa vety *sss*. Pri zhodnosti trojuholníkov porovnávame dva trojuholníky, napr. ak sa zhodujú vo všetkých stranách, tak hovoríme, že sa zhodujú podľa vety *sss*.

Pani učiteľka ešte Petrove vysvetlenie doplnila: Ak použijeme vety ***sss***, ***sus***, ***usu*** na zostrojenie trojuholníkov, hovoríme im **vety o určenosti trojuholníkov.** Ak zisťujeme, či sú trojuholníky zhodné alebo nie sú zhodné, hovoríme, že používame **vety o zhodnosti trojuholníkov.**

ZOPAKUJME SI

1. Pri konštrukcii (*sss*) dĺžka strany zostrojovaného trojuholníka musí byť menšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch strán a súčasne väčšia ako rozdiel ich dĺžok.
2. Pri konštrukcii (*sus*) musí byť veľkosť daného uhla menšia ako 180°.
3. Pri konštrukcii (*usu*) musí byť súčet veľkostí daných uhlov menší ako 180°.

ÚLOHA 1

Tri obce K, L, M sú spojené priamymi cestami, ktoré tvoria trojuholník. Odôvodnite, prečo je cesta z obce K do obce M kratšia než cesta cez obec L?

ÚLOHA 2

V rovnoramennom trojuholníku má jedna strana veľkosť 36 cm a druhá 15 cm. Môže byť strana s dĺžkou 36 cm základňou?

PRÍKLAD 1

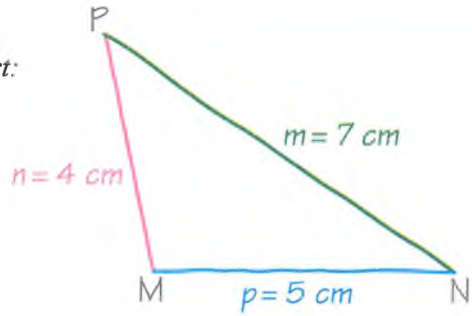
Zostrojte $\triangle MNP$, ak je dané $m = 7$ cm, $n = 4$ cm, $p = 5$ cm.

RIEŠENIE

Rozbor:

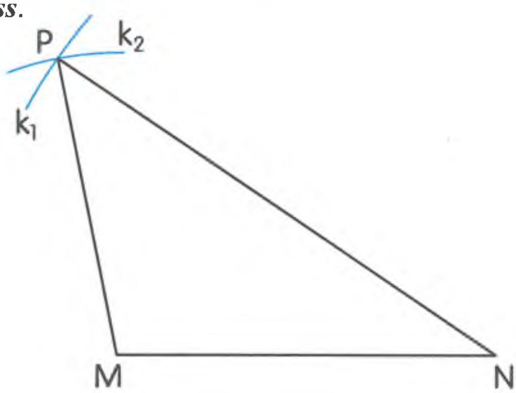
$m = 7$ cm
$n = 4$ cm
$p = 5$ cm
$5 + 4 > 7$
$5 - 4 < 7$

Náčrt:



Trojuholníkové nerovnosti sú splnené, trojuholník sa dá zostrojiť. Poznáme všetky tri strany, použijeme konštrukciu ***sss***.

Konštrukcia:
1. MN; $|MN| = 5$ cm
2. k_1; k_1 $(N, 7$ cm$)$
3. k_2; k_2 $(M, 4$ cm$)$
4. P; $P \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle MNP$



Skúška:
Zostrojili sme úsečku MN, $|MN| = p = 5$ cm. Bod $P \in k_1$, k_1 má polomer $|NP| = 7$ cm, bod $P \in k_2$, ktorej polomer $|MP| = 4$ cm. Strany trojuholníka vyhovujú podmienkam úlohy, existuje jeden trojuholník, ktorý spĺňa podmienky úlohy.

PRÍKLAD 2

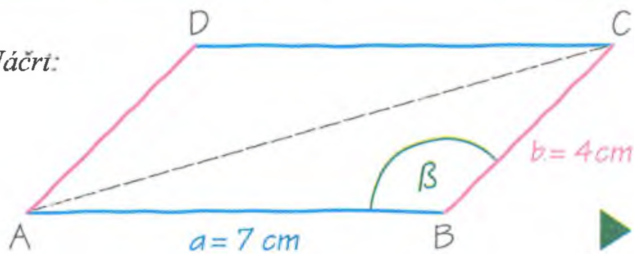
Zostrojte kosodĺžnik $ABCD$, v ktorom je dané
$|AB| = 7$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 135°$.

RIEŠENIE

Rozbor:

$a = |AB| = 7$ cm
$b = |BC| = 4$ cm
$\beta = |\sphericalangle ABC| = 135°$

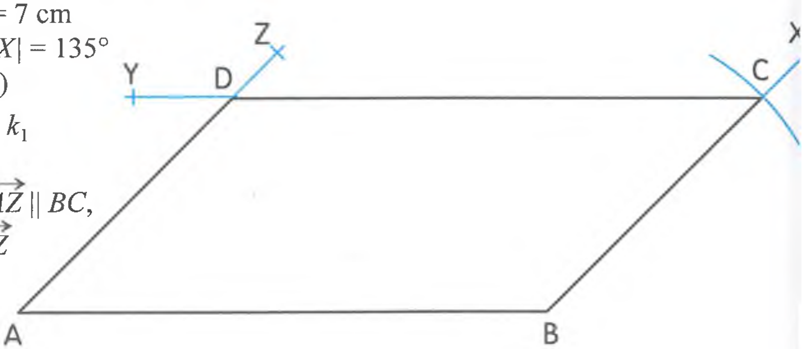
Náčrt:



Kosodĺžnik $ABCD$ vieme zostrojiť, ak poznáme tri vrcholy, štvrtý vrchol zostrojíme na základe vlastností kosodĺžnika. Teda naším prvým cieľom bude zostrojiť vrcholy A, B, C. Vrcholy A, B sú koncové body strany veľkosti $a = 7$ cm. Vrchol C je vrcholom $\triangle ABC$, v ktorom poznáme dve strany a uhol nimi určený, ktorého veľkosť je menšia ako 180°, $\beta < 180°$.

Konštrukcia:

1. $a = AB$; $|AB| = 7$ cm
2. $\sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 135°$
3. k_1; $k_1(B, 4\text{ cm})$
4. C; $C \in \overrightarrow{BX} \cap k_1$
5. $\triangle ABC$
6. D; $\overrightarrow{CY} \parallel AB$, $\overrightarrow{AZ} \parallel BC$,
   $D \in \overrightarrow{CY} \cap \overrightarrow{AZ}$
7. $\square ABCD$.



Skúška:

Úlohou bolo zostrojiť kosodĺžnik, v ktorom $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 135°$. Skúšku urobíme odmeraním dĺžok strán a veľkosti uhla. Existuje jeden kosodĺžnik, ktorý spĺňa dané podmienky.

CVIČENIA

1. Rozhodnite, či je možné, aby mali strany trojuholníka tieto dĺžky (v cm):

a) 6; 7,8; 10 c) 3,7; 4; 5 e) 0,3; 0,8; 2

b) 10,2; 3; 13,2 d) 10; 20; 30 f) 15,5; 9,1; 6,4

.... **2.** Odôvodnite, prečo je rameno rovnoramenného trojuholníka vždy väčšie než polovica jeho základne.

.... **3.** Zostrojte trojuholník ABC, keď je dané (dĺžky úsečiek sú v cm):
a) $a = 6$, $b = 4$, $c = 7$; b) $a = 6$, $b = 7$, $\gamma = 60°$; c) $c = 7$, $\alpha = 30°$, $\beta = 55°$.

.... **4.** Sú dané veľkosti dvoch úsečiek a) 4 cm, 6 cm, b) 6,7 cm, 4,8 cm, c) 25 mm, 40 mm. Ako musíte zvoliť veľkosť tretej úsečky x, aby bolo možné z týchto úsečiek zostrojiť trojuholník?

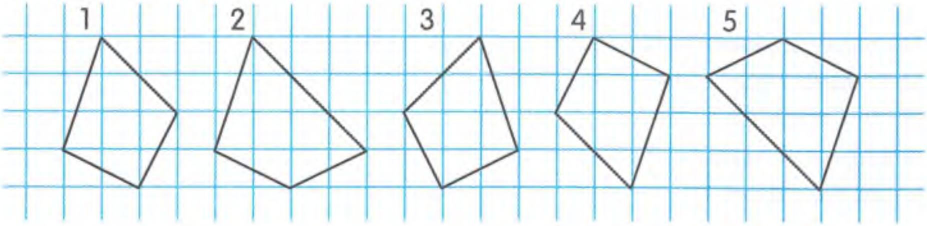
.... **5.** Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB, keď je daná dĺžka ramena a základne: a) $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm; b) $|AB| = 3{,}7$ cm, $|AC| = 6{,}2$ cm.

.... **6.** Zostrojte kosodĺžnik $ABCD$, keď je daná veľkosť dvoch susedných strán a veľkosť jedného vnútorného uhla: a) $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4{,}5$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 75°$;
b) $|AB| = 7$ cm, $|AD| = 3$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 135°$.

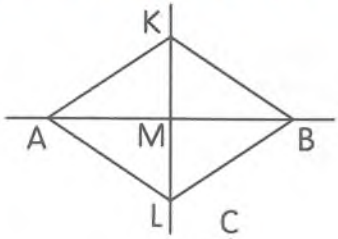
.... **7.** Zostrojte obdĺžnik $MNPQ$, v ktorom $|MN| = 6$ cm, $|MP| = 8$ cm.

VYSKÚŠAJTE SA!

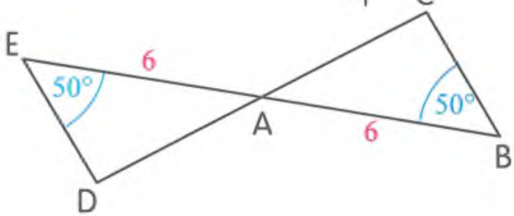
1. V štvorcovej sieti je niekoľko útvarov. Nájdite aspoň 2 zhodné útvary.



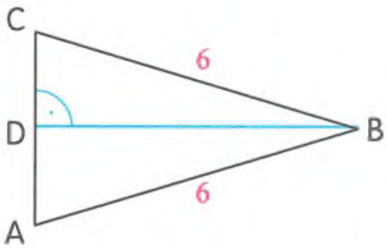
.... **2.** Na obrázku je priamka *KL* osou úsečky *AB* a priamka *AB* osou úsečky *KL*. Nájdite a zapíšte všetky dvojice zhodných trojuholníkov. Zapíšte aj, podľa ktorej vety o zhodnosti trojuholníkov sú tieto trojuholníky zhodné.



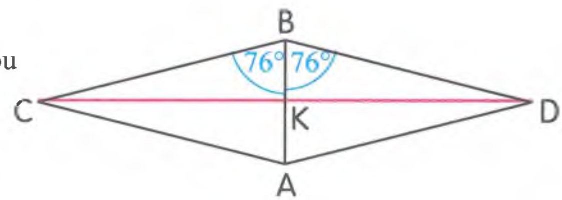
.... **3.** Sledujte obrázok. Odôvodnite, prečo $BC \cong ED$, $AC \cong AD$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADE$, $EC \cong BD$.



.... **4.** Sledujte obrázok. Dokážte, že $DC \cong DA$, $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle DAB$, $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle DBA$ ($\sphericalangle CDB$ je pravý).



.... **5.** Priamka *CD* na obrázku je osou úsečky *AB*. Dokážte, že
a) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC$
b) $\sphericalangle KDB \cong \sphericalangle BCD$
c) $AD \cong BC$



.... **6.** Rozhodnite, či je možné, aby mali strany a, b, c a obvod o trojuholníka *ABC* tieto dĺžky (v cm): a) $a = 3$, $b = 2$, $o = 8$; b) $a = 9$, $b = 6$, $o = 16$.

.... **7.** Zostrojte rovnoramenný trojuholník, keď je daný jeho obvod a dĺžka ramena: a) 15,5 cm, 5 cm; b) 12,8 cm, 4 cm.

.... **8.** Zostrojte kosoštvorec *ABCD*, ak $|AB| = 5$ cm, $|BD| = 7$ cm.

.... **9.** Zostrojte kosodĺžnik *ABCD*, ak $|AB| = 7$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|\sphericalangle BAD| = 60°$.

ROZUM DO HRSTI

Siedmaci, už máte veľké skúsenosti aj s riešením ťažších úloh. Opäť vám predkladáme 13 náročnejších, ale krásnych úloh. Sú určené pre vás, ktorí máte hlbší záujem o matematiku. Vyriešte ich, určite pocítite potešenie z úspechu!

.... **1.** Vežové hodiny odbíjajú malým zvonom každú štvrťhodinu.

1. štvrťhodinu ..... 1 úder
2. štvrťhodinu ..... 2 údery
3. štvrťhodinu ..... 3 údery
4. štvrťhodinu ..... 4 údery

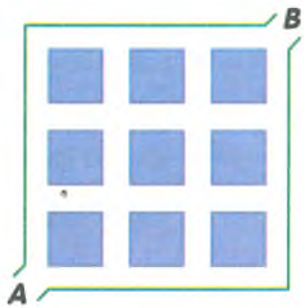
a veľkým zvonom na konci každej hodiny príslušný počet úderov (1, 2, ... , 12 úderov).
Nájdite čo najkratší časový interval, v ktorom môžeme počuť 1 000 úderov.

.... **2.** Ľubovoľne zvoľte 8 po sebe idúcich prirodzených čísel. Zistite, koľko môže byť medzi nimi:
a) najviac prvočísel, b) najmenej prvočísel.
Uveďte príklady.

.... **3.** V šesťcifernom čísle 523 *** sú utajené posledné tri číslice. Nájdite tieto číslice, ak viete, že dané číslo je deliteľné 7, 8 a 9. Nájdite všetky riešenia.

.... **4.** Predstavte si, že vynásobíte všetky prirodzené čísla od 1 do 63. Potom vynásobíte všetky prirodzené čísla od 1 do 61. Nakoniec tieto súčiny odčítate. Je tento výsledok deliteľný číslom 71 ?

.... **5.** V mieste ***A*** vbehla do bludiska vyplašená myšacia rodina. Všetky myši šťastne prebehli bludiskom do miesta ***B***. (Hladný kocúr striehne v mieste *A*).
Z rozhovoru zadychčaných myší sa dozvedáme:



a) Každá myš bežala po chodbičkách len smerom doprava a hore;
b) žiadne dve myši nebežali rovnakou cestou;
c) keby bolo ešte o jednu myš viac, potom by niektoré dve myši museli bežať po tej istej ceste.

Koľko myší mala myšacia rodina?

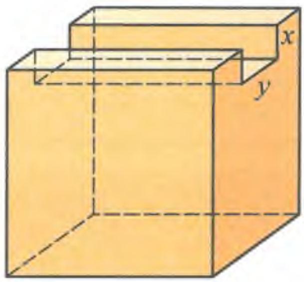
.... **6.** Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$ ($AB||CD$) s vnútorným uhlom $\alpha = 60°$. Uhlopriečka AC je osou uhla α. Obsah lichobežníka sa rovná 78 cm^2. Vypočítajte obsah trojuholníka ACD.

.... **7.** V škatuli je 666 hracích kociek. Jurko ich postupne vyberá a ukladá na stôl. Prvú kocku položí jednou bodkou hore, potom dve kocky s dvoma bodkami hore, ďalej tri kocky s tromi bodkami hore atď. až šesť kociek so šiestimi bodkami hore. Potom všetko začne opakovať, t. j. položí jednu kocku jednou bodkou hore atď., až sa škatuľa vyprázdni. Vypočítajte súčet bodiek na horných stenách všetkých kociek.

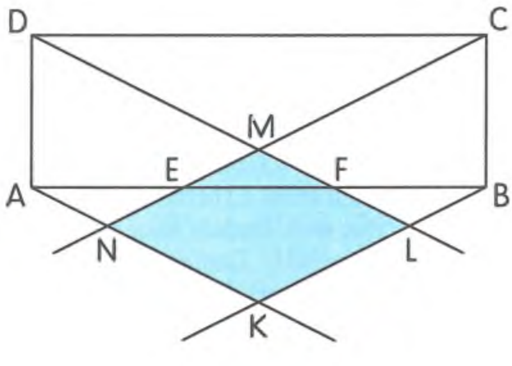
.... **8.** Obdĺžnikové námestie so stranami 252 m a 180 m treba osvetliť elektrickými lampami, ktoré majú byť umiestnené v rovnakých vzdialenostiach po obvode námestia. V každom rohu námestia už stojí jedna lampa. Koľkými lampami ešte musíme osvetliť námestie, ak medzera medzi lampami má byť čo najväčšia?

.... **9.** Z kociek objemu 1 cm^3 je vytvorená veľká kocka, ktorej povrch je zafarbený a meria 216 cm^2. Z každého rohu veľkej kocky odoberieme jednu malú kocku.
a) Určte objem takto vzniknutého telesa.
b) Rozhodnite, či možno z takto odobratých kociek vytvoriť kváder, ktorého povrch bude mať toľko cm^2, o koľko sa zmenšil zafarbený povrch. Ak áno, aké rozmery bude mať?

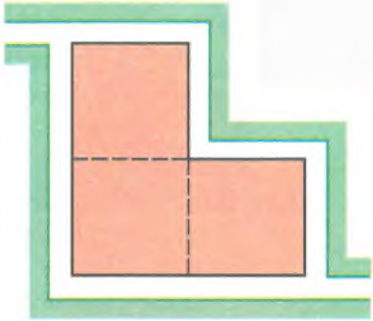
.... **10.** Do kocky s hranou dĺžky 60 mm treba urobiť výrez tvaru kvádra tak, ako je to znázornené na obrázku. Aké rozmery x, y vyjadrené celými číslami môže mať tento výrez, aby povrch telesa, ktoré vznikne po výreze, bol o $\frac{1}{6}$ väčší ako povrch celej kocky? Dĺžka y nesmie byť menšia ako 10 mm, ale musí byť menšia ako 30 mm?



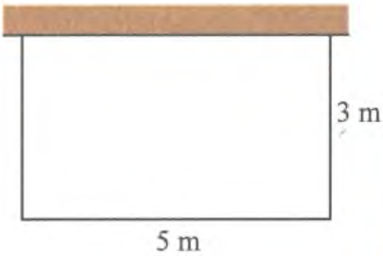
.... **11.** Daný je obdĺžnik $ABCD$ so stranami $|AB| = 3$ d. j., $|BC| = 1$ d. j. Na strane AB zvoľte body E,F tak, aby platilo $|AE| = 1$ d. j., $|BF| = 1$ d. j. Zostrojte priamky CE, DF a bodom B veďte rovnobežku s priamkou CE, bodom A rovnobežku s priamkou DF. Priesečníky dvojíc rovnobežiek označte K, L, M, N (pozri obrázok). Vypočítajte obsah rovnobežníka $KLMN$ (d. j. = daná jednotka).



12. Pozemok na obrázku treba rozdeliť na 8 stavebných parciel tak, aby mali rovnaký tvar a veľkosť a aby sa na každú parcelu dalo vojsť priamo z ulice.



13. Starý otec je drobnochovateľom. Má záhradku pre kuriatka 5 m dlhú a 3 m širokú. Záhradka je z troch strán ohradená pletivom a pri dlhšej strane je postavený kurín.
Starý otec sa rozhodol obložiť záhradku doskami, aby kuriatka nemohli podliezať pletivo. Išiel do šopy, kde mal jednu dosku 5 m dlhú, jednu 3 m dlhú, štyri 2 m dlhé a jednu 1 m dlhú. Aspoň jednu z nich tam musel nechať. Aký je počet možností obložiť záhradku tak, aby starý otec nemusel donesené dosky píliť?



Norbert Wiener

(1894 až 1964)

Americký vedec, zakladateľ kybernetiky. Už ako 14-ročný ukončil vysokoškolské matematické vzdelanie, ako 18-ročný dosiahol doktorát filozofie na Harvardskej univerzite. Na rôznych amerických univerzitách prednášal logiku a matematiku. Rok 1948 sa považuje za rok vzniku kybernetiky, v tomto roku Wiener vydal knihu Kybernetika. *O kybernetike napísal viac kníh. Zaslúžil sa aj o rozvoj iných oblastí matematiky. Zaujímavá je jeho kniha* Ja – Matematik, *v ktorej opisuje významné obdobia svojho života ako vedca.*

VÝSLEDKY ÚLOH A CVIČENÍ

1 Opakovanie a prehĺbenie učiva matematiky zo 6. ročníka

1.1 Celé čísla, kladné a záporné desatinné čísla. Počtové výkony s celými a desatinnými číslami

Úlohy: **6.a)** |10| = |–10| = 10, |6| = |–6| = 6, |–5| = |5| = 5, |1| = |–1| = 1, |3| = |–3| = 3, |–12| = |12| = 12, |–9| = |9| = 9, |22| = |–22| = 22, |–110| = |110| = 110; **b)** |0,23| = |–0,23| = = 0,23; |–0,59| = |0,59| = 0,59; |11,2| = |–11,2| = 11,2; |–15,6| = |15,6| = 15,6; |126,8| = = |–126,8| = 126,8; |–54,2| = |54,2| = 54,2; **9.a)** 0 > –6; **b)** 5 > 0; **c)** –1,2 < 1,3; **d)** 10,4 > –11,5; **e)** –5,5 > –10,5; **f)** –2,15 > –22,72; **g)** –6,4 < –4,6; **h)** –0,15 < –0,01; **10.a)** –3,6; –3,9; –4; –4,1; **b)** –3,6; –3; –3,4; **11.a)** 90 = 90; **b)** –25 = –25; **c)** 77 = 77; **d)** –1 147 = –1 147; **12.a)** 5 °C; **b)** –2 °C; **c)** –3,8 °C; **d)** 0,1 °C; **e)** –5 °C; **13.a)** 15 – 9 = 6; 1,5 – 0,9 = 0,6; **b)** 33 + 44 = 77; 3,3 + 4,4 = 7,7; **c)** 70 – 28 = 42; 0,07 – 0,028 = 0,042; **15.a)** –43; **b)** –6,8; **16.a)** musí byť väčší ako –1,75; **b)** musí byť menší ako –1,75; **c)** musí sa rovnať –1,75; **19.a)** –3,66 zv. 0,1; **b)** –0,33 zv. 1,35; **c)** 0 zv. 0,15; **d)** 0,34 zv. 0,04; **e)** 15,25; **f)** –12,5; **20.a)** –84; **b)** 0,089 91; **c)** 0,11; **d)** 0.

Cvičenia: **2.a)** 8 a 9; **b)** –9 a –8; **c)** 47 a 48; **d)** –48 a –47; **e)** –1 115 a –1 116; **f)** 1 115 a 1 116; **3.a)** $x > 0$; **b)** $a < -10$; **c)** $y > -1,5$; **d)** $b > 0$; **e)** $z < 0$; **f)** $c < 0$; **6.a)** 58,43; 37,97; **b)** –139; –169; **c)** –25,5; 0,9; **d)** 353,26; 656,06; **7.a)** 1 600; **b)** 200; **c)** 5; **8.a)** 0,1; 0,04, 0,184; 0,001 8; **b)** 6,6; 0,945; 7,5; 0,005 14; **9.a)** 1 778; 4 572; 6 350; **b)** 72,96; 76; 148,96; **10.a)** 22,2; **b)** –32,5; **c)** –4,4; **11.a)** 114; 1 140; **b)** 19,8; 15,6; **12.a)** 10,1; **b)** –1,1; **c)** 203,84; **d)** 6,5; **13.**

x	74	11,1	29,6
$x + 0,37$	74,37	11,47	29,97
$x - 0,37$	73,63	10,73	29,23
$x \,.\, 0,37$	27,38	4,107	10,952
$x : 0,37$	200	30	80

14.a) –0,000 88; **b)** –120; **c)** 54,723; **d)** –0,302 4; **15.a)** –30,5; **b)** –0,75; **c)** –0,68; **d)** 0,66; **17.a)** 12 – 3 + 12 : (–3) = 5; **b)** 0,1 : 4,55 – 0,1 . 4,55 ≐ –0,433 02.

1.2 Obsah a obvod trojuholníka, rovnobežníka a lichobežníka

Úlohy: **1.** v_a — a, v_b — b, v_c — c; **2.** rovnobežník; **3.** lichobežník;

4.

mm	cm	dm	m
1 225	122,5	12,25	1,225
5 260	526	52,6	5,26
2 000	200	20	2
1 100	110	11	1,1

5.

dm	m	km
12 000	1 200	1,2
26 000	2 600	2,6
5 600	560	0,56

6.

m²	dm²	cm²	mm²
2	200	20 000	2 000 000
1,56	156	15 600	1 560 000
1,20	120	12 000	1 200 000
0,10	10	1 000	100 000

7.

m²	a	ha
12 000	120	1,2
54 000	540	5,4
1 000	10	0,1

8. Majú rovnaké obsahy – 10 cm^2; **9.**

	1	2	3	4	5	6	7
S	4,5	4,5	4,5	7,5	9	15	15

10. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}z \cdot v$; $S = z \cdot \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}zv$; **11.** $S \doteq 40{,}6\ dm^2$.

Cvičenia: **1.a)** 1 495 mm^2; **b)** 15,3 cm^2; **c)** 19,8 dm^2; **2.a)** 15 cm; **b)** 18,9 m; **c)** 8 dm; **3.a)** 34 dm; **b)** 34,96 dm; **c)** 16,4 m; **4.a)** 35,72 cm^2; **b)** 21,7 m^2; **c)** 23,4 dm^2; **5.** $v_p = 4$ cm; **6.** 40,7 cm^2; **7.a)** 800 mm^2; **b)** 18,2 cm^2; **c)** 18 m^2; **8.a)** 31,5 cm^2; **b)** 2 640 mm^2; **c)** 23,4 m^2; **9.** 4,7 m; **10.** 4,2 m; **11.a)** 14 cm; **b)** 15 dm; **c)** 32 m; **12.** 1 800 mm^2; **13.** približne 21,82 kg; **14.** 3 750.

1.3 Objem a povrch kvádra a kocky

Úlohy: **3.a)** 3 000 dm^3; **b)** 4 200 cm^3; **c)** 5 800 mm^3; **4.a)** 0,327 m^3; **b)** 0,135 dm^3; **c)** 1,680 cm^3; **5.**

m^3	dm^3	l	hl
2	2 000	2 000	20
0,3	300	300	3
1,5	1 500	1 500	15
2,5	2 500	2 500	25

6. 87,36 m^3; **7.** osemkrát.

Cvičenia: **1.a)** $V = 720\ cm^3$, $S = 504\ cm^2$; **b)** $V = 61{,}568\ m^3$, $S = 102{,}48\ m^2$; **c)** $V = 2{,}112\ m^3$, $S = 10{,}72\ m^2$; **d)** $V = 1{,}2\ m^3$, $S = 6{,}92\ m^2$; **2.a)** $V = 125\ m^3$, $S = 150\ m^2$; **b)** $V = 32\ 768\ cm^3$, $S = 6\ 144\ cm^2$; **c)** $V = 91{,}125\ dm^3$, $S = 121{,}5\ dm^2$; **d)** $V = 405\ 224\ mm^3 = 405{,}224\ cm^3$, $S = 32\ 856\ mm^2 = 328{,}56\ cm^2$; **3.** 72 kg; **4.** $V = 0{,}439\ m^3$, $S = 5{,}145\ m^2$, 176 kusov; **5.a)** 800 g; **b)** 2 200 g; **c)** 7 250 g.

Vyskúšajte sa!
1. kladné a), c), e); záporné b), d), f); **3.a)** 800; **b)** 5; **c)** 0,0033; **d)** 0,126; **4.a)** 13; **b)** –2,6; **c)** 10,14; **d)** 6,5; **5.** 3; **6.** majú rovnaké obsahy; **7.** 3 437,5 cm^2; **8.** nie, pretože objem oboch miestností je 100,32 m^3.

2 Racionálne čísla. Operácie s racionálnymi číslami

2.1 Zlomky

Úlohy: **2.b)** sú > 1; **c)** desatinné zlomky; **d)** rovnajú sa 0; **e)** rovnajú sa 1; **f)** rovnajú sa čitateľu; **3.c)** $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{125}{250}$; **4.a)** $\frac{3}{12}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{27}{24}$; **b)** $\frac{16}{24}$, $\frac{40}{56}$, $\frac{160}{72}$; **5.a)** $\frac{29}{30}$, $\frac{47}{9}$; **b)** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{15}{22}$, $\frac{35}{36}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{142}{1\ 107}$; **6.** $\frac{5}{10} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4} > \frac{3}{20}$.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{5}{12}$; **b)** $\frac{3}{8}$; **c)** $\frac{2}{5}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $\frac{16}{25}$; **3.** 30 cm, 5 cm, 40 cm, 65 cm, 450 cm; **4.** 250 m, 500 m, 750 m, 70 m, 3 m; **5.** 30 min, 15 min, 10 min, 53 min, 120 min; **6.** 50 Sk, 40 cm, 48 kg, 60°; **7.** $|KZ| = \frac{7}{12}|KL|$; **8.a)** $\frac{9}{24}$, $\frac{30}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{28}{24}$; **b)** $\frac{20}{32}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{10}{32}$, $\frac{16}{32}$; **c)** $\frac{81}{72}$, $\frac{30}{72}$, $\frac{44}{72}$, $\frac{21}{72}$; **9.** 6; **10.** áno, číslom 7; **11.** nie; **12.a)** $x = 68$; **b)** $x = 3$; **c)** $x = 4$; **d)** $x = 63$; **13.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{1}{4}$; **14.** $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{250}$, $\frac{3}{4}$; **15.** prvý deň; **16.** mali rovnaké množstvo; **17.** $\frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{1}{2} > \frac{9}{20} > \frac{2}{5}$; **18.** 7. C < 7. B < 7. A < 7. D, $\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$.

2.2 Sčítanie racionálnych čísel

2.2.1 Sčítanie zlomkov

Úlohy: **1.** Eva, lebo si zvolila $n(3, 5) = 15$; **2.** $\frac{12}{15}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{17}{60}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{61}{72}$.

Cvičenia: **2.** $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$; **3.a)** $\frac{5}{8}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{79}{100}$; **b)** $\frac{23}{24}$, $\frac{23}{35}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{13}{45}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{13}{20}$; **c)** $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{41}{63}$, $\frac{37}{60}$, $\frac{43}{130}$, $\frac{23}{66}$; **d)** $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{20}$; **e)** $\frac{83}{90}$, $\frac{7}{8}$; **4.** $\frac{19}{20}$, $\frac{29}{35}$, $\frac{9}{10}$; **5.a)** $\frac{33}{40}$; **b)** $\frac{61}{72}$; **c)** $\frac{13}{15}$; **6.a)** $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{8}$, $D = \frac{1}{16}$; **b)** $C + D = \frac{3}{16}$, $B + C = \frac{5}{8}$; **c)** $\frac{3}{8} = A + C$, ale aj $A + 2 \,.\, D$; **7.** 616 Sk.

2.2.2 Sčítanie racionálnych čísel

Úlohy: **1.** $\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{3}{1}, \frac{5}{2}$; **2.** 0,4; 0,15; –1,75; 2,5; –0,16; **3.** $0,\overline{3}$; $0,\overline{18}$; $0,8\overline{3}$; $1,\overline{142\,857}$; $0,\overline{03}$; **4.** v tvare desatinných čísel, lebo iba jediné číslo, a to $\frac{1}{4}$ sme vyjadrili v tvare desatinného čísla; **5.** $\frac{43}{90}$, $\frac{131}{70}$, $\frac{7}{6}$; **6.** komutatívnosť platí; **7.** asociatívnosť platí; **8.a)** $\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) + \left[\frac{6}{10} + \left(-\frac{2}{5}\right)\right] = \frac{6}{5}$; **b)** $\left(-\frac{7}{11} + \frac{7}{11}\right) + \left[\left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{8}{7}\right] = 1$.

Cvičenia: **1.** 0,6; 0,16; 1,7; 0,9; 6,5; 10,25; –0,875; –0,2; **2.** $\frac{2}{5}$, $-\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$; **3.** 2,75 t; **4.** 1,8 kg; **5.a)** 5,3 = 5,3; **b)** $-\frac{1}{28} = -\frac{1}{28}$; **c)** –1,2 = –1,2 ; **d)** –0,15 = –0,15; **6.a)** $-\frac{16}{25}$; **b)** $\frac{29}{30}$; **7.** 15 = 15; **8.a)** 0; **b)** –0,5; **9.a)** $-\frac{2}{7}$; **b)** –2; **10.a)** $\frac{17}{40}$; **b)** $-\frac{39}{35}$.

2.3 Odčítanie racionálnych čísel

2.3.1 Odčítanie zlomkov

Úlohy: **1.a)** $\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \frac{23}{140}$; **b)** $\frac{8}{21}, \frac{43}{117}, \frac{1}{132}, \frac{21}{50}$; **2.a)** o 375 mm; **b)** o 47 l; **3.** $x = \frac{3}{14}$.

Cvičenia: **2.** $\frac{5}{16}$, $\frac{35}{46}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{41}{90}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{9}{55}$, $\frac{139}{700}$, $\frac{19}{30}$; **3.a)** $\frac{1}{5}$; **b)** $\frac{23}{90}$; **c)** $\frac{1}{60}$; **d)** $\frac{1}{21}$; **4.** o $\frac{2}{3}$; **5.** $\frac{5}{12}$; **6.** druhý podnikateľ; o $\frac{7}{30}$ viac; **7.** časť, kde sú jahody je o $\frac{1}{12}$ väčšia, $\frac{3}{4}$ výmery.

2.3.2 Odčítanie racionálnych čísel

Úlohy: **1.a)** $b = \frac{23}{24}$; **b)** $b = \frac{5}{24}$; **c)** $b = \frac{103}{120}$; **2.** $-\frac{23}{8} \neq \frac{23}{8}$; **3.** $-\frac{88}{45} \neq \frac{128}{45}$; $-1,675 \neq 1,525$; **4.** o $\frac{21}{100}$.

Cvičenia: **1.** $\frac{1}{3}, \frac{10}{17}, -\frac{19}{50}, -\frac{6}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$; **2.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{3}{10}, -\frac{11}{14}, -\frac{3}{40}$; **3.a)** $x = \frac{1}{9}$; **b)** $x = -\frac{47}{110}$; **c)** $x = \frac{5}{4}$; **d)** $x = \frac{3}{5}$; **4.a)** $\frac{5}{12}$; **b)** $-\frac{1}{12}$; **c)** $-\frac{1}{12}$; **5.a)** = **b)** = $\frac{5}{12}$; **c)** = **d)** = $-\frac{3}{20}$; **e)** = **f)** = $-\frac{1}{7}$; **6.** o $\frac{1}{10}$; **7.** $\frac{1}{6}$ bazéna; **8.** modrá bude kratšia ako červená o $\frac{1}{10}$ m; **9.** 31,2 km; **10.a)** $\frac{31}{15}$; **b)** $\frac{113}{20}$; **c)** $-\frac{49}{5}$.

2.4 Použitie zmiešaných čísel

Úlohy: **1.** $\frac{13}{4}, \frac{21}{8}, \frac{73}{7}, -\frac{13}{4}, -\frac{37}{7}, \frac{15}{5}$; **2.** $2\frac{1}{4}$; $2\frac{4}{11}$; $1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$; $2\frac{6}{7}$; $1\frac{7}{10}$; $1\frac{1}{99}$; **3.a)** $6\frac{1}{70}$; **b)** –3,45 .

Cvičenia: **1.** 6, $6\frac{4}{7}$, $3\frac{6}{13}$, $6\frac{1}{5}$, $5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{2}{3}$, $-4\frac{3}{4}$, 0, 3; **2.** 7,2; 3,35; $-4,\overline{2}$; $-8,\overline{45}$; –20,125; –100,294 117; 5,882 35; **3.** $3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, –2, $-4\frac{2}{7}$, $-8\frac{2}{5}$, $2\frac{7}{11}$, $1\frac{1}{20}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$; **4.** $4\frac{11}{15}$, $2\frac{4}{5}$, $3\frac{26}{35}$, $3\frac{9}{14}$, $4\frac{13}{20}$, $2\frac{1}{5}$; **5.a)** $a = 4\frac{6}{7}$; **b)** $x = 7\frac{3}{5}$; **c)** $b = -3\frac{3}{4}$; **d)** $y = 3\frac{1}{2}$; **e)** $z = -4\frac{7}{10}$; **f)** $c = \frac{1}{40}$; **6.** o $4\frac{1}{3}$; **7.** $27\frac{3}{4}$ kg; **8.** $12\frac{1}{20}$ cm; **9.** o 9 h 55 min; **10.** 31 min; 0,25 h = 15 min; 0,85 min.

2.5 Násobenie racionálnych čísel

2.5.1 Násobenie zlomkov

Úlohy: **1.** $2\frac{5}{8}$, $7\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{9}$, 9, 5, 27, $5\frac{1}{3}$, 35; **2.** $S = 10\ cm^2$; **3.** $S = 4\frac{1}{6}\ dm^2$, $V = \frac{125}{216}\ dm^3$.

2.5.2 Násobenie racionálnych čísel

Úlohy: **1.a)** 4 . 0,7 = 2,8; **b)** 3 . (–1,2) = –3,6; **2.** $-\frac{1}{50}$; $\frac{9}{10}$; **3.a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **4.a)** $3\frac{1}{8}$; **b)** $-\frac{43}{96}$; **5.a)** $\frac{7}{8}$; **b)** $\frac{3}{5}$; **c)** $\frac{3}{5}$; **d)** 80; **6.a)** 0; **b)** 0; **c)** 1; **d)** 1; **7.** $\frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{5}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Cvičenia: **1.a)** 6, 6, 9, 6, 5; **b)** 12, 40, 84, 28, 75; **c)** 4, 35, 24, 24; **d)** 14; –40; –8; 4,4; **e)** $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{21}$; **2.** dĺžka druhej strany sa zmení na 20 cm; **3.** 7. B trieda má 32 žiakov; **4.a)** v podniku pracuje 700 žien; **b)** 140 žien nemá odbornú kvalifikáciu; **c)** v podniku pracuje 350 mužov; **5.a)** $x = 1$; **b)** $x = 0$; **6.a)** $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{9}{17}$; **b)** 0,3; –0,6; –0,4; –1,2; **c)** $-\frac{1}{10}$, $\frac{20}{63}$, $-\frac{7}{16}$, $\frac{2}{3}$; **d)** $-14\frac{15}{17}$, $37\frac{59}{60}$, $45\frac{3}{5}$, –2; **7.** $\frac{217}{100}$ dm (2,17 dm); **8.** 162 starých učebníc vymenili za nové; **9.** $S = 8\frac{1}{6}\,\mathrm{dm}^2$; **10.a)** 2; **b)** 3; **c)** $1\frac{1}{6}$; **d)** $\frac{31}{100}$ (0,31); **11.a)** $\frac{35}{12} > \frac{13}{12}$; **b)** $\frac{34}{45} < \frac{44}{50}$; **c)** $-19\frac{7}{8} < 5\frac{13}{14}$; **d)** $\frac{1}{15} < \frac{1}{2}$; **e)** $4\frac{29}{40} > -\frac{713}{2\,100}$; **f)** $4\frac{17}{125} < 30\frac{2}{3}$; **12a)** $13\frac{1}{3}$, 1, $\frac{300}{7}$; **b)** 3, $-4\frac{2}{7}$; **13.** Ondrej minul väčšiu časť svojich peňazí.

2.6 Delenie racionálnych čísel

2.6.1 Delenie zlomkov

Úlohy: **2.** $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$, 2, $\frac{1}{7}$, –5, nemá, $-\frac{1}{5}$, $\frac{5}{22}$, $\frac{10}{38}$, $\frac{4}{28}$; **3.** $\frac{4}{9}$, 0, $\frac{1}{2}$, 9; **4.** $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, 15, $\frac{2}{3}$; **5.** 7 fliaš.

2.6.2 Delenie racionálnych čísel

Úlohy: **2.a)** $\frac{70}{9} = 7\frac{7}{9}$; **b)** $\frac{7}{20}$; **c)** $-\frac{42}{29} = -1\frac{13}{29}$; **d)** $-\frac{36}{25} = -1\frac{11}{25}$; **e)** $\frac{14}{69}$; **f)** 4.

Cvičenia: **1.** $\frac{4}{5}$, 4, $-\frac{9}{8}$, –7, $\frac{2}{15}$, $-\frac{7}{41}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{27}$, 1, nemá, 5, $-\frac{10}{7}$, $\frac{100}{52}$, $\frac{10}{35}$; **2.a)** 10, 15, $\frac{12}{11}$, 8, 36; **b)** $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{56}$; **c)** $-\frac{1}{11}$, $-\frac{8}{13}$, $-\frac{17}{3} = -5\frac{2}{3}$, $-\frac{15}{2} = -7\frac{1}{2}$, $\frac{2}{17}$; **d)** 8, –15, –18, $-\frac{144}{5}$, –98; **3.** $2\frac{3}{4}$ m látky; **4.** do 60 balíčkov; **5.** $883\frac{7}{11}\,\mathrm{m}^3$; **6.a)** $\frac{12}{10}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$, $\frac{48}{10} = 4\frac{8}{10}$, 9; **b)** $-\frac{9}{7} = -1\frac{2}{7}$, $-\frac{31}{13} = -2\frac{5}{13}$, $-\frac{117}{92} = -1\frac{25}{92}$, $\frac{12}{47}$; **c)** $2\frac{1}{2}$, $\frac{8}{15}$, 2, $3\frac{39}{74}$; **d)** $-\frac{529}{25} = -21\frac{4}{25}$; –12,2; –5; **e)** $\frac{3}{5}$, 1, $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{25}$, $-\frac{36}{5} = -7\frac{1}{5}$; **7.** za hodinu meškajú $\frac{1}{6}$ minúty; jednu minútu budú meškať o 6 hodín; **8.** $\frac{2}{7}$ km; **9.** 54.

2.7 Zložené zlomky

Úlohy: **1.a)** $\frac{3}{7}$; **b)** $\frac{3}{32}$; **c)** $-\frac{144}{5}$; **d)** $\frac{14}{9}$.

Cvičenia: **1.a)** $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, 3, 18, $\frac{6}{5}$, $\frac{192}{275}$; **b)** $-\frac{21}{4}$, $-\frac{3}{35}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{21}{20}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{2}$; **2.a)** 2; **b)** $\frac{1}{5}$; **c)** 0,15.

Vyskúšajte sa!

2.a) $\frac{2}{7} > -\frac{19}{20}$; **b)** $\frac{4}{9} < \frac{9}{17}$; **c)** $-\frac{1}{2} < -\frac{5}{11}$; **d)** $-2\frac{1}{7} = -\frac{15}{7}$; **3.** napr. $\frac{69}{100}$, $\frac{70}{100}$, $\frac{71}{100}$; **4.a)** $-\frac{26}{30}$; $-\frac{27}{30}$ . . . –1; **b)** $\frac{91}{600}$, $\frac{92}{600}$, $\frac{93}{600}$ . . . ; **5.** $\frac{5}{14}$; **6.** o $11\frac{3}{4}$ m, $o = 85{,}5$ m; **7.** 42 Sk; **8.** 7,225 m²; **9.** $166\frac{7}{20}$ kg; **10.** asi 5 439 priesad paradajok; **11.** 998 Sk; **12.** číslom 3; **13.** číslom $\frac{100}{33}$; **14.** $\frac{15}{28}$, $2\frac{1}{2}$; **15.** ZLOMOK; **16.** JE KĽÚČOM K VŠETKÝM ĽUDSKÝM VEDOMOSTIAM.

3 Objem a povrch hranola

Úlohy: **1.** $V_A = 45\,\mathrm{cm}^3$, $V_B = 30\,\mathrm{cm}^3$, $V_C = 45\,\mathrm{cm}^3$.

Cvičenia: **2.a)** 5 500 cm³; **b)** 25,012 m³; **c)** 1,88 m³; **3.** 198,8 l; **4.** $V = 20{,}736\,\mathrm{dm}^3$, $S = 46{,}08\,\mathrm{dm}^2$; **5.** 5,55 dm; **6.** 99 dm²; **7.** 4,05 kg; **8.** 2 078,72 cm²; **9.** HRANOL.

Vyskúšajte sa! **1.**

m³	dm³	cm³	l
2	2 000	2 000 000	2 000
0,220	220	220 000	220
1,5	1 500	1 500 000	1 500
1,2	1 200	1 200 000	1 200

2. 96 cm³; **3.** $V = 141{,}75\,\mathrm{cm}^3$, $S = 247{,}5\,\mathrm{cm}^2$; **4.** 5,13 m³; **5.** 280 kusov; **6.** 23,4 t.

4 Výraz a jeho úprava

4.1 Číselný výraz

Úlohy: **1.a)** $53 + 208 = 261$; **b)** $11{,}6 - 20 = -8{,}4$; **c)** $-5 \,.\, 0{,}3 = -1{,}5$; **d)** $144 : (-12) = -12$; **2.a)** $20{,}4 + 15{,}5 - 1{,}5 \,.\, (-2{,}2) = 39{,}2$; **b)** $-16{,}9 : 1{,}3 + 6{,}9 \,.\, 1{,}7 = 10{,}46$; **c)** $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{15}{56}$; **d)** $\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{7}\right) - \frac{3}{2} = -\frac{15}{28}$; **3.a)** $2 + 9 + 6 + 5 = 22$; **b)** $3 \,.\, 8 \,.\, 0{,}1 \,.\, 5 = 12$; **c)** $-2 \,.\, 3 + 4 - 2 = -4$; **d)** $(2 + 9) \,.\, 0{,}3 = 3{,}3$; **e)** $(3 - 8) : 5 = -1$; **f)** $4 \,.\, (-5 - 1{,}2) = -24{,}8$; **4.a)** $4 \,.\, (0{,}25 + 1{,}25) = 6$; **b)** $\frac{1}{3} \cdot (1{,}5 - 0{,}9) = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$; **c)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{7}{5}$; **5.a)** $(728 - 504) + (12 + 18) = 254$; $(728 - 504) - (12 + 18) = 194$; $(728 - 504) \,.\, (12 + 18) = 6\,720$; **b)** 0,8; 3,2; –2,4; **c)** 49,2; 46,8; 57,6; **6.a)** $(220 - 26) : (0{,}8 + 1{,}2) = 97$; **b)** $(33\,033 : 33) : (99 - 88) = 91$; **c)** $(2 - 1{,}72) : (0{,}04 + 0{,}1) = 2$.

Cvičenia: **2.a)** $15 + 0{,}15 = 15{,}15$; **b)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$; **c)** $-\frac{1}{4} \,.\, \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$; **d)** $-8 : 100 = -0{,}08$; **3.a)** $(15 - 2{,}8) - 25{,}6 : (-8) = 3{,}904$; **b)** $\frac{6}{7} + \frac{3}{5} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{6}{7} : \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$; **c)** $3\frac{1}{2}$; **4.a)** 0,56; **b)** 0,24; **c)** 2,5; **d)** 2,6; **e)** 0,01; **f)** 1,01; **g)** –0,44; **h)** –2; **i)** –4; **5.a)** 90; **b)** 197; **c)** 68; **d)** 83; **6.a)** $-\frac{59}{40}$; **b)** $\frac{1}{11}$; **c)** $\frac{14}{3}$; **d)** $\frac{181}{50}$; **7.a)** 0,5; –1; nie sú rovnaké; **b)** 2,6; 0,85 nie sú rovnaké; **c)** 5,6; 3,8 nie sú rovnaké; **8.a)** $(8 - 2) \,.\, 3 + 40 : (10 - 2)$; **b)** $-10{,}4 + [23 - (12 - 6 + 0{,}7 - 0{,}3)] - 1{,}2$; **9.a)** $10 \,.\, (1 + 2 + 3) = 60$; **b)** $2 \,.\, (-5) \,.\, (-5 + 7) = -20$; **c)** $\frac{1}{2} \cdot 0{,}25 : 0{,}05 = \frac{5}{2} = 2{,}5$; **d)** $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{3}\right) = \frac{15}{36}$; **10.a)** 1; 7; –12; **b)** –15; 11; 26; **c)** –2,4; –1,2; 10,8; **d)** 5,2; 8; –9,24; **e)** $\frac{29}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{52}{9}$; **11.a)** 50; **b)** 0,001; **c)** $-\frac{15}{38}$; **d)** $\frac{78}{25}$; **12.** 15; **13.** napr. $99 : 99 + 9$.

4.2 Výraz s premennou, členy výrazu

Úlohy: **2.a)** 2; 14; 4; 1; **b)** 11; 9; 10,1; $\frac{48}{5}$; **c)** 2; –1; 1,6; **d)** 9,9; 12; –15; **4.** $3a$; 30, 33, 36, 39, 42, 45.

Cvičenia: **1.a)** jednočlen; 6; –33,6; 8; **b)** dvojčlen; 3; 13; 2,6; $2\frac{1}{2}$; **c)** dvojčlen; –11; –5; $-\frac{69}{10}$; **2.a)** $2r - 4$; **b)** $v : 7 - 10 = \frac{v}{7} - 10$; **c)** $3x \cdot \frac{1}{3} + 8s$;

3.

b	–5	0,25	0	$\frac{1}{3}$
$b : 5$	–1	0,05	0	$\frac{1}{15}$
$10{,}5 - b : 5$	11,5	10,45	10,5	10,1

4.a) $10x$; **b)** $a : 7 = \frac{a}{7}$; **c)** $z + 6$; **d)** $b - 15$; jednočleny sú a) b); **5.** $x - 15$; **6.a)** $k + 0{,}75$; **b)** $25k + 250 \,.\, (k + 0{,}75)$; **7.a)** $h - d$; **b)** $2h - d$; **c)** $h - 2 + h - d - 3$; **8.** $5 \cdot \frac{m}{4}$; $3 \cdot \frac{m}{2}$; $7 \cdot \frac{m}{4}$; $2m$; **9.** $x + 3$.

4.3 Sčítanie a odčítanie výrazov

Úlohy: **4.a)** $2x + 1$; **b)** 15; **c)** $0{,}2d$; **d)** $0{,}4x - 2$; **5.** nule; napr. $5x - 5x = 0$; $2x + 1 - (2x + 1) = 0$; **6.** áno, nie, nie.

Cvičenia: **1.c)** $\frac{17}{100}r$; **d)** $\frac{5}{12}c$; **2a)** $34b - 5$; **b)** $10 - 5k$; **c)** $0{,}2t + 1$; **d)** $17{,}7 - 10h$; **4.a)** $2x - 2$; $-2x - 2$; $16x - 2$; **b)** $6a$; 0; $6a - 30$; **5.a)** $8d - 4$; **b)** –3; **c)** 0; **d)** $7{,}2a + 2{,}1$; **e)** $7{,}7p + 2{,}2$; **f)** $-1{,}5m + 2{,}33$; **6.a)** $2d - 8$; **b)** $6x - 7$; **c)** $2y - 12$; **d)** $a - 10{,}3$; **e)** $-0{,}7p + 7{,}8$; **f)** $3{,}5m - 2{,}11$; **7.a)** $-0{,}68p - 1{,}4$; **b)** $2{,}7r + 2{,}2$; **c)** $-1{,}2s + 1{,}9$; **8.** $4a - 2$; **9.a)** nie; **b)** áno; **c)** nie; **d)** áno; **10.a)** $31x - 32$; **b)** $-8{,}3x + 3y + 7$; **c)** $0{,}4a - 12$; **d)** $-2\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z$; **11.a)** $a + 2s + (u - v)$; **b)** $a + 2s + u + v$; **c)** $a + 2s - (u - v)$; **d)** $a - 2s + (u - v)$.

4.4 Násobenie a delenie výrazu číslom

Úlohy: **2.a)** $30a - 36$; $-30a + 36$; **b)** $2{,}5s + 25$; $2{,}5s + 25$; **c)** $15{,}3 - 3d$; $-15{,}3 + 3d$; **d)** $3y - 2z$; $-3y + 2z$; **3.a)** $10y + 9x$; **b)** $-30e + 20$; **c)** $3c + 1$; **d)** $-0{,}3 - 0{,}4x$; **e)** $-10y - 9x$; **f)** $4b - 1$; **5.a)** $(6x - 9) : 6 = x - 1{,}5$; **b)** $(0{,}1y + 5) : 2 = 0{,}05y + 2{,}5$; **c)** $\left(\frac{z}{6} - 1\right) : \frac{1}{12} = 2z - 12$.

Cvičenia: **2.a)** $9x - 15$; $-9x + 15$; $9x + 15$; $-15 + 9x$; **b)** $1{,}5x - 2{,}5$; $-1{,}5x + 2{,}5$; $-1{,}5x - 2{,}5$; $-1{,}5x - 2{,}5$; **c)** $0{,}7x + 0{,}07$; $-0{,}7x - 0{,}07$; $0{,}07 - 0{,}7x$; $0{,}07 + 0{,}7x$; **3.a)** $31d + 20$; **b)** $2{,}4y - 15$; **c)** $1{,}2 - 1{,}6x$; **d)** $-0{,}6 + 11r$; **e)** $-0{,}4s + 0{,}64$; **f)** $1{,}65 + 1{,}1h$; **4.** $5x + 10y$; $-5x - 10y$; $3x + 6y$; $-3x - 6y$; $x + 2y$; **5.a)** $0{,}7x + 0{,}3$; **b)** $-0{,}8c + 0{,}4$; **c)** $80 - 30d$; **d)** $12 + 15m$; **6.a)** $5y - 5$; $-\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}$; **b)** $15z + 1{,}5$; $-4z - 0{,}4$; **c)** $2 - 25x$; $-\frac{1{,}6}{3} + \frac{20}{3}x$; **d)** $\frac{25}{3}x - \frac{5}{2}$; $-\frac{20}{9}x + \frac{2}{3}$; **7.a)** $12x - 13$; **b)** $4x - 3$; **c)** $0{,}3x - 1{,}4$; **d)** $11 - 2r$; **8.a)** áno; **b)** áno; **9.a)** $(5r + 2s) \,.\, 5$; **b)** $\frac{1}{3} . (x + y)$; **c)** $(9c - 10d) : (-1)$; **d)** $6 . (8p - 18q)$; **e)** $t : 7 - (t + 7)$; **10.** $2 . [x + (x + 5)] = 4x + 10$.

4.5 Vynímanie pred zátvorku

Úlohy: **2.a)** $17(x + 2)$; **b)** $3(4 - 3y)$; **c)** $2(4 + 5z)$; **d)** $8(2s - k)$.

Cvičenia: **2.a)** $3(3a - 4c)$; **b)** $9(3x + 2)$; **c)** $7(1 - 6d)$; **d)** $3(7z + 3u)$; **e)** $8(7x + 6t)$; **f)** $20(5d - 6b)$.

Vyskúšajte sa!

1.a) $(33 + 18) : 5 = 10{,}2$; **b)** $(18 + 12) : (18 - 12) = 5$; **c)** $0{,}4 \,.\, (-8) = -3{,}2$; **2.a)** 24; **b)** -19; **3.a)** $-5 \,.\, (8 - 10) = 10$; **b)** $-5 \,.\, (0{,}4 + 0{,}25) = -3{,}25$; **c)** $-5 \,.\, \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) = -\frac{9}{2}$; **4.a)** 24,9; **b)** 0, **c)** 102; **5.** 1; 16; 3,4; $\frac{3}{2}$; **6.a)** $3x + 4y$; **b)** $(t + 0{,}2) \,.\, 8s$; **c)** $(1{,}4x - 0{,}7) : 2$; **7.** $d + h$; **8.a)** $7 - 6x$; **b)** $-0{,}25c + 2{,}5d$; **c)** $-\frac{5}{8} + \frac{2}{3}k$; **9.** $5{,}7 - 3{,}5a$; **10.** $[r - (2x + y)] - z$; **11.a)** $-15k + 18d$; **b)** $2{,}4v - 6$; **c)** $2x - \frac{12}{5}$; **12.** $4s - 6$; **13.a)** $9(x + 4y)$; **b)** $8(3a - 7b)$; **c)** $10(9 - 8f)$.

5 Pomer. Priama a nepriama úmernosť

5.1 Pomer, prevrátený pomer, postupný pomer

Úlohy: **2.** 10 : 7, 3 : 4, 1 : 2, 1 : 2, 14 : 15; **3.a)** 1 : 4, 1 : 6, 5 : 4; **b)** 1 : 20, 35 : 2, 8 : 3; **c)** 25 : 39, 17 : 30, 290 : 1; **5.** áno; **6.** 1 : 2 500, 2 : 1, 10 : 1, 5 : 2; **7.** 43 l a 86 l; 40 kg a 16 kg; 500 m^2 a 4 000 m^2; **8.** 80 mm, 112 mm, 140 mm; **9.** 164, 246, 328, 410; **10.a)** 10, 9, 1; **b)** 20, 33, 23; **c)** 15, 15; **11.** $16 : 25 = \frac{16}{25} < 1$; **12.** nové rozmery 27 m a 36 m; pomer výmer 81 : 16.

Cvičenia: **1.a)** 8 480 m; 10 000 : 1 520; **b)** $\frac{2}{5}$ h; 10 : 9; **c)** 1 h 40 min; 6 : 1; **d)** 4 999 g; 5 000 : 1; **e)** 42 m^2; 1 : 7; **f)** nemôžeme porovnávať; **2.** 1 : 8; 2 : 1; 1 : 3; 1 : 7; 41 : 34; 1 : 3; 20 : 11; 9 : 10; **3.a)** 24 : 1; 4 : 5; 7 : 10; **b)** 1 : 140; 100 : 1; 5 : 22; **c)** 1 : 2 : 5; 2 : 5 : 24; 20 : 4 : 1; **4.** 2 : 3; 2 : 4 = 1 : 2; 3 : 4; prevrátené: $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{4}{3}$; 3 : 2; 2 : 1; 4 : 3; prevrátené: $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; **5. a)** 5 : 4; **b)** 9 : 10; **6.a)** 196 + 224; **b)** 15 + 45 + 360; **7.** 1 620; 2 430; 3 240; **8.** otec 50, syn 15; 4 : 3; **9.** 24 m, 36 m, 84 m, 72 m; **10.** 30°, 60°, 90°; 20°, 40°, 120°; 50°, 60°, 70°; **11.** 50, 21, 4, 28; **12.** 112,5; 3 375; 750; **13.** 10 : 11; **14.** 162 m^3.

5.2 Priama a nepriama úmernosť

Úlohy: **2.a)** nie je; **b)** je **c)** nie je.

Cvičenia: **1.a), b), c), g)** – priama úmernosť; **d), e)** – nepriama úmernosť; **f)** – relatívne priama úmernosť; **2.a)** nie; **b)** áno; **c)** áno; **d)** nie; **e)** áno; **f)** áno; **g)** nie; **h)** áno; **3.a)** $x = 6$; **b)** $x = 250$; **c)** $x = 5$; **d)** $x = 3$; **e)** $x = \frac{32}{3}$; **4.** 1 310 Sk; **5.** 2,5 h; **6.** 76 986 Sk; **7.** za $33\frac{1}{3}$ dňa; 20 maliarov; **8.** 10 žiakov.

5.3 Využitie priamej a nepriamej úmernosti

Úlohy: **1.** 3 864 Sk.

Cvičenia: **1.** asi 20,8 kg; **2.** 22 339 Sk; **3.** 4-krát; **4.** 9 bagristov; **5.** 90 m; **6.** 328 kg; **7.** o 6 dní; **8.** 2 940 Sk.

5.4 Mierka mapy a plánu

Cvičenia: **1.** 3,6 m a 4,1 m; **2.** 90 m a 125 m; **3.** 30 cm; 40 cm; 15 cm; 3 cm; **4.** 6 cm; 88 cm; 160 cm; **5.** 1 : 2 000 000; **6.** 24,6 km; **7.** 92 km; **8.** 1: 500; **9.** 160 m a 130 m; zastavaná plocha 20 800 m^2;

10.

Mierka mapy, plánu	Skutočný rozmer	Zmenšený rozmer na mape, pláne
1 : 500 000	20 km	4 cm
1 : 50 000	400 m	8 mm
1: 125 000	5 km	4 cm
1 : 1 000	45 m	4,5 cm

Vyskúšajte sa!

1. 8 : 45; 5 : 3; 1 : 2; 23 : 25; 4 : 1; 2 : 1; 6 : 25; 22 : 41; 3 : 2; 6 : 7; 22 : 15; 1 : 3; **2.** 1 : 9; 9 : 10; **3.a)** 5 : 1; **b)** 1 : 1 000 000; **c)** 1 : 12; **d)** 25 : 14; **e)** 200 : 1; **f)** 75 : 1; **4.** $\frac{8}{3}$, $\frac{1}{4}$, 5, 10; **5.** 3 vajcia, 3 jogurty, 125 g cukru, 9 g múky; **6.** 22,8 kg; 120 kg; **7.** 253 a 4 048; **8.** 54 a 270 a 324; **9.** 4,5 m; **10.** treba prijať ešte 4 robotníkov, aby ich bolo 8.

6 Zhodnosť trojuholníkov

6.1 Zhodnosť geometrických útvarov

Úlohy: **2.** 1, 2, 5; 3, 6; 4, 7; **3.** $ABCDE \cong QTMNP$.

Cvičenia: **2.** keď majú rovnaké rozmery; **3.** $ABCD \cong EFGH$, $ABFE \cong DCGH$, $ADHE \cong BCGF$.

6.2 Zhodnosť trojuholníkov

Úlohy: **1.a)** a, b; **b)** b, c; **c)** a, c; **2.a)** α, β; **b)** β, γ; **c)** γ, α; **3.a)** b; **b)** a; **c)** b; **4.** $\triangle PML \cong \triangle AGD$.

Cvičenia: **1.** $\triangle PQR \cong \triangle CAB$; $\triangle EFD \cong \triangle HGM$; **2.** $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (sss); **b)** $\triangle AGB \cong \triangle BEF$ (sss); **3.a)** $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (sss); $\triangle ABV \cong \triangle ADV$ (sss); $\triangle BCV \cong \triangle DCV$; **b)** $\triangle ABC \cong \triangle ADC \to \sphericalangle CBA \cong \sphericalangle CDA$; **4.a)** $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ (sus); $A \to C, B \to B, E \to D$; $AB \cong CB, BE \cong BD, AE \cong CD$; $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle CBD$, $\sphericalangle BEA \cong \sphericalangle BDC$, $\sphericalangle EAB \cong \sphericalangle DCB$; **b)** $\triangle EFB \cong \triangle DGB$ (sus); $E \to D, F \to G, B \to B$; $EF \cong DG, FB \cong GB, EB \cong DF$; $\sphericalangle EFB \cong \sphericalangle DGB$, $\sphericalangle FBE \cong \sphericalangle GBD$, $\sphericalangle BEF \cong BDG$; **c)** $\triangle AFB \cong \triangle CGB$ (sus); $A \to C, F \to G, B \to B$; $AF \cong CG, FB \cong BG, AB \cong CB$; $\sphericalangle ABF \cong \sphericalangle CBG$, $\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle CGB$, $\sphericalangle BAF \cong \sphericalangle BCG$; **5.** $\triangle FDE \cong \triangle GKH \cong \triangle NML$ (usu); **6.** $\triangle BDE \cong \triangle CGF$ (sus); **7.** využite vlastnosť strán rovnobežníka; **9.** $\triangle AEB \cong \triangle CED$ (sus) $\Rightarrow BA \cong DC$; **10.** O je priesečník priamky p a osi o, $\triangle VOX \cong \triangle VOY$ (usu) $\Rightarrow VX \cong VY$.

6.3 Konštrukcia trojuholníka

Úlohy: **1.** Na základe trojuholníkovej nerovnosti $|KL| + |LM| > |KM|$; **2.** nemôže.

Cvičenia: **1.a)** áno; **b)** nie; **c)** áno; **d)** nie; **e)** nie; **f)** nie; **2.** $a + a > z \Rightarrow a > \frac{1}{2}z$; **4.a)** $x < 10$ cm; **b)** $x < 11{,}5$ cm; **c)** $x < 65$ mm.

Vyskúšajte sa!

1. $1 \cong 4$, $1 \cong 3$, $2 \cong 5$; **2.** $\triangle ABK \cong \triangle ABL$ (sss); $\triangle ALK \cong \triangle BLK$ (sss); $\triangle AMK \cong \triangle BMK$ (sus); $\triangle AML \cong \triangle BML$ (sus); **3.** $\triangle ABC \cong \triangle AED$ (usu) $\Rightarrow BC \cong ED, AC \cong AD$, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADE$, $\triangle ABD \cong \triangle AEC$ (sus) $\Rightarrow EC \cong BD$; **4.** $\triangle CBD \cong \triangle ABD$ (sus); **5.a)** $AK \cong BK$, $CK \cong CK$, $\sphericalangle AKC \cong \sphericalangle BKC$, $\triangle AKC \cong \triangle BKC \Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC$; **b)** $BK \cong BK$, $\sphericalangle CKB \cong \sphericalangle DKB$, $\sphericalangle CBK \cong \sphericalangle DBK$, $\triangle CBK \cong \triangle DBK \Rightarrow \sphericalangle BCK \cong \sphericalangle BDK \Rightarrow \sphericalangle KDB \cong \sphericalangle BCD$; **c)** $\triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow BC \cong AD$; **6. a)** áno; **b)** nie.

ROZUM DO HRSTI (VÝSLEDKY)

1. 1. hodinu počujeme 1 + 2 + 3 + 4 + 1 = 11 úderov, 2. hodinu – 12 úderov, 3. hodinu – 13 úderov, ..., 12. hodinu – 22 úderov. Za 12 hodín 198 úderov. Teda za 5 . 12 hodín počujeme 990 úderov – ak zanedbáme čas, za ktorý počúvame údery na začiatku a na konci intervalu (prečo?) – potom 990 úderov počujeme za 59 hodín a 45 minút, pretože začíname úderom 1. štvrťhodiny. Potrebujeme počuť ešte ďalších 10 úderov, čo môžeme urobiť posunutím o štvrťhodinu dopredu (počujeme až 16 úderov). Teda 1 000 úderov môžeme počuť za 60 hodín.

2. a) Najviac 4 : $\underline{2}$, $\underline{3}$, 4, $\underline{5}$, 6, $\underline{7}$, 8, 9 viac ich nemôže byť, pretože medzi 8 po sebe idúcimi číslami sú aspoň 4 čísla párne, a tie, pokiaľ medzi nimi nie je dvojka, nie sú prvočísla.

b) Nemusí byť žiadne prvočíslo. Zvoľme napr. číslo $a = 2 . 3 . 5 . 7 = 210$. Ak pričítame k číslu a postupne 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dostaneme len zvolené čísla.

3. Hľadané číslo 523 *** má byť deliteľné 7, 8 a 9-mi. Pretože čísla 7, 8, 9 sú nesúdeliteľné, musí byť hľadané číslo násobkom ich súčinu 7 . 8 . 9 = 504.
Delením čísla 523 000 číslom 504 dostaneme

523 000 : 504 = 1 037 (zvyšok 352)

čiže 523 000 = 504 . 1037 + 352. Ak chceme dostať k číslu 523 000 najbližší väčší násobok čísla 504, musíme k nemu pričítať číslo 152 (pretože 504 – 352 = 152). Teda najbližší väčší násobok 504 k číslu 523 000 je 523 152. Ďalší násobok dostaneme pričítaním 504.

$$523\,152 \xrightarrow{+\,504} 523\,656 \xrightarrow{+\,504} 524\,160 \;\ldots$$

Danej úlohe vyhovujú len prvé dve čísla.

4. Napíšeme rozdiel

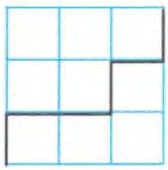
$$R = (1 . 2 . 3 . \ldots . 61 . 62 . 63) - (1 . 2 . 3 . \ldots . 59 . 60 . 61)$$

Z neho vyjmeme súčin $s = 1 . 2 . 3 . \ldots . 59 . 60 . 61$.
Dostaneme

$$R = s . (62 . 63 - 1) = s . 3\,905 = s . 71 . 55$$

Rozdiel je deliteľný číslom 71.

5. Musíme nájsť počet ciest z ***A*** do ***B***, ktoré prebiehajú iba vpravo a hore. Tento počet môžeme určiť napr. zistením všetkých možností. Namiesto kreslenia použijeme „čiarkovaciu metódu“, pri ktorej napr. cestu z obrázka zapíšeme takto:



| — — | — |

Napíšeme tabuľku všetkých ciest.

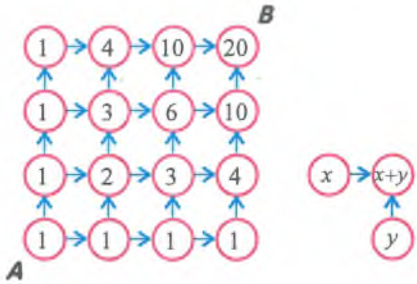
<table>
<tr><td>| | | — — —</td><td>| — | — | —</td><td>— | | | — —</td><td>— | — — | |</td></tr>
<tr><td>| | — | — —</td><td>| — | — — |</td><td>— | | — | —</td><td>— — | | | —</td></tr>
<tr><td>| | — — | —</td><td>| — — | | —</td><td>— | | — — |</td><td>— — | | — |</td></tr>
<tr><td>| | — — — |</td><td>| — — | — |</td><td>— | — | | —</td><td>— — | — | |</td></tr>
<tr><td>| — | | — —</td><td>| — — — | |</td><td>— | — | — |</td><td>— — — | | |</td></tr>
</table>

Týchto ciest je celkom 20.

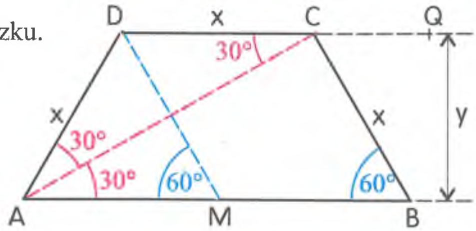
Počet ciest môžeme určiť aj bez tabuľky (T). Použijeme schému vyobrazenú na obrázku.

Čísla určujú počet ciest z bodu A na križovatku, kde je príslušné číslo napísané.

Možných je 20 ciest, myšacia rodina má teda 20 členov.



6. Lichobežník $ABCD$ je znázornený na obrázku. Úsečka DM je rovnobežná s ramenom CB. Vznikol rovnostranný trojuholník AMD (má dva uhly veľkosti 60°). Preto $|AM| = x$. Veľkosť uhla DAC sa rovná 30°. Trojuholník ACD je rovnoramenný (má dva uhly veľkosti 30°.) Odtiaľ vidieť, že základňa DC lichobežníka $ABCD$ má dĺžku x. Z rovnobežníka $MBCD$ vyplýva, že $|MB| = x$. Pretože $|AM| = |MB| = x$ je M stredom základne AB.



Ak doplníme na obrázku úsečku MC, zistíme, že lichobežník je úsečkami MC a MD rozdelený na tri zhodné rovnostranné trojuholníky. Ich obsahy sa teda rovnajú tretine obsahu daného lichobežníka.
Obsah trojuholníka ACD sa rovná polovici obsahu kosoštvorca $AMCD$, t. j. obsahu trojuholníka AMD. Odtiaľ vypočítame, že obsah S trojuholníka ACD sa rovná tretine obsahu lichobežníka $ABCD$

$$S = \frac{1}{3} 78 \text{ cm}^2 = 26 \text{ cm}^2$$

7. Ak uvážime jednu „periódu“ kociek, 1 kocka s jednou bodkou, 2 kocky s dvoma bodkami, ..., 6 kociek so šiestimi bodkami, táto obsahuje spolu $1 + 2 + ... + 6 = 21$ kociek, na ktorých je spolu $1 + 2 \,.\, 2 + 3 \,.\, 3 + ... + 6 \,.\, 6 = 91$ bodiek.

$$666 : 21 = 31, \text{ zv. } 15$$

666 kociek obsahuje 31 takýchto celých periód a ešte 15 kociek, na ktorých je

$$1 + 2 \,.\, 2 + 3 \,.\, 3 + 4 \,.\, 4 + 5 \,.\, 5 = 55 \text{ bodiek}$$

Teda spolu je na 666 kockách $31 \,.\, 91 + 55 = 2\,876$ bodiek.

8. Vzdialenosť medzi lampami je deliteľom šírky a dĺžky námestia. Vieme, že vzdialenosť medzi lampami má byť čo najväčšia. Teda je najväčším spoločným deliteľom čísel 180, 252. Rozložme na súčiny:

$$180 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 36 \,.\, 5$$
$$252 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 7 = 36 \,.\, 7$$

Vzdialenosť medzi lampami má byť teda 36 m a po šírke námestia musí byť 5 medzier medzi lampami, čiže 6 lámp, z toho 4 nové. Na obidvoch kratších stranách spolu 8 lámp. Po dĺžke námestia musí byť 7 medzier medzi lampami, čiže 8 lámp, z toho 6 nových. Na obidvoch dlhších stranách spolu 12 lámp. Spolu je to 20 nových lámp.

9. Povrch kocky je 6 . a^2, pričom a je dĺžka hrany a v našom prípade zároveň počet kociek pozdĺž jednej hrany:

$$6 \cdot a^2 = 216$$
$$a = 6$$

a) Objem veľkej kocky je 6 . 6 . 6 cm^3. Po odobratí 8 rohových kociek zostáva
$$216 - 8 = 208\ cm^3$$

b) S každou z odobratých kociek ubudli 3 steny, t. j. 3 cm^2 pôvodného povrchu, t.j. 24 cm^2. Ak uznáme, že i kocka je kváder, spĺňa podmienku kocka s hranou 2 cm.

10. Po vyrezaní kvádra pribudnú na povrchu dva obdĺžniky so stranami 60, x a ubudnú dva obdĺžniky so stranami x, y. Celkove bude pre prírastok p povrchu platiť:

$$p = 2 \cdot 60 \cdot x - 2 \cdot x \cdot y$$

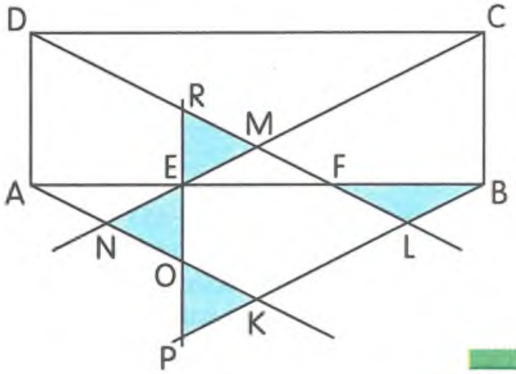
Povrch kocky $P = 6 \cdot 60 \cdot 60$; z toho $p = \frac{1}{6}P$, dostaneme

$$2 \cdot x \cdot (60 - y) = 3\,600$$

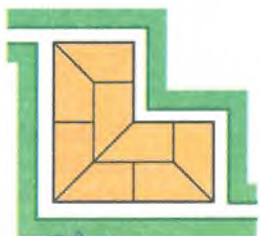
$x = \frac{1\,800}{60 - y}$, pričom $y < 30$ a zároveň $y \geqq 10$, pre $60 - y$ potom platí $60 - y \leqq 50$ a zároveň $60 - y > 30$. Číslo x musí byť celé, a preto $60 - y$ musí deliť číslo 1 800. Medzi 30 a 51 sú štyri také čísla: 36, 40, 45, 50. Pri ich hľadaní nám pomôže rozklad čísla 1 800 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5. Hodnoty x, y sú v tabuľke. →

$60 - y$	x	y
36	50	24
40	45	20
45	40	15
50	36	10

11. V bode E zostrojíme kolmicu na úsečku AB. Jej priesečníky s priamkami AK, BK, DM označíme O, P, R (obrázok). $\triangle\ ANE \cong \triangle\ FME$ (usu), $|AE| = |EF|$, $|NE| = |EM|$, potom $\triangle\ NOE \cong \triangle\ MRE$ (usu), $|NE| = |EM| = |PK|$, čiže aj $\triangle\ NOE \cong \triangle\ KOP$ (usu). $|EF| = |FB|$, potom $\triangle\ BFL \cong \triangle\ EFM$ (usu). Teda $\triangle\ BEP \cong \triangle\ EBC$ (usu) čiže $S_{KLMN} = S_{\triangle BEP} = S_{\triangle EBC} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ (štvorcových jednotiek).



12. Riešenie je na obrázku. →



13. Vždy sa musia použiť dosky 5 m, 3 m, 1 m a 2 m dlhé. Sú to 4 možnosti uloženia.

Záznam o použití učebnice

Por. číslo	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na začiatku škol. roku	na konci škol. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. Soňa Čeretková
PaedDr. Mária Malperová
PhDr. Ľudovít Bálint, CSc.

Matematika

pre 7. ročník základných škôl
1. časť

Zodpovedná redaktorka RNDr. Jana Belasová
Technická redaktorka Eva Onderčinová

Grafická a počítačová úprava, počítačové kresby
a návrh obálky Igor Imro
Ilustrovala akad. maliarka Táňa Žitňanová

Vyšlo v MEDIA TRADE, spol. s r. o. – Slovenské pedagogické nakladateľstvo,
Sasinkova 5, 815 60 Bratislava 1

Litografie SHS, spol. s r.o., Leškova 10, 811 05 Bratislava
Vytlačili Tlačiarne BB, spol. s r. o., 974 01 Banská Bystrica

ISBN 80-08-02679-0

Slovenské ped

ISBN 80-08-02679-0