Matematika

6

II

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Matematika

pre 6. ročník základnej školy

JÁN ČIŽMÁR
ĽUDOVÍT HRDINA
MILAN KOMAN
DANIELA ŘEBÍČKOVÁ
FRANTIŠEK ZAPLETAL

6

Matematika

pre 6. ročník základnej školy

II. diel

Slovenské pedagogické nakladateľstvo
Bratislava 1989

Lektorovali: RNDr. Juraj Vantuch, CSc., a Štefánia Floreková
Revízia výsledkov: Zdeněk Zajíček

Schválilo Ministerstvo školstva, mládeže a telesnej výchovy SSR rozhodnutím zo dňa 26. 9. 1988 číslo 8354/88-20 ako učebnicu matematiky pre 6. ročník ZŠ – II. diel.

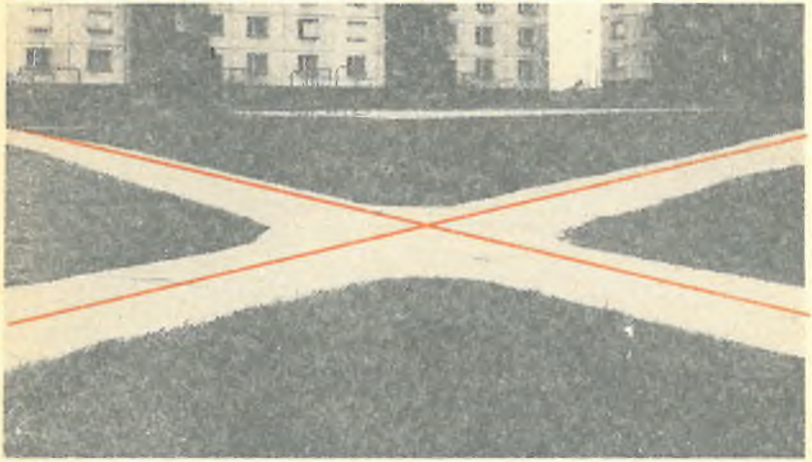
■ označuje rozširujúce cvičenie

Prvé vydanie.
ISBN 80-08-00096-1

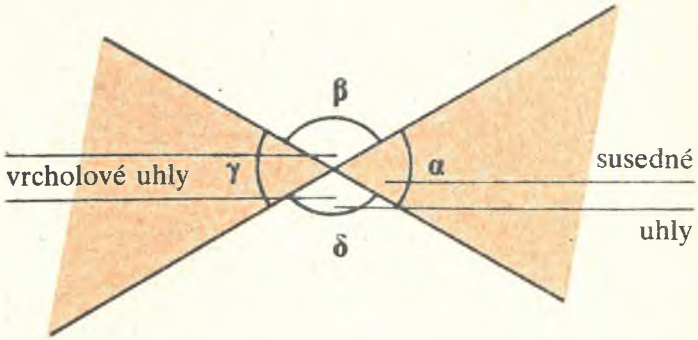
Obsah

7. Trojuholník

7.1 Vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka



V 5. ročníku ste sa naučili, čo sú **dvojice vrcholových uhlov** a **dvojice susedných uhlov.**

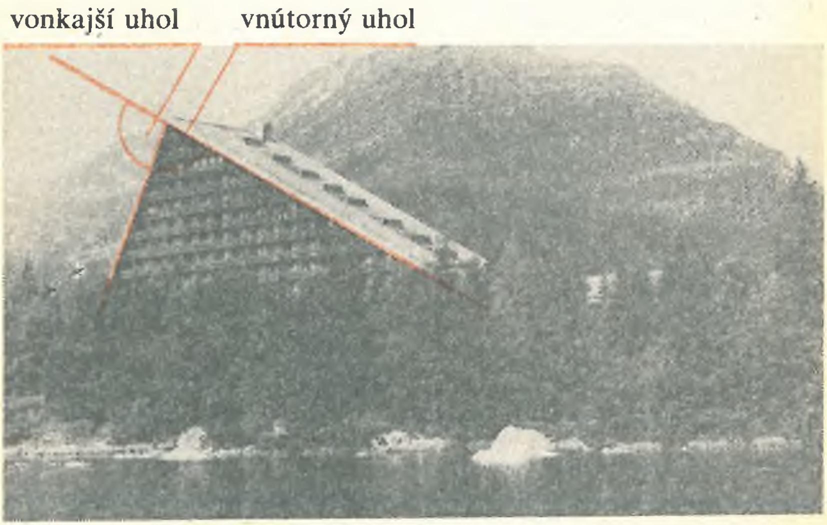


Každé dva vrcholové uhly sú zhodné; na obrázku je

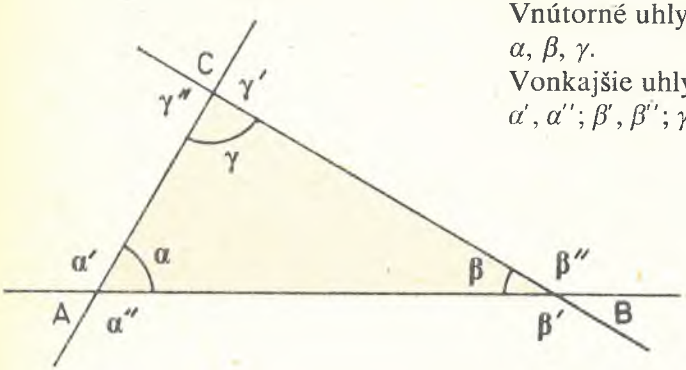
$$\alpha \cong \gamma, \qquad \beta \cong \delta.$$

Pre každé dva susedné uhly sa súčet ich veľkostí rovná 180°; na obrázku napríklad

$$\alpha + \beta = 180°, \qquad \alpha + \delta = 180°.$$



Vonkajšie uhly trojuholníka sú uhly susedné k vnútorným uhlom trojuholníka.



Vnútorné uhly $\triangle ABC$: α, β, γ.
Vonkajšie uhly $\triangle ABC$: $\alpha', \alpha''; \beta', \beta''; \gamma', \gamma''$.

Vonkajšie uhly trojuholníka pri tom istom vrchole sú zhodné, napríklad

$$\alpha' \cong \alpha''.$$

Súčet veľkostí vnútorného a vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole sa rovná 180°; napríklad

$$\alpha + \alpha' = 180°, \qquad \alpha + \alpha'' = 180°.$$

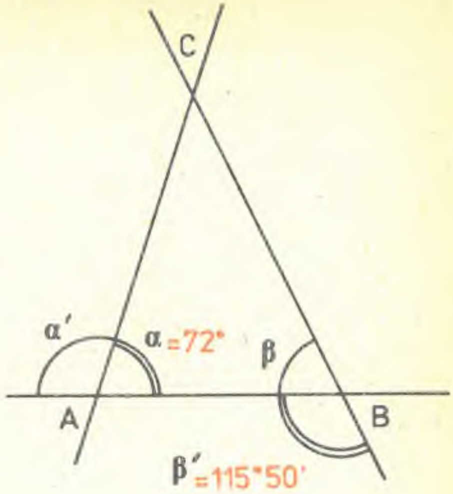
Preto platí

$$\boxed{\alpha' = \alpha'' = 180° - \alpha} \quad \text{a aj} \quad \boxed{\alpha = 180° - \alpha' = 180° - \alpha''.}$$

Príklad 1

V trojuholníku ABC je veľkosť vnútorného uhla $\alpha = 72°$ a veľkosť vonkajšieho uhla $\beta' = 115°50'$. Vypočítajte veľkosť vonkajšieho uhla α' a veľkosť vnútorného uhla β.

Riešenie



a) $\alpha' = 180° - \alpha$
$\alpha = 72°$
$\alpha' = 180° - 72°$
$\alpha' = 108°$

Výpočet

$$\begin{array}{r} 180° \\ -\ 72° \\ \hline 108° \end{array}$$

Skúška

$$\begin{array}{r} 108° \\ +\ 72° \\ \hline 180° \end{array}$$

b) $\beta = 180° - \beta'$
$\beta' = 115°50'$
$\beta = 180° - 115°50'$
$\beta = 64°10'$

Výpočet

$$\begin{array}{r} 179°60' \\ -\ 115°50' \\ \hline 64°10' \end{array}$$

Skúška

$$\begin{array}{r} 64°10' \\ +\ 115°50' \\ \hline 179°60' \end{array} = 180°$$

Veľkosť vonkajšieho uhla je $\alpha' = 108°$, veľkosť vnútorného uhla je $\beta = 64°10'$.

CVIČENIA

1. Zostrojte uhol $\alpha = 68°$. Zostrojte k nemu susedný uhol a vrcholový uhol. Zistite veľkosti týchto uhlov a) výpočtom, b) meraním.

2. Narysujte ľubovoľný tupouhlý trojuholník ABC s tupým vnútorným uhlom β. Odmerajte veľkosť vnútorného uhla β a veľkosti vonkajších uhlov β', β''. Výsledok prekontrolujte výpočtom.

3. Vypočítajte veľkosti vonkajších uhlov trojuholníka ABC, keď poznáte veľkosti jeho vnútorných uhlov. Nakreslite si obrázok.

a)	$\alpha = 45°$	$\beta = 70°$	$\gamma = 65°$
b)	$\alpha = 96°$	$\beta = 48°$	$\gamma = 36°$
c)	$\alpha = 38°16'$	$\beta = 124°53'$	$\gamma = 16°51'$

4. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC, keď poznáte veľkosti všetkých jeho vonkajších uhlov α', β', γ':

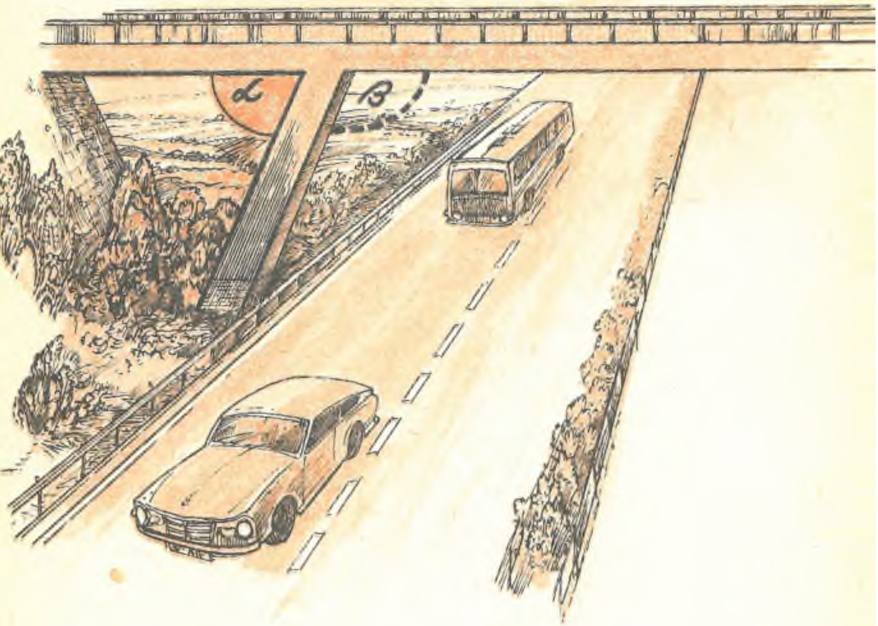
a)	$\alpha' = 110°$	$\beta' = 150°$	$\gamma' = 100°$
b)	$\alpha' = 82°$	$\beta' = 146°32'$	$\gamma' = 131°28'$

■ **5.** Môže sa v nejakom trojuholníku veľkosť vnútorného uhla rovnať veľkosti vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole? Ak áno, zostrojte aspoň jeden taký trojuholník.

6. Na obrázku je jeden z mostov ponad autostrádu Praha – Bratislava. Uhol α, ktorý zviera pilier s vodorovnou mostovkou, má veľkosť $62°30'$.

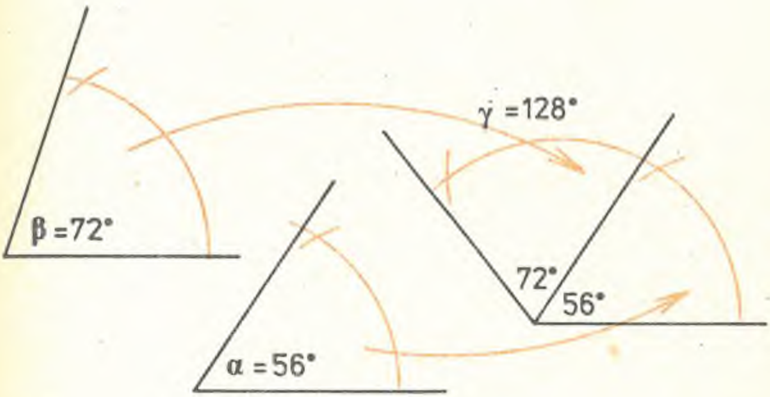
a) Vypočítajte veľkosť uhla β.

b) Porovnajte veľkosti uhlov 2α a β.



7.2 Súčet vnútorných uhlov trojuholníka

V 5. ročníku ste sa naučili zostrojovať súčet dvoch uhlov α, β aj vypočítať veľkosť tohto súčtu. Vezmime napríklad uhly $\alpha = 56°$ a $\beta = 72°$.



$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$$

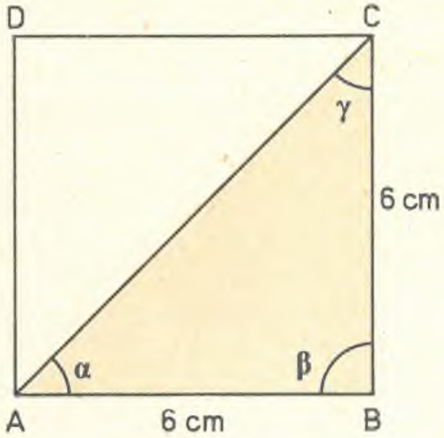
$$\gamma = 56° + 72°$$
$$\gamma = 128°$$

Sčítovať môžeme aj veľkosti viacerých uhlov, ako sú dva. Výsledok sčítania môže byť dokonca väčší ako 360°. Viac uhlov ako dva môžeme sčitovať aj graficky, ale súčet veľkostí týchto uhlov nesmie byť väčší ako 360°.

Takto môžeme sčítať napríklad všetky tri vnútorné uhly trojuholníka. Začneme pravouhlým trojuholníkom.

Príklad 1

Uhlopriečka AC rozdelí štvorec $ABCD$ (pozri obrázok) na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Zistite súčet všetkých troch vnútorných uhlov pravouhlého trojuholníka ABC.

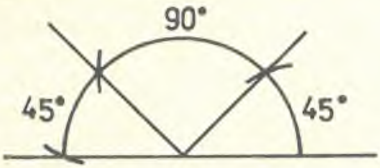


Riešenie

Uhlopriečka AC štvorca $ABCD$ leží na osi oboch pravých uhlov pri vrcholoch A, C. Uhly α, γ sa rovnajú polovici pravého uhla:

$$\alpha = 45°, \qquad \gamma = 45°.$$

Uhol pri vrchole B je pravý; $\beta = 90°$. Súčet vnútorných uhlov môžeme zostrojiť graficky (pozri obrázok) a aj vypočítať.

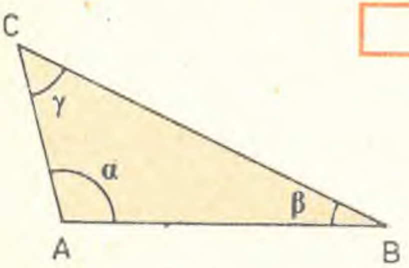


$$\alpha + \beta + \gamma = 45° + 90° + 45° = 180°$$

Súčtom všetkých vnútorných uhlov trojuholníka ABC je priamy uhol (pozri obrázok); veľkosť tohto súčtu sa rovná 180°.

Rovnaké tvrdenie platí o každom trojuholníku.

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$



Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v každom trojuholníku sa rovná 180°.

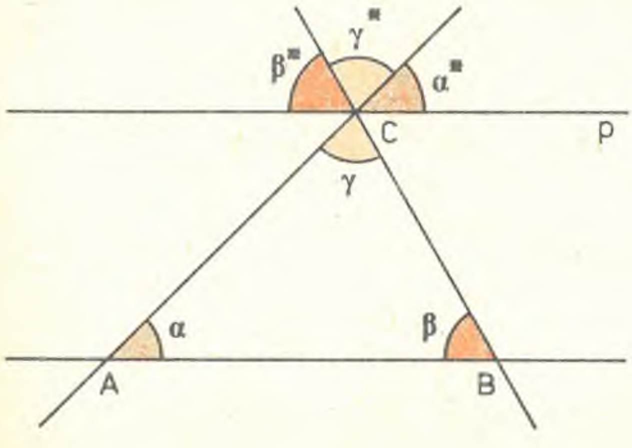
Tvrdenie si overte v úlohe 1.

!

Úloha 1

Zostrojte ľubovoľný trojuholník ABC a vyznačte jeho vnútorné uhly α, β, γ. Bodom C veďte rovnobežku p so stranou AB a strany AC a BC predĺžte za bod C (pozri obrázok).

?



Jednou farbou vyznačte dvojicu súhlasných uhlov α, α^*, druhou farbou dvojicu uhlov β, β^* a treťou farbou dvojicu vrcholových uhlov γ, γ^*.

Dvojice súhlasných uhlov aj dvojice vrcholových uhlov sú zhodné:

$$\alpha \cong \alpha^*, \beta \cong \beta^*, \gamma \cong \gamma^*.$$

Preto

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 180°.$$

Presvedčte sa o tom odmeraním veľkostí uhlov α, β, γ a sčítaním týchto veľkostí.

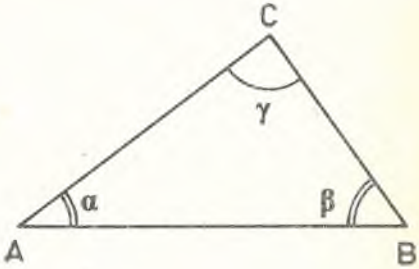
Príklad 2

V trojuholníku ABC sú dané veľkosti dvoch vnútorných uhlov: $\alpha = 37°40'$, $\beta = 54°30'$. Vypočítajte veľkosť tretieho vnútorného uhla γ.

Riešenie

Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v každom trojuholníku sa rovná 180°. Poznáme veľkosti dvoch z týchto uhlov; veľkosť tretieho uhla môžeme vypočítať. (Pozri obrázok.)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ \alpha &= 37°40' \\ \beta &= 54°30' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 37°40' + 54°30' + \gamma &= 180° \\ 92°10' + \gamma &= 180° \\ \gamma &= 180° - 92°10' \\ \gamma &= 87°50' \end{aligned}$$

Skúška

$$\begin{array}{r} 37°40' \\ 54°30' \\ \underline{87°50'} \\ 178°120' = 180° \end{array}$$

Tretí vnútorný uhol γ má veľkosť 87°50'.

Úloha 2

Jeden vnútorný uhol trojuholníka je pravý. Čo môžete povedať o súčte ostatných vnútorných uhlov? Načrtnite si obrázok.

Zopakujte úlohu pre prípad, že jeden vnútorný uhol trojuholníka je tupý.

?

CVIČENIA

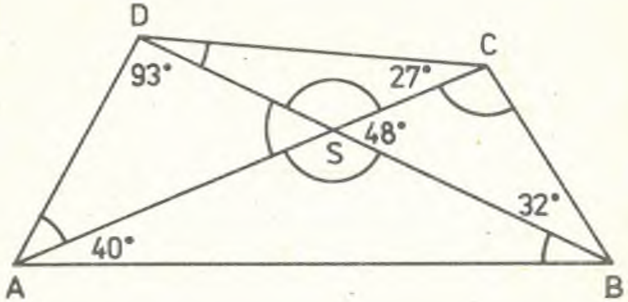
1. V trojuholníku ABC sú dané veľkosti dvoch vnútorných uhlov. Vypočítajte veľkosť tretieho vnútorného uhla. Načrtnite si trojuholník voľnou rukou. (Najprv rozhodnite, či je trojuholník ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý.)
   a) $\alpha = 42°$, $\beta = 39°$ b) $\alpha = 54°29'$, $\gamma = 38°49'$
   c) $\beta = 46°15'$, $\gamma = 43°45'$ d) $\alpha = 108°$, $\gamma = 45°17'$

2. Zistite, či trojuholník môže mať nasledujúce veľkosti dvoch vnútorných uhlov:
   a) $39°16'$, $86°45'$ b) $95°17'$, $95°17'$
   c) $84°30'$, $95°30'$ d) $54°37'$, $92°18'$

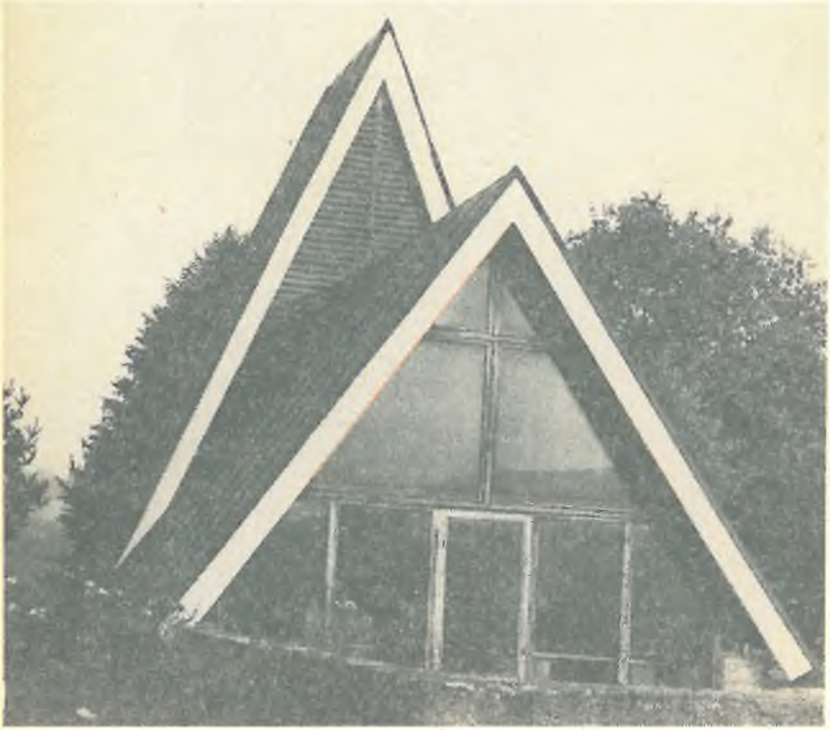
3. Vyberte zo štyroch uvedených uhlov tie tri, ktoré môžu byť veľkosťami vnútorných uhlov jedného trojuholníka:
   a) $38°30'$, $75°15'$, $54°15'$, $66°15'$
   b) $102°40'$, $45°40'$, $41°40'$, $35°40'$
   c) $70°17'$, $49°38'$, $58°45'$, $60°05'$

4. Zistite chýbajúce veľkosti vnútorných uhlov trojuholníkového štítu dedinského domu (pozri obrázok):
a) $\alpha = 48^\circ$
b) $\beta = 80^\circ$

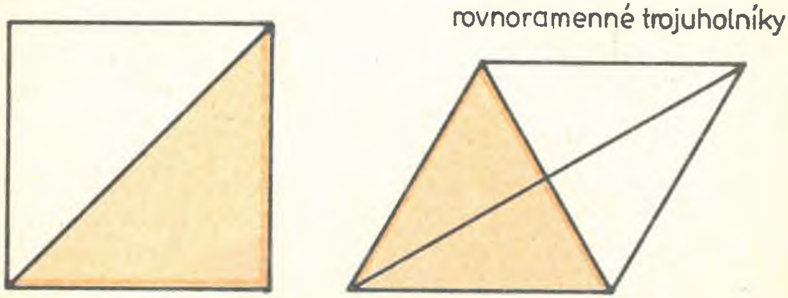
5. Vypočítajte veľkosti všetkých uhlov označených na obrázku oblúčikom. Veľkosti zapíšte podľa vzoru: $|\sphericalangle SCD| = 27^\circ$.



7.3 Rovnoramenný trojuholník

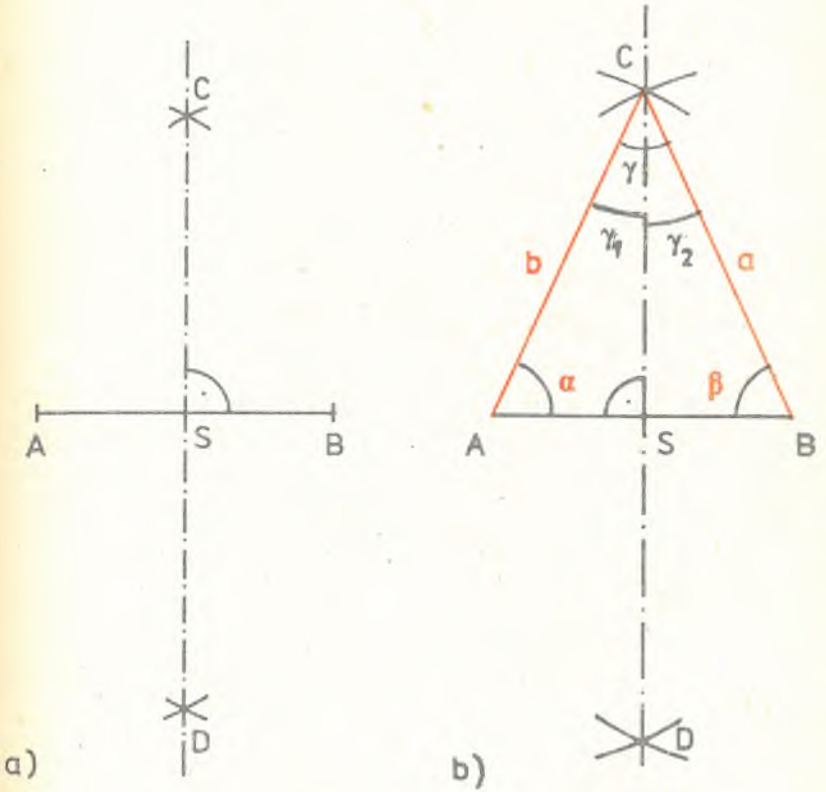


Rovnoramenný trojuholník je trojuholník, ktorý má dve zhodné strany.



Úloha 1

a) Zostrojte na voľnom liste papiera ľubovoľnú úsečku AB a jej os o. Pozri obrázok a).



b) Označte na osi o bod C (pozri obrázok a)) a narysujte trojuholník ABC (pozri obrázok b)).

Trojuholník ABC na obrázku je rovnoramenný. Jeho zhodné strany AC, BC ($AC \cong BC$) sa nazývajú **ramená,** tretia strana AB sa nazýva **základňa.** Vrchol C, ktorý leží oproti základni, je **temeno (hlavný vrchol)**.

AC, BC .... ramená $\triangle ABC$
AB .... základňa $\triangle ABC$
C .... temeno $\triangle ABC$

Rovnoramenný trojuholník ABC z úlohy 1 je súmerný podľa osi o. Vystrihnite trojuholník ABC a presvedčte sa o jeho súmernosti preložením podľa osi o.

Ukážte na obrázku b) na s. 21 a overte na vystrihnutom modeli správnosť nasledujúcej tabuľky.

Vzor	C	S	A	B	α	β	γ_1	γ_2	$\triangle ASC$
Obraz	C	S	B	A	β	α	γ_2	γ_1	$\triangle BSC$

Všimnite si:

● Temeno C a stred S základne sú samodružné.

●● Obrazom vnútorného uhla α je vnútorný uhol β. Preto je

$$\alpha \cong \beta.$$

●●● Obrazom uhla $\gamma_1 = \sphericalangle ACS$ je uhol $\gamma_2 = \sphericalangle BCS$. Uhly γ_1 a γ_2 sú zhodné:

$$\gamma_1 \cong \gamma_2.$$

Preto je priamka o osou vnútorného uhla γ pri temene C.

Záver

Každý rovnoramenný trojuholník je súmerný podľa osi svojej základne.

Z toho vyplývajú ďalšie vlastnosti rovnoramenného trojuholníka:

Vnútorné uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné.

Os súmernosti rovnoramenného trojuholníka je osou jeho základne aj osou jeho vnútorného uhla pri temene.

Príklad 1

Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC s dĺžkami strán $a = b = 8$ cm, $c = 6$ cm. Zostrojte jeho os súmernosti. Odmerajte veľkosti uhlov pri základni α, β a uhlov γ_1, γ_2, ktoré zvierajú ramená s osou súmernosti.

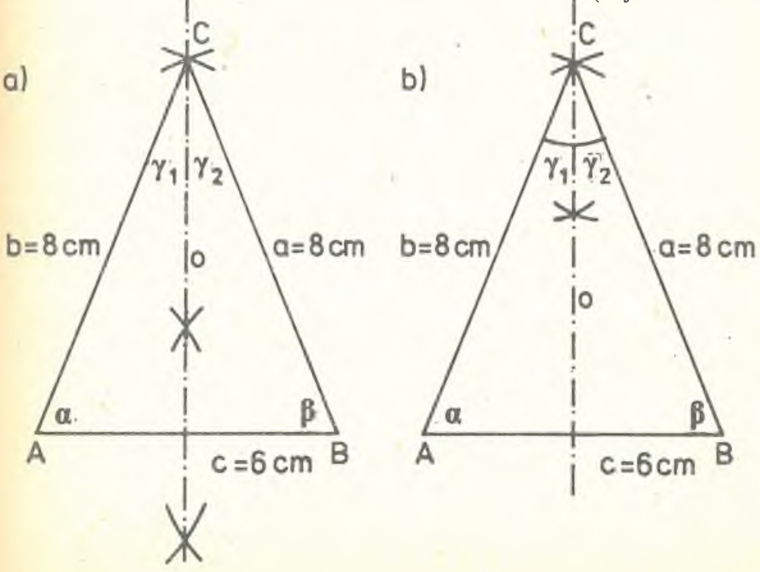
Riešenie

Trojuholník ABC vieme zostrojiť. Os súmernosti môžeme zostrojiť dvoma spôsobmi:

a) ako os základne AB (obr. a)),

b) ako os uhla $\gamma = \sphericalangle ACB$ (obr. b)).

(o je os strany AB) (o je os uhla ACB)



Odmeriame veľkosti uhlov:

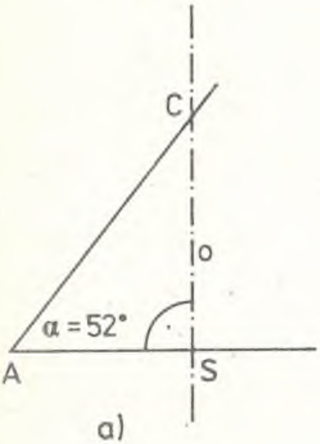
α	β	γ_1	γ_2
68°	68°	22°	22°

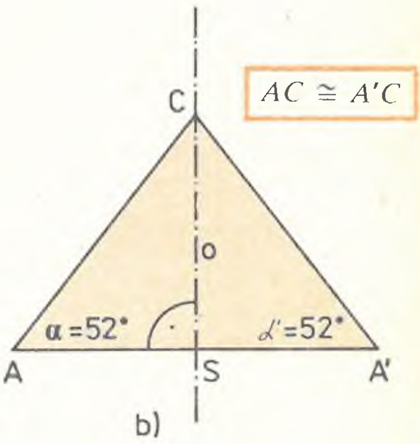
Príklad 2

Narysujte uhol $\alpha = 52°$. Zvoľte si priamku o, ktorá je kolmá na jedno rameno uhla α. V súmernosti podľa osi o zostrojte obraz α' uhla α. Vyznačte prienik uhlov α a α'.

Riešenie

Pomocou uhlomeru zostrojíme uhol $\alpha = 52°$. Zostrojíme kolmicu o na jedno jeho rameno. Body A, S, C označíme podľa obrázka a).





V súmernosti podľa osi o zobrazíme uhol α. Body C, S sú samodružné. Obrazom bodu A je bod A' (S je stred úsečky AA'). Obrazom uhla $\alpha = \sphericalangle SAC$ je uhol $\alpha' = \sphericalangle SA'C$.

Časť roviny, ktorú majú spoločnú oba uhly α, α', je trojuholník $AA'C$. Priamka o je jeho osou súmernosti. Preto je

$$AC \cong A'C.$$

Trojuholník $AA'C$ je rovnoramenný.

Môžeme vysloviť vetu:

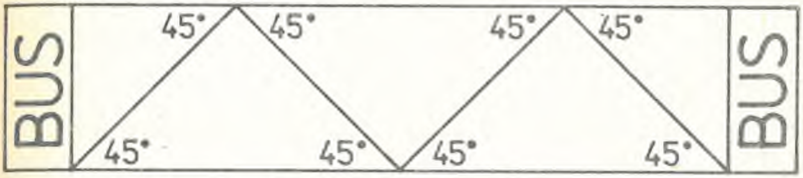
Ak má nejaký trojuholník dva vnútorné uhly zhodné, je rovnoramenný.

!

Úloha 2

?

Ukážte na vodorovnej dopravnej značke pre zastávku autobusov všetky trojuholníky. Ktoré z nich sú rovnoramenné?



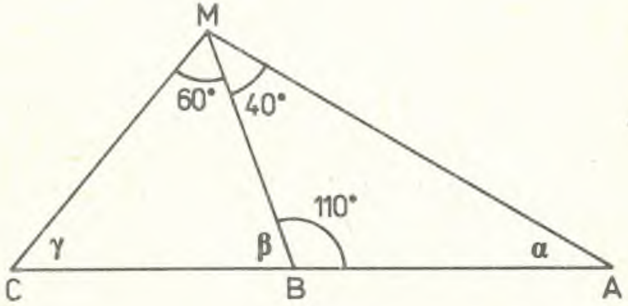
CVIČENIA

1. Základňa rovnoramenného trojuholníka má dĺžku 8,7 cm, rameno má dĺžku 5,2 cm.
   a) Načrtnite a popíšte obrázok trojuholníka a vypočítajte jeho obvod.
   b) Preverte platnosť trojuholníkových nerovností.
   c) Napíšte, ktoré vnútorné uhly sú zhodné.

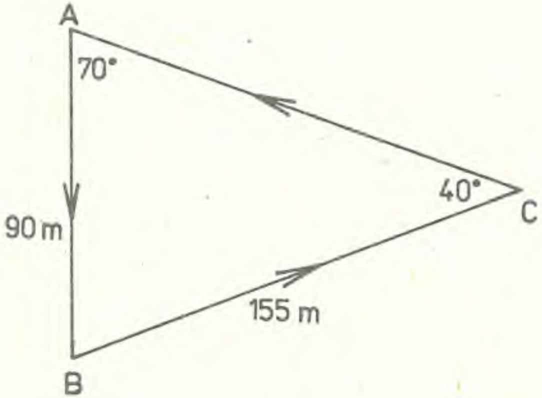
2. Obvod rovnoramenného trojuholníka je 1,2 m. Základňa má dĺžku a) 38 cm, b) 50 cm, c) 60 cm, d) 74 cm. Vypočítajte dĺžku ramena. Má úloha vždy riešenie?

3. Jeden uhol pri základni rovnoramenného trojuholníka má veľkosť a) 42°, b) 58°35′, c) 70°05′. Vypočítajte veľkosti ostatných vnútorných uhlov. Je niektorý z týchto trojuholníkov tupouhlý?

4. a) Vypočítajte veľkosti uhlov α, β, γ v trojuholníkoch na obrázku.
b) Koľko je na obrázku rovnoramenných trojuholníkov?

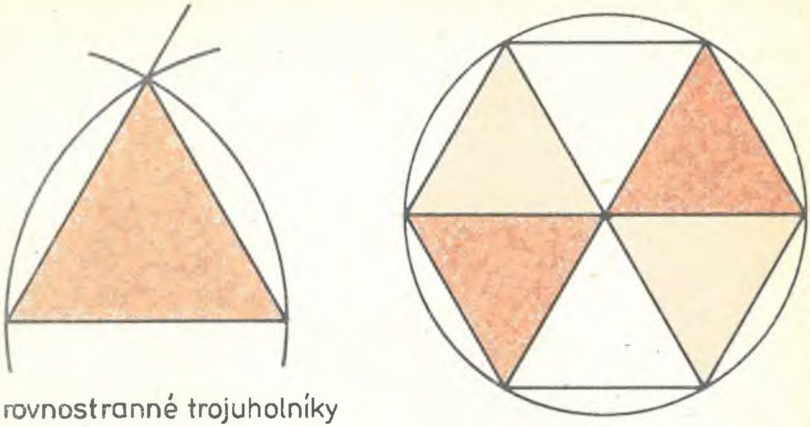


5. Na obrázku je plánik behu na brannom cvičení. Žiaci vybiehajú zo stanovišťa A smerom k stanovišťu B, pokračujú na stanovište C a odtiaľ na stanovište A, kde je cieľ. Akú dĺžku má trasa, ktorú žiaci prebiehajú?



7.4 Rovnostranný trojuholník

Rovnostranný trojuholník je trojuholník s tromi navzájom zhodnými stranami.



Úloha 1

Narysujte a vystrihnite rovnostranný trojuholník, ktorý má dĺžky strán $a = b = c = 8$ cm. Prekladaním nájdite všetky osi súmernosti tohto trojuholníka.

Zistili ste, že trojuholník z úlohy 1 má tri osi súmernosti. Sú to súčasne osi jeho strán a osi jeho vnútorných uhlov. Všetky tieto osi prechádzajú jedným spoločným bodom. Túto vlastnosť má každý rovnostranný trojuholník.

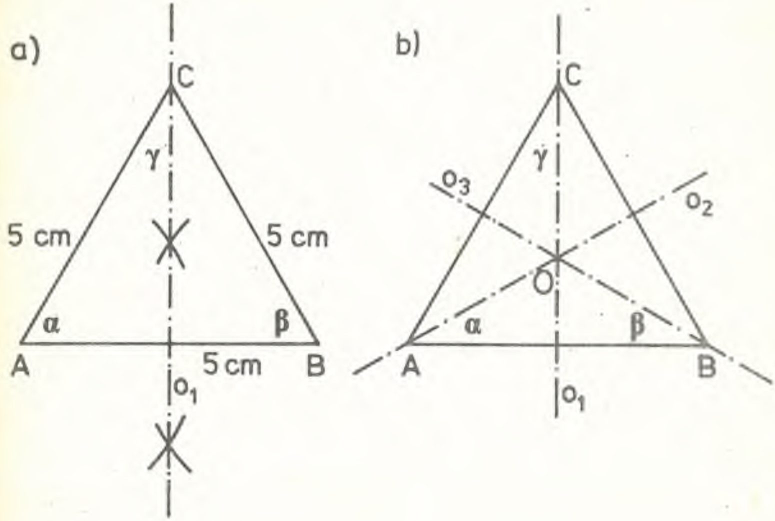
Každý rovnostranný trojuholník má tri osi súmernosti, ktoré sa pretínajú v jednom bode.

Príklad 1

Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžku 5 cm. Zostrojte jeho osi súmernosti.

Riešenie

Trojuholník ABC vieme zostrojiť. Osi súmernosti rovnostranného trojuholníka sú súčasne osami jeho strán. Preto zostrojíme osi strán trojuholníka (pozri obrázok).



Ak ste presne rysovali, všetky tri osi prechádzajú jedným bodom O.

Z osových súmerností trojuholníka podľa osí o_1 a o_2 vyplýva:

súmernosť podľa o_1	$\alpha \dashrightarrow \beta$	$\alpha \cong \beta$	$\alpha \cong \beta \cong \gamma$
súmernosť podľa o_2	$\beta \dashrightarrow \gamma$	$\beta \cong \gamma$	

V každom rovnostrannom trojuholníku sú všetky vnútorné uhly zhodné.

Pretože súčet všetkých troch vnútorných uhlov trojuholníka má veľkosť 180° a v rovnostrannom trojuholníku sú všetky tieto tri uhly navzájom zhodné, má **každý vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka veľkosť 60°.**

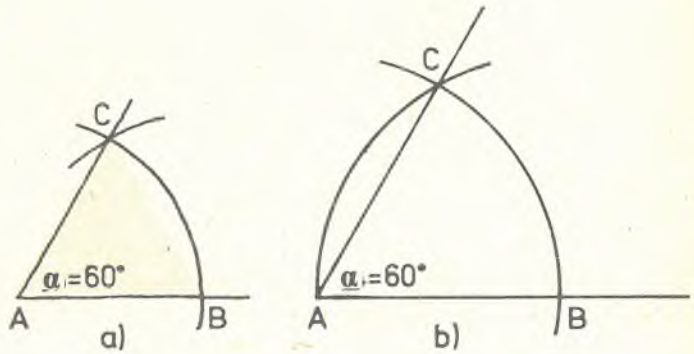
Príklad 2

Zostrojte bez použitia uhlomeru uhol $\alpha = 60°$.

Riešenie

Uhol α zostrojíme ako vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka (náčrt na obrázku).

N á č r t — K o n š t r u k c i a

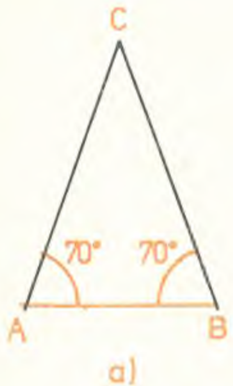


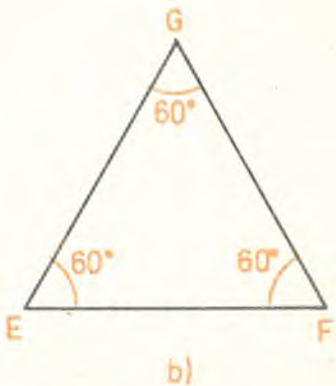
P o s t u p konštrukcie (pozri obrázok b)).

1	Narysujeme polpriamku AB'.
2	Polomerom $r = AB$ opíšeme oblúky kružníc so stredmi A a B.
3	Priesečník oblúkov označíme C.
4	Narysujeme polpriamku AC.
5	Napíšeme: $\alpha = 60°$.

Uhol α má naozaj veľkosť 60°, lebo je to vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka ABC (na obrázku b) stačí doplniť stranu BC).

Na obrázku a) je trojuholník ABC, ktorý má **dva zhodné vnútorné uhly.** Preto má **dve zhodné strany,** to znamená, že je rovnoramenný.





Na obrázku b) je trojuholník EFG, ktorý má **tri zhodné vnútorné uhly** s veľkosťou 60°. Ľahko sa presvedčíme, že má aj **tri zhodné strany.** Je teda rovnostranný.

Každý trojuholník, ktorý má tri vnútorné uhly s veľkosťou 60°, je rovnostranný. !

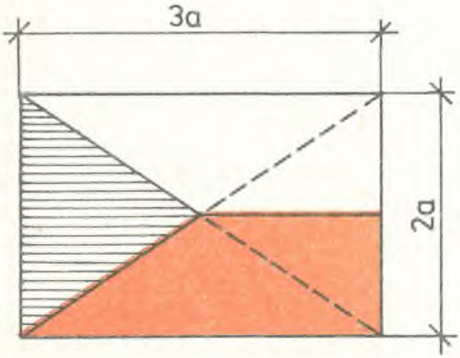
CVIČENIA

1. Narysujte rovnostranný trojuholník ABC so stranou $a = 5{,}6$ cm. Odmerajte jeho vnútorné uhly. Vypočítajte veľkosti jeho vonkajších uhlov.

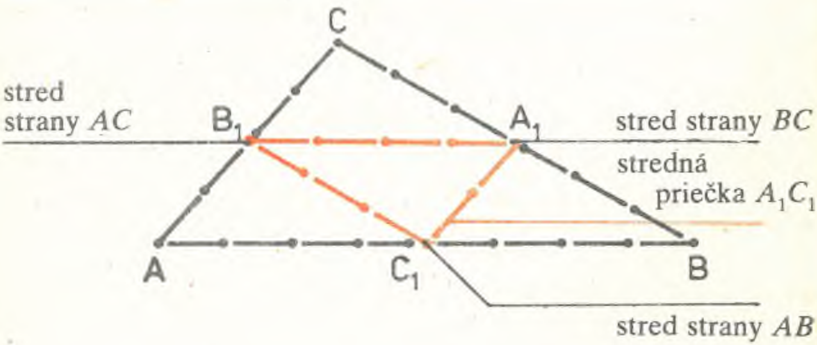
2. a) Zostrojte bez uhlomeru uhol $\alpha = 60°$.
   b) Zostrojte bez uhlomeru uhly, ktoré majú veľkosť 120° $(= 2 \, . \, 60°)$ a 30° $(= \frac{1}{2} \, . \, 60°)$.

3. Zostrojte pravidelný šesťuholník so stranou $a = 3{,}6$ cm. Rozdeľte ho na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov.

4. Zistite, či modrý klin na našej štátnej zástave je rovnoramenný alebo rovnostranný trojuholník. Zvoľte si $a = 3$ cm a zostrojte zástavu.



7.5 Stredné priečky trojuholníka



Trojuholník ABC je zostavený z 18 zápaliek. Trojuholník

$A_1B_1C_1$ je zostavený z 9 zápaliek. Strany týchto trojuholníkov sú rovnobežné:

$$AB \parallel A_1B_1, \qquad BC \parallel B_1C_1, \qquad AC \parallel A_1C_1.$$

Porovnajte dĺžky rovnobežných strán:

$\triangle\ ABC$	8 zápaliek	6 zápaliek	4 zápalky
$\triangle\ A_1B_1C_1$	4 zápalky	3 zápalky	2 zápalky

Dĺžky strán trojuholníka $A_1B_1C_1$ sa rovnajú poloviciam dĺžok strán trojuholníka ABC.

Stredná priečka trojuholníka spája vždy stredy dvoch strán a je rovnobežná s treťou stranou.

!

Dĺžka strednej priečky trojuholníka sa rovná polovici dĺžky strany, s ktorou je rovnobežná.

Príklad 1

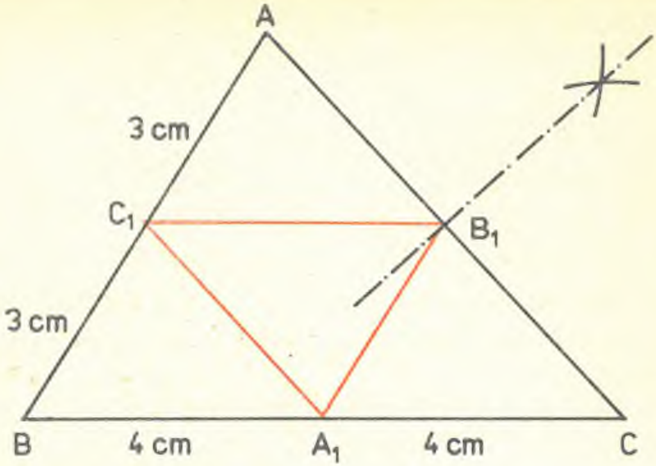
Zostrojte trojuholník ABC, ktorý má strany s dĺžkami $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm. Zostrojte stredné priečky tohto trojuholníka. Odmerajte ich dĺžky a porovnajte ich s dĺžkami strán trojuholníka ABC.

Riešenie

Trojuholník ABC vieme zostrojiť. Zostrojíme stredy jeho strán a označíme ich podľa obr. na str. 34. Stredy strán môžeme zostrojiť odmeraním alebo rozpolením strán pomocou kružidla.

Narysujeme a odmeriame stredné priečky A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1:

$$|A_1B_1| = 3 \text{ cm}, \qquad |B_1C_1| = 4 \text{ cm}, \qquad |A_1C_1| = 3{,}5 \text{ cm}.$$



Uvedieme zjednodušenú tabuľku s postupom konštrukcie:

1	$\triangle\ ABC;\ a = 8\ \text{cm},\ b = 7\ \text{cm},\ c = 6\ \text{cm}$
2	A_1; stred BC
3	B_1; stred AC
4	C_1; stred AB
5	$A_1B_1;\ B_1C_1;\ A_1C_1$
6	$\lvert A_1B_1 \rvert = 3\ \text{cm};\ \lvert B_1C_1 \rvert = 4\ \text{cm};\ \lvert A_1C_1 \rvert = 3{,}5\ \text{cm}$

Dĺžky stredných priečok sa rovnajú poloviciam dĺžok strán, s ktorými sú rovnobežné.

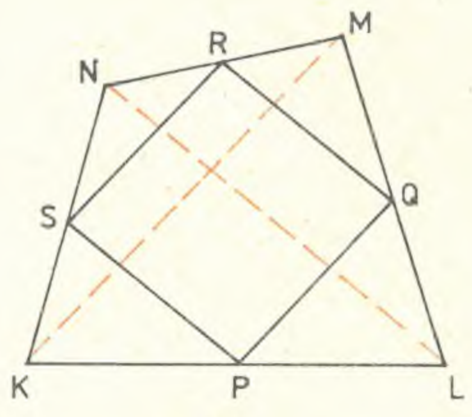
CVIČENIA

1. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC; $a = b = 6$ cm, $c = 4$ cm. Zostrojte jeho stredné priečky. Odôvodnite, že stredné priečky rozdelia trojuholník ABC na štyri rovnoramenné trojuholníky.

2. Zostrojte trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžky $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. Zostrojte trojuholník, ktorý má za vrcholy stredy strán trojuholníka ABC. Vypočítajte obvody oboch trojuholníkov.

3. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC a jeho stredné priečky. Trojuholník vystrihnite. Potom ho ešte rozstrihnite pozdĺž stredných priečok na štyri menšie trojuholníky. Zistite, ktoré z týchto trojuholníkov sú navzájom zhodné.

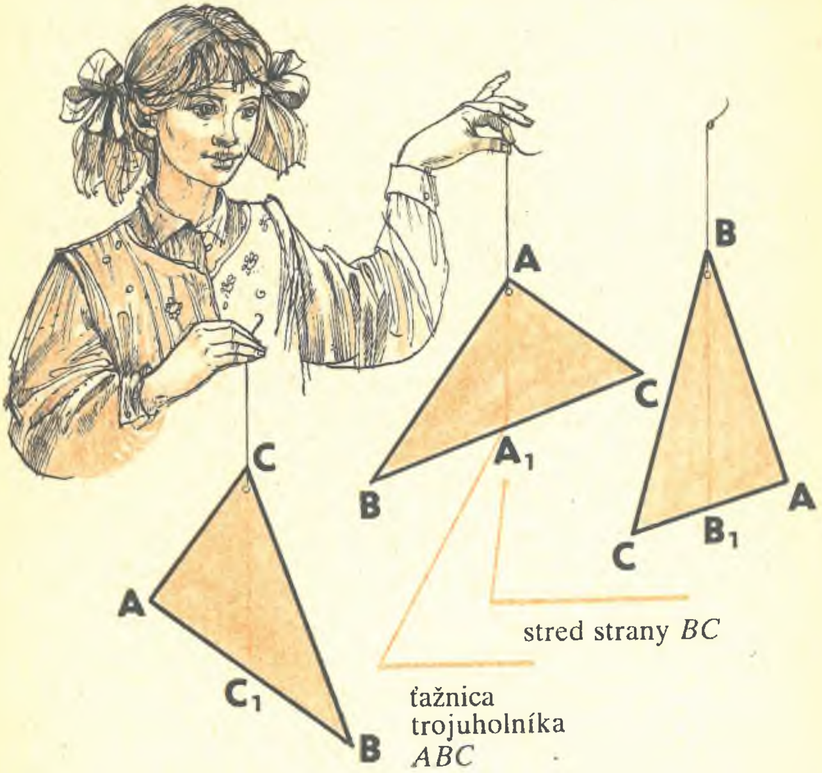
4. a) Narysujte ľubovoľný štvoruholník $KLMN$. Farebne vyznačte jeho uhlopriečky KM, LN (pozri obrázok).



Zostrojte štvoruholník $PQRS$, ktorého vrcholy sú stredy strán štvoruholníka $KLMN$.

b) Ukážte, že štvoruholník $PQRS$ je rovnobežník.
(*Návod:* Všimnite si napríklad trojuholníky KLN a NLM.)

7.6 Ťažnice trojuholníka



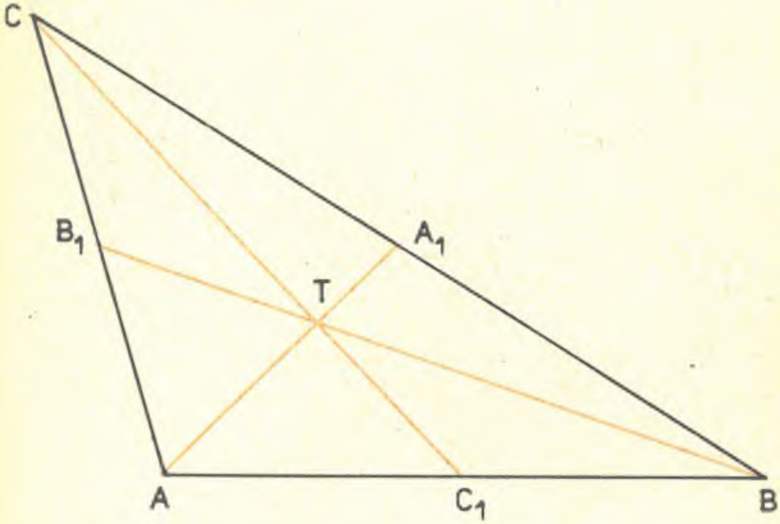
! Trojuholník *ABC* v ľavej ruke dievčatka je zavesený na niti uviazanej v bode *A*. Úsečka AA_1, ktorá je predĺžením nite, sa nazýva **ťažnica;** vidíme, že **spája vrchol so stredom protiľahlej strany.** Keď zavesíme trojuholník *ABC* postupne v ďalších dvoch vrcholoch, dostaneme dve ďalšie ťažnice trojuholníka.

Príklad 1

Narysujte na hárok papiera ľubovoľný trojuholník a zostrojte všetky jeho ťažnice.

Riešenie

Narysujeme trojuholník ABC, zostrojíme stredy jeho strán (A_1, B_1, C_1) a narysujeme ťažnice AA_1, BB_1, CC_1.



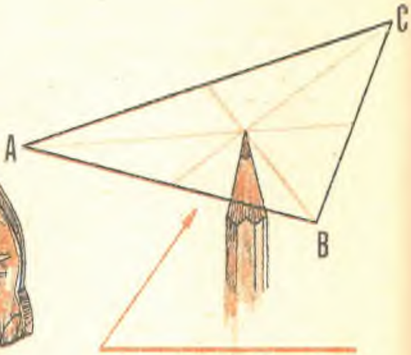
Postup zostrojenia môžeme zapísať:

1. $\triangle\ ABC$
2. A_1; stred BC
3. AA_1 – $\boxed{\text{ťažnica z vrcholu } A}$
4. B_1; stred AC
5. BB_1 – $\boxed{\text{ťažnica z vrcholu } B}$
6. C_1; stred AB
7. CC_1 – $\boxed{\text{ťažnica z vrcholu } C}$

Ak ste presne rysovali, prechádzajú všetky ťažnice jedným bodom T, ktorý sa nazýva **ťažisko** trojuholníka.

!

Trojuholník ABC vystrihnite a prepichnite špendlíkom v bode T. Trojuholník podložte v ťažisku T ostrým hrotom ceruzky. Trojuholník nespadne.



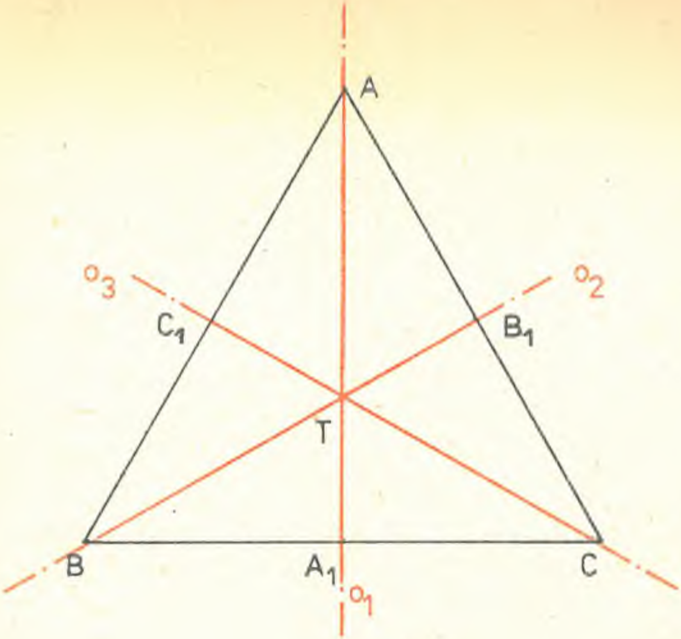
ťažisko trojuholníka ABC

Príklad 2

Zostrojte ťažnice rovnostranného trojuholníka ABC; $a = 6{,}9$ cm. Odôvodnite, že všetky ťažnice sú navzájom zhodné. Výsledok overte odmeraním dĺžok. Odmerajte vzdialenosť ťažiska od stredov strán.

Riešenie

Ťažnice aj osi súmernosti rovnostranného trojuholníka prechádzajú vrcholmi a stredmi protiľahlých strán. Preto sa kryjú (pozri obrázok).



V súmernosti podľa osi o_1 je obrazom bodu B bod C a obrazom bodu B_1 bod C_1. Obrazom ťažnice BB_1 je preto ťažnica CC_1. Ťažnice BB_1, CC_1 sú teda zhodné.

Vzor	B	B_1	BB_1
Obraz	C	C_1	CC_1

Obdobne sa ukáže, že sú zhodné aj ťažnice CC_1 a AA_1. Preto sú všetky tri ťažnice navzájom zhodné.

Overte odmeraním dĺžok:

$|AA_1| = 6$ cm, $|BB_1| = 6$ cm, $|CC_1| = 6$ cm.

$|TA_1| = 2$ cm, $|TB_1| = 2$ cm, $|TC_1| = 2$ cm.

Vzdialenosť ťažiska od stredov strán sa rovná jednej tretine dĺžky ťažnice.

!

$|TA_1| = \frac{1}{3} \cdot |AA_1|$, $|TB_1| = \frac{1}{3} \cdot |BB_1|$, $|TC_1| = \frac{1}{3} |CC_1|$

To platí pre každý trojuholník.

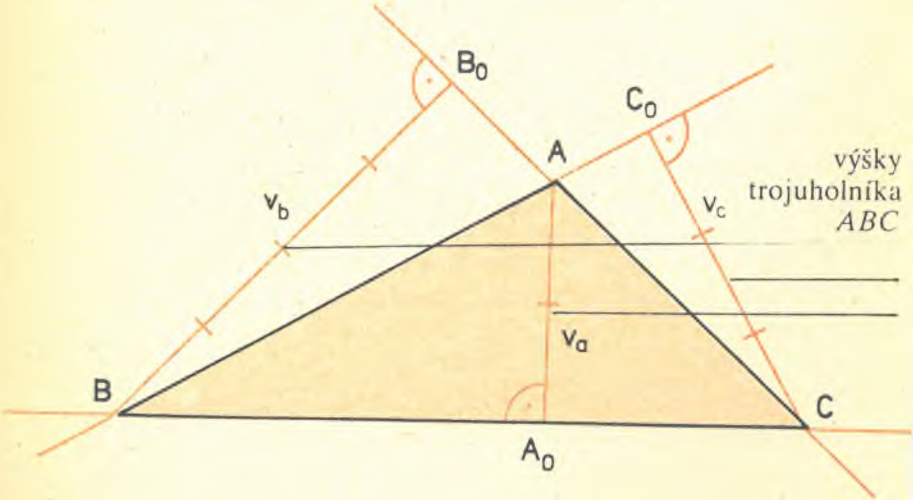
CVIČENIA

1. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC. Presvedčte sa, že všetky jeho ťažnice prechádzajú jedným bodom T. Ako sa tento bod nazýva? Zapíšte postup zostrojenia bodu T.

2. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so stranami $|AC| = |BC| = 5$ cm, $|AB| = 8$ cm. Odmerajte dĺžky jeho ťažníc a vzdialenosti ťažiska od stredov strán. Výsledky merania skontrolujte výpočtom.

3. Zostrojte rovnostranný trojuholník KLM; $|KL| = 5{,}2$ cm. Zostrojte kružnicu k so stredom v ťažisku T, ktorá prechádza bodom K. Leží na kružnici k ešte niektorý ďalší vrchol trojuholníka? Odôvodnite svoje tvrdenie.

7.7 Výšky trojuholníka



výšky trojuholníka ABC

Úsečky

$v_a = AA_o, \quad v_b = BB_o, \quad v_c = CC_o$

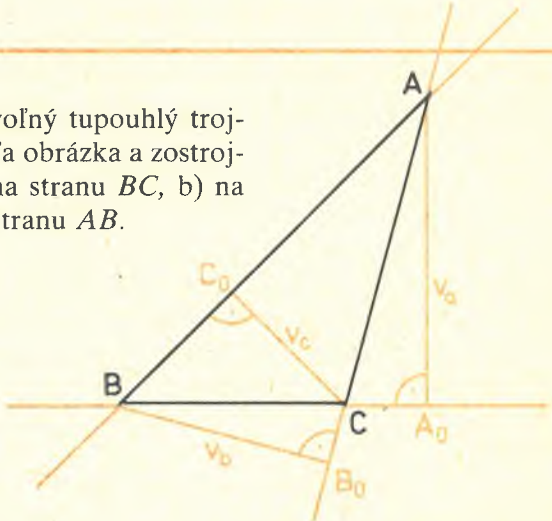
sú **výšky trojuholníka** ABC; sú kolmé na priamky, na ktorých ležia strany trojuholníka. Odmeraním výšok zistíte, že

$v_a = 2$ cm, $v_b = 4$ cm, $v_c = 3$ cm.

Aj tieto dĺžky nazývame výšky trojuholníka.

Príklad 1

Narysujte ľubovoľný tupouhlý trojuholník ABC podľa obrázka a zostrojte jeho výšku a) na stranu BC, b) na stranu AC, c) na stranu AB.



Riešenie

a) Výška na stranu BC:
Vyznačíme priamku BC ($\leftrightarrow BC$), na ktorej leží strana BC. Z vrcholu A zostrojíme kolmicu na túto priamku. Priesečník priamky BC a kolmice označíme A_o.
Postup zostrojenia výšky v_a môžeme zapísať:
1. $\leftrightarrow BC$
2. AA_o; $AA_o \perp \leftrightarrow BC$, $A_o \in \leftrightarrow BC$
3. v_a; $v_a = AA_o$

b) Postup zostrojenia výšky v_b:
1. $\leftrightarrow AC$
2. BB_o; $BB_o \perp \leftrightarrow AC$, $B_o \in \leftrightarrow AC$
3. v_b; $v_b = BB_o$

c) Postup zostrojenia výšky v_c:

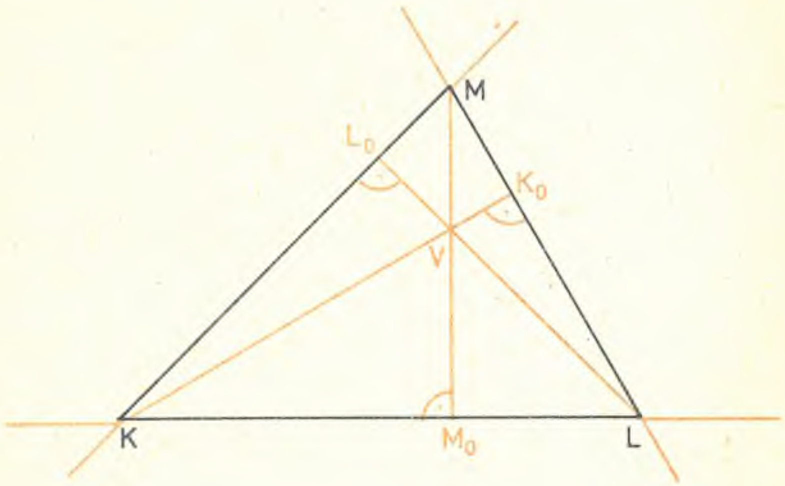
1. $\leftrightarrow AB$
2. CC_0; $CC_0 \perp \leftrightarrow AB$, $C_0 \in \leftrightarrow AB$
3. v_c; $v_c = CC_0$

Príklad 2

Narysujte ostrouhlý trojuholník KLM a zostrojte jeho tri výšky.

Riešenie

Na zostrojenie výšok použijeme rovnaký postup ako v príklade 1. Výsledok je na obrázku.



Ak budete presne rysovať, všetky tri výšky sa pretnú v jedinom bode V.

Úloha 1

?

Vráťte sa k trojuholníku z príkladu 1. Narysujte priamky, na ktorých ležia výšky v_a, v_b, v_c. Čo vidíte?

Úloha 2

Narysujte pravouhlý trojuholník PQR s pravým uhlom pri vrchole P. Zostrojte výšky trojuholníka. Čo vidíte?

?

Záver

V každom trojuholníku prechádzajú priamky, na ktorých ležia výšky, jediným spoločným bodom.

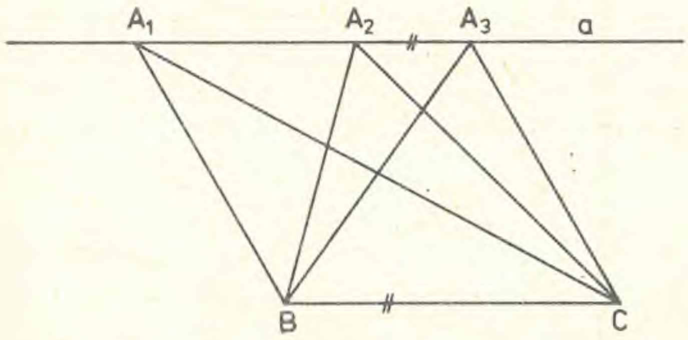
!

CVIČENIA

1. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC. Zostrojte jeho výšky. Napíšte postup zostrojenia výšky v_a. Odmerajte všetky tri výšky a zapíšte výsledok.

2. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC; $a = b = 8$ cm, $c = 6$ cm. Zostrojte výšky trojuholníka. Porovnajte výšky v_a a v_b. Pokúste sa odôvodniť výsledok.

3. Narysujte podľa obrázka úsečku BC a priamku a rovnobežnú s priamkou BC. Na priamke a si zvoľte body A_1, A_2, A_3. Zostrojte trojuholníky A_1BC, A_2BC, A_3BC. Zostrojte a porovnajte výšky týchto trojuholníkov na stranu BC.



4. Narysujte ľubovoľný ostrouhlý trojuholník KLM. Zostrojte jeho výšku na stranu LM a strednú priečku rovnobežnú so stranou LM. Ich priesečník označte R. (Ak ste presne rysovali, je R stredom výšky.)

5. Narysujte ľubovoľný štvoruholník $ABCD$ a rozdeľte ho uhlopriečkou BD na dva trojuholníky ABD a BCD. Zostrojte výšky týchto trojuholníkov na spoločnú stranu BD. Sú tieto výšky zhodné?

6. Cvičenie 5 zopakujte pre prípad, v ktorom si namiesto ľubovoľného štvoruholníka zvolíte obdĺžnik $ABCD$.

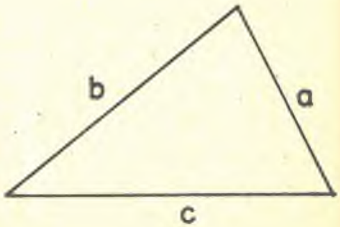
7.8 Konštrukcie trojuholníka *sss, sus, usu*

V tomto článku sa naučíte zostrojovať trojuholníky, keď budete poznať dĺžky niektorých ich strán a veľkosti niektorých ich vnútorných uhlov.

Konštrukcia trojuholníka z troch strán *(sss)*

Zopakujeme si konštrukciu trojuholníka, keď poznáme dĺžky troch jeho strán (**konštrukcia** *sss*), a naučíme sa ju zapisovať. Vieme, že taký trojuholník sa dá zostrojiť len vtedy, keď pre dĺžky strán platí **trojuholníková nerovnosť**.

$$\boxed{a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b}$$



Príklad 1

Zostrojte trojuholník ABC s dĺžkami strán $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm.

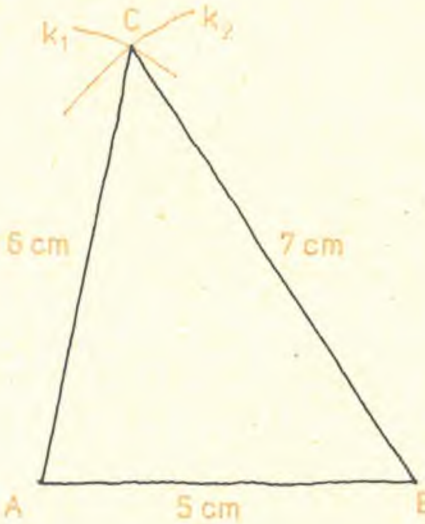
Riešenie

Rozbor

Trojuholníkové nerovnosti sú splnené:

$7 + 6 > 5, 6 + 5 > 7, 5 + 7 > 6.$

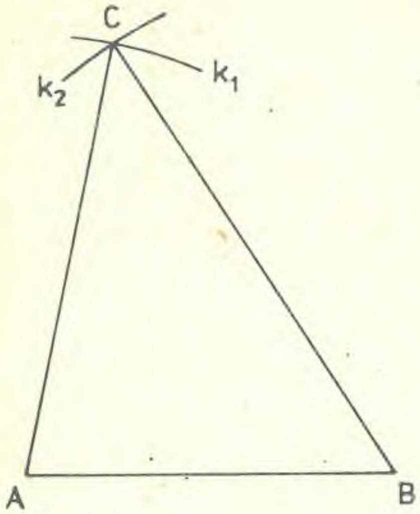
Trojuholník sa dá zostrojiť. Preto si urobíme náčrt trojuholníka a v ňom farebne vyznačíme dané prvky, t. j. strany trojuholníka.



Začneme stranou AB; zostáva zostrojiť vrchol C.

1. $|AC| = 6$ cm. Bod C leží na pomocnej kružnici k_1 opísanej z bodu A polomerom 6 cm.
2. $|BC| = 7$ cm. Bod C leží na pomocnej kružnici k_2 opísanej z bodu B polomerom 7 cm.
3. Bod C je priesečník kružníc k_1, k_2 ($C \in k_1 \cap k_2$).

K o n š t r u k c i a



Postup konštrukcie

1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. k_1; oblúk $k_1(A; 6\text{ cm})$
3. k_2; oblúk $k_2(B; 7\text{ cm})$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle ABC$

Skúška

Mali sme zostrojiť trojuholník so stranami, ktoré majú dĺžku $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm. Skúšku urobíme odmeraním dĺžok strán narysovaného trojuholníka.

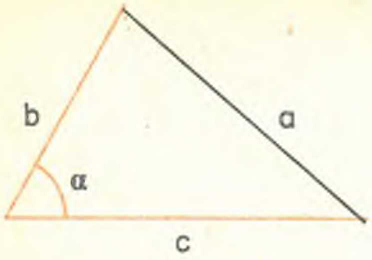
?

Úloha 1

Trojuholník ABC z príkladu 1 prekreslite na priesvitný papier. Presvedčte sa, že každé dva trojuholníky, ktoré ste zostrojili, môžeme premiestniť tak, že sa kryjú. Sú teda zhodné.

Konštrukcia trojuholníka z dvoch strán a z uhla, ktorý tieto strany zvierajú *(sus)*

Trojuholník môžeme zostrojiť, keď poznáme dĺžky dvoch jeho strán a veľkosť uhla, ktorý tieto strany zvierajú (**konštrukcia** *sus*). Veľkosť uhla musí byť menšia ako 180°, dĺžky strán môžu byť ľubovoľné.



$\alpha < 180°$

Príklad 2

Zostrojte trojuholník DEF so stranami $e = 5$ cm, $f = 4$ cm a uhlom $\delta = 75°$, zovretým stranami e a f.

Riešenie

Rozbor

Pretože $\delta < 180°$, trojuholník možno zostrojiť. Načrtneme si obrázok a v ňom farebne vyznačíme dané prvky.

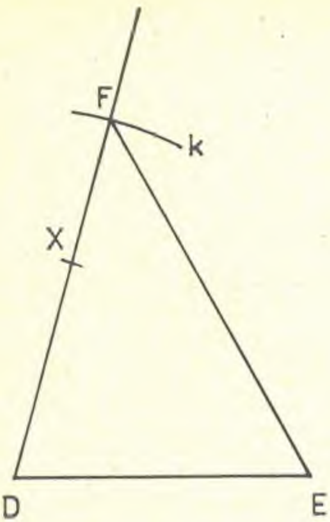
1. V náčrte vyznačíme stranu DE, ktorá určuje jedno rameno uhla δ.

2. Na druhom ramene uhla δ vyznačíme pomocný bod X. Uhol EDX má veľkosť $\delta = 75°$.

3. $|DF| = 5$ cm. V náčrte vyznačíme pomocnú kružnicu k opísanú z bodu D polomerom 5 cm, na ktorej leží bod F.

4. Bod F je priesečníkom polpriamky DX a kružnice k.

Konštrukcia



Postup konštrukcie

1. DE; $|DE| = 4$ cm
2. $\sphericalangle EDX$; $|\sphericalangle EDX| = 75°$ (uhlomerom)
3. k; $k(D; 5$ cm$)$
4. F; $F \in k \cap \mapsto DX$
5. $\triangle DEF$

Skúška

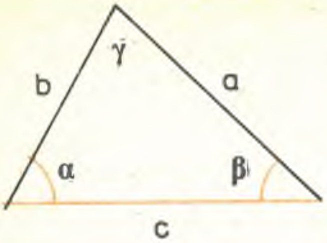
Mali sme zostrojiť trojuholník so stranami $f = 4$ cm, $e = 5$ cm a uhlom $\delta = 75°$. Skúšku urobíme odmeraním.

? **Úloha 2**

Pomocou priesvitky sa presvedčte, že ktorékoľvek dva trojuholníky zostrojené v príklade 2 sú zhodné, t. j. možno ich premiestniť tak, že sa kryjú.

Konštrukcia trojuholníka z jednej strany a dvoch priľahlých uhlov *(usu)*

Trojuholník možno zostrojiť aj vtedy, keď poznáme dĺžku jednej strany a veľkosť dvoch vnútorných uhlov priľahlých k tejto strane (**konštrukcia** *usu*). Súčet veľkostí týchto dvoch uhlov musí byť však menší než 180°.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\boxed{\alpha + \beta < 180°}$$

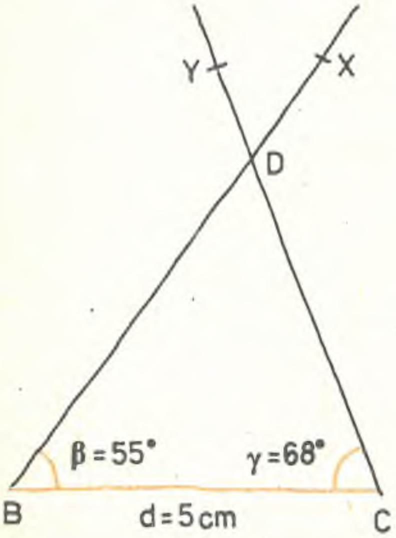
Príklad 3

Zostrojte trojuholník *BCD*, keď poznáte $d = 5$ cm, $\beta = 55°$, $\gamma = 68°$. (Uhly β a γ sú vnútorné uhly trojuholníka *BCD* priľahlé k strane d.)

Riešenie

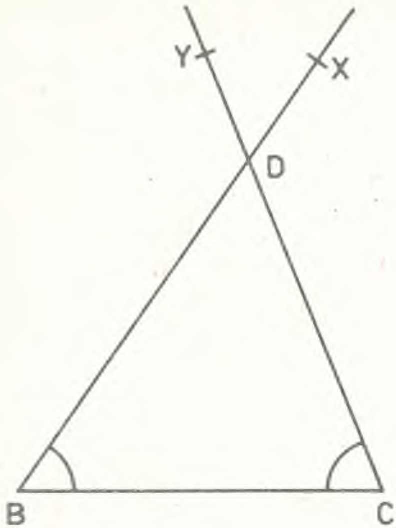
Rozbor

Urobíme náčrt trojuholníka. Farebne vyznačíme stranu d a uhly β a γ, ktoré sú priľahlé k strane $BC = d$. Pretože $\beta + \gamma < 180°$, trojuholník môžeme zostrojiť.



Na ramenách uhlov β a γ vyznačíme v náčrte pomocné body X, Y. Vidíme, že $|\sphericalangle CBX| = \beta = 55°$, $|\sphericalangle BCY| = \gamma = 68°$. Bod D je priesečníkom polpriamok BX a CY.

Konštrukcia



Postup konštrukcie

1. $\overline{BC}$; $|BC| = 5$ cm
2. $\sphericalangle CBX$; $|\sphericalangle CBX| = 55°$ (uhlomerom)
3. $\sphericalangle BCY$; $|\sphericalangle BCY| = 68°$ v polrovine CBX
4. D; $D \in \leftrightarrow BX \cap \mapsto CY$
5. $\triangle BCD$

Skúška

Presvedčíme sa, že zostrojený trojuholník má vnútorné uhly s veľkosťami $\beta = 55°$, $\gamma = 68°$ a stranu s dĺžkou $d = 5$ cm.

Spoznali ste tri konštrukcie trojuholníka: *sss, sus, usu*. Môžeme zhrnúť:

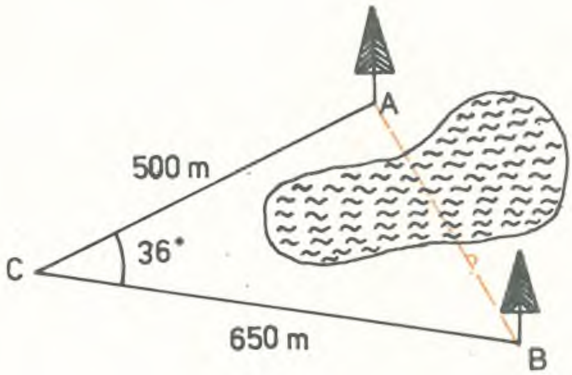
! **Trojuholník môžeme zostrojiť vždy, keď sú o ňom známe tri údaje a keď sú splnené podmienky uvedené v nasledujúcej tabuľke:**

	Známe údaje	Podmienka	Konštrukcia
	tri strany	súčet každých dvoch strán je väčší než tretia strana	*sss*
	dve strany a uhol nimi zovretý	veľkosť daného uhla je menšia než 180°	*sus*
	jedna strana a oba priľahlé uhly	súčet veľkostí daných uhlov je menší než 180°	*usu*

Konštrukcie *sus* a *usu* sa môžu využiť pri zisťovaní neznámych dĺžok, napríklad v zememeračstve.

Príklad 4

Zistite vzdialenosť miest A, B, medzi ktorými je rybník (pozri obrázok).



Meraním sa zistilo: $|AC| = 500$ m, $|BC| = 650$ m, $|\sphericalangle ACB| = 36°$.

Riešenie

Úlohu budeme riešiť graficky. Narysujeme trojuholník ABC v zmenšení, v ktorom 1 cm na pláne znázorňuje 100 m v skutočnosti.

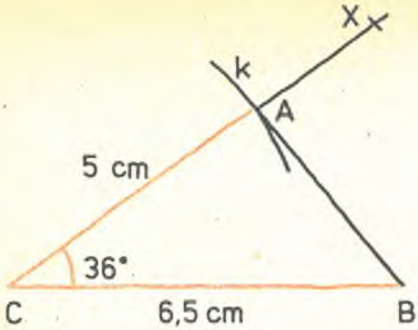
plán (cm)	1	5	6,5
skutočnosť (m)	100	500	650

↓ . 100

Trojuholník zostrojíme pomocou konštrukcie *sus*.

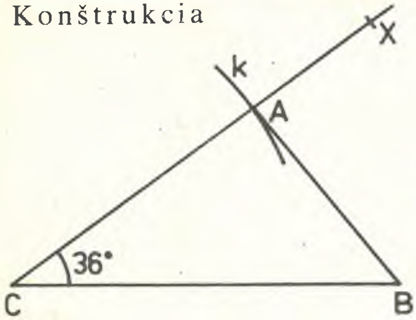
Rozbor

Načrtneme si trojuholník ABC a vyznačíme dané údaje.



Na ramene CA uhla BCA vyznačíme pomocný bod X; $|\sphericalangle BCX| = 36°$; $|AC| = 5$ cm. V náčrte vyznačíme pomocnú kružnicu k opísanú z bodu C polomerom $r = 5$ cm, na ktorej leží bod A. Bod A je priesečníkom polpriamky CX a kružnice k.

Konštrukcia



Postup konštrukcie

1. CB; $|CB| = 6{,}5$ cm
2. $\sphericalangle BCX$; $|\sphericalangle BCX| = 36°$
3. k; $k(C;\ 5\text{ cm})$
4. A; $A \in k \cap \mapsto CX$
5. $\triangle ABC$
6. $|AB|$ (odmeriame)

Odmeriame vzdialenosť bodov A, B na pláne a vypočítame zodpovedajúcu vzdialenosť v skutočnosti:

$\lvert AB \rvert$	plán (cm)	3,8	↓ . 100
	skutočnosť (m)	380	

Vzdialenosť miest A, B je asi 380 metrov.

CVIČENIA

1. Zostrojte trojuholník ABC a zapíšte postup konštrukcie. Má úloha vždy riešenie?

a) $a = 6{,}5$ cm, $b = 5{,}4$ cm, $c = 3{,}8$ cm

b) $a = b = 5$ cm, $\gamma = 120°$
c) $c = 6{,}4$ cm, $\alpha = 100°$, $\beta = 85°$
d) $b = 4{,}6$ cm, $\alpha = \beta = 65°$
e) $\alpha = 75°$, $b = 4$ cm, $\gamma = 60°$

---

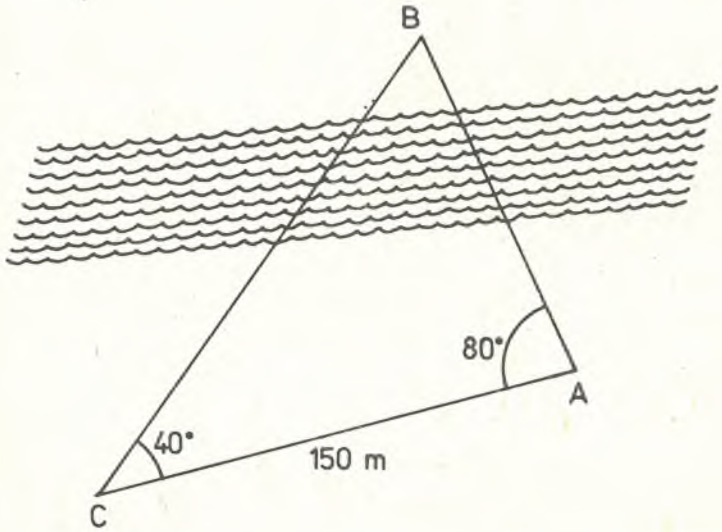
2. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom $\alpha = 40°$, $b = 52$ mm, $\gamma = 70°$. Porovnajte jeho strany a, c so stranou b. Aký trojuholník ste zostrojili?

---

3. Zostrojte bez uhlomeru trojuholník ABC, pre ktorý je dané:
a) $a = 48$ mm, $\beta = 60°$, $c = 38$ mm
b) $\alpha = 45°$, $b = 45$ mm, $\gamma = 60°$
c) $\alpha = 120°$, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm

---

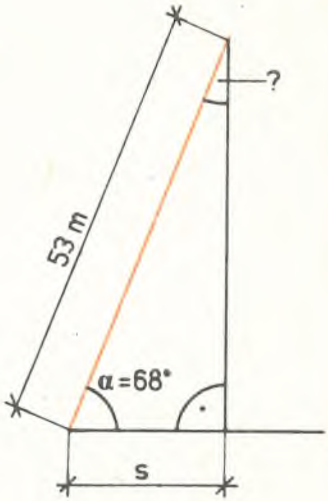
4. Zistite graficky vzdialenosť miest A, B ležiacich na rôznych brehoch rieky.



---

5. Vypočítajte veľkosť tretieho uhla trojuholníka ABC a zostrojte tento trojuholník.
a) $a = 5$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 80°$
b) $\alpha = \gamma = 52°$, $c = 6$ cm

6. a) Výsuvné rameno autožeriavu sa vysunulo na najväčšiu možnú dĺžku 53 m. Aký je dosah žeriavu (na obrázku je označený písmenom s), keď rameno je sklonené pod uhlom $\alpha = 68°$?
(1 mm na obrázku znázorňuje 1 m v skutočnosti.)

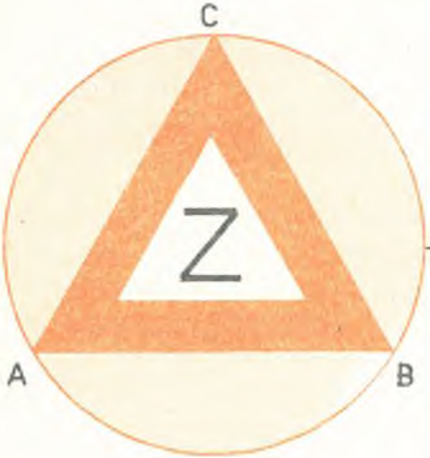


b) Najvyššiu prípustnú hmotnosť m záťaže (vyjadrenú v tonách) pri sklone ramena α v rozmedzí od 53° do 81° možno vypočítať približne delením $m = 32 : s$. Vypočítajte túto hmotnosť pre uhol $\alpha = 68°$.

7. Zostrojte trojuholník ABC, ktorého stredné priečky majú dĺžky 2 cm, 2,5 cm a 3 cm.

7.9 Kružnica opísaná trojuholníku. Kružnica vpísaná do trojuholníka

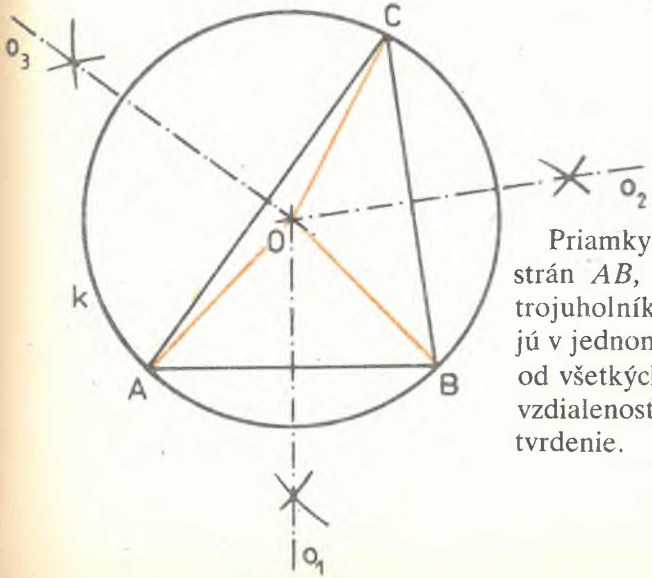
A. Kružnica opísaná trojuholníku



kružnica opísaná trojuholníku ABC

Kruhovú značku znázornenú na obrázku majú na svojich vozidlách niektorí vodiči-začiatočníci. Obrys značky tvorí **kružnica opísaná** červeno vyznačenému **trojuholníku.**

Naučíme sa zostrojiť kružnicu opísanú ľubovoľnému trojuholníku ABC (pozri obrázok).



Priamky o_1, o_2, o_3 sú osi strán AB, BC, AC. Osi strán trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode O, ktorý má od všetkých vrcholov rovnakú vzdialenosť. Odôvodníme toto tvrdenie.

Body, ktoré ležia na osi úsečky, sú temená rovnoramenných trojuholníkov. Bod O je priesečník osí o_1 a o_2 strán AB a BC. Preto je temenom rovnoramenného trojuholníka ABO ($AO \cong BO$) aj rovnoramenného trojuholníka BCO ($BO \cong CO$). Teda platí

$$AO \cong BO \cong CO.$$

Kružnica k so stredom O, ktorá prechádza bodom A, musí prechádzať aj bodmi B, C. Je to kružnica opísaná trojuholníku ABC.

! Stred kružnice **opísanej** trojuholníku je **priesečníkom osí jeho strán.**

Príklad 1

Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC a zostrojte kružnicu k opísanú tomuto trojuholníku.

Riešenie

Rozbor

Stred kružnice opísanej trojuholníku ABC je priesečníkom osí jeho všetkých troch strán.

Konštrukcia je na predchádzajúcom obrázku.

Postup konštrukcie

1. $\triangle ABC$
2. o_1
3. o_2
4. o_3

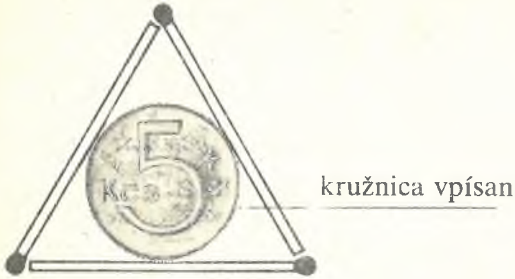
$\left.\begin{array}{l} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{array}\right\} \boxed{\text{osi strán}}$

5. O; $O \in o_1 \cap o_2 \cap o_3$
6. k; $k(O; OA)$

Skúška

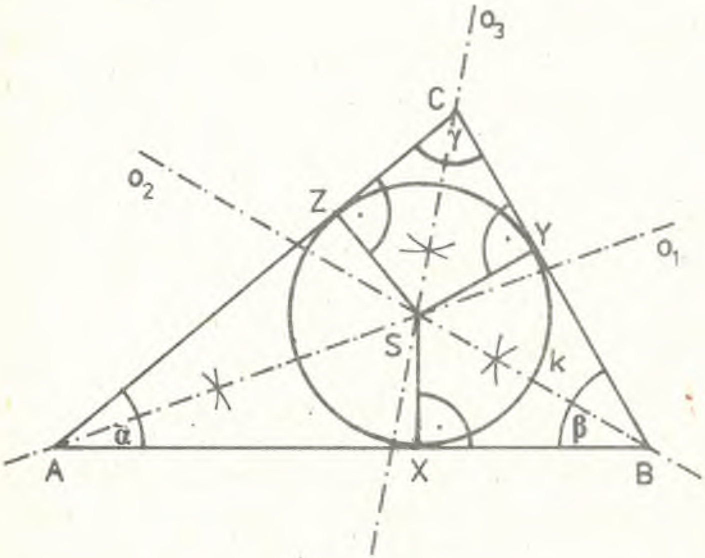
Zistíme, či $B \in k$, $C \in k$. Ak vrcholy B, C ležia na kružnici k, rysovali ste presne a úloha je správne vyriešená. Ak aspoň jeden z vrcholov B, C neleží na kružnici k, rysovali ste nepresne. Úlohu treba riešiť znovu a rysovať pozornejšie a presnejšie.

B. Kružnica vpísaná do trojuholníka



Z troch zápaliek dlhých 45 mm môžete utvoriť trojuholník, ktorého strany sa vždy v jedinom bode dotýkajú päťkorunovej mince. Obrys päťkorunovej mince je **kružnica vpísaná do trojuholníka** utvoreného z troch zápaliek.

Naučíme sa zostrojovať kružnicu vpísanú do ľubovoľného trojuholníka.



Priamky o_1, o_2, o_3 na obrázku sú osami vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Osi sa pretínajú v bode S, ktorý je stredom kružnice k vpísanej do trojuholníka ABC. Táto kružnica má so stranami AB, BC, AC spoločné len body X, Y, Z. Úsečky SX, SY, SZ sú navzájom zhodné a sú polomermi kružnice k.

! Stred kružnice **vpísanej** do trojuholníka je **priesečníkom osí vnútorných uhlov** trojuholníka.

Príklad 2

Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC a zostrojte kružnicu vpísanú do tohto trojuholníka.

Riešenie

Rozbor

Stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABC je priesečník osí všetkých troch vnútorných uhlov trojuholníka.

Konštrukcia je na predchádzajúcom obrázku.

Postup konštrukcie

1. $\triangle ABC$
2. o_1
3. o_2 } osi vnútorných uhlov
4. o_3
5. S; $S \in o_1 \cap o_2 \cap o_3$
6. SX
7. SY } kolmice na strany
8. SZ
9. k; $k(S; SX)$

Skúška

Zistíme, či $Y \in k$, $Z \in k$. Ak oba body Y, Z ležia na kružnici k, obrázok je narysovaný presne. Úloha je správne vyriešená. Ak aspoň jeden z bodov Y, Z neleží na kružnici k, v rysovaní boli nepresnosti. Úlohu treba riešiť znova a presne.

CVIČENIA

1. Narysujte tupouhlý trojuholník ABC. Zostrojte kružnicu, ktorá je mu opísaná. Napíšte postup.

2. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC; $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 90°$. Zostrojte kružnicu, ktorá je mu opísaná. Kde leží stred tejto kružnice?

3. Zostrojte kružnicu vpísanú do trojuholníka ABC so stranami $a = 6{,}5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 7{,}5$ cm. Ktorá z úsečiek $r = 1{,}8$ cm, $r = 2$ cm, $r = 2{,}3$ cm, $r = 3$ cm je polomerom?

4. Záhrada má tvar trojuholníka so stranami 52 m, 46 m, 35 m.
   a) Narysujte plán záhrady. Zmenšenie: 1 mm na pláne znamená 1 m v skutočnosti.
   b) Zistite, kde treba postaviť hydrant, ktorý má rovnaké vzdialenosti od všetkých rohov záhrady.

Historické poznámky

Veľké vedomosti o geometrii trojuholníka mali už viac ako pol tisícročia pred naším letopočtom starí Gréci. Mnohé poznatky preberali od ešte starších kultúrnych národov, najmä od Egypťanov a národov Mezopotámie. Prevzaté poznatky však značne obohatili. Zásluhou Grékov sa azda po prvý raz v histórii geometrické tvrdenia dokazovali. Napríklad egyptskí stavitelia objavili, že rovnoramenný trojuholník má pri základni zhodné uhly. Na odôvodnenie tohto tvrdenia vyrobil grécky matematik **Tales z Milétu** *(asi 624–547 pred n. l.) dva zhodné rovnoramenné trojuholníky. Potom ukázal,* *že keď jeden z nich prevráti a položí na druhý, oba sa presne kryjú. To bol pravdepodobne objav prvého dôkazu v geometrii.*

Egypťania používali na vytýčenie pravého uhla trojuholník, ktorého strany mali dĺžku 3, 4 a 5 ľubovoľných jednotiek. Grécky matematik **Pytagoras** *(asi 580–500 pred n. l.) vedel opísať konštrukciu všetkých pravouhlých trojuholníkov, ktorých strany mali dĺžku vyjadrenú celými číslami. Tieto trojuholníky sa dodnes nazývajú pytagorovské trojuholníky. Patria k nim napríklad trojuholníky s dĺžkami strán 3* cm, *4* cm, *5* cm *alebo 5* cm, *12* cm, *13* cm *alebo 8* cm, *15* cm, *17* cm. *(Vyskúšajte si to sami.)*

Jeden z najznámejších gréckych matematikov **Euklides** *(asi 365–300 pred n. l.) vedel, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Napísal trinásť kníh o geometrii s názvom Základy. Rozpráva sa o ňom historka, že na otázku panovníka, či k poznaniu geometrie nevedie kratšia a menej namáhavá cesta, odpovedal: „Niet kráľovskej cesty ku geometrii."*

Archimedes *(267–212 pred n. l.), známy viac svojimi objavmi vo fyzike, už vedel, že ťažnice v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode.*

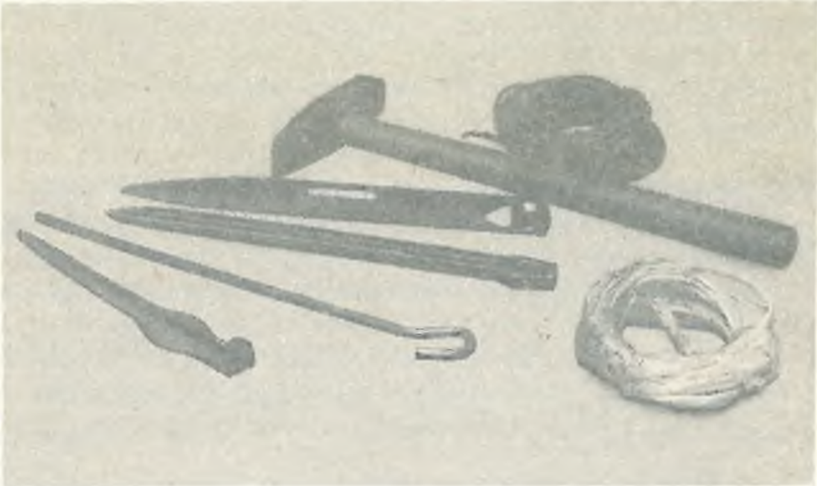
Apollonios z Pergy *(asi 260–170 pred n. l.) vedel zostrojiť kružnicu prechádzajúcu tromi bodmi a kružnicu dotýkajúcu sa troch priamok. Riešil však aj zložitejšie úlohy, napríklad zostrojenie kružnice, ktorá sa dotýka iných troch kružníc.*

Ako vidíte, už starí Gréci vedeli o trojuholníku viac, než sa vy naučíte v 6. ročníku. Rozdiel je v tom, že tieto poznatky boli prv výsadou malého počtu jednotlivcov, a dnes sa o nich učíte všetci.

8. Topografické práce

V praktickej činnosti sa často stretávame s úlohami, ktoré majú geometrickú povahu. Na hodinách telesnej výchovy ste merali dĺžku skokov, výšku latky nad zemou pri skoku do výšky, dĺžku hodov a vrhov, vymeriavali ste bežeckú dráhu dlhú 50 m alebo 60 m. Z hľadiska geometrie je táto činnosť meraním dĺžky úsečky. Napnutý motúz často znázorňuje priamku: pri murovaní, pri rýľovaní záhona, pri vysádzaní priesad alebo kríkov do rovného radu a podobne.

Činnosti v teréne, ktorým zodpovedá na papieri alebo na tabuli rysovanie priamky alebo úsečky, meranie dĺžok, nanášanie a meranie uhlov, znázorňovanie rovinných obrazcov, sa nazývajú **topografické práce.** Pri topografických prácach používame jednoduché pomôcky, ako sú meračské pásmo alebo iné pomôcky na meranie dĺžok (pevné tyčové meradlo, skladacie meradlo a iné), výtyčky, značkovacie kolíky, olovnica, libela, zameriavací kríž. Pri náročnejších a zložitejších prácach sa používa aj meračský stolík, prípadne aj zložitejšie prístroje.



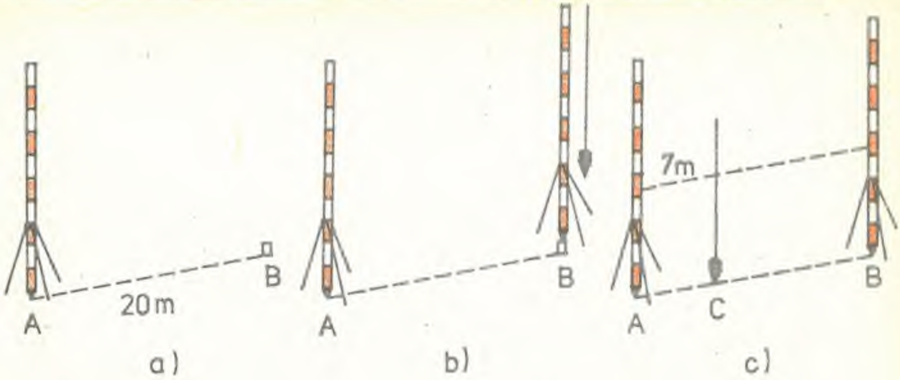
8.1 Vytýčenie priamky a úsečky

Príklad 1

Na vodorovnom teréne vytýčte priamku AB pomocou bodov A, B, ktorých vzdialenosť je 20 m. Na priamke AB vytýčte úsečku CD tak, aby body C, D ležali medzi bodmi A, B, $|CD| = 5$ m, $|AC| = 7$ m a $|AD| > |AC|$.

Postup

1. Zvolíme si bod A a označíme ho výtyčkou so stojanom (obrázok a)).



2. Na vodorovnom teréne vo zvolenom smere odmeriame od bodu A meračským pásmom 20 m. Koncový bod B pásma označíme značkovacím kolíkom, ktorý hneď nahradíme výtyčkou (obrázky a), b)).

3. Obe výtyčky upravíme pomocou olovnice do zvislej polohy (obrázok b)).

4. Vo výške 30 cm až 50 cm nad terénom napneme a na výtyčkách v bodoch A, B upevníme motúz (obrázok c)). Na oboch výtyčkách motúz upevníme v tej istej výške.

5. Na napnutom motúze AB odmeriame od bodu A dĺžku 7 m. Olovnicou určíme na teréne bod C (obrázok c)). Označíme ho značkovacím kolíkom.

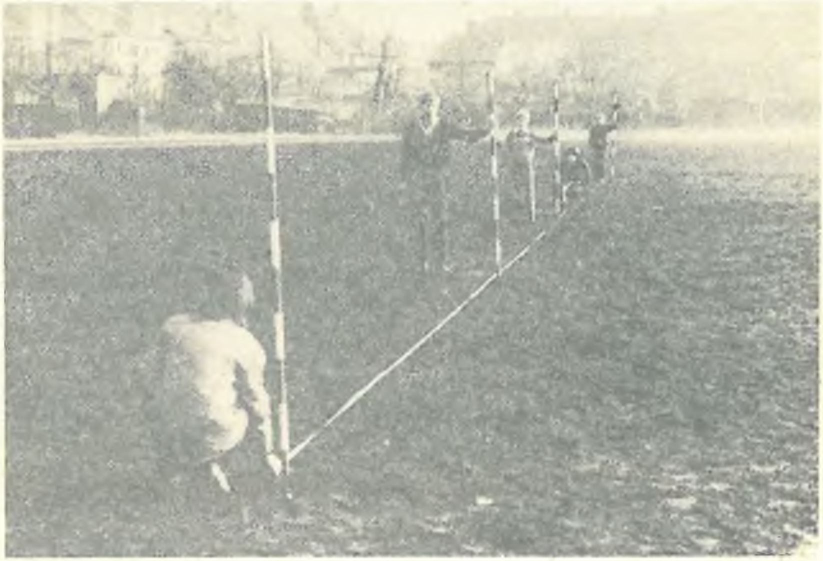
6. Postup z bodu 5 zopakujeme pre bod D, pre ktorý $|CD| = 5$ m; podľa daných údajov je bod D medzi bodmi C a B.

Príklad 2

V teréne je vytýčená priamka AB (príklad 1). Na priamke AB vytýčte úsečku EF tak, že bod B je medzi bodmi A, E, bod E medzi bodmi B, F a $|BE| = 5$ m, $|EF| = 8$ m.

Postup

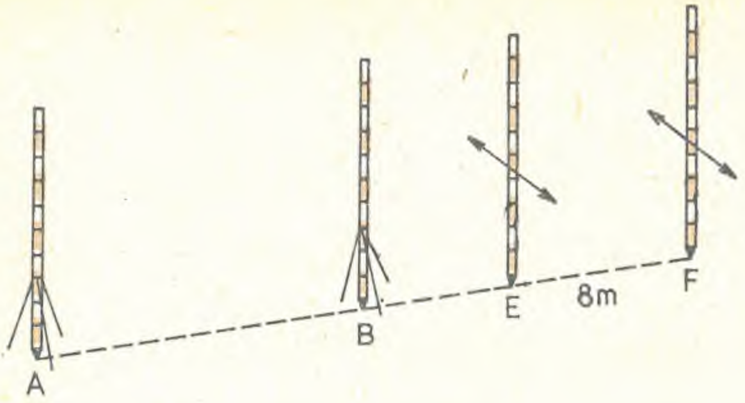
Úsečku vytyčujú dvaja žiaci: jeden z nich, zvaný merač, zrakom kontroluje a hlasom usmerňuje činnosť, druhý, nazývaný figurant, pohybuje výtyčkou podľa pokynov merača.



1. Priamka je vytýčená spôsobom uvedeným v príklade 1.

2. Na predĺžení úsečky AB za bod B odmeriame od bodu B vodorovne 5 m. Usilujeme sa, aby koncový bod úsečky bol na priamke AB. Tým dostaneme približnú polohu bodu E. Na tento bod postaví žiak-figurant výtyčku.

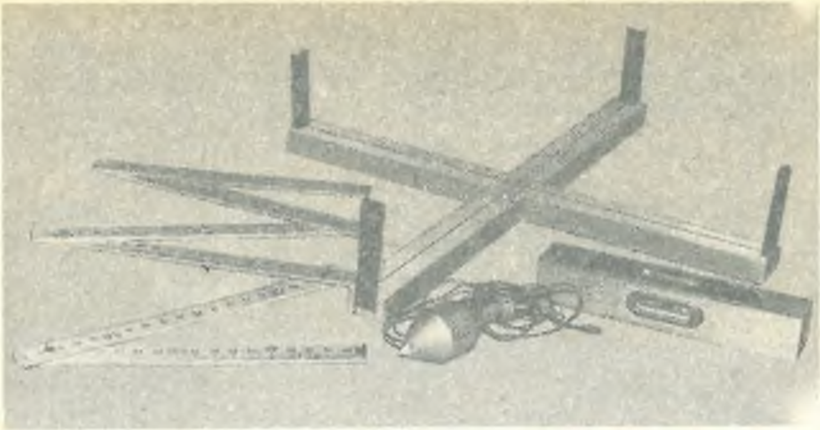
3. Žiak-merač sa postaví približne 5 krokov za výtyčku v bode A na priamke AB tak, aby pri pohľade jedným okom mal výtyčku v bode B zakrytú výtyčkou v bode A. Podľa pokynov žiaka-merača posúva žiak-figurant výtyčku do strán (doprava, doľava) dovtedy, kým všetky tri výtyčky v bodoch A, B, E nie sú v zákryte (obrázok). V mieste hrotu výtyčky značkovacím kolíkom označíme presnú polohu bodu E.



4. Meračské pásmo natiahneme z bodu B cez bod E a na predĺženie úsečky BE za bod E nameriame od bodu E vzdialenosť 8 m; dostaneme približnú polohu bodu F na priamke AB. Presné umiestnenie bodu F na priamku AB zaistíme rovnakým spôsobom, aký sme použili v bode 3 pre bod E (pozri obrázok).

8.2 Vytýčenie pravého uhla

Mali ste príležitosť všimnúť si, aké pomôcky používajú na vymeranie pravého uhla murári pri stavbe múrov domu, sklenári pri rezaní skla, stolári pri rezaní dosiek, tesári pri opracúvaní brvien? Používajú drevené alebo kovové príložníky, ktorých ramená zvierajú pravý uhol. Pri vytyčovaní dvoch na seba kolmých priamok v teréne by použitie týchto pomôcok nedávalo dostatočne presný výsledok. Na vytýčenie pravého uhla vo vodorovnej rovine pri topografických prácach používame zameriavací kríž alebo meračské pásmo.

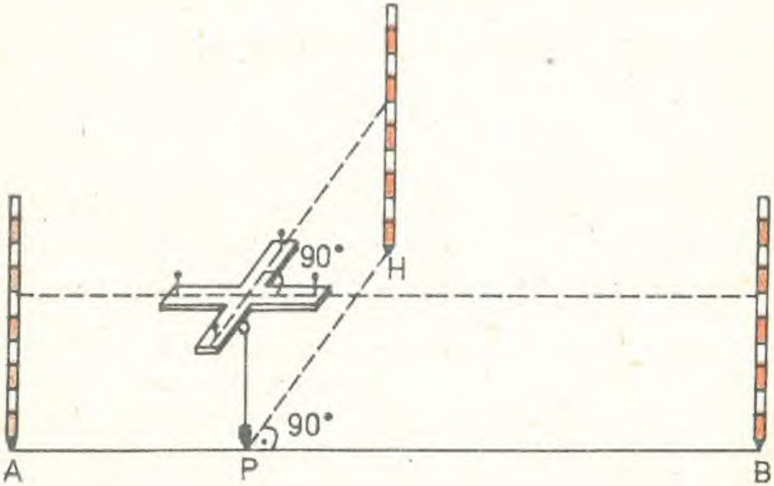


Príklad 1

V teréne je vytýčená vodorovná priamka a na nej bod P. Vytýčte priamku, ktorá prechádza bodom P a je kolmá na priamku AB.

Postup

Na vodorovnom teréne je vytýčená priamka AB, napríklad $|AB| = 20$ m, na nej je zvolený bod P označený značkovacím ko-



líkom. (Vhodné je zvoliť si bod P medzi bodmi A, B napríklad tak, že $|AP| = 8$ m.)

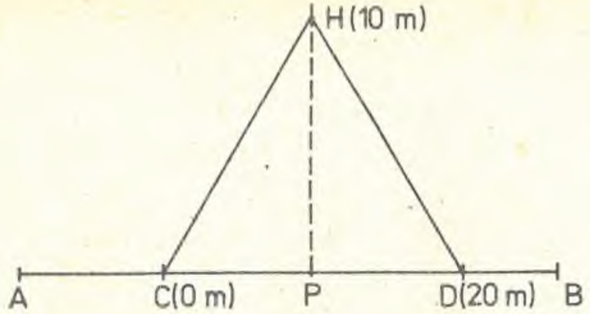
1. spôsob (pomocou zameriavacieho kríža)

1. Pomocou olovnice umiestnime nad bod P zameriavací kríž. Jeho polohu upravíme tak, aby sa zámerná priamka jedného ramena zameriavacieho kríža stotožnila s priamkou AB (pozri obrázok).

2. Zámerná priamka druhého ramena zameriavacieho kríža určuje kolmicu na priamku AB. V teréne pomocou figuranta umiestnime výtyčku tak, aby bola na tejto kolmici (pozri obrázok).

2. spôsob (pomocou meračského pásma)

1. Na priamke AB určíme body C, D tak, že $|PC| = |PD| = 5$ m a bod P leží medzi bodmi C, D (pozri obrázok na str 68). Body C, D môžeme vyznačiť značkovacími kolíkmi.



2. Značku 0 m meračského pásma umiestnime do bodu C, značku 20 m do bodu D.

3. Meračské pásmo chytíme na značke 10 m a napneme ho tak, že jeho úseky od 0 m po 10 m a od 20 m po 10 m tvoria strany CH a DH trojuholníka CHD so spoločným vrcholom H, na ktorom je značka 10 m (pozri obrázok).

4. Bod H označíme značkovacím kolíkom.
   Priamka PH je kolmá na priamku AB. (Odôvodnite.)

Príklad 2

V teréne je vytýčená priamka AB a bod H (vyznačený výtyčkou), ktorý na priamke AB neleží (napr. $|AH| = 14$ m, $|BH| = 13$ m). Vytýčte priamku, ktorá prechádza bodom H a je kolmá na priamku AB.

Postup

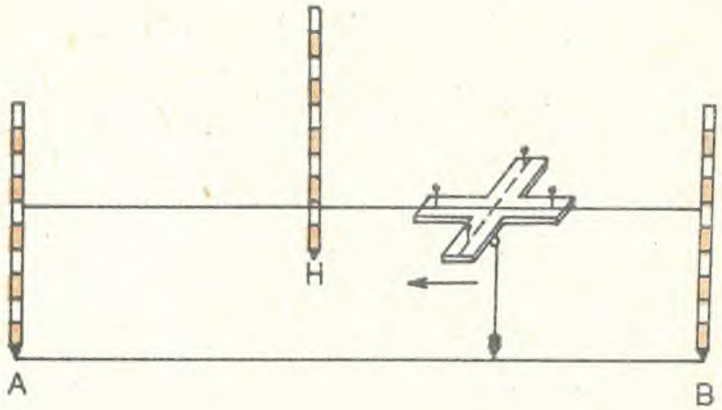
Na vodorovnom teréne vytýčime priamku AB (napríklad $|AB| = 20$ m). V bodoch A, B umiestnime výtyčky.

1. Medzi výtyčkami v bodoch A, B napneme vodorovne motúz tak, aby ho žiak pri miernom pokrčení mal vo výške oka.

2. Bod H vyznačíme výtyčkou.

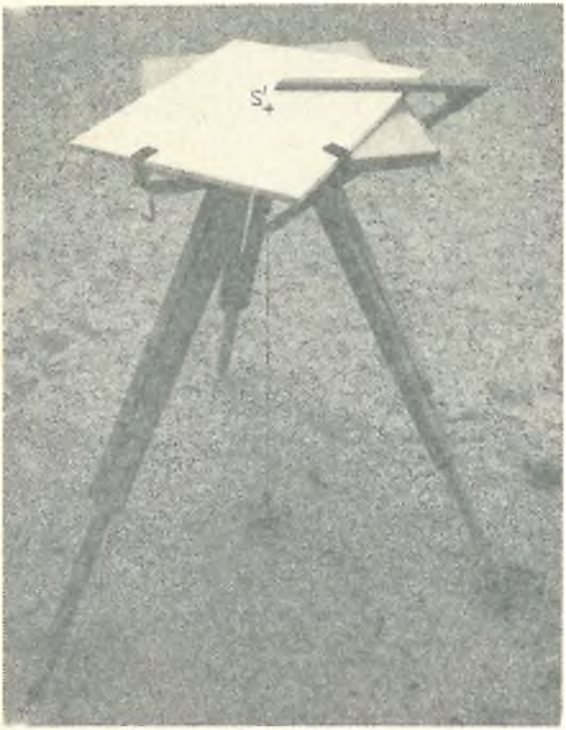
3. Zameriavací kríž zorientujeme tak, aby zámerná priamka jedného ramena bola totožná s priamkou AB (pozri obrázok).

4. Zameriavacím krížom posúvame po napnutom motúze medzi bodmi A, B dovtedy, kým zámerná priamka druhého ramena zameriavacieho kríža neprechádza bodom H. (Priezormi tohto ramena vidíme výtyčku v bode H.) Olovnicou zo stredu zameriavacieho kríža určíme na priamke AB bod P, ktorý je pätou kolmice z bodu H na priamku AB.



8.3 Zastaničenie

Pri niektorých topografických prácach súčasne s činnosťou v teréne robíme na papieri zmenšený nákres útvarov v teréne. Používame pritom **meračský stolík** (pozri fotografiu) a dosku s pripevneným papierom (**rysovku**), na ktorom je obvykle vyznačená priamka ako obraz nejakej význačnej priamky v teréne. Aby sa situácia z terénu a výsledky topografických prác dali jednoducho zaznačovať na papier, musí sa stolík vhodne pripraviť na prácu. Dôležitou súčasťou prípravy meračského stolíka je **zastaničenie,** ktoré sa skladá z troch úkonov:



a) dostredenie (centrovanie),
b) horizontovanie,
c) orientovanie.

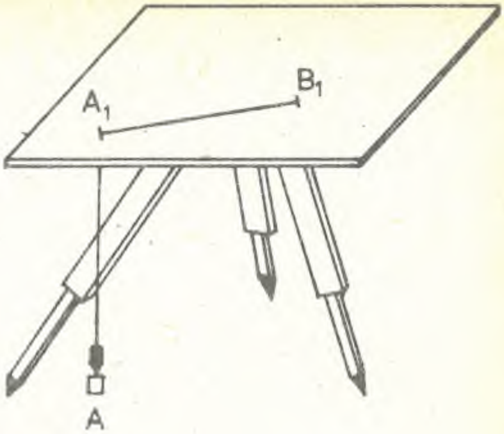
Príklad 1

V teréne si zvoľte bod A. (Označte ho značkovacím kolíkom.) Vytýčte priamku AB. Na papieri vo vhodnej mierke znázornite úsečku AB ako úsečku A_1B_1. Rysovku položte na dosku meračského stolíka.

Urobte zastaničenie meračského stolíka.

Riešenie

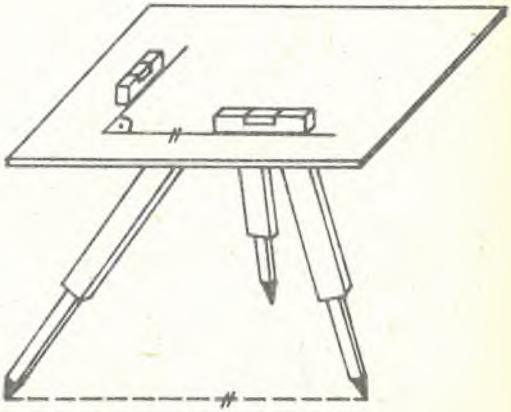
1. **Dostredenie**



a) Meračský stolík s rysovkou umiestnime tak, že body A_1 a A ležia na tej istej zvislej priamke (pozri obrázok). Správnosť polohy zaručíme olovnicou.
b) Dbáme, aby nohy stolíka zvierali navzájom približne rovnaké uhly a aby doska stolíka bola približne vodorovná.

2. **Horizontovanie**
Dosku meračského stolíka uvedieme do vodorovnej polohy:

a) Položíme libelu na dosku stolíka a opatrným zatláčaním nôh stolíka do pôdy (alebo zasúvaním a vysúvaním nôh) uvedieme libelu do vodorovnej polohy. Najlepšie je položiť libelu do smeru určeného priamkou, ktorá spája päty dvoch nôh stolíka.
b) Položíme libelu kolmo na pôvodnú polohu a rovnako ako v a) ju uvedieme do vodorovnej polohy (pozri obrázok).



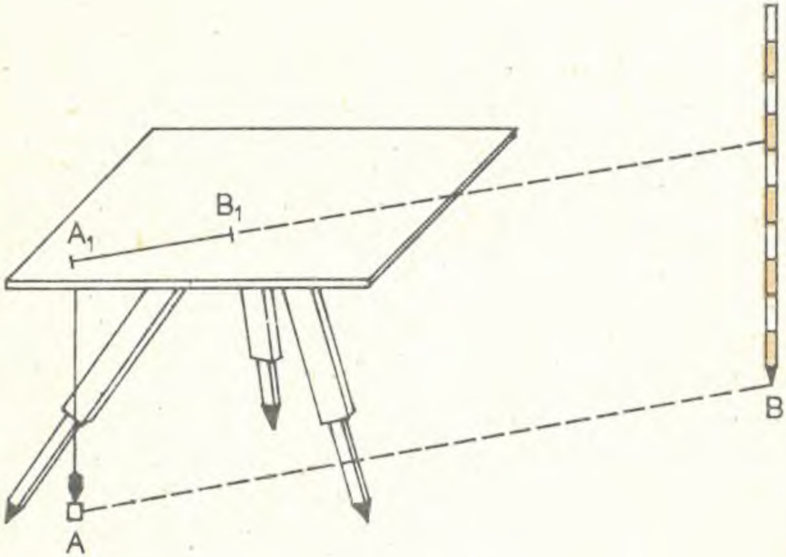
3. **Orientovanie**

Urobí sa pomocou zameriavacieho lineára. Cieľom orientovania je dosiahnuť, aby priamky AB a A_1B_1 boli v jednej zvislej rovine.

a) Hranu zameriavacieho lineára položíme na priamku A_1B_1.

b) Rysovku otáčame okolo bodu A_1 dovtedy, kým zameriavací lineár nemieri na bod B v teréne (výtyčka v bode B alebo výrazný predmet v teréne označený ako bod B, napríklad stĺp, strom a podobne – pozri obrázok).

c) Rysovku upevníme v tejto polohe na dosku meračského stolíka.



Meračský stolík je pripravený na používanie. Pri práci treba dbať, aby sa neporušila poloha nôh ani horizontovanie a orientovanie stolíka.

8.4 Rajónovanie

Pri tomto druhu topografických prác sa používa meračský stolík so zameriavacím lineárom.

Príklad 1

Na vodorovnom teréne si zvoľte body A, B, C tak, aby neležali na jednej priamke a $|AB| = 36$ m, $|AC| = 22$ m. Určite vzdialenosť bodov B, C bez priameho merania.

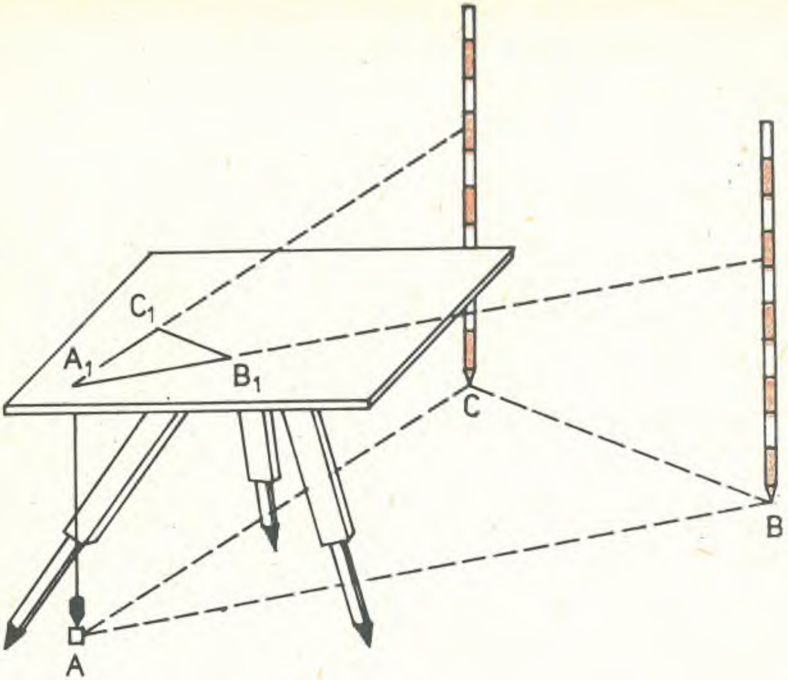
Postup

1. Bod A vyznačíme značkovacím kolíkom, body B, C výtyčkami.

2. Na meračský stolík pripevníme rysovku s papierom a vhodne si na ňom zvolíme bod A_1 (spravidla pri dolnom okraji).

3. Urobíme dostredenie meračského stolíka tak, že body A, A_1 ležia na tej istej zvislej priamke. Urobíme horizontovanie stolíka.

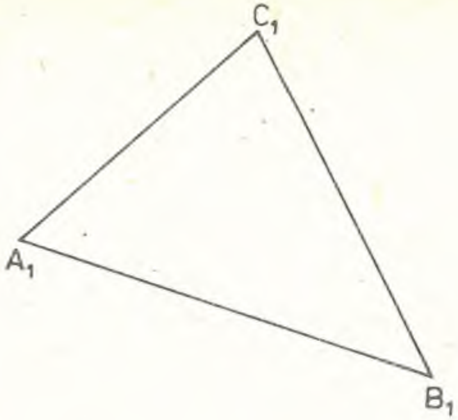
4. Zameriavacím lineárom zamierime z bodu A_1 na výtyčku v bode B a podľa hrany lineára vyznačíme na papieri priamku idúcu



bodom A_1 smerom na výtyčku v bode B (pozri obrázok). Na túto priamku nanesieme od bodu A_1 vzdialenosť $|AB|$ zmenšenú vo vhodnom pomere. Tu si zvolíme 200-násobné zmenšenie: vyznačíme bod B_1, pre ktorý $|A_1B_1| = 18$ cm.

! Priamka AB sa nazýva **rajón**, dĺžka $|AB|$ sa nazýva **dĺžka rajónu.**

5. Bez pohnutia stolíkom a rysovkou zamierime zameriavací lineár bodom A_1 na výtyčku v bode C a zopakujeme postup z bodu 4 pre bod C (pozri obrázok). Na papieri dostaneme zakreslenú priamku A_1C_1 tak, že smeruje na výtyčku v bode C a $|A_1C_1| = \dfrac{22\text{ m}}{200} = 11$ cm (pozri obrázok).



6. V trojuholníku $A_1B_1C_1$ sú dĺžky všetkých strán 200-krát zmenšené oproti dĺžkam strán trojuholníka ABC.
Odmeriame dĺžku úsečky B_1C_1. Ak napríklad $|B_1C_1| = 13{,}5$ cm, úsečka BC v teréne je 200-násobne väčšia; teda $|BC| = 27$ m. Uvedený spôsob zakresľovania rajónov a ich dĺžok sa nazýva **rajónovanie.**

9. Percentá

9.1 Percento

Určite ste počuli alebo čítali vety takéhoto druhu: „V apríli sme splnili plán na 102 percent“; „Spotrebu elektriny treba znížiť o 3 percentá“; „V našej triede je vyznamenaných 20 percent žiakov“; „Dochádzka v decembri sa oproti novembru zhoršila o 5 percent“. Iste vám pritom prišla na um otázka, čo znamená slovo percento. Toto slovo pochádza zo spojenia slov „per centum“, čo v latinčine znamená delenie číslom 100. Zo skratky pre percento sa vyvinulo označenie, ktorým percento skrátene zapisujeme; je to znak % (čítame: percento).

Pomocou percent často vyjadrujeme rozmanité údaje o hospodárstve, o obyvateľstve, o rozličných oblastiach spoločenského života (školstvo, zdravotníctvo, kultúra, šport), o zložení nejakého celku z častí a podobne.

Zapamätajte si:

> 1 percento z čísla z je jedna stotina z čísla z.

!

Skrátene to napíšeme takto:

$$1\ \%\ \text{z čísla}\ z\ \text{je}\ \frac{z}{100}.$$

Správne je aj vyjadrenie: 1 percento čísla z.

Vieme, že $\boxed{\dfrac{z}{100} = \dfrac{1}{100} \cdot z = 0{,}01 \cdot z = z : 100.}$

Napríklad: 1 % z čísla 1 800 je $\dfrac{1\,800}{100} = 18,$

1 % z čísla 135 je $\dfrac{135}{100} = 1{,}35,$

1 % z čísla 27 je $\dfrac{27}{100} = 0{,}27.$

Príklad 1

Vypočítajte jedno percento z čísla:
a) 100, b) 200, c) 1 000, d) 450, e) 80, f) 26, g) 128,4, h) 14,32, i) 0,67.

Riešenie

1 % z a) 100 .... $\dfrac{100}{100} = 1$

b) 200 .... $\dfrac{200}{100} = 2$

c) 1 000 .... $\dfrac{1\,000}{100} = 10$

d) 450 .... $\frac{450}{100} = 4{,}5$

e) 80 .... $\frac{80}{100} = 0{,}8$

f) 26 .... $\frac{26}{100} = 0{,}26$

g) 128,4 .... $\frac{128{,}4}{100} = 1{,}284$

h) 14,32 .... $\frac{14{,}32}{100} = 0{,}1432$

i) 0,67 .... $\frac{0{,}67}{100} = 0{,}0067$

Číselný údaj *z* môže byť doplnený určitými jednotkami; napríklad môžeme počítať jedno percento z 220 Kčs, 13 kg, 25,7 m atď.

Napríklad 1 % zo 180 kg je $\frac{180}{100}$ kg = 1,8 kg.

Príklad 2

Vypočítajte 1 % z týchto údajov: 370 l, 450 Kčs, 53 m, 1 170 kg, 354 cm², 128 m³, 630 hl.

Riešenie

Dané údaje a 1 % z nich napíšeme do tabuľky:

z	370 l	450 Kčs	53 m	1 170 kg	354 cm^2	128 m^3	630 hl
1 % zo *z*	$\frac{370}{100}$ l	$\frac{450}{100}$ Kčs	$\frac{53}{100}$ m	$\frac{1170}{100}$ kg	$\frac{354}{100}$ cm^2	$\frac{128}{100}$ m^3	$\frac{630}{100}$ hl
Vypočítaná hodnota	3,7 l	4,5 Kčs	0,53 m	11,7 kg	3,54 cm^2	1,28 m^3	6,3 hl

CVIČENIA

1. Doplňte tabuľku:

z	320	6 350	15 000	2	893,5	47,25	0,3	19,01
1 % zo z								

2. Doplňte tabuľku:

z	600 cm	375 Kčs	1 210 kg	95 l	12,5 m^3	0,6 km^2	1,12 hl
1 % zo z							

3. Vypočítajte 1 % z týchto čísel:

a) $\frac{23}{5}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{11}{21}$

4. Vypočítajte spamäti 1 % z týchto údajov:

a) 739 b) 54,2 c) 0,12 d) 115 kg
e) 1 609 m f) 26 hl g) 25 800 Kčs h) 40 000 km

9.2 Základ, počet percent, hodnota príslušná k počtu percent

Príklad 1

Vypočítajte postupne 1 %, 2 %, 5 %, 10 %, 20 %, 25 %, 50 %, 75 %, 90 %, 100 %, 200 %, 500 % z čísla 240.

Riešenie

1 % z čísla 240 .... $240 \cdot 0{,}01 = 2{,}4$
2 % z čísla 240 .... $2 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$

5 % z čísla 240 .... 5 . 2,4 = 12
10 % z čísla 240 .... 10 . 2,4 = 24
20 % z čísla 240 .... 20 . 2,4 = 48
25 % z čísla 240 .... 25 . 2,4 = 60
50 % z čísla 240 .... 50 . 2,4 = 120
75 % z čísla 240 .... 75 . 2,4 = 180
90 % z čísla 240 .... 90 . 2,4 = 216
100 % z čísla 240 .... 100 . 2,4 = 240
200 % z čísla 240 .... 200 . 2,4 = 480
500 % z čísla 240 .... 500 . 2,4 = 1 200

?

Úloha 1

Doplňte nasledujúcu tabuľku:

z	1 % zo z	5 % zo z	10 % zo z	20 % zo z	30 % zo z	
475	4,75		47,5			

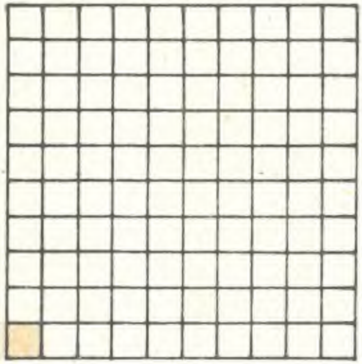
	50 % zo z	70 % zo z	75 % zo z	90 % zo z	100 % zo z	

	200 % zo z	400 % zo z	1 000 % zo z

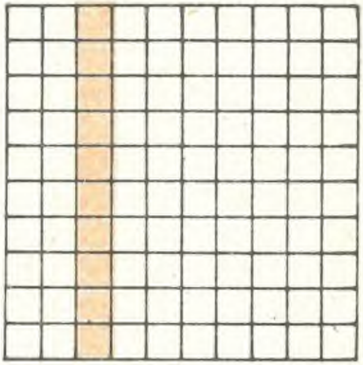
Príklad 2

Obrázky a) až d) znázorňujú štvorce, ktorých obsah je 100 cm^2.

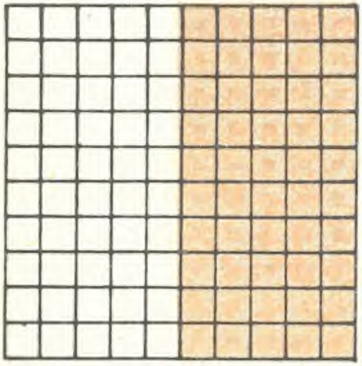
Na obrázku a) je farebne vyznačená $\frac{1}{100}$ obsahu štvorca, na obrázku b) $\frac{1}{10}$ obsahu štvorca, na obrázku c) $\frac{1}{2}$ obsahu štvorca, na obrázku d) $\frac{1}{4}$ obsahu štvorca. Vypočítajte, koľko percent z obsahu štvorca predstavuje farebne vyznačená časť na obrázkoch a) až d).



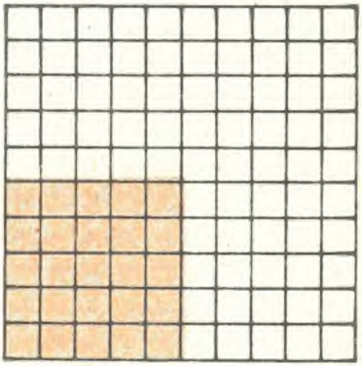
a)



b)



c)



d)

Riešenie

Obsah štvorca je 100 cm^2.

a) $\frac{1}{100}$ obsahu štvorca je 1 % obsahu štvorca.

b) $\frac{1}{10}$ obsahu štvorca je $\frac{10}{100}$ obsahu štvorca, t. j. 10 % obsahu štvorca.

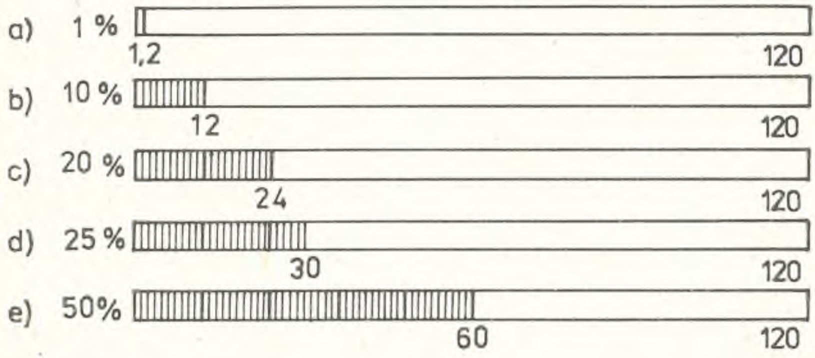
c) $\frac{1}{2}$ obsahu štvorca je $\frac{50}{100}$ obsahu štvorca, t. j. 50 % obsahu štvorca.

d) $\frac{1}{4}$ obsahu štvorca je $\frac{25}{100}$ obsahu štvorca, t. j. 25 % obsahu štvorca.

Príklad 3

Je dané číslo 120. Vypočítajte z neho a) 1 %, b) 10 %, c) 20 %, d) 25 %, e) 50 %. Vyjadrite tieto čísla ako zlomky z čísla 120.

Riešenie



1 % zo 120 .... $\frac{120}{100} = \frac{1}{100} \cdot 120$

(jedna stotina zo 120) (obrázok a))

10 % zo 120 ..... $10 \cdot \frac{120}{100} = \frac{10}{100} \cdot 120 = \frac{1}{10} \cdot 120$

(jedna desatina zo 120) (obrázok b))

20 % zo 120 ..... $20 \cdot \frac{120}{100} = \frac{20}{100} \cdot 120 = \frac{1}{5} \cdot 120$

(jedna pätina zo 120) (obrázok c))

25 % zo 120 ..... $25 \cdot \frac{120}{100} = \frac{25}{100} \cdot 120 = \frac{1}{4} \cdot 120$

(jedna štvrtina zo 120) (obrázok d))

50 % zo 120 ..... $50 \cdot \frac{120}{100} = \frac{50}{100} \cdot 120 = \frac{1}{2} \cdot 120$

(jedna polovina zo 120) (obrázok e))

Úloha 2

?

Doplňte text podľa vzoru v prvých troch riadkoch:

1 % z čísla z je $\frac{1}{100} \cdot z$ (jedna stotina čísla z)

5 % z čísla z je $5 \cdot \frac{1}{100} \cdot z = \frac{5}{100} \cdot z = \frac{1}{20} \cdot z$ (jedna dvadsatina čísla z)

10 % z čísla z je $10 \cdot \frac{1}{100} \cdot z = \frac{10}{100} \cdot z = \frac{1}{10} \cdot z$ (jedna desatina čísla z)

20 % z čísla z ...
30 % z čísla z ...
40 % z čísla z ...
50 % z čísla z ...
60 % z čísla z ...
70 % z čísla z ...
80 % z čísla z ...
90 % z čísla z ...
100 % z čísla z ...
200 % z čísla z ...
300 % z čísla z ...

Príklad 4

Vypočítajte a) 23 % z čísla 47, b) 61 % z čísla 114.

Riešenie

a) 1 % zo 47 .... $\frac{47}{100} = 0{,}47$

23 % zo 47 x

$x = 23 \,.\, 0{,}47$ $\qquad$ $23 \,.\, 0{,}47 = 10{,}81$

$x = 10{,}81$

23 % zo 47 je 10,81.

b) 1 % zo 114 .... $\frac{114}{100} = 1{,}14$

61 % zo 114 x

$x = 61 \,.\, 1{,}14$ $\qquad$ $61 \,.\, 1{,}14 = 69{,}54$

$x = 69{,}54$

61 % zo 114 je 69,54.

Všimnime si, aké čísla sa vyskytli v príkladoch a) a b).

! 1. Číslo, z ktorého sme počítali percentá: a) 47, b) 114.
Toto číslo nazývame **základ.**

! 2. Číslo, ktoré udáva, koľko percent zo základu počítame: a) 23, b) 61.
Toto číslo nazývame **počet percent.**

! 3. Číslo určené daným počtom percent z daného základu: a) 10,81, b) 69,54.
Toto číslo nazývame **hodnota príslušná k počtu percent.***

Na označenie uvedených čísel budeme používať tieto písmená:

základ .... z

počet percent .... p

hodnota príslušná k počtu percent .... h

* V starších učebniciach percentová časť, časť základu prislúchajúca k danému počtu percent.

CVIČENIA

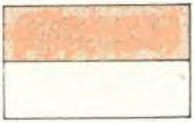
1. Vypočítajte spamäti:

1 % z 18	5 % zo 100	10 % zo 45	20 % z 200
25 % zo 48	50 % z 96	6 % z 900	75 % z 200
9 % zo 700	100 % z 0,052	200 % z 56	300 % z 8,2
500 % z $\frac{1}{4}$	1 000 % z 2	2 000 % z 0,5	3 000 % z 5

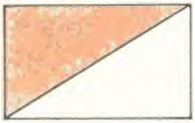
2. Doplňte tabuľku:

z	256	14,8	195 km	0,12 t	3,72 m^3
1 % zo z					
10 % zo z					
25 % zo z					
40 % zo z					
50 % zo z					
70 % zo z					
75 % zo z					
90 % zo z					
100 % zo z					
200 % zo z					
350 % zo z					

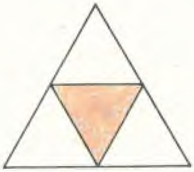
3. Na obrázkoch a) až j) sú znázornené niektoré geometrické útvary v rovine. Koľko percent obsahu útvaru tvorí v každom prípade vyfarbená časť?



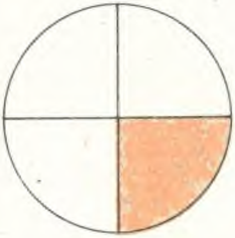
a)



b)

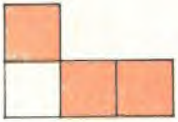


c)

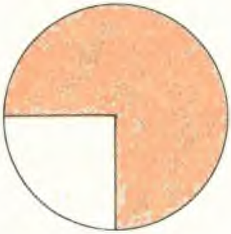


d)

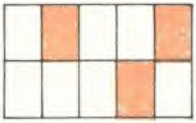
e)



f)



g)



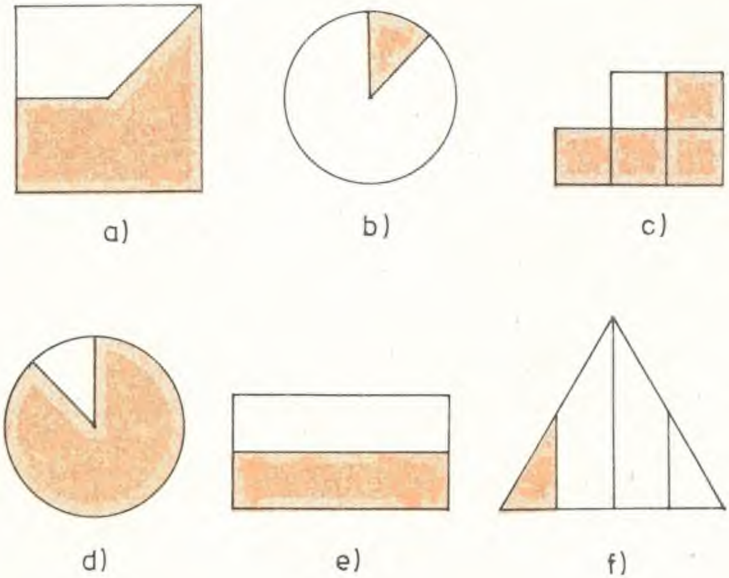
h)

i)

j)

4. Peter si sporí na pretekársky bicykel. Nasporil si už 670 Kčs, čo je 50 % z ceny bicykla. Koľko korún stojí bicykel?

5. V ktorých útvaroch na obrázkoch a) až f) tvorí obsah vyfarbenej časti
A: menej než 25 % obsahu útvaru,
B: viac než 25 % obsahu útvaru,
C: menej než 75 % obsahu útvaru,
D: viac než 75 % obsahu útvaru?



9.3 Výpočet hodnoty príslušnej k počtu percent

Príklad 1

Vypočítajte 16 % z 243.

Riešenie

$z = 243$
$p = 16$
$h = ?$

z 243
1 % zo z .... 243 : 100 = 2,43
h .... 16 . 2,43
Použijeme kalkulačku: $h = 38,88$

16 % z 243 je 38,88.
Jednotlivé kroky výpočtu zapíšeme do tabuľky:

	Krok výpočtu	Počtový výkon	Výsledok
1	Zápis základu z	243 (zápis čísla)	243
2	Určenie 1 % zo z	243 : 100	2,43
3	Vynásobenie 1 % zo z počtom percent p	16 . 2,43	38,88

$h = 38,88$

Celý výpočet hodnoty h príslušnej k počtu percent $p = 16$ zo základu $z = 243$ môžeme podľa tabuľky napísať takto:

$$h = 16 \,.\, (243 : 100) = (16 \,.\, 243) : 100$$

Tento výpočet môžeme urobiť priamo použitím kalkulačky.

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
Koľko je 16 % z 243?	1 6 × 2 4 3 : 1 0 0 =	38.88

Príklad 2

Vypočítajte použitím kalkulačky 126 % zo 14.

Riešenie

$z = 14$
$p = 126$
$h = ?$

Napíšeme h podľa predchádzajúceho príkladu:

$$h = 126 \,.\, (14 : 100) = (126 \,.\, 14) : 100$$

Výpočet urobíme použitím kalkulačky.

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
Koľko je 126 % zo 14?	$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{6}\,\boxed{\times}\,\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{:}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{=}$	$\boxed{17.64}$

126 % zo 14 je 17,64.

Na niektorých kalkulačkách je tlačidlo $\boxed{\%}$. Pomocou neho riešime uvedenú úlohu takto:

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
Koľko je 126 % zo 14?	$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{6}\,\boxed{\times}\,\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{\%}\,\boxed{=}$	$\boxed{17.64}$

Aký počtový výkon tu nahrádza tlačidlo $\boxed{\%}$?

Na niektorých kalkulačkách je značka % mimo tlačidla (obyčajne nad tlačidlom). V tom prípade treba pri výpočtoch s percentami stlačiť tlačidlo $\boxed{F}$ a hneď za ním tlačidlo pod značkou %. Teda na takýchto kalkulačkách postupujeme pri riešení danej úlohy takto:

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{6}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{F}\ \boxed{\%}\ \boxed{=}$

?

Úloha 1

Vypočítajte použitím tlačidla $\boxed{\%}$ na kalkulačke 87 % z 26,15.

Niekedy je vhodné urobiť odhad, t. j. približne určiť, aká hodnota prislúcha k danému počtu percent pri danom základe.

Príklad 3

Odhadnite, koľko je 27 % z 390.

Riešenie

27 % z nejakého základu z je približne 25 % zo základu z, t. j. $\frac{1}{4}$ zo z.

Číslo 390 môžeme zaokrúhliť na 400.

27 % z 390 je približne toľko, koľko je 25 % zo 400.

25 % zo 400 je $\frac{1}{4}$ zo 400, t. j. 100.

Teda: 27 % z 390 je približne 100.

Presným výpočtom napríklad pomocou kalkulačky zistíme, že 27 % z 390 je 105,3.

Vidíme, že odhad 100 je blízko presného výsledku 105,3.

CVIČENIA

1. Vypočítajte:

a) 12 % zo 450
b) 28 % z 2 130
c) 63 % z 18
d) 104 % z 50
e) 7 % z 29,2
f) 46 % z 304,5
g) 89 % z 0,036
h) 212 % z 0,9

2. Vypočítajte:

a) 18 % z 320 Kčs
b) 56 % zo 66 t
c) 23 % zo 14 km^2
d) 125 % z 12 m
e) 37 % z 8 500 l
f) 72 % zo 4,6 m^3
g) 90 % z 2 hodín 34 minút
h) 350 % z 80 kg

3. Vypočítajte použitím kalkulačky:

a) 17 % z 38,9
b) 39 % z 5 837,4
c) 81 % zo 14 003
d) 143 % z 26,8
e) 57 % z 1 296 Kčs
f) 69 % z 2,53 l
g) 93 % z 8,543 dm^3
h) 416 % z 3,9 kg

4. Odhadnite:

a) 23 % zo 109
b) 49 % z 510
c) 77 % zo 785
d) 145 % z 1 034
e) 39 % z 1 200 l
f) 61 % z 890 kg
g) 32 % z 984 km
h) 260 % zo 490 hl

5. Žiaci písali diktát, ktorý obsahoval 80 slov. Päť najlepších žiakov dosiahlo tieto výsledky: Elena napísala chybne 5 % slov, Oľga a Juraj mali správnych 90 % slov, Peter a Viera napísali správne 85 % slov. Koľko slov napísali správne menovaní žiaci?

9.4 Výpočet počtu percent

Príklad 1

Koľko percent z 800 je 120?

Riešenie

$z = 180$

$h = 120$

$p = ?$

z 800

1 % zo z .... $\frac{800}{100} = 8$

1 % zo z 8

2 % zo z .... $2 \,.\, 8 = 16$

3 % zo z .... $3 \,.\, 8 = 24$

4 % zo z .... $4 \,.\, 8 = 32$

atď.

p % zo z .... $p \,.\, 8 = 120$

$p = 120 : 8$

$p = 15$

120 je 15 % z 800.

Príklad 2

Koľko percent zo 400 je 32?

Riešenie

$z = 400$

$h = 32$

$p = ?$

z 400

1 % zo z .... $400 : 100 = 4$

p % zo z .... $p \,.\, 4$

$p \,.\, 4 = h = 32$

$p \,.\, 4 = 32$

$p = 32 : 4$

$p = 8$

32 je 8 % zo 400.

Jednotlivé kroky výpočtu zapíšeme do tabuľky:

	Krok výpočtu	Počtový výkon	Výsledok
1	Zápis základu z	400 (zápis čísla)	400
2	Určenie 1 % zo z	400 : 100	4
3	Vydelenie hodnoty h číslom 1 % zo z	32 : 4	8

$p = 8$

Podľa tabuľky môžeme výpočet počtu percent p napísať takto:

$$p = 32 : (400 : 100) = (32 : 400) \cdot 100$$

Tento výpočet môžeme urobiť na kalkulačke:

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
Koľko percent zo 400 je 32?	[3] [2] [:] [4] [0] [0] [×] [1] [0] [0] [=]	8.

Použitím tlačidla [%] sa tento výpočet urobí takto:

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
Koľko percent zo 400 je 32?	[3] [2] [:] [4] [0] [0] [%] [=]	8.

Aký počtový výkon tu nahrádza tlačidlo [%]?

Ak je značka % mimo tlačidla, treba bezprostredne pred jej použitím stlačiť tlačidlo [F]. Teda postup je takýto:

[3] [2] [:] [4] [0] [0] [F] [%] [=]

Úloha 1

Vypočítajte použitím tlačidla [%] na kalkulačke, koľko percent z 950 je 114.

?

CVIČENIA

1. Vypočítajte, koľko percent je

a) 35 z 50
b) 72 zo 180
c) 294 zo 4 200
d) 20,16 z 36
e) 3,48 z 5,8
f) 0,187 2 z 0,24
g) 69 zo 46
h) 847,6 z 260

2. Vypočítajte, koľko percent je

a) 15 km z 500 km
b) 224 kg z 1 600 kg
c) 200 l z 1 250 l
d) 105,6 cm z 80 cm
e) 1,175 m^3 z 2,5 m^3
f) 13 hl z 5 000 l
g) 1 200 m^2 z 2 ha
h) 5,1 t z 2 500 kg

3. Vypočítajte použitím kalkulačky, koľko percent je

a) 90,72 zo 126
b) 1 356,8 z 2 560
c) 5 428,2 zo 6 540
d) 944,7 z 235
e) 224 cm zo 16 m
f) 225,96 t z 538 t
g) 2 483 l z 3 820 l
h) 3,757 ha z 850 m^2

■ **4.** Vo výpredaji zlacneli topánky z 240 Kčs na 180 Kčs. O koľko percent zlacneli?

9.5 Výpočet základu

Príklad 1

Vypočítajte základ z, z ktorého 5 % je 150.

Riešenie

$p = 5$
$h = 150$
$z = ?$

5 % zo z 150
1 % zo z .... $150 : 5 = 30$
$z = 100$ % zo z .... $z = 30 \cdot 100$
$z = 3\,000$

Základ z je 3 000.

Jednotlivé kroky výpočtu zapíšeme do tabuľky:

	Krok výpočtu	Počtový výkon	Výsledok
1	Výpočet 1 % zo z	$150 : 5$	30
2	Výpočet základu z ($z = 100$ % zo z)	$30 \cdot 100$	3 000

Podľa tabuľky sa výpočet základu z robí takto:

$$z = (150 : 5) \cdot 100$$

Tento výpočet môžeme urobiť priamo pomocou kalkulačky:

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
5 % zo z je 150. Koľko je z?	[1] [5] [0] [:] [5] [×] [1] [0] [0] [=]	[3000.]

Použitím tlačidla [%] sa tento výpočet robí takto:

Úloha	Postup na kalkulačke	Hodnota na displeji
5 % zo z je 150. Koľko je z?	[1] [5] [0] [:] [5] [%] [=]	[3000.]

Aký počtový výkon tu zastupuje tlačidlo [%] ?

Ak značka % nie je priamo na tlačidle, treba bezprostredne pred jej použitím stlačiť tlačidlo [F]. Teda postupujeme takto:

[1] [5] [0] [:] [5] [F] [%] [=]

? **Úloha 1**

Vypočítajte použitím tlačidla $\boxed{\%}$ na kalkulačke základ, z ktorého 16 % je 19,2.

CVIČENIA

1. Vypočítajte základ, z ktorého

a) 20 % je 50	b) 35 % je 434
c) 7 % je 3 640	d) 120 % je 276
e) 64 % je 233,6	f) 87 % je 4 193,4
g) 92 % je 0,5428	h) 250 % je 0,7

2. Vypočítajte základ, z ktorého

a) 30 % je 930 Kčs	b) 14 % je 980 m^2
c) 83 % je 20,75 hl	d) 6 % je 1 890 t
e) 19 % je 1 193,2 cm	f) 57 % je 9,975 milióna
g) 110 % je 84,7 kg	h) 105 % je 8 610 km

Pri výpočtoch môžete použiť kalkulačku.

3. Vypočítajte spamäti základ, z ktorého

1 % je 3,20 Kčs	100 % je 569 km
2 % sú 12 kg	30 % je 5 100 m^2
5 % je 17 dm	40 % je 2 000 l
10 % je 1,4 m^3	60 % je 1,5 milióna
20 % je 91 t	80 % je 24,4 km^2
25 % je 8,3 ha	90 % je 7 200 párov
50 % je 670 Kčs	200 % je 45 dl
75 % je 72 hl	300 % je 5 100

9.6 Diagramy

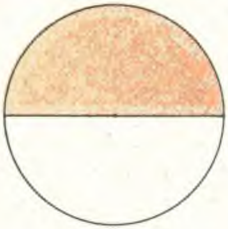
Pre väčšiu názornosť, rýchlejšiu informáciu a lepšie zapamätanie sa číselné údaje vyjadrené počtom percent často znázorňujú pomocou geometrických obrazcov.

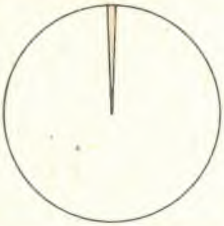
1. Kruhový diagram

Na obrázkoch v tabuľke sú farebne vyznačené časti kruhu. Hľadajme odpovede na otázky:

1. Koľko percent z obsahu kruhu predstavuje v jednotlivých prípadoch farebná časť kruhu?
2. Aký uhol zvierajú polomery, ktoré farebnú časť ohraničujú?

Odpovede na tieto otázky sú v stĺpcoch vedľa obrázkov.

Časť kruhu	Počet percent z obsahu kruhu	Uhol polomerov (veľkosť)
	25 %	90°
	50 %	180°

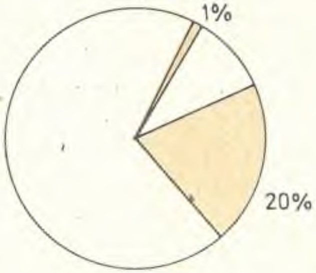
Časť kruhu	Počet percent z obsahu kruhu	Uhol polomerov (veľkosť)
	75 %	270°
	100 %	360°
	1 %	x°

$x = 360 : 100$
$x = 3{,}6$

Jedno percento z obsahu kruhu ohraničujú polomery, ktoré zvierajú uhol veľkosti 3,6°.

Na obrázku je znázornené 1 % obsahu kruhu a 20 % obsahu kruhu. Aký uhol zvierajú polomery, ktoré ohraničujú 20 % obsahu kruhu? Je to uhol, ktorý má veľkosť

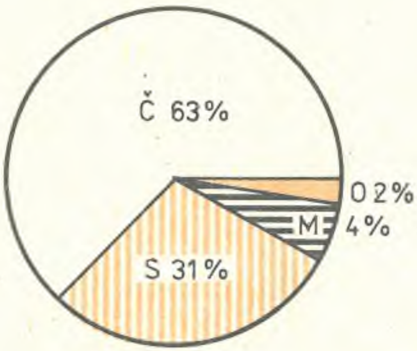
$$20 \,.\, 3{,}6^\circ = 72^\circ.$$



Ak sa nejaký celok skladá z častí, ktoré predstavujú napríklad 15 %, 27 %, 35 %, ... z celku, môžeme celok zobraziť kruhom, v ktorom časti zaberajú 15 %, 27 %, 35 %, ... obsahu kruhu. Pre väčšiu názornosť rôzne časti kruhu obyčajne rozlišujeme odlišným zafarbením alebo šrafovaním. Takéto zobrazenie celku a jeho častí sa nazýva **kruhový diagram.**

Príklad 1

Zistite z kruhového diagramu na obrázku národnostné zloženie obyvateľstva ČSSR.



Č – česká národnosť
S – slovenská národnosť
M – maďarská národnosť
O – ostatné národnosti

Riešenie

Počet obyvateľov českej národnosti tvorí 63 % z celkového počtu obyvateľstva v ČSSR

slovenskej	31 %
maďarskej	4 %
ostatných národností	2 %

V ČSSR žijú ešte obyvatelia poľskej, nemeckej a ukrajinskej národnosti a niektorých iných národností. Počet obyvateľov ani jednej z nich nedosahuje 1 %.

2. Stĺpcový diagram

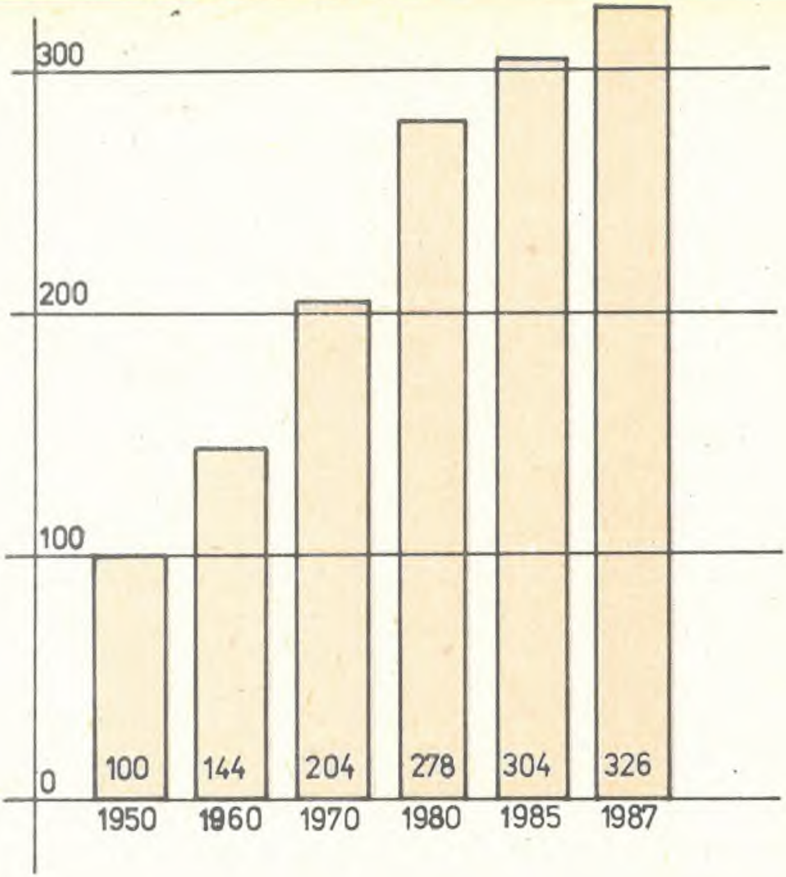
V nasledujúcej tabuľke je zapísané, ako v ČSSR rástla priemerná mesačná mzda (v Kčs) na jedného pracovníka v rokoch 1950–1987.

Rok	1950	1960	1970	1980	1985	1987
Priemerná mesačná mzda v Kčs	948	1 365	1 937	2 637	2 883	3 087

Tabuľka nepodáva názornú predstavu o raste mzdy. Lepší prehľad získame, keď vyjadríme, ako mzda rástla v percentách v porovnaní so základom v roku 1950.

Rok	1950	1960	1970	1980	1985	1987
Počet percent zo základu v r. 1950	100	144	204	278	304	326

Počet percent za každý rok uvedený v tabuľke si znázorníme obdĺžnikom, ktorý nazveme stĺpec. Znázornenie, ktoré je na obrázku, robíme takto:



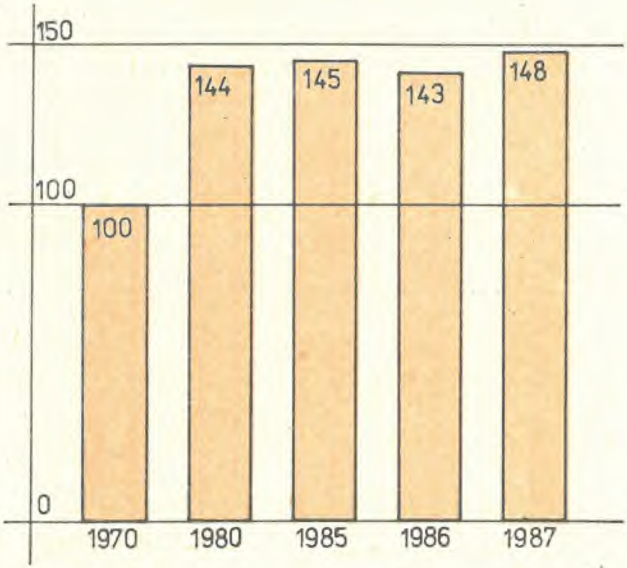
Všetky stĺpce (t. j. obdĺžniky) majú rovnakú šírku, napríklad 1 cm.
Výšku v prvého stĺpca si zvolíme .... napríklad $v = 3$ cm
Výška druhého stĺpca .... 144 % z 3 cm = 1,44 . 3 cm ≐ 4,3 cm
Výška tretieho stĺpca ..... 204 % z 3 cm = 2,04 . 3 cm ≐ 6,1 cm
atď.
Prvý stĺpec (obdĺžnik) má výšku 3 cm.
Druhý stĺpec má výšku 4,3 cm.
Tretí stĺpec má výšku 6,1 cm.
Atď.

Takéto grafické znázornenie údajov sa nazýva **stĺpcový diagram.** !

Úloha 1

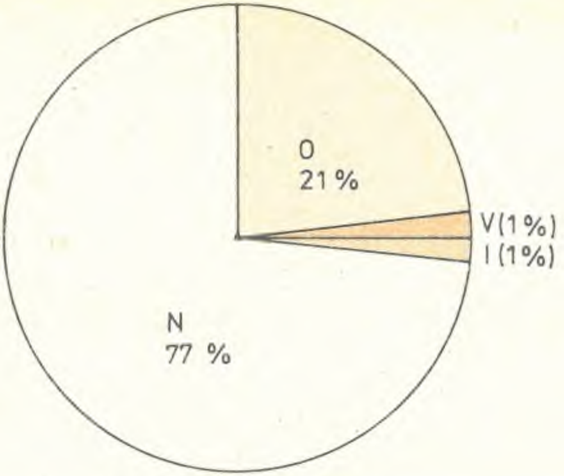
Zistite podľa stĺpcového diagramu na obrázku počty dopravných nehôd v ČSSR v rokoch 1970–1987 (v percentách základu z r. 1970).

1970: 70 977 dopravných nehôd – základ



CVIČENIA

1. Zistite z kruhového diagramu chemické zloženie vzduchu v prízemnej vrstve.



N – dusík
O – kyslík
V – vzácne plyny
I – iné látky

2. Znázornite stĺpcovým diagramom vývoj bytovej výstavby v ČSSR v rokoch 1950–1985. Číselný vývoj zachytáva tabuľka:

Rok	1950	1960	1970	1980	1985
Počet dokončených bytov (v tisícoch)	38	74	112	129	104,5

9.7 Slovné úlohy

Príklad 1

Na výstavbu školy sa plánovali náklady 21 miliónov Kčs. Skutočné náklady na výstavbu boli 23,1 milióna Kčs. Koľko percent z plánu tvorili skutočné náklady? O koľko percent sa prekročili náklady na výstavbu?

Riešenie

Plánované náklady označíme ako základ z.

z	21 mil. Kčs
1 % zo z	0,21 mil. Kčs
Hodnota príslušná k počtu percent	23,1 mil. Kčs
Počet percent	p

$$p = 23{,}1 \text{ mil.} : 0{,}21 \text{ mil.}$$

Použijeme kalkulačku: $23{,}1 : 0{,}21 = 110$

$p = 110$

Skutočné náklady na školu tvorili 110 % plánovaných nákladov. Plánované náklady sa prekročili o 10 %.

Príklad 2

V dopravnom závode jedna brigáda usporila za mesiac 180 l nafty. To sú 3 % z jej plánovanej mesačnej spotreby. Druhá brigáda usporila 200 l nafty, čo sú 2 % z jej plánovanej mesačnej spotreby. Prečo 2 % spotreby v druhej brigáde predstavujú viac nafty ako 3 % spotreby v prvej brigáde?

Riešenie

Príčinu odhadneme hneď: v druhej brigáde majú väčší mesačný plán spotreby nafty než v prvej brigáde. Presvedčíme sa, že domnienka je správna.

Prvá brigáda:

Mesačný plán spotreby nafty	základ z_1
Počet percent (zo z_1)	$p_1 = 3$
Hodnota príslušná k počtu percent	$h_1 = 180\,\text{l}$
1 % zo z_1	$180\,\text{l} : 3 = 60\,\text{l}$
z_1 (100 % zo z_1)	$z_1 = 100 \,.\, (180 : 3)\,\text{l}$
	$z_1 = 100 \,.\, 60\,\text{l}$
	$z_1 = 6\,000\,\text{l}$

Mesačný plán spotreby nafty v prvej brigáde bol 6 000 l.

D r u h á b r i g á d a:

Mesačný plán spotreby nafty .... základ z_2

Počet percent (zo z_2) .... $p_2 = 2$

Hodnota príslušná k počtu percent .... $h_2 = 200\,\mathrm{l}$

1 % zo z_2 .... $200\,\mathrm{l} : 2 = 100\,\mathrm{l}$

z_2 (100 % zo z_2) .... $z_2 = 100 \,.\, (200 : 2)\,\mathrm{l}$

$z_2 = 100 \,.\, 100\,\mathrm{l}$

$z_2 = 10\,000\,\mathrm{l}$

Mesačný plán spotreby nafty v druhej brigáde bol 10 000 l.

Mesačný plán spotreby nafty v druhej brigáde bol značne väčší než v prvej brigáde.

Pri vyjadrovaní počtu percent nevystačíme vždy s prirodzenými číslami. Napríklad počet obyvateľov ČSSR je zaokrúhlene 15,5 milióna; toto číslo netvorí ani jedno percento z počtu všetkých obyvateľov Zeme, ktorý je zaokrúhlene 5 miliárd. Preto je niekedy potrebné udať počet percent ako desatinné číslo s presnosťou na desatiny alebo stotiny.

V nasledujúcom príklade uvidíme, že z veľkého základu aj desatina percenta znamená číslo, ktoré nemožno zanedbať.

Príklad 3

Podľa úradnej správy bolo v polovici roku 1987 v USA 7,5 milióna nezamestnaných, čo predstavovalo 6,3 % práceschopných obyvateľov. Koľko bolo v tom čase v USA práceschopných obyvateľov?

Riešenie

Počet všetkých práceschopných obyvateľov USA .... základ z

Počet percent (zo z) .... $p = 6{,}3$

Hodnota príslušná k počtu percent .... $h = 7{,}5$ mil.

6,3 % zo z .... 7,5 mil.

1 % zo z .... (7,5 : 6,3) mil.

z (100 % zo z) .... $z = 100 \,.\, (7{,}5 : 6{,}3)$ mil.

Použijeme kalkulačku: $7{,}5 : 6{,}3 = 1{,}19$ $\qquad 100 \,.\, 1{,}19 = 119$

$z = 119$ mil.

V uvedenom čase bolo v USA 119 miliónov práceschopných obyvateľov.

Všimnime si v uvedenom príklade:
1 % zo z .... 1,19 mil.
0,1 % zo z .... 0,1 . 1,19 mil. = 0,119 mil. = 119 000
119 000 je množstvo, ktoré nie je zanedbateľné. Napríklad v ČSSR mesto s takýmto počtom obyvateľov by patrilo do prvej desiatky najväčších miest.

Úloha 1

Poľnohospodári okresu predali štátu v jednom roku 9 600 t obilnín. V nasledujúcom roku dodali na štátny nákup o 2,5 % obilia viac. O koľko ton zvýšili dodávky v druhom roku?

Úloha 2

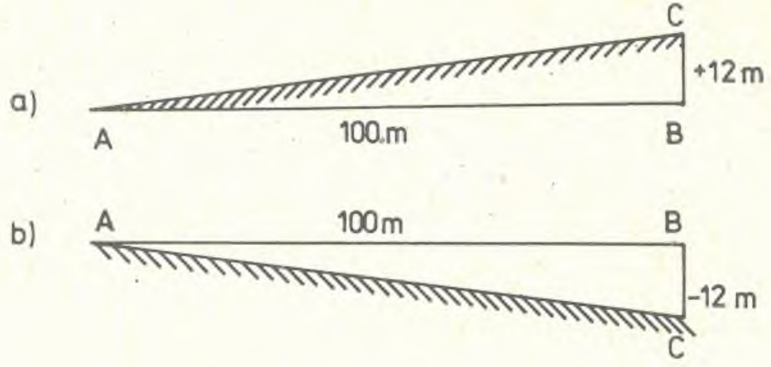
Na škole je 720 žiakov. Z tohto počtu sa na školskom kole recitačnej súťaže zúčastnilo 67 žiakov. Koľko je to percent z celkového počtu žiakov školy?

Ďalšie použitie percent

a)

b)

Dopravná značka na obrázku a) označuje nebezpečné klesanie, značka na obrázku b) nebezpečné stúpanie. Cesta má stúpanie (klesanie) 12 %, keď na 100 m vodorovnej vzdialenosti dvoch miest na ceste je rozdiel ich nadmorských výšok +12 m (−12 m). Pozrite si obrázok.



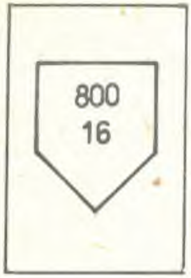
Pri stúpaní máme:
Vodorovná vzdialenosť d = 100 m .... z
12 % .... p
Rozdiel nadmorských výšok (prevýšenie) v = 12 m .... h
Pri klesaní sa len zmení znamienko čísla h na opačné.

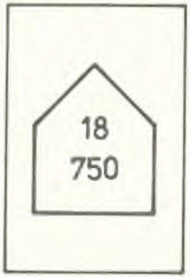
Úloha 3

Doplňte nasledujúcu tabuľku:

Stúpanie 12 %	$d = z$ (v m)	100	200	300	50	1 000	2 000
	$v = h$ (v m)	12					

Pri železničnej trati sa vyskytujú značky znázornené na obrázku na s. 108. Označujú klesanie a stúpanie železničnej trate. Stúpanie a klesanie železničnej trate sa obvykle vyjadruje v promile; označenie pre promile je ‰. Jedno promile zo z je jedna tisícina zo z, t. j. 1 ‰ zo z je $\frac{z}{1\,000}$. To znamená, že 1 ‰ zo z je jedna desatina z 1 % zo z. Značka na obrázku a) znamená, že na úseku 800 m má trať klesanie 16 ‰, t. j. 1,6 %. Vysvetlite obdobne význam značky na obrázku b).

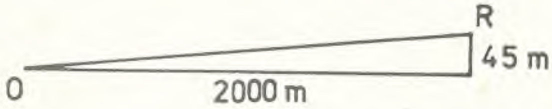




Príklad 4

Na železničnej trati Krnov–Olomouc má zastávka Ostružná nadmorskú výšku 715 m, zastávka Ramzová 760 m. Vzdialenosť zastávok je 2 km. Koľko percent je stúpanie z Ostružnej do Ramzovej?

Riešenie



Ramzová (nadmorská výška) .... 760 m
Ostružná (nadmorská výška) .... 715 m
Výškový rozdiel (prevýšenie) v .... $v = (760 - 715)$ m $= 45$ m
Vzdialenosť d .... $d = 2\,000$ m
Stúpanie Ostružná–Ramzová v percentách:
$z = d = 2\,000$ m
$h = v = 45$ m
$p = ?$

z	....	2 000 m
1 % zo z	....	20 m
h	....	45 m
p	....	$p = 45 : 20$
		$p = 2{,}25$

Stúpanie z Ostružnej do Ramzovej je 2,25 %.

CVIČENIA

1. Textilné výrobky zlacneli o 30 %. Eve kúpili šaty, ktoré pred zlacnením stáli 320 Kčs. Koľko korún za ne zaplatili?

2. Žiaci majú zasadiť na školskom pozemku 250 priesad. 140 priesad už zasadili. Koľko percent priesad majú ešte zasadiť?

3. Členovia branného krúžku zasiahli terče pri streľbe 57 ráz, čo bolo 38 % z celkového počtu výstrelov. Koľko ráz vystrelili?

4. Rodina Nováková platí za byt mesačne 400 Kčs, čo je 8 % jej mesačných príjmov. Rodina Poláková platí rovnaké nájomné, ktoré predstavuje 7 % z jej mesačných príjmov. Vypočítajte mesačný príjem každej z týchto rodín.

5. Brigáda socialistickej práce v lesnom závode má za rok vyťažiť 7 630 m^3 dreva, v čom je už zahrnutý aj jej záväzok vyťažiť nad predpísaný plán 630 m^3. O koľko percent prekročí brigáda splnením svojho záväzku predpísaný plán? (Použite kalkulačku.)

6. V roku 1987 sa v Československu vyrobilo 284 000 farebných televízorov, čo bolo 136,6 % množstva vyrobeného v roku 1986. Koľko farebných televízorov sa v Československu vyrobilo v roku 1986? (Zaokrúhlite na tisíce. Použite kalkulačku.)

7. Zamestnanec má hrubú mesačnú mzdu 3 640 Kčs. Platí z nej 15,6 % dane. Na deti dostáva mesačné prídavky 650 Kčs. Koľko korún je čistý mesačný príjem zamestnanca (vrátane detských prídavkov)? (Zaokrúhlite na koruny. Použite kalkulačku.)

8. Chlieb stráca pečením 12 % svojej hmotnosti v surovom stave. Akú hmotnosť mal pred pečením bochník, ktorého hmotnosť po upečení je 1,5 kg? (Počítajte s presnosťou na 10 g.)

9. Roku 1987 bolo v ČSSR 104 697 dopravných nehôd, pri ktorých zahynulo 1 190 osôb. Chodci zavinili 5 099 nehôd, pri ktorých bolo 383 mŕtvych. Koľko percent nehôd zavinili chodci a koľko percent smrteľných úrazov sa pri týchto nehodách stalo? (Počítajte s presnosťou na dve desatinné miesta. Použite kalkulačku.)

10. Osobný automobil má vlastnú hmotnosť 900 kg. Najvyššie užitočné zaťaženie (osoby a náklad) je 400 kg. Koľko percent tvorí najvyššie užitočné zaťaženie z celkovej hmotnosti plne zaťaženého automobilu?

11. V pytagoriáde bolo úspešných z 15 piatakov 20 % a z 35 šiestakov 40 %. Peter z toho usúdil: „Spolu bolo úspešných 60 % účastníkov.“ Elena bola inej mienky: „Spolu bolo úspešných

30 % účastníkov.“ Pokúste sa vysvetliť spôsob uvažovania Petra a Eleny. Ktorý výsledok je správny? Alebo je správny iný výsledok, odlišný od oboch navrhovaných? Ak máte takú mienku, odôvodnite ju.

---

12. Povrch Zeme meria zaokrúhlene 510 miliónov km^2. Moria a oceány z toho zaberajú 361 miliónov km^2. Koľko percent zemského povrchu pokrýva súš?

---

13. Rozloha Európy je 10,5 milióna km^2, rozloha Československa 128 000 km^2. (Všetky údaje sú zaokrúhlené.) Koľko percent z rozlohy Európy zaberá Československo? Pomer rozlohy Československa a rozlohy Európy vyjadrite približne aj zlomkom s čitateľom 1. (Použite kalkulačku.)

---

14. V roku 1980 žilo na Zemi 4 415 miliónov obyvateľov, v roku 1987 5 miliárd. O koľko percent sa zvýšil počet obyvateľov Zeme od roku 1980 do roku 1987? (Výsledok určite s presnosťou na dve desatinné miesta. Použite kalkulačku.)

---

15. Náklady na školský výlet sa prekročili o 315 Kčs, čo bolo 7,3 % plánovanej sumy nákladov. Koľko korún výdavkov plánovali na výlet? (Použite kalkulačku.)

---

16. Ozubnicová železnica zo Štrby na Štrbské Pleso má dĺžku 5 km. Štrba má nadmorskú výšku 895 m, Štrbské Pleso 1 325 m. Vypočítajte stúpanie trate v percentách. (Použite kalkulačku.)

---

17. Z nákladu knihy, ktorá vyšla v druhom štvrťroku roka, sa v druhom štvrťroku predalo 6 000 exemplárov, v treťom štvrťroku o 8 % viac a vo štvrtom štvrťroku ešte o 15 % viac ako v treťom štvrťroku. Koľko kníh sa predalo od vyjdenia knihy do konca roku?

18. Plán ukladal elektrifikovať v 8. päťročnici v oblasti Východnej dráhy ČSD 142,7 km železničných tratí. Vo februári 1988 uviedli do prevádzky elektrifikovaný úsek Leopoldov–Púchov v dĺžke 92,7 km. Koľko percent z plánu elektrifikácie pripadlo na iné úseky tratí Východnej dráhy ČSD?

19. Pražské metro v roku 1986 prepravilo 411 miliónov cestujúcich, čo bolo o 23 % viac ako v roku 1985. Priemerne koľko cestujúcich sa denne prepravilo metrom v roku 1985? (Použite kalkulačku.)

20. Obyvateľstvo ČSSR má nasledujúce sociálne zloženie (údaje z r. 1986):

robotníci a ich rodiny	7,45 milióna obyvateľov
ostatní zamestnanci a ich rodiny	6,3 milióna obyvateľov
družstevní roľníci a ich rodiny	1,35 milióna obyvateľov
osoby iných povolaní a ich rodiny	0,4 milióna obyvateľov

Koľko percent z celkového počtu obyvateľstva tvorí každá sociálna skupina? Použite kalkulačku.

21. Z Nitry do Olomouca je po ceste približne 200 km. Osobný automobil prejde túto trasu priemernou rýchlosťou 60 km za hodinu. O koľko percent sa skráti čas jazdy, keď sa priemerná rýchlosť zvýši o 20 %?

22. Na basketbalovom tréningu súťažili dve družstvá v streľbe trestných hodov. Prvé družstvo malo 68 pokusov, z toho 39 úspešných. Druhé družstvo malo 89 pokusov, z toho 46 úspešných. Ktoré družstvo malo úspešnejšiu streľbu, t. j. v ktorom družstve počet úspešných hodov predstavoval viac percent z celkového počtu hodov družstva?

23. V kine je 400 miest pre návštevníkov. Denne sú tri predstavenia. Za celý jún predali do kina 18 720 vstupeniek. Na koľko percent návštevníckych miest predali vstupenky? (Použite kalkulačku.)

24. Vývoj v spotrebe mäsa na jedného obyvateľa v Československu zaznamenáva nasledujúca tabuľka:

Rok	1950	1960	1970	1980	1985
Spotreba mäsa v kilogramoch za rok	44,8	56,8	71,9	85,6	85,8

Za základ vezmite spotrebu v r. 1950. Vyjadrite spotrebu v jednotlivých rokoch v percentách tohto základu. Výsledok znázornite stĺpcovým diagramom. (Použite kalkulačku.)

SÚHRNNÉ CVIČENIA III

A

V cvičeniach, ktoré sa nemajú počítať spamäti, môžete používať kalkulačku.

1. Vypočítajte spamäti:

a) 50 % zo 120 m b) 10 % z 82 kg c) 25 % z 280 Kčs
d) 20 % z 50 ha e) 75 % zo 60 m^3 f) 200 % z 13 t

2. Vypočítajte:

a) 12 % z 350 Kčs b) 56 % z 800 m^2 c) 37 % z 96 kg
d) 6,6 % z 27 ha e) 7 % z 0,45 m^3 f) 79 % z 0,9 hl

3. Vypočítajte spamäti, koľko percent je

a) 7 m zo 14 m b) 3 Kčs z 30 Kčs c) 6 l z 24 l
d) 8 t zo 400 t e) 4,2 km zo 100 km f) 1 ha zo 100 m^2

4. Vypočítajte, koľko percent je

a) 48 z 800 b) 105 km zo 150 km c) 96 l z 1 200 l
d) 23 t zo 69 t e) 4,2 m^2 z 18 m^2 f) 200 Kčs z 26 Kčs

5. Karavána mieru Dunaj–Lena na počesť 70. výročia Veľkej októbrovej socialistickej revolúcie prešla trasu v dĺžke 16 000 km. Zemský rovník má dĺžku 40 000 km. Koľko percent dĺžky rovníka predstavuje trasa Karavány mieru?

6. Vypočítajte spamäti základ, z ktorého

a) 50 % je 39 b) 10 % je 14,2 c) 25 % je 12 m^2
d) 75 % je 48 Kčs e) 20 % je 15 km f) 300 % je 27 t

7. Vypočítajte základ, z ktorého

a) 21 % je 140 b) 78 % je 290 kg c) 115 % je 430 ha
d) 9,2 % je 42 e) 4 % sú 0,57 m^3 f) 31 % je 130 Kčs

8. Cukrová repa má cukornatosť 14 % až 16 %. Vypočítajte, koľko ton repy treba na výrobu 10 000 t cukru.

9. V Čínskej ľudovej republike žilo r. 1964 800 miliónov obyvateľov, r. 1987 1 miliarda obyvateľov. (Údaje sú približné a zaokrúhlené.) Počet obyvateľov s vysokoškolským vzdelaním bol v r. 1964 2,88 milióna, v r. 1987 6 miliónov. Koľko percent obyvateľstva v ČĽR malo vysokoškolské vzdelanie v r. 1964 a koľko v r. 1987? Porovnajte tieto výsledky a) odčítaním, b) vydelením.

10. Odber pitnej vody z verejných vodovodov v ČSSR vzrástol zo 721 miliónov m^3 v r. 1970 na 1 229 miliónov m^3 v r. 1986. O koľko percent vzrástol odber pitnej vody za uvedené obdobie?

11. Jedna z komét Slnečnej sústavy obieha okolo Slnka raz za 1 milión rokov. Pri každom priblížení sa k Slnku stráca 0,2 % pôvodného objemu. Koľko rokov uplynie od vzniku kométy do jej predpokladaného zániku?

12. Brigáda v uhoľnom revíri mala ročný plán vyťažiť 8,5 milióna m^3 materiálu. Za prvé tri štvrťroky vyťažila 6,5 milióna m^3. Rovnakým tempom pokračovala aj v štvrtom štvrťroku. Na koľko percent splnila ročný plán?

13. Narysujte ľubovoľný trojuholník a zostrojte jeho stredné priečky. Odmerajte dĺžku každej strany a dĺžku strednej priečky, ktorá je so stranou rovnobežná. Pre každú stranu a strednú priečku s ňou rovnobežnú vypočítajte podiel ich dĺžok. Závisí tento podiel od výberu strany?

14. Zistite, či možno zostrojiť trojuholník ABC. Ak áno, zostrojte ho.

a) $a = 52$ mm, $b = 39$ mm, $c = 46$ mm
b) $a = 3{,}5$ cm, $\beta = 74°$, $\gamma = 52°$
c) $a = 46$ mm, $b = 54$ mm, $\gamma = 105°$
d) $\alpha = 104°$, $b = 3$ cm, $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$
e) $a = 6{,}2$ cm, $b = 2{,}4$ cm, $c = a$
f) $a = 6{,}2$ cm, $b = 2{,}4$ cm, $c = b$

15. Vypočítajte veľkosť tretieho vnútorného uhla v trojuholníku BCD:

a) $\delta = 53°$, $\beta = 86°$
b) $\gamma = 62°50'$, $\delta = 38°40'$
c) $\beta = 104°29'$, $\delta = 38°46'$

16. Zostrojte trojuholník, ktorý má vrcholy $K[5, 0]$, $L[7, 7]$ a $M[1, 5]$. Zostrojte výšky trojuholníka a odmerajte ich s presnosťou na milimetre.

17. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB:

a) $|AB| = 4{,}2$ cm, $\alpha = 55°$
b) $|BC| = 5$ cm, $\beta = 42°$
c) $|BC| = 6$ cm, $\alpha = 36°$

18. Narysujte ľubovoľný trojuholník a zostrojte jeho ťažnice.

19. Narysujte bez uhlomeru uhly s veľkosťami $60°$, $45°$, $30°$, $120°$, $135°$.

20. Narysujte bez uhlomeru niekoľko rovnoramenných trojuholníkov, v ktorých jeden vnútorný uhol má veľkosť $30°$. Musia mať vnútorné uhly vo všetkých trojuholníkoch rovnaké veľkosti?

21. Narysujte rovnoramenný trojuholník ABC so stranou $a = 6$ cm a zostrojte kružnicu, ktorá je mu opísaná.

22. Rovnoramenný trojuholník má jeden vnútorný uhol s veľkosťou a) $68°$, b) $96°$. Vypočítajte veľkosti ostatných vnútorných uhlov. Koľko riešení má úloha v prípade a) a koľko v prípade b)?

23. Narysujte ľubovoľný trojuholník ABC s uhlom $\alpha = 60°$. Zostrojte kružnicu, ktorá je mu opísaná.

24. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom $c = 8$ cm, $\alpha = 72°$, $\beta = 44°$.

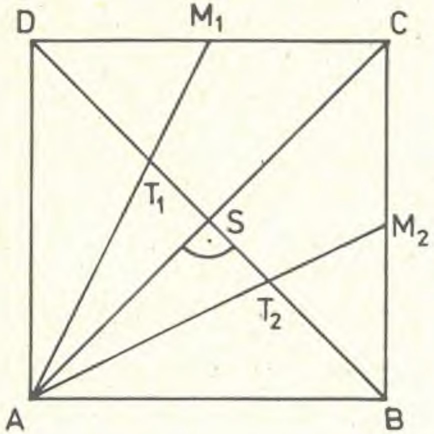
a) Zostrojte osi vnútorných uhlov trojuholníka; priesečník osí označte O.

b) Vypočítajte veľkosti všetkých vnútorných uhlov trojuholníkov ABO, BCO, ACO. Preverte výsledky odmeraním veľkostí uhlov uhlomerom.

25. a) Narysujte štvorec $ABCD$, ktorého uhlopriečky majú dĺžku 6 cm. Označte: S – stred štvorca, M_1 – stred strany CD, M_2 – stred strany BC, T_1 – priesečník úsečiek BD, AM_1, T_2 – priesečník úsečiek BD, AM_2. (Pozri obrázok.)

b) Odôvodnite, že T_1, T_2 sú ťažiská trojuholníkov ACD, ACB.

c) Viete určiť dĺžky úsečiek DT_1, T_1S, T_2S, T_2B bez merania? Ako? Porovnajte dĺžky úsečiek DT_1, T_1T_2, T_2B.



B

1. a) Nasledujúce zlomky napíšte ako desatinné čísla:

$\frac{3}{10}, \frac{14}{5}, \frac{11}{4}, \frac{9}{20}, \frac{5}{8}, \frac{97}{32}$

b) Nasledujúce desatinné čísla napíšte ako zlomky v základnom tvare:

0,7; 0,45; 0,125; 1,78; 2,16; 3,25; −5,75

c) Zistite periódy nasledujúcich čísel:

$\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{7}{3}, \frac{4}{11}, \frac{11}{12}, \frac{23}{15}$

2. Nasledujúce čísla usporiadajte podľa veľkosti a zobrazte ich na číselnej osi:

$0{,}25;\ -\frac{1}{3};\ \frac{2}{9};\ -0{,}3;\ \frac{5}{7};\ 0{,}8$

Za jednotku na číselnej osi si zvoľte 4 cm.

3. Vypočítajte:

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}-\frac{4}{15}+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}$

c) $\frac{9}{7}-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{2}{21}$
d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\right)$

e) $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}-\left(\frac{14}{9}+\frac{5}{12}\right)$

4. Vypočítajte spamäti:

a) $7\cdot\frac{1}{2},\ 3\cdot\frac{3}{4},\ 4\cdot\frac{2}{5},\ (-3)\cdot\frac{2}{3},\ 8\cdot\frac{4}{9}$

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4},\ \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3},\ \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{8},\ \frac{11}{3}\cdot\frac{2}{5}$

c) $\frac{9}{2}:3,\ \frac{15}{4}:5,\ \frac{8}{3}:4,\ \frac{1}{2}:4,\ \frac{2}{3}:3$

5. Vypočítajte:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5},\ \frac{7}{4}\cdot\frac{3}{5},\ \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{11},\ \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{5},\ \frac{12}{7}\cdot\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{3}:\frac{1}{2},\ \frac{4}{7}:\frac{2}{5},\ \frac{5}{12}:\frac{4}{9},\ \frac{6}{11}:\frac{3}{5},\ \frac{8}{15}:\frac{6}{7}$

6. Rodina vydala v jednom mesiaci na poplatky za byt $\frac{1}{6}$ svojho mesačného príjmu, za stravu $\frac{2}{5}$ príjmu, na oblečenie a iné potreby $\frac{1}{3}$ príjmu. Z mesačného príjmu usporila 480 Kčs. Koľko korún bol mesačný príjem rodiny a koľko vydala na jednotlivé položky?

7. Turista prešiel $\frac{3}{4}$ trasy diaľkového pochodu. Do cieľa mu zostávalo $12\frac{1}{2}$ km. Koľko kilometrov merala trasa diaľkového pochodu?

8. Cisterna s objemom 6 000 l bola naplnená na $\frac{9}{10}$ objemu. Odčerpali z nej $\frac{5}{6}$ tohto množstva. Koľko litrov náplne zostalo v cisterne?

9. Na pracovnej smene v obvode sa zúčastnilo 16 obyvateľov z domu, čo je 20 % počtu všetkých obyvateľov domu. Koľko ľudí býva v dome?

10. Vodič automobilu prešiel 60 % dĺžky trasy a z 20 l benzínu v nádrži spotreboval 13 l. Vystačí mu pri rovnakej spotrebe zvyšok benzínu do konca cesty?

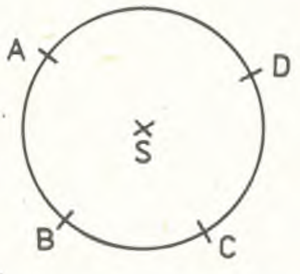
11. Z Aritmetiky Martina Čulena z r. 1866:
Istý rýchloposol odišiel z mesta a denne urazil 12 míľ; o jeden deň neskôr bol za ním poslaný druhý. Koľko míľ musí tento denne uraziť, aby tam toho za 4 dni dohonil? (Na porovnanie s dnešnými jednotkami dĺžky: 1 rakúska míľa = 7 586,7 m.)

12. Doplňte správne jednotky:

a) $52 \text{ m}^2 = 5\,200 \ldots$
$4{,}6 \text{ cm}^2 = 460 \ldots$
$4\,500 \text{ mm}^2 = 45 \ldots$
$0{,}2 \text{ km}^2 = 20 \ldots$
$140 \text{ ha} = 1{,}4 \ldots$
$0{,}9 \text{ m}^2 = 9\,000 \ldots$

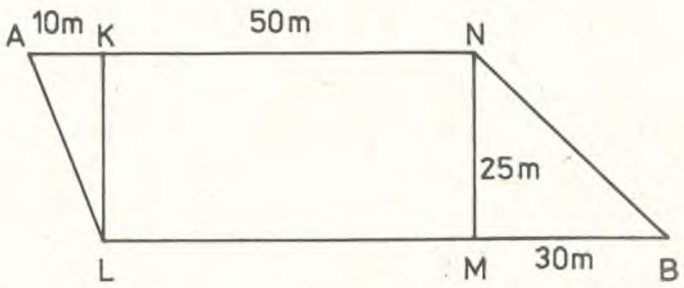
b) $12{,}6 \text{ cm} = 126 \ldots$
$484 \text{ mm} = 0{,}484 \ldots$
$95 \text{ m} = 95\,000 \ldots$
$0{,}51 \text{ km} = 510 \ldots$
$7\,850 \text{ cm} = 78{,}5 \ldots$
$34 \text{ m} = 340 \ldots$

13. Narysujte kružnicu $k(S; 32 \text{ mm})$. Zvoľte si na nej štyri body A, B, C, D (pozri obrázok).



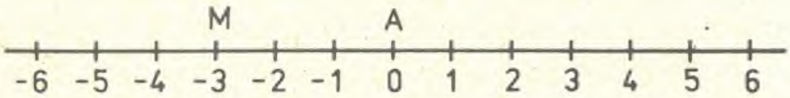
Vyznačte uhly $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\gamma = \sphericalangle BCD$. Odmerajte ich veľkosti a vypočítajte ich súčet.

14. Na plániku je znázornený bazén. Adam stojí na mieste A, Boris na mieste B. Boris sa vydá na cestu k Adamovi. Ktorou z ciest BNA, BLA má k Adamovi bližšie?



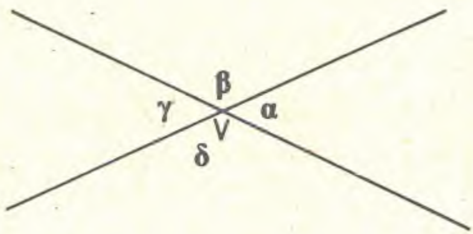
a) Odhadnite, ktorá cesta je kratšia.
b) Narysujte plánik a preverte odhad meraním. Koľko metrov je rozdiel dĺžok ciest?
(Zmenšenie: 1 mm na pláne zodpovedá 1 m v skutočnosti.)

15. Na obrázku je číselná os. V bode A je obraz čísla 0.



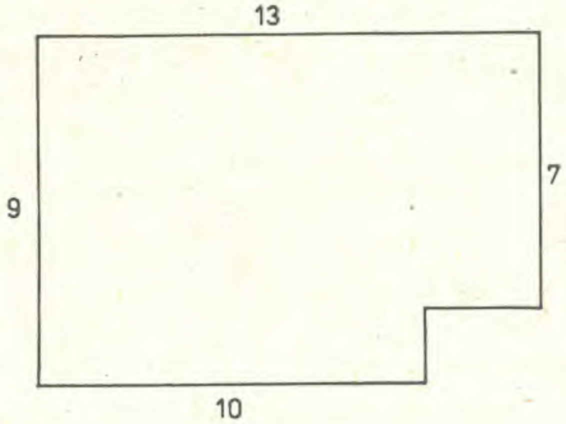
a) Nájdite obraz M' bodu M v stredovej súmernosti so stredom A. Ktoré číslo má obraz v tomto bode? Ako nazývame čísla, ktoré majú obrazy v bodoch súmerne združených podľa stredu A?
b) Prekreslite si číselnú os do zošita a vyznačte bod S, v ktorom má obraz číslo -2. Vyznačte aspoň tri dvojice bodov súmerne združených v stredovej súmernosti so stredom S. Napíšte dvojice čísel, ktoré majú obrazy v týchto bodoch.

16. Čo je obrazom uhla α v stredovej súmernosti so stredom V? Ako sa nazýva táto dvojica uhlov?
Nájdite na obrázku inú dvojicu uhlov súmerne združených v stredovej súmernosti so stredom V.

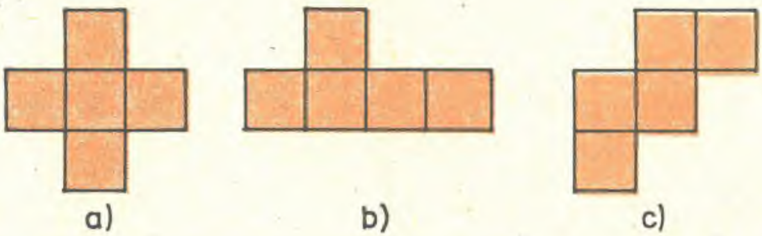


17. Obdĺžnikový pozemok má rozmery 24,5 m a 17,5 m, strana štvorcového pozemku má dĺžku 21,5 m. Pomocou kalkulačky vypočítajte, ktorý z pozemkov má väčšiu výmeru a okolo ktorého je dlhší plot.

18. Na pláne domu sú dĺžky uvedené v metroch. Narysujte plán (1 cm znázorňuje 1 m v skutočnosti) a vypočítajte obsah zastavaného pozemku.



19. Na obrázkoch a) až c) sú siete kociek bez jednej steny. Prekreslite ich na štvorčekovaný papier a inou farbou doplňte chýbajúcu stenu. Koľkými spôsobmi to môžete urobiť?



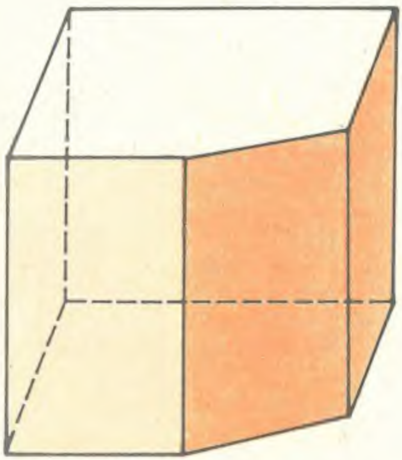
20. Jedna strana obdĺžnika má dĺžku 2,3 m, druhá strana má dvojnásobnú dĺžku. Vypočítajte a) obvod, b) obsah obdĺžnika.

21. Narysujte ľubovoľný rovnobežník $KLMN$, v ktorom jeden vnútorný uhol má veľkosť 45°. Zostrojte stred súmernosti S rovnobežníka.

22. Narysujte obdĺžnik $ABCD$ s rozmermi 7,5 cm a 5 cm. Zostrojte obraz obdĺžnika v osovej súmernosti s osou AC.

23. Narysujte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého strana má dĺžku 3,5 cm. Zostrojte obraz šesťuholníka v osovej súmernosti s osou AC.

24. a) Zistite počty vrcholov (v), hrán (h) a stien (s), ktoré má päťboký hranol.



b) V nasledujúcej tabuľke n označuje počet bočných stien hranola, ostatné písmená majú ten istý význam ako v a). Tabuľku si prekreslite a doplňte v nej chýbajúce údaje.

n	5	6				
v			8	14		
h						9
s					12	

25. Narysujte pravidelný osemuholník vpísaný do kružnice s polomerom $r = 35$ mm.

10. Rovnobežníky, hranoly

10.1 Rovnobežníky

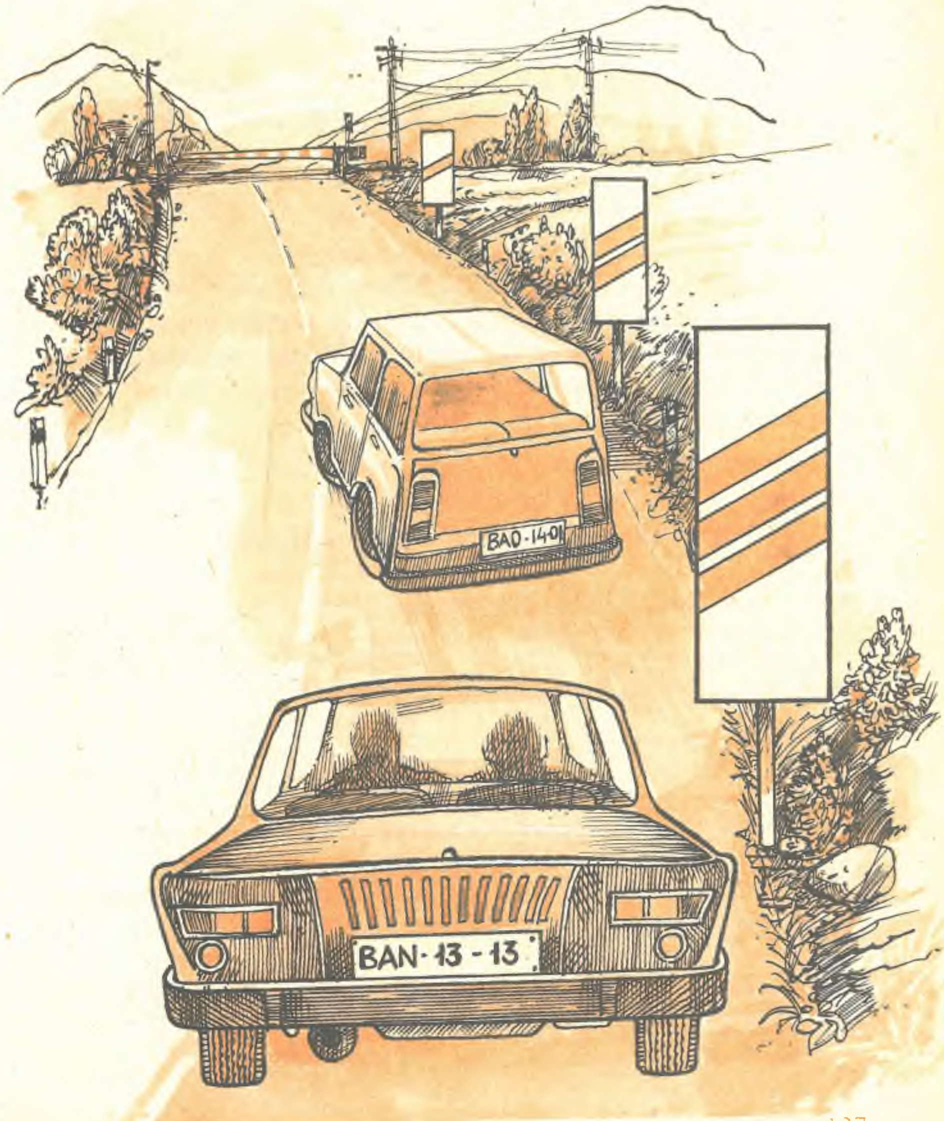
Na uliciach, v okolí školy, pri svojich cestách s rodičmi aj pri branných hrách sa stretávate s dopravnými značkami. Zväčša majú tvar kruhu, trojuholníka alebo štvoruholníka.

Dopravné značky na obrázku sú návestné značky umiestnené pred železničným priecestím vo vzdialenosti 240 m, 160 m a 80 m od priecestia. Vzdialenosť od priecestia je vyznačená tromi, dvoma alebo jedným červeným pruhom v tvare rovnobežníka.

Z predchádzajúcich ročníkov viete:

! Rovnobežník je štvoruholník, ktorý má každé dve protiľahlé strany rovnobežné a zhodné.

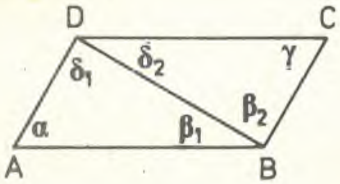
V tomto ročníku sa oboznámite s ďalšími vlastnosťami rovnobežníka.



Príklad 1

Zistite súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov rovnobežníka.

Riešenie

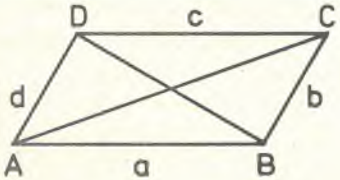


Úsečka BD rozdeľuje rovnobežník na dva trojuholníky ABD a BCD. Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov trojuholníka je 180°, preto platí

$$\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180°,$$
$$\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180°.$$

Uhol β je súčtom uhlov β_1 a β_2, uhol δ je súčtom uhlov δ_1 a δ_2. Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov rovnobežníka $ABCD$ sa rovná súčtu veľkostí vnútorných uhlov trojuholníkov ABD a BCD, to jest 360°.

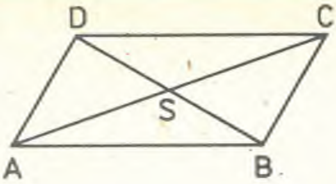
! Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov rovnobežníka je 360°.



Body A, B, C, D sú **vrcholy rovnobežníka.**
Úsečky AB, BC, CD, AD sú **strany rovnobežníka.**

Úsečky AC, BD sú **uhlopriečky rovnobežníka.**
AB a CD, BC a AD sú **dvojice protiľahlých strán** rovnobežníka.
AB a BC, BC a CD, CD a AD, AD a AB sú **dvojice susedných strán rovnobežníka.**

! **Rovnobežník je stredovo súmerný** podľa priesečníka svojich uhlopriečok.



Vzor	AS	BS	$\sphericalangle BAD$	$\sphericalangle ABC$
Obraz	CS	DS	$\sphericalangle DCB$	$\sphericalangle CDA$

Z tabuľky vidíte, že stred súmernosti rovnobežníka je stredom oboch jeho uhlopriečok; hovoríme:

> Uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom rozpoľujú. !

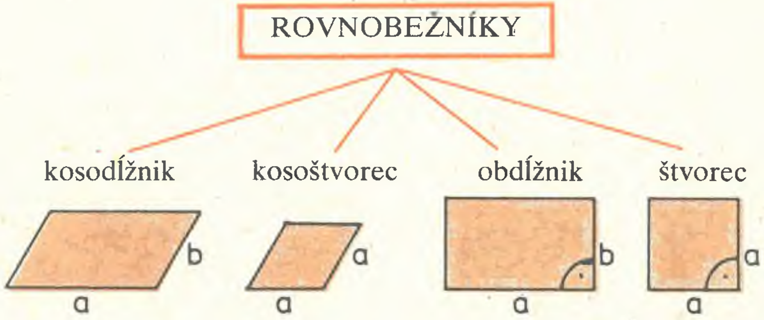
Obrazom uhla BAD v stredovej súmernosti so stredom S je uhol DCB; uhly sú teda zhodné. Obrazom uhla ABC v stredovej súmernosti so stredom S je uhol CDA, teda oba uhly sú zhodné. Platí:

> Každé dva protiľahlé uhly v rovnobežníku sú zhodné. !

Rovnobežník na obrázku sa nazýva **kosodĺžnik.** !

Obdĺžnik a **štvorec** sú rovnobežníky, ktoré majú všetky vnútorné uhly pravé.

Kosoštvorec má všetky strany zhodné a jeho vnútorné uhly nie sú pravé.



Úloha 1

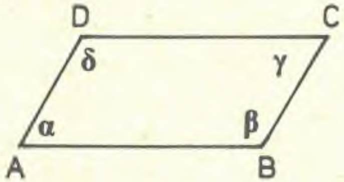
Narysujte si na hárok papiera a vystrihnite každý z rovnobežníkov na predchádzajúcom obrázku.

Príklad 2

Vnútorný uhol rovnobežníka α má veľkosť 68°. Vypočítajte veľkosť ostatných vnútorných uhlov rovnobežníka.

Riešenie

Načrtneme si rovnobežník a jeho vnútorné uhly označíme α, β, γ, δ.



Každé dva protiľahlé uhly v rovnobežníku sú zhodné, preto

$$\alpha = \gamma \quad \text{a} \quad \gamma = 68°.$$

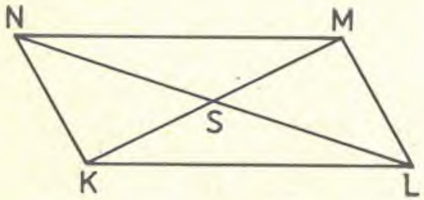
Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v rovnobežníku je 360°, preto platí:

$$\beta + \delta = 360° - 2 \cdot 68°$$
$$\beta + \delta = 360° - 136°$$
$$\beta + \delta = 224°$$

Uhly β a δ sú zhodné, preto $\beta = \delta = 112°$.

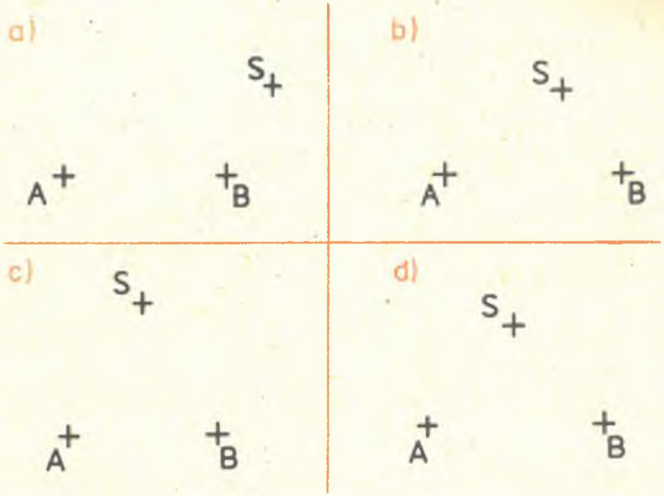
CVIČENIA

1. Z obrázka vypíšte



a) všetky strany rovnobežníka $KLMN$,
b) všetky vnútorné uhly rovnobežníka,
c) uhlopriečky rovnobežníka,
d) všetky dvojice protiľahlých a susedných strán rovnobežníka.

2. Body A, B, S si prekreslite na priesvitku. Narysujte rovnobežník $ABCD$, pre ktorý je bod S stredom súmernosti.



3. Narysujte aspoň dva kosoštvorce, ktorých strany majú dĺžku 6 cm.

4. V štvoruholníku $KLMN$ bod S je priesečníkom uhlopriečok.
   a) Zistite, či štvoruholník $KLMN$ je rovnobežník, keď platí: $|KS| = 4{,}8\,\text{cm}$, $|LS| = 32\,\text{mm}$, $|MS| = 48\,\text{mm}$, $|NS| = 30\,\text{mm}$.
   b) Doplňte neurčené dĺžky úsečiek tak, aby štvoruholník $KLMN$ bol rovnobežník: $|KS| = 1{,}6\,\text{dm}$, $|NS| = 0{,}69\,\text{dm}$, $|LS| = \ldots$, $|MS| = \ldots$

5. Jedna strana rovnobežníka má dĺžku 6 m. Môžu mať jeho uhlopriečky dĺžky
   a) 4 m, 6 m, b) 7 m, 8 m?

6. V rovnobežníku $ABCD$ poznáme veľkosť jedného vnútorného uhla. Vypočítajte veľkosti ostatných vnútorných uhlov rovnobežníka:

a) $\beta = 103^\circ$ b) $\delta = 72^\circ 12'$ c) $\alpha = 23^\circ 40'$

10.2 Konštrukcie rovnobežníkov

Pri rysovaní plánov sa niekedy stretávame s úlohou zostrojiť rovnobežník alebo iný obrazec. Pri riešení takýchto úloh využívame vlastnosti rovnobežníkov, ktoré sme doteraz poznali. Konštrukčná úloha má tieto časti: **rozbor, konštrukciu** a **skúšku.**

V **rozbore** zisťujeme, akým podmienkam musí vyhovovať hľadaný rovnobežník, ktorý máme z daných prvkov zostrojiť. Načrtneme si nejaký rovnobežník a výrazne, obvykle farebne, v ňom vyznačíme dané prvky. Zostrojiť rovnobežník znamená zostrojiť všetky jeho vrcholy. Je účelné hľadať v náčrtku trojuholník, ktorý vieme zostrojiť a ktorého niektoré vrcholy sú aj vrcholmi hľadaného rovnobežníka. Potom využijeme známe vlastnosti rovnobežníka na zostrojenie ostatných vrcholov hľadaného rovnobežníka. V náčrtku si označíme všetky body, priamky, uhly, kružnice, ktoré musíme zostrojiť a použiť, aby sme dostali všetky vrcholy hľadaného rovnobežníka.

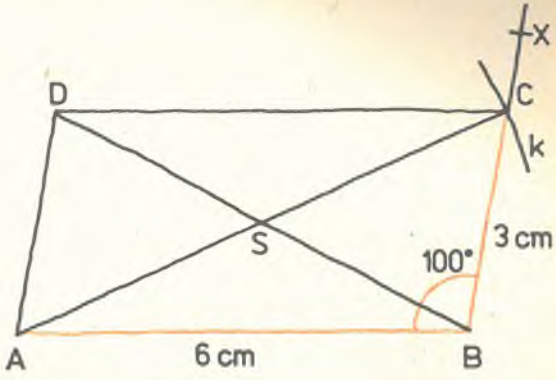
V **konštrukcii** zostrojíme aspoň jeden hľadaný rovnobežník a zapíšeme postup konštrukcie pomocou matematických značiek alebo stručných viet.

Pri **skúške** sa presvedčíme, že zostrojený obrazec má všetky vlastnosti, ktoré sú preň predpísané v texte úlohy.

Príklad 1

Zostrojte rovnobežník $ABCD$, v ktorom $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $\beta = 100°$.

Riešenie



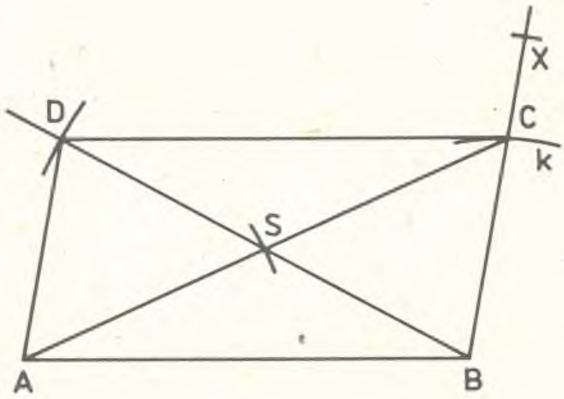
Rozbor

Načrtneme si rovnobežník $ABCD$, vyznačíme jeho uhlopriečky, stred súmernosti; farebne vyznačíme dané prvky.

1. V trojuholníku ABC poznáme dĺžky strán AB a BC a veľkosť uhla β. Trojuholník vieme zostrojiť konštrukciou *sus*. Tak zostrojíme vrcholy A, B, C rovnobežníka $ABCD$.

2. Vrchol rovnobežníka D je obrazom bodu B v stredovej súmernosti so stredom S, kde S je stred úsečky AC.

Poznámka. Uvedený postup konštrukcie nie je jediný možný. Pri zostrojovaní bodu D môžeme využiť aj iné vlastnosti rovnobežníka, napríklad zhodnosť každých dvoch protiľahlých strán rovnobežníka alebo ich rovnobežnosť.



Konštrukcia

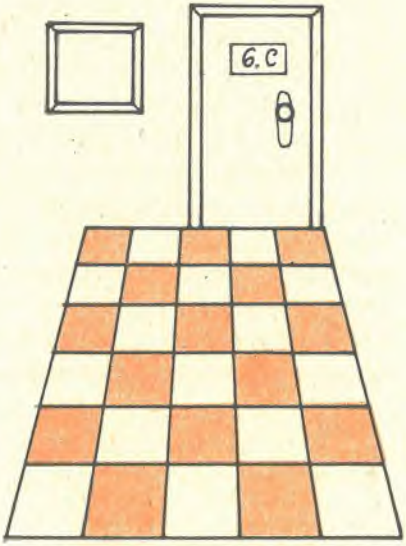
Postup konštrukcie

1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. $\sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 100°$
3. k; $k(B; 3 \text{ cm})$
4. C; $C \in k \cap \mapsto BX$
5. S; S je stred AC
6. D; $S(S)\colon B \to D$
7. Rovnobežník $ABCD$

Skúška

Odmeraním skontrolujeme, či $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $\beta = 100°$. Pomocou trojuholníka, lineára a kružidla overíme, že každé dve protiľahlé strany narysovaného štvoruholníka sú rovnobežné a zhodné, teda že narysovaný štvoruholník je rovnobežník.

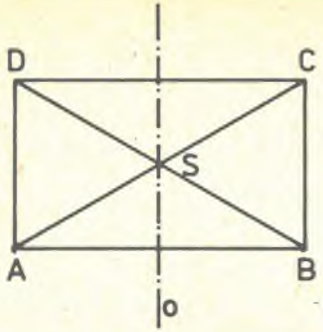
Vo svojom okolí vidíte z rovnobežníkov najčastejšie obdĺžniky a štvorce.



Zo štvrtého ročníka viete:

!

Každý vnútorný uhol obdĺžnika je pravý.



Obdĺžnik je osovo súmerný. V osovej súmernosti s osou o je obrazom uhlopriečky AC v obdĺžniku uhlopriečka BD. To znamená:

Uhlopriečky obdĺžnika sú zhodné. !

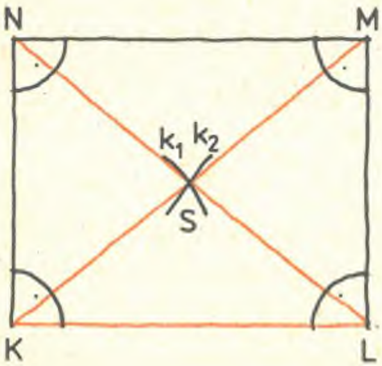
Príklad 2

Zostrojte obdĺžnik $KLMN$, v ktorom $|KL| = 7\,\text{cm}$, $|KM| = 9\,\text{cm}$.

Riešenie

Rozbor

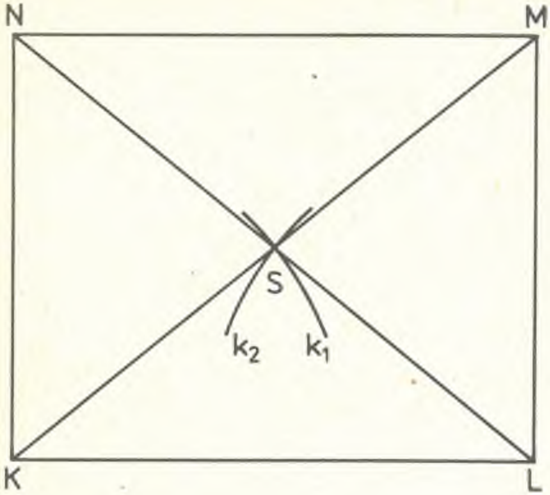
Načrtneme obdĺžnik $KLMN$, vyznačíme uhlopriečky, stred súmernosti, pravé vnútorné uhly obdĺžnika a farebne zvýrazníme dané prvky.



1. Uhlopriečky obdĺžnika sú zhodné, preto poznáme aj dĺžku uhlopriečky LN. Trojuholník KLS vieme zostrojiť konštrukciou *sss*, a tak zostrojíme vrcholy K, L obdĺžnika. Bod S je stredom súmernosti tohto obdĺžnika.

2. Vrchol obdĺžnika M je obrazom bodu K a vrchol N je obrazom bodu L v stredovej súmernosti so stredom S.

Konštrukcia



Postup konštrukcie

1. KL; $|KL| = 7$ cm
2. k_1; $k_1(K; 4{,}5$ cm$)$
3. k_2; $k_2(L; 4{,}5$ cm$)$
4. S; $S \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle KLS$
6. M; $S(S)$: $K \rightarrow M$
7. N; $S(S)$: $L \rightarrow N$
8. Obdĺžnik $KLMN$

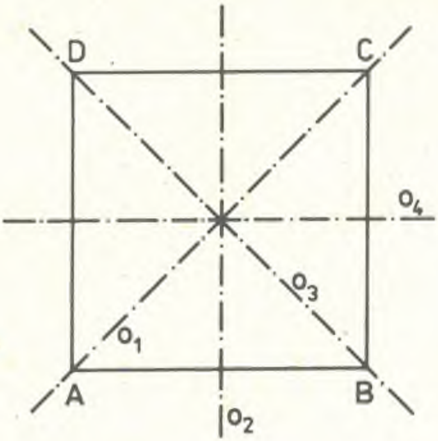
Skúška

Odmeriame, či $|KL| = 7$ cm, $|KM| = 9$ cm. Pretože obdĺžnik má všetky vnútorné uhly pravé, preveríme, či $|\sphericalangle NKL| = |\sphericalangle KLM| = 90°$.

Zo 4. ročníka viete:

! Štvorec má všetky vnútorné uhly pravé a všetky strany zhodné.

Štvorec má štyri osi súmernosti. Na obrázku sú osi o_1, o_3 aj osami vnútorných uhlov štvorca $ABCD$. Na osiach o_1, o_3 ležia uhlopriečky štvorca.



Z osovej súmernosti podľa osi o_2 vidíme, že rovnako ako v obdĺžniku platí:

> Uhlopriečky štvorca sú zhodné.

!

Os o_3, na ktorej leží uhlopriečka BD, je osou súmernosti uhlopriečky AC, preto platí:

> Uhlopriečky štvorca sú navzájom kolmé.

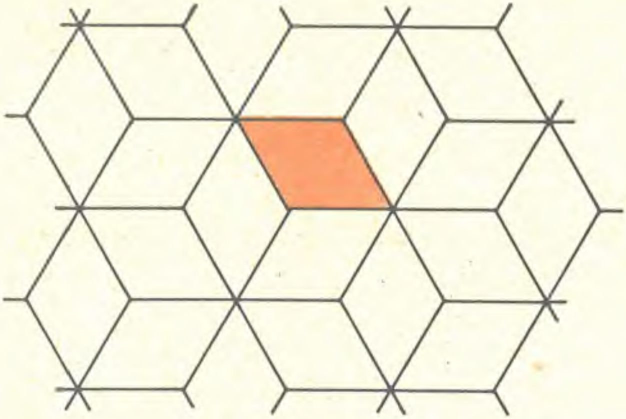
!

Úloha 1

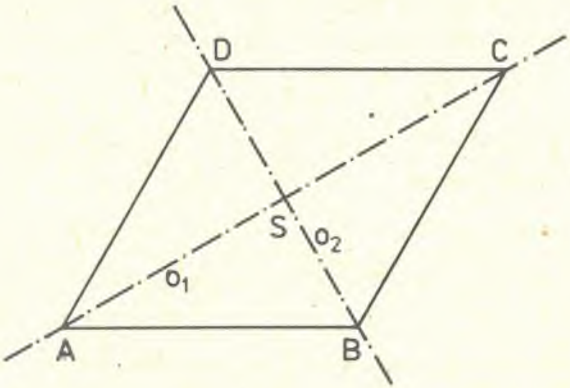
?

Akú veľkosť má uhol, ktorý zviera uhlopriečka štvorca so stranou štvorca?

Mozaiku na obrázku tvoria kosoštvorce.



! **Kosoštvorec má všetky strany zhodné, jeho vnútorné uhly nie sú pravé.**



Kosoštvorec má dve osi súmernosti o_1, o_2, ktoré sú aj osami jeho vnútorných uhlov. Na osiach kosoštvorca ležia uhlopriečky kosoštvorca.

Os o_2, na ktorej leží uhlopriečka BD, je osou uhlopriečky AC, preto platí:

Uhlopriečky kosoštvorca sú navzájom kolmé.

!

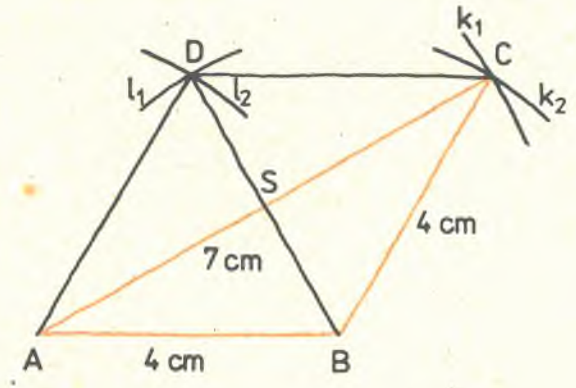
Príklad 3

Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, v ktorom $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 7$ cm.

Riešenie

Rozbor

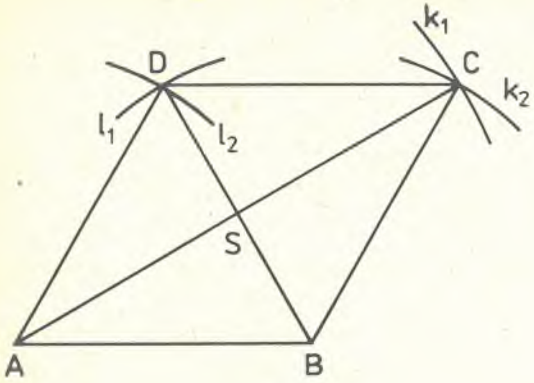
Načrtneme kosoštvorec, vyznačíme jeho uhlopriečky a farebne zvýrazníme dané prvky.



1. Pretože všetky strany kosoštvorca sú zhodné, v trojuholníku ABC poznáme dĺžky všetkých troch strán; trojuholník vieme zostrojiť konštrukciou *sss*.

2. Pretože všetky strany kosoštvorca sú zhodné, leží vrchol D na kružniciach l_1, l_2 opísaných z bodov A, C polomerom 4 cm.

Konštrukcia



Postup konštrukcie

1. AB; $|AB| = 4$ cm
2. k_1; $k_1(A; 7\text{ cm})$
3. k_2; $k_2(B; 4\text{ cm})$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle\ ABC$
6. l_1; $l_1(C; 4\text{ cm})$
7. l_2; $l_2(A; 4\text{ cm})$
8. D; $D \in l_1 \cap l_2$
9. Kosoštvorec $ABCD$

Skúška

Meraním preveríme, či $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 4$ cm, $|AC| = 7$ cm.

Poznámka. Kosoštvorec môžeme zostrojiť aj iným postupom. Po zostrojení trojuholníka ABC môžeme bod D zostrojiť nasledovne. Najprv určíme stred S úsečky AC a potom bod D ako obraz bodu B v stredovej súmernosti podľa stredu S. Pri inom postupe môžeme využiť vlastnosť, že každé dve protiľahlé strany kosoštvorca sú rovnobežné.

CVIČENIA

1. Zostrojte kosodĺžnik $KLMN$, keď poznáte:

a) $|KL| = 7{,}2$ cm, $|KN| = 4$ cm, $|\sphericalangle NKL| = 60°$

b) $|KL| = 9$ cm, $|KN| = 5$ cm, $|\sphericalangle KLM| = 75°$

2. Zostrojte kosodĺžnik $ABCD$, keď je dané:
a) $a = 7{,}5$ cm, $d = 4{,}2$ cm, $|BD| = f = 6$ cm
b) $b = 5{,}5$ cm, $c = 7$ cm, $|AC| = e = 9$ cm

3. Zostrojte kosodĺžnik $EFGH$ z týchto údajov:
a) $|EF| = 82$ mm, $|FH| = 64$ mm, $|\sphericalangle EFH| = 50°$
b) $|EF| = 6$ cm, $|FG| = 3{,}2$ cm, $|\sphericalangle FEH| = 30°$

4. Uhlopriečky kosodĺžnika zvierajú uhol 110° a majú dĺžky 10 cm a 8 cm. Zostrojte tento kosodĺžnik.
(Uhol 110° zostrojte pomocou uhlomeru.)

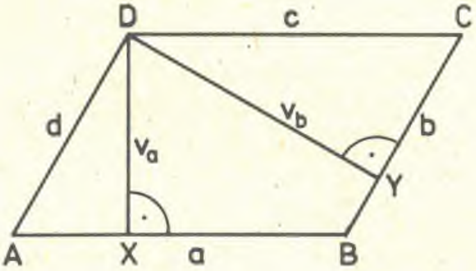
5. Zostrojte obdĺžnik, ktorého susedné strany majú dĺžky 80 mm a 65 mm. Vypočítajte obvod a obsah tohto obdĺžnika.

6. Zostrojte obdĺžnik $MNOP$, pre ktorý platí:
a) $|MN| = 6$ cm, $|MO| = 8{,}6$ cm
b) $|MN| = 8$ cm, $|\sphericalangle NMO| = 30°$

7. Zostrojte štvorec $ABCD$, keď je dané:
a) $|BD| = 8{,}8$ cm
b) $|CD| = 4{,}8$ cm

8. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, v ktorom poznáte:
a) $|AB| = 6{,}2$ cm, $|BD| = 9$ cm
b) $|AB| = 5$ cm, $|\sphericalangle BAD| = 40°$

10.3 Obsah rovnobežníka, obsah trojuholníka



Úsečky DX a DY aj ich dĺžky sa nazývajú **výšky rovnobežníka.** Úsečky DX a DY ležia na kolmiciach z vrcholu D na protiľahlé strany rovnobežníka. Výšku, ktorá prislúcha k stranám a, c, označíme v_a, výšku príslušnú k stranám b, d označíme v_b.

?

Úloha 1

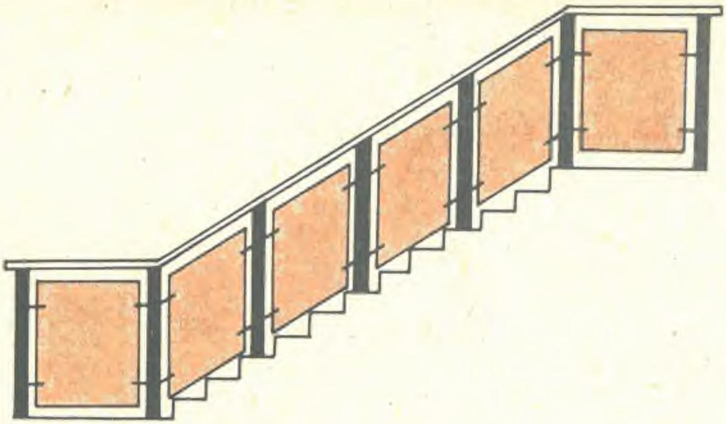
Narysujte ľubovoľný kosoštvorec a zostrojte jeho výšky. Porovnajte ich.

?

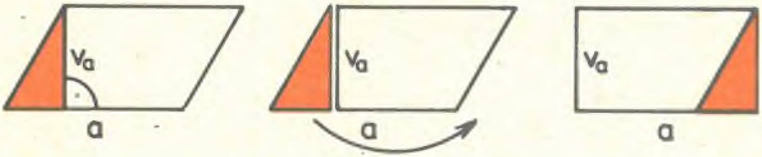
Úloha 2

Určite výšky obdĺžnika a štvorca.

Obsah štvorca a obdĺžnika už viete vypočítať. Skúsme vypočítať spotrebu skla na výplne zábradlia na obrázku.



Nasledujúci obrázok vám umožní odvodiť vzorec na výpočet obsahu rovnobežníka. Skúste to sami.



Obsah rovnobežníka sa rovná súčinu dĺžky strany rovnobežníka a výšky príslušnej k tejto strane.

Počítame podľa vzorca:

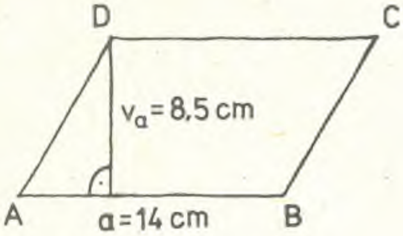
$$\boxed{S = a \, . \, v_a}$$

Príklad 1

Vypočítajte obsah rovnobežníka, ktorého jedna strana má dĺžku 14 cm a výška príslušná k tejto strane je 8,5 cm.

Riešenie

Načrtneme rovnobežník, zapíšeme údaje a podľa vzorca vypočítame obsah rovnobežníka.



$a = 14$ cm
$v_a = 8,5$ cm
$S = \dots \text{ cm}^2$

$S = a \cdot v_a$

$S = 14 \cdot 8,5$
$S = 119$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot\ 8,5 \\ \hline 70 \\ 112 \\ \hline 119,0 \end{array}$$

$S = 119 \text{ cm}^2$

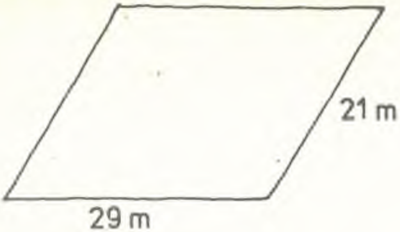
Rovnobežník má obsah 119 cm^2.

Príklad 2

Akú dĺžku má plot okolo pozemku, ktorý má tvar rovnobežníka so stranami dĺžky 29 metrov a 21 metrov?

Riešenie

Úlohu vyriešime vypočítaním obvodu pozemku. Každé dve protiľahlé strany rovnobežníka sú zhodné. Preto obvod rovnobežníka vypočítame tak, že sčítame dĺžky dvoch susedných strán a súčet vynásobíme dvoma. Teda počítame podľa vzorca $o = (a + b) \cdot 2$.



$a = 29$ m
$b = 21$ m
$o = \dots$ m

$o = (a + b) \cdot 2$

$o = (29 + 21) \cdot 2$
$o = 50 \cdot 2$
$o = 100$

$o = 100$ m

Plot okolo pozemku má dĺžku 100 m.

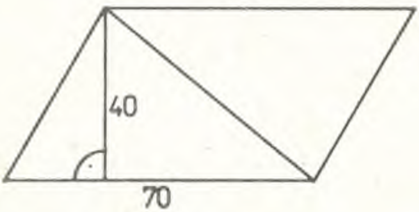
Obvod rovnobežníka vypočítame tak, že sčítame dĺžky jeho dvoch susedných strán a súčet vynásobíme dvoma. !

$$\boxed{o = (a + b) \cdot 2}$$!

V kosoštvorci sú všetky strany zhodné. Obvod kosoštvorca vypočítame tak, že dĺžku jeho strany vynásobíme štyrmi.

$$\boxed{o = 4 \cdot a}$$!

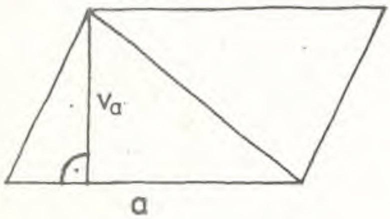
Príklad 3



Drevenú dosku tvaru kosodĺžnika znázornenú na obrázku majú žiaci v dielni rozrezať pozdĺž uhlopriečky na dva trojuholníky. Aký obsah má každý z týchto trojuholníkov?

(Dĺžky sú uvedené v centimetroch.)

Riešenie
Každá strana jedného trojuholníka je zhodná s niektorou stranou druhého trojuholníka; trojuholníky sú zhodné, po premiestnení sa kryjú a ich obsahy sa navzájom rovnajú. Vypočítame obsah rovnobežníka. Obsah každého z trojuholníkov sa rovná polovici obsahu rovnobežníka.



$a = 70$ cm
$v_a = 40$ cm
$S = \dots$ cm^2

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S = \frac{70 \cdot 40}{2}$$

$S = 1\,400$

$S = 1\,400$ cm^2

Každý z trojuholníkov má obsah 1 400 cm^2.

> **!** Obsah trojuholníka sa rovná polovine súčinu dĺžky strany trojuholníka a výšky príslušnej k tejto strane.

Počítame podľa vzorca:

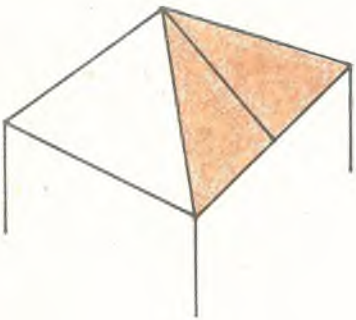
!
$$\boxed{S = \frac{a \cdot v_a}{2}}$$

a .... dĺžka strany
v_a .... výška príslušná k tejto strane
Kde je to možné, využite pri výpočtoch krátenie zlomkov.

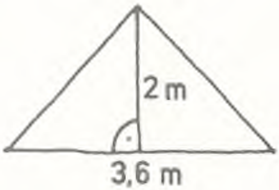
Príklad 4

Strechu nad transformátorom tvoria štyri zhodné trojuholníky. Strana každého z nich má dĺžku 3,6 metra, príslušná výška je 2 metre. Vypočítajte obsah strechy.

Riešenie



Vypočítame obsah jedného z trojuholníkov tvoriacich strechu a tento obsah vynásobíme štyrmi. Obsah jedného trojuholníka označme S_1, obsah strechy S.



$a = 3{,}6$ m
$v_a = 2$ m
$S_1 = \dots$ m^2

$S = 4 \,.\, S_1$

$S = 4 \,.\, \dfrac{a \,.\, v_a}{2}$

$S = 4 \,.\, \dfrac{3{,}6 \,.\, 2}{2}$ Skrátime:

$S = 4 \,.\, 3{,}6$

$S = 14{,}4$

$S = 14{,}4$ m^2

Strecha nad transformátorom má obsah 14,4 m^2.

CVIČENIA

1. Vypočítajte obvod a obsah rovnobežníka, keď poznáte:
   a) $a = 0{,}64$ m, $b = 0{,}32$ m, $v_a = 0{,}3$ m
   b) $a = 23$ cm, $b = 40$ cm, $v_b = 18$ cm
   c) $a = 6{,}6$ m, $b = 48$ mm, $v_a = 35$ mm
   Kalkulačku môžete použiť priamo na výpočet alebo na kontrolu výsledku.

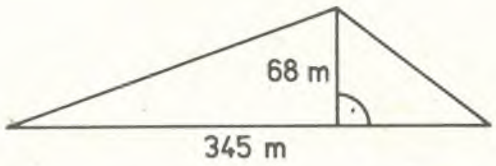
2. Vypočítajte obvod a obsah kosoštvorca *RSTU*, keď strana kosoštvorca má dĺžku 9,8 cm a výška je 6 cm.

3. Sklená tabuľa výplne zábradlia má tvar kosodĺžnika, ktorého strana má dĺžku 150 cm a príslušná výška je 65 cm. Aký obsah má tabuľa?

4. Rovnobežník má obsah 117 cm², jedna jeho strana má dĺžku 18 cm. Vypočítajte výšku príslušnú k tejto strane.

5. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny majú dĺžku 12,4 cm a 6,8 cm.

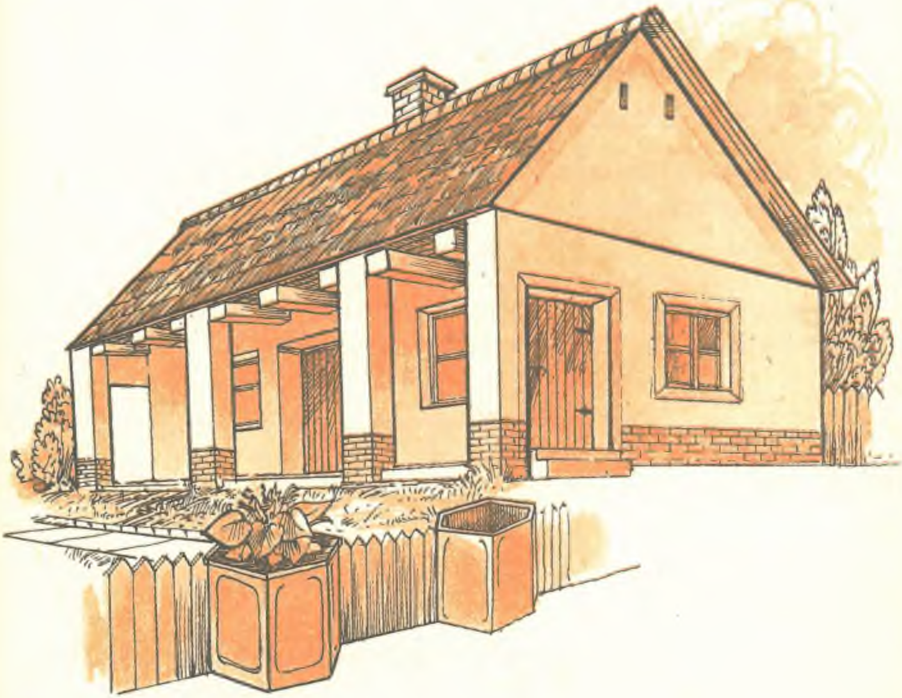
6. Pozemok má tvar trojuholníka, ktorého rozmery sú vyznačené na plániku. Pomocou kalkulačky vypočítajte výmeru pozemku.

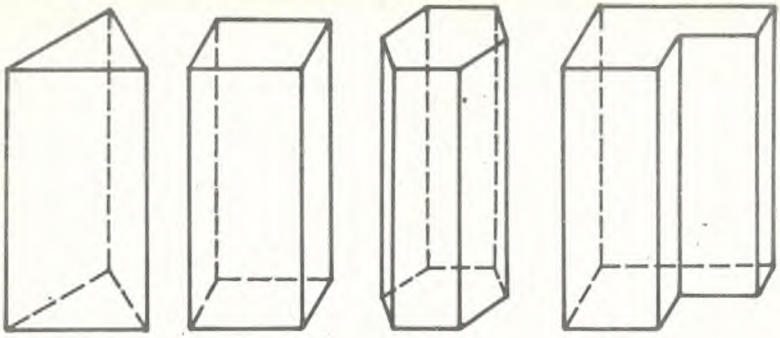


7. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, keď poznáte:
a) $a = 6{,}5$ m, $v_a = 4$ m
b) $c = 8{,}6$ cm, $v_c = 2{,}8$ cm
c) $b = 42$ mm, $v_b = 28$ mm
Výsledky si skontrolujte pomocou kalkulačky.

10.4 Hranol. Povrch a objem hranola

Okrem kvádrov a kociek sa vo svojom okolí stretávate aj s inými **hranolmi.** Niektoré z nich vidíte na obrázku domu aj na nasledujúcom obrázku.





! Hranoly majú **dve podstavy** v tvare trojuholníka, štvorca, šesťuholníka alebo iného mnohouholníka.

Bočné steny hranolov sú štvorce alebo obdĺžniky.

Strany oboch podstáv i strany bočných stien sa nazývajú **hrany.** Rozlišujeme **hrany podstavy** a **bočné hrany.**

Dĺžky bočných hrán sú **výšky** hranolov.

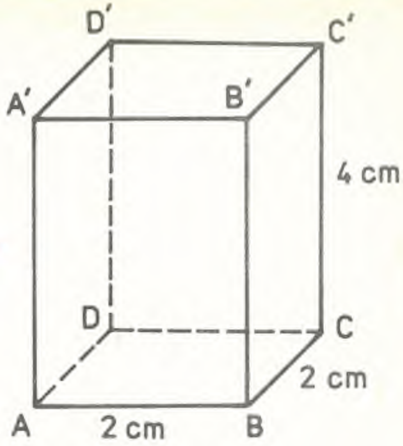
Na obrázku je znázornený **trojboký hranol, štvorboký hranol** a dva **šesťboké hranoly.**

Trojboký hranol má dve zhodné podstavy tvaru trojuholníka. Štvorboký hranol má dve zhodné podstavy tvaru štvoruholníka. Šesťboký hranol má dve zhodné podstavy tvaru šesťuholníka.

? **Úloha 1**

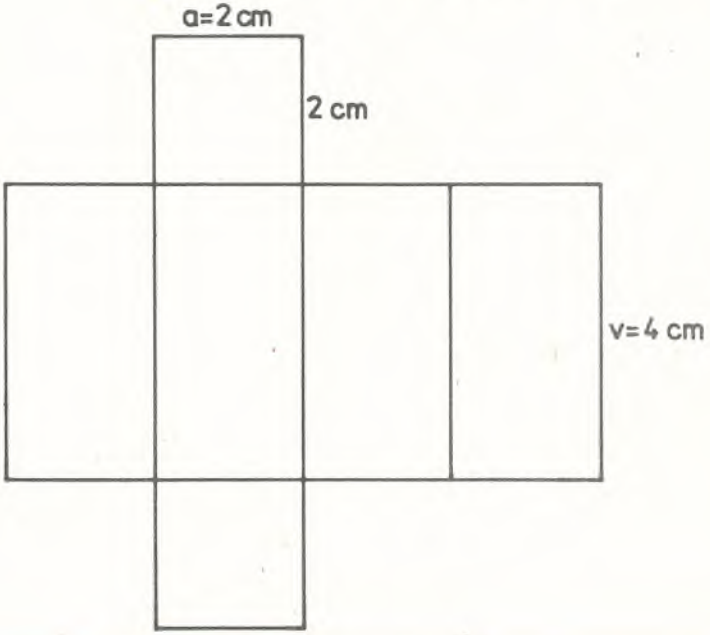
Na obrázku na s. 151 je znázornený štvorboký hranol, ktorého podstavou je štvorec. Vymenujte jeho

a) vrcholy
b) hrany podstavy
c) bočné hrany
d) podstavy
e) bočné steny



Úloha 2

Na obrázku je sieť hranola z úlohy 1. Vypočítajte jeho povrch.



Povrch hranola je súčet obsahov všetkých jeho stien.

Povrch hranola sa teda rovná súčtu obsahov jeho dvoch podstáv a obsahov všetkých jeho bočných stien. Všetky bočné steny tvoria **plášť hranola.**

Povrch hranola vypočítame podľa vzorca:

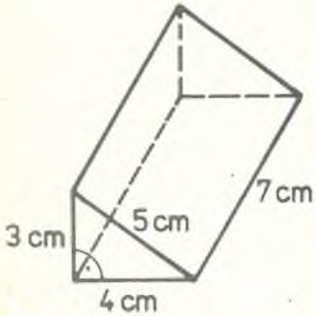
$$\boxed{S = 2 \cdot S_p + S_{pl}}$$

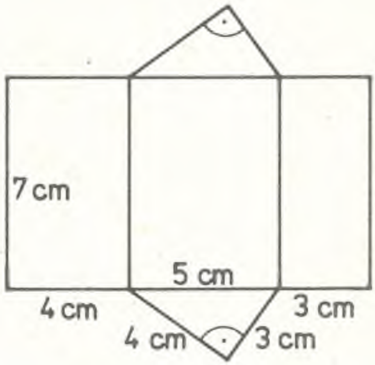
S_p ... obsah podstavy hranola
S_{pl} ... obsah plášťa hranola

Povrch štvorbokého hranola, ktorého sieť je na obrázku, je 40 cm^2.

Úloha 3

Na obrázku je znázornený trojboký hranol, ktorého podstava je pravouhlý trojuholník, a sieť tohto hranola. Vypočítajte jeho povrch.

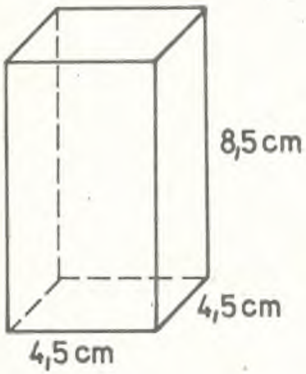




Príklad 1

Vypočítajte povrch štvorbokého hranola, ktorého podstava je štvorec, keď dĺžka hrany podstavy $a = 4{,}5$ cm a výška hranola je 8,5 cm.

Riešenie
Načrtneme si hranol, zapíšeme dané dĺžky a podľa vzorca vypočítame povrch hranola.



$a = 4{,}5$ cm
$v_h = 8{,}5$ cm
$S = \dots$ cm^2

$S = 2 \,.\, S_p + S_{pl}$

$S = 2 \,.\, 4{,}5 \,.\, 4{,}5 + 4 \,.\, 4{,}5 \,.\, 8{,}5$
$S = 40{,}5 + 153$
$S = 193{,}5$

$S = 193{,}5\ \text{cm}^2 \doteq 194\ \text{cm}^2$

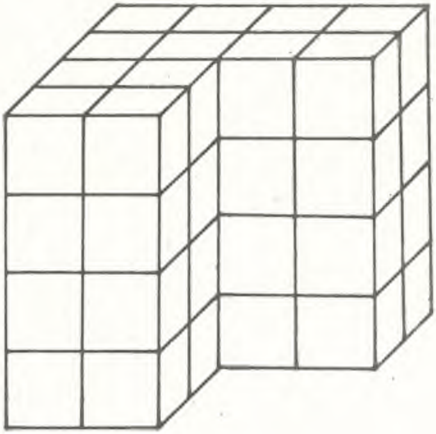
Povrch štvorbokého hranola je zaokrúhlene 194 cm^2.

Keď chceme zistiť množstvo betónu na výrobu stĺpov, dreva na krov strechy, zeminy na naplnenie ozdobných váz, potrebujeme vypočítať **objem hranola.** Doteraz viete vypočítať objem dvoch hranolov, a to kvádra a kocky.

!

Príklad 2

Vypočítajte objem šesťbokého hranola znázorneného na obrázku. Skladá sa z kociek, ktorých objem je 1 cm^3.



Riešenie

Zistíme počet kociek v jednej vrstve (obsah podstavy) a výsledok násobíme počtom vrstiev (výška hranola). V jednej vrstve je 12 kociek, vrstvy sú štyri.

$V_h = S_p \cdot v_h$

$V = 48\ cm^3$

!

Objem hranola vypočítame, keď obsah podstavy vynásobíme výškou hranola.

Počítame podľa vzorca:

!

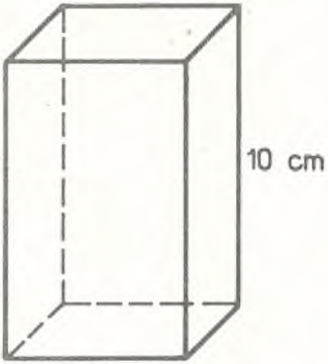
$$V = \underbrace{S_p}_{\text{obsah podstavy}} \cdot \underbrace{v_h}_{\text{výška hranola}}$$

Príklad 3

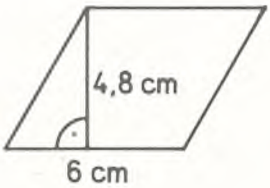
Vypočítajte objem štvorbokého hranola, ktorého podstava je kosodĺžnik s hranou podstavy dlhou $a = 6$ cm, príslušnou výškou $v_a = 4{,}8$ cm a ktorého výška $v_h = 10$ cm.

Riešenie

Načrtneme si hranol a okrem toho aj jeho kosodĺžnikovú podstavu, aby sme mali lepšiu predstavu o daných údajoch. Vypočítame obsah kosodĺžnikovej podstavy a vynásobíme ho výškou hranola.



$a = 6$ cm
$v_a = 4{,}8$ cm
$v_h = 10$ cm
$V = \dots$ cm^3



$V = S_p \cdot v_h$

$V = 6 \cdot 4{,}8 \cdot 10$
$V = 288$

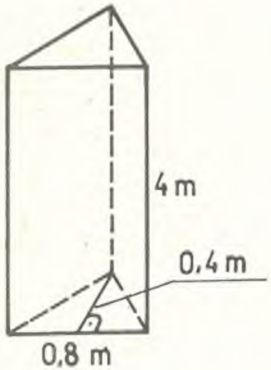
$V = 288$ cm^3

Objem hranola je 288 cm^3.

Príklad 4

Betónový stĺp má tvar trojbokého hranola, ktorého podstava je rovnoramenný trojuholník so stranou $a = 0{,}8$ m, výškou k nej príslušnou 0,4 m a ktorý má výšku 4 m. Koľko kubických metrov betónu treba na stavbu stĺpa?

Riešenie
Vypočítame objem hranola ako súčin obsahu jeho trojuholníkovej podstavy a jeho výšky.



$a = 0{,}8$ m
$v_a = 0{,}4$ m
$v_h = 4$ m
$V = \dots$ m^3

$V = S_p \,.\, v_h$

$$V = \frac{0{,}8 \,.\, 0{,}4}{2} \cdot 4$$ Skrátime:

$V = 0{,}8 \,.\, 0{,}4 \,.\, 2$
$V = 0{,}64$

$V = 0{,}64$ m^3

Na stavbu stĺpa treba 0,64 m^3 betónu.

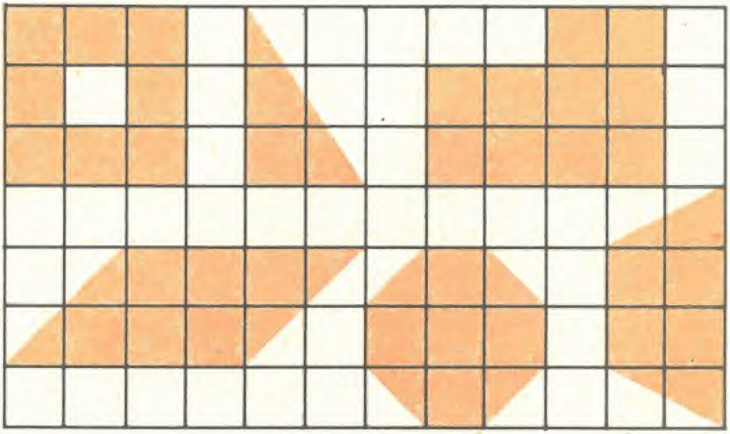
CVIČENIA

1. Vypočítajte objem a povrch štvorbokého hranola, ktorého podstava je štvorec s dĺžkou strany $a = 2{,}5$ cm a ktorého výška je 12 cm.

2. Podstava trojbokého hranola je pravouhlý trojuholník s dĺžkami strán 5 cm, 12 cm, 13 cm; výška hranola je 15 cm. Vypočítajte objem a povrch hranola.

3. Štvorboký hranol má za podstavu kosoštvorec so stranou $a = 6$ cm a výškou $v_a = 4{,}6$ cm; výška hranola je 8 cm. Vypočítajte objem a povrch hranola.

4. Na obrázku sú v štvorcovej sieti narysované podstavy hranolov, ktorých výška je 7 cm. Štvorcová sieť je centimetrová. Vypočítajte objemy všetkých týchto hranolov. Počítajte spamäti.

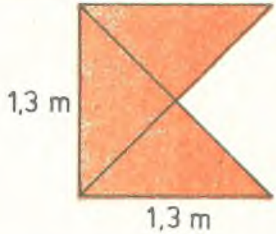


5. Zberná nádrž na vodu má tvar štvorbokého hranola so štvorcovou podstavou. Hrana podstavy má dĺžku 1,2 m. Nádrž je hlboká 2,5 m. Koľko hektolitrov vody do nej vojde? Výsledok skontrolujte výpočtom na kalkulačke.

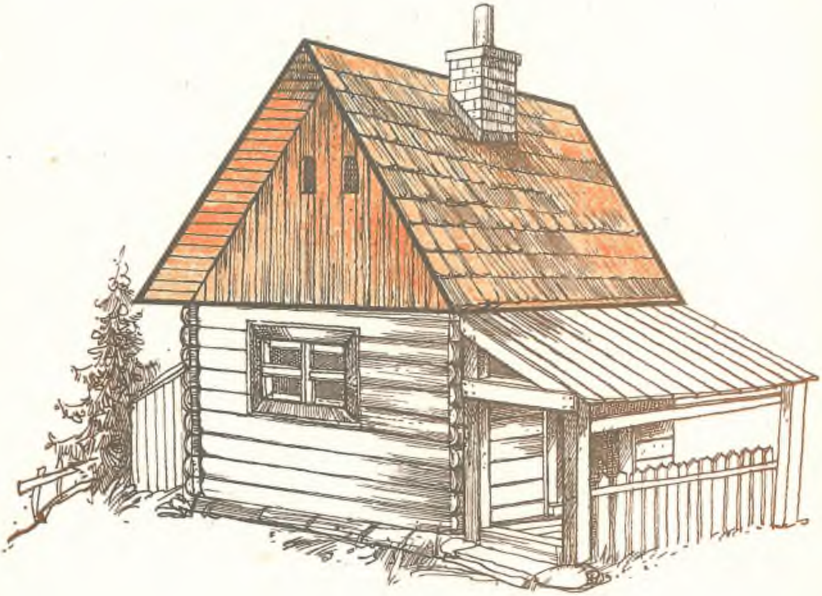
6. Hrada má dĺžku 4 m a prierez tvaru štvorca, ktorého strana má dĺžku 15 cm. Osem týchto hrád treba natrieť farbou. Jedna kilogramová plechovka vystačí na 6 m^2 náteru. Koľko plechoviek farby treba kúpiť? Na výpočet použite kalkulačku.

7. Ozdobný stĺp má podstavu znázornenú na obrázku. Výška stĺpa je 5,2 m. Vypočítajte spotrebu betónu na stavbu tohto stĺpa.

Na výpočet použite kalkulačku.



8. Podkrovie chaty má tvar trojbokého hranola. Štít je rovnoramenný trojuholník so základňou dlhou 3,5 m a výškou 2,2 m.



Dĺžka chaty je 5 m. Pre koľko osôb tam môžeme zriadiť spálňu, ak každá osoba má mať aspoň 5 m^3 vzduchu?

---

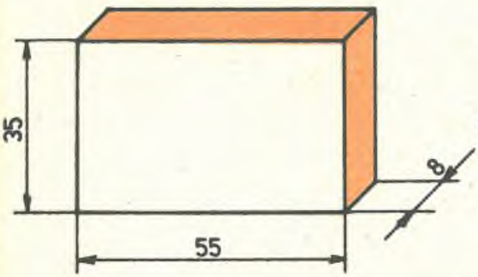
9. Ozdobná váza má tvar šesťbokého hranola, ktorého podstava má obsah 66 dm^2 a ktorého výška je 70 cm. Koľko kubických metrov zeminy treba na naplnenie dvadsiatich váz?

11. Kótovanie

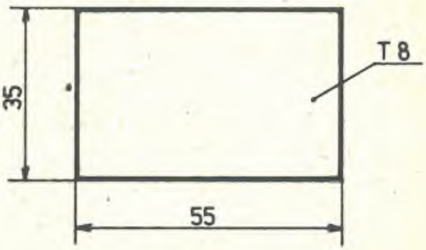
11.1 Základy kótovania v strojníctve

Technické výkresy používané vo výrobe musia obsahovať všetky údaje potrebné na zhotovenie výrobku a na jeho kontrolu. Pre výrobcu je dôležité, aby výkresy boli kreslené jednotným spôsobom, preto sa kreslia podľa schválených pravidiel, ktoré sa nazývajú normy. Na výkrese je tvar výrobku určený jeho obrazom. Rozmery sa zapisujú pomocou kót.

Naučíme sa zostrojovať technický výkres plochého telesa.



Okótovaný názorný obraz obdĺžnikovej dosky



Technický výkres rovnakej obdĺžnikovej dosky

Čísla 55 a 35, ktoré sú uvedené na obrázkoch, sa nazývajú **kóty**. Udávajú dĺžku a šírku obdĺžnikovej dosky **v milimetroch.** Hrúbku tejto dosky – takisto v milimetroch – udáva na prvom obrázku kóta 8, na druhom obrázku kóta T 8. Písmeno T (podľa českého slova tloušťka – hrúbka) naznačuje, že číselný údaj znamená hrúbku. Obdĺžniková doska je teda kváder s rozmermi

55 mm, 35 mm, 8 mm.

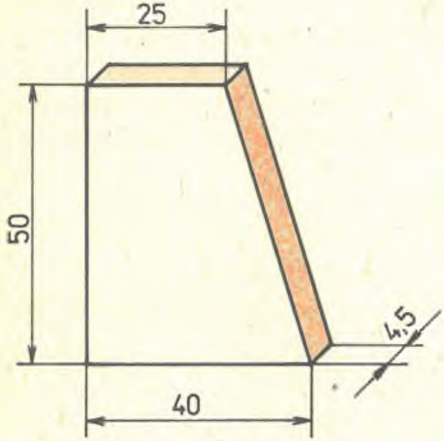
Zapamätajte si:

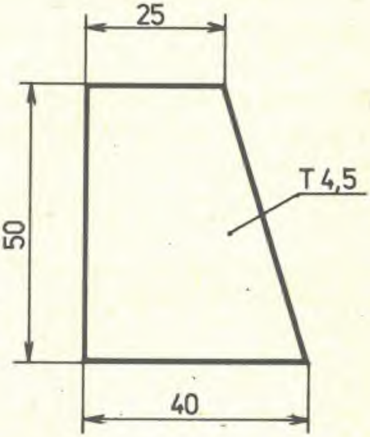
> Kóty na technických výkresoch sú vždy vyjadrené v milimetroch. Označenie jednotiek (mm) sa však nikdy nepíše.

!

Príklad 1

Zostrojte technický výkres štvoruholníkovej stykovej dosky znázornenej na obrázku.





Riešenie

Styková doska je ploché teleso, ktoré má stálu hrúbku. Preto stačí zobraziť len jej prednú stenu (druhý obrázok). Napríklad narysujeme najprv zvislú stranu s dĺžkou 50 mm. Ďalej zostrojíme dve strany na ňu kolmé s dĺžkami 40 mm a 25 mm. Potom doplníme poslednú stranu a hrubou čiarou vytiahneme výsledok.

Potom obraz okótujeme:

1. Vyznačíme **tenké pomocné čiary** v krajných bodoch strán, ktoré chceme okótovať. Rysujeme ich kolmo na tieto strany. Pretože na zhotovenie výrobku stačí poznať len kóty troch strán, nemusíme štvrtú stranu kótovať.

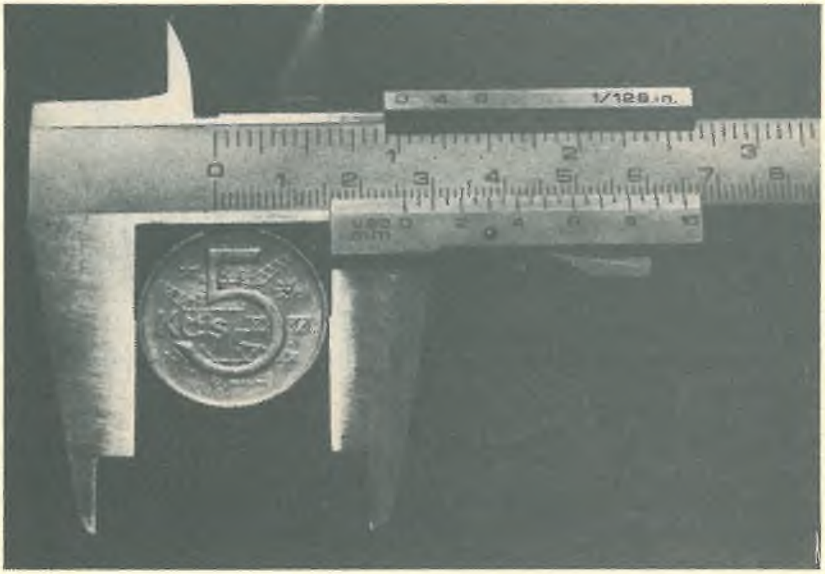
2. Vyznačíme **tenké kótovacie čiary.** Rysujeme ich rovnobežne so stranami vo vzdialenosti asi 10 mm od týchto strán. Nepreťahujeme ich cez pomocné čiary.

3. Vyznačíme **ohraničujúce šípky.**

4. Zapíšeme **kóty.** Pri zvislých kótovacích čiarach ich píšeme vľavo, pri ostatných čiarach nad ne. Kóty píšeme **vždy rovnobežne s kótovacou čiarou.**

5. Vyznačíme **odkazovú čiaru,** ktorú zväčša zalomíme tak, aby sme na ňu mohli hrúbku kótovať vodorovne. Zapíšeme T 4,5.

V strojárstve sa výrobky kruhového tvaru zhotovujú spravidla sústružením a vŕtaním. Ich priemery sa zisťujú pomocou posuvného meradla.



Preto sa v strojníctve pri kružniciach a kruhoch kótujú zásadne ich priemery. Jedine pri kružnicových oblúkoch sa kótujú polomery.

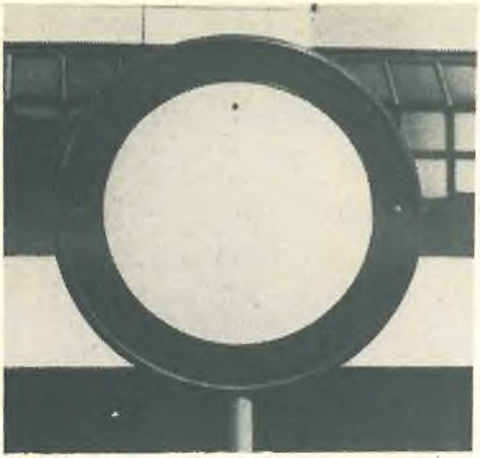
Príklad 2

Zostrojte a okótujte technický výkres

a) plechového kruhu, z ktorého sa vyrába dopravná značka „Zákaz vjazdu všetkých vozidiel“;

b) plechového krúžku, z ktorého sa vyrába odznak Jednoty československých matematikov a fyzikov.

Hrúbka plechu je v oboch prípadoch 1 mm.



Priemer značky: 500 mm

Priemer odznaku: 12 mm

Riešenie

Pre výrobcu predmetu sú rozhodujúce kóty a nie veľkosť obrazu. Preto môžeme veľké predmety zobrazovať zmenšené a naopak, malé predmety zväčšené. Dopravnú značku na výkrese zmenšíme oproti skutočnosti desaťkrát. Hovoríme, že ju zobrazíme **v mierke** 1 : 10 (čítaj jedna k desiatim). Zápis 1 : 10 znamená, že 1 mm na výkrese zodpovedá 10 mm v skutočnosti. Na výkrese sú všetky rozmery desaťkrát menšie než v skutočnosti.

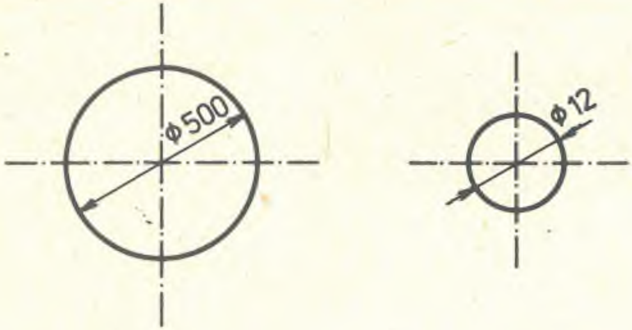
Mierka	Dopravná značka			polomer	priemer
1 : 10	Výkres	(mm)	1	25	50
	Skutočnosť	(mm)	10	250	500

: 10

Naopak, odznak JČSMF na výkrese dvakrát zväčšíme; zobrazíme ho v mierke 2 : 1. To znamená, že 2 mm na výkrese bude zodpovedať 1 mm v skutočnosti. Na výkrese budú všetky rozmery dvakrát väčšie než v skutočnosti.

Mierka	Odznak JČSMF			polomer	priemer
2 : 1	Výkres	(mm)	2	12	24
	Skutočnosť	(mm)	1	6	12

.2

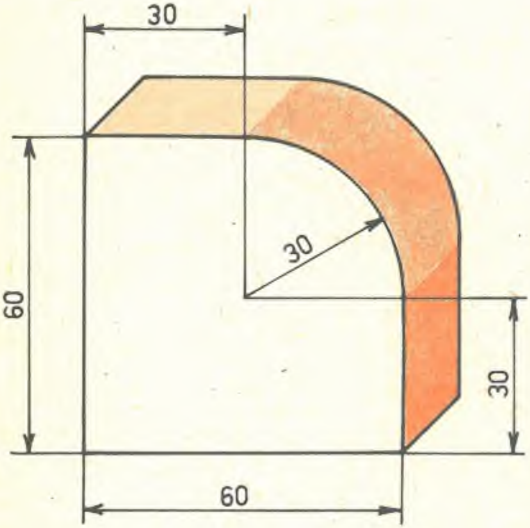


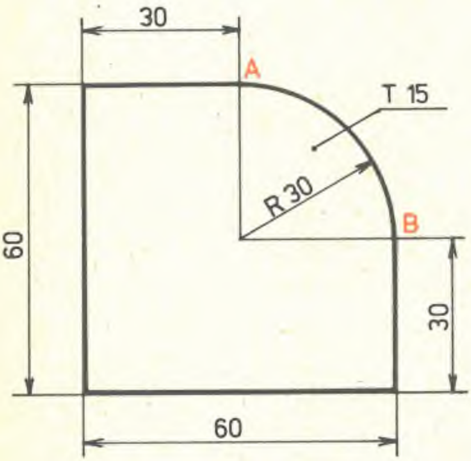
Postup konštrukcie a kótovania
Narysujeme bodkočiarkovane kolmé osi. Plnou čiarou vyznačíme kružnicu obrysu. Na výkrese dopravnej značky je jej polomer 25 mm (desaťkrát menší než v skutočnosti). Na výkrese odznaku je polomer obrysovej kružnice 12 mm (dvakrát väčší než v skutočnosti). Potom vyznačíme šikmo tenkú plnú kótovaciu čiaru pre priemer. Doplníme ohraničujúce šípky. Väčšinou sa používajú vnútorné ohraničujúce šípky. Len pri malých kružniciach sa vyznačujú vonkajšie ohraničujúce šípky. V takom prípade narysujeme kótovaciu čiaru pre priemer cez obrys. Nakoniec okótujeme priemer. Napíšeme značku pre priemer (⌀) a dĺžku priemeru. Pri malých kružniciach píšeme kótu na predĺženú kótovaciu čiaru mimo obrysu.

! Pri plochých predmetoch so zaoblenými rohmi musíme **kótovať polomery oblúkov kružníc.**

Príklad 3

Na obrázku je znázornená štvorcová doštička s jedným zaobleným rohom. Jej hrúbka je 15 mm. Zostrojte jej technický výkres.

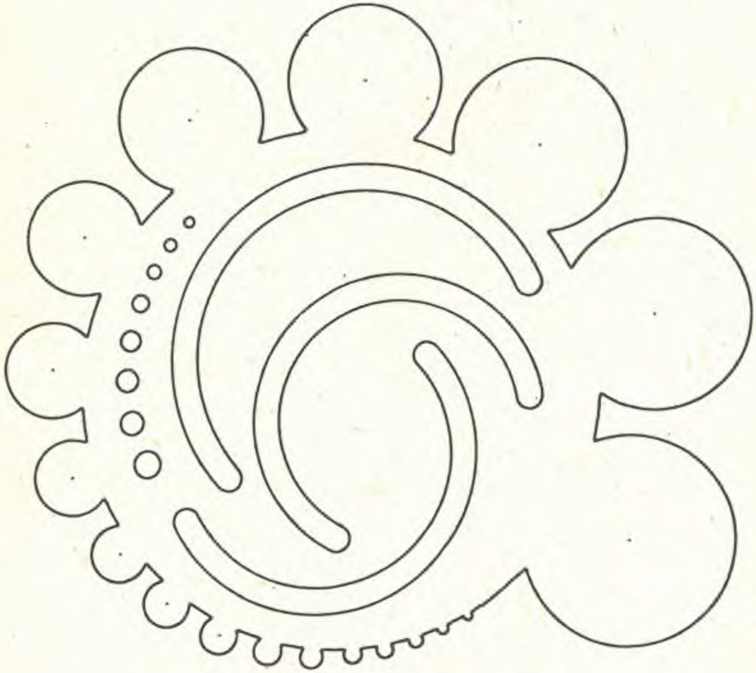


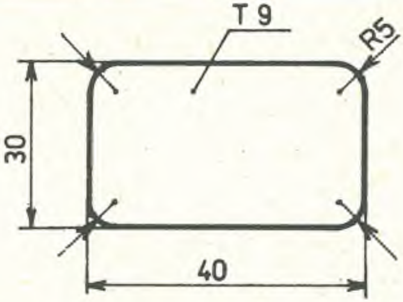


Riešenie

Zostrojíme obrys. Najprv narysujeme štvorec, ktorého strana má dĺžku 60 mm. Na jeho stranách vyznačíme podľa kót body *A*, *B*. Narysujeme pomocné čiary, ktoré prechádzajú týmito bodmi, kolmo na čiary obrysu. Priesečník pomocných čiar je stred kružnice znázorňujúcej zaoblenie. Polomer zaoblenia je 30 mm. Hrubou čiarou vyznačíme obrys. Okótujeme dĺžky. Vyznačíme polomer zaoblenia s ohraničujúcou šípkou. Zapíšeme značku pre polomer (*R*) a dĺžku polomeru. Vyznačíme odkazovú čiaru a nad ňu napíšeme kótu udávajúcu hrúbku (T 15).

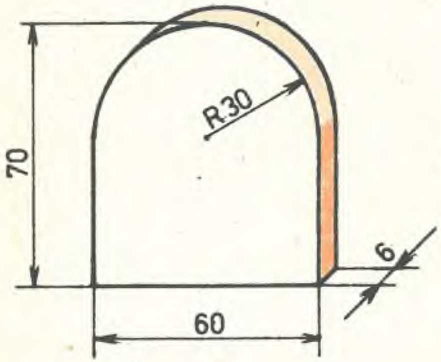
Poznámka. Ak je polomer zaoblenia malý, oblúk kružnice sa často v praxi vyznačuje pomocou polomerovej šablóny (tzv. bubliny – pozri obrázok). Pomocou tejto šablóny boli na ďalšom výkrese (pozri obrázok) zaoblené rohy znázornenej súčiastky. Šablóna sa zároveň použila na vyznačenie stredov kružníc zaoblenia.



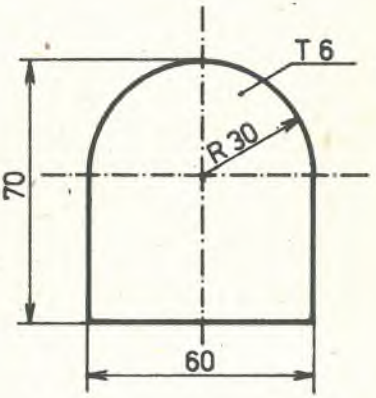


CVIČENIA

1. Narysujte technický výkres stykovej dosky z obrázka a). Postupujte podľa obrázka b); najprv vyznačte bodkočiarkované osi.

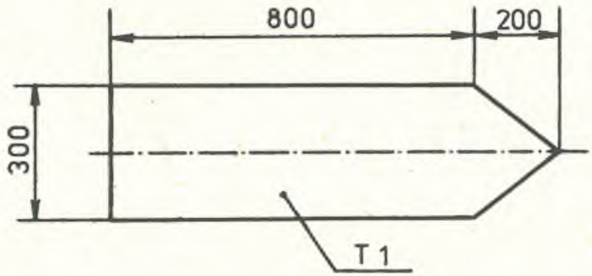


a)

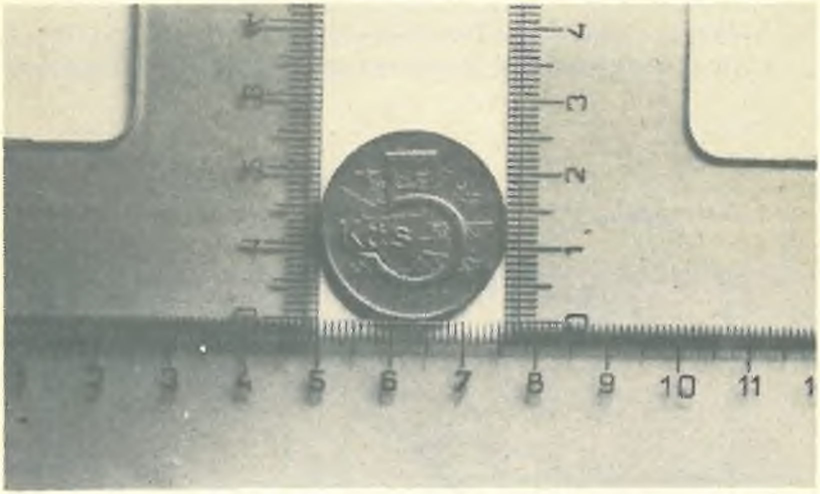


b)

2. Narysujte v mierke 1 : 100 technický výkres, podľa ktorého sa môže vyrobiť dopravná značka pre odbočenie doprava. Rysujte podľa obrázka. Začnite osou súmernosti.



3. a) Odmerajte priemery našich kovových mincí.

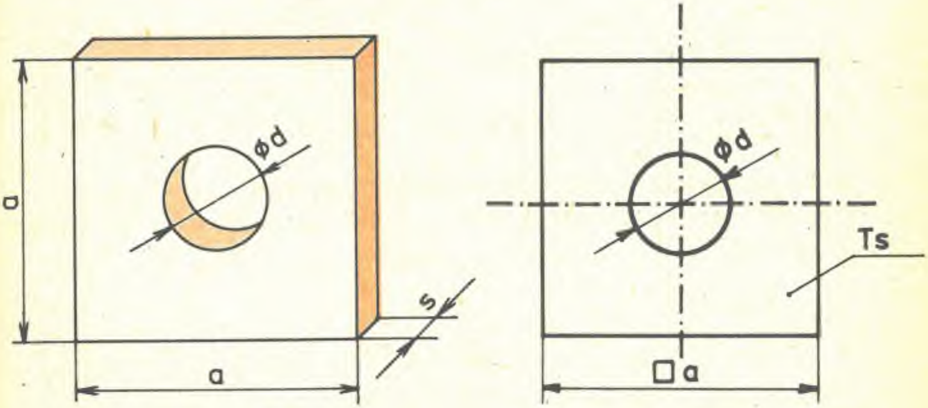


Odmerajte výšku stĺpca zostaveného z 20 mincí (pozri obrázok) a vypočítajte hrúbku jednej mince.

b) Zostrojte technický výkres kruhových doštičiek, ktorých rozmery sa zhodujú s rozmermi kovových mincí.

11.2 Kótovanie telies s kruhovými a štvorcovými dierami

V praxi sa často používajú ploché telesá s kruhovými alebo štvorcovými otvormi, ktoré sa nazývajú diery. Medzi také telesá patria napríklad podložky rozličných tvarov a veľkostí. Tvary a rozmery bežne vyrábaných podložiek sú predpísané schválenými normami.



Napríklad na obrázku vľavo je znázornená štvorhranná podložka s kruhovou dierou, ktorá sa používa pri drevených konštrukciách. Jej technický výkres je na susednom obrázku. Všimnite si, že na výkrese sú vyznačené dve osi. Z výkresu tak poznáme, že je to štvorcová podložka s dĺžkou hrany *a*.

Dĺžka hrany	*a*	30	40	50	60	80
Priemer diery	*d*	11	14	18	22	26
Hrúbka	*s*	3	4	5	5	6

Tabuľka ukazuje, aké rozmery majú vyrábané podložky. Zistíme z nej napríklad, že podložka s dierou s priemerom $d = 22$ mm má dĺžku hrany $a = 60$ mm a hrúbku $s = 5$ mm.

Úloha 1

Narysujte technický výkres štvorhrannej podložky s dierou s priemerom $d = 22$ mm.

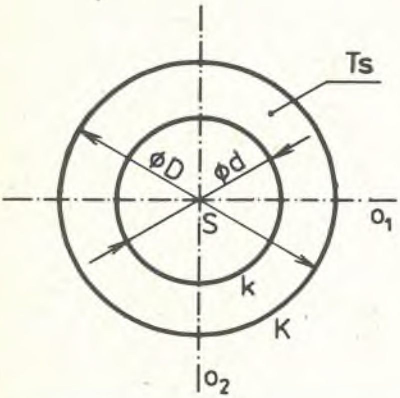
Návod

Všetky potrebné rozmery podložky sú v tabuľke. Pracujte podľa obrázkov na s. 171, kde sú už rozmery vyznačené. Najprv narysujte osi. Zostrojte štvorcový obrys a vyznačte kruhovú dieru. Obrys a dieru okótujte. Nakoniec doplňte hrúbku.

CVIČENIA

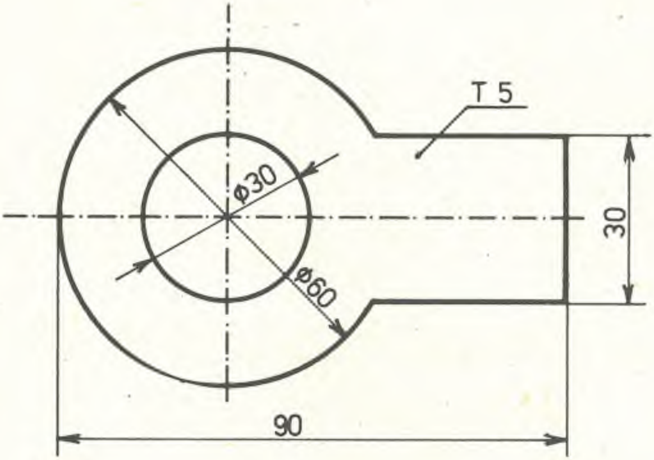
1. Narysujte technický výkres štvorhrannej podložky s kruhovou dierou s priemerom $d = 26$ mm. Chýbajúce rozmery podložky vyhľadajte v predchádzajúcej tabuľke na s. 171.

2. Podľa obrázka narysujte technický výkres podložky pre oceľové konštrukcie. Zvoľte si priemer diery $d = 30$ mm. Priemer vonkajšieho obrysu D a hrúbku s určite podľa nasledujúcej tabuľky.

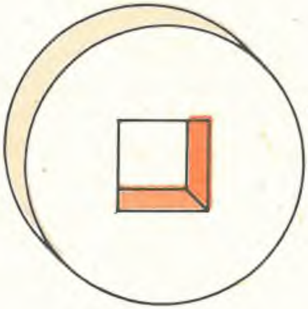


D	24	30	36	44	50	56
d	14	18	22	26	30	33
s	8	8	8	8	8	8

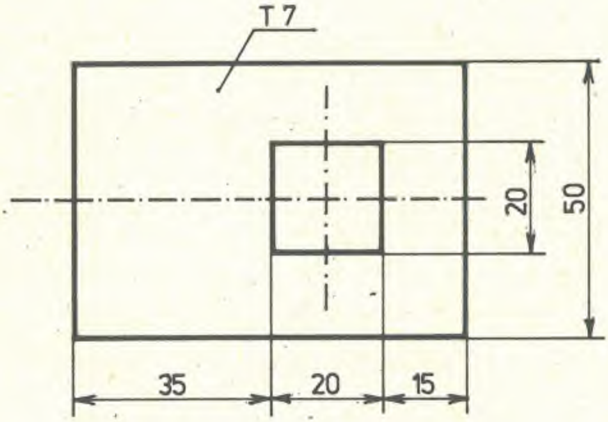
3. Narysujte podľa obrázka technický výkres poistnej podložky s jazýčkom.

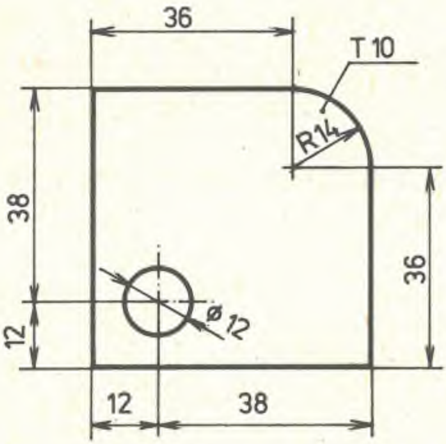


4. Na obrázku je znázornená kruhová podložka so štvorcovou dierou. Narysujte jej technický výkres, na ktorom nezabudnite vyznačiť zvislú a vodorovnú os. Priemer podložky je 58 mm, štvorcová diera má stranu dlhú 18 mm, hrúbka podložky je 5 mm.



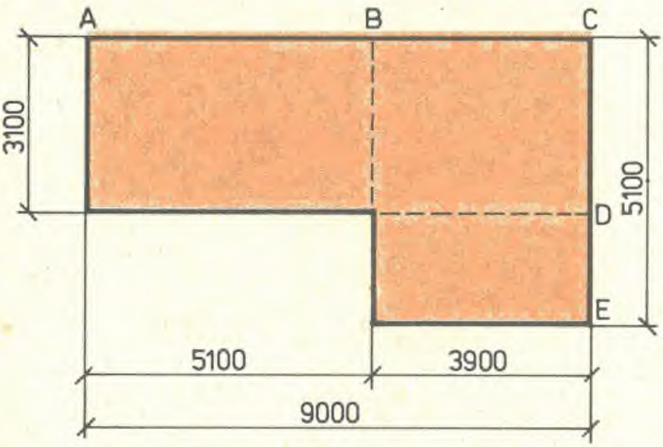
5. Narysujte a okótujte ploché súčiastky na nasledujúcich dvoch obrázkoch.





11.3 Kóty v stavebníctve

Pre kótovanie v stavebníctve platia rovnaké zásady ako pre kótovanie v strojníctve. Jediný rozdiel je v tom, že namiesto ohraničujúcich šípok sa používajú šikmé ohraničujúce úsečky (pozri obrázok), ktoré sú vzhľadom na kótovacie čiary sklonené pod uhlom 45° doprava.

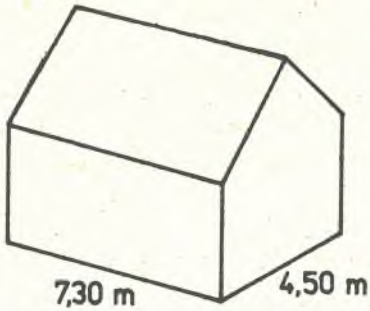


Podobne ako v strojníctve, aj v stavebníctve sa **kóty** uvádzajú **v milimetroch.** Pre stavebníctvo platí táto norma od 1. januára 1979. Predtým sa v stavebníctve kóty uvádzali v centimetroch. V stavebníctve sa najčastejšie zhotovujú výkresy stavebných situácií, ktoré majú väčšie rozmery než predmety zobrazované v strojníctve. Preto sa výkresy v stavebníctve zostrojujú vždy v zmenšení. Používať sa smú len mierky stanovené normami. Vy sa naučíte rysovať v mierke 1 : 100. Napríklad rozmery na výkrese z obrázka uvedeného vyššie určíme z nasledujúcej tabuľky:

1 : 100	Výkres (mm)	1	90	39	51	31
	Skutočnosť (mm)	100	9 000	3 900	5 100	3 100

CVIČENIE

1. Na obrázku je znázornený domček. Zastavaná výmera je obdĺžnik so stranami 7,30 m a 4,50 m. Narysujte v mierke 1 : 100 stavebný výkres zastavanej výmery (obdĺžnikový pôdorys domčeka). V akých jednotkách zapíšete kóty?



SÚHRNNÉ CVIČENIA IV

A

1. Narysujte aspoň tri rôzne rovnobežníky $KLMN$, ktorých strana KL má dĺžku 7 cm.

2. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, pre ktorý $|AB| = 5$ cm, $|BD| = 8$ cm, $\alpha = 40°$.

3. Zostrojte kosodĺžnik $ABCD$, ktorého uhlopriečky majú dĺžku 13 cm a 10 cm a strana AB má dĺžku 9 cm.

4. Zostrojte obdĺžnik $KLMN$, ktorého uhlopriečka KM má dĺžku 10 cm a uhlopriečky zvierajú uhol 75°.

5. Zostrojte kosoštvorec $ABCD$, ktorý má jeden vnútorný uhol s veľkosťou 60° a ktorého obvod je 20,8 cm.

6. Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, pre ktorý:
   a) $a = 4{,}5$ cm, $v_a = 10$ cm
   b) $b = 60$ cm, $v_b = 90$ cm
   c) $a = 0{,}4$ m, $v_a = 0{,}75$ m

7. Narysujte dva rovnobežníky $ABCD$, ktoré majú zhodnú stranu AB a rôzne obsahy.

8. Vypočítajte obsah kosoštvorca, ktorého obvod je 22 cm a výška 4,3 cm.

9. Obsah rovnobežníka $ABCD$ je 120 cm^2. Výška príslušná k strane a je 9,6 cm. Vypočítajte dĺžku strany a.

10. Jedna strana rovnobežníka má dĺžku 12 cm, čo je jedna pätina obvodu rovnobežníka. Vypočítajte obvod rovnobežníka a dĺžku jeho druhej strany.

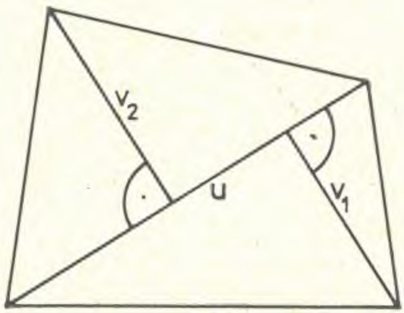
11. Vypočítajte pomocou kalkulačky obsah trojuholníka ABC:

a) $a = 0{,}8$ m, $v_a = 2{,}4$ m
b) $a = 12$ cm, $v_a = 0{,}08$ m
c) $b = 42$ mm, $v_b = 35$ mm
d) $c = 9{,}4$ cm, $v_c = 32$ mm

12. Trojuholník má obsah 480 cm^2 a výšku 20 cm. Vypočítajte dĺžku strany, ku ktorej prislúcha táto výška.

13. Vypočítajte výmeru parcely, ktorej plán je na obrázku. (Použite kalkulačku.)

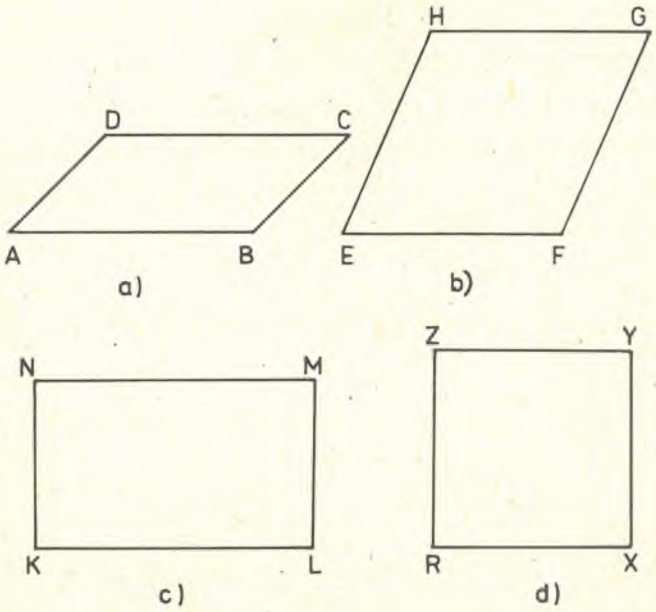
$u = 168$ m, $v_1 = 42{,}6$ m, $v_2 = 38{,}4$ m



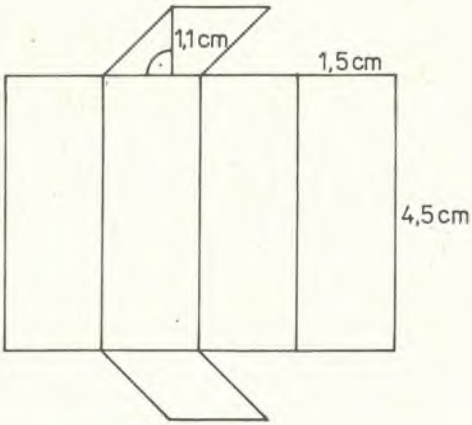
14. Vypočítajte objem a povrch kolmého trojbokého hranola, ktorý má výšku $v_h = 16$ cm. Podstava hranola je pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny majú dĺžku 8 cm a 15 cm a prepona má dĺžku 17 cm.

15. Na demonštračnom modeli hranola so štvorcovou podstavou odmerajte potrebné dĺžky a vypočítajte objem a povrch hranola.

16. Z útvarov na obrázkoch a) až d) vymenujte rovnobežníky,
a) ktoré majú zhodné uhlopriečky,
b) ktoré majú zhodné všetky strany,
c) ktorých uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú,
d) ktoré sú osovo súmerné,
e) ktoré majú zhodné všetky vnútorné uhly,
f) ktoré majú navzájom kolmé uhlopriečky.



17. Na obrázku je sieť hranola, ktorého podstava má tvar kosoštvorca. Vypočítajte objem a povrch tohto hranola. (Použite kalkulačku.)



18. Tabuľa plechu mala obsah 1,48 m^2. Odstrihli z nej pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny majú dĺžku 0,9 m a 0,64 m. Aký obsah mal zvyšok tabule?

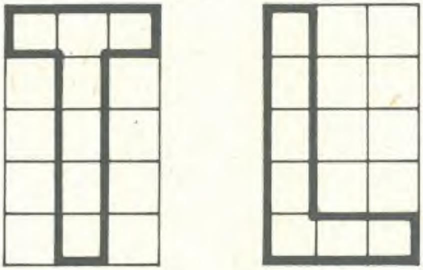
19. Použitím kalkulačky doplňte v tabuľke údaje o obsahu podstavy, obsahu plášťa, objeme a povrchu štvorbokého hranola, ktorého podstava má tvar štvorca:

a	v_h	S_p	S_{pl}	V	S
0,6 m	1,5 m				
38 cm	76 cm				
4,2 m	9,2 m				
6,5 cm	6,5 cm				
238 mm	156 mm				

20. Zberná nádrž na vodu má tvar kvádra, ktorého podstava je štvorec s dĺžkou strany $a = 1{,}2$ m. Hĺbka nádrže je 2,2 m. Voda siaha do výšky 1,6 m. Koľko percent objemu nádrže zaberá voda? (Použite kalkulačku, výsledok zaokrúhlite na celé percentá.)

21. Štvorcová doska s dĺžkou hrany $a = 80$ mm bola zaoblená v dvoch susedných rohoch kružnicovými oblúkmi s polomerom $r = 25$ mm. Hrúbka dosky je $s = 5$ mm. Narysujte výkres zaoblenej dosky a okótujte ho.

22. Z plechu hrubého 0,9 mm sa majú vystrihnúť písmená T a L s výškou 50 mm (pozri obrázok). Nakreslite a okótujte ich technický výkres.



a) b)

23. Narysujte technický výkres kruhovej podložky s priemerom 60 mm, v ktorej je štvorcová diera s dĺžkou strany $a = 20$ mm.

24. Pozemok zastavaný domom má tvar obdĺžnika, ktorého strany majú dĺžku 8,60 m a 5,40 m. Nakreslite a okótujte výkres tohto domu. Mierka 1 : 100.

B

1. Znázornite na číselnej osi nasledujúce čísla:

$\frac{3}{4}$, $-1\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, $-\frac{11}{3}$, $-\frac{2}{5}$, $2\frac{1}{8}$

2. Usporiadajte nasledujúce čísla od najmenšieho po najväčšie:

a) 27; $-1{,}2$; 0; 316,6; $-\frac{3}{4}$; 95; $-5\,000$; 1 988

b) 0,14; $\frac{257}{100}$; -39; -42; 0; 735; $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{7}{100}$

3. Vypočítajte spamäti:

a) $67 + 23$ b) $36 + 49$ c) $83 + 48$

d) $76 - 43$ e) $91 - 57$ f) $112 - 85$

g) $23 + 57 - 16$ h) $69 - 80 + 38$ i) $253 - 114 + 18$

4. Roku 1970 bolo v ČSSR 7 093 000 ha poľnohospodárskej pôdy, roku 1986 už len 6 786 000 ha. Koľko hektárov poľnohospodárskej pôdy ubudlo v ČSSR za roky 1970–1986?

5. ČSSR vyviezla r. 1986 do niektorých európskych kapitalistických krajín tovar v nasledujúcej hodnote: do Francúzska za 1 092 miliónov Kčs, do Holandska za 1 008 miliónov Kčs, do Nemeckej spolkovej republiky za 5 655 miliónov Kčs, do Rakúska za 2 857 miliónov Kčs, do Talianska za 1 200 miliónov Kčs a do Veľkej Británie za 1 269 miliónov Kčs. Vypočítajte celkovú hodnotu vývozu do uvedených kapitalistických krajín za rok 1986.

6. Vypočítajte spamäti:

a) $35 + (-14)$ b) $-25 + 17$ c) $-18 + (-35)$
d) $43 - (-43)$ e) $-15 - 56$ f) $106 - (+68)$
g) $17 + (36 - 19)$ h) $29 - (14 + 17)$ i) $-13 + (16 - 23)$

7. Na futbalový zápas predali 1 313 vstupeniek po 21 Kčs, 1 850 vstupeniek po 16 Kčs, 8 371 vstupeniek po 11 Kčs a 1 734 vstupeniek po 6 Kčs. Náklady na zápas boli 36 500 Kčs. Koľko korún pribudlo do pokladnice klubu?

8. Vypočítajte:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{5} - \frac{9}{10} - \left(\frac{5}{7} - \frac{3}{14}\right)$

c) $1\frac{5}{8} + \left(3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}\right)$

9. Vypočítajte:

a) $2,7 - 3 \,.\, \left(\frac{4}{7} + 1\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(\frac{5}{9} - \frac{1}{2}\right) . \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)$

c) $(2,7 - 3) \,.\, \left(\frac{4}{7} + 1\frac{1}{2}\right)$

10. Ktoré z čísel 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310 sú zložené čísla a ktoré sú prvočísla?

11. Napíšte opačné čísla a potom prevrátené čísla k číslam

$2, \frac{1}{3}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, -6, -1.$

12. Vypočítajte:

a) $7 : \frac{2}{3}$ b) $\left(-2\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{4}{11}\right)$ c) $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) : \frac{1}{4}$

13. Kváder má objem $V = 56\ \text{cm}^3$. Rozmery kvádra vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Nájdite aspoň tri možnosti pre rozmery kvádra.

14. Upravte zložený zlomok na zlomok v základnom tvare:

a) $\dfrac{\frac{1}{6} + \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} - \frac{5}{12}}$ b) $\dfrac{3 - \frac{2}{7}}{\frac{9}{11} - 6}$

15. Obdĺžnik so stranami, ktorých dĺžky sú
a) 24 cm a 32 cm, b) 63 cm a 91 cm, c) 64 cm a 96 cm,
treba rozdeliť na čo najmenší počet zhodných štvorcov. Vypočítajte dĺžky strán týchto štvorcov aj počet týchto štvorcov.

16. Riešte rovnicu:

a) $\frac{3}{5} + x = \frac{19}{15}$ b) $\frac{1}{2} - x = \frac{11}{14}$

17. Riešte rovnicu:

a) $5 \cdot x + 7 = 8$ b) $6 \cdot x + 1 = \frac{7}{4}$

18. Zistite, ktoré prirodzené čísla sú riešením nerovnice:

a) $1\frac{2}{5} + x < 5$ b) $x + \frac{1}{3} > \frac{17}{6}$

19. a) Doplňte závery matematických viet:
V1: Keď má trojuholník ABC zhodné strany a, b, potom ...

V2: Keď má trojuholník ABC dva vnútorné uhly s veľkosťou $60°$, potom ...
V3: Keď sú obe čísla a, b párne, potom ...
(*Návod:* Uvažujte, čo môže platiť o súčte alebo súčine týchto čísel.)
V4: Keď sú čísla a, b nesúdeliteľné, potom ...
(*Návod:* Uvažujte, čo môžeme povedať o najväčšom spoločnom deliteli alebo o najmenšom spoločnom násobku týchto čísel.)

b) Doplňte predpoklady matematických viet:
V5: ..., potom štvoruholník $ABCD$ je štvorec.
V6: ..., potom trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB.
V7: ..., potom najväčším spoločným deliteľom čísel a, b je samo číslo b.
V8: ..., potom je číslo a deliteľné štyrmi.
(*Návod:* Uvedomte si znak deliteľnosti štyrmi.)

---

20. Súrodenci Jurko a Ferko chodia spolu do školy. Z domu do školy je 1 200 m. Jurko urobí na tejto trase 2 000 krokov, Ferko dokonca 2 500.

a) Aké dlhé kroky robia? Dĺžky krokov vyjadrite v centimetroch.
b) Koľkokrát súčasne došliapnu jednou nohou (rovnakou alebo rôznou), ak idú rovnako rýchlo?
c) Koľkokrát súčasne došliapnu ľavou nohou? (Vyšli súčasne ľavou nohou.)

---

21. V predajni potravín zložili 350 kusov chleba, čo bolo $\frac{7}{9}$ celého nákladu auta. Koľko kusov chleba bolo uložených na aute?

---

22. Dĺžka zemskej osi je 1 713,13 zemepisných míľ. Koľko je to kilometrov, keď jedna zemepisná míľa je $7\frac{2}{5}$ km?

23. V triede bolo $\frac{5}{8}$ chlapcov, z nich bola $\frac{1}{5}$ vyznamenaných. Akú časť z počtu všetkých žiakov triedy tvorili vyznamenaní chlapci? Koľko to bolo percent?

24. Tri skupiny brigádnikov zberali zemiaky. Prvá z nich nazberala $\frac{3}{8}$, druhá $\frac{1}{3}$, tretia $\frac{7}{24}$ z celkového množstva nazberaných zemiakov. Ktorá skupina nazberala najviac a ktorá najmenej zemiakov? Koľko percent z celkového množstva nazberaných zemiakov nazberali jednotlivé skupiny brigádnikov?

25. Pracovná čata vykopala prvý deň $\frac{1}{4}$ kanála, druhý deň $\frac{1}{2}$ zvyšku. Akú časť kanála zostalo ešte vykopať pracovnej čate?

26. Na veľkom vojenskom cvičení sa zúčastnilo 17 000 vojakov. Na cvičení pôsobili proti sebe dve skupiny, z ktorých prvú tvorilo 48,5 % z počtu všetkých účastníkov cvičenia a druhú tvorili ostatní účastníci.

a) Koľko percent cvičiacich vojakov bolo v druhej skupine?
b) Koľko vojakov bolo v prvej a koľko v druhej skupine?

27. Zdravotnícke orgány zaznamenali 21 372 prípadov rakoviny pľúc. Z tohto počtu bolo 4,6 % nefajčiarov.

a) Koľko percent prípadov pľúcnej rakoviny z uvedeného počtu tvorili fajčiari?

b) Koľko to bolo prípadov?

c) Koľkokrát viac fajčiarov ako nefajčiarov bolo v uvedených záznamoch?

(Použite kalkulačku.)

28. R. 1980 uniklo v ČSSR do ovzdušia 3,1 milióna ton zlúčenín síry. Do r. 1995 sa má množstvo takýchto zlúčenín v ovzduší znížiť na 2,17 milióna ton ročne.

a) O koľko ton, b) o koľko percent klesne tak ročné množstvo zlúčenín síry v ovzduší?

29. Baníci mali ročný plán ťažby 22,5 milióna ton uhlia. Vyťažili o 220 tisíc ton viac. O koľko percent prekročili plán?

30. V jednom JRD majú 760 ha lúk, čo je 32 % rozlohy poľnohospodárskej pôdy družstva. V druhom JRD majú 825 ha lúk, čo je 30 % rozlohy ich poľnohospodárskej pôdy.

a) Vypočítajte výmeru z_1 a z_2 poľnohospodárskej pôdy v jednom a v druhom JRD.

b) Vypočítajte podiel $z_2 : z_1$.

c) Vypočítajte podiel $\frac{30}{100} \cdot z_2 : \frac{32}{100} \cdot z_1$.

(Použite kalkulačku.)

31. Narysujte uhol XAY; $|\sphericalangle XAY| = 65°$. Na polpriamke AX zostrojte bod B tak, že $|AB| = 5$ cm. Zostrojte polpriamku BU, ktorá zviera s polpriamkou AY uhol s veľkosťou 70°. Označte: $C = \mapsto AY \cap \mapsto BU$. Zistite veľkosť uhla ABC meraním aj výpočtom.

32. V trojuholníku má jeden vnútorný uhol veľkosť 52°17′. Druhý uhol je o 15°48′ väčší. Vypočítajte veľkosť tretieho vnútorného uhla.

33. Narysujte štvorec $ABCD$, ktorého strana má dĺžku 5 cm. Stred strany BC označte S. Zostrojte obraz štvorca v stredovej súmernosti so stredom S.

34. Zistite, či možno zostrojiť trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžky $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$:

a) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8{,}5$ cm
b) $a = 44$ mm, $b = 26$ mm, $c = 17$ mm
c) $a = 11$ m, $b = 17{,}5$ m, $c = 19$ m
d) $a = 1{,}2$ m, $b = 7$ dm, $c = 56$ cm

35. Narysujte tupouhlý trojuholník. Zostrojte jeho výšky. Presvedčte sa, že výšky ležia na priamkach, ktoré prechádzajú jedným bodom.

36. V rovnoramennom trojuholníku ABC $|AB| = 3{,}6$ cm, $|AC| = |BC| = 6$ cm. Zostrojte stredné priečky MN, NP, PM trojuholníka ABC. Odmerajte i vypočítajte dĺžky stredných priečok. Má trojuholník MNP nejaké osobitné vlastnosti?

37. V rovnobežníku $ABCD$ $a = |AB| = 5$ cm, $b = |BC| = 3{,}5$ cm, $\alpha = |\sphericalangle BAD| = 70°$. Graficky aj výpočtom určite uhol CBA a zostrojte rovnobežník.

38. Zostrojte pravidelný šesťuholník vpísaný do kružnice s polomerom 2,8 cm.
a) Určite dĺžku strany šesťuholníka.
b) Zostrojte ľubovoľnú priamku, ktorá má od stredu šesťuholníka vzdialenosť 2,8 cm. Koľko bodov spoločných so šesťuholníkom môže mať priamka?

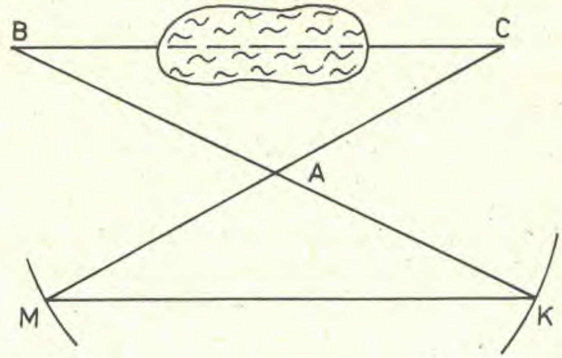
39. Vyznačte v štvorcovej sieti body $A\,[4, 1]$, $B\,[8, 3]$, $C\,[5, 6]$. Narysujte rovnobežník $ABCD$. Napíšte súradnice vrcholu D.

40. Zostrojte kosodĺžnik $ABCD$: $a = 4{,}6$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 50°$. Narysujte obraz kosodĺžnika v osovej súmernosti s osou BD.

41. Narysujte rovnostranný trojuholník KLM; $|KL| = 35$ mm. Zostrojte trojuholník $K'L'M'$ súmerne združený s trojuholníkom KLM podľa osi KX, keď pre bod X platí: $X \in LM$, $|LX| =$ $= 1$ cm.

42. Je daná úsečka AB, $|AB| = 6{,}5$ cm. Na úsečke AB vyznačte úsečku AC tak, aby platilo: $|AC| = \frac{3}{4}|AB|$.

43. Medzi miestami B a C je v teréne prekážka, takže vzdialenosť miest B a C nemožno určiť priamym meraním. Obrázok naznačuje postup, ako možno tento nedostatok prekonať. Stanovište A je zvolené tak, aby sa mohli priamo odmerať vzdialenosti AB a AC. Uveďte podľa obrázka postup prác pri zisťovaní vzdialenosti miest B a C.



44. Dĺžky strán trojuholníka KLM merané v centimetroch sú vyjadrené celými číslami. Súčet dĺžok dvoch strán je 16 cm, tretia strana má dĺžku 12 cm. Určite dĺžky prvých dvoch strán. Nájdite všetky možnosti.

45. Narysujte

a) sieť kocky, ktorej hrana má dĺžku 4 cm,

b) sieť kvádra, ktorý má rozmery 3 cm, 4 cm a 5 cm.

46. a) Z obdĺžnika, ktorého strany majú dĺžky a = 21 cm, b = = 15 cm, sa odstrihnú v rohoch štyri štvorce, ktorých strana má dĺžku x = 4 cm. (Načrtnite si obrázok.) Z útvaru, ktorý tak vznikne, sa zlepí škatuľka bez veka. Vnútro škatuľky sa má oblepiť farebným papierom. Koľko štvorcových centimetrov farebného papiera sa na to spotrebuje?

b) Urobte skúšku. Spotrebu papiera vypočítajte iným spôsobom.

47. Prvá kocka má hranu, ktorej dĺžka je 20 cm, druhá kocka má hranu o 10 % dlhšiu.

a) O koľko percent má druhá kocka väčší objem než prvá kocka?

b) O koľko percent má druhá kocka väčší povrch než prvá kocka?

c) Výpočet zopakujte pre prípad, keď prvá kocka má hranu s dĺžkou 50 cm a druhá kocka má hranu o 10 % dlhšiu. Zmení sa oproti prípadom a), b) počet percent, o ktoré sa zväčší objem (povrch) druhej kocky v porovnaní s objemom (povrchom) prvej kocky?

(Použite kalkulačku.)

48. Korba nákladného auta má tvar kvádra s rozmermi 4 m, 2,2 m a 0,8 m. Pri doprave piesku je objem korby naplnený na 85 %. Koľko kubických metrov piesku naberie auto na jeden raz?

49. Do zásobníka tvaru kvádra s rozmermi 2,4 m, 1,8 m a 2,5 m nasypali 6,5 m^3 materiálu. Koľko percent objemu zásobníka je nevyužitých?

50. Drevený kvetináč má tvar kvádra s vonkajšími rozmermi 75 cm (dĺžka), 15 cm (šírka) a 15 cm (výška). Koľko kilogramov farby treba na natretie jeho vonkajších stien, keď 1 kg farby stačí na natretie 6 m^2?

Výsledky cvičení

7. Trojuholník

7.1 Vnútorné a vonkajšie uhly trojuholníka

1. Susedný 112°, vrcholový 68°.
3. a) 135°, 110°, 115°; b) 84°, 132°, 144°; c) 141°44′, 55°07′, 163°09′
4. a) 70°, 30°, 80°; b) 98°, 33°28′, 40°32′
5. Pravouhlý.
6. a) 117°30′; b) $2\alpha = 125° > \beta = 117°30'$

7.2 Súčet vnútorných uhlov trojuholníka

1. a) 99° (tupouhlý); b) 86°42′ (ostrouhlý); c) 90° (pravouhlý); d) 26°43′ (tupouhlý).
2. a) Áno; b) nie; c) nie; d) áno.
3. a) 38°30′, 75°15′, 66°15′; b) 102°40′, 41°40′, 35°40′; c) 70°17′, 49°38′, 60°05′
4. a) $\beta = 84°$; b) $\alpha = 50°$
5. $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle DSC| = 132°$, $|\sphericalangle ASD| = 48°$, $|\sphericalangle ABS| = 8°$, $|\sphericalangle BCS| = 100°$, $|\sphericalangle CDS| = 21°$, $|\sphericalangle DAS| = 39°$

7.3 Rovnoramenný trojuholník

1. a) 19,1 cm; b) 10,4 > 8,7; 13,9 > 5,2
2. a) 41 cm; b) 35 cm; c) nemá riešenie; d) nemá riešenie.
3. a) 42°, 96° (tupouhlý); b) 58°35′, 62°50′; c) 70°05′, 39°50′
4. a) 30°, 70°, 50°; b) ani jeden.
5. 400 m

7.4 Rovnostranný trojuholník

1. 120°, 120°, 120°
4. Rovnoramenný, nie však rovnostranný.

7.5 Stredné priečky trojuholníka

1. Dĺžky strán všetkých štyroch trojuholníkov 3 cm, 3 cm, 2 cm.
2. 22 cm, 11 cm
3. Všetky.
4. Napríklad *SR* a *PQ* sú stredné priečky trojuholníkov *KMN* a *KML*. Preto sú rovnobežné s *KM*, a teda aj navzájom.

7.6 Ťažnice trojuholníka

1. Ťažisko.
2. Vzdialenosť ťažiska od stredu strany sa rovná tretine dĺžky príslušnej ťažnice.
3. Všetky vrcholy.

7.7 Výšky trojuholníka

2. Sú zhodné. Vyplýva to zo súmernosti trojuholníka podľa osi jeho základne.
3. Sú zhodné.
5. Môžu byť zhodné len pre niektoré špeciálne štvoruholníky.
6. Sú zhodné.

7.8 Konštrukcie trojuholníkov *sss, sus, usu*

1. c) Nemá riešenie.
2. Rovnoramenný.
3. Asi 110 m.
5. a) 40°; b) 76°
6. $s \doteq 20$ m, $m \doteq 1{,}6$ t
7. Má dĺžky strán: 4 cm, 5 cm, 6 cm.

7.9 Kružnica opísaná trojuholníku a kružnica vpísaná do trojuholníka

2. Na najdlhšej strane (prepone).
3. $r = 2$ cm
4. b) V strede kružnice opísanej trojuholníku.

9. Percentá

9.1 Percento

1. 3,2; 63,5; 150; 0,02; 8,935; 0,4725; 0,003; 0,1901
2. 6 cm; 3,75 Kčs; 12,1 kg; 0,95 l; 0,125 m^3; 0,006 km^2; 0,0112 hl
3. a) $\frac{23}{500}$; b) $\frac{7}{1\,000}$; c) $\frac{3}{400}$; d) $\frac{1}{40}$; e) $\frac{1}{300}$; f) $\frac{11}{2\,100}$
4. a) 7,39; b) 0,542; c) 0,0012; d) 1,15 kg; e) 16,09 m; f) 0,26 hl; g) 258 Kčs; h) 400 km

9.2 Základ, počet percent, hodnota príslušná k počtu percent

1. 0,18; 5; 4,5; 40; 12; 48; 54; 150; 63; 0,052; 112; 24,6; $\frac{5}{4}$; 20; 10; 150

2.

2,56	0,148	1,95 km	0,0012 t	0,0372 m^3
25,6	1,48	19,5 km	0,012 t	0,372 m^3
64	3,7	48,75 km	0,03 t	0,93 m^3
102,4	5,92	78 km	0,048 t	1,488 m^3
128	7,4	97,5 km	0,06 t	1,86 m^3
179,2	10,36	136,5 km	0,084 t	2,604 m^3
192	11,1	146,25 km	0,09 t	2,79 m^3
230,4	13,32	175,5 km	0,108 t	3,348 m^3
256	14,8	195 km	0,12 t	3,72 m^3
512	29,6	390 km	0,24 t	7,44 m^3
896	51,8	682,5 km	0,42 t	13,02 m^3

3. a), b) – 50 %; c) až e) – 25 %; f), g) – 75 %; h) – 30 %; i) – 20 %; j) – 40 %
4. 1 340 Kčs
5. A: b), f); B: a), c), d), e); C: a), b), e), f); D: d)

9.3 Výpočet hodnoty príslušnej k počtu percent

1. a) 54; b) 596,4; c) 11,34; d) 52; e) 2,044; f) 140,07; g) 0,032 04; h) 1,908
2. a) 57,6 Kčs; b) 36,96 t; c) 3,22 km^2; d) 15 m; e) 3 145 l; f) 3,312 m^3; g) 2 hodiny 18 minút 36 sekúnd; h) 280 kg
3. a) 6,613; b) 2 276,586; c) 11 342,43; d) 38,324; e) 738,72 Kčs; f) 1,7457 l; g) 7,944 99 dm^3; h) 16,224 kg
4. a) 25; b) 250; c) 600; d) 1 500; e) 480 l; f) 540 kg; g) 300 km; h) 1 250 hl
5. Elena 76, Oľga a Juraj 72, Peter a Viera 68.

9.4 Výpočet počtu percent

1. a) 70; b) 40; c) 7; d) 56; e) 60; f) 78; g) 150; h) 326
2. a) 3; b) 14; c) 16; d) 132; e) 47; f) 26; g) 6; h) 204
3. a) 72; b) 53; c) 83; d) 402; e) 14; f) 42; g) 65; h) 4 420
4. O 25 %

9.5 Výpočet základu

1. a) 250; b) 1 240; c) 52 000; d) 230; e) 365; f) 4 820; g) 0,59; h) 0,28
2. a) 3 100 Kčs; b) 7 000 m^2; c) 25 hl; d) 31 500 t; e) 6 280 cm; f) 17,5 milióna; g) 77 kg; h) 8 200 km
3. 320 Kčs; 600 kg; 340 dm; 14 m^3; 455 t; 33,2 ha; 1 340 Kčs; 96 hl; 569 km; 17 000 m^2; 5 000 l; 2,5 milióna; 30,5 km^2; 8 000 párov; 22,5 dl; 1 700

9.7 Slovné úlohy

1. 224 Kčs
2. 44 %
3. 150-krát
4. Rodina Nováková 5 000 Kčs, rodina Poláková 5 714 Kčs.
5. O 9 %
6. 208 000
7. 3 722 Kčs
8. 1 700 g
9. 4,87 %; 32,18 %
10. 31 %
11. 34 %
12. 29,2 %
13. 1,2 %; $\frac{1}{82} \doteq \frac{1}{80}$
14. O 13,25 %
15. 4 315 Kčs
16. 8,6 %
17. 19 932 kníh
18. 35 %
19. 915 tisíc
20. Robotníci – 48,1 %, ostatní zamestnanci – 40,6 %, družstevní roľníci – 8,7 %, ostatní – 2,6 %.
21. O $16,\overline{6}$ %
22. Prvé družstvo 57 %, druhé družstvo 52 %.
23. 52 %

SÚHRNNÉ CVIČENIA III

A

1. a) 60 m; b) 8,2 kg; c) 70 Kčs; d) 10 ha; e) 45 m^3; f) 26 t
2. a) 42 Kčs; b) 448 m^2; c) 35,52 kg; d) 1,782 ha; e) 0,0315 m^2; f) 0,711 hl

3. a) 50 %; b) 10 %; c) 25 %; d) 2 %; e) 4,2 %; f) 10 000 %
4. a) 6 %; b) 70 %; c) 8 %; d) $33,\overline{3}$ %; e) $23,\overline{3}$ %; f) 769,2 %
5. 40 %
6. a) 78; b) 142; c) 48 m^2; d) 64; e) 75 km; f) 9 t
7. a) $666,\overline{6}$; b) 371,8 kg; c) 373,9 ha; d) 456,5; e) 14,25 m^3; f) 419,35 Kčs
8. 62 500 t až 71 429 t
9. 1964: 0,36 %; 1987: 0,6 %; rozdiel: 0,24 %; podiel: $1,\overline{6} = \frac{5}{3}$.
10. O 70,46 %
11. 500 miliónov rokov
12. 102 %
13. Podiel má hodnotu 2; nezávisí od výberu strany.
14. a) Áno; b) áno; c) áno; d) áno; e) áno; f) nie.
15. $\gamma = 41°$; b) 78°30'; c) 36°45'

B

1. a) 0,3; 2,8; 2,75; 0,45; 0,625; 3,031 25
   b) $\frac{7}{10}, \frac{9}{20}, \frac{1}{8}, \frac{89}{50}, \frac{54}{25}, \frac{13}{4}, -\frac{23}{4}$
   c) 6, 2, 3, 36, 6, 3
2. $-\frac{1}{3} < -0,3 < \frac{2}{9} < 0,25 < \frac{5}{7} < 0,8$
3. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{22}{15}$; c) $\frac{11}{21}$; d) $\frac{9}{40}$; e) $-\frac{8}{9}$
4. a) $\frac{7}{2}, \frac{9}{4}, \frac{8}{5}, -2, \frac{32}{9}$
   b) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{21}, \frac{15}{16}, \frac{22}{15}$
   c) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}$

5. a) $\frac{8}{15}, \frac{21}{20}, \frac{45}{22}, \frac{9}{20}, \frac{9}{7}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{10}{7}, \frac{15}{16}, \frac{10}{11}, \frac{28}{45}$

6. 4 800 Kčs
7. 50 km
8. 900 l
9. 80
10. Nie; spotreboval 65 % zásoby benzínu na 60 % dĺžky cesty.
11. 15 míľ
12. a) dm^2, mm^2, cm^2, ha, km^2, cm^2; b) mm, m, mm, m, m, dm
14. a) *BNA;* b) približne 8 m.
15. a) Opačné čísla.
16. Uhol zhodný s α; vrcholové uhly.
17. Obsah: obdĺžnik 428,75 m^2, štvorec 462,25 m^2; obvod: obdĺžnik 84 m, štvorec 86 m.
18. 111 m^2
19. a) 4; b) 4; c) 4
20. a) 13,8 m; b) 10,58 m^2

24.

n	5	6	4	7	10	3
v	10	12	8	14	20	6
h	15	18	12	21	30	9
s	7	8	6	9	12	5

10. Rovnobežníky, hranoly

10.1 Rovnobežníky

6. a) 77°, 103°; b) 107°48′, 72°12′; c) 23°40′, 156°20′

10.2 Konštrukcie rovnobežníka

5. o = 290 mm, S = 5 200 mm^2

10.3 Obsah rovnobežníka, obsah trojuholníka

1. a) 1,92 m, 0,192 m^2; b) 126 cm, 720 cm^2; c) 22,8 cm, 23,1 cm^2
2. 39,2 cm, 58,8 cm^2
3. 9 750 cm^2
4. 6,5 cm
5. 42,16 cm^2
6. 11 730 m^2
7. a) 13 m^2; b) 12,04 cm^2; c) 588 mm^2

10.4 Hranol. Povrch a objem hranola

1. $V = 75\ cm^3$, $S = 132{,}5\ cm^2$
2. $V = 450\ cm^3$, $S = 510\ cm^2$
3. $V = 220{,}8\ cm^3$, $S = 247{,}2\ cm^2$
5. 36 hl
6. 4 plechovky
7. 6,591 $m^3 \doteq 6{,}6\ m^3$
8. 4 osoby
9. 9,24 m^3

11. Kótovanie

11.1 Základy kótovania v strojníctve

3. a) Päťkoruna: 26 mm, 1,8 mm; dvojkoruna: 24 mm, 1,75 mm; koruna: 23 mm, 1,5 mm; päťdesiathaliernik: 20,5 mm, 1,3 mm; dvadsaťhaliernik: 19,5 mm, 1,2 mm; desaťhaliernik: 18 mm, 1,55 mm

SÚHRNNÉ CVIČENIA IV

A

6. a) 45 cm^2; b) 5 400 cm^2; c) 0,3 m^2
8. 23,65 cm^2
9. 12,5 cm
10. Obvod 60 cm, druhá strana 18 cm.
11. a) 0,96 m^2; b) 48 cm^2; c) 735 mm^2; d) 15,04 cm^2
12. 48 cm
13. 6 804 m^2
14. Objem 960 cm^3, povrch 760 cm^2.
16. a) obdĺžnik, štvorec, b) kosoštvorec, štvorec; c) všetky; d) kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec; e) obdĺžnik, štvorec; f) kosoštvorec, štvorec.
18. 1,192 m^2
19.

a	v_h	S_p	S_{pl}	V	S
0,6 m	1,5 m	0,36 m^2	3,6 m^2	0,54 m^3	4,32 m^2
38 cm	76 cm	1 444 cm^2	11 552 cm^2	109 744 cm^3	14 440 cm^2
4,2 m	9,2 m	17,64 m^2	154,56 m^2	162,288 m^3	189,84 m^2
6,5 cm	6,5 cm	42,25 cm^2	169 cm^2	274,625 cm^3	253,5 cm^2
238 mm	156 mm	56 644 mm^2	148 512 mm^2	8 836 464 mm^3	261 800 mm^2

20. 73 %

B

2. a) $-5\,000 < -1{,}2 < -\frac{3}{4} < 0 < 27 < 95 < 316{,}6 < 1\,988$
3. a) 90; b) 85; c) 131; d) 33; e) 34; f) 27; g) 64; h) 27; i) 157
4. 307 000 ha
5. 13 081 miliónov Kčs
6. a) 21; b) -8; c) -53; d) 86; e) -71; f) 38; g) 34; h) -2; i) -20
7. 123 158 Kčs

8. a) $\frac{15}{8}$; b) $-\frac{6}{5}$; c) $2\frac{3}{8}$

9. a) $-3\frac{18}{35}$; b) $\frac{2}{27}$; c) $-\frac{87}{140}$

10. Prvočíslo 307, ostatné zložené.

11. $-2, -\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{7}{4}, 6, 1, \frac{1}{2}, 3, -\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{1}{6}, -1$

12. a) $\frac{21}{2}$; b) $\frac{121}{20}$; c) 6

13. Rozmery v cm: 1, 1, 56; 1, 2, 28; 1, 4, 14; 1, 7, 8; 2, 2, 14; 2, 4, 7

14. a) $\frac{11}{3}$; b) $\frac{11}{21}$

15. a – dĺžka strany štvorca, n – počet štvorcov:
a) $a = 8$ cm, $n = 12$; b) $a = 7$ cm, $n = 117$; c) $a = 32$ cm, $n = 6$

16. a) $x = \frac{2}{3}$; b) $x = -\frac{2}{7}$

17. a) $x = \frac{1}{5}$; b) $x = \frac{1}{8}$

18. a) $x < 3\frac{3}{5}$; b) $x > \frac{5}{2}$

19. a) V1: ... $\alpha = \beta$.
V2: ... tretí vnútorný uhol má veľkosť 60°.
V3: ... súčet, rozdiel a súčin čísel a, b je párne číslo.
V4: ... najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je 1, najmenší spoločný násobok čísel a, b je číslo $a \, . \, b$.
b) V5: Keď má štvoruholník $ABCD$ všetky štyri strany navzájom zhodné a jeden vnútorný uhol pravý, ...
V6: Keď v trojuholníku ABC uhol α sa rovná uhlu β, ...
V7: Keď je číslo b deliteľom čísla a, ...
V8: Keď je posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi, ...

20. a) Jurko 60 cm, Ferko 48 cm; b) 500 ráz; c) 250 ráz.

21. 450

22. 12 677,162 km

23. $\frac{1}{8}$; 12,5 %

24. Najviac prvá, najmenej tretia; 37,5 %, $33,\overline{3}$ %, 29,2 %

25. $\frac{3}{8}$

26. 51,5 %; 8 245, 8 755

27. a) 95,4 %; b) 20 389; c) 20,74-krát

28. a) O 930 tisíc ton; b) o 30 %.

29. O 1 %

30. a) 2 375 ha, 2 750 ha; b) 1,158; c) 1,086

31. $45°$

32. $59°38'$

34. a) Áno; b) nie; c) áno; d) áno.

36. $|MN| = 1{,}8$ cm, $|NP| = |PM| = 3$ cm; trojuholník *MNP* je rovnoramenný.

37. $|\sphericalangle CBA| = 110°$

38. a) $a = 2{,}8$ cm; b) najviac jeden.

39. $D\,[9, 8]$

44. Dĺžka v cm: 3, 13; 4, 12; 5, 11; 6, 10; 7, 9; 8, 8

46. 251 cm^2.

47. a) O 33,1 %; b) o 21 %; c) nezmení sa.

48. Zaokrúhlene 6 m^3.

49. Zaokrúhlene 40 %.

50. 0,064 kg

Zoznam značiek používaných v učebnici

Aritmetika

$\doteq$	rovná sa približne, alebo rovná sa po zaokrúhlení
$a \doteq b$	číslo a sa rovná po zaokrúhlení číslu b
$a > b$	číslo a je väčšie ako číslo b
$a \geqq b$	číslo a je väčšie ako číslo b alebo rovná sa číslu b
$a < b$	číslo a je menšie ako číslo b
$a \leqq b$	číslo a je menšie ako číslo b alebo rovná sa číslu b
$a \in A$	a je prvkom množiny A
$b \notin B$	b nie je prvkom množiny B
$\{a, b, c, \ldots\}$	množina obsahujúca prvky $a, b, c, \ldots$
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$C \cap D$	prienik množín C a D
$C \cup D$	zjednotenie množín C a D
$\emptyset$	prázdna množina
$n(a, b)$	najmenší spoločný násobok čísel a, b
$D(a, b)$	najväčší spoločný deliteľ čísel a, b
%	percento
‰	promile

Geometria

$\leftrightarrow AB$	priamka AB
$\mapsto AB$	polpriamka AB
$A \in a$	bod A leží na priamke a
$B \in k$	bod B leží na kružnici k
$a \parallel b$	priamka a je rovnobežná s priamkou b
$a \perp b$	priamka a je kolmá na priamku b

$a \cap b$	prienik priamok a, b
$a \cap b = \{S\}$	prienik priamok a, b je množina $\{S\}$, priesečník priamok a, b je bod S
$k\,(S;\,r)$	kružnica k so stredom S a polomerom r
$h\,(O;\,52\ \mathrm{mm})$	kružnica h so stredom O a polomerom 52 mm
$k \cap h$	prienik kružníc k, h
AB	úsečka AB
$\lvert AB \rvert$	dĺžka úsečky AB
$\lvert AB \rvert = 3\ \mathrm{cm}$	dĺžka úsečky AB je 3 cm
$AB \cong CD$	úsečka AB je zhodná s úsečkou CD
$\lvert AB \rvert > \lvert CD \rvert$	dĺžka úsečky AB je väčšia ako dĺžka úsečky CD
$AB > CD$	úsečka AB je väčšia ako úsečka CD
$\sphericalangle AVB$	uhol AVB (ktorý nie je väčší ako priamy uhol)
$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$	uhol AVB je zhodný s uhlom CUD
$\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD$	uhol AVB je väčší ako uhol CUD
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	veľkosť uhla AVB
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert = \alpha = 20^\circ$	veľkosť uhla AVB sa rovná α, rovná sa 20°
$\triangle ABC$	trojuholník ABC
$\mathbf{S}(S)$	stredová súmernosť so stredom S
$\mathbf{O}(o)$	osová súmernosť s osou o
$A \rightarrow B$	obrazom bodu A je bod B
$\alpha \rightarrow \beta$	obrazom uhla α je uhol β
o	obvod rovinného útvaru
S	obsah rovinného útvaru, povrch telesa
S_p	obsah podstavy
S_{pl}	obsah plášťa
V	objem telesa
$A\,[m,\,n]$	bod A so súradnicami m, n

JÁN ČIŽMÁR
ĽUDOVÍT HRDINA
MILAN KOMAN
DANIELA ŘEBÍČKOVÁ
FRANTIŠEK ZAPLETAL

Matematika

pre 6. ročník základnej školy

II. diel

1. vydanie

Vydalo
Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave

Zodpovedná redaktorka Edita Poláková
Výtvarná redaktorka Marta Pavlíková
Technická redaktorka Miroslava Smižanská
Obálku navrhol a graficky upravil Igor Imro

Vytlačili Nitrianske tlačiarne, z. p., Nitra – 10/24 – Strán 208 – AH 9,12 (text 5,40, grafika 3,72) – VH 10,62 – Sádzané fotosadzbou z písma Times – Technika tlače ofset – Náklad 120 000 – Schválené výmerom SÚKK-GR č. 1562/I-88

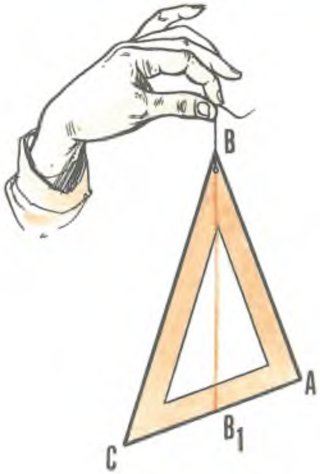
ISBN 80–08–00096–1
Kčs 9,– b.

ZÁZNAM O POUŽITÍ UČEBNICE

Por. číslo	Meno žiaka	Škol. rok	Stav učebnice	
			na zač. šk. r.	na kon. šk. r.
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Matematika
pre 6. ročník základnej školy
II. diel

Skl. č. 1 – 11 – 698
10/24
Kčs 9,– b.



ISBN 80–08–00096–1