MATEMATIKA

7

II. diel

SPN

MATEMATIKA 7

Jana Müllerová
Ján Čižmár
Jiří Divíšek
Vlastimil Macháček

MATEMATIKA 7
pre 7. ročník
základnej školy

II. DIEL

Slovenské pedagogické nakladateľstvo
Bratislava 1990

■ označenie rozširujúceho príkladu

Odborný poradca učebníc matematiky pre 5. až 8. ročník základnej školy akademik Jaroslav Kurzweil
Lektorovali: RNDr. Ľudovít Hrdina, CSc., PaedDr. Jarmila Panochová, Zdeněk Zajíček a JČSMF

Preložené z českého originálu Matematika pro 7. ročník základní školy. Praha, SPN 1990
ISBN 80-04-24009-7

Schválilo Ministerstvo školstva, mládeže a telesnej výchovy SSR rozhodnutím zo dňa 5. 10. 1989 číslo 7045/1989-20 ako učebnicu matematiky pre 7. ročník ZŠ — II. diel.

Prvé vydanie.

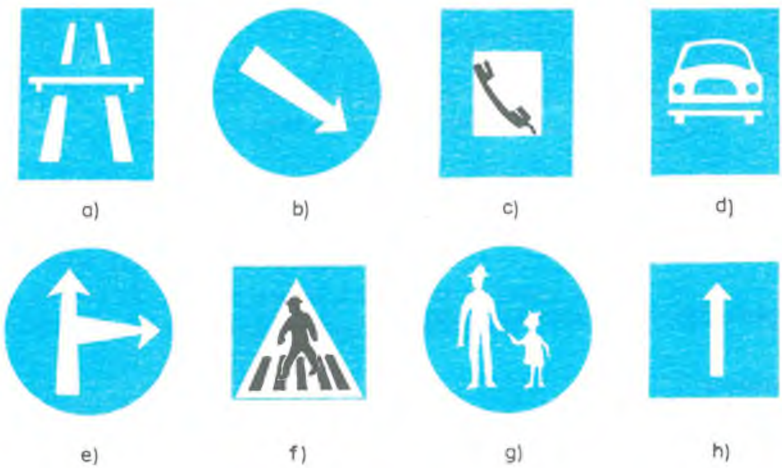
ISBN 80-08-00516-5

OBSAH

Kruh. Kružnica. Valec 8

8.1 KRUŽNICA A KRUH

Vysvetlite, čo znamenajú tieto dopravné značky:



Obr. 8.1

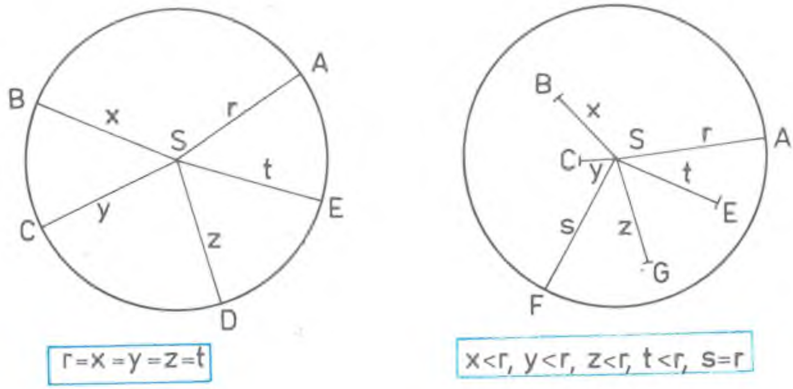
Ktoré z nich sú umiestené v kruhu? Ktoré sú umiestené v iných rovinných útvaroch?

Zopakujeme si základné poznatky o kružnici a kruhu. Nech je v rovine daný bod S a úsečka dĺžky r ($r > 0$).

> Množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu S sa rovná r, nazýva sa **kružnica**.

!

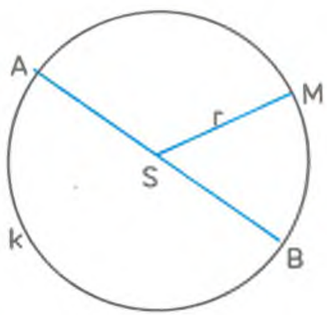
Množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu S je menšia ako r alebo sa rovná r, nazýva sa **kruh**.



Obr. 8.2

Pripomeňme si označenia a názvy.

Kružnica



$k(S;\, r)$ — kružnica so stredom S a polomerom r

S — stred kružnice

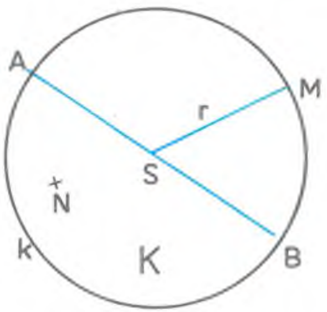
r — polomer kružnice

Obr. 8.3

Názov **polomer** používame aj pre úsečku SM, kde M je ľubovoľný bod kružnice.

Úsečku AB a jej dĺžku nazývame **priemer** kružnice.

Kruh



Obr. 8.4

$K(S; r)$ — kruh so stredom S a polomerom r
S — stred kruhu
r — polomer kruhu
M, N — body kruhu
N — vnútorný bod kruhu (neleží na kružnici k)
úsečka AB a jej dĺžka — priemer kruhu
Kružnica $k(S; r)$ ohraničuje kruh $K(S; r)$.

Úloha 1

?

Zostrojte kružnicu $k(S; 3\text{ cm})$.
a) Zvoľte na kružnici bod M a vyznačte polomer SM.
b) Narysujte ľubovoľný priemer EF kružnice.

Úloha 2

?

Zostrojte kruh $K(S;\ 2{,}5\text{ cm})$.
a) Vyznačte bod N kruhu, pre ktorý platí $|SN| = 2$ cm. Koľko takých bodov môžete vyznačiť?
b) Narysujte dva ľubovoľné priemery kruhu.

CVIČENIA

1. Zostrojte kružnicu $k(S; 2{,}5\text{ cm})$. Vyznačte dva polomery SM, SN kružnice tak, aby platilo $|\sphericalangle MSN| = 30°$.

2. Zostrojte kruh $K(S; 20\text{ mm})$ a zvoľte v ňom priemer AB. Zostrojte priemer CD kruhu kolmý na AB.

3. Je daný kruh $K(S; r)$ a dva jeho vnútorné body U, V. Zostrojte obrazy bodov U, V v stredovej súmernosti so stredom S. Môžu tieto body ležať
   a) mimo kruhu K,
   b) na kružnici, ktorá ohraničuje kruh K?

4. Zvoľte kružnicu k a priamku p tak, aby $p \cap k = \emptyset$. Zostrojte obraz kružnice k v osovej súmernosti, ktorej osou je priamka p. (Koľko bodov stačí zostrojiť, aby bol obraz určený?)

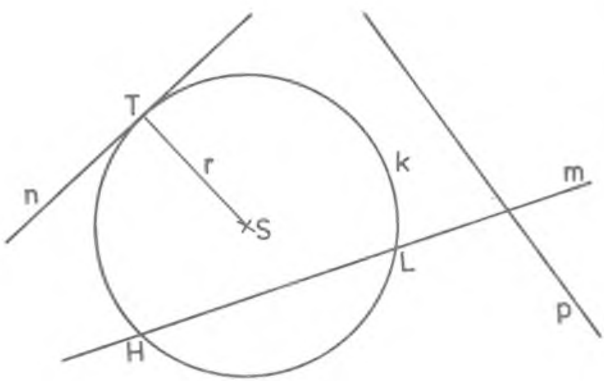
8.2 VZÁJOMNÁ POLOHA KRUŽNICE A PRIAMKY

Úloha 1

Je daná priamka p a bod M, ktorý neleží na priamke p. Určte vzdialenosť bodu M od priamky p. Zapíšte postup, ktorým ste zistili vzdialenosť bodu M od priamky p.

Príklad 1

Na obr. 8.5 je kružnica $k(S; r)$ a priamky m, n, p. Určte množinu všetkých spoločných bodov kružnice k a priamky a) m, b) n, c) p. Túto množinu zapíšte.



Riešenie

a) $m \cap k = \{H, L\}$
b) $n \cap k = \{T\}$
c) $p \cap k = \emptyset$

Obr. 8.5

Priamka m má s kružnicou k **dva spoločné body**.
Priamka n má s kružnicou k **jeden spoločný bod**.
Priamka p **nemá** s kružnicou k **ani jeden spoločný bod**.

Označme $K(S;\ r)$ kruh ohraničený kružnicou k.

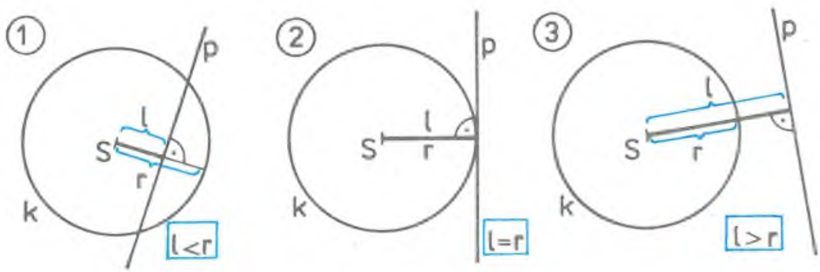
Priamka m sa nazýva **sečnica** kružnice k (kruhu K).
Body H, L sa nazývajú **priesečníky** sečnice m s kružnicou k.
Úsečka HL sa nazýva **tetiva** kružnice k (kruhu K).
Priamka n sa nazýva **dotyčnica** kružnice k (kruhu K).
Bod T sa nazýva **bod dotyku** priamky n s kružnicou k (s kruhom K).
Priamka p sa nazýva **nesečnica** kružnice k (kruhu K).

Zapamätajte si:

!

Je daná kružnica $k(S;\ r)$ a priamka p. Vzdialenosť stredu S od priamky p je l. Všetky možnosti vzájomnej polohy priamky p a kružnice k sú uvedené v tabuľke:

1.	priamka má s kružnicou dva spoločné body	$l < r$	sečnica
2.	priamka má s kružnicou jeden spoločný bod	$l = r$	dotyčnica
3.	priamka nemá s kružnicou ani jeden spoločný bod	$l > r$	nesečnica kružnice



Obr. 8.6

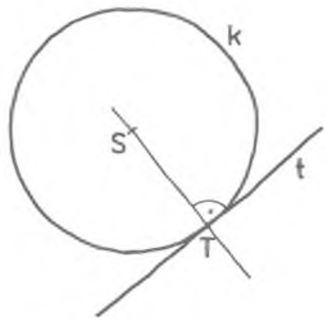
Príklad 2

Narysujte kružnicu $k(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$. Na kružnici k zvoľte bod T. Zostrojte dotyčnicu, ktorá má s kružnicou k bod dotyku T.

Riešenie

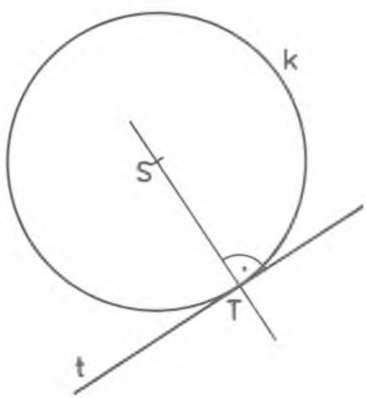
1. *Rozbor*

Načrtneme kružnicu k a zvolíme na nej bod T (obr. 8.7). Priamku, ktorá prechádza bodom T a je kolmá na úsečku ST, označíme t. Priamka t je dotyčnicou kružnice k a prechádza bodom T.



Obr. 8.7

2. *Konštrukcia*



Postup konštrukcie (obr. 8.8):

1. $k;\ k(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$
2. $T;\ T \in k$
3. $\leftrightarrow ST$
4. $t \perp \leftrightarrow ST,\ T \in t$

Obr. 8.8

3. *Skúška*
$t \cap k = \{T\}$, priamka t je dotyčnica kružnice k s bodom dotyku T. Pre zvolený bod T je priamka t jedinou dotyčnicou kružnice k, ktorá prechádza bodom T.

Poznámka

Ide o základnú konštrukciu, ktorú musíme vedieť urobiť automaticky.

Úloha 2

?

Overte, že sečnica kružnice $k(S;\ r)$ má od stredu kružnice menšiu vzdialenosť, ako je polomer.

CVIČENIA

1. Narysujte priamku m a bod S tak, aby vzdialenosť bodu S od priamky m bola 3,5 cm.
Zostrojte kružnicu k so stredom S a polomerom

a) 4 cm, b) 2,5 cm, c) 3,5 cm.

Určte vzájomnú polohu kružnice k a priamky m v každom z daných prípadov.

2. Zostrojte kruh $K(S;\ 3\ \text{cm})$ a priamku p, ktorá má od bodu S vzdialenosť $l = 2$ cm.

a) Určte priesečníky priamky p s kružnicou k, ktorá ohraničuje daný kruh. Tieto priesečníky označte H, L.
b) Určte priesečník kolmice vedenej bodom S na priamku p. Označte ho R. Porovnajte dĺžky úsečiek RH, RL.

3. Zostrojte kružnicu $k(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$ a jej priemer AB.

a) Zostrojte dotyčnice kružnice k s bodmi dotyku A, B.
b) Aká je vzájomná poloha týchto dotyčníc?

4. Zostrojte kružnicu $k(S;\ 20\ \text{mm})$. Zvoľte si priamku m, ktorá je nesečnicou kružnice k. Zostrojte dotyčnicu kružnice k rovnobežnú s priamkou m.

5. Zostrojte kružnicu $k(S;\ 3\ \text{cm})$. Zvoľte na nej body M, N tak, aby platilo $|\sphericalangle MSN| = 30°$.

   a) Zostrojte dotyčnice kružnice k s bodmi dotyku M, N.
   b) Odmerajte veľkosť uhlov týchto dotyčníc a porovnajte ich s veľkosťou uhla MSN.

6. Daná je priamka t a bod S, ktorý neleží na nej. Zostrojte kružnicu k so stredom S a dotyčnicou t.

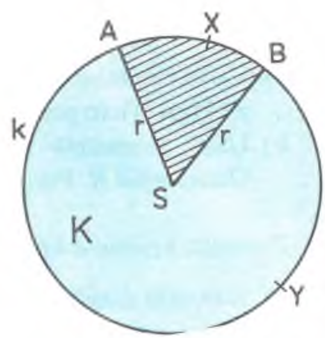
7. Daná je priamka t a nej bod T. Zostrojte kružnicu k, ktorá má polomer $r = 3$ cm a s priamkou t má bod dotyku T.

8. Narysujte kružnicu $k(S;\ 3\ \text{cm})$. Zvoľte na nej bod M. Zostrojte všetky tetivy MN kružnice k, pre ktoré platí

   a) $|MN| = 2{,}5$ cm,   b) $|MN| = 5$ cm.
   Akú najväčšiu dĺžku môže mať tetiva kružnice k?

8.3 OBLÚK KRUŽNICE. KRUHOVÝ VÝSEK

Na obr. 8.9 je kruh $K(S;\ r)$ ohraničený kružnicou $k(S;\ r)$. Zvoľme si dva polomery SA, SB. Tieto dva polomery rozdelia kruh na dve časti, ktoré sa nazývajú **kruhové výseky**. Body A, B delia kružnicu k na dve časti, ktoré sa nazývajú **oblúky kružnice** (kružnicové oblúky).



Obr. 8.9

Kruhové výseky zapisujeme takto:

kruhový výsek AXB (obsahuje bod X),
kruhový výsek AYB (obsahuje bod Y).

Oblúky kružnice zapisujeme takto:

$\overset{\frown}{AXB}$ je oblúk kružnice s krajnými bodmi A, B, ktorý obsahuje bod X.
$\overset{\frown}{AYB}$ je oblúk kružnice s krajnými bodmi A, B, ktorý obsahuje bod Y.

Úloha 1

Čím je na obr. 8.9 ohraničený kruhový výsek AXB (AYB)?

Úloha 2

Určte a napíšte, aký geometrický útvar na obr. 8.9 je
a) zjednotenie kruhových výsekov AXB a AYB,
b) prienik kruhových výsekov AXB a AYB,
c) zjednotenie oblúkov kružnice $\overset{\frown}{AXB}$ a $\overset{\frown}{AYB}$,
d) prienik oblúkov kružnice $\overset{\frown}{AXB}$ a $\overset{\frown}{AYB}$.

CVIČENIA

1. Daný je kruh $K(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$. Zvoľte jeho ľubovoľnú tetivu AB, ktorá má dĺžku 3 cm.
   Farebne vyznačte a) kruhové výseky určené polomermi SA, SB,
   b) oblúky kružnice k, ktorá ohraničuje kruh K, s krajnými bodmi A, B.

2. Daný je kruh $K(S;\ r)$. Zvoľte v ňom polomery SA, SB, ktoré sú navzájom kolmé. Označme písmenom U kruhový výsek, ktorý je prienikom kruhu K a pravého uhla ASB. Akou časťou kruhu je kruhový výsek U?

3. Daný je kruh $K(S;\ r)$. Aký uhol zvierajú jeho polomery SA, SB, keď kruhový výsek AXB je polovinou kruhu K?

4. Daná je kružnica $k(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$. Narysujte jej dve rôzne tetivy AB, CD, pre ktoré platí $|AB| = |CD| = 3$ cm. Nech $\widehat{AUB}$, $\widehat{CVD}$ sú oblúky kružnice, ktoré ležia v ostrých uhloch ASB, CSD.
   a) Aký vzťah platí pre trojuholníky ASB, CSD?
   b) Aký vzťah platí pre kruhové výseky AUB, CVD kruhu $K(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$?
   c) Aký vzťah platí pre oblúky $\widehat{AUB}$, $\widehat{CVD}$ kružnice k?

8.4 VZÁJOMNÁ POLOHA DVOCH KRUŽNÍC

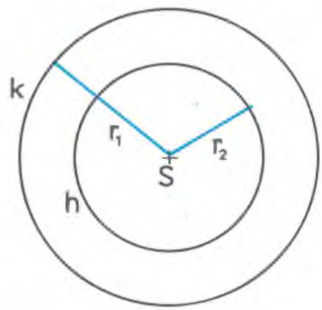
Príklad 1

Zostrojte kružnice $k(S;\ r_1 = 4\ \text{cm})$ a $h(S;\ r_2 = 2{,}5\ \text{cm})$. Určte množinu všetkých spoločných bodov kružníc k a h.

Riešenie (obr. 8.10)

Kružnice k a h majú spoločný stred S; $r_2 < r_1$, a preto je $k \cap h = \emptyset$. Kružnice k a h **nemajú nijaký spoločný bod**.

Dve rôzne kružnice, ktoré majú spoločný stred, nazývajú sa **sústredné kružnice**.



Obr. 8.10

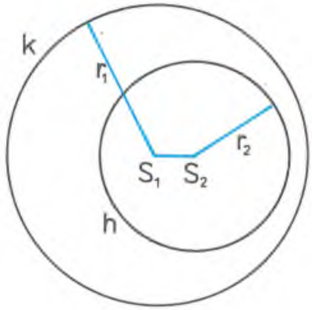
Príklad 2

Zostrojte kružnice $k(S_1;\ r_1 = 4\ \text{cm})$ a $h(S_2;\ r_2 = 2{,}5\ \text{cm})$, pre ktoré platí $|S_1S_2| = 1$ cm. Určte
a) rozdiel $r_1 - r_2$ a porovnajte ho s dĺžkou úsečky S_1S_2,
b) množinu všetkých spoločných bodov kružníc k a h.

Riešenie (obr. 8.11)

a) $r_1 - r_2 = 1{,}5$ cm
   $|S_1S_2| = 1$ cm
   $|S_1S_2| < r_1 - r_2$

b) $k \cap h = \emptyset$
   Kružnice k a h **nemajú nijaký spoločný bod.**



Obr. 8.11

Príklad 3

Zostrojte kružnice $k(S_1;\ r_1 = 4$ cm$)$, $h(S_2;\ r_2 = 2{,}5$ cm$)$, pre ktoré platí $|S_1S_2| = 1{,}5$ cm. Určte

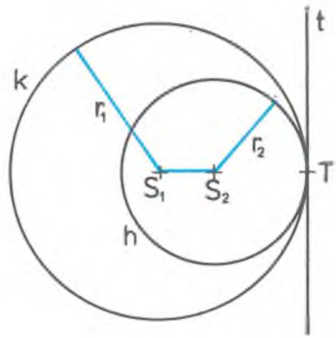
a) rozdiel $r_1 - r_2$ a porovnajte ho s dĺžkou úsečky S_1S_2,

b) množinu všetkých spoločných bodov kružníc k a h.

Riešenie (obr. 8.12)

a) $r_1 - r_2 = 1{,}5$ cm
   $|S_1S_2| = 1{,}5$ cm
   $|S_1S_2| = r_1 - r_2$

b) $k \cap h = \{T\}$



Obr. 8.12

Kružnice k a h majú spoločný bod T, ktorý je bodom dotyku obidvoch kružníc so spoločnou dotyčnicou t. Hovoríme, že kružnice k a h sa **znútra dotýkajú (majú vnútorný dotyk).**

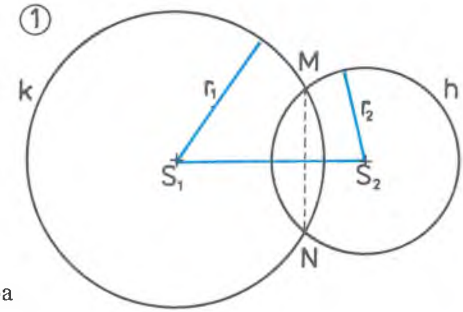
Príklad 4

Zostrojte kružnice $k(S_1;\ r_1 = 4$ cm$)$, $h(S_2;\ r_2 = 2{,}5$ cm$)$, keď pre vzdialenosť ich stredov platí 1. $|S_1S_2| = 5$ cm; 2. $|S_1S_2| = 3$ cm.

Určte
a) rozdiel $r_1 - r_2$ a súčet $r_1 + r_2$ a porovnajte ich s dĺžkou úsečky S_1S_2,
b) množinu všetkých spoločných bodov kružníc k a h.

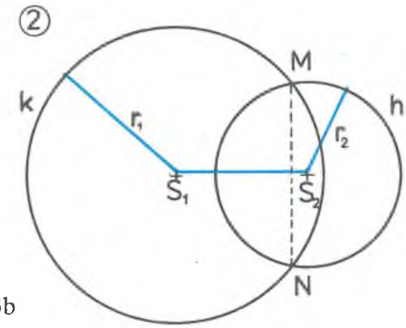
Riešenie (obr. 8.13a, b)

a) 1. $r_1 - r_2 = 1{,}5$ cm
$r_1 + r_2 = 6{,}5$ cm
$|S_1S_2| = 5$ cm



Obr. 8.13a

2. $r_1 - r_2 = 1{,}5$ cm
$r_1 + r_2 = 6{,}5$ cm
$|S_1S_2| = 3$ cm



Obr. 8.13b

Platí: $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$
Prípady 1 a 2 sa odlišujú polohou stredu S_2 vzhľadom na kružnicu k.

b) $k \cap h = \{M, N\}$
Kružnice k a h sa **pretínajú**. Body M, N sa nazývajú **priesečníky** kružníc k a h.

Príklad 5

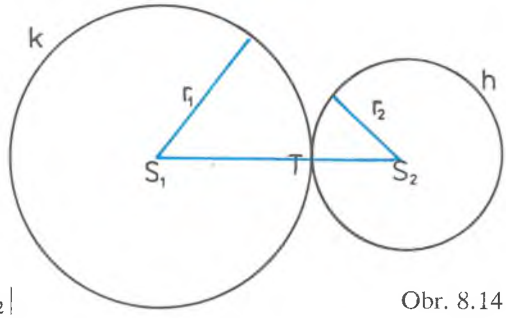
Zostrojte kružnice $k(S_1;\, r_1 = 4$ cm$)$, $h(S_2;\, r_2 = 2{,}5$ cm$)$, pre ktoré platí $|S_1S_2| = 6{,}5$ cm. Určte

a) rozdiel $r_1 - r_2$ a súčet $r_1 + r_2$ a porovnajte ich s dĺžkou úsečky S_1S_2,
b) množinu všetkých spoločných bodov kružníc k a h.

Riešenie (obr. 8.14)

a) $r_1 - r_2 = 1{,}5$ cm
$r_1 + r_2 = 6{,}5$ cm
$|S_1S_2| = 6{,}5$ cm

Platí:
$r_1 - r_2 < r_1 + r_2 = |S_1S_2|$



Obr. 8.14

b) $h \cap k = \{T\}$
Kružnice k a h majú spoločný bod T, ktorý je bodom dotyku obidvoch kružníc so spoločnou dotyčnicou t. Hovoríme, že kružnice k a h sa **dotýkajú zvonku** v bode T.

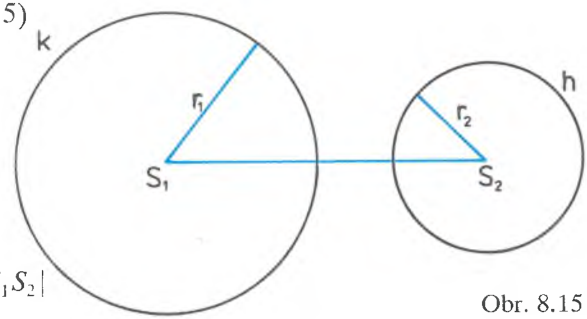
Príklad 6

Zostrojte kružnice $k(S_1; r_1 = 4$ cm$)$, $h(S_2; r_2 = 2{,}5$ cm$)$, pre ktoré platí $|S_1S_2| = 8{,}5$ cm. Určte
a) rozdiel $r_1 - r_2$ a súčet $r_1 + r_2$ a porovnajte ich s dĺžkou úsečky S_1S_2,
b) množinu všetkých spoločných bodov kružníc k a h.

Riešenie (obr. 8.15)

a) $r_1 - r_2 = 1{,}5$ cm
$r_1 + r_2 = 6{,}5$ cm
$|S_1S_2| = 8{,}5$ cm

Platí:
$r_1 - r_2 < r_1 + r_2 < |S_1S_2|$



Obr. 8.15

b) $k \cap h = \emptyset$
Kružnice k a h **nemajú nijaký spoločný bod**.

CVIČENIA

1. Narysujte kružnicu $k(S_1;\ r_1 = 3\text{ cm})$ a zvoľte bod S_2 tak, aby platilo $|S_1S_2| = 1$ cm. Zostrojte kružnicu $h(S_2;\ r_2)$ tak, aby s kružnicou k
a) nemala ani jeden spoločný bod,
b) mala spoločný práve jeden bod,
c) mala spoločné dva body.

2. Narysujte kružnicu $k(S_1;\ r_1 = 3\text{ cm})$. Zvoľte na nej bod T. Zostrojte kružnicu $h(S_2;\ r_2)$, ktorá sa kružnice k dotýka v bode T a má polomer
a) $r_2 = 2$ cm, b) $r_2 = 4$ cm.

■ **3.** Narysujte kružnice $k(S_1;\ r_1 = 2\text{ cm})$ a $h(S_2;\ r_2 = 3\text{ cm})$, pričom $|S_1S_2| = 2$ cm. Zostrojte kružnicu $m(S_3;\ r_3 = 4\text{ cm})$, ktorá obsahuje množinu $h \cap k$.

■ **4.** Zostrojte kružnicu $k(S_1;\ r_1 = 2\text{ cm})$. Zvoľte bod S_2, pre ktorý platí $|S_1S_2| = 3{,}5$ cm. Zostrojte kružnicu $h(S_2;\ r_2)$, ktorá nemá s kružnicou k nijaký spoločný bod. Zapíšte pomocou nerovností, aké hodnoty môže nadobúdať polomer r_2.

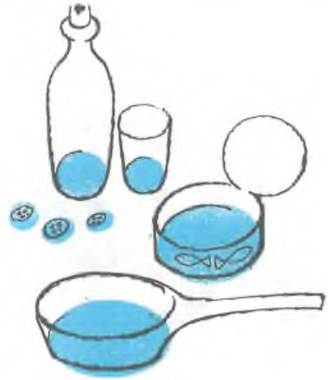
5. Zostrojte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$, pre ktorý platí: $|AB| = 3$ cm.

8.5 DĹŽKA KRUŽNICE. OBVOD KRUHU

Teraz sa naučíte vypočítať **dĺžku kružnice.**

Keby sa kružnica dala „vyrovnať" na priamku, jej dĺžka by sa ľahko odmerala ako dĺžka úsečky. Na začiatok použijeme takýto spôsob určovania dĺžky kružnice.

Vezmite si 4 až 6 predmetov, ktoré majú tvar kružnice alebo kruhu, alebo na ktorých sa dajú kružnice ľahko vyznačiť (mince, dno fľaše, plechová škatuľka na krém a podobne).



Obvod kruhu je dĺžka kružnice, ktorá ohraničuje daný kruh.

Na papier narysujte takúto tabuľku:

Dĺžka *o* kružnice		
Priemer *d* kružnice		
Podiel $o : d$		

Do tabuľky napíšte tieto údaje:

1. Odmerajte priemer *d* kružnice (kruhu) a napíšte ho do tabuľky.
2. Niť alebo povrázok naviňte na obvod kruhu (kružnice) a odmerajte dĺžku *o* navinutej nite. Napíšte ju do tabuľky do toho istého stĺpca ako odmeraný priemer *d*.

3. Pomocou kalkulačky vypočítajte podiel $o : d$ a napíšte ho do toho istého stĺpca ako údaje *o* a *d*.

   Tento postup zopakujte pre niekoľko predmetov.

Pri presnom meraní je podiel $\boxed{o : d}$ pre všetky kružnice (kruhy) približne číslo 3,1.

Tento podiel je pre **všetky** kružnice (kruhy) rovnaký a jeho hodnota sa označuje písmenom gréckej abecedy π (čítaj pí).

Historická poznámka

Číslo π ***nie je racionálne*** *(to znamená, že ho nemôžeme presne vyjadriť zlomkom). Od najstarších čias sa matematici v starovekej Mezopotámii, Egypte, Indii, Číne a Grécku usilovali čo najpresnejšie určiť hodnotu tohto čísla. Grécky matematik a fyzik* ***Archimedes****, ktorý žil v 3. storočí pred naším letopočtom, porovnával dĺžku kružnice s obvodom pravidelného 96-uholníka vpísaného do kružnice. Ako približnú hodnotu čísla π používal číslo $\frac{22}{7}$. Túto hodnotu alebo hodnotu 3,14 budeme používať aj my. Okolo roku 1600 vypočítal Holanďan* ***Ludolf van Ceulen*** *hodnotu čísla π na 35 desatinných miest (3,141 592 654 . . .). Preto sa toto číslo niekedy nazýva* ***Ludolfovo číslo****.*

Zo vzťahu

$$o : d = \pi$$

dostaneme pre dĺžku kružnice

! $$\boxed{o = \pi d}$$

Pretože vieme, že platí $d = 2r$ (kde r je polomer kružnice), môžeme vzťah $o = \pi d$ zapísať aj

! $$\boxed{o = 2\pi r}$$

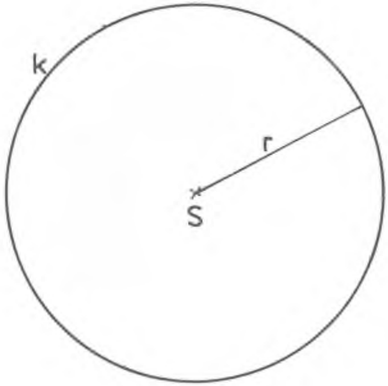
Tento vzorec sa na výpočet dĺžky kružnice používa najčastejšie.

Príklad 1

Vypočítajte dĺžku kružnice, ktorá má polomer 5 cm.

Riešenie (obr. 8.16)

Obr. 8.16



$r = 5$ cm
$o = \ldots$ cm

$o = 2\pi r$

$o = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 5$
$o = 10 \,.\, 3{,}14$
$o = 31{,}4$

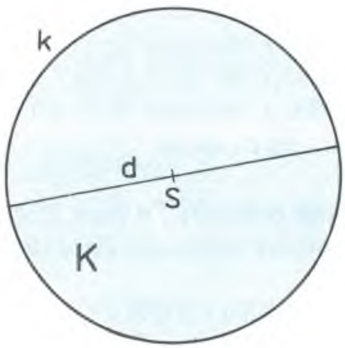
$o = 31{,}4$ cm
Dĺžka kružnice je 31,4 cm.

Príklad 2

Obvod kruhu je 22 dm. Vypočítajte priemer kruhu. (Výsledok zaokrúhlite na jedno desatinné miesto.)

Riešenie (obr. 8.17)

Obr. 8.17



$o = 22$ dm
$d = \ldots$ dm

$o = \pi d$

$22 = 3{,}14 \,.\, d$	$22 : 3{,}14$ (použijeme kalkulačku)
$d = 22 : 3{,}14$	$22 : 3{,}14 = 7{,}006\,369\,4$
$d \doteq 7$	Zaokrúhlime na jedno desatinné miesto:
	$22 : 3{,}14 = 7{,}0$

$d \doteq 7$ dm
Priemer kruhu je približne 7 dm.

Poznámka

Na niektorých kalkulačkách je približná hodnota čísla π (na 7 až 8 desatinných miest) označená osobitným tlačidlom. Napríklad obvod kruhu s polomerom 5 cm určíme týmto postupom:

$2\ \boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ 5\ \boxed{=}$	Displej 31.415926
	Výsledok zaokrúhlime napríklad na jedno desatinné miesto
	$o \doteq 31{,}4$ cm

CVIČENIA

1. Vypočítajte dĺžku kružnice, ktorej polomer je:
a) 1 m, b) 12 cm, c) 0,5 dm, d) 16 mm, e) 2,34 m.

2. Vypočítajte obvod kruhu, ktorého priemer je:
a) 10 m, b) 56 cm, c) 1,2 dm, d) 16 m, e) $\frac{9}{4}$ m.

3. Vypočítajte priemer kruhu, ktorého obvod sa rovná:
a) 12,56 m, b) 47,1 cm c) 5,1 dm, d) 81,7 mm, e) 20,26 m.
Použite kalkulačku a výsledok zaokrúhlite na toľko desatinných miest, koľko má údaj o obvode.

4. Dve kružnice majú polomery 30 cm a 25 cm. O koľko centimetrov je dĺžka prvej kružnice väčšia ako dĺžka druhej kružnice?

5. Minútová ručička budíka má dĺžku 3,5 cm. Vypočítajte dráhu, ktorú opíše hrot ručičky za 12 hodín.

6. Koleso automobilu má priemer 62 cm.
   a) Koľkokrát sa koleso otočí na dráhe dĺžky 100 m?
   b) Koľkokrát sa koleso otočí na dráhe dĺžky 50 km?

8.6 OBSAH KRUHU

Narysujte kruh s polomerom $r = 5$ cm a rozdeľte ho na 12 zhodných kruhových výsekov. Tieto kruhové výseky striedavo zafarbite červenou a modrou (obr. 8.18a). Kruh rozstrihajte na kruhové výseky a zostavte ich do útvaru podľa obr. 8.18b. Útvar je približne rovnobežník, ktorého dve protiľahlé strany sú zložené z kružnicových oblúkov. Celková dĺžka týchto oblúkov na jednej strane sa rovná πr.

Výška „rovnobežníka" sa rovná približne r. Pre obsah S tohto „rovnobežníka" platí:

$$S = (\pi r)r = \pi rr = \pi r^2$$

Obsah „rovnobežníka" sa rovná približne obsahu kruhu. Teda pre obsah S kruhu s polomerom r platí:

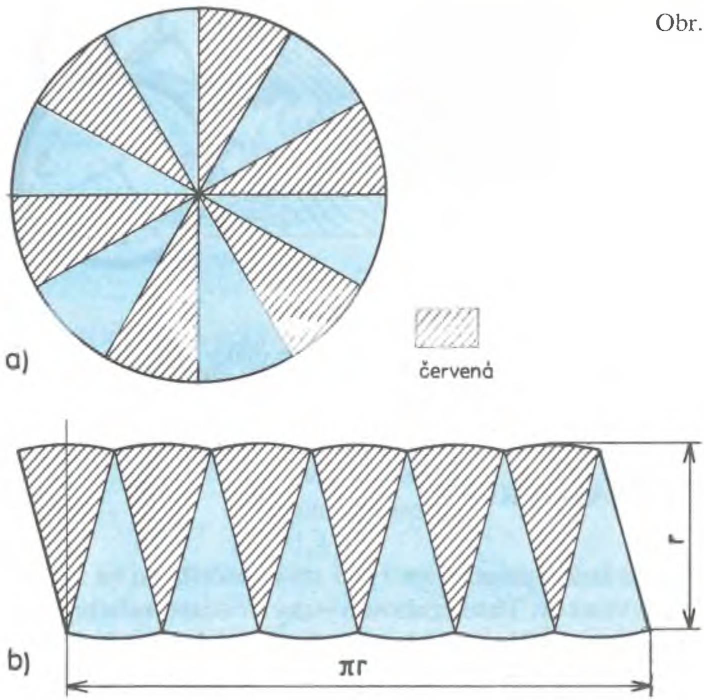
$$\boxed{S = \pi r^2}$$

!

Poznámka

Ak rozdelíme kruh na väčší počet kruhových výsekov, bude sa obsah „rovnobežníka" rovnať obsahu kruhu s väčšou presnosťou.

Obr. 8.18

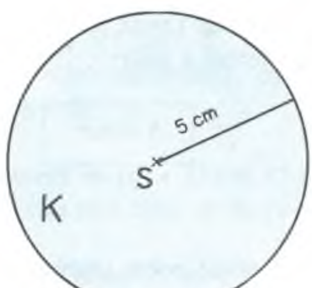


Príklad 1

Vypočítajte obsah kruhu, ktorého polomer sa rovná 5 cm.

Riešenie (obr. 8.19)

Obr. 8.19



$r = 5$ cm

$S = \pi r^2$

$S = \dots$ cm^2

$S = 3{,}14 \,.\, 5^2$ $S = 78{,}5$	$3{,}14 \,.\, 25 = 78{,}5$

$S = 78{,}5\ \text{cm}^2$
Obsah kruhu je $78{,}5\ \text{cm}^2$.
Pokiaľ môžeme, používame na výpočty kalkulačku.

Príklad 2

Vypočítajte polomer kruhu, ktorého obsah je $50\ \text{cm}^2$. Výsledok zaokrúhlite na jedno desatinné miesto.

Riešenie

$S = 50\ \text{cm}^2$

$S = \pi r^2$ $\qquad$ $r = \ldots\ \text{cm}$

$50 = \pi r^2$
$r^2 = 50 : \pi$
$r = \sqrt{50 : \pi}$

Postup výpočtu	Postup na kalkulačke	Displej
1. krok: $50 : \pi$	50 $\boxed{:}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$	15.915494
2. krok: $\sqrt{50 : \pi}$	$\boxed{\sqrt{\ }}$	3.9894227

Zaokrúhlime na jedno desatinné miesto:
$r \doteq 4{,}0$

$r \doteq 4\ \text{cm}$
Polomer kruhu je približne 4 cm.

CVIČENIA

1. Vypočítajte obsah kruhu, ktorého polomer je:
a) 2 m, b) 34 cm, c) 2,5 dm, d) 0,62 m.

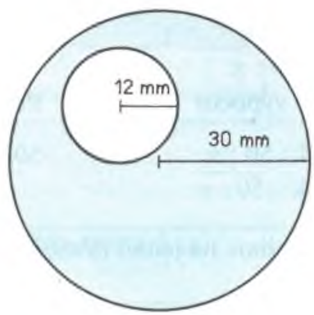
2. Vypočítajte obsah kruhu, ktorého polomer je:
   a) 6 cm, b) 18 dm, c) 1,24 m, d) 14 mm.

3. Obsah kruhu je:
   a) 314,2 dm^2, b) 4 072 cm^2, c) 5,07 m^2.
   Vypočítajte polomer kruhu. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

4. Obsah kruhu je:
   a) 2 000 cm^2, b) 800 dm^2, c) 75 m^2.
   Vypočítajte priemer kruhu. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta. (Poznámka: Nezabudnite, že $d = 2r$.)

5. Vypočítajte obsah:
   a) polkruhu s polomerom 17,2 cm,
   b) štvrťkruhu, ktorý je časťou kruhu s priemerom 6,5 m.

6. Vypočítajte obsah kruhovej podložky s kruhovým výrezom podľa obr. 8.20.



Obr. 8.20

7. Kruh má polomer 1,5 cm.
   a) Vypočítajte obsah kruhu, ktorý má dvojnásobný polomer.
   b) Bez výpočtu určte, koľkokrát sa zväčší obsah kruhu, ak sa jeho polomer zväčší trikrát.

8. Do štvorca so stranou dĺžky 20 cm je vpísaný kruh.
   a) Vypočítajte obsah štvorca a obsah kruhu.
   b) Koľkokrát je obsah štvorca väčší ako obsah kruhu?

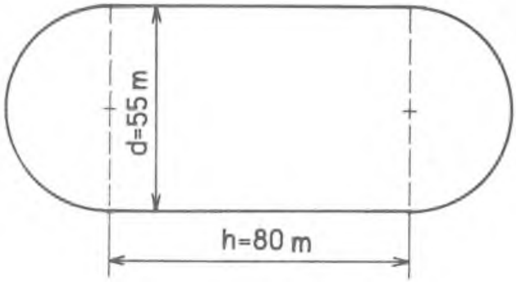
8.7 SLOVNÉ ÚLOHY

Príklad 1

Bežecká dráha okolo školského ihriska má tvar a rozmery vyznačené na obr. 8.21. Vypočítajte:

a) dĺžku vnútorného okraja bežeckej dráhy,

b) koľko kôl treba zabehnúť, aby sa prebehla dráha 1 km.



Obr. 8.21

Riešenie

a) Dĺžka rovného úseku . . . . $h = 80$ m

priemer polkružnicového úseku . . . . $d = 55$ m

polomer . . . . $r = 27{,}5$ m

dĺžka polkružnicového úseku . . . . $\frac{o}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r =$

$= 3{,}14 \,.\, 27{,}5$ m

dĺžka dráhy (vnútorný okraj) . . . . $x = 2h + 2\frac{o}{2} =$

$= 2h + o$

$x = \ldots$ m

$\frac{o}{2} = 3{,}14 \,.\, 27{,}5 = 86{,}35$

$x = 2 \,.\, 80 + 2 \,.\, 86{,}35 = 2(80 + 86{,}35) =$

$= 2 \,.\, 166{,}35 = 332{,}7 \doteq 333$

$x \doteq 333$ m

Dĺžka vnútorného okraja bežeckej dráhy je približne 333 m.

b) $\uparrow$ 1 kolo . . . . . 333 m $\uparrow$
x kôl . . . . . 1 000 m

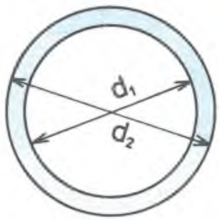
$$x = \frac{1\,000}{333} \cdot 1 \doteq 3$$

Na prebehnutie vzdialenosti 1 km treba zabehnúť približne 3 kolá.

Príklad 2

Prívodná plynová rúrka má priemer vnútorného prierezu $d_1 = 11{,}15$ mm; priemer vonkajšieho prierezu je $d_2 = 13{,}25$ mm. Vypočítajte a) hrúbku steny rúrky, b) obsah vnútorného prierezu. (Zaokrúhlite na stotiny mm^2.)

Riešenie (obr. 8.22)



Obr. 8.22

a) Polomer vnútorného prierezu . . . $r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{11{,}15}{2}$ mm $= 5{,}575$ mm

polomer vonkajšieho prierezu . . . $r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{13{,}25}{2}$ mm $= 6{,}625$ mm

hrúbka steny . . . . . . $x = r_2 - r_1 = \ldots$ mm

$x = 6{,}625 - 5{,}575$
$x = 1{,}05$

$x = 1{,}05$ mm
Hrúbka steny rúrky je 1,05 mm.

b) Obsah vnútorného prierezu . . . . . . $S_1 = \dots$ mm^2
$S_1 = \pi r_1^2$

$S_1 = 3{,}14 \,.\, 5{,}575^2$ (použijeme kalkulačku alebo tabuľky)
$S_1 = 3{,}14 \,.\, 31{,}08$
$S_1 = 97{,}59$

$S_1 = 97{,}59$ mm^2
Obsah vnútorného prierezu je 97,59 mm^2.

Príklad 3

Pretekársky bicykel má priemer kolies 70 cm. Víťaz časovky na Pretekoch mieru išiel priemernou rýchlosťou 36 $\frac{km}{h}$. Koľko otáčok za sekundu urobí pri tejto rýchlosti každé z kolies jeho bicykla? (Zaokrúhlite na desatiny.)

Riešenie

Za 1 hodinu . . . . 36 km = 36 000 m
Za 1 sekundu . . . . (36 000 : 3 600) m = 10 m
Obvod kolesa (1 otáčka) . . . . . . $o = 2\pi r = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}35$ m
10 m . . . . x otáčok

↑ 1 otáčka . . . . 2 . 3,14 . 0,35 ↑
x otáčok 10

$$x = \frac{10}{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}35} \,.\, 1$$

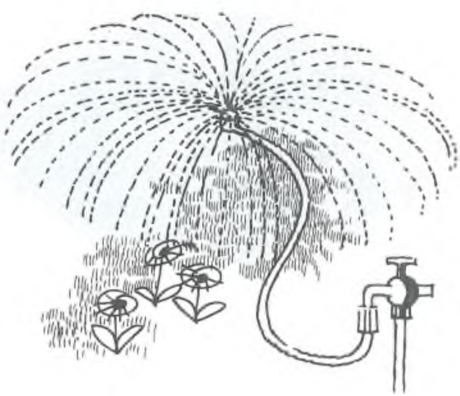
$$2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}35 = 3{,}14 \,.\, 0{,}7 = 2{,}198$$

$$x = \frac{10}{2{,}198} \doteq \frac{10}{2{,}2} \doteq 4{,}5$$

Koleso urobí za sekundu približne $4\frac{1}{2}$ otáčky.

CVIČENIA

1. Otáčavý zavlažovač má dostrek 18 m. Akú rozlohu pôdy môže zavlažiť z jedného miesta?



2. Zemský rovník má dĺžku približne 40 000 km. Predstavme si, že zemeguľa je opásaná obručou. Keby sa dĺžka obruče zväčšila o 1 m, vznikla by medzi povrchom Zeme a obručou medzera. Prešmykla by sa touto medzerou myš?

3. Zo štvorca plechu sa má vystrihnúť kruh, ktorého obsah je:
a) 7 dm^2, b) 100 cm^2, c) 60 mm^2.
Vypočítajte dĺžku strany najmenšieho štvorca, z ktorého možno vystrihnúť takýto kruh. (Výsledok zaokrúhlite na jedno desatinné miesto.)

4. Na kruhový stôl s priemerom 76 cm treba ušiť obrus, ktorý má dookola presahovať stôl o 10 cm. Na obrubu sa pridá 1,5 cm látky.
a) Možno takýto obrus ušiť z látky širokej 90 cm bez zošívania látky?
b) Koľko metrov stuhy treba na obrúbenie obrusa?

5. Uprostred štvorcového trávnika so stranou dĺžky 20 m je kruhový kvetinový záhon. Najmenšia vzdialenosť okraja záhona od okraja trávnika je 5 m.
a) Nakreslite plánik trávnika a záhona.
b) Na koľkých štvorcových metroch je zasiata tráva?

6. Koleso ťažnej veže má priemer 3 m. O koľko metrov vystúpi (klesne) kabína výťahu, keď sa koleso otočí tým istým smerom 12-krát?

7. Zo sklenej tabule s obsahom 0,88 m^2 vyrobili 98 kotúčov s priemerom 94 mm. Vypočítajte percento odpadu.

8. Lano výťahu sa navíja na valec, ktorý má priemer 20 cm a za sekundu sa otočí dvakrát.
a) Akou rýchlosťou (v metroch za sekundu) sa pohybuje kabína výťahu?
b) Za koľko sekúnd vyjde výťah z prízemia na 6. poschodie, keď vzdialenosť medzi susednými poschodiami je 3 m?

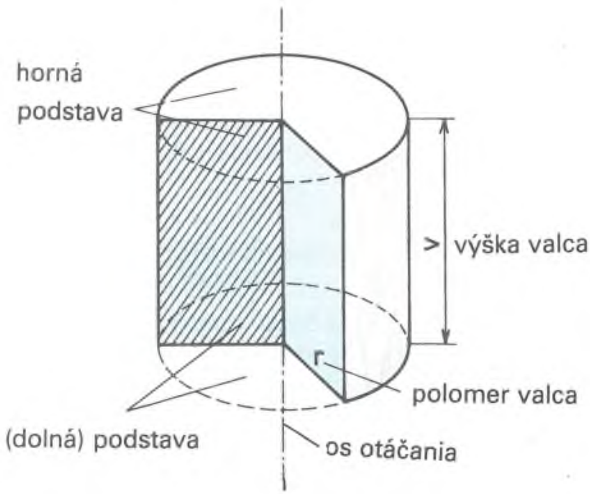
8.8 VALEC. POVRCH VALCA. OBJEM VALCA

?

Úloha 1

Mnohé predmety, ktoré denne používame, majú tvar valca. Uveďte niektoré z nich, ktoré sú okolo vás doma aj v škole.

Geometricky si môžeme valec predstaviť ako teleso, ktoré vznikne otáčaním obdĺžnika okolo priamky, ktorá obsahuje jednu jeho stranu (obr. 8.23).

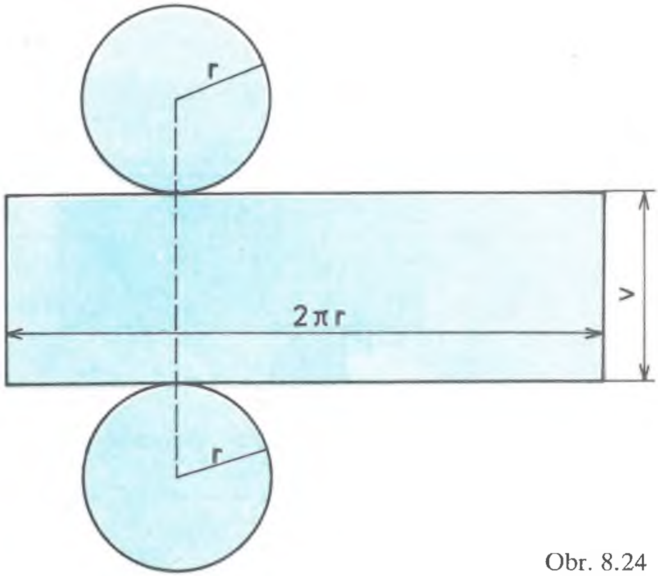


Obr. 8.23

Valec je ohraničený dvoma kruhmi a zakrivenou plochou, ktorú pri otáčaní vytvorí strana obdĺžnika rovnobežná s osou otáčania.

Kruhy sa nazývajú **podstavy valca**, vzdialenosť stredov podstáv sa nazýva **výška valca**, zakrivená plocha je **plášť valca**. Polomer podstavy valca sa nazýva **polomer valca**.

Sieť valca sa skladá z obidvoch podstáv a plášťa valca. Sieť valca, ktorý má polomer r a výšku v, je znázornená na obr. 8.24.



Obr. 8.24

Povrch valca je obsah siete valca.

Ak označíme S_p – obsah podstavy,
S_{pl} – obsah plášťa,
S – povrch valca,

tak platí: $S = 2S_p + S_{pl}$

Vieme, že platí $S_p = \pi r^2$
$S_{pl} = 2\pi r v$

a teda

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

$$\boxed{S = 2\pi r(r + v)}$$

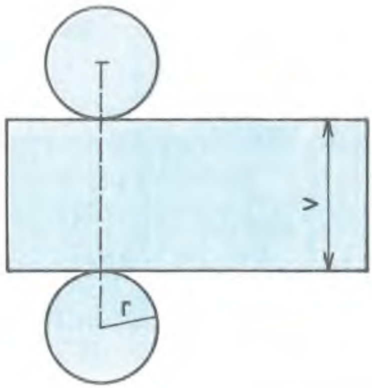
!

Príklad 1

Vypočítajte povrch valca, ktorý má polomer podstavy $r = 3$ cm a výšku $v = 8$ cm.

Riešenie (obr. 8.25)

Obr. 8.25



$r = 3$ cm
$v = 8$ cm

$S = \ldots$ cm^2

$S = 2\pi r(r + v)$

$S = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 3(3 + 8)$
$S = 6{,}28 \,.\, 3 \,.\, 11$
$S = 6{,}28 \,.\, 33 = 207{,}24 \doteq 207$

$S \doteq 207$ cm^2
Povrch valca je približne 207 cm^2.

Objem valca, ktorý má polomer r a výšku v, sa vypočíta rovnako ako objem hranola:

$$V = S_p \,.\, v$$

Pretože $S_p = \pi r^2$, dostaneme

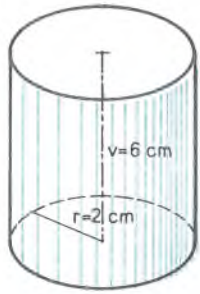
$$\boxed{V = \pi r^2 v}$$

Príklad 2

Vypočítajte objem valca, ktorý má polomer $r = 2$ cm a výšku $v = 6$ cm.

Riešenie (obr. 8.26)

Obr. 8.26



$r = 2$ cm
$v = 6$ cm

$V = \dots$ cm^3

$V = \pi r^2 v$

$V = 3{,}14 \,.\, 2^2 \,.\, 6$	$3{,}14 \,.\, 2^2 \,.\, 6 = 3{,}14 \,.\, 4 \,.\, 6 =$
$V = 75{,}36 \doteq 75$	$= 3{,}14 \,.\, 24 = 75{,}36$

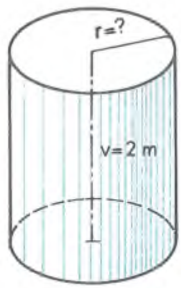
$V \doteq 75$ cm^3
Objem valca je približne 75 cm^3.

Príklad 3

Vypočítajte polomer podstavy valca, ktorého výška je $v = 2$ m a objem $V = 1{,}57$ m^3.

Riešenie (obr. 8.27)

Obr. 8.27



$v = 2$ m
$V = 1{,}57$ m^3

$r = \dots$ m

$V = \pi r^2 v$

$1{,}57 = 3{,}14 \,.\, r^2 \,.\, 2$
$1{,}57 = 6{,}28 \,.\, r^2$
$1{,}57 : 6{,}28 = r^2$ (použijeme kalkulačku)
$0{,}25 = r^2$
$\sqrt{0{,}25} = r$
$0{,}5 = r$

$r = 0{,}5$ m
Polomer podstavy valca je 0,5 m.

Úloha 2

Vypočítajte výšku valca, ak $r = 10$ cm, $V = 628$ cm^3.

CVIČENIA

1. Vypočítajte povrch valca, ak:
   a) $r = 2$ dm, $v = 10$ cm
   b) $r = 3{,}5$ cm, $v = 5$ cm
   c) $r = 5$ m, $v = 3$ m
   d) $r = 5{,}5$ dm, $v = 20$ cm
   e) $r = 5$ dm, $v = 1{,}2$ m

2. Vypočítajte objem valca, ak:
   a) $r = 2$ cm, $v = 5$ cm
   b) $r = 10$ cm, $v = 2$ dm
   c) $r = 5$ m, $v = 20$ m
   d) $r = 1{,}5$ cm, $v = 2{,}5$ cm
   e) $r = 2{,}5$ dm, $v = 1{,}2$ m

3. Vypočítajte výšku valca, keď:
   a) $r = 3$ cm, $V = 250$ cm^3
   b) $r = 25$ cm, $V = 100$ dm^3
   c) $r = 20$ mm, $V = 1{,}5$ dm^3
   d) $r = 5$ m, $V = 15$ m^3

4. Vypočítajte polomer podstavy valca, keď:
   a) $v = 7{,}8$ cm, $V = 250$ cm^3
   b) $v = 0{,}25$ m, $V = 5{,}72$ m^3
   c) $r = 12$ mm, $V = 12$ cm^3
   d) $v = 10$ m, $V = 15$ m^3

5. Doplňte údaje v tejto tabuľke:

r	v	S_p	S_{pl}	S	V
2,3 cm	8,1 cm				
42 mm			178 cm^2		
	6,7 dm	30 dm^2			
1,5 m				35 m^2	
5 m					882 m^3
	12,5 m				150 m^3

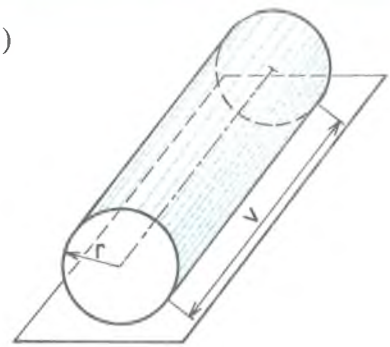
6. Vypočítajte výšku valca, keď:
   a) $r = 3$ cm, $S = 190$ cm^2
   b) $r = 5$ dm, $S = 2\,500$ dm^2
   c) $r = 16$ mm, $S = 20$ cm^2
   d) $r = 2$ m, $S = 36$ m^2

8.9 POVRCH A OBJEM VALCA V SLOVNÝCH ÚLOHÁCH

Príklad 1

Valec na valcovanie asfaltu má priemer 80 cm a šírku 1,2 m. Koľko štvorcových metrov cesty zvalcuje, keď sa otočí dvadsaťkrát?

Riešenie (obr. 8.28)



Obr. 8.28

polomer . . . . $r = \frac{d}{2} = 40$ cm

šírka . . . . $v = 120$ cm
(výška valca)
1 otočenie . . . . $S_{pl} = 2\pi rv = 2\pi \,.\, 40 \,.\, 120$ cm^2
20 otočení . . . . x cm^2

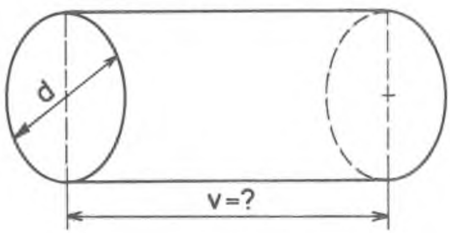
$x = 20 \,.\, (2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 40 \,.\, 120)$ $\quad$ $6{,}28 \,.\, 4\,800 = 628 \,.\, 48 = 30\,144$
$x = 20 \,.\, 30\,144$ $\quad$ $30\,144 \,.\, 20 = 602\,880$
$x = 602\,880$

Po dvadsiatich otočeniach valec zvalcuje približne 603 000 cm^2 cesty, t. j. 60,3 m^2.

Príklad 2

Železničná cisterna má tvar valca s priemerom 2 m a objemom 400 hl.
a) Vypočítajte dĺžku cisterny.
b) Vypočítajte povrch cisterny.

Riešenie (obr. 8.29)



Obr. 8.29

$d = 2$ m, $r = 1$ m
$V = 400$ hl $= 40$ m^3
$v = \ldots$ m
$S = \ldots$ m^2

a) $V = \pi r^2 v$

$40 = \pi\, 1^2\, v$
$40 = \pi\, v$
$\frac{40}{\pi} = v$ $\quad$ (pomocou kalkulačky 40 : 3,14 =
$v \doteq 12{,}7$ $\quad$ = 12,7388, zaokrúhlime na 12,7)

$v \doteq 12{,}7$ m
Cisterna má dĺžku 12,7 m.

b) $S = 2\pi r(r + v)$

$S = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1 \,.\, (1 + 12{,}7)$ $S \doteq 86$	$6{,}28 \,.\, (1 + 12{,}7) = 6{,}28 \,.\, 13{,}7 =$ $= 86{,}036 \doteq 86$

$S \doteq 86 \text{ m}^2$
Povrch cisterny je približne 86 m^2.

CVIČENIA

1. Stĺp na lepenie plagátov má tvar valca s priemerom 1,4 m a výškou 2,5 m. Koľko štvorcových metrov plagátov je na stĺpe, keď je nimi úplne pokrytý?

2. Studňa má tvar valca s priemerom 1,2 m. Od povrchu po hladinu vody je hĺbka 4 m, hĺbka vody je 3,5 m.
a) Koľko kubických metrov zeminy museli vykopať pri hĺbení studne?
b) Koľko hektolitrov vody je v studni?

3. Plynojem má tvar valca s priemerom 12 m a výškou 18 m.
   a) Koľko kubických metrov plynu je v naplnenom plynojeme?
   b) Koľko korún stojí natretie vonkajšieho povrchu plynojemu, keď 1 m^2 náteru stojí 25 Kčs? (Zaokrúhlite na stovky Kčs.)

4. Sud na naftu má tvar valca s výškou 90 cm a objemom 200 l. Vypočítajte priemer suda.

5. Polievacia hadica má vnútorný priemer 1,5 cm a dĺžku 30 m. Po otvorení prívodu začne do hadice prúdiť voda a za každú minútu pretečie 20 l vody. O koľko sekúnd po otvorení prívodu začne z hadice vytekať voda, keď hadica bola predtým prázdna?

6. Odkvapový žľab má tvar polovice plášťa valca s priemerom 12 cm. Celková dĺžka žľabu okolo domu je 36 m. Koľko štvorcových metrov plechu sa spotrebuje na zhotovenie odkvapového žľabu? (Na okraj a odpad sa pridá 15 %.)

Lineárne rovnice 9

9.1 ROVNOSŤ

Všetci isto poznáte vzorec na výpočet obsahu trojuholníka. Pre trojuholník so základňou z a výškou v ho môžeme napísať napríklad takto:

$$S = \frac{z \cdot v}{2} \qquad \text{alebo} \qquad S = (z \cdot v) : 2$$

Platí $\frac{z \cdot v}{2} = (z \cdot v) : 2$. Zápis $\frac{z \cdot v}{2} = (z \cdot v) : 2$ sa nazýva **rovnosť**.

Výraz na ľavej strane rovnosti označujeme L.
Výraz na pravej strane rovnosti označujeme P.
Napríklad:

$$\underbrace{7 \cdot 5 + 5}_{L} = \underbrace{4 \cdot 10}_{P}$$
$$40 = 40$$
$$L = \mathrm{P}$$

Ak sa výraz L nerovná výrazu P, je to **nerovnosť**.
Napríklad:

$$L = 7 \cdot 5 \qquad P = 4 \cdot 10$$
$$7 \cdot 5 < 4 \cdot 10$$
$$35 < 40$$
$$L < \mathrm{P}$$

Príklad

Určte, pre ktoré $x \in \{-2, 0, 5, 6\}$ tvoria výrazy $3x + 5$ a $x^2 - 5$ rovnosť a pre ktoré x tvoria nerovnosť.

Riešenie

Označíme $L' = 3x + 5$, $P = x^2 - 5$.

a) Pre $x = -2$ platí:
$L' = 3x + 5 = 3 \cdot (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$
$P = x^2 - 5 = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$
$L' = P$ *rovnosť*

b) Pre $x = 0$ platí:
$L' = 3x + 5 = 3 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$
$P = x^2 - 5 = 0^2 - 5 = 0 - 5 = -5$
$L' > P$
nerovnosť

c) Pre $x = 5$ platí:
$L' = 3x + 5 = 3 \cdot 5 + 5 = 15 + 5 = 20$
$P = x^2 - 5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$
$L' = P$ *rovnosť*

d) Pre $x = 6$ platí:
$L' = 3x + 5 = 3 \cdot 6 + 5 = 18 + 5 = 23$
$P = x^2 - 5 = 6^2 - 5 = 36 - 5 = 31$
$L' < P$ *nerovnosť*

CVIČENIA

1. Do rámčeka doplňte jeden zo znakov =, <, > tak, aby ste dostali pravdivý výrok:

a) $1{,}6 : 0{,}5 \; \square \; 3 + 0{,}2$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \; \square \; 4 - 1\frac{1}{2}$

c) $\frac{8}{3} + \frac{4}{5} \; \square \; \frac{8}{5} + \frac{4}{3}$

d) $(-7)^2 + 1 \; \square \; 7^2 - 1$

2. Presvedčte sa, že uvedené rovnosti platia pre dané hodnoty:
   a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a = 5,\ b = 3)$
   b) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ $(a = 7,\ b = 1)$

3. Zistite, pre ktoré z čísel $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ sa navzájom rovnajú výrazy $x^2 - 4$ a $2x - 1$.

4. Zapíšte ako rovnosť dvoch výrazov túto úlohu: Vlado je o päť rokov starší ako jeho brat Jurko. Pred štyrmi rokmi bol Vlado dvakrát starší ako Jurko.

5. Zapíšte ako rovnosť dvoch výrazov túto slovnú úlohu: Ak od daného čísla k odpočítame tri a tento rozdiel vynásobíme šiestimi, dostaneme trojnásobok čísla k zväčšený o deväť.

9.2 ROVNICE

Pripomeňme si jednoduchú úlohu, ktorú ste už riešili.

Príklad

V školskej záhrade vysadili 20 kríkov orgovánu a forzítií. Forzítií je 12. Koľko kríkov orgovánu je v školskej záhrade?

Riešenie

spolu . . . . . 20 kríkov
forzítií . . . . . 12 kríkov
orgovánov . . x kríkov

$$x + 12 = 20$$

Ľahko zistíme, že za x musíme dosadiť číslo 8, aby platila rovnosť výrazov $x + 12$ na ľavej strane a výrazu 20 na pravej strane. Nijaké iné číslo dosadené za x nesplní rovnosť.

V školskej záhrade vysadili 8 kríkov orgovánu.

! Zápis rovnosti dvoch výrazov, v ktorom máme neznáme číslo určiť tak, aby daná rovnosť platila, nazýva sa **rovnica**.
Číslo x v zápise rovnice je **neznáma**. Neznáme v rovnici zvyčajne označujeme písmenami z konca abecedy: x, y, z a podobne.

Aj rovnica má takisto ako rovnosť ľavú a pravú stranu. Označujeme ich $Ľ$, P.

Riešiť rovnicu znamená nájsť také číslo, aby sa po dosadení tohto čísla za neznámu rovnica zmenila na rovnosť.
Nájdené číslo sa nazýva **riešenie** alebo *koreň* danej rovnice.

O správnosti riešenia rovnice sa presvedčíme dosadením nájdeného čísla osobitne do výrazu na ľavej a pravej strane rovnice a ich porovnaním. Hovoríme, že sme urobili **skúšku** správnosti riešenia.

V našom príklade: $Ľ = x + 12 = 8 + 12 = 20$
$P = 20$
$Ľ = P$

CVIČENIA

1. Riešte rovnice a urobte skúšku:

a) $x + 2 = 7$ b) $7 \,.\, x = 49$
c) $5 - x = 3$ d) $x : 2 = 4$
e) $9 : x = 3$ f) $x - 7 = 20$

2. Riešte rovnice a urobte skúšku:

a) $y + 2{,}2 = 4{,}2$ b) $y - 0{,}5 = 3{,}5$
c) $1{,}5 \,.\, y = 3$ d) $y : 0{,}5 = 2$
e) $1 : y = 0{,}5$ f) $y \,.\, 1{,}3 = 2{,}6$

3. Riešte rovnice a urobte skúšku:

a) $z + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{3} - z = \frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2} \cdot z = \frac{1}{4}$

d) $z : \frac{2}{3} = 3$ e) $z + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{2} : z = \frac{1}{4}$

4. Určte dosadením za neznáme tie prvky daných množín, ktoré sú riešením danej rovnice:

a) $6x + 1 = 7 - 3x$ $\left\{2,\ 5,\ \frac{2}{3},\ 10\right\}$

b) $2y + 1 = y - 2$ $\left\{-5,\ -3,\ 0,\ \frac{1}{2}\right\}$

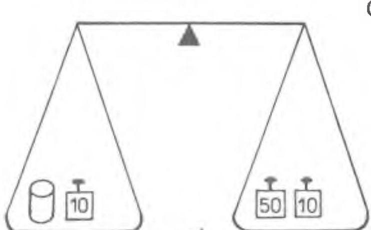
c) $4z + 3 = 4{,}5 + 3z$ $\{0{,}5;\ 1{,}5;\ 3{,}2\}$

9.3 EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY ROVNÍC

Keď položíme na ľavú aj pravú misku rovnoramenných váh závažie rovnakej hmotnosti, nastane rovnováha (obr. 9.1a).

Určte hmotnosť predmetu na laboratórnych váhach podľa obrázka. (Váhy sú v rovnováhe.)

Obr. 9.1a

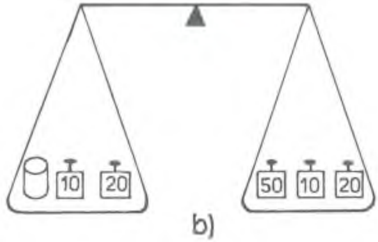


a)

$$
\begin{aligned}
x + 10\text{ g} &= 50\text{ g} + 10\text{ g} \\
\hline
x + 10 &= 50 + 10 \\
x &= 50 \\
\hline
x &= 50\text{ g}
\end{aligned}
$$

Hmotnosť predmetu je 50 g.

Keď pridáme na obidve misky rovnoramenných váh závažie rovnakej hmotnosti napr. 20 g, rovnováha sa neporuší (obr. 9.1b).



Obr. 9.1b

Napíšeme: $x + 10\text{ g} + 20\text{ g} = 50\text{ g} + 10\text{ g} + 20\text{ g}$

$$x + 10 + 20 = 50 + 10 + 20$$
$$x = 50$$

$$x = 50\text{ g}$$

Riešením rovnice $x + 10 + 20 = 50 + 10 + 20$ je opäť číslo 50.

Úloha

Odoberieme z ľavej misky váh závažie hmotnosti 10 g. Ako musíme upraviť závažia na pravej miske váh, aby opäť nastala rovnováha?
Zapamätajte si:

Riešenie rovnice sa nezmení, keď pripočítame (alebo odpočítame) k obidvom stranám (od obidvoch strán) rovnice ten istý výraz.

Tejto úprave rovnice hovoríme **ekvivalentná úprava rovnice**.

Poznámka

Ekvivalentné úpravy rovnice sú také úpravy, po ktorých získame rovnicu, ktorá má rovnakú množinu všetkých riešení (koreňov) ako pôvodná rovnica.

Príklad 1

Riešte rovnicu $2x + 2 = x - 1$. Pri riešení rovnice použite ekvivalentnú úpravu.

Riešenie

$$
\begin{array}{rcll}
2x + 2 &=& x - 1 & /-x \quad \text{(od obidvoch strán rovnice odpočítame } x\text{)} \\
2x + 2 - x &=& x - 1 - x & \\
x + 2 &=& -1 & /-2 \quad \text{(od obidvoch strán rovnice odpočítame} \\
 & & & \qquad\quad \text{číslo 2)} \\
x + 2 - 2 &=& -1 - 2 & \\
\underline{x} &\underline{=}& \underline{-3} &
\end{array}
$$

Riešením rovnice je číslo -3.

Pretože sme robili len **ekvivalentné** úpravy rovnice, musí byť číslo -3 riešením danej rovnice $2x + 2 = x - 1$.

Správnosť výpočtu si overíme **skúškou**:
Skúšku urobíme tak, že dosadíme číslo -3 za neznámu x do ľavej aj pravej strany rovnice osobitne a výsledky porovnáme.

$$
\begin{aligned}
Ľ &= 2x + 2 = 2 \cdot (-3) + 2 = -6 + 2 = -4 \\
P &= x - 1 = -3 - 1 = -4 \\
& \quad Ľ = P
\end{aligned}
$$

Číslo -3 je riešením (koreňom) rovnice $2x + 2 = x - 1$.

Poznámka

Úpravy rovnice robíme postupne tak, aby výrazy s neznámou boli na jednej strane rovnice a čísla na druhej strane rovnice.

Príklad 2

Riešte rovnicu $x + (x - 5) + (x + 3) = 7$.

Riešenie

$x + (x - 5) + (x + 3) = 7$ (Výraz na ľavej strane rovnice upravíme.)

$$\begin{aligned} x + x - 5 + x + 3 &= 7 \\ 3x - 2 &= 7 \quad /+2 \\ 3x - 2 + 2 &= 7 + 2 \\ 3x &= 9 \\ x &= 9 : 3 \\ \underline{x} &\underline{= 3} \end{aligned}$$

Urobíme skúšku:

$Ľ = x + (x - 5) + (x + 3) = 3 + (3 - 5) + (3 + 3) = 3 - 2 + 6 = 7$

$P = 7$

$\underline{Ľ = P}$

Všimnime si teraz niektoré ďalšie úpravy rovnice $3x = 9$.

a) Vynásobme obidve strany rovnice ľubovoľným číslom, napríklad číslom 5.

$5 \,.\, 3x = 5 \,.\, 9$

$15x = 45$

Táto rovnica má opäť riešenie číslo 3, pretože platí:

$$15 \,.\, 3 = 45$$

b) Deľme teraz obidve strany tejto rovnice číslom 1,5.

$$\begin{aligned} 3x &= 9 \quad /: 1{,}5 \\ 3x : 1{,}5 &= 9 : 1{,}5 \\ 2x &= 6 \end{aligned}$$

Riešením aj tejto rovnice je opäť číslo 3, lebo platí

$$2 \,.\, 3 = 6$$

Zapamätajte si:

! Riešenie rovnice sa nezmení, keď obidve strany rovnice násobíme (delíme) tým istým číslom rôznym od nuly.

Aj túto úpravu rovnice nazývame **ekvivalentná úprava** rovnice.

Poznámka

Vieme, že nulou nemožno deliť. Keby sme obidve strany rovnice násobili nulou, napríklad v našom prípade

$$3x = 9 \quad / . 0$$

dostali by sme

$$0 . 3x = 0 . 9$$

teda $\quad 0 . x = 0$

Ak vynásobíme ľavú aj pravú stranu ľubovoľnej rovnice nulou, dostaneme rovnicu $0 . x = 0$, ktorej riešením je ľubovoľné reálne číslo.

Príklad 3

Riešte rovnicu $\frac{x}{6} + 15 = 4$.

Riešenie

$$\frac{x}{6} + 15 = 4 \quad / . 6$$

$$6 . \left(\frac{x}{6} + 15\right) = 6 . 4$$

$$x + 90 = 24 \quad / - 90$$

$$x = 24 - 90$$

$$\underline{x = -66}$$

Skúška:

$$Ľ = \frac{x}{6} + 15 = \frac{-66}{6} + 15 = -11 + 15 = 4$$

$$P = 4$$

$$\underline{Ľ = P}$$

Príklad 4

Riešte rovnicu $5(x - 3) - (2x + 1) = \frac{4}{5} + \frac{3(2 - x)}{5}$.

Riešenie

$$5(x-3)-(2x+1)=\frac{4}{5}+\frac{3(2-x)}{5}$$

$$5x-15-2x-1=\frac{4+3(2-x)}{5}$$

$$3x-16=\frac{4+6-3x}{5}$$

$$3x-16=\frac{10-3x}{5} \quad / .5$$

$$15x-80=10-3x \quad /+3x$$

$$18x-80=10 \quad /+80$$

$$18x=90 \quad / :18$$

$$x=\frac{90}{18}$$

$$\underline{x=5}$$

Skúška:

$$Ľ=5(x-3)-(2x+1)=5(5-3)-(2.5+1)=$$
$$=5.2-(10+1)=10-11=-1$$

$$P=\frac{4}{5}+\frac{3(2-x)}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3(2-5)}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3(-3)}{5}=\frac{4}{5}-\frac{9}{5}=\frac{4-9}{5}=$$

$$=\frac{-5}{5}=-1$$

$$\underline{Ľ=P}$$

Všetky rovnice, ktoré sme doteraz riešili, mali túto vlastnosť: vo výrazoch na ľavej aj pravej strane bola iba jedna neznáma. Riešili sme teda **rovnice s jednou neznámou**.

Všimnite si, že vo všetkých príkladoch sme pri riešení daných rovníc postupovali tak, že sme ich upravovali na tvar $ax = b$, napríklad $3x = 69$ alebo $\frac{1}{2}x = 5$ a podobne.

Rovnice, ktoré možno upraviť na tvar $ax = b$ ($ax + (-b) = 0$), kde a, b sú reálne čísla, pre ktoré platí, že a je rôzne od nuly ($a \neq 0$), nazývajú sa **lineárne** rovnice s jednou neznámou.

Každá lineárna rovnica s jednou neznámou má vždy jedno riešenie $x = \frac{b}{a}$.

Zapamätajte si:

> Lineárne rovnice riešime pomocou **ekvivalentných úprav**. Najčastejšie používané ekvivalentné úpravy sú tieto:
> 1. pripočítanie (odpočítanie) rovnakého výrazu k obidvom stranám rovnice,
> 2. vynásobenie (delenie) obidvoch strán rovnice rovnakým číslom rôznym od nuly.

!

Príklad 5

Riešte rovnice:

a) $17(2x + 1) = 34x + 20$

b) $17(2x + 1) = 34x + 17$

Riešenie

a)
$$\begin{aligned} 17(2x+1) &= 34x + 20 \\ 34x + 17 &= 34x + 20 \\ 34x - 34x &= 20 - 17 \\ 0 \,.\, x &= 3 \end{aligned}$$

Rovnica $0 \,.\, x = 3$ nie je lineárna rovnica.
Rovnosť $0 = 3$ neplatí pre nijaké reálne číslo.
Rovnica $17(2x + 1) = 34x + 20$ **nemá nijaké riešenie.**

b)
$$\begin{aligned} 17(2x+1) &= 34x + 17 \\ 34x + 17 &= 34x + 17 \\ 0 \,.\, x &= 0 \end{aligned}$$

Rovnica $0 \,.\, x = 0$ nie je lineárna rovnica.

Ak do rovnice $0 \,.\, x = 0$ dosadíme za x ľubovoľné reálne číslo, dostaneme vždy rovnosť $0 = 0$.
Množinou všetkých riešení tejto rovnice je **množina všetkých reálnych čísel**.

CVIČENIA

1. Riešte rovnice:

a) $x - 5 = 2$ b) $2x - 1 = 5$ c) $\frac{x}{2} = 3$

d) $\frac{2x}{5} = 7$ e) $3x + 4 = 2x + 7$ f) $5x - 1 = 4x + 4$

2. Riešte rovnice:

a) $6(x + 12) = 5(21 + x)$ b) $3(x - 2) - 2x = 0$

c) $2(1 - 3x) + 5x = 8$ d) $3(1 - x) - (1 - 2x) = 9$

3. Riešte rovnice:

a) $3(y + 1) + 3{,}4 = 2(y + 1{,}7)$ b) $12{,}4 = 12 - (3 - y)$

c) $13(y - 0{,}1) = 6(2y + 0{,}1)$ d) $0{,}5(2 - 4y) + y = 3$

4. Riešte rovnice:

a) $7(x - 1) = 3(2x + 1)$

b) $2(3y - 4) + 4(y + 5) = 3(2y + 8)$

c) $3(7x - 4) + 2(2x - 2) - 4 = 0$

d) $8(3v - 2) = 15(4 - 2v) - 7(v + 2) + 30v$

5. Riešte rovnice:

a) $5x + 3(x - 1) = 6x + 11$

b) $3z - 5(2 - z) = 54$

c) $8(y - 7) - 3(2y + 9) = 15$

d) $0{,}6 - 0{,}5(t - 1) = t + 0{,}5$

e) $6 + (2 - 4r) + 5r = 3(1 - 3r)$

f) $0{,}4(2u - 1) - 3(-0{,}2u) - 1 = 0$

6. Riešte rovnice:

a) $3(2x-3)-4(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)$

b) $5(y+3)+2(y-3)=9(y-1)-2$

c) $-2(z-1)-\frac{1}{4}(1+z)=\frac{1}{2}-z$

7. Riešte rovnice:

a) $\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}-2z\right)=3$

b) $\frac{z}{5}-3=\frac{2z}{5}$

c) $\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}z=z-7$

d) $\frac{1}{5}(z-1)=1-\frac{3}{5}-\frac{z}{5}$

8. Riešte rovnice:

a) $\frac{x}{5}+\frac{4}{15}x-\frac{6}{45}x=\frac{2x+1}{9}$

b) $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x-\frac{x}{6}=\frac{x+1}{2}$

c) $x-\frac{x+2}{4}=6+\frac{x-5}{5}$

d) $3+\frac{x}{2}=3(x-9)$

9. Riešte rovnice:

a) $x+4=x+7$
b) $3(x+2)=3x+6$
c) $2x-4=2(x-2)$
d) $5x+15=5(x+2)$

10. Pre ktoré x sa hodnota výrazu $2x-7$ rovná 53?

11. Pre ktoré y sa rovnajú hodnoty výrazov $2y+1$ a $\frac{1}{2}y-2$?

12. Pre ktoré m je hodnota výrazu $2m-17$ väčšia o štyri ako hodnota výrazu $12-m$?

Historická poznámka

Riešenie úloh pomocou rovníc bolo známe už pred 4 000 rokmi v starom Babylone, proces utvárania algebrickej symboliky však trval veľmi dlho. Dokonca ešte aj Diofantos, známy grécky matematik, ktorý celý svoj život venoval iba riešeniu rovníc, zapisoval riešenie pomocou slov. Označovanie neznámych a známych veličín pomocou písmen zaviedol v 16. storočí francúzsky matematik François Viete (1540–1603). Zápis lineárnej rovnice v tvare $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ *zaviedol René Descartes.*

9.4 JEDNODUCHÉ SLOVNÉ ÚLOHY

Zapíšte každú z daných úloh rovnicou a určte neznáme číslo.

Úlohy

1. Ak pripočítame k neznámemu číslu číslo osem, dostaneme pätnásť.

2. Ak odpočítame od neznámeho čísla osem, dostaneme pätnásť.

3. Štvrtina neznámeho čísla sa rovná 24.

4. Desaťnásobok neznámeho čísla je 81.

5. Ak delíme číslo štyri neznámym číslom rôznym od nuly, dostaneme 8.

6. Trojnásobok neznámeho čísla zväčšený o tri sa rovná neznámemu číslu.

7. Ak odpočítame od čísla 20 neznáme číslo, dostaneme trojnásobok neznámeho čísla.

8. Päťnásobok neznámeho čísla zmenšený o 39 sa rovná dvojnásobku tohto neznámeho čísla.

9. Ak delíme neznáme číslo štrnástimi, dostaneme tri.

10. Ak pripočítame k neznámemu číslu toto číslo zväčšené o deväť, dostaneme 42.

9.5 SLOVNÉ ÚLOHY

Pri riešení slovných úloh pomocou rovníc dodržiavame zvyčajne tento postup:

(1) Pozorne si prečítame text slovnej úlohy, aby sme pochopili, čo je dané (podmienky úlohy) a čo máme vypočítať (otázka úlohy). Označíme neznámu.

(2) Všetky podmienky úlohy vyjadríme pomocou neznámej. Dostaneme výrazy a zapíšeme podmienku pre ich rovnosť. Získame rovnicu.

(3) Rovnicu vyriešime.

(4) Správnosť výsledku overíme skúškou tak, že zistíme, či riešenie vyhovuje podmienkam slovnej úlohy.

(5) Výsledok vyjadríme slovnou odpoveďou.

Príklad 1

V troch dielňach priemyselného podniku pracuje spolu 2 740 ľudí. V druhej dielni pracuje o 140 ľudí viac ako v prvej dielni a v tretej dielni pracuje 1,2-krát viac ľudí ako v druhej dielni. Koľko ľudí pracuje v každej dielni?

Riešenie

(1) Ako neznámu x označíme počet ľudí v 1. dielni.

(2) Všetky podmienky úlohy vyjadríme pomocou neznámej x.

1. dielňa . . . . x ľudí
2. dielňa . . . . $(x + 140)$ ľudí
3. dielňa . . . . $1{,}2(x + 140)$ ľudí

spolu $x + (x + 140) + 1{,}2(x + 140)$ ľudí
spolu 2 740 ľudí

Zostavíme rovnicu:
$x + (x + 140) + 1{,}2(x + 140) = 2\,740$

(3) Riešime rovnicu:

$$
\begin{aligned}
x + (x + 140) + 1{,}2(x + 140) &= 2\,740 \\
x + x + 140 + 1{,}2x + 168 &= 2\,740 \\
3{,}2x &= 2\,740 - 168 - 140 \\
3{,}2x &= 2\,740 - 308 \\
3{,}2x &= 2\,432 \\
x &= \frac{2\,432}{3{,}2} \\
x &= 760
\end{aligned}
$$

(4) *Skúška:* V prvej dielni je 760 ľudí, v druhej dielni je podľa podmienok úlohy $(760 + 140) = 900$ ľudí, v tretej dielni je podľa podmienok úlohy $1{,}2 \cdot 900$ ľudí, t. j. 1 080 ľudí. Vo všetkých troch dielňach je dohromady $(760 + 900 + 1\,080)$ ľudí, t. j. 2 740 ľudí. Nájdené riešenie zodpovedá podmienkam úlohy.

(5) *Odpoveď:* V prvej dielni podniku pracuje 760 ľudí, v druhej dielni 900 ľudí a v tretej dielni 1 080 ľudí.

Príklad 2

Podľa osevného plánu štátneho majetku sa má zasiať cukrová repa a obilie na rozlohe 840 ha. Výmera osiata cukrovou repou má byť trikrát väčšia ako výmera osiata obilím. Na akej rozlohe má byť zasiate obilie?

Riešenie

(1) Ako neznámu x označíme výmeru osiatu obilím.

(2) Všetky podmienky úlohy vyjadríme pomocou neznámej x.

výmera osiata obilím	x ha
výmera osiata cukrovou repou	$3x$ ha
celková výmera osiata obilím a cukrovou repou	$(x + 3x)$ ha
celková výmera	840 ha

Zostavíme rovnicu:

$x + 3x = 840$

(3) Riešime rovnicu:

$$x + 3x = 840$$
$$4x = 840$$
$$x = 210$$

(4) *Skúška:* Výmera osiata obilím je 210 ha. Výmera osiata cukrovou repou je trikrát väčšia, teda 630 ha. Spolu je osiatych 840 ha, čo zodpovedá textu úlohy.

(5) *Odpoveď:* Obilie je zasiate na rozlohe 210 ha.

Príklad 3

Na triedny večierok si žiaci zakúpili spolu 50 červených a žltých limonád. Červená limonáda stála 1,60 Kčs, žltá 1,40 Kčs. Koľko ktorých limonád kúpili, keď zaplatili spolu 74,40 Kčs?

Riešenie

(1) Ako neznámu x označíme počet červených limonád.

(2) Všetky podmienky úlohy vyjadríme pomocou neznámej:

červené limonády	x fliaš
žlté limonády	$(50 - x)$ fliaš
za červené limonády sa zaplatilo spolu . . .	$1{,}60 \, . \, x$ Kčs
za žlté limonády sa zaplatilo spolu	$1{,}40(50 - x)$ Kčs
celková cena	74,40 Kčs

Zostavíme rovnicu:
$1{,}60x + 1{,}40(50 - x) = 74{,}40$

---

(3) Riešime rovnicu:

$$\begin{aligned} 1{,}60x + 1{,}40(50 - x) &= 74{,}40 \\ 1{,}60x + 70 - 1{,}40x &= 74{,}40 \\ 0{,}20x &= 4{,}40 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

---

(4) *Skúška*: 22 červených limonád po 1,60 Kčs stálo 35,20 Kčs
28 žltých limonád po 1,40 Kčs stálo 39,20 Kčs
50 limonád obidvoch druhov stálo 74,40 Kčs
čo súhlasí s podmienkami úlohy.

---

(5) *Odpoveď*: Kúpili 22 červených limonád a 28 žltých limonád.

CVIČENIA

1. Tretina žiakov 7.A triedy bola v 1. polroku vyznamenaná. Na konci roka k nim pribudla ešte jedna žiačka, takže vyznamenaných žiakov bolo 13. Koľko žiakov bolo v 7.A triede?

2. Ak pripočítate k danému číslu jeho pätinu, dostanete 36. Ktoré je to číslo?

3. Ak násobíme myslené číslo troma, od súčinu odpočítame tri, rozdiel delíme siedmimi a k podielu pripočítame päť, dostaneme pôvodné číslo. Ktoré je to číslo?

4. Obvod trojuholníka je 87 cm. Strana a je o 15 cm kratšia ako strana b a strana c je o 12 cm dlhšia ako strana b. Určte dĺžky jednotlivých strán trojuholníka.

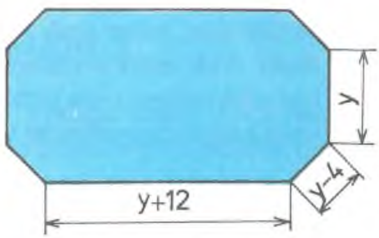
5. Na upletenie svetra, čiapky a šálu je celková spotreba 541 g vlny. Pritom na čiapku treba päťkrát menej vlny ako na sveter a súčasne o 5 g viac ako na šál. Koľko vlny sa spotrebovalo na každý z výrobkov?

6. V jednej záhrade bolo päťkrát viac kríkov ríbezlí ako v druhej. Keby sme presadili 22 kríkov ríbezlí z prvej záhrady do druhej, bol by v obidvoch záhradách rovnaký počet kríkov ríbezlí. Koľko kríkov ríbezlí je v každej záhrade?

7. V 7.A bolo o dvoch chlapcov viac ako v 7.B. Keď sa počet chlapcov 7.A zvýšil o sedem a v 7.B sa zväčšil o jednu tretinu pôvodného počtu, bol v obidvoch triedach rovnaký počet chlapcov. Koľko chlapcov bolo pôvodne v každej triede?

8. Rozdeľte 130 orechov na dve časti tak, aby menšia časť zväčšená štyrikrát sa rovnala väčšej časti zmenšenej trikrát.

9. Určte dĺžky strán záhona (obr. 9.2). Obvod záhona je 940 cm.



Obr. 9.2

10. Určte počet obyvateľov Európy a Ázie, keď viete, že celkový počet obyvateľov obidvoch týchto kontinentov je 3 miliardy 300 miliónov, pričom obyvateľov Ázie je 3,6-krát viac ako obyvateľov Európy.

11. Z kovovej tyče zhotovili tri súčiastky. Na prvú súčiastku spotrebovali polovinu tyče, na druhú $\frac{2}{3}$ zvyšku, tretia súčiastka mala hmotnosť 3 kg. Akú hmotnosť mala celá tyč?

12. Súčet trojnásobku neznámeho čísla zväčšeného o 3 a dvojnásobku tohto čísla zmenšeného o 1 sa rovná trojnásobku tohto čísla zväčšeného o 5. Ktoré je to číslo?

13. Žiaci vysadili na zlepšenie životného prostredia svojho mesta spolu 720 dubov, javorov a líp. Koľko stromčekov každého druhu vysadili, keď javorov bolo o 90 viac ako líp a dubov vysadili sedemkrát viac ako líp?

14. Koľko žiakov je v ôsmych ročníkoch školy, keď polovina z nich sa hlási na stredné odborné učilištia, tretina na stredné odborné školy a 26 na gymnázium?

15. Škola zakúpila osemdesiat kalkulačiek dvojakého druhu spolu za 44 000 Kčs. Jeden druh s hodnotami rôznych funkcií bol drahší, druhý druh mal iba základné počtové výkony. Koľko je ktorých, keď zaokrúhlená cena jednoduchšej kalkulačky je 400 Kčs a zložitejšej kalkulačky približne trikrát väčšia?

16. Pri reorganizácii závodu plne zautomatizovali druhú z troch dielní závodu. Polovinu pracovníkov tejto dielne preradili do prvej dielne, tretinu do tretej dielne a šesť z nich ostalo v druhej dielni. Pred reorganizáciou bolo v prvej dielni o dvadsať zamestnancov viac ako v druhej dielni a v tretej dielni bola polovina počtu zamestnancov druhej dielne. Koľko pracovníkov bolo v každej dielni pred reorganizáciou aj po reorganizácii?

17. Za opravu zariadenia si traja spolupracovníci zarobili spolu 4 720 Kčs. Rozdelili sa tak, že prvý dostal o 20 % viac ako druhý a tretí o 15 % viac ako druhý. Koľko dostal každý?

18. Určte veľkosti vnútorných uhlov v rovnoramennom trojuholníku, keď viete, že uhol ležiaci proti základni je o 15° väčší ako ktorýkoľvek z uhlov pri základni.

19. (Úloha z 18. storočia.) Peniaze, ktoré zostali po smrti kupca, rozdelili všetky medzi jeho synov takto: Najstarší syn dostal 100 zlatých a $\frac{1}{6}$ zvyšku. Druhý syn dostal 200 zlatých a $\frac{1}{6}$ zvyšku. Tretí syn dostal 300 zlatých a $\frac{1}{6}$ zvyšku atď. Posledný syn dostal celý zvyšok po vyplatení starších synov. Ukázalo sa, že všetci synovia dostali rovnako. Koľko dostal každý zo synov a koľko ich bolo?

20. Na náhrobku starého gréckeho matematika Diofanta, ktorý sa celý život zaoberal riešením rovníc, je veršovaný nápis, vlastne slovná úloha na výpočet jeho veku: Šestinu svojho veku bol Diofantos dieťaťom, kým mu narástli fúzy, ubehla ďalšia dvanástina jeho veku, o ďalšiu sedminu svojho veku sa oženil, o päť rokov po svadbe sa mu narodil syn, ktorý však zomrel v polovine veku, ktorého sa dožil jeho otec. Diofantos syna prežil o štyri roky. Koľko rokov sa dožil Diofantos?

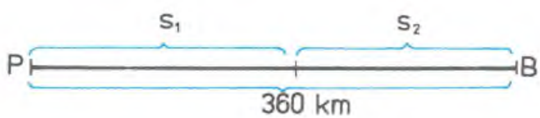
9.6 SLOVNÉ ÚLOHY O POHYBE

Vo fyzike ste sa naučili vzorec na výpočet dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu $s = v \,.\, t$, kde s je dráha, v je priemerná rýchlosť a t je čas. Tento vzorec budeme teraz používať na riešenie slovných úloh o pohybe.

Príklad 1

Vzdialenosť z Prahy do Bratislavy je približne 360 km. Z obidvoch miest vyšli súčasne proti sebe dve autá. Jedno išlo priemernou rýchlosťou 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a druhé priemernou rýchlosťou 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. O aký čas sa autá stretnú?

Riešenie



Obr. 9.3

(1) Ako neznámu t si označíme čas, o ktorý sa autá stretnú.

(2) Všetky podmienky úlohy napíšeme pomocou výrazov s neznámou t:
dráha, ktorú za čas t prejde prvé auto . . . . $s_1 = 80 \cdot t$
dráha, ktorú za čas t prejde druhé auto . . . . $s_2 = 70 \cdot t$
$s_1 + s_2 = 360$ km

(3) Riešime rovnicu:
$$80t + 70t = 360$$
$$150t = 360$$
$$t = 2{,}4$$

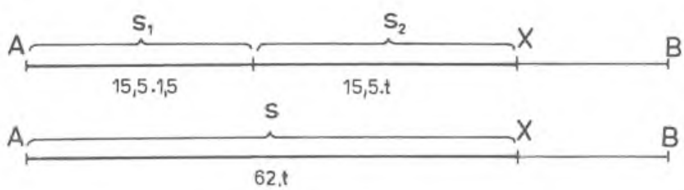
$$t = 2{,}4 \text{ h}$$

(4) *Skúška:* Auto z Prahy do Bratislavy prešlo dráhu $80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2{,}4 \text{ h} = 192$ km.
Auto z Bratislavy do Prahy prešlo dráhu $70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2{,}4 \text{ h} = 168$ km.
$s_1 + s_2 = 192 \text{ km} + 168 \text{ km} = 360$ km, čo zodpovedá zadaniu úlohy.

(5) *Odpoveď:* Autá sa stretli o 2,4 h, t. j. o 2 hodiny a 24 minút.

Príklad 2

Z miesta A vyšiel bicyklista do miesta B. O $1\frac{1}{2}$ hodiny po ňom vyšlo z miesta A do miesta B auto po tej istej dráhe. Priemerná rýchlosť bicyklistu je $15{,}5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, priemerná rýchlosť auta je $62 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O aký čas a ako ďaleko od miesta A dohoní auto bicyklistu?



Obr. 9.4

Riešenie

(1) Ako neznámu označíme čas t, o ktorý dohoní auto bicyklistu.

(2) Všetky podmienky úlohy vyjadríme pomocou neznámej t:

dráha, ktorú prešiel bicyklista pred štartom auta . . . . . . $s_1 = 15{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\frac{1}{2}\ \text{h} = 23{,}25\ \text{km}$

dráha, ktorú prešiel bicyklista za čas t, za ktorý išlo auto . . . . . . $s_2 = t \cdot 15{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

dráha, ktorú prešlo auto za čas t, kým dohoní bicyklistu . . . . . . $s = t \cdot 62\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

dráhy, ktoré prešiel bicyklista a auto, sa v čase stretnutia navzájom rovnajú . . . . $s_1 + s_2 = s$

$$23{,}25\ \frac{\text{km}}{\text{h}} + t \cdot 15{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = t \cdot 62\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(3) Riešime rovnicu:

$$\begin{aligned}
23{,}25 + 15{,}5t &= 62t \\
23{,}25 &= 62t - 15{,}5t \\
23{,}25 &= 46{,}5t \\
\frac{23{,}25}{46{,}5} &= t \\
0{,}5 &= t
\end{aligned}$$

(4) *Skúška:* Za $\frac{1}{2}$ h prejde auto dráhu 31 km. Bicyklista prejde dráhu 7,75 km. Pretože bicyklista už prešiel pred vyštartovaním auta dráhu 23,25 km, spolu prejde 23,25 + 7,75 km, teda takisto 31 km. Zistený čas zodpovedá podmienkam úlohy.

(5) *Odpoveď:* Auto dohoní bicyklistu o pol hodiny vo vzdialenosti 31 km od miesta A.

Poznámka

Pri riešení úloh o pohybe musíme dávať pozor na to, aby dráha, čas a rýchlosť boli dané v jednotkách, ktoré si navzájom prislúchajú (napríklad km, h, $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ alebo m, s, $\frac{\text{m}}{\text{s}}$).

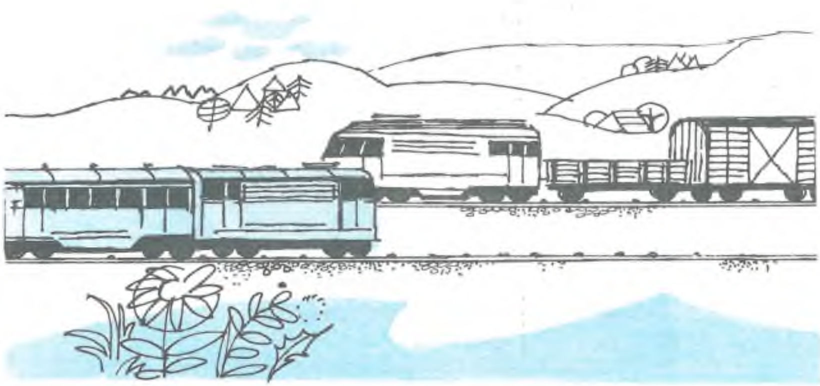
CVIČENIA

1. Motospojka dostala rozkaz odovzdať správu z miesta B veliteľovi tankovej kolóny, ktorá vyšla z miesta B pred dvoma hodinami priemernou rýchlosťou 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Určte, v akej vzdialenosti a o aký čas dostihne motospojka kolónu, ak išla priemernou rýchlosťou 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. Kedy a kde sa stretnú dva vlaky, ktoré vyšli súčasne proti sebe zo staníc A, B vzdialených 60 km, keď prvý vlak išiel rýchlosťou 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a druhý išiel rýchlosťou 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

3. Z Nitry do Brezna je 162 km. Z obidvoch miest vyjdú súčasne dve autá po tej istej trase. Auto z Nitry ide priemernou rýchlosťou 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, auto z Brezna ide priemernou rýchlosťou 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. O aký čas a v akej vzdialenosti od Nitry sa obidve autá stretnú?

4. Z dvoch miest, ktorých vzdialenosť je 192 km, vyjdú súčasne proti sebe osobný a nákladný vlak. Osobný vlak má priemernú rýchlosť o 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ väčšiu ako nákladný vlak. Akou rýchlosťou idú, keď sa stretnú o 2 hodiny?



5. Turista vyšiel priemernou rýchlosťou 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, o $\frac{1}{2}$ hodiny za ním vyšiel po tej istej trase bicyklista rýchlosťou 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. O koľko minút dohoní bicyklista turistu a koľko kilometrov pritom prejde?

6. Zo staníc *M* a *N*, ktorých vzdialenosť je 385 km, vyšli súčasne proti sebe dva vlaky. Priemerná rýchlosť vlaku idúceho z *M* do *N* bola o 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ väčšia ako rýchlosť vlaku idúceho z *N* do *M*. O 2 hodiny po výjazdoch obidvoch vlakov bola ich vzdialenosť 35 km. Vypočítajte rýchlosti obidvoch vlakov.

7. O šiestej hodine ráno vyšiel turista z chaty Martinovka v Krkonošiach priemernou rýchlosťou 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a išiel smerom na Sněžku. O hodinu za ním vyšiel jeho priateľ, ktorý išiel tou istou trasou, ale priemernou rýchlosťou 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kedy a kde ho dohonil? (Požičajte si turistickú mapu Krkonôš a určte približne dané miesto.)

8. Turista prešiel 16 km za $3\frac{1}{2}$ hodiny. Prvé dve hodiny išiel stále rovnako rýchlo. Potom spomalil a išiel už iba rýchlosťou o 1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ menšou ako predtým. Určte obidve rýchlosti.

9. O 8. h 30. min stredoeurópskeho času štartujú z Moskvy a z Prahy proti sebe lietadlá TU 154 a IL 62 rýchlosťami 900 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a 800 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. O koľkej hodine stredoeurópskeho času sa budú míňať a približne kedy doletí TU 154 do Prahy a IL 62 do Moskvy? Dĺžka letovej linky Praha—Moskva je 1 800 km.

10. Medzi Zemou a Mesiacom sa pohybuje raketa rýchlosťou 11,2 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Za ňou letí raketa, ktorá je v danej chvíli od nej vzdialená 50 000 km, a to rýchlosťou 14 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Dostihne druhá raketa prvú skôr, ako sa obidve dostanú na Mesiac? Vzdialenosť Zem—Mesiac je 300 000 km.

Historická poznámka

Slovné úlohy vedúce k riešeniu otázky stretnutia dvoch telies sa v matematike riešia už viac ako 1 000 rokov. Tieto úlohy vznikli z požiadaviek astronómie určiť okamih zdanlivého stretnutia dvoch kozmických telies pri pozorovaní ďalekohľadom, ak poznáme ich rýchlosti a vzdialenosť medzi nimi. V starej indickej učebnici matematiky sú uvedené vzorce $t = \frac{a}{v_1 + v_2}$ *a* $t = \frac{a}{v_1 - v_2}$, *kde a je vzdialenosť dvoch telies,* v_1 *a* v_2 *sú rýchlosti týchto telies a t je čas, kedy sa stretnú. Prvý vzorec platí pre pohyb telies proti sebe, druhý pre pohyb telies za sebou. Úlohy o stretnutí dvoch telies môžu byť komplikované, ak sa rýchlosti telies menia.*

9.7 VÝPOČET NEZNÁMEJ ZO VZORCA

Výpočet neznámej zo vzorca si ukážeme na vzorci na výpočet dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu $s = v \,.\, t$. Keď sme chceli vypočítať napríklad rýchlosť, postupovali sme doteraz vždy tak, že sme dosadili údaje pre čas a dráhu, a potom sme z rovnice s jednou neznámou vypočítali potrebný údaj.

Napríklad $s = 20$ km, $t = \frac{1}{2}$ h, $v = ?$
Vieme, že platí $s = v \,.\, t$.

Dosadíme: $20 \text{ km} = v \cdot \frac{1}{2} \text{ h}$

$$20 = v \cdot \frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$
$$40 = v$$

Hľadaná rýchlosť je $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Z daného vzorca môžeme však vyjadriť neznámu veličinu úplne všeobecne.

Ak vieme, že $s = v \cdot t$, a chceme vypočítať v, postupujeme takto:

$$s = v \cdot t \quad /: t$$
$$\frac{s}{t} = \frac{v \cdot t}{t}$$
$$\frac{s}{t} = v$$

Podobne z tohto vzorca môžeme vypočítať čas t.

$$s = v \cdot t \quad /: v$$
$$\frac{s}{v} = \frac{v \cdot t}{v}$$
$$\frac{s}{v} = t$$

Príklad 1

Vypočítajte polomer kruhu, ktorého obvod je 4 m.

Riešenie

Použijeme vzorec pre obvod kruhu $o = 2\pi r$.

$$o = 2\pi r \quad /: 2\pi$$
$$\frac{o}{2\pi} = \frac{2\pi r}{2\pi}$$
$$r = \frac{o}{2\pi}$$

Pre $o = 4$ m platí:

$$r = \frac{4\ \text{m}}{2\pi}$$

$$r = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \doteq 0{,}64$$

$$r \doteq 0{,}64\ \text{m}$$

Polomer kruhu, ktorého obvod je 4 m, rovná sa približne 64 cm.

Príklad 2

Zo vzorca pre objem kvádra $V = a\,.\,b\,.\,c$ vypočítajte b, keď viete, že platí $V = 25\ \text{cm}^3$, $a = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm.

Riešenie

$V = a\,.\,b\,.\,c$

Rovnicu vydelíme súčinom $a\,.\,c$.

$$V = abc \quad /:ac$$

$$\frac{V}{ac} = \frac{abc}{ac}$$

$$\frac{V}{ac} = b$$

Pre $V = 25\ \text{cm}^3$, $a = 2$ cm, $c = 2{,}5$ platí: $b = \dfrac{25\ \text{cm}^3}{2\ \text{cm}\,.\,2{,}5\ \text{cm}}$.

$$b = \frac{25}{2\,.\,2{,}5}$$

$$b = \frac{25}{5} = 5$$

$$b = 5\ \text{cm}$$

Dĺžka hrany b je 5 cm.

Príklad 3

Určte hmotnosť telesa, ktoré má hustotu 7,8 $\frac{g}{cm^3}$ a objem 5 cm^3. Hmotnosť vyjadrite najskôr všeobecne.

Riešenie

Z fyziky zo 6. ročníka poznáte vzorec na výpočet hustoty $\varrho = \frac{m}{V}$.

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad / \quad . V$$

$$\varrho \cdot V = \frac{m}{V} \cdot V$$

$$\varrho \cdot V = m$$

Dosadíme $\varrho = 7{,}8 \frac{g}{cm^3}$, $V = 5\ cm^3$

$$m = 7{,}8 \frac{g}{cm^3} \cdot 5\ cm^3$$

$$m = 7{,}8 \cdot 5$$
$$m = 39$$

$$m = 39\ g$$

Hmotnosť telesa je 39 g.

Pri riešení nasledujúcich cvičení vypočítajte z daného vzorca vždy najskôr neznámu veličinu, a až potom dosaďte dané údaje.

CVIČENIA

1. Za aký čas prejde auto vzdialenosť 18 km, ak ide priemernou rýchlosťou 15 $\frac{m}{s}$?

2. Vypočítajte polomer r kruhu, keď obvod kruhu je 100 m.

3. Vypočítajte dĺžku hrany kocky, keď povrch kocky je 150 cm^2.

4. Vypočítajte výšku v_a trojuholníka, ktorého obsah je 12,5 cm^2 a dĺžka strany a je 4 cm.

5. Určte výšku v_c pravouhlého trojuholníka, keď platí $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. (Použite Pytagorovu vetu.)

6. Zo vzorca pre obsah lichobežníka $S = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v$ vypočítajte z_2, keď platí $z_1 = 2$ cm, $v = 4$ cm, $S = 14$ cm^2.

■ 7. Pomocou Ohmovho zákona $U = R \cdot I$ (U je napätie, R odpor, I prúd) určte prúd. (Číselné údaje: $U = 220$ V, $R = 5$ Ω.)

8. Pre jednoduchý prevod ozubenými kolesami platí vzťah $\frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1}$, kde z_1 a z_2 sú počty zubov prevodových kolies a n_1, n_2 sú počty otáčok kolies. Určte n_2, keď platí $z_1 = 16$ zubov, $z_2 = 40$ zubov, $n_1 = 150$ otáčok za minútu.

■ 9. Zo vzorca pre obsah rovnostranného trojuholníka $S = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ vypočítajte dĺžku strany s, keď viete, že $S = 45$ cm^2.

■ 10. Zo vzorca na určenie času stretnutia dvoch telies pohybujúcich sa proti sebe, $t = \frac{a}{v_1 + v_2}$, kde a je vzdialenosť telies, v_1 a v_2 sú ich rýchlosti, vypočítajte v_2. (Riešte pre $a = 300$ km, $v_1 = 45$ $\frac{km}{h}$, $t = 1\frac{1}{4}$ h.)

SÚHRNNÉ CVIČENIA III

A

1. Riešte rovnice:

a) $15 - 2x = 3$

b) $30 - 5x = 4x + 12$

c) $x + \frac{x}{3} = 4$

d) $23x + 17 = 8x + 16$

e) $3 - x = \frac{x}{2}$

f) $108 = 9(x + 3)$

2. Riešte rovnice:

a) $\frac{r - 3}{2} + r = r$

b) $\frac{3b + 7}{3} + 1 = \frac{5 + 2b}{2}$

c) $\frac{5y - 4}{2} = \frac{16y + 1}{7}$

d) $\frac{1}{2}(z + 1) + \frac{1}{3}(z + 2) = 3 - \frac{1}{4}(z + 3)$

3. Chodec ide rýchlosťou $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O 1 h a 10 min vyšiel za ním bicyklista rýchlosťou $18\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O koľko minút dohoní bicyklista chodca?

4. Turisti prešli počas letného tábora prvý deň $\frac{1}{4}$ plánovanej cesty, druhý deň $\frac{1}{5}$ plánovanej cesty a tretí deň prešli 26 km. Dohromady prešli $\frac{3}{4}$ plánovanej cesty a 8 km. Určte dĺžku plánovanej cesty.

5. Tri debny rôznej veľkosti majú spolu hmotnosť 128 kg. Debna strednej veľkosti je 5-krát ťažšia ako najmenšia, najväčšia je 2-krát ťažšia ako stredná. Akú hmotnosť má každá z nich?

6. Obvod rovnoramenného trojuholníka je 16 cm, dĺžka ramena je o 2,9 cm väčšia ako dĺžka základne. Určte dĺžky strán tohto trojuholníka.

7. Zo vzorca (Pytagorovej vety) $c^2 = a^2 + b^2$ vyjadrite b.

8. Zo vzorca pre objem valca $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ vyjadrite r.

9. Zo vzorca

a) $s = v \cdot t$ vyjadrite t,

b) $\varrho = \frac{m}{V}$ vyjadrite V.

10. Pracovník výstupnej kontroly v závode meria okrem iného aj vnútorný priemer vyrábaných nádob valcového tvaru. Pri jednej nádobe zistil, že vnútorný priemer je o 0,5 mm menší ako požadovaný. Určte, aký bol požadovaný priemer, keď vnútorný obvod meranej nádoby je 34,5 cm.

11. Na kružnici $k(S;\ 3\ \text{cm})$ zvoľte bod T.

a) V bode T zostrojte dotyčnicu t kružnice k.
b) Určte ďalšiu dotyčnicu t' kružnice k, pre ktorú platí $t' \parallel t$.

12. Pre kružnice $k_1(S_1;\ r_1)$, $k_2(S_2;\ r_2)$ a ich stredy S_1, S_2 platí:

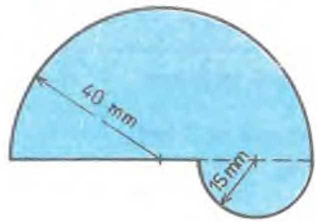
a) $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 8$ cm, $|S_1S_2| = 10$ cm,
b) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 9$ cm, $|S_1S_2| = 18$ cm,
c) $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 8$ cm, $|S_1S_2| = 2$ cm,
d) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 11$ cm, $|S_1S_2| = 17$ cm,
e) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm, $|S_1S_2| = 1$ cm.

Určte vzájomnú polohu obidvoch kružníc. Kružnice v každom príklade narysujte.

13. Vypočítajte dĺžku tetivy kružnice, ktorej vzdialenosť od stredu S kružnice $k(S;\ 3{,}5\ \text{cm})$ sa rovná polovine polomeru danej kružnice.

14. Vypočítajte hmotnosť mosadznej rúrky, ktorá má dĺžku 75 cm, hrúbku steny 13,5 mm a vonkajší priemer 26,5 cm. (Hustota mosadze je 8,5 $\frac{g}{cm^3}$.)

15. Platňa otočného kondenzátora má tvar ako na obr. SC3.1. Koľko štvorcového centimetra materiálu treba na výrobu jednej takejto platne?



Obr. SC3.1

16. Vypočítajte
a) obvod kruhu, keď jeho obsah je 64 cm^2,
b) obsah kruhu, keď jeho obvod je 20 cm.

17. Vypočítajte obsah štvorca vpísaného do kruhu s polomerom $r = 4$ cm. Koľko percent plochy kruhu zaberá štvorec?

18. O koľko centimetrov je väčšia dĺžka kružnice opísanej štvorcu so stranou dĺžky 10 cm ako dĺžka kružnice vpísanej tomuto štvorcu?

19. V sústave súradníc sú dané body $A[1; 1]$, $B[2; 2]$, $C[4; 2]$. Zostrojte trojuholník ABC a zostrojte kružnicu vpísanú a opísanú tomuto trojuholníku.

20. Určte vzájomnú polohu dvoch kružníc, pre ktoré platí:
a) $k_1(S_1[5, 2]; 3\text{ cm})$, $k_2(S_2[6, 2]; 2\text{ cm})$,
b) $k_1(S_1[0, 0]; 2\text{ cm})$, $k_2(S_2[0, 0]; 5\text{ cm})$,
c) $k_1(S_1[2, 2]; 2\text{ cm})$, $k_2(S_2[-2, -2]; 2\text{ cm})$,
d) $k_1(S_1[4, 3]; 2\text{ cm})$, $k_2(S_2[-4, 3]; 2\text{ cm})$.

B

1. Vypočítajte:

a) $\sqrt{4^2 + 6^2 + 7^2 - 1^2}$

b) $\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}6^2 - 0{,}7^2}$

2. Rozhodnite, ako sa zmení tretia veličina pri sledovaní rovnomerného pohybu:

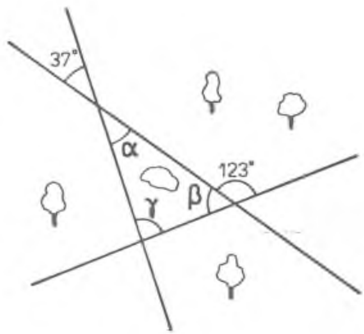
Dráha *s*	Rýchlosť *v*	Čas *t*
zväčší sa 2-krát	nezmení sa	?
zmenší sa 3-krát	?	nezmení sa
?	zväčší sa 2-krát	nezmení sa
?	nezmení sa	zmenší sa 2-krát
nezmení sa	?	zväčší sa 3-krát
nezmení sa	zmenší sa 3-krát	?

3. Mosadz je zliatina medi, zinku a olova. Hmotnosti týchto kovov v zliatine sú v pomere 40 : 26 : 1. Koľko gramov zinku je v 3 kg mosadze?

4. Glóbus má priemer 33 cm. V akej mierke je vyrobený, keď priemer Zeme meria 12 740 km?

5. Pri prieskume záujmu divákov o jeden z televíznych programov prejavilo nespokojnosť 76 z 200 náhodne vybratých osôb mladších ako 25 rokov a 150 z 500 náhodne vybratých osôb starších ako 50 rokov. Určte percento mladších a starších divákov, ktorí nemajú záujem o tento program.

6. Určte veľkosti vyznačených uhlov na križovatke ciest (obr. SC3.2).



Obr. SC3.2

7. Počet obyvateľov našej republiky je 15 901 000. Z nich 32 % žije v znečistenom prostredí. Koľko je to obyvateľov?

8. Mäsová konzerva stála pôvodne 8 Kčs. Po prehodnotení cien sa jej cena zvýšila o 115 %. Neskoršie bola zlacnená o 35 %. Koľko stojí teraz?

9. Vypočítajte obvod a obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$, keď je dané $|AB| = 80$ cm, $|CD| = 60$ cm, výška $v = 20$ cm.

10. Vypočítajte:

a) $\left(\frac{13}{2} - 6\right) : \frac{7}{9}$, b) $\left(\frac{9}{4} - \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$,

c) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$, d) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$, e) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}$,

f) $\frac{1}{\frac{2}{3}}$, g) $\frac{\frac{3}{2}}{1}$

11. Auto Škoda 125 L spotrebuje priemerne 7 litrov benzínu špeciál na 100 km. Koľko zaplatil za spotrebu benzínu vodič, ktorý išiel na rekreáciu do vzdialenosti 148 km od bydliska?

12. Zostrojte trojuholník ABC, keď je dané $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 45°$. Zostrojte kružnice k, l. Kružnica k je vpísaná trojuholníku ABC, kružnica l je opísaná trojuholníku ABC.

13. Zjednodušte výrazy:

a) $(2x - 3x) - (3x - 2x)$
b) $3a - (3a - (3a + 2))$
c) $2k - (3k + 2k - (5k - 4k))$

14. Akú hmotnosť má olovená kocka s hranou dĺžky 25 cm? (1 dm^3 olova má hmotnosť 11,3 kg.)

15. V jednej debne je 225 kusov súčiastok, v druhej je o 85 kusov menej. Koľko kusov súčiastok obsahuje tretia debna, keď všetky dohromady obsahujú 550 kusov?

16. Jedným tepom prepumpuje srdce človeka 80 g krvi. Koľko kilogramov krvi prepumpuje priemerne za 1 deň? Za minútu srdce vykoná asi 75 tepov.

17. Akú hmotnosť má betónový stĺpik na oplotenie záhrady, keď jeho základňa má tvar štvorca so stranou dĺžky 16 cm a jeho výška je 2 m? Hmotnosť 1 m^3 betónu je 2 200 kg.

18. O denných zárobkoch (v Kčs) náhodne vybratých piatich robotníkov z dvoch podobných pracovísk máme k dispozícii tieto údaje (za jednotlivé dni počas jedného týždňa):

Pracovisko A

Pondelok	68	175	133	183	119
Utorok	133	141	85	137	112
Streda	144	145	168	127	50
Štvrtok	106	75	199	101	82
Piatok	154	125	134	157	118

Pracovisko B

Pondelok	148	158	114	111	114
Utorok	127	140	132	118	133
Streda	174	108	128	115	115
Štvrtok	132	146	127	150	81
Piatok	125	125	111	104	132

Porovnajte priemerný zárobok všetkých pracovníkov na pracovisku A a B každý deň a celkový priemerný zárobok.

19. Pri zimnom dopredaji zlacneli niektoré druhy tovarov takto:

Druh tovaru	Pôvodná cena v Kčs	Zľava v %
dámsky kabát	1 600	22
pánske nohavice	350	37
detská bunda	400	34

Vypočítajte súčasné ceny týchto tovarov.

20. V jednej nádrži je 380 m^3 vody, v druhej 1 500 m^3. Do prvej nádrže pritečie každú hodinu 80 m^3 vody a z druhej nádrže každú hodinu vytečie 60 m^3 vody. O koľko hodín bude v obidvoch nádržiach rovnaké množstvo vody?

Konštrukčné úlohy 10

10.1 JEDNODUCHÉ KONŠTRUKCIE

Vyskúšajte si sami, ktoré jednoduché konštrukcie už poznáte.

?

Úlohy

1. Zostrojte stred S úsečky AB ($|AB| = 4{,}7$ cm).

2. Bodom X, ktorý neleží na priamke p, zostrojte rovnobežku q s priamkou p.

3. Bodom Y, ktorý neleží na priamke p, zostrojte kolmicu v na priamku p.

4. Zostrojte os uhla AVB ($|\sphericalangle AVB| = 60°$).

5. Zostrojte štvorec $ABCD$, keď platí $|AB| = 5$ cm.

6. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, keď platí $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 3$ cm.

7. Zostrojte trojuholník ABC, keď platí $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm.

8. Zostrojte kružnicu $k(S;\ 2\text{ cm})$.

9. Zostrojte kružnicu k, ktorej priemer AB má dĺžku 5,5 cm.

10. Zostrojte pomocou kružidla a pravítka uhly veľkostí 60°, 30°, 15°, 45°, 90°, 120°, 180°.

11. Zostrojte trojuholník ABC, keď platí $|AB| = 5$ cm, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$.

12. Zostrojte štvorec $ABCD$, keď je dané $|AC| = 7$ cm.

13. Zvoľte tri rôzne body A, B, C a zostrojte kružnicu k, ktorá prechádza týmito bodmi. Aká je vzájomná poloha bodov A, B, C, keď nemožno kružnicu k zostrojiť?

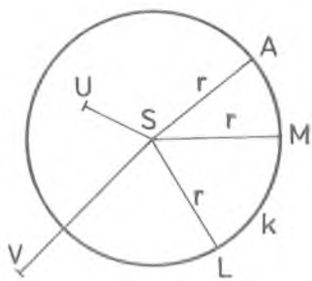
14. Trojuholník ABC ($|AB| = 4$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 60°$) doplňte na rovnobežník troma možnými spôsobmi. Aký obrazec vznikne zjednotením všetkých troch rovnobežníkov?

10.2 MNOŽINY VŠETKÝCH BODOV DANEJ VLASTNOSTI

V tejto kapitole sa budeme zaoberať množinami bodov roviny, ktoré majú všetky rovnakú charakteristickú vlastnosť.

Poznáme už kružnicu $k(S;\ r)$, ktorá je množinou **všetkých bodov roviny, z ktorých každý má od pevného bodu S vzdialenosť r** (obr. 10.1).

Obr. 10.1



Sú to napríklad body A, M, L a ďalšie, pre ktoré platí

$$|SA| = |SM| = |SL| = r$$

Body U, V a ďalšie nepatria do množiny všetkých bodov kružnice k, pretože

$$|SU| < r, \ |SV| > r$$

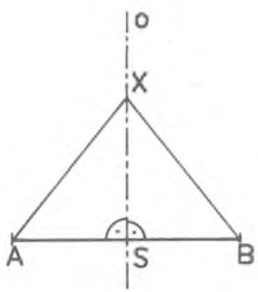
Príklad 1

Dokážte, že os úsečky je množina všetkých bodov roviny, pre ktoré platí, že každý z nich má od krajných bodov úsečky rovnakú vzdialenosť.

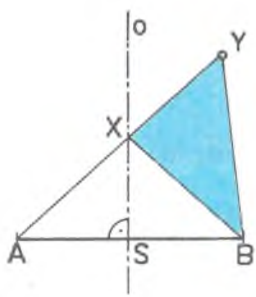
Riešenie

Na obr. 10.2 je narysovaná os o úsečky AB. Dokážeme, že **každý bod** osi o tejto úsečky má od krajných bodov A, B rovnakú vzdialenosť. Vieme, že os o prechádza stredom S úsečky AB, pre ktorý platí $|SA| = |SB|$. Ďalej vieme, že os o je kolmá na úsečku AB. Pre ľubovoľný bod X osi o, $X \neq S$, platí, že trojuholníky ASX a BSX sú zhodné podľa vety *sus* ($AS \cong BS$, $\sphericalangle ASX \cong \sphericalangle BSX$, $SX \cong SX$), teda platí $AX \cong BX$ a $|AX| = |BX|$.

Zhrnieme: Pre ľubovoľný bod X osi úsečky platí, že má rovnakú vzdialenosť od krajných bodov tejto úsečky.



Obr. 10.2



Obr. 10.3

Teraz vyšetríme body roviny, ktoré neležia na osi o (obr. 10.3). Nech bod Y je napríklad ľubovoľným bodom vnútra polroviny oB, ktorý neleží na priamke AB. Úsečka AY pretne os o v bode X, pre ktorý platí $AX \cong BX$.

V trojuholníku BYX platí nerovnosť

$$|BX| + |XY| > |BY|$$

Dosadíme do tejto nerovnosti za dĺžku úsečky BX dĺžku úsečky AX, ktorá je s ňou zhodná, a dostaneme

$$|AX| + |XY| > |BY|$$

teda

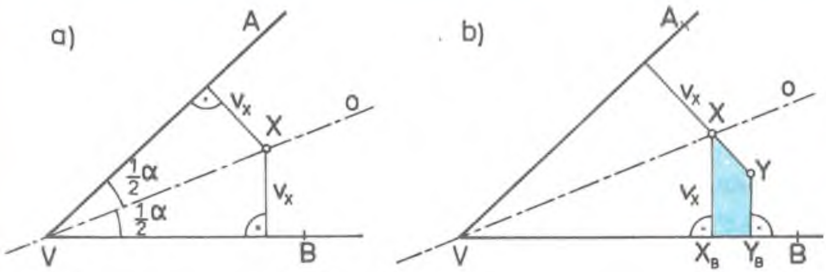
$$|AY| > |BY|$$

To znamená, že bod Y nepatrí do množiny všetkých bodov rovnako vzdialených od bodov A, B.

Pre body Z vnútra polroviny oA, ktoré neležia na priamke AB, možno podobným spôsobom dokázať, že platí $|AZ| < |BZ|$. Pretože úsečka AB má jediný stred S, dostávame:

> Množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od krajných bodov úsečky, je jej os.

!



Obr. 10.4a, b

Úloha 1

?

Os uhla AVB je priamka, ktorá delí tento uhol na dva zhodné uhly. Pomocou obrázkov 10.4a, b overte, že os uhla je množina všetkých bodov, z ktorých každý má rovnakú vzdialenosť od polpriamok VA a VB.

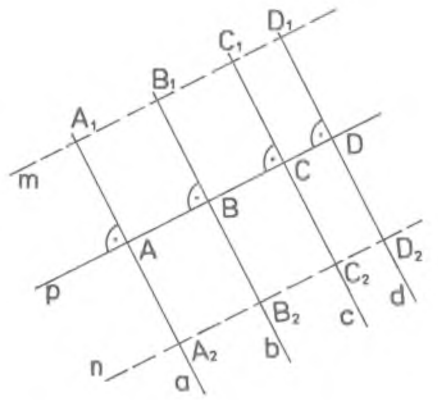
Príklad 2

Určte množinu všetkých bodov roviny, z ktorých každý má od priamky p vzdialenosť $d = 3$ cm.

Riešenie

Na danú priamku p (obr. 10.5) zostrojíme kolmice, napríklad a, b, c, d, ... Ich päty postupne označíme A, B, C, D, ... Potom na priamke a zostrojíme body A_1, A_2 (v opačných polrovinách vyťatých priamkou p) tak, aby platilo

$$|AA_1| = |AA_2| = 3 \text{ cm}$$



Obr. 10.5

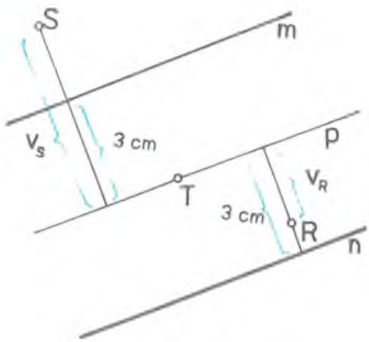
Podobne zostrojíme na priamkach b, c, d, ... body B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2;...

Na základe týchto konštrukcií môžeme vysloviť **domnienku**, že hľadanú množinu tvoria všetky body priamok m, n (obr. 10.6) a nijaké iné. Túto domnienku **dokážeme**.

Dôkaz

a) Pri konštrukcii bodov A_1, B_1, C_1, D_1, ... priamky m dostávame navzájom rovnobežné a zhodné úsečky, napríklad $AA_1 \cong BB_1$. Tak vznikajú obdĺžniky, napríklad ABB_1A_1, pre ktoré platí, že priamka A_1B_1 (t. j. priamka m) je rovnobežná s priamkou AB (t. j. s danou priamkou p). Preto si môžeme predstaviť, že priamka m vznikla ako obraz priamky p v posunutí, v ktorom obrazom bodu A je bod A_1. Podobne priamka n je obrazom priamky p v posunutí, v ktorom obrazom bodu A je bod A_2.

b) Musíme ešte vyšetriť vzdialenosť bodov, ktoré neležia na priamke *m* alebo *n*, od priamky *p*. Také body *R, S, T* sú vyznačené na obr. 10.6. Každý z týchto bodov má od priamky *p* zrejme inú vzdialenosť, ako sú 3 cm. (Bod *T* má dokonca túto vzdialenosť nulovú.) Teda ani jeden z bodov *R, S, T* nespĺňa podmienku danú úlohou.



Obr. 10.6

Množinou všetkých bodov roviny, ktoré majú od danej priamky *p* vzdialenosť *d* cm, sú priamky *m, n,* pre ktoré platí $m \parallel p$ a $n \parallel p$ a ktorých vzdialenosť od priamky *p* je *d* cm.

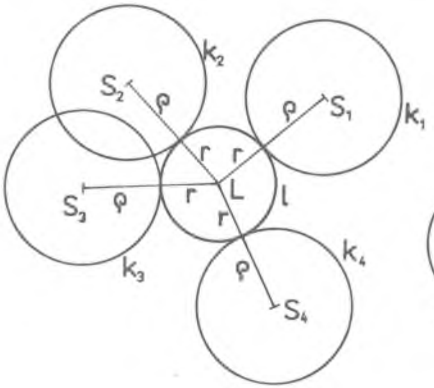
!

Príklad 3

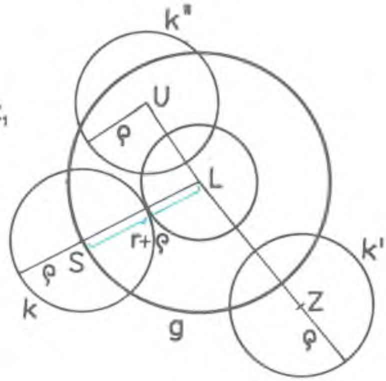
Narysujte kružnicu *l* so stredom *L* a polomerom $r = 1{,}5$ cm. Vyšetrite množinu stredov všetkých kružníc, z ktorých každá má polomer $\varrho = 2$ cm a dotýka sa zvonka danej kružnice.

Riešenie

Najskôr zostrojíme kružnicu $l(L;\ 1{,}5\ \text{cm})$ a niekoľko kružníc $k(S;\ \varrho)$, ktoré majú polomer $\varrho = 2$ cm a dotýkajú sa zvonka kružnice *l*. Pri konštrukcii týchto kružníc využijeme to, že pre dve kružnice, ktoré majú vonkajší dotyk, musí platiť, že vzdialenosť ich stredov sa rovná súčtu ich polomerov (obr. 10.7).



Obr. 10.7



Obr. 10.8

$$|LS| = r + \varrho = 1{,}5\text{ cm} + 2\text{ cm} = 3{,}5\text{ cm}$$

Vyslovíme **domnienku**, že stredy S_1, S_2, ... ležia na kružnici so stredom L a polomerom $r + \varrho = 3{,}5$ cm (obr. 10.8). Túto kružnicu označíme $g(L;\, 3{,}5\text{ cm})$. Správnosť tejto domnienky musíme dokázať.

Dôkaz

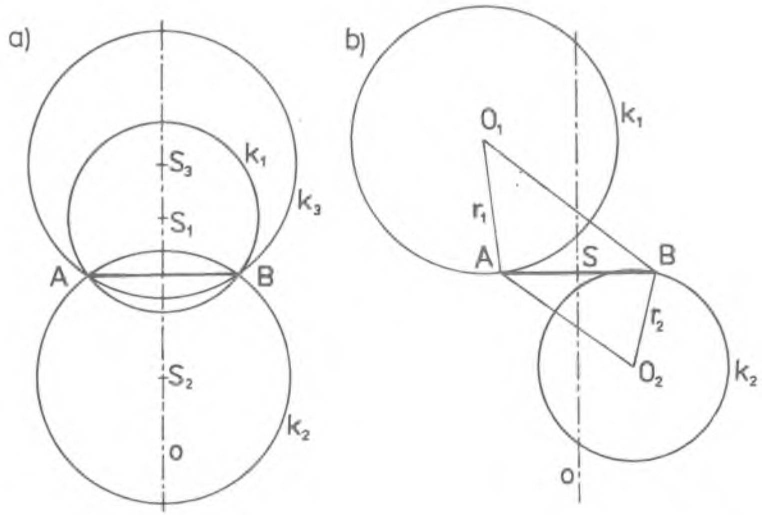
Z našej úvahy vyplýva, že každý bod S kružnice $g(L;\, r + \varrho = 3{,}5\text{ cm})$ je stredom kružnice $k(S;\, \varrho)$, ktorá má s kružnicou $l(L;\, r)$ vonkajší dotyk; pre vzdialenosť ich stredov totiž platí $|LS| = r + \varrho$. Ďalej vyšetríme body, ktoré neležia na kružnici g. Každý z týchto bodov má od bodu L inú vzdialenosť ako $r + \varrho$. Preto ani jeden z týchto bodov nemôže byť stredom kružnice s polomerom ϱ, ktorá sa zvonka dotýka kružnice l. Napríklad pre bod Z (obr. 10.8) platí $|LZ| > r + \varrho$, pre bod U platí $|LU| < r + \varrho$. Keby sme okolo bodu Z alebo U opísali kružnicu s polomerom ϱ, nebola by splnená podmienka pre vonkajší dotyk dvoch kružníc s polomermi r a ϱ.

!

Množinou všetkých stredov kružníc, ktoré sa zvonka dotýkajú kružnice $l(L;\, r)$ a majú polomer ϱ, je kružnica $g(L;\, r + \varrho)$.

Úloha 2

Pomocou obr. 10.9a, b overte, že os úsečky AB je množina stredov všetkých kružníc prechádzajúcich krajnými bodmi úsečky AB.



Obr. 10.9a, b

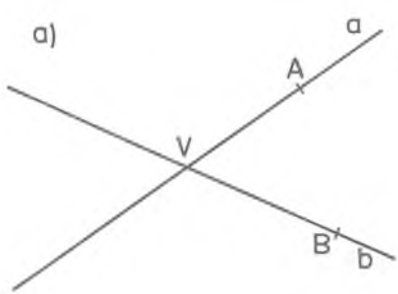
Príklad 4

Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch rôznobežiek *a, b*.

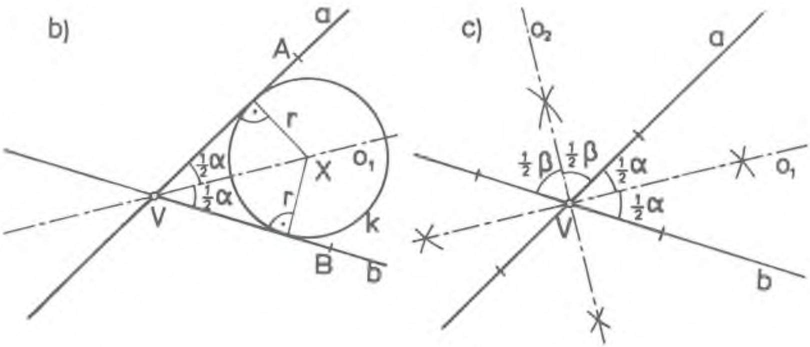
Obr. 10.10a

Riešenie

Rôznobežky *a, b* (obr. 10.10a) rozdelia rovinu na štyri uhly. Najskôr vyšetríme jeden z týchto uhlov, napríklad uhol AVB (obr. 10.10b). Vieme, že os uhla AVB je množina všetkých bodov, z ktorých každý má rovna-



kú vzdialenosť od obidvoch ramien. Preto každý bod X tejto polpriamky (okrem jej začiatku V) môže byť stredom kružnice $k(S; r)$, ktorá sa dotýka obidvoch ramien uhla AVB.



Obr. 10.10b, c

Podobne budeme uvažovať aj o ostatných uhloch. Tak dostaneme štyri polpriamky so začiatkom V. (Bod V, jediný z bodov týchto polpriamok, nemôže byť stredom nijakej kružnice dotýkajúcej sa ramien týchto uhlov.)

Pretože platí (obr. 10.10c)

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}=180^\circ$$

tak
$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$$

Polpriamky o_1, o_2 zvierajú pravý uhol.

! Množinou stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa rôznobežiek a, b sú navzájom kolmé osi utvorených uhlov okrem ich spoločného vrcholu V.

Tabuľka najdôležitejších množín bodov v rovine

Geometrický útvar	Množina bodov
kružnica $k(S; r)$	množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od bodu S vzdialenosť r
os úsečky MN	množina všetkých bodov roviny, z ktorých každý má rovnakú vzdialenosť od bodov M, N
dvojica rovnobežiek a_1, a_2 s danou priamkou p vo vzdialenosti v	množina všetkých bodov roviny, z ktorých každý má vzdialenosť v od priamky p

CVIČENIA

1. Zvoľte si dva rôzne body M, N. Vyšetrite množinu všetkých bodov X, pre ktoré platí
a) $|MX| \geqq |NX|$
b) $|MX| > |NX|$

2. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré majú daný polomer $r = 1{,}5$ cm a dotýkajú sa danej priamky p.

3. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré majú polomer $r =$ $= 3$ cm a prechádzajú daným bodom P.

4. Narysujte dve rovnobežky, ktorých vzdialenosť je 4 cm. Vyšetrite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú obidvoch rovnobežiek.

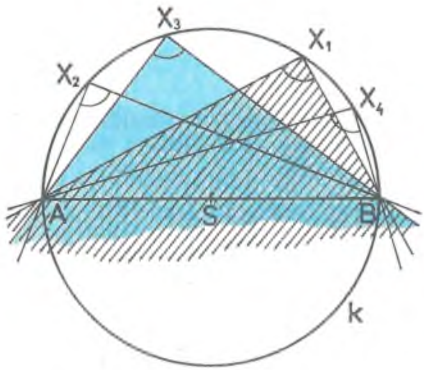
5. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, keď je dané $a = 4{,}8$ cm, $b = 4{,}2$ cm, $\alpha = 60°$. Určte množinu stredov všetkých rovnobežníkov, ktoré majú s rovnobežníkom $ABCD$ spoločnú stranu AB a majú rovnaký obsah ako rovnobežník $ABCD$.

6. V trojuholníku ABC je daná dĺžka strany AB ($|AB| = 5$ cm). Zostrojte množinu všetkých možných vrcholov C, keď je dané:
a) výška $v_c = 3$ cm,
b) uhol $\alpha = 60^\circ$.

10.3 TALESOVA KRUŽNICA

Úloha 1

Narysujte kružnicu k a zostrojte jej priemer AB. Na kružnici k zvoľte niekoľko bodov X_1, X_2, X_3, ... rôznych od bodov A, B. Zostrojte uhly AX_1B, AX_2B, AX_3B, ... a odmerajte ich veľkosť (obr. 10.11).



Obr. 10.11

Ak ste presne merali, dostali ste vždy výsledok 90°. Dokážeme, že pre ľubovoľnú kružnicu k s priemerom AB bude vždy platiť, že veľkosť ľubovoľného uhla AXB, kde X je bod kružnice k, sa rovná 90°.

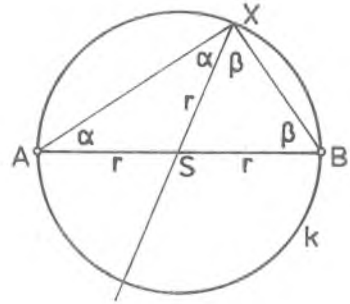
Dôkaz

Narysujeme kružnicu k s priemerom AB (obr. 10.12). Na nej zvolíme bod X rôzny od bodov A, B. Polpriamka XS rozdelí trojuholník ABX na dva rovnoramenné trojuholníky AXS a BXS s ramenami dĺžky r. Trojuholník AXS má pri základni AX zhodné uhly veľkosti α. Trojuholník BXS má pri základni BX zhodné uhly veľkosti β. V trojuholníku ABX potom platí

$$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180^\circ$$

takže
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

čiže uhol AXB je pravý.



Obr. 10.12

Každý bod X kružnice k (rôzny od bodov A, B) je vrcholom pravého uhla AXB.

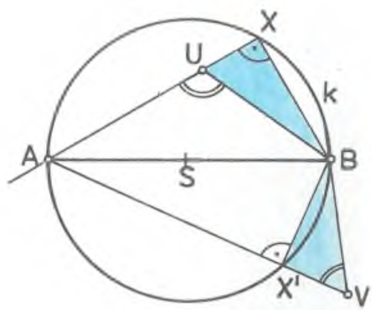
Vyslovíme tvrdenie:

Kružnica k s priemerom AB (okrem bodov A, B) je množinou všetkých bodov X, z ktorých každý je vrcholom pravého uhla AXB.

Vieme, že každý bod X kružnice k (rôzny od bodov A, B) je vrcholom pravého uhla AXB.

Musíme ešte vyšetriť všetky body, ktoré neležia na kružnici k. Dokážeme, že ani jeden z nich nie je vrcholom pravého uhla s ramenami, z ktorých jedno prechádza bodom A a druhé bodom B.

Na obr. 10.13 je narysovaná kružnica k s priemerom AB. Vidieť, že ani jeden z bodov priamky AB nemôže byť vrcholom pravého uhla s ramenami prechádzajúcimi bodmi A, B.



Obr. 10.13

Kružnica k rozdeľuje rovinu na dve oblasti. Najskôr zvolíme bod U vo vnútornej oblasti utvorenej kružnicou k. Potom napríklad polpriamka AU pretne kružnicu k v bode X, pre ktorý platí

$$|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$$

Preto je uhol XUB farebného pravouhlého trojuholníka (obr. 10.13) ostrý a s ním susedný uhol AUB tupý.

Pre ľubovoľný bod V vonkajšej oblasti utvorenej kružnicou k urobíme podobnú konštrukciu. Zistíme, že uhol $X'VB$ v pravouhlom trojuholníku $BX'V$ je ostrý.

Body U, V nepatria do vyšetrovanej množiny.

!

Teda platí: Vrcholmi pravých uhlov AXB sú body X kružnice k s priemerom AB (s výnimkou bodov A, B) a nijaké iné.

Toto tvrdenie sa nazýva **Talesova veta**.

Množinou vrcholov pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou AB je kružnica k s priemerom AB okrem bodov A, B. Kružnicu k nazývame **Talesova kružnica**.

Historická poznámka

Tales z Milétu bol slávny grécky astronóm, filozof a geometer (624–547 pred n. l.). Predpovedal zatmenie Slnka, v geometrii objavil niekoľko základných viet. Pomocou svojich geometrických objavov určil napríklad výšku pyramídy podľa dĺžky jej tieňa alebo vzdialenosť lode od pobrežia.

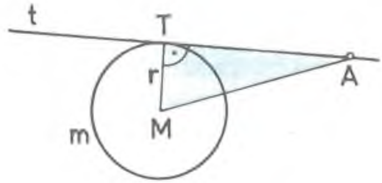
Príklad 1

Narysujte kružnicu $m(M;$ 18 mm) a vyznačte bod A, pre ktorý platí $|MA| = 5$ cm.

a) Zostrojte dotyčnice z bodu A ku kružnici m.
b) Vypočítajte dĺžku úsečky určenej bodom A a dotykovým bodom dotyčnice ku kružnici.

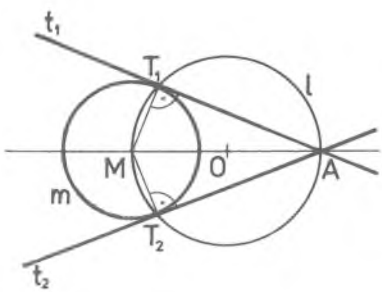
Riešenie

1. *Rozbor*
Na obr. 10.14 je znázornená kružnica m a jej dotyčnica t prechádzajúca bodom A. Dotykový bod označíme T. Z vlastností dotyčnice vyplýva, že $MT \perp t$. Bod T je teda vrcholom pravého uhla pravouhlého trojuholníka s preponou MA. Preto bod T leží na Talesovej kružnici s priemerom MA.



Obr. 10.14

2. *Konštrukcia*



Obr. 10.15

Postup konštrukcie (obr. 10.15):
1. m; $m(M;$ 1,8 cm)
2. A; $|MA| = 5$ cm
3. l; $l(O; \frac{1}{2}|MA|)$,
   O je stred MA
4. T_1, T_2; $\{T_1, T_2\} = m \cap l$
5. t_1; $t_1 = \leftrightarrow AT_1$
6. t_2; $t_2 = \leftrightarrow AT_2$

3. *Skúška*
Dokážeme, že priamky t_1, t_2 sú hľadané dotyčnice.

Z vlastností bodov Talesovej kružnice l vyplýva, že napríklad bod T_1 je vrcholom pravého uhla MT_1A. Preto je priamka t_1 kolmá na polomer MT_1 kružnice m, a teda je jej dotyčnicou. Podobný dôkaz platí aj pre bod T_2 a priamku t_2.

Poznámka

Všimnite si, že priamky t_1 a t_2 si zodpovedajú v súmernosti podľa priamky MA.

Dĺžku úsečky AT_1 vypočítame z pravouhlého trojuholníka MT_1A podľa Pytagorovej vety:

$|AT_1|^2 = |MA|^2 - |MT_1|^2$

$$|AT_1|^2 = 5^2 - 1{,}8^2$$
$$|AT_1| = \sqrt{(25 - 3{,}24)}$$
$$|AT_1| = \sqrt{21{,}76}$$
$$|AT_1| \doteq 4{,}66$$

$|AT_1| \doteq 4{,}7$ cm

Dĺžka úsečky AT_1 je približne 4,7 cm.

? ■

Úloha 2

V príklade 1 sme zostrojovali dotyčnice kružnice z bodu, ktorý ležal vo vonkajšej oblasti kružnice. Sú však možné ešte dve ďalšie polohy bodu vzhľadom na kružnicu. Zistite sami, či možno aj v týchto prípadoch zostrojiť dotyčnice ku kružnici. Ak možno, tak udajte ich počet a čo najjednoduchšiu konštrukciu.

CVIČENIA

1. Body P, Q majú vzdialenosť 5,3 cm. Určte množinu vrcholov R pravouhlých trojuholníkov PQR s preponou PQ.

2. Daná je úsečka AB ($|AB| = 7$ cm). Vyšetrite množinu stredov všetkých kosoštvorcov so stranou AB.

3. Narysujte kružnicu $k(S;\ 2\text{ cm})$ a vyznačte bod K tak, aby platilo $|SK| = 5{,}5$ cm.
   a) Zostrojte bodom K dotyčnice ku kružnici k.
   b) Vypočítajte vzdialenosť bodu K od dotykových bodov týchto dotyčníc.

4. Narysujte kružnicu $k(S;\ 2{,}5\text{ cm})$. Zvoľte bod Q tak,
   a) aby ním prechádzala jediná dotyčnica ku kružnici k,
   b) aby ním prechádzali dve dotyčnice ku kružnici k.
   c) Akú vzdialenosť od stredu S majú body, ktorými neprechádza nijaká dotyčnica?

10.4 KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY

Príklad 1

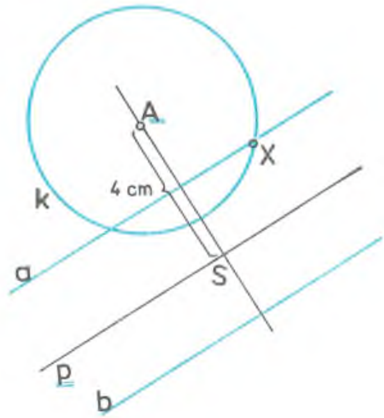
Narysujte priamku p a vyznačte bod A tak, aby jeho vzdialenosť od priamky p sa rovnala 4 cm.

Zostrojte všetky body X, pre ktoré platí, že ich vzdialenosť od daného bodu A je 3 cm a od danej priamky p je 2 cm.

Riešenie

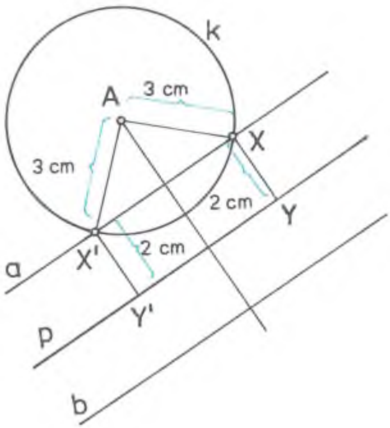
1. *Rozbor*
Bod X musí mať od zvoleného bodu A vzdialenosť 3 cm. Všetky body X, ktoré majú túto vlastnosť, ležia na kružnici $k(A;\ 3\text{ cm})$ (obr. 10.16).

Súčasne musí platiť pre bod X, že jeho vzdialenosť od priamky p sa rovná 2 cm. Všetky takéto body X ležia na priamkach a, b rovnobežných s priamkou p vo vzdialenosti 2 cm.



Obr. 10.16

2. *Konštrukcia*



Postup konštrukcie (obr. 10.17):

1. p, A (vzdialenosť bodu A od priamky p je 4 cm)
2. k; $k(A; 3\text{ cm})$
3. a, b; $a \| b \| p$ (vzdialenosť a, p a b, p je 2 cm)
4. X; $X \in k \cap a$ alebo $X' \in k \cap a$

Obr. 10.17

3. *Skúška*

Body X a X' sú priesečníkmi priamky a s kružnicou k.

a) Pretože body X aj X' ležia na kružnici k, platí $|AX| = |AX'| = 3$ cm.

b) Pretože body X aj X' ležia na priamke a, majú od priamky p vzdialenosť 2 cm.

Priamka b nepretína kružnicu k.

Úloha má teda dve riešenia: body X a X'.

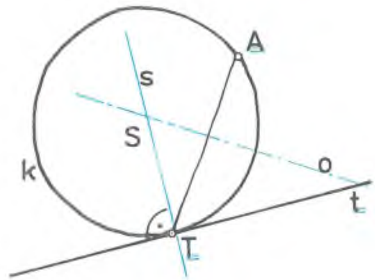
Príklad 2

Daná je priamka t a na nej bod T. Mimo priamky t je daný bod A. Zostrojte kružnicu k, ktorá sa dotýka priamky t v bode T a prechádza bodom A.

Riešenie

1. *Rozbor*
Svoju predstavu riešenia, t. j. kružnicu spĺňajúcu dané podmienky, načrtneme na pomocnom obrázku (obr. 10.18), ktorý doplníme vyznačením daných údajov (priamka t, bod T a bod A) a stredu S hľadanej kružnice k. Potom znázorníme podmienky pre neznámy bod S. Podmienky pre bod S sú tieto:

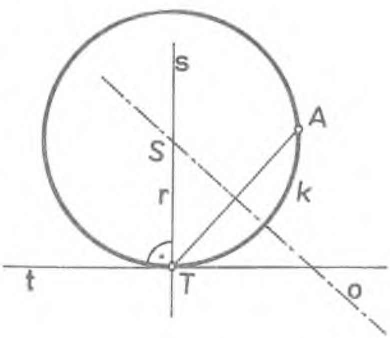
a) Hľadaná kružnica sa dotýka priamky t v bode T. Množinou stredov všetkých takých kružníc je priamka $s \perp t$ prechádzajúca bodom T (okrem bodu T).
b) Úsečka AT je tetivou hľadanej kružnice k. Preto množinou stredov všetkých kružníc prechádzajúcich bodmi A, T je os o úsečky AT.



Obr. 10.18

Obidve uvedené priamky s a o sú na obr. 10.18 farebne vyznačené. Tieto podmienky sú zrejme postačujúce.

2. *Konštrukcia*



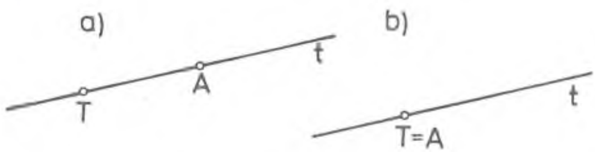
Postup konštrukcie (obr. 10.19):
1. t, T, A (t. j. zadanie úlohy)
2. s; $s \perp t$, $T \in s$
3. o; o je os úsečky AT
4. S; $S \in s \cap o$
5. k; $k(S; r = |SA|)$

Obr. 10.19

3. *Skúška*
Kružnica k zrejme prechádza bodom A (pozri krok 5 konštrukcie). Z vlastností osi o úsečky AT (pozri krok 3 konštrukcie) vyplýva $|SA| = |ST|$, a preto kružnica k prechádza aj bodom T. Pretože $S \in s$, $s \perp t$ (pozri krok 2), priamka t je dotyčnicou kružnice k. Tým sme overili všetky podmienky úlohy.

Poznámka k textu príkladu 2

Vynechanie podmienky „mimo priamky t" (leží ďalší bod A) by znamenalo uznať za možné aj takéto prípady úloh:
a) $A \in t$, $A \neq T$ (obr. 10.20a),
b) $A = T$ (obr. 10.20b).



Obr. 10.20a, b

Presvedčte sa, že v prípade a) neexistuje **nijaké** riešenie úlohy a v prípade b) je takých kružníc **ľubovoľne** (nekonečne) **veľa**.

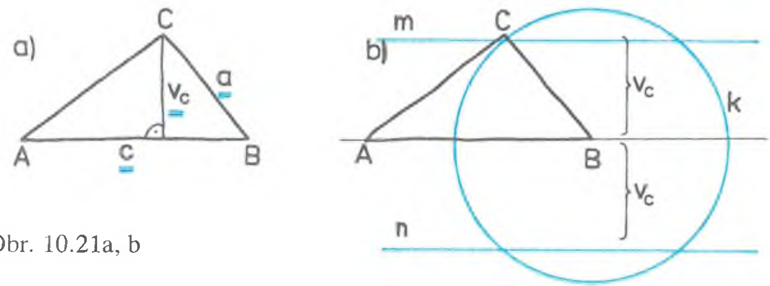
Príklad 3

Zostrojte trojuholník ABC, keď je dané $|AB| = c = 6$ cm, $|BC| = a = 4$ cm a $v_c = 3$ cm.

Riešenie

1. *Rozbor*
Na obr. 10.21a je znázornený trojuholník ABC, o ktorom predpokladáme, že je riešením úlohy, to znamená, že spĺňa požadované vlastnosti.
Dané údaje sú na obrázku podčiarknuté.
Pretože text úlohy nepredpisuje umiestenie ani jedného údaja, niektoré z nich si zvolíme sami. Ak sa napríklad rozhodneme, že najskôr zostro-

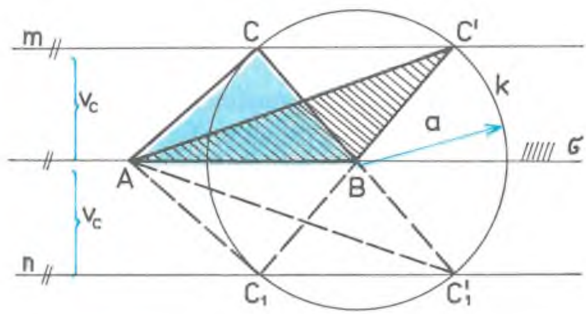
jíme úsečku AB, tak budeme hľadať bod C.
Pre bod C platí (obr. 10.21b):



Obr. 10.21a, b

a) jeho vzdialenosť od priamky AB je v_c, to znamená, že leží na priamke $m \parallel \leftrightarrow AB$ alebo $n \parallel \leftrightarrow AB$ vo vzdialenosti $v_c = 3$ cm od priamky AB,
b) jeho vzdialenosť od bodu B je $a = 4$ cm, a preto leží na kružnici $k(B; 4\text{ cm})$.

2. *Konštrukcia*



Obr. 10.22

Postup konštrukcie (obr. 10.22):
1. AB; $|AB| = 6$ cm (zvolené umiestenie)
2. m, n; $m \parallel \leftrightarrow AB$, $n \parallel \leftrightarrow AB$ vo vzdialenosti $v_c = 3$ cm $(m \neq n)$
3. k; $k(B; 4\text{ cm})$
4. C; $C \in m \cap k$ alebo $C_1 \in n \cap k$
5. $\triangle ABC$

3. *Skúška*
Na obr. 10.22 sú zostrojené spolu štyri body, ktoré sme označili C, C', C_1, C_1'. Každý z nich spĺňa podmienky úlohy: z kroku 4 vyplýva, že každý z nich má vzdialenosť $v_c = 3$ cm od priamky AB a takisto platí $|BC| = a = 4$ cm. Preto každý z narysovaných trojuholníkov je výsledkom našej konštrukcie.

Na obr. 10.22 vidieť, že dva a dva z týchto trojuholníkov sú súmerne združené podľa osi AB, a teda aj zhodné:

$$\triangle ABC \cong \triangle ABC_1$$
$$\triangle ABC' \cong \triangle ABC_1'$$

Úloha má **dve rôzne riešenia**.

Poznámka

Ďalšie konštrukčné úlohy budeme riešiť iba v jednej polrovine.

Príklad 4

Zostrojte štvoruholník $ABCD$, keď sú dané dĺžky jeho strán $a = 4{,}5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, uhlopriečka $|AC| = e = 5{,}3$ cm a $|\sphericalangle DAB| = \alpha = 78°$.

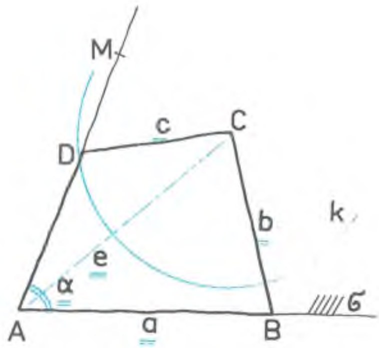
Poznámka

Pred riešením úlohy si pripomeňme, že zostrojovaný štvoruholník zvyčajne rozdeľujeme na dva trojuholníky. Na určenie prvého trojuholníka potrebujeme tri vhodné údaje, z ktorých jeden využijeme pri konštrukcii druhého trojuholníka. Na konštrukciu štvoruholníka teda potrebujeme poznať spolu **päť** vhodných údajov.

Riešenie

1. *Rozbor*
Na obr. 10.23 je znázornený štvoruholník $ABCD$, o ktorom predpokladáme, že je riešením úlohy. Rozhodneme sa začať konštrukciu zostrojením úsečky AB. Úloha má potom dva neznáme body C a D.
Bod C je vrcholom pomocného trojuholníka ABC, ktorý zostrojíme podľa vety *sss* (sú známe jeho strany b, e, a).

Obr. 10.23

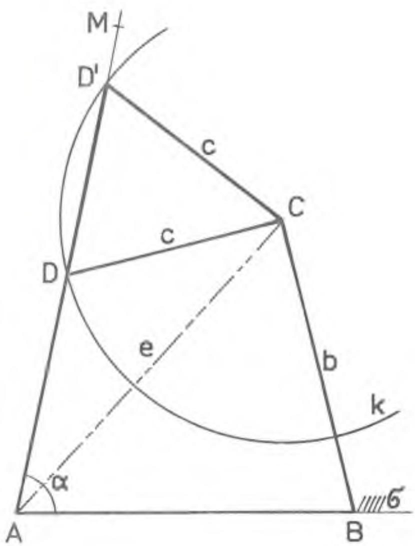


Podmienky pre bod D:

a) Bod D leží v tej istej polrovine vyťatej priamkou AB ako bod C, a to na polpriamke AM, ktorá je druhým ramenom uhla MAB veľkosti 78°.

b) Pretože je známa dĺžka úsečky DC, t. j. $|DC| = c = 3$ cm, leží bod D na kružnici $k(C;\ c = 3\text{ cm})$.

2. *Konštrukcia* (v polrovine σ)



Postup konštrukcie (obr. 10.24):

1. AB; $|AB| = a = 4{,}5$ cm (umiestenie)
2. C; $\triangle ABC$ (*sss*)
3. $\sphericalangle MAB$; $|\sphericalangle MAB| = 78°$, $M \in \sigma$
4. k; $k(C;\ 3\text{ cm})$
5. D; $D \in k \cap \mapsto AM$
6. $ABCD$

Obr. 10.24

3. *Skúška*
Na obr. 10.24 sme na základe našich údajov dostali dva rôzne body D a D', z ktorých ani jeden neleží na niektorej z priamok AC, BC a AB. Tak vzniknú **dva** štvoruholníky $ABCD$ a $ABCD'$, z ktorých každý **je riešením úlohy**.
Trojuholník ABC možno zostrojiť, lebo dĺžky jeho strán spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť.
Rôzne body D a D' existujú, lebo kružnica k pretne polpriamku AM, ktorá leží v polrovine ABC (t. j. σ). Z toho vyplýva, že obidva štvoruholníky majú dané dĺžky strán:

$|AB| = a = 4{,}5$ cm – pozri krok 1
$|BC| = b = 4$ cm – pozri krok 2
$|CD| = c = 3$ cm – pozri krok 4

Uhlopriečka AC má dĺžku $e = 5{,}3$ cm (pozri krok 2) a uhol $\alpha = 78°$ sme zostrojili v kroku 3.

Príklad 5

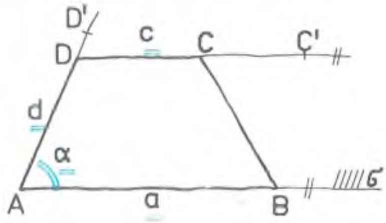
Zostrojte lichobežník $ABCD$, keď sú dané dĺžky jeho základní $a = 8$ cm, $c = 3{,}2$ cm, dĺžka ramena $d = 4{,}5$ cm a veľkosť uhla $\alpha = 60°$.

Poznámka

Lichobežník je štvoruholník, ktorý má dve náprotivné strany rovnobežné. Na jeho konštrukciu postačia **štyri** údaje, lebo rovnobežnosť základní nahrádza piaty údaj.

Riešenie

1. *Rozbor*
Predpokladajme, že lichobežník $ABCD$, ktorý je načrtnutý na obr. 10.25, je riešením našej úlohy. Vyznačíme na ňom dané údaje a ako prvé sa rozhodneme zostrojiť úsečku AB. Neznáme body sú potom body C a D.
Bod D možno jednoducho zostrojiťako vrchol pomocného trojuholníka ABD v zvolenej polrovine σ podľa vety *sus* ($|AB| = a = 8$ cm, $|AD| = d = 4{,}5$ cm, $|\sphericalangle DAB| = \alpha = 60°$).



Obr. 10.25

Pre neznámy bod C potom platí:

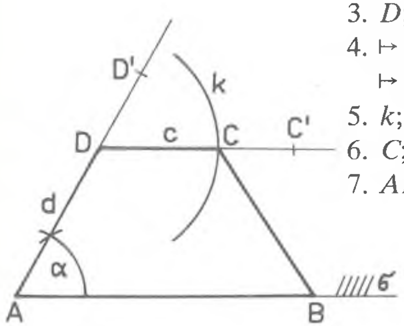
a) C leží na polpriamke DC', ktorá v prípade lichobežníka musí mať ten istý smer ako polpriamka AB.

b) $C \in k(D; c = 3{,}2 \text{ cm})$.

2. *Konštrukcia* (v polrovine σ)

Postup konštrukcie (obr. 10.26):

1. AB; $|AB| = a = 8$ cm (umiestenie)
2. $\sphericalangle BAD'$; $|\sphericalangle BAD'| = \alpha = 60°$
3. D; $|AD| = d = 4{,}5$ cm, $D \in \mapsto AD'$
4. $\mapsto DC'$; $\mapsto DC'$ má ten istý smer ako $\mapsto AB$
5. k; $k(D; c = 3{,}2 \text{ cm})$
6. C; $C \in k \cap \mapsto DC'$
7. $ABCD$



Obr. 10.26

3. *Skúška*

Zostrojený štvoruholník je lichobežník, lebo podľa kroku 4 majú polpriamky AB a DC' ten istý smer, a teda aj $AB \| DC$. Z krokov konštrukcie 1, 3 a 5 vidieť, že jeho strany majú dané dĺžky a, d, c, a z kroku 2 vidieť aj to, že $\alpha = 60°$.

Z konštrukcie vyplýva, že v zvolenej polrovine σ má úloha **jediné** riešenie (v polrovine opačnej k polrovine σ môžeme dostať ešte jeden súmerne združený štvoruholník).

CVIČENIA

1. Dané sú dva rôzne body A, B ($|AB| = 4{,}5$ cm). Zostrojte kružnicu k, ktorá má polomer $r = 2{,}6$ cm a prechádza bodmi A, B.

2. Daná je kružnica $k(S;\ 2$ cm) a priamka t, ktorej vzdialenosť od bodu S je 4 cm. Zostrojte kružnicu l, ktorá má polomer 1,5 cm, dotýka sa priamky t a má vonkajší dotyk s kružnicou k.

3. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:

   a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $v_a = 3{,}2$ cm
   b) $a = 5{,}3$ cm, $\beta = 60°$, $v_b = 4$ cm

4. Zostrojte štvoruholník $ABCD$, keď je dané:

   a) $a = 5$ cm, $b = 4{,}2$ cm, $c = 3{,}1$ cm, $d = 2{,}8$ cm, $\beta = 68°$
   b) $a = 2{,}8$ cm, $b = 3{,}4$ cm, $c = 3{,}8$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 115°$

5. Zostrojte štvoruholník $ABCD$ s uhlopriečkami $AC = e$, $BD = f$, keď je dané:

   a) $a = 6$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $e = 5{,}2$ cm, $d = 4{,}2$ cm, $\gamma = 67°$
   b) $a = 5{,}3$ cm, $\beta = 125°$, $e = 3{,}8$ cm, $f = 6{,}2$ cm, $d = 4{,}3$ cm

6. Zostrojte lichobežník $ABCD$ so základňami $AB \parallel CD$, keď je dané:

   a) $a = 8{,}5$ cm, $\beta = 75°$, $v = 4{,}5$ cm, $c = 4{,}2$ cm
   b) $a = 6{,}8$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$, $v = 3{,}8$ cm

7. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $KLMN$ ($KL \parallel MN$), pre ktorý platí:

   a) $|KL| = 7{,}4$ cm, $|\sphericalangle NKL| = 67°$, $|LM| = 3{,}9$ cm
   b) $|KL| = 3{,}8$ cm, $|LM| = 4{,}2$ cm, $|MN| = 6{,}3$ cm

   (Návod: lichobežník rozdeľte na rovnobežník a trojuholník.)

8. V trojuholníku ABC je dané $a = 4{,}5$ cm, $v_a = 2{,}5$ cm a polomer jemu opísanej kružnice $r = 3{,}8$ cm. Výšku v_a zmeňte tak, aby úloha nemala nijaké riešenie.

9. V trojuholníku ABC $c = 6$ cm, $v_c = 5$ cm. Zostrojte tento trojuholník, keď je ešte dané:
a) $t_c = 5{,}6$ cm, b) $t_c = 5$ cm, c) $t_c = 4{,}7$ cm.
Určte počet riešení každej úlohy a porovnajte jeho súvislosť so vzťahom medzi v_c a t_c.

10. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom ACB, keď je dané:

a) $c = 6$ cm, $a = 2{,}8$ cm
b) $c = 6{,}8$ cm, $b = 4{,}2$ cm
c) $c = 6{,}8$ cm, $t_c = 2{,}8$ cm

11. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom ACB, keď má preponu dĺžky $c = 7{,}2$ cm a ďalej a) $v_c = 3{,}2$ cm, b) $v_c = 3{,}8$ cm, c) $v_c = 3{,}6$ cm. Ako súvisí počet riešení so vzťahom c a v_c v jednotlivých prípadoch?

Topografické práce 11

Topografické práce ste mali už v 6. ročníku. V podstate ide o geometrické konštrukcie, ktoré sa robia v teréne. Ako sám názov geometria naznačuje, pôvodne išlo o vymeriavanie pozemkov. Názov geometria pochádza z gréckych slov geo (po slovensky zem) a metrein (po slovensky merať). Geometria ako veda, ktorá sa vyvinula z praktických potrieb človeka, mnohé z praktických činností a pojmov upresnila. Vyvinula si aj vlastné konštrukčné prostriedky, ktoré dnes používate v škole pri rysovaní na papier. Tieto sa z technickej stránky odlišujú od prostriedkov, ktoré sa používajú pri prácach v teréne, tzv. *topografických prácach.* Načrtnutie topografickej práce na papier je veľmi dôležitou prípravou pred samotnou prácou v teréne. Odlišnosť konštrukčných prostriedkov v teréne a na papieri nás nabáda upravovať konštrukcie známe z geometrie. Ukážeme si to na príkladoch, ktoré vyriešime v triede.

11.1 PRÍPRAVA NA TOPOGRAFICKÉ PRÁCE V TRIEDE

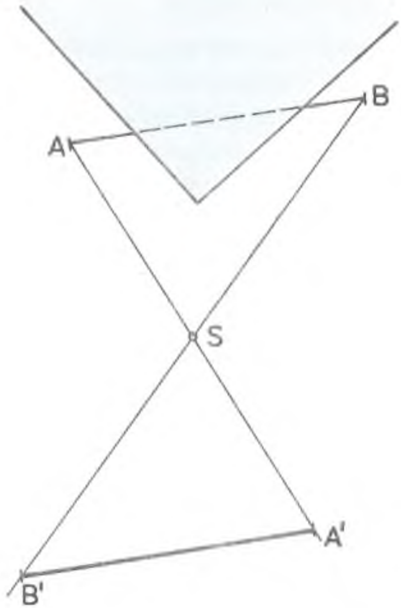
Príklad 1

Zistite vzdialenosť dvoch miest A a B v teréne, ak medzi nimi leží prekážka tak, že nie sú navzájom priamo viditeľné (na obr. 11.1 je prekážkou roh budovy).

Geometrické riešenie

Keďže úsečku AB nemôžeme priamo odmerať, vhodne ju „premiestime". Vieme, že napríklad v súmernosti podľa stredu je obrazom úsečky úsečka s ňou zhodná, a teda aj rovnako dlhá. Preto v prístupnej časti terénu zvolíme stred S súmernosti, z ktorého priamo vidieť body A, B, a zostrojíme obrazy A', B' bodov A, B (obr. 11.2).

Obr. 11.1



Obr. 11.2

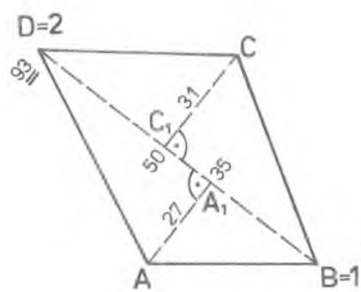
Potom platí

$$A'B' \cong AB, \text{ ako aj } |A'B'| = |AB|$$

Dĺžka zostrojenej úsečky $A'B'$ sa teda rovná hľadanej vzdialenosti bodov A, B.

Príklad 2

Určte výmeru pozemku tvaru štvoruholníka $ABCD$ znázorneného na obr. 11.3. (Číselné údaje sú na obr. 11.3 v metroch, výmeru (obsah) určte v štvorcových metroch.)



Obr. 11.3

Geometrické riešenie

Pozemok má tvar nepravidelného štvoruholníka; dlhšou uhlopriečkou BD ho rozdelíme na dve časti. Vrcholmi A a C postupne zostrojíme kolmice na priamku BD. Pomocou piat týchto kolmíc A_1 a C_1 získame vzdialenosti vrcholov A, C od uhlopriečky BD. Pri prácach v teréne sa priamka BD nazýva *zámerná priamka*; jej krajné body zvyčajne číslujeme (na obr. 11.3 $B = 1$, $D = 2$). Čísla pripísané k pätám kolmíc na zámernej priamke udávajú ich vzdialenosti od bodu $B = 1$ (meranie od tohto bodu sa niekedy vyjadruje aj šípkou). Vzdialenosti medzi jednotlivými pätami znovu nemeriame, pretože by sme tým iba zväčšovali chyby merania. Vzdialenosti piat, pokiaľ ich budeme potrebovať pri výpočtoch, dostaneme ako rozdiel ich vzdialeností od bodu B.

Z údajov na obr. 11.3, ktoré sa získajú meraním, možno už vypočítať výmeru pozemku, a to ako súčet obsahov štyroch pravouhlých trojuholníkov AA_1B, AA_1D, CC_1B a CC_1D. Pre výmeru S daného pozemku platí:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AA_1| \cdot |A_1B| + \frac{1}{2} |AA_1| \cdot |A_1D| + \frac{1}{2} |CC_1| \cdot |C_1B| +$$

$$+ \frac{1}{2} |CC_1| \cdot |C_1D|$$

$|A_1D| = 93 - 35 = 58$
$|C_1D| = 93 - 50 = 43$

Dosadíme do vzorca pre S:

$$S = \frac{1}{2} (27 \cdot 35 + 27 \cdot 58 + 31 \cdot 50 + 31 \cdot 43)$$

Po výpočte dostaneme
$S = 2\,697$

$S = 2\,697 \text{ m}^2$
Výmera pozemku $ABCD$ je $2\,697 \text{ m}^2$, t. j. približne 0,3 ha.

Poznámka

Uvedený postup výpočtu použitím zámernej priamky sa používa všeobecne pri výpočte obsahu ľubovoľného mnohouholníka. V našom prípade štvoruholníka stačí rozdeliť ho na dva trojuholníky.

11.2 TOPOGRAFICKÉ PRÁCE V TERÉNE

Príklady, ktoré sme vyriešili v predchádzajúcom článku, uskutočníme na vodorovnom teréne, najlepšie napríklad na futbalovom ihrisku. Rozdiely medzi spôsobmi uskutočnenia konštrukčných krokov pri topografických prácach v teréne oproti geometrickému zostrojovaniu na papieri uvedieme v poznámkach k jednotlivým príkladom. Bez geometrického riešenia nikdy nezačnite prácu v teréne.

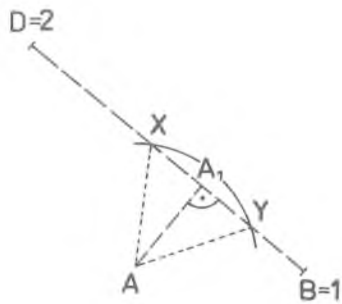
Poznámky k príkladu 1

Po vhodnom vytýčení stredu S súmernosti odmeriame vzdialenosti $|SA|$ a $|SB|$ a vytýčime na príslušných priamkach pomocou pásma body A' a B'. Tým sme vytýčili úsečku $A'B'$. Ak nám stačí pásmo, úsečku $A'B'$ odmeriame. Keď pásmo nestačí, musíme na priamke $A'B'$ vytýčiť pomocný bod.

Poznámky k príkladu 2

Geometrické riešenie príkladu 2 je vlastne plánom postupu práce v teréne, keď po vytýčení bodov A, B, C a D vykonávame väčšinou už známe činnosti (samozrejme, vzdialenosti, ktoré vy odmeriate, budú iné, ako sú pri výpočtoch uvedené v učebnici).

Ak použijete ako konštrukčný prostriedok na vytyčovanie kolmíc v teréne iba zameriavací kríž, istý čas uplynie, kým sa vám podarí vytýčiť body A_1 a C_1. Musíte stále udržiavať „zákryt" jednej priamky zameriavacieho kríža v priamke BD a postupovať tak dlho, kým v priezoroch druhej priamky zameriavacieho kríža neuvidíte bod A (prípadne bod C). Jednoduchšie je zostrojiť kolmicu na priamku ako výšku pomocného rovnoramenného trojuholníka (pokiaľ nám na to



Obr. 11.4

stačí meracie pásmo). Napríklad bodom A zostrojíme kolmicu na priamku BD takto (obr. 11.4):

a) Na priamke BD určíme body X, Y tak, že platí $|AX| = |AY| = 32$ m.

b) Určíme bod A_1 ako stred úsečky XY; potom je priamka AA_1 kolmá na zámernú priamku BD.

Nezabudnite si pred riešením každej úlohy v teréne **urobiť** prehľadný **náčrt situácie**, do ktorého budete postupne zaznamenávať odmerané údaje.

CVIČENIA

1. Na futbalovom ihrisku vytýčte štvorec so stranou dĺžky 10 metrov. Odmerajte tzv. trestné územie a vypočítajte jeho výmeru (obsah).

2. Na ihrisku zvoľte ľubovoľný päťuholník a vypočítajte jeho výmeru postupom, ktorý je navrhnutý v príklade 2. (Po rozdelení päťuholníka najdlhšou uhlopriečkou a po konštrukcii kolmíc vzniknú pravouhlé trojuholníky, ako aj jeden lichobežník s dvoma pravými uhlami.)

Lineárne nerovnice 12

12.1 RIEŠENIE LINEÁRNYCH NEROVNÍC V OBORE REÁLNYCH ČÍSEL

V kapitole 9 ste sa oboznámili s pojmami rovnosť a nerovnosť.

Zápisy napríklad $7 \,.\, 5 + 5 = 4 \,.\, 10$

$$20 + 2 \,.\, 5 = 20 + 10$$

nazývame **rovnosť**.

Výraz na ľavej strane rovnosti označujeme $Ľ$, výraz na pravej strane rovnosti označujeme P.

Rovnosť napíšeme $Ľ = P$.

Keď sa výraz $Ľ$ nerovná výrazu P, dostaneme **nerovnosť**. Napríklad:

$$Ľ = 2 \,.\, 5 \qquad P = 1 + 2$$
$$2 \,.\, 5 > 1 + 2$$
$$10 > 3$$
$$Ľ > P$$

Neostrú nerovnosť, keď platí alebo $Ľ = P$, alebo $Ľ < P$, zapisujeme $Ľ \leqq P$. Podobný význam má zápis $Ľ \geqq P$.

Výraz $Ľ \leqq P$ čítame: výraz na ľavej strane nerovnosti je menší alebo sa rovná výrazu na pravej strane.

Napríklad: $6 \leqq 7$, $6 \leqq 6$.

Výraz $Ľ \geqq P$ čítame: výraz na ľavej strane nerovnosti je väčší alebo sa rovná výrazu na pravej strane.

Napríklad: $5 \geqq 3$, $5 \geqq 5$.

Poznámka

Nerovnosti napríklad $8 > 6$, $3 < 5$, $Ľ < P$, $Ľ > P$ sa nazývajú aj *ostré nerovnosti.*

Úloha 1

Doplňte do rámčekov znaky ostrej alebo neostrej nerovnosti tak, aby ste dostali pravdivý výrok, a vyznačte dané čísla na číselnej osi:

a) $12 \; \square \; 8$	b) $3 \; \square \; 10$
c) $4 \; \square \; 4$	d) $-1 \; \square \; -5$
e) $6 \; \square \; 2$	f) $-6 \; \square \; -2$

Zápis nerovnosti dvoch výrazov, v ktorom máme určiť neznáme číslo tak, aby daná nerovnosť platila, nazýva sa **nerovnica.**

Riešiť nerovnicu znamená nájsť také čísla, aby po dosadení týchto čísel za neznámu sa nerovnica zmenila na správnu nerovnosť. Nájdené čísla sa nazývajú **riešenie** danej nerovnice.

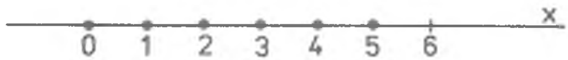
Neznámu v nerovnici označujeme zvyčajne (rovnako ako v rovnici) písmenami z konca abecedy x, y, z a podobne.

Jednoduché nerovnice viete riešiť už od 1. ročníka.

Úloha 2

Na ihrisku bolo 6 chlapcov, dievčat bolo menej. Koľko dievčat mohlo byť na ihrisku?

Riešenie ste vyznačovali na číselnej osi (obr. 12.1).



Obr. 12.1

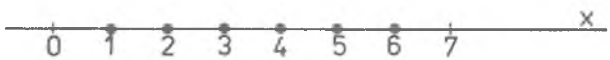
Neskôr ste sa oboznámili s ďalším typom nerovníc, a to s nerovnicami, ktoré sa nazývajú **neostré**.

Príklad 1

Vyznačte na číselnej osi všetky prirodzené čísla x, pre ktoré platí $x \leqq 6$ (čítame: čísla x, ktoré sú menšie alebo sa rovnajú šiestim).

Riešenie

Riešením danej nerovnice sú tieto prirodzené čísla (obr. 12.2): 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Obr. 12.2

Poznámka

Našou úlohou bolo riešiť nerovnicu v obore **prirodzených** čísel, preto sme medzi riešenia nerovnice nezaradili nulu. Nula nie je prirodzené číslo.

Príklad 2

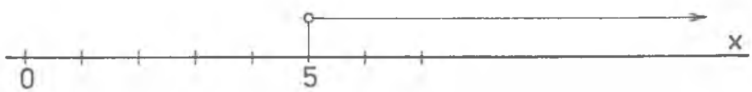
Vyznačte na číselnej osi všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovnice

a) $x > 5$

b) $x \geqq 5$

Riešenie

a) Riešením danej nerovnice sú napríklad čísla 5,1; 6; 62,8; 112; 2 041,5; 10 000; 1 000 023 atď. Všetky čísla, ktoré sú riešením danej nerovnice, ležia na číselnej osi vpravo od čísla 5. Množinu všetkých riešení danej nerovnice vyznačíme na číselnej osi takto (obr. 12.3):



Obr. 12.3

b) Riešením nerovnice $x \geqq 5$ sú všetky čísla, ktoré sú riešením nerovnice $x > 5$, a číslo 5. Na číselnej osi ich vyznačíme takto (obr. 12.4):

Obr. 12.4

Nerovnice $x > 5$ a $x \geqq 5$ spĺňajú všetky čísla, ktoré sú väčšie ako 5, nech zvolíme čo aké veľké číslo. Môžeme pokračovať v rade týchto čísel do nekonečna. Symbolicky zaznamenáme množinu všetkých riešení nerovnice $x > 5$: $K = (5; \infty)$; nerovnice $x \geqq 5$: $K = \langle 5; \infty)$.
Symbol ∞ čítame nekonečno.

Príklad 3

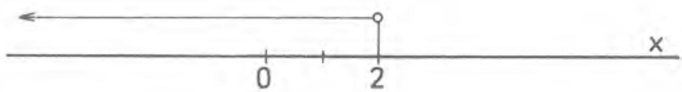
Vyznačte na číselnej osi všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovnice

a) $x < 2$

b) $x \leqq 2$

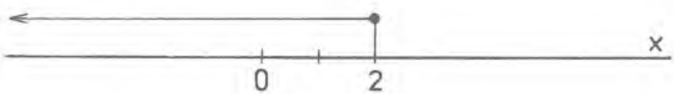
Riešenie

a) Riešením danej nerovnice sú napríklad čísla 1,99; 0; −1; −2,5; −10,88; −1 506; 12 354,72; −1 000 023 atď. Všetky čísla, ktoré sú riešeniami danej nerovnice, ležia na číselnej osi vľavo od čísla 2. Množinu všetkých riešení danej nerovnice vyznačíme na číselnej osi takto (obr. 12.5):



Obr. 12.5

b) Riešením danej nerovnice $x \leqq 2$ je okrem všetkých riešení nerovnice $x < 2$ aj číslo 2, čo vyznačíme na číselnej osi takto (obr. 12.6):



Obr. 12.6

Nerovnice $x < 2$ a $x \leqq 2$ spĺňajú všetky čísla, ktoré sú menšie ako 2, nech zvolíme akékoľvek malé číslo. Môžeme pokračovať až do nekonečna. Symbolicky napíšeme množinu všetkých riešení nerovnice $x < 2$: $K = (-\infty, 2)$; množinu všetkých riešení nerovnice $x \leqq 2$: $K = (-\infty, 2\rangle$.
Symbol $-\infty$ čítame mínus nekonečno.

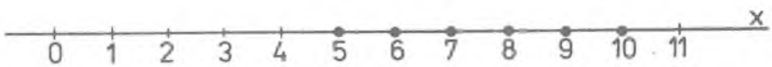
Riešili ste aj príklady tohto typu:

Príklad 4

Vyznačte na číselnej osi všetky prirodzené čísla x, ktoré sú riešením nerovnice $5 \leqq x \leqq 10$.

Riešenie

Nerovnicu spĺňajú tieto prirodzené čísla (obr. 12.7): 5, 6, 7, 8, 9, 10. Overte sami postupným dosadzovaním.



Obr. 12.7

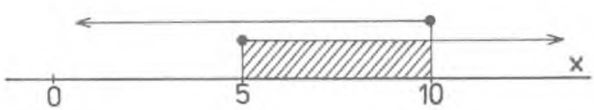
Teraz budeme hľadať riešenie takýchto nerovníc v množine reálnych čísel.

Príklad 5

Znázornite na číselnej osi všetky reálne čísla x, ktoré sú riešením
a) nerovnice $5 \leqq x \leqq 10$
b) nerovnice $5 < x < 10$

Riešenie

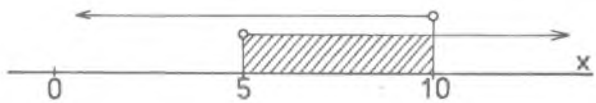
a) Riešením nerovnice $5 \leqq x \leqq 10$ sú všetky reálne čísla väčšie ako 5 a menšie ako 10 vrátane čísel 5 a 10. Sú to napríklad čísla 6,6; 7,2; 8,000 5; 9.
Overte sami postupným dosadzovaním.
Riešenie vyznačíme na číselnej osi (obr. 12.8):



Obr. 12.8

Všetky čísla väčšie ako 5 vyznačíme šípkou smerom vpravo, všetky čísla menšie ako 10 vyznačíme šípkou smerom vľavo, všetky čísla väčšie ako 5 a menšie ako 10 vyznačíme šrafovaním, čísla 5 a 10, ktoré sú takisto riešením, vyznačíme plnými krúžkami.
Množinu K všetkých riešení danej nerovnice napíšeme symbolicky $K = \langle 5, 10 \rangle$ (čítame: K je množina všetkých reálnych čísel väčších ako 5 a súčasne menších ako 10 vrátane čísel 5 a 10).

b) Riešením nerovnice $5 < x < 10$ sú všetky reálne čísla väčšie ako 5 a menšie ako 10, ale nepatrí medzi ne číslo 5 ani číslo 10.
Na číselnej osi vyznačíme toto riešenie (obr. 12.9):



Obr. 12.9

Čísla 5 a 10, ktoré ohraničujú množinu všetkých riešení danej nerovnice, ale nepatria medzi ne, vyznačíme prázdnymi krúžkami.
Množinu K všetkých riešení danej nerovnice napíšeme symbolicky $K = (5, 10)$ (čítame: K je množina všetkých reálnych čísel, ktoré sú väčšie ako 5 a menšie ako 10; čísla 5 a 10 medzi riešenia nepatria).

CVIČENIA

1. Napíšte všetky prirodzené čísla, ktoré sú riešením nerovníc:
a) $x < 10$ b) $x + 1 < 10$ c) $2x \leqq 10$
d) $1 < x < 9$ e) $10 \leqq x \leqq 20$ f) $6 > x \geqq 0$

2. Určte všetky prvočísla, ktoré sú riešením nerovníc:
a) $x < 10$ b) $x \leqq 31$ c) $10 < x < 50$

3. Vyznačte na číselnej osi všetky záporné celé čísla, ktoré sú riešením nerovníc:
a) $x > -10$ b) $x > 10$
c) $-15 \leqq x \leqq -5$ d) $-5 \leqq x < 0$

4. Vyznačte na číselnej osi všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovníc:

a) $2 < x < 4$ b) $2 \leqq x \leqq 4$

c) $-2 < x < 2$ d) $-2 \leqq x \leqq 2$

5. Vyznačte na číselnej osi všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovníc:

a) $x > 6$ b) $x \geqq 6$

c) $x < 10$ d) $x \leqq 10$

6. Vyznačte na číselnej osi všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovníc:

a) $x > 11$ b) $2 < x < 10$

c) $x < 5$ d) $x < 0$

7. Vyznačte na číselnej osi všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovníc:

a) $x \geqq 11$ b) $2 \leqq x \leqq 10$

c) $x \leqq 5$ d) $x \leqq 0$

Porovnajte s výsledkami cvičenia 6.

12.2 EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY NEROVNÍC

Pri riešení nerovníc budeme postupovať tak ako pri riešení rovníc.

Príklad 1

Riešte nerovnicu $3x - 2 > 6 + 2x$ v množine reálnych čísel (určte všetky reálne čísla, ktoré sú riešením nerovnice $3x - 2 > 6 + 2x$).

Riešenie

$3x - 2 > 6 + 2x$

Od obidvoch strán nerovnice odpočítame $2x$.

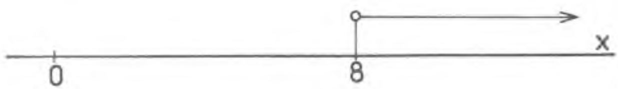
$$3x - 2 > 6 + 2x \quad / -2x$$
$$3x - 2x - 2 > 6 + 2x - 2x$$
$$x - 2 > 6$$

K obidvom stranám nerovnice pripočítame 2.

$$x - 2 > 6 \quad / +2$$
$$x - 2 + 2 > 6 + 2$$
$$\underline{x > 8}$$

Množinou všetkých riešení nerovnice $x > 8$ je množina všetkých reálnych čísel, ktorých obrazy na číselnej osi ležia vpravo od čísla 8 (obr. 12.10). $K = (8, \infty)$

Obr. 12.10



Napísali sme množinu všetkých riešení nerovnice $x > 8$, ktorú sme dostali z nerovnice $3x - 2 > 6 + 2x$ pomocou úprav.

Dve nerovnice majú rovnakú množinu riešení iba vtedy, keď jednu dostaneme z druhej pomocou **ekvivalentných úprav**.

Najčastejšie používané ekvivalentné úpravy lineárnych nerovníc sú tieto:

1. Pripočítanie (odpočítanie) rovnakého výrazu k obidvom stranám nerovnice.
2. Násobenie (delenie) obidvoch strán nerovnice rovnakým číslom rôzným od nuly.

POZOR!

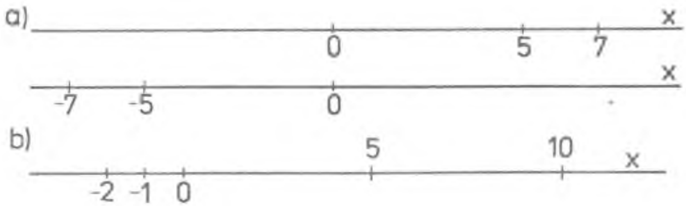
Pri násobení obidvoch strán nerovnosti **ZÁPORNÝM** číslom sa zmení znak nerovnosti na OPAČNÝ.

!

Overte podľa obr. 12.11a, b:

$7 > 5 \quad / \,.\, (-1)$
$-7 < -5$

$-2 < -1 \quad / \,.\, (-5)$
$+10 > +5$



Obr. 12.11a, b

Úloha

Násobte dané nerovnosti číslom -1 a výsledky overte na číselnej osi:

$8>6$	$2<5$	$-1>-2$	$-3<-2$
$12>5$	$3<4$	$-3>-10$	$-7<-5$
$6>1$	$0<6$	$-5>-6$	$-6<0$

Príklad 2

Riešte nerovnicu $\frac{2x+1}{3}-1>\frac{x+1}{2}$.

Riešenie

Určíme všetky riešenia danej nerovnice v množine reálnych čísel. Postupovať budeme takto:

1. Najskôr odstránime zlomky na ľavej aj pravej strane nerovnice tak, že celú nerovnicu vynásobíme spoločným menovateľom obidvoch zlomkov.

$$\frac{2x+1}{3}-1>\frac{x+1}{2} \quad / \, . \, 6$$

$$6 \, . \, \frac{2x+1}{3}-6 \, . \, 1>6 \, . \, \frac{x+1}{2}$$

$$2(2x+1)-6>3(x+1)$$

2. Upravíme výrazy na ľavej aj pravej strane nerovnice.

$$2(2x+1)-6>3(x+1)$$
$$4x+2-6>3x+3$$
$$4x-4>3x+3$$

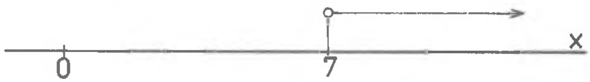
3. K obidvom stranám nerovnice pripočítame výraz $-3x + 4$.

$$4x - 4 > 3x + 3 \quad / +(-3x + 4)$$
$$4x - 4 + (-3x + 4) > 3x + 3 + (-3x + 4)$$
$$4x - 4 - 3x + 4 > 3x + 3 - 3x + 4$$
$$4x - 3x > 3 + 4$$
$$\underline{x > 7}$$

Riešením nerovnice $x > 7$ sú všetky reálne čísla, pre ktoré platí, že ich obrazy na číselnej osi ležia vpravo od čísla 7. Pretože sme urobili iba ekvivalentné úpravy, platí aj pre nerovnicu $\frac{2x+1}{3} - 1 > \frac{x+1}{2}$, že jej riešením sú všetky reálne čísla väčšie ako 7 (obr. 12.12).

$$\underline{K = (7, \infty)}$$

Obr. 12.12



Pri riešení nerovnice nemôžeme skúšku správnosti urobiť dosadením riešenia za neznámu x do pôvodnej nerovnice, pretože takých riešení je nekonečne veľa. Môžeme si však správnosť svojich výpočtov **overiť** tak, že dosadíme aspoň jedno z nájdených riešení do pôvodnej nerovnice. Zvolíme napríklad číslo 10.

4. Overenie správnosti riešenia:

$$Ľ = \frac{2x+1}{3} - 1 = \frac{2 \,.\, 10 + 1}{3} - 1 = \frac{21}{3} - 1 = 7 - 1 = 6$$

$$P = \frac{x+1}{2} = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Platí: $6 > 5{,}5$

$\underline{Ľ > P}$

Zapamätajte si:

> Overenie správnosti výpočtu nie je skúška správnosti, pretože nemôžeme dosadiť všetky riešenia.

!

Príklad 3

Riešte nerovnicu $x + 3 - 2(x + 3) \leqq 1 - x$ v množine reálnych čísel.

Riešenie

$$
\begin{aligned}
x + 3 - 2(x + 3) &\leqq 1 - x \\
x + 3 - 2x - 6 &\leqq 1 - x \\
-x - 3 &\leqq 1 - x \quad /+ x + 3 \\
-x - 3 + x + 3 &\leqq 1 - x + x + 3 \\
0 \,.\, x &\leqq 4
\end{aligned}
$$

Nerovnosť $0 \,.\, x \leqq 4$ je splnená pre všetky reálne čísla. Úpravami nerovnice $x + 3 - 2(x + 3) \leqq 1 - x$ sme dostali platnú nerovnosť $0 \,.\, x \leqq 4$.
Riešením nerovnice $x + 3 - 2(x + 3) \leqq 1 - x$ je množina R všetkých reálnych čísel.

Príklad 4

Riešte nerovnicu $x + 3 - 2(x + 3) \geqq 1 - x$ v množine reálnych čísel.

Riešenie

$$
\begin{aligned}
x + 3 - 2(x + 3) &\geqq 1 - x \\
x + 3 - 2x - 6 &\geqq 1 - x \\
-x - 3 &\geqq 1 - x \quad /+ x + 3 \\
-x - 3 + x + 3 &\geqq 1 - x + x + 3 \\
0 \,.\, x &\geqq 4
\end{aligned}
$$

Nerovnosť $0 \,.\, x \geqq 4$ neplatí pre nijaké reálne číslo x.

Pri úpravách nerovnice $x + 3 - 2(x + 3) \geqq 1 - x$ sme dostali nerovnosť, ktorá neplatí. Nerovnica $x + 3 - 2(x + 3) \geqq 1 - x$ nemá nijaké riešenie. Množina všetkých jej riešení je prázdna.

Príklad 5

Určte všetky prirodzené čísla, pre ktoré platí: keď vydelíme dané číslo piatimi a od podielu odpočítame 35, dostaneme trojciferné číslo.

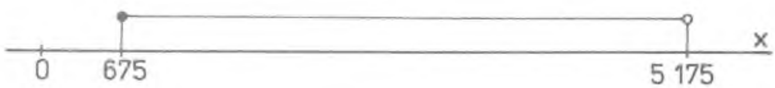
Riešenie

Hľadané číslo označíme x. Podľa podmienok úlohy musí pre číslo x platiť:

$$100 \leqq \frac{x}{5} - 35 < 1\,000$$

$$100 \leqq \frac{x}{5} = 35 < 1\,000 \quad / \,.\, 5$$

$500 \leqq x - 175 < 5\,000 \quad / + 175$
$675 \leqq x < 5\,175$
Riešenie vyznačíme na číselnej osi (obr. 12.13).



Obr. 12.13

Overíme (napríklad pre číslo 675):

$$100 \leqq \frac{675}{5} - 35 < 1\,000$$

$100 \leqq 135 - 35 < 1\,000$
$100 \leqq 100 < 1\,000$
Dostali sme platné nerovnosti.
Hľadanými číslami sú všetky prirodzené čísla väčšie alebo rovnajúce sa 675 a menšie ako 5 175.

CVIČENIA

1. Riešte nerovnice:

a) $x - 5 < 0$ b) $\frac{1}{2}x < 4$ c) $2x \leqq \frac{6}{5}$ d) $x - 1{,}1 < 8{,}9$

2. Vynásobte číslom (-1) dané nerovnosti:

a) $2 < 8$ b) $\frac{1}{2} < \frac{5}{4}$

c) $-1 \leqq 0$ d) $-8 < -4$

e) $10 > 8$ f) $\frac{7}{3} \geqq 2$

g) $4 > -3$ h) $-4 > -10$

3. Riešte nerovnice:

a) $20 - x < 5$ b) $7x - 4 < 5 + 3x$

c) $0{,}5x + 1{,}2 > 8{,}2 - 4{,}5x$ d) $2x + 3 > x + \frac{2}{3}$

4. Riešte nerovnice:

a) $20 - x \leqq 5$ b) $7x - 4 \leqq 5 + 3x$

c) $0{,}5x + 1{,}2 \geqq 8{,}2 - 4{,}5x$ d) $2x + 3 \geqq x + \frac{2}{3}$

Porovnajte výsledky cvičenia 4 s výsledkami cvičenia 3.

5. Riešte nerovnice:

a) $\frac{2x}{5} + 4 \geqq x - \frac{1}{2}$

b) $x - 3 + \frac{x}{4} > \frac{x - 5}{3}$

c) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \leqq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

d) $\frac{5x - 1}{2} < \frac{10x - 5}{3} - \frac{5x - 1}{6}$

6. Riešte nerovnicu $3(x - 2) < 2x - 4$.

a) Určte všetky prirodzené čísla, ktoré sú jej riešením.
b) Určte všetky celé čísla, ktoré sú jej riešením.
c) Určte všetky reálne čísla, ktoré sú jej riešením.

7. Riešte nerovnice:

a) $2x + 1 \geqq \frac{x+1}{2}$

b) $2x - 1 \leqq \frac{x+3}{5}$

c) $3(1 - x) < \frac{1}{2}(7 - x)$

d) $2x - \frac{1}{2}(2x + 3) \leqq 1 - x$

8. Riešte nerovnice:

a) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$

b) $x - 3 + \frac{x}{4} < \frac{x-5}{3}$

c) $\frac{x-1}{3} - 2(1 - 4x) \leqq \frac{x}{4} - \frac{7-52x}{6}$

9. Pre ktoré reálne čísla a je výraz $\frac{3a-4}{2}$ kladný?

10. Pre ktoré reálne čísla b je výraz $\frac{2b+3}{5}$ menší ako 1?

11. Pre ktoré reálne čísla d je výraz $\frac{5d-6}{7}$ nezáporný?

12. Rozdeľte číslo 100 na dve časti tak, aby $\frac{3}{5}$ prvej časti boli väčšie ako $\frac{7}{5}$ druhej časti.

13. Určte všetky prirodzené čísla, pre ktoré platí, že ak odpočítame od ich štvrtiny desať, dostaneme dvojciferné číslo.

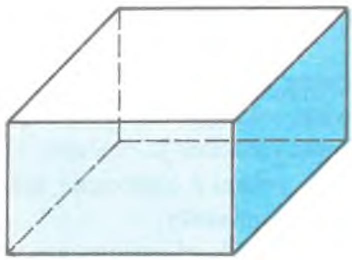
14. Aký náklad možno naložiť do kabínky lanovky, ktorej hmotnosť je 125 t a povolená záťaž je 50 t?

15. Dokážte, že polovica obvodu trojuholníka so stranami dĺžky x cm, $(x + 2)$ cm, $(x + 4)$ cm je väčšia ako každá z jeho strán. (Platí táto nerovnosť pre ľubovoľný trojuholník?)

Pravouhlé premietanie 13

13.1 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI PRAVOUHLÉHO PREMIETANIA

Obrázky telies, s ktorými ste sa doteraz oboznámili (napríklad kváder na obr. 13.1), nie sú vždy vhodné pre technickú prax. Na týchto obrázkoch vlastne vidieť iba rovnobežnosť hrán a stien, ale dĺžky hrán, ktoré nie sú rovnobežné s nákresňou, nezodpovedajú skutočnosti. To isté platí aj pre niektoré uhly.

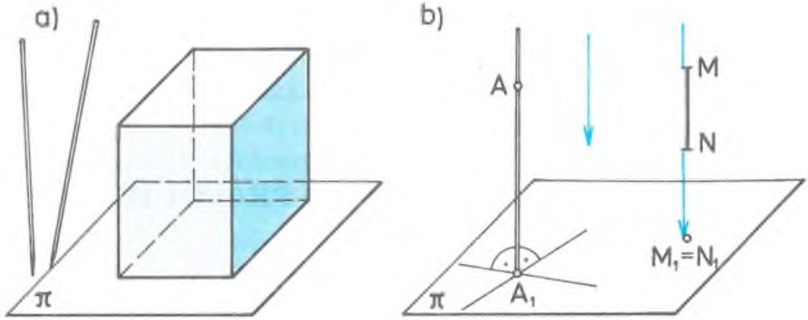


Obr. 13.1

V technickej praxi sa preto často používa iný spôsob znázorňovania telies, ktorý sa nazýva **pravouhlé (rovnobežné) premietanie**.

Úloha 1

Pripravte si hobrovú doštičku, špajľu s hrotom, drôtený (alebo aj iný) model kvádra (obr. 13.2a). Kolmo na hobrovú doštičku zabodnite špajľu. (Kolmosť overte pomocou modelu kvádra.) Na špajli vyznačte bod A, ktorý neleží v rovine znázornenej hobrovou doštičkou. Priesečník kolmej priamky znázornenej špajľou s rovinou znázornenou hobrovou doštičkou označte A_1 (obr. 13.2b). Bod A_1 nazývame **pravouhlý priemet bodu** A.



Obr. 13.2a, b

Úloha 2

Zvoľte ľubovoľne niekoľko ďalších bodov a zostrojte ich pravouhlé priemety.

Zavedieme si niekoľko názvov:

Rovinu, v ktorej zostrojujeme pravouhlé priemety bodov, nazývame **priemetňa** (značíme ju zvyčajne π).

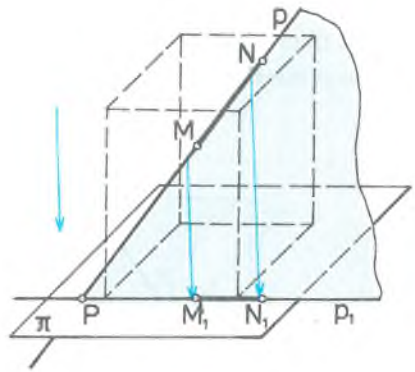
Kolmé priamky zostrojené bodmi, ktoré zobrazujeme, nazývame **premietacie priamky**.

Na obr. 13.2b sú znázornené priemety bodov *M, N,* ktoré ležia na jednej premietacej priamke a majú spoločný pravouhlý priemet $M_1 =$ $= N_1$. Všetky body ležiace na jednej premietacej priamke majú obraz v jednom bode, a to v priesečníku danej premietacej priamky s priemetňou.

Teraz vyšetríme **priemet priamky** *p,* ktorá nie je kolmá na priemetňu.

Úloha 3

Priamkou *p* (rôznobežnou s priemetňou) preložte rovinu kolmú na priemetňu. (Rovinu si vymodelujte pomocou listu papiera a pomocou drôteného modelu kvádra, ďalej použite špajle a hobrovú doštičku, obr. 13.3.) Túto rovinu nazývame **premietacia rovina** priamky *p.* Prienik premietacej roviny s hobrovou doštičkou vyznačte čiarou na doštičke. Tento prienik nazývame **priesečnica** daných rovín.



Obr. 13.3

Priesečnicu premietacej roviny preloženej priamkou p s rovinou π nazývame **pravouhlý priemet priamky** p **do roviny** π. Označíme ho p_1. Priemet ľubovoľného bodu priamky p leží na priemete p_1 priamky p.

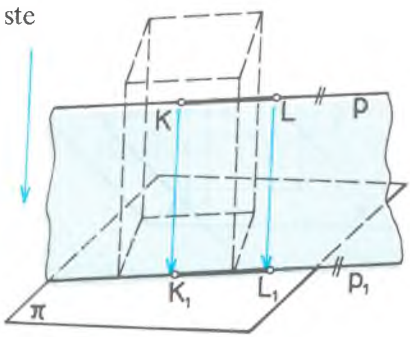
Pokúste sa vymodelovať priesečník priamky p a jej pravouhlého priemetu p_1.

Zistíte, že priesečník priamky p a jej pravouhlého priemetu leží v rovine π (na obr. 13.3 je označený P).

Úloha 4

Priamkou p (rovnobežnou s priemetňou) preložte rovinu kolmú na priemetňu a vymodelujte pravouhlý priemet priamky p. Označte ho opäť p_1. Určte vzájomnú polohu priamok p a p_1 (obr. 13.4). Na priamke p vyznačte úsečku KL. Vymodelujte jej pravouhlý priemet K_1L_1 a určte vzájomnú polohu úsečiek KL a K_1L_1.

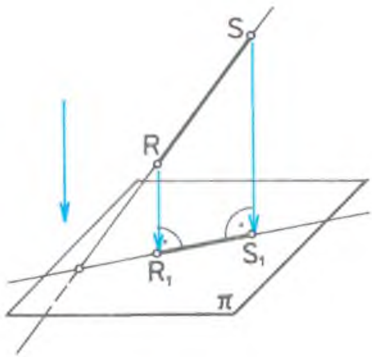
Keď ste presne pracovali, dostali ste
$p \| p_1$, $KL \| K_1L_1$, $KL \cong K_1L_1$



Obr. 13.4

Úloha 5

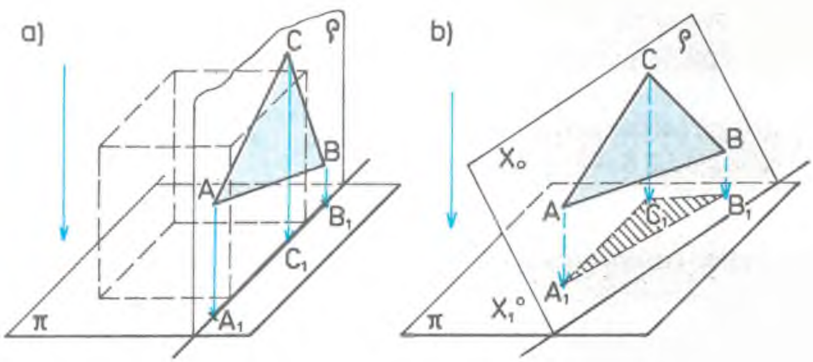
Podľa obr. 13.5 odôvodnite, prečo pre priemet R_1S_1 úsečky RS ležiacej na priamke rôznobežnej s priemetňou platí $R_1S_1 < RS$.



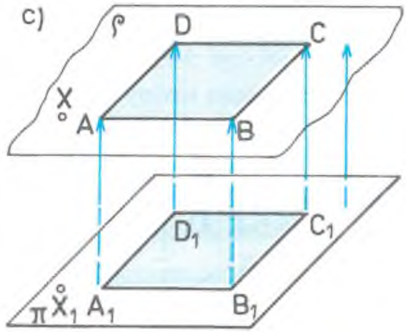
Obr. 13.5

Úloha 6

Použite znovu hobrovú doštičku, špajle a list papiera (alebo fóliu), na ktorý narysujete trojuholník ABC, prípadne štvoruholník $ABCD$. Model kvádra používajte na overenie kolmosti roviny alebo priamok. Podľa obrázka 13.6a, b, c vymodelujte priemety rôzne položených rovín do priemetne π.



Obr. 13.6a, b



Obr. 13.6c

Pravouhlým priemetom roviny ϱ kolmej na priemetňu π je **priamka** (obr. 13.6a).
Priemetom trojuholníka ABC ležiaceho v rovine ϱ je **úsečka**.

Pravouhlým priemetom roviny ϱ rôznobežnej s priemetňou π je **celá priemetňa** (obr. 13.6b).
Priemetom trojuholníka ABC ležiaceho v rovine ϱ je **trojuholník** $A_1B_1C_1$, ktorého aspoň dve strany sú **menšie** ako zodpovedajúce strany trojuholníka ABC.

Pravouhlým priemetom roviny ϱ rovnobežnej s priemetňou π je **celá priemetňa.**
Priemetom štvoruholníka $ABCD$ ležiaceho v rovine ϱ je **štvoruholník** $A_1B_1C_1D_1$ zhodný so štvoruholníkom $ABCD$ (obr. 13.6c).

Zapamätajte si!

Pravouhlý priemet obrazca ležiaceho v rovine rovnobežnej s priemetňou je obrazec zhodný s daným obrazcom.

!

CVIČENIA

1. Pracujte s modelom kvádra $ABCDEFGH$, ktorý umiestite na priemetňu π. Odpovedzte na tieto otázky:

a) Prečo je bod A pravouhlým priemetom bodu E?
b) Priemetom ktorých bodov je bod C?
c) Čo je priemetom úsečky EF?
d) Čo je priemetom roviny určenej stenou $BCGF$?
e) Čo je priemetom stenovej uhlopriečky BG?
f) Čo je priemetom telesovej uhlopriečky BH?
g) Vieme, že protiľahlé steny kvádra, napríklad $BCGF$ a $ADHE$, sú rovnobežné. Aké sú ich priemety a akú majú vlastnosť?
h) Určte priemet obdĺžnika (tzv. uhlopriečneho rezu) $BCHE$.
i) Aké vlastnosti majú vzhľadom na rovnobežné pravouhlé premietanie do priemetne π úsečky EH a FG?

13.2 PRAVOUHLÉ PRIEMETY KVÁDRA NA DVE PRIEMETNE

Pripravte si dve hobrové doštičky a postavte ich kolmo na seba.

Hobrové doštičky vám znázorňujú dve na seba kolmé roviny, ktoré označíme π a ν (čítaj ný).

Priesečnicu týchto rovín označíme x.

Rovinu π nazývame **pôdorysňa** (aj **prvá** priemetňa).

Rovinu ν nazývame **nárysňa** (aj **druhá** priemetňa).

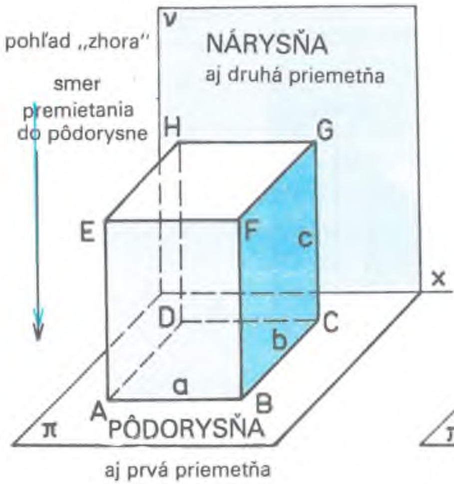
Príklad 1

Určte priemety kvádra s rozmermi $a = 2{,}5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3{,}5$ cm do pôdorysne a nárysne (kváder umiestite podľa obr. 13.7).

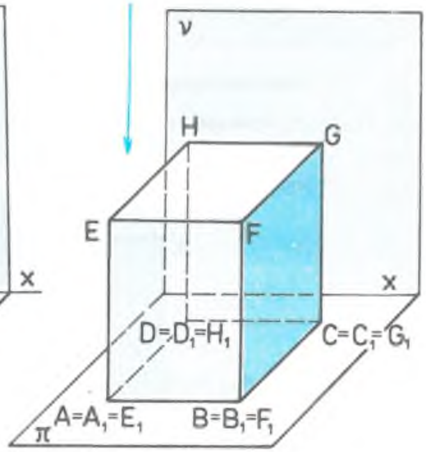
Riešenie

Model kvádra $ABCDEFGH$ postavíme na pôdorysňu tak, aby jeho hrana CD bola rovnobežná s priamkou x (x je priesečnica pôdorysne a nárysne; obr. 13.7).

Vrcholy A, B, C, D ležia v pôdorysni π, a preto splývajú so svojimi priemetmi do π. Tieto priemety označíme A_1, B_1, C_1, D_1. Teda platí: $A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$, $D_1 = D$ (obr. 13.8).



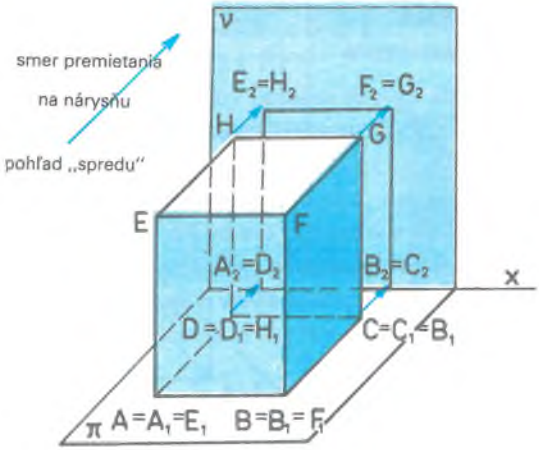
Obr. 13.7



Obr. 13.8

Všimnite si, že bod A_1 je súčasne aj priemetom bodu E, bod B_1 priemetom bodu F, bod C_1 priemetom bodu G a bod D_1 priemetom bodu H.
Teda platí:
$E_1 = A_1$,
$F_1 = B_1$,
$G_1 = C_1$,
$H_1 = D_1$.

Priemetom kvádra do pôdorysne je obdĺžnik $A_1 B_1 C_1 D_1$.
Priemet útvaru do pôdorysne nazývame **pôdorys**.



Obr. 13.9

Na obr. 13.9 je znázornená konštrukcia priemetu kvádra *ABCDEFGH* do druhej priemetne – **nárysne**.

V smere kolmého premietania na nárysňu, ktorý je na obr. 13.9 označený šípkou, vedieme premietacie priamky vrcholmi kvádra. Napríklad body F a G majú tú istú premietaciu priamku. Jej priesečník s nárysňou je spoločným priemetom obidvoch bodov do nárysne. Platí $F_2 = G_2$ (index 2 znamená, že ide o priemety do druhej priemetne). Podobne platí $E_2 = H_2$.

Druhé priemety bodov ležiacich v pôdorysni sú priesečníky ich premietacích priamok s priamkou x. Platí $B_2 = C_2$, $A_2 = D_2$.

Priemetom kvádra *ABCDEFGH* do nárysne je obdĺžnik $A_2B_2F_2E_2$. Priemet útvaru do nárysne nazývame **nárys**.

Úloha 1

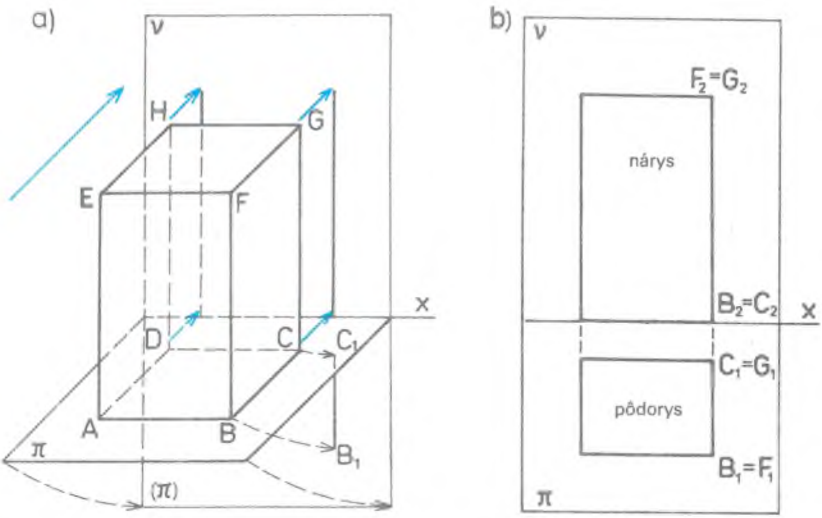
Overte platnosť týchto vzťahov:

a) Vzdialenosť pôdorysu B_1 bodu B od priesečnice x sa rovná vzdialenosti bodu B od nárysne v.

b) Vzdialenosť nárysu B_2 bodu B od priesečnice x sa rovná vzdialenosti bodu B od pôdorysne π.

V praxi zvyčajne rysujeme v jednej rovine. Preto obidva priemety do roviny π aj roviny ν prevedieme napríklad otočením roviny π okolo priamky x do roviny ν (obr. 13.10a).

Hovoríme, že sme **obidva priemety združili**.



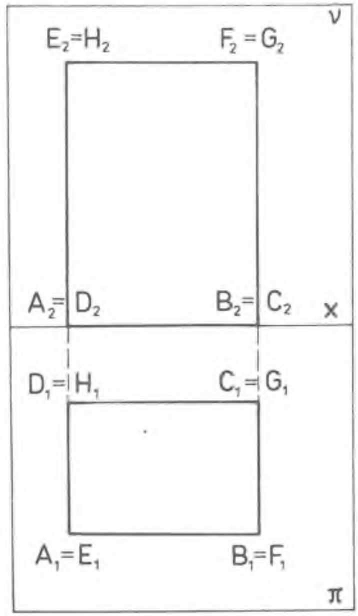
Obr. 13.10a, b

Úloha 2

Na svojom modeli z hobrových doštičiek vykonajte otočenie roviny π do roviny ν okolo priamky x a overte, že po otočení ležia obidva priemety ľubovoľného bodu na priamke kolmej na priesečnicu x. Doplňte na obr. 13.10b popis chýbajúcich vrcholov pôdorysu aj nárysu.

Združené priemety telesa často používame na riešenie obrátenej úlohy: z pôdorysu a nárysu telesa vyčítať údaje potrebné na konštrukciu jeho siete.

Obr. 13.11



Príklad 2

Daný je pôdorys a nárys kvádra *ABCDEFGH* (obr. 13.11). Určte rozmery kvádra a zostrojte jeho sieť.

Riešenie

Všimnite si, že nárysy A_2, B_2, C_2, D_2 vrcholov podstavy kvádra ležia na priamke x. To znamená, že vzdialenosť bodov A, B, C, D od pôdorysne sa rovná nule. Preto podstava $ABCD$ leží v pôdorysni. Obdĺžnik $A_1B_1C_1D_1$ je zhodný s podstavou $ABCD$, ktorá má rozmery $a = |AB|$, $b = |BC|$. Nárysy $A_2B_2F_2E_2$ a $D_2C_2G_2H_2$ prednej a zadnej bočnej steny, ktoré sú rovnobežné s nárysňou, splývajú. Ich splývajúce hrany, napríklad B_2F_2 a C_2G_2, sú zhodné a každá z nich má ako pôdorys jediný bod $B_1 = F_1$, prípadne $C_1 = G_1$. Sú teda kolmé na pôdorysňu a určujú výšku kvádra $c = |BF|$.

Týmto spôsobom zistíme z pôdorysu a nárysu všetky tri rozmery kvádra a, b, c a môžeme zostrojiť jeho sieť.

CVIČENIA

1. Na list papiera formátu A4 (297 mm × 210 mm) zostrojte pôdorys a nárys kvádra s podstavou v pôdorysni. Jeho zadná bočná stena je rovnobežná s nárysňou vo vzdialenosti 2 cm.
Rozmery kvádra sú: $a = 5$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 6$ cm.

2. Zostrojte sieť kvádra z cvičenia 1.

3. Zostrojte sieť kvádra z cvičenia 1 na list pevnejšieho papiera a zhotovte model tohto kvádra.

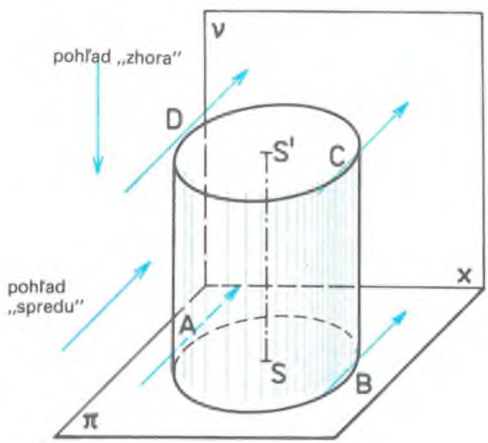
13.3 ZDRUŽENÉ PRIEMETY ROTAČNÉHO VALCA

Príklad 1

Zostrojte pôdorys a nárys rotačného valca s podstavou v pôdorysni. Vzdialenosť stredu podstavy od priesečnice x obidvoch priemetní je 5 cm, polomer podstavy $r = 3$ cm a výška valca $v = 5$ cm.

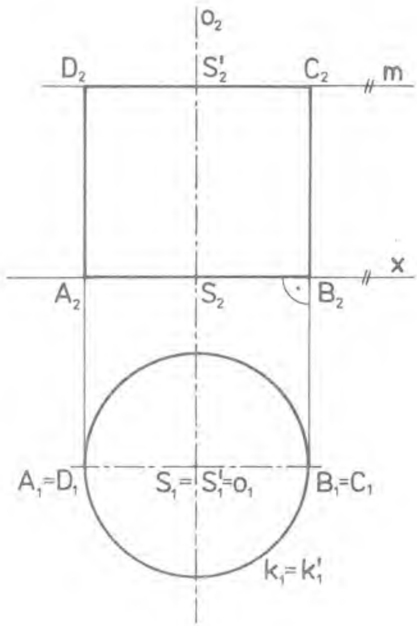
Riešenie

Najskôr si situáciu vymodelujeme. Roviny π a ν aj teraz vymodelujeme pomocou hobrových doštičiek. Model valca umiestime tak, aby jeho dolná podstava ležala v rovine π (obr. 13.12). Na milimetrový papier formátu A4 (na výšku) narysujeme asi 12 cm od horného okraja vodorovnú priamku x; horná časť papiera predstavuje časť nárysne ν, dolná časť papiera časť pôdorysne π.



Obr. 13.12

Konštrukcia pôdorysu valca. Predstavme si, že na valec pozeráme zhora, t. j. v smere šípky rovnobežnej s osou valca. Obidve podstavy sa premietnu do toho istého kruhu v pôdorysni. Priemety stredov obidvoch podstáv takisto splynú (obr. 13.13).



Obr. 13.13

Vo vzdialenosti 2 cm + 3 cm = 5 cm od priamky x (asi uprostred papiera) vyznačíme stred S kružnice k ohraničujúcej dolnú podstavu. Tento stred S splýva so svojím prvým priemetom S_1. Pre prvý priemet stredu S' hornej podstavy platí $S'_1 = S_1$. Kružnica, ktorú opíšeme polomerom $r = 3$ cm okolo bodu $S_1 = S'_1$, je prvým priemetom hraníc obidvoch kruhových podstáv; $k_1 = k'_1$. Bod $S_1 = S'_1$ je aj prvým priemetom o_1 — osi valca kolmej na pôdorysňu.

Konštrukcia nárysu valca. Pozerajme teraz na náš model valca spredu v smere farebných šípok kolmo na nárysňu. Na obr. 13.12 sú naznače-

né dotykové premietacie priamky kruhových podstáv. Ich dotykové body sú označené A, B, C, D. Tieto body využijeme pri konštrukcii nárysu valca. Pretože body A, B ležia v pôdorysni, ich druhé priemety A_2, B_2 ležia na priamke x. Úsečka A_2B_2 je nárysom podstavy valca, ktorá leží v pôdorysni. Os SS' valca je rovnobežná s nárysňou a kolmá na pôdorysňu. Výška valca $v = |SS'| = 5$ cm. Druhý priemet S_2 bodu S leží na priamke x. Druhý priemet bodu S', ktorý je stredom hornej podstavy valca, leží na priamke prechádzajúcej bodom S_2 kolmo na priamku x. Úsečka $S_2S'_2$ je nárys osi valca.
Platí $|S_2S'_2| = v = 5$ cm.

Obidve podstavy valca sú rovnobežné, a preto nárys hornej podstavy valca leží na priamke m prechádzajúcej bodom S'_2 rovnobežne s priamkou A_2B_2.

Krajné body D_2, C_2 nárysu sú priesečníky kolmíc zostrojených priemetmi D_1, C_1 s priamkou m.

Nárys valca je obdĺžnik $A_2B_2C_2D_2$.

Príklad 2

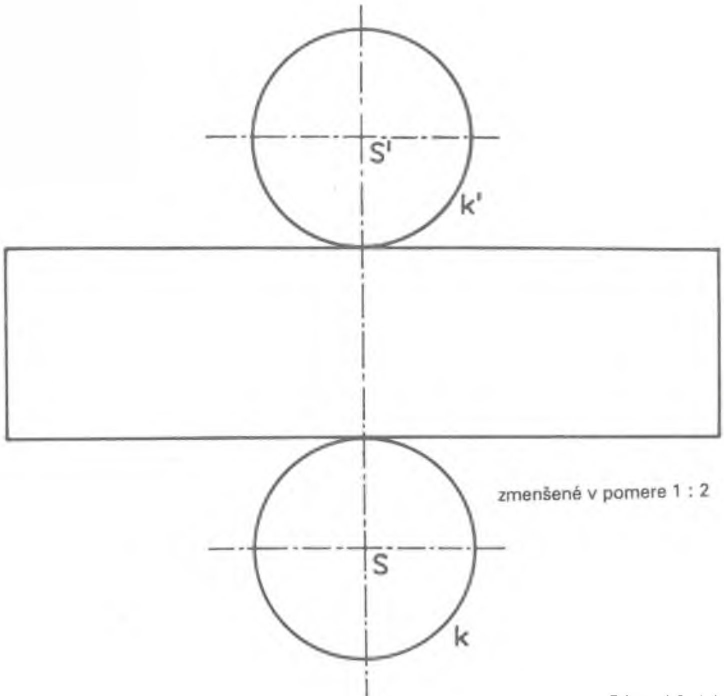
Zostrojte sieť valca z príkladu 1.

Riešenie

Pri konštrukcii siete využijeme pôdorys a nárys valca, ktoré sme zostrojili v príklade 1.

Najskôr zostrojíme plášť, ktorý po rozvinutí do roviny tvorí obdĺžnik. Jeho rozmery sú výška valca a dĺžka obvodu podstavy. Výšku predstavuje v náryse napríklad úsečka $S_2S'_2$ alebo s ňou zhodné úsečky $A_2D_2 \cong B_2C_2$. Dĺžku obvodu o vypočítame podľa vzorca pre dĺžku kružnice $o = 2\pi r$. V našom prípade $o \doteq 18{,}8$ cm. Obdĺžnikový plášť zostrojíme opäť na list papiera formátu A4, tentoraz však po šírke papiera. Obdĺžnik umiestime asi tak, ako je to na obr. 13.14, kde je však všetko zmenšené na polovinu.

Ďalej zostrojíme priamku kolmú na obidve dlhšie strany plášťa a na nej zvonka obdĺžnika vyznačíme vo vzdialenosti 3 cm stredy S a S' obidvoch podstáv. Kružnice k a k' opísané postupne okolo týchto bodov ohraničujú podstavy valca v zostrojovanej sieti.



Obr. 13.14

CVIČENIA

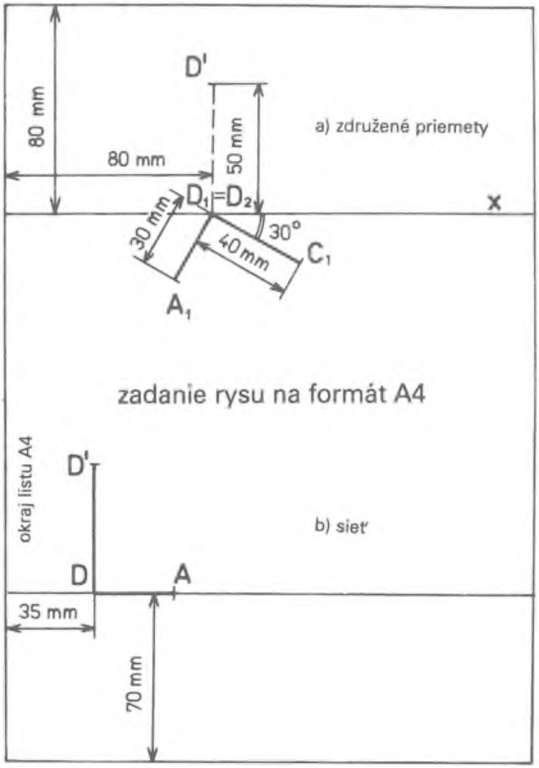
1. Zostrojte do zošita pôdorys a nárys tzv. rovnostranného rotačného valca, ktorého priemer podstavy sa rovná jeho výške $v = 3$ cm. Podstavu valca umiestite v pôdorysni tak, že jej stred bude mať vzdialenosť 4 cm od priamky x.

2. Zostrojte sieť valca z cvičenia 1. Pri konštrukcii počítajte s celou stranou zošita na šírku.

3. Zostrojte sieť rovnostranného valca ako v cvičení 2 (na pevnejší papier) a zhotovte pomocou nej papierový model valca.

Námet rysu

Zostrojte pôdorys a nárys kvádra, ktorého podstava leží v pôdorysni a hrany podstavy sú umiestené tak, ako je to na obrázku 13.15. Zostrojte aj sieť tohto kvádra.



Obr. 13.15

SÚHRNNÉ CVIČENIA IV

A

1. Dané sú dve sústredné kružnice $k_1(S;\ 3\text{ cm})$ a $k_2(S;\ 1\text{ cm})$. Vyšetrite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú kružníc k_1 a k_2.

2. Riešte nerovnice:
a) $12x - 3 \geqq 21$ b) $34 < 16x - 14$
c) $0 > 5 - 2x$ d) $15x \geqq 7 - 3x$

3. Určte, ktoré prirodzené čísla n spĺňajú nerovnice:
a) $\frac{3}{5} < \frac{n}{5} < \frac{8}{5}$ b) $\frac{2}{9} \leqq \frac{n}{9} \leqq \frac{7}{9}$

4. Vypočítajte veľkosti susedných uhlov, keď
a) sú zhodné,
b) jeden je dvakrát väčší ako druhý,
c) jeden je o $70°$ väčší ako druhý,
d) veľkosť jedného sa rovná $\frac{2}{3}$ veľkosti druhého.

5. Daná je kružnica $k(S;\ 1{,}8\text{ cm})$ a bod A, ktorý leží na kružnici k. Ďalej je daný bod B, pre ktorý platí $|SB| = 4$ cm.
a) Zostrojte takú kružnicu l, ktorá bude prechádzať bodom B a dotýkať sa kružnice k v bode A,
b) určte polohu bodu B tak, aby úloha nemala riešenie.

6. Zostrojte z bodu A dotyčnice ku kružnici $k(S;\ 4\text{ cm})$. Body dotyku označte M, N, dĺžka úsečky AS je 8,5 cm. Vypočítajte dĺžky úsečiek AM a AN.

7. Narysujte priamku p a zvoľte taký bod M, ktorého vzdialenosť od priamky p bude 3 cm. Zostrojte množinu všetkých bodov X, pre ktoré platí $|XM| = 4$ cm a ktoré majú od priamky p vzdialenosť 2 cm.

8. Daný je trojuholník ABC so stranami $a = 5{,}5$ cm, $b = 7{,}2$ cm, $c = 4{,}7$ cm. Zostrojte množinu všetkých bodov X, pre ktoré platí, že trojuholníky ABX majú rovnaký obsah ako trojuholník ABC.

9. Určte:
a) pre ktoré reálne čísla r je výraz $\frac{3r+1}{7}$ menší ako 1,
b) pre ktoré reálne čísla s je výraz $\frac{-1}{2s+5}$ nezáporný,
c) pre ktoré reálne čísla t je výraz $\frac{5}{5t+10}$ nekladný.

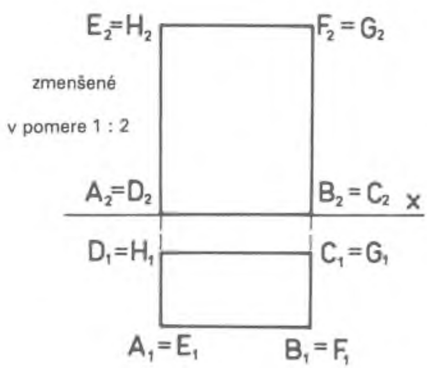
10. Pre dĺžky strán trojuholníka ABC platí: $c = 8$ cm, $a + b = 32$ cm. Určte, aké dĺžky (v celých centimetroch) môžu mať strany a, b.

11. Určte množinu takých celých čísel k, pre ktoré nerovnica $-1{,}7 < x < k$
a) má jediné riešenie, ktoré je celé číslo, b) nemá nijaké celočíselné riešenie.

12. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, keď je daná dĺžka jeho strany $|AB| = 4$ cm a dĺžka jeho uhlopriečky $|AC| = 6$ cm.

13. Zostrojte združené priemety valca, ktorého podstava má priemer 6 cm, jeho výška má takisto 6 cm a stred dolnej podstavy leží v pôdorysni vo vzdialenosti 5 cm od priesečnice pôdorysne a nárysne.

14. Zostrojte sieť kvádra $ABCDEFGH$, keď sú dané jeho združené priemety (obr. SC4.1).



Obr. SC4.1

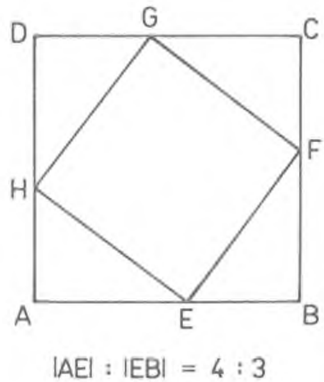
15. Vypočítajte objem konzervy, ktorá má tvar valca s priemerom podstavy 9 cm a výškou 11 cm.

B

1. Meraním sa zistilo, že dĺžka uhlopriečky štvorca je a) 10,82 cm, b) 2,5 m, c) 126 mm. Vypočítajte dĺžku strany štvorca s presnosťou na dve desatinné miesta.

2. Ročne sa v Európe zaznamená približne 20 000 prípadov besnoty zvierat, z toho 80 % pripadá na voľne žijúce zvieratá. Z týchto 80 % pripadá na srnčiu zver 3 %, na líšky 70 % a na kuny 2 %. Určte, koľko líšok, srnčej zveri a kún uhynie ročne na besnotu v Európe.

3. Štvorec *ABCD* má obsah 196 cm^2. Body *E, F, G, H* rozdeľujú jeho strany v pomere 4 : 3 (obr. SC4.2). Vypočítajte obsah štvorca *EFGH.*



Obr. SC4.2

4. Robotník si zarobí za opracovanie 18 odliatkov v úkolovej mzde 45 Kčs. Koľko si zarobí, keď opracuje 26 odliatkov?

5. Podľa plánu malo 8 traktorov urobiť orbu za 8 dní. Po štyroch dňoch 2 traktory kvôli poruche vyradili. O koľko dní sa predĺži orba? Predpokladajme, že všetky traktory majú rovnaký denný výkon.

6. Napíšte ako zmiešané číslo:

$$\frac{17}{5},\ \frac{6}{4},\ \frac{31}{3},\ \frac{81}{18},\ \frac{15}{7},\ \frac{27}{2},\ \frac{41}{8},\ \frac{84}{15}$$

7. Vypočítajte:

a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$, b) $\frac{9}{10}-\frac{7}{20}$, c) $\frac{5}{12}-\frac{5}{6}$, d) $\frac{3}{4}-0{,}6$,

e) $6{,}7-\frac{15}{4}$

8. Vypočítajte:

a) $2\frac{1}{5}+7\frac{3}{8}$ b) $6\frac{1}{10}+2\frac{1}{5}$

c) $5\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}$ d) $4\frac{9}{10}-3\frac{1}{2}$

9. JRD Mier zasialo cukrovú repu na poli s výmerou 27 ha. Vyjadrite túto výmeru a) v m^2, b) v km^2.

10. V trojuholníku ABC platí $a = 5{,}62$ m, $b = 7{,}19$ m, $v_a = 4{,}35$ m. Určte v_b s presnosťou na centimetre.

11. Vypočítajte výšku rovnostranného trojuholníka, ktorého strana má dĺžku 6 cm.

12. Vypočítajte:

$4 : 0{,}8$	$0{,}4 \,.\, 5$
$6 : 0{,}4$	$4 \,.\, 0{,}5$
$4 : 0{,}1$	$10 \,.\, 0{,}1$
$0{,}3 : 0{,}6$	$0{,}9 \,.\, 0{,}1$
$2 : 0{,}2$	$0{,}8 \,.\, 5$

13. Dané sú dve rovnobežky p, t, ktorých vzdialenosť je 5 cm. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky t a z ktorých každá vytína na priamke p tetivu dĺžky 3 cm.

14. Dané sú dve rôzne rovnobežky m, n, ktorých vzdialenosť je 3 cm. Určte množinu všetkých bodov, z ktorých každý má od týchto priamok súčet vzdialeností $v_1 + v_2$ rovnajúci sa 5 cm.

15. Určte najmenšie päťciferné číslo, ktoré je deliteľné troma.

16. Daná je kružnica $k(S;\ 2{,}5\ \text{cm})$ a bod P tak, že platí $|SP| = 3{,}5$ cm. Zostrojte kružnicu l so stredom P tak, aby mala s kružnicou k a) vonkajší dotyk, b) vnútorný dotyk.

17. V rovnoramennom trojuholníku KLM platí $|KM| = |LM| = 5{,}6$ cm a $|\sphericalangle KLM| = 65°$.

a) Rozhodnite bez zostrojenia trojuholníka, či má dlhšiu základňu alebo rameno.
b) Zostrojte daný trojuholník.

18. Zostrojte rovnoramenný trojuholník KLM (temeno L), keď $|\sphericalangle KLM| = 52°$, $|KM| = 6$ cm. Opíšte a vpíšte mu kružnicu.

19. Ak má prázdna nádoba hmotnosť r kg a rovnaká nádoba úplne naplnená vodou hmotnosť t kg, akú hmotnosť má nádoba naplnená vodou do jednej tretiny?

20. Napíšte výrazy:

a) Súčet súčinu čísel x a y a súčinu čísel z a u.
b) Súčin čísel x a y zväčšený o z-násobok čísla u.
c) Súčin čísla x a súčtu čísel y a z násobený číslom u.

21. Vypočítajte spamäti:

a) $8^2, 12^2, 15^2, 6^2, 20^2, 40^2, 300^2$
b) $\sqrt{16} + \sqrt{9} + \sqrt{25}$
c) $\sqrt{16 + 9}$

22. Daná je kružnica $k(S;\ 2\text{ cm})$ a priamka p vo vzdialenosti 5 cm od bodu S. Zostrojte tetivu kružnice k dĺžky 2 cm, ktorá je kolmá na priamku p.

23. Riešte rovnice:

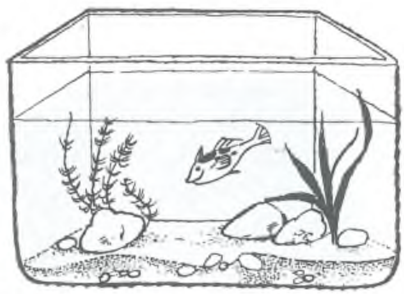
a) $\frac{3x}{2} + 4\frac{1}{2} = 0{,}3$

b) $\frac{x+2}{4} - \frac{x-25}{5} + \frac{x-3}{7} = 7$

c) $\frac{1}{2}\left(3x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(4x - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(5x - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12}$

24. Rýchlosť Zeme, ktorou obieha okolo Slnka, je 30 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Akú dráhu prejde Zem za 1 hodinu (za 1 minútu)?

25. Do akej výšky siaha hladina vody v akváriu, ktoré má rozmery podstavy 80 cm a 45 cm, keď je v ňom 100 l vody?



26. Určte priemer kruhu, keď $S = 160\ \text{mm}^2$.

27. Vypočítajte:

a) $2{,}1 \,.\, 7{,}6 + 3{,}9 \,.\, 7{,}6$

b) $\frac{7}{3} \,.\, \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \,.\, \frac{9}{12}$

c) $6{,}5 \,.\, 8{,}2 - 3{,}5 \,.\, 8{,}2$

d) $\left(\frac{7}{3} - \frac{14}{12}\right) \,.\, \frac{3}{7}$

e) $(0{,}4 + 0{,}03) \,.\, 0{,}6$

f) $2 + \frac{8}{15} \,.\, \frac{3}{4}$

28. Ktoré celé nezáporné čísla sú riešením nerovnice

$$\frac{x+1}{5} - \frac{x-2}{2} < \frac{2x-4}{2}\ ?$$

29. Upravte:

a) $3x + 9t - 3z$

b) $-2x - 4y - 12u$

c) $(x + y) \,.\, 2 - (x + y) \,.\, 7$

30. Začiatkom roka malo mesto 265 781 obyvateľov, koncom roka 282 055 obyvateľov. Koľkopercentný bol prírastok obyvateľov?

31. Kontrolný orgán prevážil v predajni mäsa pätnásť nákupov u náhodne vybratých zákazníkov. Zistené výsledky sú v nasledujúcej tabuľke. Koľko korún si neoprávnene privlastnil predávajúci?

Nákup	Účtovaná cena (v Kčs)	Správna cena (v Kčs)
1	42,00	41,40
2	42,30	42,10
3	77,00	76,90
4	31,00	30,00
5	56,20	56,30
6	13,30	13,80
7	28,70	28,70
8	7,20	7,00
9	23,00	23,30
10	12,00	12,40
11	63,10	61,80
12	11,10	11,30
13	16,00	16,00
14	76,00	74,90
15	82,40	81,60

32. Vypočítajte dĺžku strany kosoštvorca, ktorého uhlopriečky majú dĺžky $u_1 = 10$ cm, $u_2 = 24$ cm.

33. Overte, že rovnobežník, pre ktorý platí obsah $S = 2{,}25$ cm^2 a obvod $o = 6$ cm, je štvorec.

34. Ktorá z uvedených krajín sveta má najväčšiu hustotu osídlenia? Dané údaje vhodne zaokrúhlite.

Krajina	Rozloha (km^2)	Počet obyvateľov
Čína	9 596 961	1 008 000 000
ZSSR	22 274 000	269 000 000
Indonézia	2 027 087	151 000 000
India	3 287 590	683 000 000
Brazília	8 511 965	135 000 000
USA	9 363 166	232 000 000

35. Rybník Rožmberk má rozlohu 4,8 km^2, priehradová nádrž Lipno má 46,50 km^2.

a) Vyjadrite rozlohy obidvoch vodných plôch v ha a v m^2.

b) Porovnajte rozlohy obidvoch vodných plôch rozdielom aj podielom.

36. Riešte nerovnice:

a) $7x + 5(x - 10) > 0$

b) $1{,}2(3 - x) \geqq 2$

c) $3{,}5 - 2{,}5(z + 2) < 0$

d) $\frac{2x - 1}{4} + 1 < \frac{1}{2}$

e) $\frac{3x + 1}{2} - 2 \geqq \frac{1}{4}$

f) $4x - 3 > 5 - 2x$

g) $\frac{3}{4}x - 5 > 0$

h) $2 + 5x < 2x - 6$

i) $\frac{2x - 3}{12} + \frac{3 - x}{16} > 0$

j) $\frac{1 - 2x}{2} + \frac{2x - 5}{2} < \frac{7}{6}$

37. Ktoré prirodzené čísla sú riešením týchto nerovníc:

a) $\frac{2 + 27x}{6} \leqq \frac{5}{2} + \frac{12x + 1}{3}$

b) $\frac{4x}{3} \leqq \frac{2}{3} + x$

c) $3(x + 2) < \frac{x - 2}{2}$

38. Pre ktoré čísla v sú dané zlomky kladné?

a) $\frac{3}{8 + v}$

b) $\frac{2 - v}{12}$

c) $\frac{-4}{2v - 1}$

39. Riešte rovnice:

a) $4(x + 2) - 7(2x - 1) = 30 - 9(3x - 4)$

b) $3(2x - 1) - 5(x - 3) + 6(3x - 4) = 83$

c) $8(7 - 4x) - 7(4x + 1) = 19 - 5(8x - 1)$

d) $5x - 3(x - 4) - (2x - (x + 5) + 8) = 0$

40. O koľko a koľkokrát je dlhšia najdlhšia rieka sveta Amazonka (7 025 km) ako Vltava (430 km)?

41. Určte, pre ktoré čísla y sú nekladné výrazy:

a) $\frac{2y+4}{4} + 3(y+2)$
b) $3y - 2(y+1) + 3(1-y)$

42. Riešte nerovnice:

a) $2(4x-1) + 3 \leqq 3 + 4(2x+3)$
b) $5x - 3 + 2x < 7x - 9$

43. Zostrojte ľubovoľný rovnobežník $KLMN$. Označte E stred strany KL a F stred strany MN.

a) Zostrojte obraz tohto rovnobežníka v posúvaní, v ktorom bude bod F obrazom bodu K.
b) Zostrojte obraz rovnobežníka $KLMN$ v posúvaní, v ktorom bude bod N obrazom bodu E.
c) Opíšte vzájomný vzťah obrazov rovnobežníka $KLMN$ v obidvoch posúvaniach.

44. Zostrojte rovnostranný trojuholník KLM, keď platí $|KL| = 6$ cm. Označte K_1 stred strany LM, L_1 stred strany KM a M_1 stred strany KL.

a) V súmernosti podľa osi K_1L_1 zostrojte obraz $K'L'M'$ trojuholníka KLM.
b) Vypočítajte obvod šesťuholníka $KLK_1L'K'L_1$ a súčet jeho vnútorných uhlov.

45. Rozhodnite, ktorý z daných trojuholníkov je pravouhlý:
a) $a = 5$ m, $b = 7$ m, $c = 10$ m
b) $e = 80$ cm, $f = 170$ cm, $g = 150$ cm
c) $k = 48$ dm, $l = 56$ dm, $m = 72$ dm
d) $x = 11{,}9$ m, $y = 16{,}9$ m, $z = 12$ m

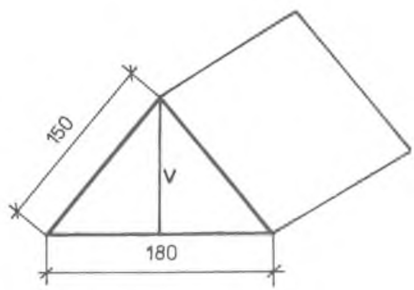
46. Kružnica $k(S;\ 17{,}8\ \text{cm})$ má tetivu dĺžky 16 cm. Vypočítajte vzdialenosť stredu S kružnice od tejto tetivy.

47. Kružnica má stred v strede obdĺžnika $ABCD$, $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 3$ cm. Aký musí mať polomer, aby a) nepretínala ani jednu z jeho strán, b) pretínala práve dve jeho strany, c) pretínala všetky jeho strany?

48. Dve kružnice s polomermi dĺžok 13 cm a 15 cm sa pretínajú a majú spoločnú tetivu dĺžky 24 cm. Vypočítajte vzdialenosť stredov obidvoch kružníc.

49. Priemer kmeňa na najužšom mieste je 30 cm. Možno z neho vyrezať hradu so štvorcovým prierezom so stranou dĺžky 20 cm?

50. Vypočítajte výšku stanu s rozmermi v centimetroch podľa obr. SC4.3.



Obr. SC4.3

51. Určte obsahy papierov formátov A3 (297×420), A4 (210 krát 297), A5 (148×210). (Rozmery sú dané v milimetroch.)

52. Najstarší národný park u nás KRNAP (krkonošský) má rozlohu 385 km^2. Koľkokrát je väčší ako TANAP (tatranský), ktorý má rozlohu 21 000 ha?

53. Lyžiari bežali 4 dni po určenej trati. Prvý deň prebehli $\frac{1}{3}$ trate, druhý deň $\frac{2}{9}$ trate, tretí deň $\frac{1}{3}$ trate. Štvrtý deň prebehli o 15 km menej ako druhý deň. Aká dlhá bola trať? Na 50. km a 100. km boli kontrolné hliadky. Ktorý deň bežali okolo týchto hliadok? Akú časť trate v percentách mali v týchto okamihoch za sebou? Znázornite celú trať aj s kontrolnými hliadkami a dennými úsekmi graficky.

54. Vo vzdialenosti 12 km od priamej železničnej trate je delo, ktorým možno strieľať do vzdialenosti 20 km. Aká dlhá časť trate je v dostrele?

55. Obdĺžnikový pozemok upravili po demolácii starých budov na mestský park. Jeho rozmery sú 120 m a 80 m. Vybudovali v ňom aj kruhový bazén s polomerom 5 m, dve štvorcové pieskoviská so stranou dĺžky 4 m a 20 % rozlohy celého pozemku tvoria ihriská a cesty. Zvyšnú plochu zatrávnili. Vypočítajte výmeru trávnatej časti parku.

56. Nad riekou sú tri pontónové mosty. Po prvom pontóne by prešla celá kolóna vozidiel za hodinu, po druhom, ktorý je menší, by prešla za hodinu polovina vozidiel a po treťom, ktorý je najmenší, iba tretina kolóny. Za aký čas by prešla celá kolóna, keby išla po všetkých troch mostoch naraz?

57. Ženijná jednotka s počtom 96 mužov postaví štyridsaťtonový most za 5 hodín. Za aký čas postaví ten istý most 54 ženistov?

58. Osobné auto spotrebovalo na 100 km jazdy po rovine priemerne $8\frac{1}{4}$ litra benzínu, do kopca $10\frac{1}{2}$ litra benzínu a z kopca $5\frac{1}{8}$ litra benzínu. Určte priemernú spotrebu benzínu na 100 km, keď auto prešlo 178 km, z čoho 48 km bolo stúpanie, 40 km klesanie a zvyšok cesty išlo po rovine.

59. Vytlačená učebnica má 96 strán, pričom na každej strane je 41 riadkov dlhých $10\frac{1}{2}$ cm.
a) Koľko strán by mala učebnica, keby na každej strane bolo 82 riadkov dlhých 12 cm?
b) Koľko riadkov dĺžky 12,6 cm by muselo byť na jednej strane, aby učebnica mala iba 82 strán?

60. Československá námorná loď Lidice pláva priamym smerom z miesta so zemepisnými súradnicami 1° s. š., 0°40′ z. d. k miestu so súradnicami 0°24′ j. š., 0°58′ v. d. Kde približne prejde rovník? Kde prepláva nultý poludník? Riešte graficky (stupne rysujte rovnako veľké a zvoľte si 1 mm = 1′).

61. Naša vlasť je na treťom mieste na svete v spotrebe cigariet na jedného obyvateľa. Ročne sa u nás prefajčí asi 7 miliárd Kčs. Vypočítajte, koľko áut v cene 80 000 Kčs alebo bytov v cene 160 000 Kčs by sa dalo zaobstarať za túto sumu.

62. Žiaci založili pred novou školskou budovou obdĺžnikový trávnik s rozmermi 32 m a 6 m. V strede tohto trávnika je štvorcový bazén so stranou dĺžky 4 m. Koľko trávového semena spotrebovali na osiatie záhonu, keď na 1 m^2 treba 25 g semena?

63. Doplňte:

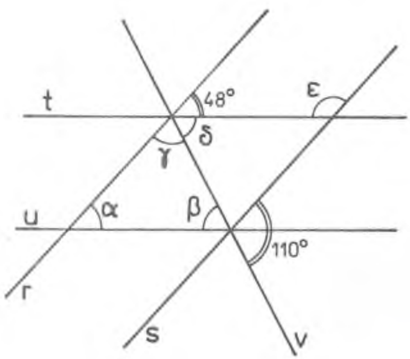
$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = ?^2$$
$$1 + 3 + 5 = ?^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = ?^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = ?^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 19 = ?^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 99 = ?^2$$

64. Zahrmenie bolo počuť 13 s po blesku, ktorý zapríčinil poruchu v rozhlasovom prijímači. Ako ďaleko je búrka? (Rýchlosť zvuku vo vzduchu je 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.)

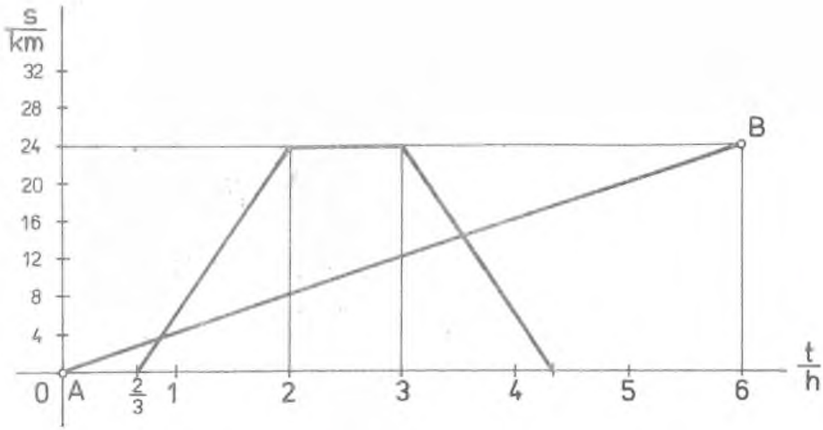
65. V sobotu pomáhali žiaci 7.B triedy pri zbere zemiakov. 24 žiakov urobilo určitú prácu za 5 hodín. Za aký čas by boli urobili túto prácu, keby bolo prišlo ešte 6 žiakov, ktorí boli chorí? (Predpokladáme, že všetci žiaci majú rovnaký výkon.)

66. Zostrojte časť grafu nepriamej úmernosti, ktorého krajné body majú súradnice $A\,[1, 12]$, $B\,[12, 1]$.

67. Na obr. SC4.4 sú vyznačené veľkosti niektorých uhlov, ktoré sú vytvorené priamkami r, s, t, u, v. Vypočítajte veľkosti uhlov $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ak $r \parallel s$ a $t \parallel u$.



Obr. SC4.4



Obr. SC4.5

68. Na obr. SC4.5 je graf pohybu turistu a bicyklistu, ktorí išli z miesta A do miesta B a späť. Z grafu určte
a) rýchlosť pešieho turistu a bicyklistu,
b) koľkokrát sa navzájom stretli,
c) ako dlho sa zdržal bicyklista v mieste B,
d) kde stretol bicyklista turistu.

69. Historická úloha (7 000 rokov pred n. l.). Každý zo 7 ľudí má 7 mačiek, každá mačka chytí 7 myší, každá myš zožerie 7 klasov jačmeňa, z každého klasu môže vyrásť 7 meríc zrna. Koľko meríc zrna sa zachráni vďaka mačkám? (1 merica = 61,486 l.)

70. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami $|AB| = 19$ cm, $|BC| = 23$ cm. Určte dĺžky všetkých jeho ťažníc.

71. Čomu sa musí rovnať číslo x, aby čísla $x + 1$ a $x - 2$ boli navzájom opačné čísla?

72. Otec je trikrát starší ako syn. Spolu majú 60 rokov. O koľko rokov bude otec dvakrát starší ako syn?

73. Zostrojte rovnoramenný lichobežník $KLMN$ ($KL \parallel MN$), ktorého uhlopriečky sú navzájom kolmé a platí $|\sphericalangle NKL| = 60°$, $|KL| = 7$ cm.

74. Určte vnútorné uhly trojuholníka, ktorý dostanete tak, že na ciferníku hodín spojíte číslice 2, 6, 9.

75. Na mape s mierkou 1 : 800 000 je vzdušná vzdialenosť Bratislavy od
a) Trnavy 5 cm
b) Trenčína 13,5 cm
c) Nitry 9,3 cm
d) Banskej Bystrice 20,5 cm
e) Lučenca 23,4 cm
h) Prievidze $16\frac{1}{4}$ cm
Aké sú skutočné vzdialenosti?

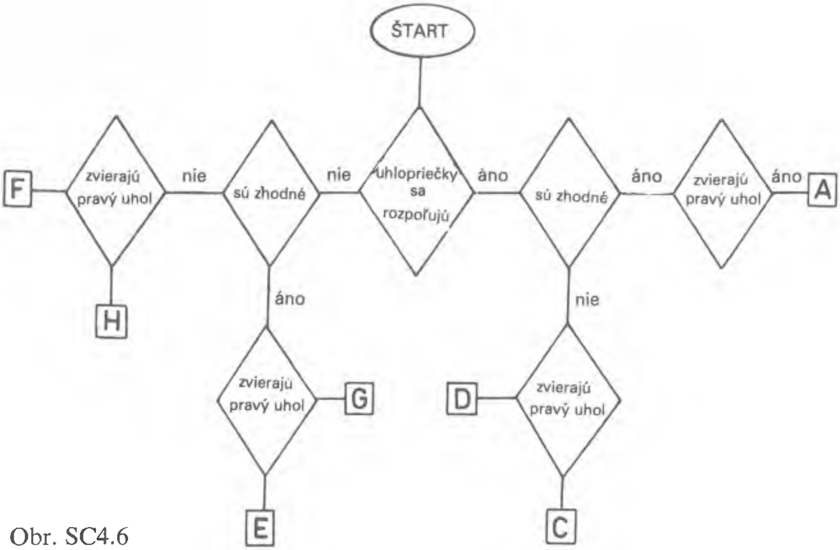
76. Aká hlboká musí byť nádrž tvaru kvádra so šírkou 2,45 m, dĺžkou 3,25 m, ak chceme, aby po naliatí 120 hl vody bola hladina 10 cm pod okrajom nádrže?

77. Zostrojte kosoštvorec $KLMN$, keď je dané
a) $|KL| = 6$ cm, $v = 4$ cm
b) $|KL| = 4{,}5$ cm, $|KM| = 5{,}5$ cm

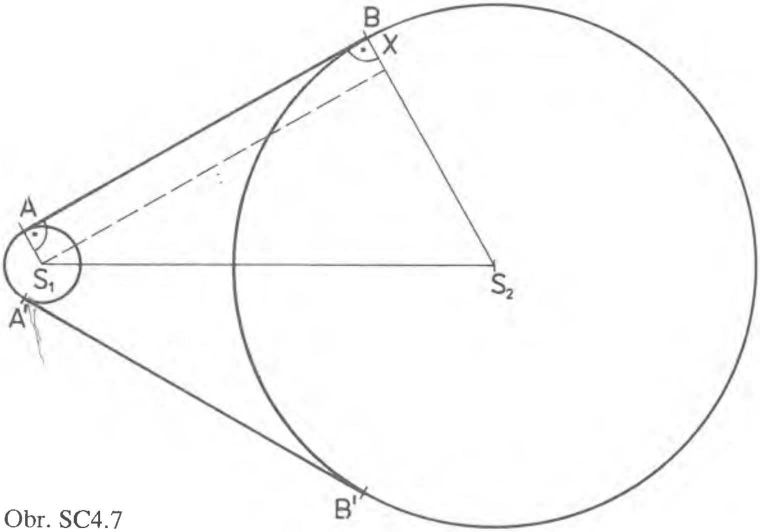
78. Priamka p má od stredu kružnice $k(S;\ 3\text{ cm})$ vzdialenosť 2,5 cm. Zostrojte kružnicu m s polomerom $r = 1{,}5$ cm, ktorá sa dotýka priamky p a s kružnicou k má vonkajší dotyk.

79. Načrtnite štvoruholníky, ktoré patria v diagrame do štvorčekov označených písmenami A, B, C, D, E, F, G, H. Napíšte názvy tých, ktoré poznáte (obr. SC4.6).

80. Medzi dve kolesá s polomermi 5 cm a 35 cm je natiahnutý remeň. (Obr. SC4.7.) Vypočítajte dĺžku remeňa, keď vzdialenosť stredov kolies je 60 cm.



Obr. SC4.6



Obr. SC4.7

81. Účinnosť svetelného zdroja sa určuje pomerom množstva svetelnej energie, ktorú zdroj vyžaruje, k množstvu energie, ktorú spotrebuje. Za posledných 100 rokov sa účinnosť svetelných zdrojov veľmi zvýšila. Aby sme získali predstavu, zvolíme si za základ žiarovku 100 W. V tabuľke sú uvedené príkony svietidiel, ktoré by svietili rovnako ako táto žiarovka:

Edisonova žiarovka z roku 1879	500 W
Philipsonova žiarovka z roku 1891	300 W
Halogénová výbojka	60 W
Vysokotlaková ortuťová výbojka	25 W
Philipsonova žiarovka z roku 1979	16 W
Vysokotlaková sodíková výbojka	12,5 W
Nízkotlaková sodíková výbojka	8 W

Vypočítajte, v akom pomere sa zvýšila účinnosť elektrického osvetlenia zavedením nových svetelných zdrojov vzhľadom na žiarovku Tomáša Alvu Edisona a vzhľadom na súčasnú 100 W žiarovku.

82. Keby sa spracovala polovica železa, ktoré sa u nás odváža s denným odpadom na skládky, usporilo by sa denne 2 000 t železnej rudy a 40 000 pracovných hodín.

a) Vypočítajte úsporu pracovných síl pri 8-hodinovom pracovnom čase.
b) Vypočítajte, o koľko percent by sa mohol znížiť dovoz železnej rudy zo západných krajín, ktorý je ročne 2,5 milióna ton. (Počítajte, že rok má 365 pracovných dní.)

83. Iba pomocou kružidla a pravítka narysujte uhly:

a) 45°, b) $22\frac{1}{2}^\circ$, c) 60°, d) 120°, e) 15°, f) 135°.

84. Zostrojte trojuholník ABC, keď platí:

a) $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 45^\circ$
b) $a = 8$ cm, $c = 5$ cm, $\beta = 120^\circ$
c) $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 135^\circ$

85. Číslo 135 rozdeľte na tri časti tak, aby druhá časť bola dvakrát väčšia ako prvá a tretia rovnako veľká ako druhá časť.

86. Koľkokrát je a) 0,7 väčšie ako 0,28,
b) 0,14 menšie ako 0,7?

87. Deľte na 2 desatinné miesta (bez kalkulačky):
a) 14,84 : 0,48 b) 1,175 : 0,78
c) 0,26 : 0,79 d) 0,113 9 : 0,37

88. Doplňte vynechané číslice v daných číslach tak, aby čísla boli deliteľné
a) dvoma: 4 86.; 2 0.4; 3 .35
b) piatimi: 34.; 6 5.0; 3 .45; 6 .37
c) desiatimi: 64.; 3.0; .70
d) troma: 34.; 2 8.7; .45; . 381

89. Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel:
a) 6, 9, 15 b) 15, 35, 50
c) 38, 48, 78 d) 14, 63, 98

90. Dvaja pretekári vybehnú súčasne z toho istého miesta na kruhovú dráhu. Prvý obehne celý kruh za 72 s, druhý za 1 min 21 s. Koľkokrát obehne dráhu každý z nich, kým sa stretnú opäť na tom mieste, odkiaľ vybehli?

91. Určte číslo, ktorého $\frac{2}{3}$ sa rovnajú trom štvrtinám čísla $\frac{4}{9}$.

92. Mierka mapy je 1 : 75 000.
a) Aká je v skutočnosti vzdialenosť dvoch miest, keď ich vzdialenosť na mape je 12,4 cm?
b) Aká je skutočná rozloha lesa, ktorý je na tejto mape znázornený štvorcom s obsahom 16 cm^2?

93. Keď sa do nádoby tvaru valca naleje 0,35 l vody, siaha do výšky 3,7 cm. Ako vysoko vystúpi voda, keď do tejto nádoby sa naleje 5,8 l vody?

94. Starý otec, otec a syn majú dohromady 128 rokov. Otec je 5-krát starší ako syn, starý otec je 2-krát starší ako otec. Koľko rokov má každý z nich?

95. V minulom roku malo JRD Mier 680 oviec. V tomto roku sa počet oviec zvýšil o 15 %. Koľko oviec má JRD Mier teraz?

96. Záhrada s rozmermi $a = 45$ m, $b = 36$ m sa zväčšila tak, že dĺžka sa zväčšila o 7 % a šírka o 6 %. Aká je rozloha zväčšenej záhrady a o koľko percent je väčšia ako pôvodná záhrada?

97. Oceľové tyče, ktoré vyrába istý štátny podnik, majú obdĺžnikový prierez s rozmermi 3,5 cm a 2,4 cm; predpokladaná dĺžka je 10 m. Náhodne vybrali 5 tyčí z automatickej linky a odmerali ich dĺžky. Dostali tieto výsledky: 9,83 m; 10,10 m; 9,72 m; 9,91 m; 10,04 m. Určte, aký je rozdiel medzi hmotnosťou týchto tyčí a predpokladanou hmotnosťou. (Hustota ocele je 7,8 $\frac{g}{cm^3}$.)

98. Upravte:

a) $q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{3}q$ b) $3m + 4m - \frac{2}{3}m$

c) $7ac - ac + 2ac$ d) $4z - \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}z$

99. Na oplotenie dvoch pozemkov sa spotrebovalo rovnaké množstvo pletiva. Jeden z pozemkov má tvar obdĺžnika s rozmermi 220 m a 160 m, druhý má tvar štvorca. Ktorý z nich má väčšiu rozlohu a o koľko?

100. Jedna strana trojuholníka má dĺžku 3 cm. Rozdiel dĺžok druhých dvoch strán je 1 cm. Určte dĺžky strán tohto trojuholníka, keď viete, že sú vyjadrené celými číslami.

ZOZNAM ZNAČIEK POUŽÍVANÝCH V UČEBNICI

Algebra

$\doteq$	približne sa rovná alebo rovná sa po zaokrúhlení
$\neq$	nerovná sa, je rôzne od
$a > b$	číslo a je väčšie ako číslo b
$a < b$	číslo a je menšie ako číslo b
$a \geqq b$	číslo a je väčšie alebo sa rovná číslu b
$a \leqq b$	číslo a je menšie alebo sa rovná číslu b
$a \in A$	a je prvkom množiny A
$a \notin A$	a nie je prvkom množiny A
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$A \cap B$	prienik množín A a B
$A \cup B$	zjednotenie množín A a B
$\emptyset$	prázdna množina
N	množina prirodzených čísel
Z	množina celých čísel
Q	množina racionálnych čísel
R	množina reálnych čísel

Geometria

$\mapsto RS$	polpriamka RS
$\leftrightarrow RS$	priamka RS
$A \in a$	bod A leží na priamke a
$A \in k$	bod A leží na kružnici k
$a \parallel b$	priamka a je rovnobežná s priamkou b
$a \nparallel b$	priamky a, b nie sú rovnobežné
$a \perp b$	priamka a je kolmá na priamku b, priamky a, b sú navzájom kolmé
$\overparen{AXB}$	oblúk kružnice (kružnicový oblúk) s krajnými bodmi A, B, ktorý prechádza bodom X
$\|AB\|$	dĺžka úsečky AB
$\sphericalangle AVB$	uhol AVB
$\|\sphericalangle AVB\|$	veľkosť uhla AVB
$AB \cong CD$	úsečka AB je zhodná s úsečkou CD
$\mapsto ABC$	polrovina s hranicou AB a vnútorným bodom C

VÝSLEDKY CVIČENÍ

8 KRUH. KRUŽNICA. VALEC

8.2 Vzájomná poloha kružnice a priamky

1. a) Sečnica; b) nesečnica; c) dotyčnica **2.** b) $RH \cong RL$ **3.** b) Rovnobežné

8.3 Oblúk kružnice. Kruhový výsek

2. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$ **4.** a) Zhodné, b) zhodné, c) zhodné

8.4 Vzájomná poloha dvoh kružníc

4. $0 \text{ cm} < r_2 < 1{,}5 \text{ cm}$

8.5 Dĺžka kružnice. Obvod kruhu

1. a) 6,28 m; b) 75,4 cm; c) 3,14 dm; d) 100,5 mm; e) 14,83 m **2.** a) 31,4 m; b) 176 cm; c) 3,77 dm; d) 50,27 m; e) 7,07 m **3.** a) 4 m; b) 15 cm; c) 1,62 dm; d) 26 mm; e) 6,45 m **4.** O 31,4 cm **5.** 264 cm **6.** a) 51-krát; b) 25 670-krát

8.6 Obsah kruhu

1. a) 12,56 m^2; b) 3 632 cm^2; c) 19,63 dm^2; e) 1,21 m^2 **2.** a) 28,27 cm^2; b) 254,47 dm^2; c) 1,2 m^2; d) 154 mm^2 **3.** a) 10 dm; b) 36 cm; c) 1,27 m **4.** a) 50,46 cm; b) 31,92 dm; c) 9,77 m **5.** a) 464,7 cm^2; b) 8,3 m^2 **6.** 2 375 mm^2 **7.** a) 28,27 cm^2; b) deväťkrát **8.** a) Štvorec 400 cm^2, kruh 314,16 cm^2; b) 1,27-krát

8.7 Slovné úlohy

1. 1 018 m^2 **2.** Aj mačka; medzera je 15,9 cm **3.** a) 3 dm; b) 11,3 cm; c) 8,7 mm **4.** a) Nie; b) 3,02 m **5.** b) 321,5 m^2 **6.** 113,1 m **7.** 23 % **8.** a) 1,26 m za s; b) 14,3 s

8.8 Valec. Povrch valca. Objem valca

1. a) 37,7 dm^2; b) 186,92 cm^2; c) 251,33 m^2; d) 259,18 dm^2; e) 5,34 m^2 **2.** a) 62,83 cm^3; b) 6,28 dm^3; c) 1 570,8 m^3; d) 17,67 cm^3; e) 2,36 m^3 **3.** a) 8,84 cm; b) 5,09 dm; c) 119,37 cm; d) 0,19 m **4.** a) 3,19 cm; b) 2,7 m; c) 1,78 cm; d) 0,69 m

5.

r	v	S_p	S_{p1}	S	V
		16,62 cm^2	117,1 cm^2	150,3 cm^2	134,61 cm^3
	6,75 cm	55,42 cm^2		288,84 cm^2	374,1 cm^3
3,1 dm			41,41 dm^2	101,41 dm^2	201 dm^3
	2,21 m	7,1 m^2	20,9 m^2		15,65 m^3
	11,23 m	78,54 m^2	352,8 m^2	509,9 m^2	
1,95 m		12 m^2	153,5 m^2	177,5 m^2	

6. a) 7,08 cm; b) 74,58 dm; c) 3,9 mm; d) 0,86 m

8.9 Povrch a objem valca v slovných úlohách

1. 11 m^2 **2.** a) 8,5 m^3; b) 39,6 hl **3.** a) 2 036 m^3; b) 22 600 Kčs **4.** 53 cm **5.** 16 s **6.** 7,8 m^2

9 LINEÁRNE ROVNICE

9.1 Rovnosť

3. -1; 3

9.2 Rovnice

1. a) 5; b) 7; c) 2; d) 8; e) 3; f) 27 **2.** a) 2; b) 4; c) 2; d) 1; e) 2; f) 2 **3.** a) 1; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) 2; e) $-\frac{2}{3}$; f) 2 **4.** a) $\frac{2}{3}$; b) -3; c) 1,5

9.3 Ekvivalentné úpravy rovníc

1. a) 7; b) 3; c) 6; d) 17,5; e) 3; f) 5 **2.** a) 33; b) 6; c) -6; d) -7 **3.** a) -3; b) 3,4; c) 1,9; d) -2 **4.** a) 10; b) 3; c) $\frac{4}{5}$; d) 2 **5.** a) 7; b) 8; c) 49; d) $\frac{2}{5}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1 **6.** a) 9; b) 10; c) 1 **7.** a) 1; b) -15; c) 28; d) $\frac{3}{2}$ **8.** a) 1; b) 1; c) 10; d) 12 **9.** a) Nemá riešenie; b) ľubovoľné číslo; c) ľubovoľné číslo; d) nemá riešenie **10.** 30 **11.** -2 **12.** 11

9.5 Slovné úlohy

1. 36 **2.** 30 **3.** 8 **4.** 15 cm; 30 cm; 42 cm **5.** 390 g, 78 g, 73 g **6.** 55; 11 **7.** 29; 27 **8.** 10; 120 **9.** 154 cm, 166 cm, 150 cm **10.** 717 miliónov a 2 miliardy 583 miliónov **11.** 18 kg **12.** $\frac{3}{2}$ **13.** 490 dubov, 160 javorov, 70 líp **14.** 156 **15.** 65; 15 **16.** Pred 56; 36; 18; po 74; 6; 30 **17.** 1 691 Kčs, 1 409 Kčs, 1 620 Kčs **18.** 55°, 55°, 70° **19.** Sumu, ktorú dostal každý zo synov, označíme x, prvý z bratov dostal 100 zlatých a šestinu zvyšku dedičstva, celé dedičstvo je teda $100 + 6(x - 100) = 6x - 500$ zlatých, druhý brat dostal $200 + \frac{1}{6}(6x - 500 - x - 200) = \frac{5x + 500}{6}$; musí platiť rovnica $x = \frac{5x + 500}{6}$, odtiaľ $x = 500$. Každý brat dostal 500 zlatých. Celkové dedičstvo bolo $6x - 500 = 2\,500$ zlatých, takže bratov bolo päť. **20.** 84

9.6 Slovné úlohy o pohybe

1. 48 min, 56 km **2.** $\frac{1}{2}$ h, 37,5 km **3.** 1 h 12 min **4.** 42 $\frac{km}{h}$, 54 $\frac{km}{h}$ **5.** Približne 10 minút, 3,3 km **6.** 85 $\frac{km}{h}$, 90 $\frac{km}{h}$ **7.** O 2 h, 12 km od chaty **8.** 5 $\frac{km}{h}$, 4 $\frac{km}{h}$ **9.** 9 h 34 min; 10 h 30 min; 10 h 45 min **10.** Nie

9.7 Výpočet neznámej zo vzorca

1. $t = \frac{s}{v}$ **2.** $r = \frac{o}{2\pi}$ **3.** $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ **4.** $v_a = \frac{2S}{a}$ **5.** $\frac{v_c \cdot c}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$; z toho vyplýva $v_c = \frac{a \cdot b}{c}$ **6.** $z_2 = \frac{2S}{v} - z_1$ **7.** $I = \frac{U}{R}$ **8.** $n_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot n_1$ **9.** $s = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}$ **10.** $v_2 = \frac{a - tv_1}{t}$

Súhrnné cvičenia III

A

1. a) 6; b) 2; c) 3; d) $-\frac{1}{15}$; e) 2; f) 9 **2.** a) 3; b) nemá riešenie; c) 10; d) 1 **3.** 20 min **4.** 60 km **5.** 8 kg, 40 kg, 80 kg **6.** 3,4 cm, 6,3 cm **8.** $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot v}}$ **9.** a) $t = \frac{s}{v}$; b) $V = \frac{m}{\varrho}$ **10.** 11 cm **12.** a) Pretínajú sa; b) pretínajú sa; c) nemajú nijaký spoločný bod; d) vonkajší dotyk; e) vnútorný dotyk **13.** Približne 6 cm. **14.** 68 kg **15.** 28,66 cm^2 **16.** a) 28,4 cm; b) 31,8 cm^2 **17.** 32 cm^2, 64 % **18.** 13 cm **20.** a) Pretínajú sa; b) sústredné; c) vonkajší dotyk; d) nemajú spoločné body

B

1. a) 10; b) 0 **2.** Zväčší sa dvakrát, zmenší sa trikrát, zväčší sa dvakrát, zmenší sa dvakrát, zmenší sa trikrát, zväčší sa trikrát **3.** 1 164 g **4.** 1 : 38 606 060 **5.** 38 %, 30 % **7.** 5 088 320 **8.** 11 Kčs **9.** $o \doteq 184{,}8$ cm, $S = 1\,400$ cm^2 **10.** a) $\frac{9}{14}$; b) $1\frac{23}{42}$; c) $\frac{85}{98}$; d) $\frac{3}{2}$; e) 1,2; f) $\frac{3}{2}$; g) $\frac{3}{2}$ **11.** 83 Kčs **13.** a) $x - 3y$; b) $3a + 2$; c) $-2k$ **14.** 176,6 kg **15.** 185 **16.** 8 640 kg **17.** 112,64 kg **20.** 8 h

10 KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY

10.1 Jednoduché konštrukcie

7. Podľa vety *sss*, pretože sú splnené trojuholníkové nerovnosti **9.** $r = \frac{5,5}{2}$ cm **10.** Rozpolením uhla 60° a grafickým sčítaním **11.** Podľa vety *usu* ($\alpha + \beta < 180°$) **13.** Ak ležia rôzne body A, B, C na priamke, kružnica sa nedá zostrojiť **14.** Trojuholník

10.2 Množiny všetkých bodov danej vlastnosti

1. Ak je o os úsečky MN, tak a) polrovina oN; b) polrovina oN bez hraničnej priamky o **2.** Priamky $a \neq b$ rovnobežné s p vo vzdialenosti 1,5 cm **3.** Kružnica $g(P;\ 3\text{ cm})$ **4.** Os súmernosti rovnobežiek **5.** Priamky $m \neq n$ rovnobežné s AB vo vzdialenosti stredu rovnobežníka $ABCD$ od priamky AB **6.** a) Priamky $m \neq n$ rovnobežné s AB vo vzdialenosti 3 cm; b) rameno AC uhla CAB okrem bodu A

10.3 Talesova kružnica

1. Ak S je stredom úsečky PQ, je to $k(S;\ r = \frac{1}{2}|PQ|)$ okrem bodov P, Q **2.** Ak S je stredom úsečky AB, je to $k(S;$ 3,5 cm$)$ okrem bodov A, B **3.** b) $|KT| \doteq 5{,}12$ cm **4.** a) $Q \in k$; b) $|QS| > 2{,}5$ cm; c) $|QS| < 2{,}5$ cm

10.4 Konštrukčné úlohy

1. Dve riešenia **2.** Dve riešenia **3.** a) Dve riešenia v zvolenej polrovine; b) najskôr pomocný pravouhlý $\triangle\ CB_0B$ ($|BB_0| = v_b$, $|\sphericalangle\ CB_0B| = 90°$), potom A je priesečník CB_0 s ramenom uhla β **4.** a) Najskôr $\triangle\ ABC$ (*sus*), potom $\triangle\ ACD$ (*sss*); b) najskôr $\triangle\ ABC$ (*sus*), potom $\triangle\ BCD$ (*sus*) **5.** a) Najskôr

$\triangle\, ABC$ (sss), potom $D \in k \cap CD'$, kde $k(A;\, r = d)$, $\mapsto CD'$ je rameno uhla γ; b) jedno riešenie v zvolenej polrovine **6.** a) Najskôr $\triangle\, ABC$ (a, β, v), potom D na $m \parallel AB$ vo vzdialenosti v tak, že $|DC| = c$ **7.** a) $KLMN$ je súmerný podľa osi úsečky KL, najskôr $\triangle\, NKL$ (sus); b) najskôr pomocný $\triangle\, M'LM$, kde $|M'L| = |KL| - |NM|$ **8.** BC je tetivou opísanej kružnice; pre $v_a > 3{,}8 + \sqrt{3{,}8^2 - 2{,}25^2}$ úloha nemá riešenie **9.** a) Dve riešenia ($t_c > v_c$); b) jediné riešenie ($t_c = v_c$); c) úloha nemá riešenie ($t_c < v_c$) **10.** a), b) Jediné riešenie v zvolenej polrovine; c) nemá riešenie (nemôže byť $t_c < \frac{1}{2}c$, lebo v pravouhlom trojuholníku platí $t_c = \frac{1}{2}\, c$ **11.** a) Dve riešenia ($v_c < \frac{1}{2}c$); b) ani jedno riešenie ($v_c > \frac{1}{2}c$); c) jediné riešenie ($v_c = \frac{1}{2}c$) vždy v zvolenej polrovine

12 LINEÁRNE NEROVNICE

12.1 Riešenie lineárnych nerovníc v obore reálnych čísel

1. a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; c) 1, 2, 3, 4, 5; d) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; e) 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20; f) 1, 2, 3, 4, 5 **2.** a) 2, 3, 5, 7; b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31; c) 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

12.2 Ekvivalentné úpravy nerovníc

1. a) $x < 5$; b) $x < 8$; c) $x \leqq \frac{6}{10}$; d) $x < 10$ **2.** a) $-2 > -8$; b) $-\frac{1}{2} > -\frac{5}{4}$; c) $1 \geqq 0$; d) $8 > 4$; e) $-10 < -8$; f) $-\frac{7}{3} \leqq -2$; g) $-4 < 3$; h) $4 < 10$ **3.** a) $15 < x$; b) $x < \frac{9}{4}$; c) $x > \frac{7}{5}$; d) $x > -\frac{7}{3}$ **4.** a) $15 \leqq x$; b) $x \leqq \frac{9}{4}$; c) $x \geqq \frac{7}{5}$; d) $x \geqq -\frac{7}{3}$ **5.** a) $x \leqq \frac{15}{2}$; b) $x > \frac{16}{11}$; c) $x \leqq 1$; d) nemá riešenie **6.** a) 1; b) všetky záporné celé čísla, 0, 1; c) $x < 2$ **7.** a) $x \geqq -\frac{1}{3}$; b) $x \leqq \frac{8}{9}$; c) $x > -\frac{1}{5}$; d) $x \leqq \frac{5}{4}$ **8.** a) $x < \frac{7}{5}$; b) $x < \frac{16}{11}$; c) $x \geqq -2$ **9.** $a > \frac{4}{3}$ **10.** $b < 1$ **11.** $d \geqq \frac{6}{5}$ **12.** $x > 70$ **13.** $80 \leqq x < 440$ **14.** $x \leqq 50$ t **15.** Platí vždy pre $x > 2$

Súhrnné cvičenia IV

A

1. a) Kružnica $k(S;\ 2\text{ cm})$ **2.** a) $x \geqq 2$; b) $x > 3$; c) $x > 2{,}5$; d) $x \geqq \frac{7}{18}$ **3.** a) 4, 5, 6, 7; b) 2, 3, 4, 5, 6, 7 **4.** a) 90°; 90°; b) 120°, 60°; c) 125°, 55°; d) 108°, 72° **6.** 7,5 cm **7.** $k(S;\ 4\text{ cm}) \cap p' \parallel p$ vo vzdialenosti 2 cm, 2 riešenia **8.** Priamka $p \parallel AB$ vo vzdialenosti rovnajúcej sa výške trojuholníka ABC na stranu AB **9.** a) $r < 2$; b) $s < -\frac{5}{2}$; c) $t < -2$ **10.** 13, 19; 14, 18; 15, 17; 16, 16 **11.** a) 0; b) -1 **15.** 699,8 cm^3

B

1. a) 7,65 cm; b) 1,77 m; c) 89,1 mm **2.** 480; 11 200; 320 **3.** 100 cm^2 **4.** 65 Kčs **5.** $1\frac{1}{3}$ dňa **6.** $3\frac{2}{5}$, $1\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{7}$, $13\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{8}$, $5\frac{3}{5}$ **7.** a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{11}{20}$; c) $\frac{5}{12}$; d) 0,15; e) 2,95 **8.** a) 9,6; b) 8,3; c) $1\frac{5}{6}$; d) 1,4 **9.** 270 000 m^2 = 0,27 km^2 **10.** 3,4 cm **11.** 5,2 cm **15.** 10 002 **17.** a) Rameno **19.** $\frac{2r+t}{3}$ **20.** a) $x \cdot y + z \cdot u$; b) $x \cdot y + z \cdot u$; c) $x(y+z) \cdot u$ **22.** $p' \parallel p$, p' prechádza stredom S, rovnobežky m a n vo vzdialenosti 1 cm od priamky p', P, Q priesečníky priamok m a n s kružnicou k, tetiva PQ, 2 riešenia **23.** a) −2,8; b) 10 **24.** 108 000 km (1 800 km) **25.** 28 cm **26.** 14,3 mm **27.** a) 45,6; b) 7,7; c) 24,6; d) $\frac{1}{2}$; e) 0,258; f) $\frac{12}{5}$ **30.** 6 % **31.** 3,80 Kčs **32.** 13 cm **35.** b) O 41,7 km^2, 9,7-krát **36.** a) $x > 4\frac{1}{6}$; b) $x \leqq \frac{4}{3}$; c) $z > -\frac{3}{5}$; d) $x < -\frac{1}{2}$; e) $x \geqq \frac{7}{6}$; f) $x > \frac{4}{3}$; g) $x > \frac{20}{3}$; h) $x < -\frac{8}{3}$; i) $x > \frac{3}{5}$; j) všetky reálne čísla **37.** a) 1, 2, 3, 4, 5; b) 1,2; c) nemá riešenie **38.** a) $v > -8$; b) $v < 2$; c) $v < \frac{1}{2}$ **39.** a) 3; b) 5; c) $\frac{5}{4}$; d) −9 **40.** 6 595 km, 16-krát **41.** a) $y \leqq -2$; b) $y \geqq \frac{1}{2}$ **42.** a) Všetky reálne čísla; b) nemá riešenie **45.** b) a d) **46.** 15,9 cm **48.** 14 cm **49.** Áno **50.** 120 cm **51.** 1 247,4 cm^2; 623,7 cm^2; 310,8 cm^2 **52.** 1,8-krát **53.** 135 km, druhý deň, štvrtý deň, 37 %, 74 % **54.** 32 km **55.** 7 569,5 m^2 **56.** $\frac{1}{2}$ h **57.** 9 h **58.** 14,5 l **59.** a) 42; b) 40 **61.** 87 500, 43 750 **62.** 4,4 kg **63.** 2, 3, 4, 5, 10, 50 **64.** 4 420 m **65.** 4 h **68.** a) 4 $\frac{km}{h}$, 18 $\frac{km}{h}$; b) dvakrát; c) 1 h; d) $3\frac{1}{2}$ km, 14 km **69.** 16 807 **70.** $t_a = 22{,}21$ cm; $t_b = 14{,}91$ cm; $t_c = 24{,}88$ cm **71.** $\frac{1}{2}$ **72.** 15 rokov **73.** KL, $|KL| = 7$ cm, $\sphericalangle XKL$, $|\sphericalangle XKL| = 60°$, $\sphericalangle ZKL$, $|\sphericalangle ZKL| = 45°$, $\sphericalangle YLK$, $|\sphericalangle YLK| = 45°$, $S = ZK \cap YL$, LS, $N = LS \cap KX$, $NU \parallel KL$, $M = KS \cap NU$ **74.** 45°, 60°, 75° **75.** a) 40 km; b) 108 km; c) 74,4 km; d) 164 km, e) 187,2 km; f) 130 km **76.** 1,6 m **77.** a) KL, $|KL| = 6$ cm, $XY \parallel KL$, $k_1(K;\ 6\text{ cm})$; $N = XY \cap k_1$, $k_2(L;\ 6\text{ cm})$, $M = XY \cap k_2$; b) KL, $|KL| = 4{,}5$ cm, $k(K;\ 5{,}5\text{ cm})$, $XY \parallel KL$, $M = XY \cap k$, $k'(M;\ 4{,}5\text{ cm})$, $N = k' \cap XY$ **80.** 260,92 cm **82.** 5 000; 29 % **84.** *sus* **85.** 27, 54, 54 **86.**

a) 2,5-krát; b) 5-krát **87.** a) 30,91; b) 1,50; c) 0,32; d) 0,30 **89.** a) 3; b) 5; c) 2; d) 7 **90.** Prvý 9-krát, druhý 8-krát **91.** $\frac{1}{2}$ **92.** 9,3 km, 9 km^2 **93.** 61,3 cm **94.** 8, 40, 80 **95.** 782 **96.** 1 837,4 m^2, o 13,42 % **97.** $-1\,114, +655, -1\,835, +590, +262$ (g) **98.** a) $\frac{11}{6}\,q$; b) $6\frac{1}{3}\,m$; c) $8ac$; d) $5z$ **99.** Rozloha štvorca je väčšia o 900 m^2 **100.** $a = 3$, $c > 1$, $b = c + 1$

PhDr. Jana Müllerová, CSc.
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc.
doc. PhDr. Jiří Divíšek, CSc.
PhDr. Vlastimil Macháček

MATEMATIKA 7

pre 7. ročník
základnej školy

II. DIEL

Prvé vydanie

Vydalo Slovenské pedagogické nakladateľstvo
v Bratislave

Zodpovedná redaktorka Edita Poláková
Výtvarná redaktorka Marta Pavlíková
Technická redaktorka Ľubica Rybánska
Korektorka Zuzana Pavlíčková
Graficky upravila Hana Převrátilová

Vytlačila Těšínská tiskárna, s. p., Český Těšín
Strán 176 – AH 7,27 (text 5,47, grafika 1,80)
VH 8,15 – 10/24 – Náklad 150 000 výtlačkov –
Typ písma garmond Times – Vytlačené 2-farebným
ofsetom
Kčs 9,50

ISBN 80-08-00516-5

Záznam o použití učebnice

Por. č.	Meno žiaka	Školský rok	Stav učebnice	
			na začiatku šk. roku	na konci šk. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Skl. č. 1-11-798
10/24
Kčs 9,50

ISBN 80-08-00516-5