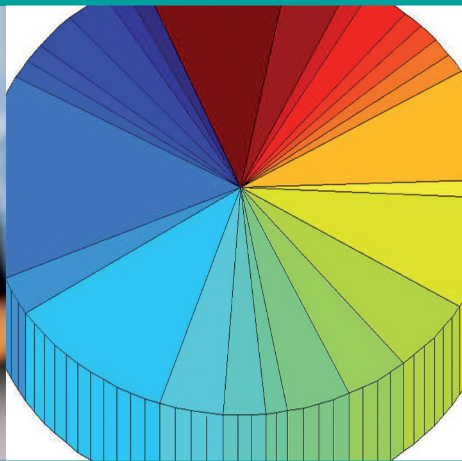
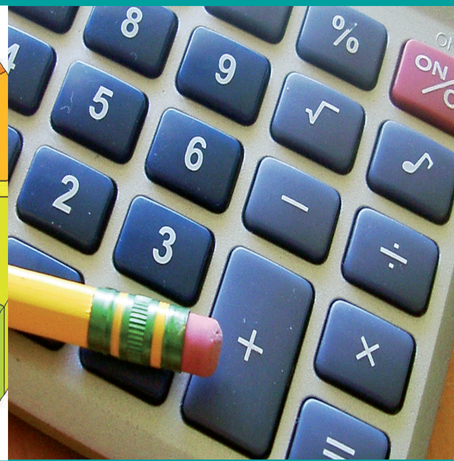
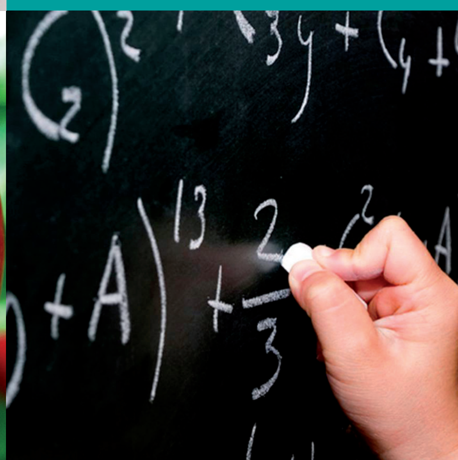
pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom


mate-matika

9

1. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Viera Kolbaská

matematika

pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom

9

1. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Autorka © **RNDr. Viera Kolbaská, 2012**

Lektori: PaedDr. Dagmar Andová
RNDr. Marcel Tkáč

Illustrations © Bystrík Vančo, 2012

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod č. 2012-15889/49049:4-919 zo dňa 31. októbra 2012 ako prvú časť učebnice matematiky pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. Schvaľovacia doložka má platnosť 5 rokov.

Prvé vydanie, 2012

ISBN 978-80-10-02291-5

Obsah

Úvod

Milí deviataci,

dostali ste učebnicu matematiky pre 9. ročník ZŠ, jej prvú časť.

Zostavili sme ju tak, aby ste si **zopakovali učivo** z matematiky, ktoré ste doteraz preberali a **rozšírili si** vedomosti o také, ktoré budete potrebovať na prijímacie skúšky na stredné školy alebo rôzne formy skúšania.
V učebnici preto nájdete poznámky o **rôznych spôsoboch riešenia úloh**, **odkazy na predchádzajúce vedomosti a zručnosti,** informácie o využití týchto vedomostí a zručností v nových tematických celkoch.
Sú tu aj niektoré **„veci“**, ktoré podľa mnohých nemajú **nič spoločné s matematikou**. Sú tam preto, lebo **všetko so všetkým súvisí.** Dúfame tiež, že netradičné komixové ilustrácie oživia strohý matematický text a budú blízke mládeži vášho veku.
Pri riešení úloh z matematiky sa rozvíjajú **rôzne myšlienkové operácie**. **Precvičuje sa pamäť**, ale aj schopnosť **odhadnúť výsledok** riešenia problému. **Trénuje sa sústredenie na text** a schopnosť vybrať **z neho potrebné informácie**, **triediť tieto informácie a zmysluplne ich využiť**. To je potrebné v bežnom živote, pri práci s informáciami a pri **riešení** problémov z rôznych oblastí vedy.

Ako je zostavená učebnica?
Jej prvá časť sa skladá zo štyroch hlavných kapitol.
Každá podkapitola

- **sa začína** textom alebo úlohou s názvom Čo sme sa už učili.
  Majú pripomenúť, čo by sme už mali vedieť
  (ako sme to počítali v minulých ročníkoch) – **v žltom poli** — Čo sme sa už učili
- **potom nasledujú úlohy** rôzneho typu
  - *bežné riešené úlohy* – sú v **žltom poli s modrým číslom** — **1.**
  - *za nimi nasledujú riešenia úloh* — *Riešenie* **1.**
  - *neriešené úlohy* (úlohy na precvičovanie učiva) – **v žltom poli s červeným číslom** — **2.**
  - *náročnejšie úlohy* – pri čísle úlohy je jedna alebo dve **hviezdičky** podľa náročnosti — **2.***
  - *ak odporúčame pri riešení úlohy použiť kalkulačku,* je pri úlohe piktogram 
  - ***problémové úlohy*** – to sú väčšinou úlohy, ktoré sa bežne neriešia – určené sú pre **žiakov so záujmom o matematiku** — ***Problémová úloha***
  - ***projektové úlohy*** – to sú tie úlohy, ktoré sa bežne **riešia doma** alebo ako tímová práca – sú nepovinné – žiaci prostredníctvom nich získavajú nové informácie rôzneho druhu (nielen matematické) — ***Projektová úloha***
- obsahuje **definície** – sú **v modrom poli** a majú piktogram **paragraf** 
- obsahuje **pomôcky** – informácie, ktoré môžu pomôcť pri riešení úloh — ***Pomôcka***
- obsahuje **súbory úloh** – na precvičenie učiva a sebahodnotenie — **Vyskúšajte sa**
- obsahuje **zaujímavosti** rôzneho typu – **v zelenom poli** a začínajú sa Viete, že...? — **Viete, že...?**
- obsahuje **súhrn prebraného učiva – Zapamätajte si** na konci tematických celkov — **Zapamätajte si**
- to, že odporúčame využiť **internet** sme označili piktogramom

Dúfame, že sa vám s učebnicou bude ľahšie učiť.

Autorka

1 Mocniny a odmocniny, zápis veľkých čísel

1.1 Druhá a tretia mocnina

Čo sme sa už učili

Učili sme sa počítať obvod a obsah štvorca a obdĺžnika, objem a povrch kvádra a kocky. Čo majú spoločné s mocninami?

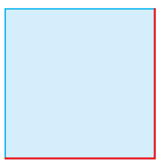
Vypočítaj tieto dve úlohy a ľahšie pochopíš, aký význam majú mocniny.

1. Aký obsah má štvorec so stranou $a = 6$ cm?

2. Aký povrch a objem má kocka s hranou $a = 5$ cm?

Prvú úlohu sme počítali:

takto ale niektorí aj takto



$a = 6$ cm

$a = 6$ cm

obsah S

takto	niektorí aj takto
$S = a \cdot a$	$S = a^2$
$S = 6 \cdot 6\ (\mathrm{cm}^2)$	$S = 6^2\ (\mathrm{cm}^2)$
$S = 36\ \mathrm{cm}^2$	$S = 36\ \mathrm{cm}^2$

Objavilo sa tu niečo nové?

$$\boldsymbol{a \cdot a = a^2}$$

a^2 nazývame druhá mocnina čísla a.
Čítame „a na druhú".
Hovoríme,
že „umocňujeme číslo a na druhú".

§

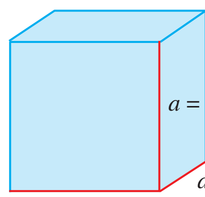
Ako počítame druhú a tretiu mocninu čísla? Presne tak, ako to vidíme pri výpočte obsahu štvorca alebo povrchu a objemu kocky.

Projektová úloha

Vyhľadajte vzorce, v ktorých sa nachádza druhá alebo tretia mocnina čísla. Opíšte ich použitie.

Druhú úlohu sme počítali:

takto ale niektorí aj takto



$a = 5$ cm

$a = 5$ cm

$a = 5$ cm

obsah S

takto	niektorí aj takto
$S = 6 \cdot a \cdot a$	$S = 6 \cdot a^2$
$S = 6 \cdot 5 \cdot 5\ (\mathrm{cm}^2)$	$S = 6 \cdot 5^2\ (\mathrm{cm}^2)$
$S = 150\ \mathrm{cm}^2$	$S = 150\ \mathrm{cm}^2$

objem V

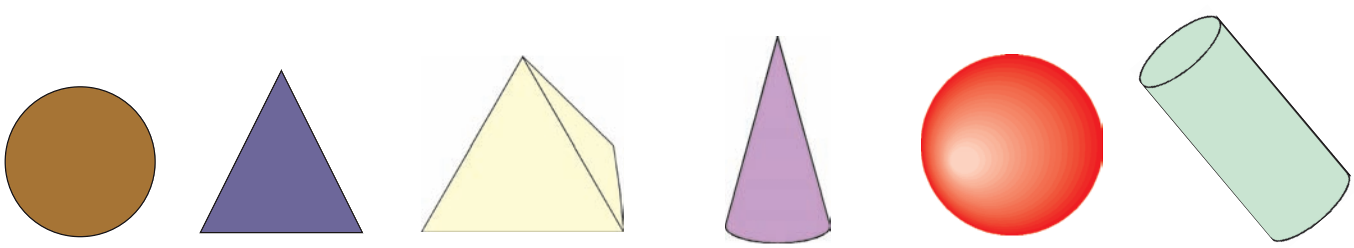
takto	niektorí aj takto
$V = a \cdot a \cdot a$	$V = a^3$
$V = 5 \cdot 5 \cdot 5\ (\mathrm{cm}^3)$	$V = 5^3\ (\mathrm{cm}^3)$
$V = 125\ \mathrm{cm}^3$	$V = 125\ \mathrm{cm}^3$

Objavilo sa aj tu niečo nové?

$$\boldsymbol{a \cdot a \cdot a = a^3}$$

a^3 nazývame tretia mocnina čísla a.
Čítame „a na tretiu".
Hovoríme,
že „umocňujeme číslo a na tretiu".

§



To, čo sme riešili, si teraz precvičíme na týchto úlohách.

3. Vypočítaj obsah štvorca so stranou:
a) $a = 12$ cm
b) $b = 0{,}4$ dm
c) $c = 32$ mm
Použi vzorec s mocninou.

Riešenie 3.

a) $S = 12^2\ \text{cm}^2 = 144\ \text{cm}^2$
$\downarrow$
$12 \cdot 12$
Obsah štvorca je 144 cm^2.

b) $S = 0{,}4^2\ \text{dm}^2 = 0{,}16\ \text{dm}^2$
$\downarrow$
$0{,}4 \cdot 0{,}4$
Obsah štvorca je 0,16 cm^2.

c) $S = 32^2\ \text{mm}^2 = 1\,024\ \text{mm}^2$
$\downarrow$
$32 \cdot 32$
Obsah štvorca je 1 024 cm^2.

4. Vypočítaj obsah štvorca so stranou:
a) $k = 11$ cm
b) $l = 0{,}53$ dm
c) $m = 302$ mm
Použi vzorec s mocninou.

5.* V rohu triedy, kde je umývadlo, treba opraviť kachličky. A to na ploche tvaru štvorca so stranou 0,60 m dlhou.
Akú veľkú plochu treba opraviť?
Výsledok uveď v cm^2.
Koľko kachličiek tvaru štvorca so stranou 2 dm treba použiť?

Riešenie 5.

Premena jednotiek: 0,60 m = 60 cm
Plocha na opravenie: $S = 60^2\ \text{cm}^2 = 3\,600\ \text{cm}^2$
Počet kachličiek: $60 : 20 = 3$, $3 \cdot 3 = 9$.
Na ploche 60×60 cm vychádzajú 3 rady po 3 kachličky, použije sa 9 kachličiek.
Opraviť treba plochu 3 600 cm^2.

Viete, že...?

Kachličky sa podľa viacerých ľudí používajú už celých 4 000 rokov. Nádherné obrazce z kachličiek sa našli v starovekých egyptských pyramídach, v ruinách Babylonu aj v domoch starovekého Grécka. Kachličky samotné však pochádzajú z Blízkeho východu. Používali sa aj na výzdobu celých fasád domov.

Viete, že...?

História dláždenia je vraj stará viac ako 2 500 rokov. Dláždili sa najmä cesty – asi najznámejšie sú tie, ktoré vybudovali Rimania. Po celej svojej ríši postavili tisíce kilometrov ciest.

6. Vypočítaj objem a povrch kocky s hranou:
a) $a = 10$ cm
b) $b = 0{,}8$ dm
c) $c = 15$ mm
Použi vzorec s mocninou.

Riešenie 6.

a) $V = 10^3\ \text{cm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$ $\quad S = 6 \cdot 10^2\ \text{cm}^2 = 600\ \text{cm}^2$
$\downarrow$ $\quad\downarrow$
$10 \cdot 10 \cdot 10$ $\quad 6 \cdot 10 \cdot 10$
Objem kocky je 1 000 cm^3, povrch kocky je 600 cm^2.

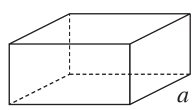
b) $V = 0{,}8^3\ \text{dm}^3 = 0{,}512\ \text{dm}^3$ $\quad S = 6 \cdot 0{,}8^2\ \text{dm}^2 = 3{,}84\ \text{dm}^2$
$\downarrow$ $\quad\downarrow$
$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$ $\quad 6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$
Objem kocky je 0,512 dm^3, povrch kocky je 3,84 dm^2.

c) $V = 15^3\ \text{mm}^3 = 3\,375\ \text{mm}^3$ $\quad S = 6 \cdot 15^2\ \text{mm}^2 = 1\,350\ \text{mm}^2$
$\downarrow$ $\quad\downarrow$
$15 \cdot 15 \cdot 15$ $\quad 6 \cdot 15 \cdot 15$
Objem kocky je 3 375 mm^3, povrch kocky je 1 350 mm^2.

7. Vypočítaj objem a povrch kocky s hranou:
a) $e = 9$ cm
b) $f = 0{,}12$ dm
c) $g = 25$ mm
Použi vzorec s mocninou.

8.* Náš bazén má tvar kolmého štvorbokého pravidelného hranola s hranou podstavy 10 m a hĺbkou 1,5 m. Pri oprave dna bazéna sme museli z neho vyčerpať vodu. Koľko litrov vody sme z bazéna vyčerpali? Koľko m^2 nových dlaždíc sme museli objednať na opravu dna bazéna?

Riešenie 8.



Podstavou hranola je **štvorec.** Výsledok máme uviesť v **litroch**, preto rozmery v metroch premeníme na **dm.**
Premena jednotiek:
$a = 10$ m $= 100$ dm, $h = v = 1{,}5$ m $= 15$ dm

Vyčerpaná voda:
$\boldsymbol{V = a^2 \cdot v\ (\text{dm}^3) = 100^2 \cdot 15\ (\text{dm}^3) = 150\,000\ \text{dm}^3 =}$
$\boldsymbol{= 150\,000\ \text{l}}$.

Dno bazéna je štvorec: $\boldsymbol{S = 100^2\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{m}^2}$.

Z bazéna sme vyčerpali 150 000 litrov vody a na opravu dna bazéna bolo potrebných 10 000 m^2 dlaždíc.

Pri riešení úloh sme počítali **druhú alebo tretiu mocninu čísla**.
Pozrime sa na ne **bez riešenia obsahov, povrchov a objemov**.

9. Vypočítaj druhé mocniny pomocou súčinu čísel:

a) 1^2, 16^2, 201^2, $3\,014^2$ **b)** $(-1)^2$, $(-16)^2$, $(-201)^2$, $(-3\,014)^2$

Riešenie 9.

a)
$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
$16^2 = 16 \cdot 16 = 256$
$201^2 = 201 \cdot 201 = 40\,401$
$3\,014^2 = 3\,014 \cdot 3\,014 = 9\,084\,196$

b)
$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$(-16)^2 = (-16) \cdot (-16) = 256$
$(-201)^2 = (-201) \cdot (-201) = 40\,401$
$(-3\,014)^2 = (-3\,014) \cdot (-3\,014) = 9\,084\,196$

Z riešenia úlohy 9 vidieť, že:

Druhé mocniny opačných čísel sa rovnajú.
Platí $a^2 = (-a)^2$.
Čísla a, $-a$ sú opačné čísla.

10. Vypočítaj druhé mocniny pomocou súčinu čísel:

a) $0{,}1^2$, $(-0{,}1)^2$, $3{,}5^2$, $(-3{,}5)^2$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-2\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(2\frac{4}{5}\right)^2$

Riešenie 10.

a)
$0{,}1^2 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
$(-0{,}1)^2 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = 0{,}01$
$3{,}5^2 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$
$(-3{,}5)^2 = (-3{,}5) \cdot (-3{,}5) = 12{,}25$

b)
$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$
$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$
$$\left(-2\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{14}{5}\right)^2 = \left(-\frac{14}{5}\right) \cdot \left(-\frac{14}{5}\right) = \frac{196}{25}$$
$$\left(2\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{14}{5} \cdot \frac{14}{5} = \frac{196}{25}$$

11. Vypočítaj druhé mocniny pomocou súčinu čísel:

a) 21^2, $4{,}7^2$, $0{,}91^2$, $\left(\frac{5}{9}\right)^2$

b) $(-45)^2$, $(-1{,}8)^2$, $\left(-\frac{12}{17}\right)^2$, $\left(-3\frac{1}{7}\right)^2$

Viete, že...?

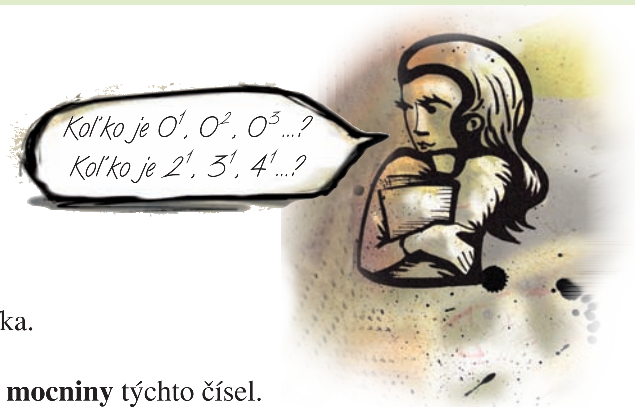
Niektoré čísla majú zaujímavé druhé mocniny.

$1^2 = 1$
$11^2 = 121$
$111^2 = 12321$
$1111^2 = 1234321$

$9^2 = 81$
$99^2 = 9801$
$999^2 = 998001$
$9999^2 = 99980001$

Čísla, ktoré sa čítajú rovnako zľava aj sprava, sa volajú **palindrómy**.

Školská encyklopédia matematiky, Pavlič Gregor, Príroda, 2001



Pri počítaní úloh s mocninami veľakrát pomáha takáto tabuľka.
Prekreslite ju do zošita a **doplňte ju**.
V prvom riadku sú **čísla** a v druhom riadku majú byť **druhé mocniny** týchto čísel.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2					25							144	169							400

12. Vypočítaj tretie mocniny pomocou súčinu čísel:

a) 1^3, 12^3, 350^3, $1\,200^3$ **b)** $(-1)^3$, $(-12)^3$, $(-350)^3$, $(-1\,200)^3$

Riešenie 12.

a) $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1\,728$

$350^3 = 350 \cdot 350 \cdot 350 = 42\,875\,000$

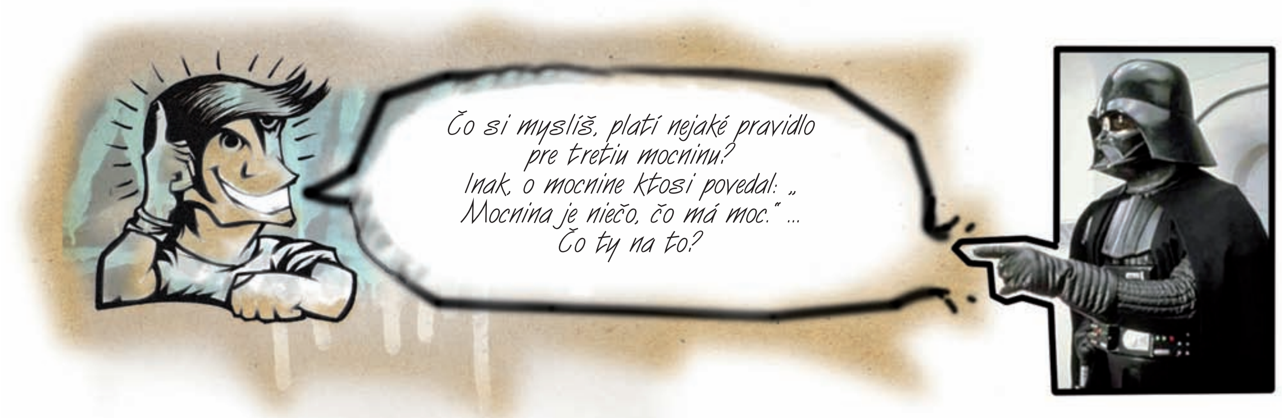
$1\,200^3 = 1\,200 \cdot 1\,200 \cdot 1\,200 = 1\,728\,000\,000$

b) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

$(-12)^3 = (-12) \cdot (-12) \cdot (-12) = -1\,728$

$(-350)^3 = (-350) \cdot (-350) \cdot (-350) = -42\,875\,000$

$(-1\,200)^3 = (-1\,200) \cdot (-1\,200) \cdot (-1\,200) = -1\,728\,000\,000$



13. Vypočítaj tretie mocniny pomocou súčinu čísel:

a) $0{,}1^3$, $(-0{,}1)^3$, $1{,}4^3$, $(-1{,}4)^3$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-2\frac{2}{3}\right)^3, \left(2\frac{2}{3}\right)^3$

Riešenie 13.

a) $0{,}1^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$

$(-0{,}1)^3 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = -0{,}001$

$1{,}4^3 = 1{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 2{,}744$

$(-1{,}4)^3 = (-1{,}4) \cdot (-1{,}4) \cdot (-1{,}4) = -2{,}744$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\left(-2\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{8}{3}\right)^3 = \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{512}{27}$$

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{512}{27}$$

Viete, že...?

Číslo **tri** sa pokladá za magické číslo ...

Aj pri počítaní úloh s tretími mocninami využijete túto tabuľku. Prekreslite ju do zošita. V prvom riadku sú čísla, do druhého riadka doplňte **tretie mocniny** týchto čísel.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^3		8	27					512												8 000

14. Vypočítaj tretie mocniny pomocou súčinu čísel:

a) 11^3, $0{,}7^3$, $1{,}2^3$, $\left(\frac{5}{7}\right)^3$ **b)** $(-0{,}4)^3$, $(-2{,}9)^3$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(-2\frac{1}{9}\right)^3$

15. Pomocou znakov nerovností a znaku rovnosti porovnaj dvojice mocnín:

a) 6^3, 14^2
b) 11^2, $(-5{,}1)^3$
c) $3{,}2^3$, $(-6{,}4)^2$
d) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3$
e) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3, \left(-\frac{5}{9}\right)^2$

Riešenie 15.

Úlohu môžeme riešiť viacerými spôsobmi. My ju vyriešime tak, že **vypočítame** hodnoty mocnín a výsledky **porovnáme**. Navrhni **iné riešenie** a ukáž ho spolužiakom v triede.

a) $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ $\qquad 14^2 = 14 \cdot 14 = 196$

$216 > 196 \rightarrowtail 6^3 > 14^2$ $\qquad$ Platí $\mathbf{6^3 > 14^2}$.

b) $11^2 = 121$ $\qquad (-5{,}1)^3 = -132{,}651$

$121 > -132{,}651 \rightarrowtail 11^2 > (-5{,}1)^3$ $\quad$ Platí $\mathbf{11^2 > (-5{,}1)^3}$.

c) $3{,}2^3 = 32{,}768$ $\qquad (-6{,}4)^2 = 40{,}96$

$32{,}768 < 40{,}96 \rightarrowtail 3{,}2^3 < (-6{,}4)^2$ $\quad$ Platí $\mathbf{3{,}2^3 < (-6{,}4)^2}$.

d) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$ $\qquad \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

$\frac{49}{64} > \frac{27}{64} \rightarrowtail \left(-\frac{7}{8}\right)^2 > \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\quad$ Platí $\left(-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\right)^2 > \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^3$.

Pripomeňme si porovnávanie zlomkov.
Zlomky **s rovnakým menovateľom** porovnávame podľa čitateľa:

$\frac{17}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}$ $\qquad$ Platí $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{5}{3} < \frac{17}{3}$.

Zlomky **s rôznym menovateľom** najprv upravíme na rovnakého menovateľa a potom porovnáme podľa čitateľa:

$\frac{2}{3}, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}$

Spoločným menovateľom je najmenší spoločný násobok čísel 3, 6, 12 – je to číslo **12**.

Potom $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ a $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$.

Platí $\frac{8}{12} < \frac{10}{12} < \frac{11}{12}$, potom $\frac{2}{3} < \frac{5}{6} < \frac{11}{12}$.

e) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{125}{27}$ $\qquad$ **záporný zlomok**

$\left(-\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81}$ $\qquad$ **kladný zlomok**

Keďže **kladné číslo je vždy väčšie ako záporné, platí** nerovnosť:

$$\left(-1\frac{2}{3}\right)^3 < \left(-\frac{5}{9}\right)^2$$

16. Pomocou znakov nerovností a znaku rovnosti porovnaj dvojice mocnín:

a) $0{,}3^3$, $0{,}09^2$
b) 17^2, $(-21)^3$
c) $5{,}1^3$, $(-7{,}1)^2$
d) $\left(-1\frac{5}{8}\right)^2, \left(1\frac{1}{4}\right)^3$

17.* Vypočítaj hodnoty výrazov s mocninami:

a) $2^3 + (-3)^2 + (-2)^2 + 3^3$
b) $(-5)^2 + (-1)^3 - 4^2 - 1^2$
c) $0{,}2^3 + (-0{,}4)^2 + (-0{,}3)^3 + 0{,}1^3$
d) $(-1{,}2)^3 - (-1{,}3)^2 + (-0{,}5)^3 - 1{,}01^2$
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$
f) $\left(-1\frac{2}{5}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^3$

Riešenie 17.

Najprv **vypočítame každú mocninu** a potom ich podľa potreby **sčítame alebo odčítame**.

a) $2^3 + (-3)^2 + (-2)^2 + 3^3$

$= 8 + 9 + 4 + 27 = 48$ $\qquad$ Hodnota výrazu je **48**.

b) $(-5)^2 + (-1)^3 - 4^2 - 1^2 =$

$= 25 + \underbrace{(-1) - 16 - 1}$ $=$

$= 25 \quad - \quad 18 \quad = 7$ $\qquad$ Hodnota výrazu je **7**.

c) $0{,}2^3 + (-0{,}4)^2 + (-0{,}3)^3 + 0{,}1^3 =$

$= 0{,}008 + 0{,}16 + (-0{,}027) + 0{,}001 =$
$= 0{,}008 + 0{,}16 - 0{,}027 + 0{,}001 =$
$= 0{,}008 + 0{,}16 + 0{,}001 - 0{,}027 =$
$= 0{,}169 - 0{,}027 = 0{,}142$ $\qquad$ Hodnota výrazu je **0,142**.

d) $(-1{,}2)^3 - (-1{,}3)^2 + (-0{,}5)^3 - 1{,}01^2 =$

$= -1{,}728 - 1{,}69 + (-0{,}125) - 1{,}020\,1 =$
$= -1{,}728 - 1{,}69 - 0{,}125 - 1{,}020\,1 =$
$= -4{,}563\,1$ $\qquad$ Hodnota výrazu je **–4,563 1**.

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{9} + \frac{1}{8} =$

Zlomky upravíme na **spoločného menovateľa a sčítame**.

$= \frac{4 \cdot 8}{9 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{32}{72} + \frac{9}{72} = \frac{41}{72}$ $\qquad$ Hodnota výrazu je $\mathbf{\frac{41}{72}}$.

f) $\left(-1\frac{2}{5}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^3 =$

Zmiešané čísla upravíme na **nepravé zlomky a umocníme.**

$= \left(-\frac{7}{5}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{49}{25} - \frac{125}{8} =$

Zlomky upravíme na **spoločného menovateľa a odčítame**.

$= \frac{49 \cdot 8}{25 \cdot 8} - \frac{125 \cdot 25}{8 \cdot 25} = \frac{49 \cdot 8}{200} - \frac{125 \cdot 25}{200} =$

$= \frac{392}{200} - \frac{3\,125}{200} = -\frac{2\,733}{200} = -13\frac{133}{200}$

Nepravý zlomok sme upravili na **zmiešané číslo**:
$-2\,733 : 200 = -13$ zv. 133

Hodnota výrazu je $\mathbf{-13\frac{133}{200}}$.

Problémová úloha

Na základe vedomostí o mocninách a výsledkov uvedených úloh, sformulujte pravidlo pre tieto výrazy s mocninami:
$-(-4)^2, -(+4)^2, -(-4)^3, -(+4)^3$

18.* Vypočítaj hodnoty výrazov s mocninami:

a) $3^3 + (-2)^2 + (-3)^2 + 2^3$

b) $(-1)^2 + (-1)^3 - 1^2 + 1^3$

c) $0{,}4^3 + (-0{,}2)^2 + (-0{,}4)^3 + 0{,}2^2$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 0{,}25^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3$

Projektová úloha

Aká je druhá a tretia mocnina čísla nula?
Kto ju ako prvý uvádza vo svojich dielach?

Viete, že...?

Rimania pre nulu používali výraz **nullae**, čo znamená **nič**.
Takže druhá mocnina **nič** je **nič**.
Tretia mocnina **nič** je **nič**.

19. Vypočítaj do zošita druhé a tretie mocniny čísel uvedených v tabuľkách.

a)

	a					
	-4	-3	-2	2	3	4
a^2						
a^3						

b)

	a					
	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$
a^2						
a^3						

c)

	a					
	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$
a^2						
a^3						

20. **a)** V tabuľke sa nachádzajú rôzne čísla. Niektoré sú druhými mocninami čísel, niektoré nie. Vypíš len tie čísla, ktoré sú druhými mocninami.

144	$\frac{1}{125}$	72
0,25	1 000	$\frac{36}{49}$
$-\frac{1}{4}$	6 400	0,9

b) V tabuľke sa nachádzajú rôzne čísla. Vypíš len tie čísla, ktoré sú tretími mocninami.

64	$-\frac{1}{8}$	0
-1	100	$\frac{3}{125}$
0,125	$\frac{1}{6}$	0,27

21.* Vypočítaj podľa tabuľky hodnoty výrazov s mocninami.

a	$a^2 + 2 \cdot a$	$a^3 + 3 \cdot a$	$a^3 - a^2$	$a^3 + a^2$	$\frac{a^3}{a^2}$
3					
-2					
$\frac{2}{3}$					
$-1\frac{1}{2}$					

22.* Doplň namiesto znaku ♪ alebo **?** číslo tak, aby platila daná rovnosť:

a) $\left(-\frac{3}{6}\right)^{♪} = 0{,}25$ **b)** $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = (\mathbf{?} : 0{,}25)^2$ **c)** $-(-2)^3 = (\mathbf{?})^3$ **d)** $\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right)^{♪} = 3\frac{3}{8}$

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.
Ak zakrúžkujete len správne možnosti, získate dve chýbajúce slová do vety:

... PRIATEĽSTVO JE LEN ... .

1. Druhá mocnina čísla -9 je:

O -81 P 81 R 18 S -18

2. Tretia mocnina čísla -4 je:

N -12 O 64 P 16 R -64

3. Mocnina $(-5)^2$ sa rovná:

A 25 B 10 C -25 D -10

4. Mocnina $(-6)^3$ sa rovná:

U -18 V -216 Z 18 X 216

5. $\left(\frac{9}{11}\right)^2 =$

Á $\frac{18}{22}$ É $\frac{81}{121}$ Í $\frac{81}{22}$ Ó $\frac{18}{121}$

6. $\left(-3\frac{1}{4}\right)^2 =$

I $\frac{13}{4}$ J $\frac{169}{16}$ K $\frac{26}{16}$ L $9\frac{1}{16}$

7. Mocnina $(-0{,}03)^2$ sa rovná:

E $0{,}000\,9$ F $0{,}09$ G $0{,}009$ H $0{,}000\,6$

8. Mocnina $0{,}8^2$ sa rovná:

A $0{,}006\,4$ B $0{,}16$ C $0{,}001\,6$ D $0{,}64$

9. O mocninách $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ a $(-0{,}8)^3$ platí:

M $\left(\frac{5}{6}\right)^3 < (-0{,}8)^3$ N $\left(\frac{5}{6}\right)^3 > (-0{,}8)^3$ O $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = (-0{,}8)^3$ P $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \leq (-0{,}8)^3$

10. O mocninách $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3$ a $2{,}7^3$ platí:

M $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3 > 2{,}7^3$ N $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3 \geq 2{,}7^3$

O $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3 < 2{,}7^3$ P $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3 = 2{,}7^3$

Viete, že...?

Mocnina 41^2 je číslo 1 681.
V roku 1681 sa konal tzv. Šopronský snem, na ktorom veriaci protestantského vierovyznania získali viacero výsad. Výsady im pomohol vydobyť gróf Thököli z Kežmarku, prezývaný tiež „Slovenský kráľ“. Na základe týchto výsad si obyvatelia v **Hronseku** postavili kostol. Musel byť postavený mimo centra za mestskými hradbami a:

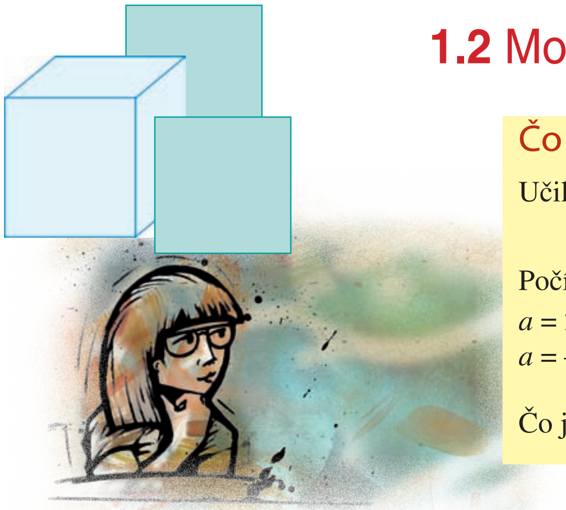
1. musel byť celý z dreva,
2. bez použitia železných klincov,
3. bez hlavného vchodu do dediny alebo mesta,
4. bez veže,
5. musel byť postavený za jeden rok.

Overte si tieto informácie na internete a pokúste sa k niektorým mocninám čísel priradiť nejakú významnú udalosť.

Zapamätajte si

Druhá mocnina	Tretia mocnina
Druhá mocnina je **súčin dvoch** rovnakých činiteľov. Napríklad: $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$ $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$ $0{,}8^2 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$	**Tretia** mocnina je **súčin troch** rovnakých činiteľov. Napríklad: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{27}{343}$ $0{,}8^3 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}512$
Druhá mocnina kladného aj **záporného** čísla je vždy **kladné číslo**. Napríklad: $(-3)^2 = 9$ $3^2 = 9$	**Tretia mocnina kladného** čísla je **kladné číslo**. Napríklad: $3^3 = 27$ **Tretia mocnina záporného** čísla je **záporné číslo**. Napríklad: $(-3)^3 = -27$
Platí: $\boldsymbol{(-a)^2 = a^2}$ **a, $-a$ sú opačné čísla**	**Platí:** $(-a)^3 \neq a^3$, pre $a \neq 0$
Platí: $\mathbf{0^2 = 0}$ $\mathbf{1^2 = 1, (-1)^2 = 1}$	**Platí:** $\mathbf{0^3 = 0}$ $\mathbf{1^3 = 1, (-1)^3 = -1}$

1.2 Mocniny s mociteľom – prirodzeným číslom



Čo sme sa už učili

Učili sme sa počítať **druhú** a **tretiu** mocninu:

$$a^2 = a \cdot a \qquad\qquad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Počítali sme, ak

$a = 2$	$2^2 = 2 \cdot 2$	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$a = -2$	$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2)$	$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

Čo je $\boldsymbol{a}$ a čo vieme o číslach **2** a **3**? Porozmýšľajte...

Kedysi v minulosti si dal jeden múdry človek zaplatiť za svoje služby vládcovi tak, že chcel na každé políčko šachovnice vždy dvakrát viac mincí, ako bolo na predchádzajúcom políčku. Vládca zistil, že takú veľkú odmenu nevie vyplatiť, hoci išlo o rovnaké mince najmenšej hodnoty. Dnes by to bol 1 cent. Pozrime sa, ako by vyplatenie odmeny mohlo vyzerať, ak by na prvé políčko šachovnice dali 2 jednocentové mince:

Vidieť, že súčiny s číslom 2 majú veľkú hodnotu už na ôsmom políčku:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$$

Aby sa súčiny rovnakých čísel dali jednoduchšie zapisovať, vznikol matematický pojem **mocnina s prirodzeným mocniteľom**. Potom sa dajú súčiny zo šachovnice zapísať takto:

$2 = 2^1$

$2 \cdot 2 = 2^2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$

Číslo **dva** v týchto mocninách nazývame **základ mocniny**.
Čísla **1, 2, 3, ... , 10** nazývame **mocniteľ** alebo **exponent mocniny**.
Čítame:

2^5 ... dva na piatu
2^7 ... dva na siedmu
2^{10} ... dva na desiatu a 2^1 je mocnina **dva na prvú**

Ak sa pozorne pozrieme na **súčiny** čísla 2, zistíme, ako **vzniká mocniteľ** mocniny.

1. Zapíš **nasledujúce súčiny** pomocou **mocnín** s prirodzeným mocniteľom.

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Riešenie 1.

$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

Sú tu **4 trojky**.
Napíšeme $\mathbf{3^4}$.
Čítame tri na štvrtú.

$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}$

Je tu **5 štvoriek**.
Napíšeme $\mathbf{4^5}$.
Čítame štyri na piatu.

$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$

Je tu **7 pätiek**.
Napíšeme $\mathbf{5^7}$.
Čítame päť na siedmu.

$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}$

Je tu **9 sedmičiek**.
Napíšeme $\mathbf{7^9}$.
Čítame sedem na deviatu.

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$

Je tu **11 dvojok**.
Napíšeme $\mathbf{2^{11}}$.
Čítame dva na jedenástu.

$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$

Je tu **16 jednotiek**.
Napíšeme $\mathbf{1^{16}}$.
Čítame jedna na šestnástu.

2. Zapíš nasledujúce súčiny pomocou mocnín s prirodzeným mocniteľom. Napíš, ako sa čítajú.

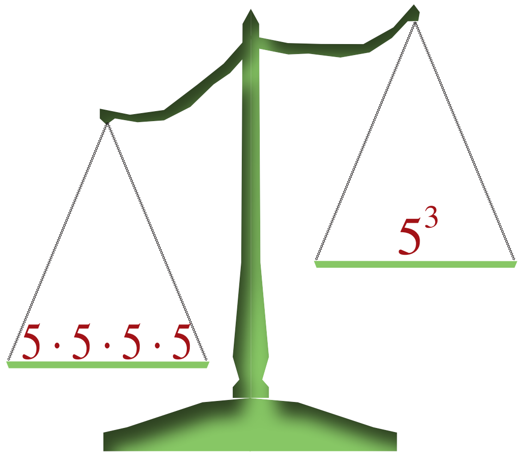
a) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$

b) $(-1{,}4) \cdot (-1{,}4) \cdot (-1{,}4) \cdot (-1{,}4) \cdot (-1{,}4)$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

d) $\left(-3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right)$

e) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$



Je to správne?

Riešenie 2.

a) $0{,}3^3$ Čítame **0,3 na tretiu**.

b) $(-1{,}4)^5$ Čítame **–1,4 na piatu**.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^9$ Čítame **jedna polovica na deviatu**.

d) $\left(-3\frac{1}{4}\right)^7$ Čítame $\mathbf{-3\frac{1}{4}}$ **na siedmu**.

e) 0^6 Čítame **nula na šiestu**.

Mocnina s prirodzeným mocniteľom je výraz
a^n
a **je základ mocniny,** ***n*** **je mocniteľ (exponent) mocniny,**
a **môže byť ľubovoľné číslo,**
n **je prirodzené číslo, takže môže byť 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...**
Čítame „ ***a*** **na** ***en-tú*** **“.**

§

Mocniny väčšinou počítame pomocou kalkulačky, alebo použijeme tabuľky.

3. Zapíš nasledujúce súčiny pomocou mocnín s prirodzeným mocniteľom. Napíš, ako sa čítajú.

a) $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$

b) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7)$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

d) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

4. V tabuľke sú **súčiny** čísel. Zapíš ich do zošita ako **mocniny** a vypočítaj ich **hodnoty**.

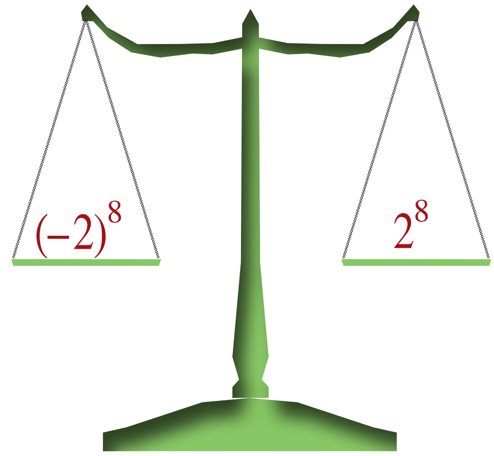
súčin	mocnina	hodnota
$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$		
$(-0{,}4) \cdot (-0{,}4) \cdot (-0{,}4)$		
$(-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$		
$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$		
$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$		
$\left(1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)$		

Riešenie 4.

mocnina	hodnota
6^5	7 776
$(-0{,}4)^3$	$-0{,}064$
$(-10)^6$	1 000 000
$\left(\frac{1}{8}\right)^4$	$\frac{1}{4\,096}$
$(-1)^9$	-1
$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

5. V tabuľke sú súčiny čísel. Zapíš ich do zošita ako mocniny a vypočítaj ich hodnoty.

súčin	mocnina	hodnota
$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$		
$0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3$		
$(-100)\cdot(-100)\cdot(-100)$		
$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}$		
$(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$		
$(-1{,}2)^3$		
$\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)$		



Je to správne?

6. **Mocniny** čísel v tabuľke zapíš do zošita ako **súčiny** a vypočítaj ich **hodnoty**.

a)

mocnina	súčin	hodnota
2^8		
$0{,}5^4$		
$\left(\frac{3}{4}\right)^6$		

b)

mocnina	súčin	hodnota
$(-2)^8$		
$(-0{,}5)^4$		
$\left(-\frac{3}{4}\right)^6$		

Riešenie 6.

a)

súčin	hodnota
$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$	256
$0{,}5\cdot0{,}5\cdot0{,}5\cdot0{,}5$	0,062 5
$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{729}{4\,096}$

b)

súčin	hodnota
$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$	256
$(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)$	0,062 5
$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$	$\frac{729}{4\,096}$

7. Mocniny čísel v tabuľke zapíš do zošita ako súčiny a vypočítaj ich hodnoty.

a)

mocnina	súčin	hodnota
3^7		
$1{,}2^3$		
$\left(\frac{2}{5}\right)^5$		

b)

mocnina	súčin	hodnota
$(-3)^7$		
$(-1{,}2)^3$		
$\left(-\frac{2}{5}\right)^5$		

Riešenie 7.

a)

súčin	hodnota
$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$	2 187
$1{,}2\cdot1{,}2\cdot1{,}2$	1,728
$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{32}{3\,125}$

b)

súčin	hodnota
$(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$	–2 187
$(-1{,}2)\cdot(-1{,}2\ )\cdot(-1{,}2)$	–1,728
$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$	$-\frac{32}{3\,125}$

Čo môžeme povedať **o mocninách kladných a záporných čísel**?
Čo platí?

$$(-2)^4 = 2^4$$

$$(-3)^5 = -3^5$$

Párna mocnina kladného aj záporného čísla je kladné číslo.

Platí $(-a)^{2k} = a^{2k}$,
kde $2k$ je vyjadrenie **párneho čísla,** $k \in N$.

Nepárna mocnina záporného čísla je záporné číslo.

Platí $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$,
kde $2k + 1$ je vyjadrenie **nepárneho čísla,** $k \in N$.

Párne mocniny opačných čísel sa rovnajú.

Viete, že...?

V Mezopotámii sa koncom 3. tisícročia pred naším letopočtom veľa úloh riešilo pomocou tabuliek. Tabuľky mali vytvorené aj pre druhú a tretiu mocninu.

Dejiny prírodných vied, Jaroslav Folta a Luboš Nový, Smena,1981

Viete, že...?

Mozog (po latinsky encephalon) dospelého človeka má hmotnosť približne 1 400 gramov. Skladá sa z vyše $1{,}2 \cdot 10^{10}$ neurónov a $5 \cdot 10^{10}$ podporných buniek. Riadi činnosť celého nášho tela a žiadny počítač s ním nemôže súperiť.

8. Napíš, či je výsledkom umocnenia kladné alebo záporné číslo:

a) $(-15)^2$ **c)** $(-0{,}03)^{14}$ **e)** $\left(-\frac{7}{9}\right)^3$ **g)*** $(3{,}5 - 7{,}8)^5$

b) $(-6)^{11}$ **d)** $(-0{,}27)^9$ **f)** $\left(-5\frac{4}{7}\right)^{17}$ **h)*** $\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\right)^8$

Riešenie 8.

a) $(-15)^2$	Mocniteľ je **párne** číslo (2), mocnina je **kladné** číslo.	Platí $(-15)^2 > 0$.
b) $(-6)^{11}$	Mocniteľ je **nepárne** číslo (11), základ je **záporné** číslo (– 6), mocnina je **záporné** číslo.	Platí $(-6)^{11} < 0$.
c) $(-0{,}03)^{14}$	Mocniteľ je **párne** číslo (14), mocnina je **kladné** číslo.	Platí $(-0{,}03)^{14} > 0$.
d) $(-0{,}27)^9$	Mocniteľ je **nepárne** číslo (9), základ je **záporné** číslo (– 0,27), mocnina je **záporné** číslo.	Platí $(-0{,}27)^9 < 0$.
e) $\left(-\frac{7}{9}\right)^3$	Mocniteľ je **nepárne** číslo (3), základ je **záporné** číslo $\left(-\frac{7}{9}\right)$, mocnina je **záporné** číslo.	Platí $\left(-\frac{7}{9}\right)^3 < 0$.
f) $\left(-5\frac{4}{7}\right)^{17}$	Mocniteľ je **nepárne** číslo (17), základ je záporné číslo $\left(-5\frac{4}{7}\right)$, mocnina je **záporné** číslo.	Platí $\left(-5\frac{4}{7}\right)^{17} < 0$.
g) $(3{,}5 - 7{,}87)^5$	Vypočítame rozdiel čísel v zátorke $3{,}5 - 7{,}8 = -4{,}3$. Potom $(3{,}5 - 7{,}87)^5 = (-4{,}3)^5$. Mocniteľ je **nepárne** číslo (5), základ je **záporné** číslo (– 4,3), mocnina je **záporné** číslo.	Platí $(3{,}5 - 7{,}87)^5 < 0$.
h) $\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\right)^8$	Mocniteľ je **párne** číslo (8), mocnina je **kladné** číslo.	Platí $\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\right)^8 > 0$.

9. Doplň správny znak nerovností alebo znak rovnosti:

a) $2{,}7^3 \ ...\ 0$

b) $(-0{,}6)^4 ...\ 0$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \ ...\ 0$

d) $\left(3\frac{1}{4}\right)^5 \ ...\ 0$

10. Doplň správny znak nerovností alebo znak rovnosti:

a) $3^4 \ ...\ (-3)^4$

b) $(-1{,}9)^{15} \ ...\ -1{,}9^{15}$

c) $\left(\frac{9}{17}\right)^3 \ ...\ \left(-\frac{9}{17}\right)^3$

d) $\left(-5\frac{2}{7}\right)^{20} \ ...\ \left(\frac{37}{7}\right)^{20}$

Viete, že...?

V obci Barca pri Košiciach sa našli v päťdesiatych rokoch 20. storočia „počtárske kocky“, ktoré sú vraj zo 14. storočia pred naším letopočtom.
Pokúste sa zistiť na internete niečo o počtárskych kockách.

Kaštieľ rodiny Zichy v Barci, foto Tizo1

11. Vypočítaj hodnoty výrazov s mocninami:

a) $(-6)^3 + (-4)^2$

b) $(-0{,}03)^2 + (-0{,}1)^4$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(-\frac{1}{9}\right)^3$

d) $0{,}5^5 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

12. Vypočítaj hodnoty výrazov s mocninami:

a) $(-2)^5 - (-3)^2$

b) $(-0{,}01)^2 - (-0{,}1)^4$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 - \left(-\frac{1}{6}\right)^3$

d) $0{,}2^5 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2$

13. Vypočítaj hodnoty výrazov a potom ich zoraď od najmenšej po najväčšiu:

$(-2)^4 \cdot (-3)^3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$(-0{,}02)^2 \cdot (-0{,}1)^4$

$0{,}3^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

14.

a) Medzi číslami 1, –64, 32, 64, –32, –1 sú výsledky nasledujúcich úloh:

$4^5 : (-2)^4 =$ $\quad 8^3 : (-4)^2 =$ $\quad (-3)^4 : (-9)^2 =$

Priraď ich k jednotlivým úlohám.

b) Úlohy $\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^3$ a $(-0{,}75 + 0{,}25)^3$ majú výsledky medzi mocninami:

$0{,}25^3 \quad 0{,}5^3 \quad (-0{,}5)^3 \quad (-0{,}25)^3$

Priraď ich k jednotlivým úlohám.

c) Každý zlomok $-\frac{65}{81}, \frac{65}{81}, \frac{625}{81}$ je výsledkom niektorej z úloh:

$\left(-1-\frac{2}{3}\right)^4 =$ $\quad (-1)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1^4 =$

Priraď výsledky k úlohám.

Problémová úloha

Počítať úlohy je určite ľahšie, ako ich vytvoriť. Vytvorte niekoľko úloh pre svojich spolužiakov z týchto mocnín:

$$(-1)^2, (-2)^4, (-3)^3, (-4)^2.$$

Spolu tieto úlohy vypočítajte.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Štvrtá mocnina čísla -8 je:

A kladné číslo B záporné číslo C 0 D -8^4

2. Piata mocnina čísla -7 je:

A kladné číslo B záporné číslo C 0 D 7^5

3. Mocnina $(-1)^6$ sa rovná:

A -1 B 1 C -6 D 6

4. Mocnina $(-4)^5$ sa rovná:

A $1\,024$ B -20 C 20 D $-1\,024$

5. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 =$

A $\frac{3}{64}$ B $\frac{1}{12}$ C $\frac{1}{64}$ D 64

6. $\left(-1\frac{1}{4}\right)^5 =$

A $-\frac{25}{20}$ B $-\frac{3\,125}{1\,024}$ C $-\frac{1}{1024}$ D $\frac{25}{20}$

7. Ktorá z daných mocnín je najväčšia?

A $(-1)^5$ B $(-2)^3$ C 1^4 D 2^2

8. Ktorá z daných mocnín je najmenšia?

A $(-0{,}2)^5$ B $0{,}3^1$ C $0{,}05^2$ D $(-0{,}01)^6$

9. O mocninách $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ a $(-0{,}5)^7$ platí:

A $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 < (-0{,}5)^7$ B $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 > (-0{,}5)^7$ C $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = (-0{,}5)^7$ D $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \geq (-0{,}5)^7$

10. O mocninách $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4$ a $1{,}3^4$ platí:

A $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4 < (-0{,}3)^4$ B $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4 > (-0{,}3)^4$ C $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4 = (-1{,}3)^4$ D $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4 \leq (-0{,}3)^4$

Zapamätajte si

Mocnina s prirodzeným mocniteľom je výraz a^n, kde **a^n je súčin n rovnakých činiteľov a.**
Napríklad:
$\boldsymbol{a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a}$ $\longrightarrow$ v súčine sú 4 činitele
$\boldsymbol{a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$ $\longrightarrow$ v súčine je 5 činiteľov
***a* je základ mocniny**
a je ľubovoľné reálne číslo, ktoré umocňujeme
***n* je mocniteľ (exponent) mocniny**
n je prirodzené číslo (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)
n určuje počet činiteľov v súčine
O párnej mocnine platí: $(-a)^{2k} = a^{2k}$, kde $k \in N$.
O nepárnej mocnine platí: $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$, kde $k \in N$.
Platí $1^n = 1$, $0^n = 0$ $(n \in N)$, $0^0 = 1$.

Ak vieme, čo sú mocniny s prirodzeným mocniteľom, oplatí sa vedieť, čo sa dá s nimi robiť.

3^1					3
3^3				2	7
3^5			2	4	3
3^7		2	1	8	9
3^9	1	9	6	8	3

Čo sme sa už učili

15. Vypočítaj hodnotu výrazu: $(-4)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^5-(-2)^4-\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Riešenie 15.

Môžeme počítať takto:

Najprv vypočítame každú mocninu pomocou súčinu.

$(-4)^2=(-4)\cdot(-4)=16$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{32}$$

$(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=16$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$

Potom výsledky sčítame:

$$16+\left(-\frac{1}{32}\right)-16-\frac{1}{64}=$$
$$=16-\frac{1}{32}-16-\frac{1}{64}=$$
$$=16-16-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=$$
$$=0-\frac{1\cdot 2}{32\cdot 2}-\frac{1}{64}=-\frac{2}{64}-\frac{1}{64}=-\frac{3}{64}$$

Hodnota výrazu je $-\frac{3}{64}$.

Môžeme počítať aj takto: Použijeme vedomosti o **párnej a nepárnej mocnine** záporného a kladného čísla.

$$(-4)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^5-(-2)^4-\left(\frac{1}{4}\right)^3=$$
$$=4^2-\left(\frac{1}{2}\right)^5-2^4-\left(\frac{1}{4}\right)^3=$$

Potom môžeme počítať mocniny, podobne ako v predchádzajúcom spôsobe:

$$=16-\frac{1}{32}-16-\frac{1}{64}=-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=-\frac{3}{64}$$

16. Ak bola úloha 15 ťažká, vypočítaj hodnotu tohto výrazu:

$$\frac{1}{2}\cdot 4^3+\frac{2}{3}\cdot(-9)^2$$

Riešenie 16.

Mocniny vypočítame, potom zlomky vynásobíme, zjednodušíme a nakoniec sčítame.

$$\frac{1}{2}\cdot 4^3+\frac{2}{3}\cdot(-9)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 64+\frac{2}{3}\cdot 81=$$
$$=\frac{64}{2}+\frac{162}{3}=$$
$$=32+54=86$$

$4^3=4\cdot 4\cdot 4=64$
$(-9)^2=(-9)\cdot(-9)=81$

- Zlomky môžeme pri násobení aj krátiť.
- Vyrieš úlohu pomocou krátenia zlomkov.

Hodnota výrazu je 86.

17. Vypočítaj hodnotu výrazu: $2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^3$

Riešenie 17.

Aj túto úlohu vyriešime tak, že najprv vypočítame mocniny.

$2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^3 = 2 \cdot 125 + 4 \cdot 125 =$ $\boxed{5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125}$

Potom vynásobíme a nakoniec sčítame:

$= 250 + 500 = 750$

Všimni si iný spôsob výpočtu tejto úlohy:

$2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^3 = (2 + 4) \cdot 5^3 = 6 \cdot 5^3 = 6 \cdot 125 = 750$

Hodnota výrazu je 750.

Mocniny s rovnakým základom a mocniteľom môžeme sčítať aj odčítať.

Sčítanie mocnín, v ktorých je základom neznáma

18. Vypočítaj súčty mocnín:

a) $a^3 + b^7 + b^7 + a^3$ **c)** $0{,}5 \cdot y^9 + 1{,}5 \cdot x^2 + 2{,}5 \cdot y^9 + 3{,}5 \cdot x^2$

b) $2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + x^3$ **d)** $\frac{2}{3} \cdot c^5 + \frac{1}{6} \cdot d^2 + \frac{3}{5} \cdot c^5 + \frac{1}{2} \cdot d^2$

Riešenie 18.

Sčítame čísla pri rovnakých mocninách.

a) $a^3 + b^7 + b^7 + a^3 = 2 \cdot a^3 + 2 \cdot b^7$

b) $2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + x^3 = (2 + 4) \cdot x^2 + (3 + 1) \cdot x^3 =$
$= 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3$

c) $0{,}5 \cdot y^9 + 1{,}5 \cdot x^2 + 2{,}5 \cdot y^9 + 3{,}5 \cdot x^2 =$
$= (0{,}5 + 2{,}5) \cdot y^9 + (1{,}5 + 3{,}5) \cdot x^2 = 3 \cdot y^9 + 5 \cdot x^2$

d) $\frac{2}{3} \cdot c^5 + \frac{1}{6} \cdot d^2 + \frac{3}{5} \cdot c^5 + \frac{1}{2} \cdot d^2 =$

$= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) \cdot c^5 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) \cdot d^2 =$

$= \frac{19}{15} \cdot c^5 + \frac{2}{3} \cdot d^2$

Zlomky môžeme sčítať zvlášť:
$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Sčítame mocniny s rovnakým základom a mocniteľom.

$a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = 4 \cdot a^2$
$1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2 =$
$= (1 + 1 + 1 + 1) \cdot a^2 = 4 \cdot a^2$

$2 \cdot b^2 + 5 \cdot b^2 = (2 + 5) \cdot b^2 = 7 \cdot b^2$

$0{,}2 \cdot c^2 + 0{,}8 \cdot c^2 + 6 \cdot d^5 + d^5 =$
$= (0{,}2 + 0{,}8) \cdot c^2 + (6 + 1) \cdot d^5 =$
$= 1 \cdot c^2 + 7 \cdot d^5 =$
$= c^2 + 7 \cdot d^5$

Sčítame čísla pri mocninách s rovnakým základom a mocniteľom.

Odčítanie mocnín

19. Vypočítaj rozdiely mocnín:

a) $5 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^4$ **c)** $10{,}8 \cdot y^9 - 1{,}2 \cdot y^9$

b) $2 \cdot a^3 - 5 \cdot a^3$ **d)** $6 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x^7 - 4 \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x^7$

Riešenie 19.

Odčítame čísla pri rovnakých mocninách.

a) $5 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^4 = (5 - 2) \cdot 3^4 = 3 \cdot 3^4$

b) $2 \cdot a^3 - 5 \cdot a^3 = (2 - 5) \cdot a^3 = -3 \cdot a^3$

c) $10{,}8 \cdot y^9 - 1{,}2 \cdot y^9 = (10{,}8 - 1{,}2) \cdot y^9 = 9{,}6 \cdot y^9$

d) $6 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x^7 - 4 \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x^7 =$
$= (6 - 4) \cdot x^2 + (-0{,}8 - 0{,}2) \cdot x^7 = 2 \cdot x^2 + (-1) \cdot x^7 =$
$= 2 \cdot x^2 - x^7$

Odčitujeme mocniny s rovnakým základom a mocniteľom.

$4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 - 3^2 - 3^2 =$
$= 3^2 + 3^2 = \mathbf{2 \cdot 3^2}$
$4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 = (4 - 2) \cdot 3^2 = \mathbf{2 \cdot 3^2}$
$5a^2 - 0{,}4 \cdot a^2 = (5 - 0{,}4) \cdot a^2 = 4{,}6 \cdot a^2$
$5 \cdot b^2 - 3 \cdot b^2 + 6 \cdot c^5 - 2 \cdot c^5 =$
$= (5 - 3) \cdot b^2 + (6 - 2) \cdot c^5 =$
$= 2 \cdot b^2 + 4 \cdot c^5$

Odčítame čísla **pri mocninách** s rovnakým základom a mocniteľom.

Násobenie mocnín

20. Vypočítaj súčiny mocnín:

a) $4^2 \cdot 4^1$ **c)** $(2 \cdot x^9) \cdot (4 \cdot x^6)$

b) $a^7 \cdot a^4$ **d)** $\left(\frac{5}{7} \cdot y^5\right) \cdot \left(\frac{14}{25} \cdot y^2\right)$

Riešenie 20.

Základ mocniny opíšeme a mocnitele **sčítame**.

a) $4^2 \cdot 4^1 = 4^{2+1} = 4^3$

b) $a^7 \cdot a^4 = a^{7+4} = a^{11}$

c) $(2 \cdot x^9) \cdot (4 \cdot x^6) = (2 \cdot 4) \cdot x^{9+6} = 8 \cdot x^{15}$

d) $\left(\frac{5}{7} \cdot y^5\right) \cdot \left(\frac{14}{25} \cdot y^2\right) = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{25}\right) \cdot y^{5+2} = \frac{2}{5} \cdot y^7$

Pri násobení zlomkov sme použili krížové pravidlo.

Násobíme mocniny s rovnakým základom.

$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 243 = 3^5$
$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$
$(5 \cdot b^2) \cdot (3 \cdot b^4) = (5 \cdot 3) \cdot b^2 \cdot b^4 =$
$= 15 \cdot (b \cdot b) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = 15 \cdot b^6$

Pri **násobení** mocnín s rovnakým základom, **mocnitele sčítame**. Ak sú pri mocninách čísla, tie **násobíme zvlášť**.

Delenie mocnín

21. Vypočítaj podiely mocnín:

a) $5^3 : 5^1$ **c)** $(12 \cdot x^9) : (4 \cdot x^6)$

b) $a^8 : a^5$ **d)** $\left(\frac{9}{16} \cdot y^5\right) : \left(1\frac{1}{3} \cdot y^3\right)$

Riešenie 21.

Základ mocniny opíšeme a mocnitele **odčítame**.

a) $5^3 : 5^1 = 5^{3-1} = 5^2$

b) $a^8 : a^5 = a^{8-5} = a^3$

c) $(12 \cdot x^9) : (4 \cdot x^6) = (12 : 4) \cdot x^{9-6} = 3 \cdot x^3$

d) $\left(\frac{9}{16} \cdot y^5\right) : \left(1\frac{1}{3} \cdot y^3\right) =$

$= \left(\frac{9}{16} : 1\frac{1}{3}\right) \cdot y^{5-3} = \left(\frac{9}{16} : \frac{4}{3}\right) \cdot y^2 = \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot y^2 = \frac{27}{64} \cdot y^2$

Delíme mocniny s rovnakým základom.

$3^5 : 3^3 = 243 : 27 = 9 = 3^2$

$a^4 : a^3 = \frac{a^4}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a = a^1$

$(24 \cdot b^6) : (6 \cdot b^4) = \frac{24 \cdot b^6}{6 \cdot b^4} =$

$= \frac{24 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b}{6 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = 4 \cdot b^2$

Pri **delení** mocnín s rovnakým základom **mocnitele odčítame**. Ak sú pri mocninách **čísla**, tie **delíme zvlášť**.

Pri výpočte sme zmiešané číslo upravili na nepravý zlomok, a potom sme zlomky delili. To znamená, že prvý zlomok sme násobili prevrátenou hodnotou druhého zlomku.

Umocňovanie mocnín

22. Vypočítaj mocniny mocnín:

a) $(7^2)^3$ **c)** $(3 \cdot b^3)^4$

b) $(a^5)^3$ **d)** $\left(\frac{3}{4} \cdot x^3 \cdot y^2\right)^4$

Riešenie 22.

Základ mocniny opíšeme a mocnitele vynásobíme.

a) $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

b) $(a^5)^3 = a^{5 \cdot 3} = a^{15}$

c) $(3 \cdot b^3)^4 = 3^4 \cdot b^{3 \cdot 4} = 3^4 \cdot b^{12}$

d) $\left(\frac{3}{4} \cdot x^3 \cdot y^2\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot y^{2 \cdot 4} = \frac{81}{256} \cdot x^{12} \cdot y^8$

Umocňujeme mocniny.

$(3^3)^2 = (27)^2 = 729 = 3^6$
$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{12}$
$(2 \cdot a^3)^2 = (2 \cdot a^3) \cdot (2 \cdot a^3) =$
$= (2 \cdot 2) \cdot a^{3+3} = 4 \cdot a^6$

Pri umocňovaní mocniny **mocnitele násobíme**.

Počítanie s rôznymi mocninami

23.* Uprav mocniny na spoločný základ a vypočítaj:

a) $7^3 \cdot 49$ **c)** $3^4 \cdot 9^6$
b) $5^6 : 125$ **d)** $2^{10} : 16^2$

Pomôcka
$16 = 4^2$
$16 = 2^4$

Pripomínajú vám **úlohy s mocninami** nejaké učivo? ... Sú to **výrazy s premennou**.

24. Zjednoduš výrazy s mocninami:

a) $(-5a^2 + 2a^3) \cdot (-3a^2)$
b) $(-15b^2 + 6b^4) : (-3b^2)$

Riešenie 24.

Využijeme vedomosti o distributívnosti počtových výkonov a o mocninách.

a) $(-5a^2 + 2a^3) \cdot (-3a^2) = (-5a^2) \cdot (-3a^2) + (2a^3) \cdot (-3a^2) =$
$= 15a^4 - 6a^5$

b) $(-15b^2 + 6b^4) : (-3b^2) = (-15b^2) : (-3b^2) + (6b^4) : (-3b^2) =$
$= 5 - 2b^2$

25.** Zjednoduš výrazy s mocninami:

a) $(-3a^3 + 4a^2) \cdot (-2a^4) + (3a + 2a^4) \cdot a^3$
b) $(0{,}5b^6 + 0{,}5b) \cdot b^2 - b^3 \cdot (0{,}4b^5 + 0{,}2b^4)$
c) $(25c^5 + 5c^4) : (-5c^3) + (9c^2 + 3c^4) : (3c^2)$
d) $(1{,}5d^7 + 2{,}5d^5) : (0{,}5d^4) - (0{,}4d^5 - 0{,}2d^3) : d^3$
e) $(2e^4)^3$
f) $\left(\dfrac{3e^2}{4f^3}\right)^5$

Dohoda
Vo výrazoch s premennou sa zapisoval súčin
$\mathbf{3 \cdot x}$ ako $\mathbf{3x}$
Tento zápis použijeme aj v prípade mocnín.
$\mathbf{-3 \cdot a^3 = -3a^3}$

Zapamätajte si

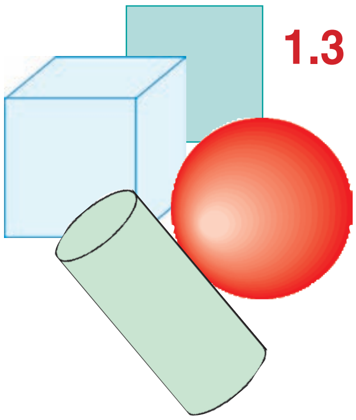
Sčítame a odčítame len mocniny s rovnakým základom a mocniteľom,
napríklad: $3x^4 + 10x^4 = 13x^4$
$5{,}8y^2 - 3{,}5y^2 = 2{,}3y^2$

Násobíme a delíme len mocniny s rovnakým základom.

Pri násobení mocnín základ opíšeme a mocnitele sčítame, napríklad: $(3x^2) \cdot (-4x^5) = -12x^7$

Pri delení mocnín základ opíšeme a mocnitele odčítame, napríklad: $(-15y^5) : (-3y^3) = 5y^2$

Mocninu umocníme tak, že základ opíšeme a mocnitele vynásobíme, napríklad: $(-3x^5)^2 = 9x^{10}$



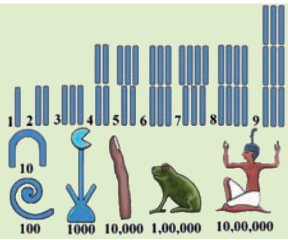
1.3 Mocniny čísla 10, predpony a ich súvis s mocninami

Stále hovoríme o mocninách. Prečo asi?
Používajú sa pri výpočte obsahov rovinných útvarov, povrchov kvádrov, kociek, nájdeme ich vo vzorcoch na výpočet povrchu a objemu valca, kužeľa... A to je len matematika... a čo iné vedy?... fyzika... chémia... biológia... ?
Zistite, kde všade sa používajú mocniny – je to ďalšia **projektová úloha**. Osobitnú kapitolu tvoria **mocniny čísla 10**. Skôr, ako si o nich povieme viac, pripomenieme si úlohy, v ktorých sa používali.

Viete, že...?

Egypťania použili ako prví tzv. **aditívny zápis** väčších čísel. Číslo 10 znázorňovali figúrkou pätnej kosti, 100 zdvihnutým lanom, 1 000 lotosovým kvetom, 10 000 zohnutým prstom a číslo 100 000 žabou alebo pulcom.

Školská encyklopédia matematiky, Príroda, 2001



Čo sme sa už učili

1. Zapíš čísla 243; 3 725; 2,136; 10,59 v desiatkovej pozičnej sústave.

Riešenie 1.

Zapisovali sme ich takto:

$$243 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$
$$3\,725 = 3 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$
$$2{,}136 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 6 \cdot \frac{1}{1000}$$
$$10{,}59 = 1 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}01$$

Teraz ich budeme zapisovať **pomocou mocnín**, teda takto:

$$243 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$
$$3\,725 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$
$$2{,}136 = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$
$$10{,}59 = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$$

Nehovorili sme ešte o mocnine s mocniteľom 0.

Dohoda

Akékoľvek nenulové číslo na nultú je 1.

$3^0 = 1$ $0{,}56^0 = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ $(-7)^0 = 1$

Prečo sa mocnina s mocniteľom 0 rovná 1?

Vydeľme napríklad $5^3 : 5^3$

$$5^3 : 5^3 = 5^{3-3} = \mathbf{5^0}$$
$$5^3 : 5^3 = 125 : 125 = 1$$

$\rightarrow$ $\mathbf{5^0 = 1}$

Nehovorili sme ani o mocnine čísla 10 so záporným mocniteľom. Vedomosti o nich – *nepatria k povinnému učivu.* Ale vždy je lepšie vedieť viac ako menej.

Takže, platí:

$$0{,}1 = \left(\frac{1}{10}\right)^1 = 10^{-1} \qquad 0{,}01 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10^{-2} \qquad 0{,}001 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 10^{-3} \qquad 0{,}000\,1 = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 10^{-4}$$

2. Čísla v tabuľke zapíš do zošita ako mocniny čísla 10. Takéto zápisy urýchlia riešenie ďalších úloh.

	1	**10**	**100**	**1 000**	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**	**10 000 000**	**100 000 000**	**1 000 000 000**
10^n										

3. Zapíš čísla 12, 347, 3 560, 56 709, 102 568 v desiatkovej pozičnej sústave. Použi mocniny čísla 10.

Riešenie 3.

$12 = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

$347 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

$3\,560 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

$56\,709 = 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

$102\,568 = 1 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

4. Zapíš čísla 1 002 304, 60 985 321, 132 456 021, 9 780 325 405 v desiatkovej pozičnej sústave. Použi mocniny čísla 10.

Viete, že...?

Veľké čísla – mocniny čísla 10 sa v Európe a v Amerike nazývajú takto:

číslo	mocnina	európsky názov	americký názov
1 000 000	10^6	milión	milion
1 000 000 000	10^9	miliarda	bilion
1 000 000 000 000	10^{12}	bilión	trilion
1 000 000 000 000 000	10^{15}	biliarda	kvadrilion

Zdroj: http://www.tanika.sk/web/matematika/recepty.htm#Názvy veľkých čísel

5. Zapíš čísla 3,5; 0,23; 42,025; 305,123 05 v desiatkovej pozičnej sústave bez mocnín aj s mocninami čísla 10.

Riešenie 5.

Zápis bez mocnín:

$3{,}5 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}1$

$0{,}23 = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}01$

$42{,}025 = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001$

$305{,}123\,05 = 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 0{,}001 + 5 \cdot 0{,}000\,01$

Zápis s mocninami:

$3{,}5 = 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$

$0{,}23 = 0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

$42{,}025 = 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

$305{,}123\,05 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5}$

6. Zapíš čísla 6,731; 105,3; 652,34; 0,231 056 v desiatkovej pozičnej sústave bez mocnín aj s mocninami čísla 10.

7. Doplň do zápisov namiesto $\ast$ číslice tak, aby platila rovnosť. Doplnené čísla môžu byť rôzne.

a)

$2\ast = \ast \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

$5\ast7 = \ast \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + \ast \cdot 10^0$

$8\,509 = \ast \cdot 10^3 + \ast \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^{\ast} + 9 \cdot \ast^0$

$36\,026 = \ast \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^{\ast} + \ast \cdot 10^2 + 2 \cdot \ast^1 + 6 \cdot 10^{\ast}$

b)

$0{,}2 = \ast \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{\ast}$

$5{,}7\ast = \ast \cdot 10^0 + \ast \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

$20{,}921 = \ast \cdot 10^1 + \ast \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{\ast} + 2 \cdot 10^{\ast} + \ast \cdot 10^{-3}$

$328{,}36 = \ast \cdot 10^2 + \ast \cdot 10^1 + \ast \cdot 10^{\ast} + 3 \cdot 10^{\ast} + \ast \cdot 10^{-2}$

Čo by sme mali vedieť **o mocninách čísla 10**?
Používajú sa v **Medzinárodnej sústave jednotiek SI**.
Majú svoje zápisy, názvy, označenia, ... Časť z nich je v nasledujúcej tabuľke.

Predpony sústavy SI						
10^n	**predpona**	**znak**	**názov**	**násobok**	**pôvod**	**príklad**
10^6	mega-	M	milión	1 000 000	gréc. – veľký	MB – megabajt
10^3	kilo-	k	tisíc	1 000	gréc. – tisíc	kg – kilogram
10^2	hekto-	h	sto	100	gréc. – sto	hPa – hektopascal
10^1	deka-	da	desať	10	gréc. – desať	dag – dekagram
10^0	-	-	jeden	1		m – meter
10^{-1}	deci-	d	desatina	0,1	lat. decimus – desiaty	dB – decibel
10^{-2}	centi-	c	stotina	0,01	lat. centum – sto	cm – centimeter
10^{-3}	mili-	m	tisícina	0,001	lat. mille – tisíc	ml – mililiter
10^{-6}	mikro-	µ	milióntina	0,000 001	gréc. – malý	µA – mikroampér
10^{-9}	nano-	n	miliardtina	0,000 000 001	gréc. – trpaslík	nT – nanotesla

V sústave SI napríklad predpona **kilo násobí** jednotku **tisíckou**, takže kilometer je 1 000 metrov a kilowatt je 1 000 wattov. Naproti tomu predpona **mili** jednotku **tisíckou delí**, takže milimeter je tisícina metra a miliampér je tisícina ampéru.

Projektová úloha

Vypracujte projekt, v ktorom použijete predpony z tabuľky – predmety ako fyzika, chémia, biológia, zemepis poskytnú určite veľa námetov.

8. Premeň dané jednotky na jednotky v zátvorkách:
a) 2,3 km (m), 0,5 km (dm), 0,025 km (cm)
b) 4,29 m (dm), 0,8 m (cm), 0,05 m (mm)
c) 6,8 dm (cm), 0,8 dm (mm)

9. Premeň dané jednotky na jednotky v zátvorkách:
a) 2,3 km^2 (m^2), 0,5 km^2 (dm^2), 0,025 km^2 (cm^2)
b) 4,29 m^2 (dm^2), 0,8 m^2 (cm^2), 0,05 m^2 (mm^2)
c) 6,8 dm^2 (cm^2), 0,8 dm^2 (mm^2)
d) 0,8 ha (a), 1,2 ha (m^2)
e) 45 a (m^2)

10. Premeň dané jednotky na jednotky v zátvorkách:
a) 4,29 m^3 (dm^3), 0,8 m^3 (cm^3), 0,05 m^3 (mm^3)
b) 6,8 dm^3 (cm^3), 0,8 dm^3 (mm^3)
c) 0,5 hl (l), 2,5 hl (dl), 0,09 hl (cl)
d) 4,1 l (dl), 0,60 l (ml), 0,003 l (cl)

11. Premeň dané jednotky na jednotky v zátvorkách:
a) 420 m (km), 2 050 dm (km), 310 256 cm (km)
b) 260 dm (m), 10 260 cm (m), 36 560 mm (m)
c) 560 cm (dm), 3 075 mm (dm)

12. Premeň dané jednotky na jednotky v zátvorkách:
a) 36 580 m^2 (km^2), 4 500 200 dm^2 (km^2), 389 560 280 cm^2 (km^2)
b) 30 250 dm^2 (m^2), 106 520 cm^2 (m^2), 560 000 mm^2 (m^2)
c) 3 298 cm^2 (dm^2), 6 280 mm^2 (dm^2)
d) 125 a (ha), 650 250 m^2 (ha)
e) 562 m^2 (a)

13. Premeň dané jednotky na jednotky v zátvorkách:
a) 5 620 dm^3 (m^3), 952 cm^3 (m^3), 7 450 mm^3 (m^3)
b) 10 253 cm^3 (dm^3), 650 280 mm^3 (dm^3)
c) 450 l (hl), 56 000 dl (hl), 4 580 000 cl (hl)
d) 320 dl (l), 4 120 cl (l), 10 250 ml (l)
e) 350 cl (dl), 3 520 ml (dl)

Poznámka

Spomínate na pomôcku pri premene jednotiek?
Ak meníme **väčšiu** jednotku **na menšiu**,
tak **násobíme** podľa potreby 10, 100, 1 000, ...

väčšie	**na**	**menšie**	
0,5 **m**	na	**cm**	predpona **centi ... 100**
0,5	krát	100	

$$\underbrace{0{,}5 \quad \text{krát} \quad 100}_{0{,}5 \cdot 100 = 50}$$

0,5 m = 50 cm

Ak meníme **menšiu** jednotku **na väčšiu**,
tak **delíme** podľa potreby číslami 10, 100 1 000, ...

menšie	**na**	**väčšie**	
420 **cm**	na	**m**	predpona **centi ... 100**
420	delené	100	

$$\underbrace{420 \quad \text{delené} \quad 100}_{420 : 100 = 4{,}20}$$

420 cm = 4,20 m

14. Ak zoradíš hodnoty uvedené na kartičkách v rôznych jednotkách podľa veľkosti od najväčšej po najmenšiu, získaš zmysluplné slová.

a)

0,652 dm	526 mm	0,000 625 km	5,62 dm	256 cm
T	I	A	F	R
2,65 m	6,25 cm			
G	I			

b)

0,000 356 a	56,3 dm^2	35 600 cm^2	53 600 mm^2	3,65 m^2
Z	R	B	A	O

c)

5,87 dm^3	8 750 cm^3	0,007 58 hl	5,78 l	0,785 m^3
E	T	A	N	S

15. Vyber správnu odpoveď **Áno** alebo **Nie** podľa toho, či je uvedená veta pravdivá alebo nepravdivá.

a) Jeden meter je viac ako 50 cm. **Áno – Nie**
Jeden km je menej ako 1 500 m. **Áno – Nie**
10 dm je viac ako 1 000 cm. **Áno – Nie**
1 000 mm je menej ako 100 dm. **Áno – Nie**

b) 100 m^2 je viac ako 100 dm^2. **Áno – Nie**
Jeden cm^2 je menej ako 1 m^2. **Áno – Nie**
10 000 dm^2 je toľko, čo 10 m^2. **Áno – Nie**
100 000 mm^2 je viac ako 100 cm^2. **Áno – Nie**

c) Jeden liter je viac ako 1 dm^3. **Áno – Nie**
100 hl je 10 dm^3. **Áno – Nie**
1 000 000 cm^3 je menej ako 1 l. **Áno – Nie**
Jeden m^3 je viac ako 10 litrov. **Áno – Nie**

1.4 Zápis veľkých a malých čísel v tvare $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$

Všetky úlohy v tejto kapitole počítame bez kalkulačky.

Čo sme sa už učili

1. Vypočítaj tieto úlohy, je to štart pre ďalšie počítanie.

2 150 000 + 3 425 000 =
5 890 000 – 2 560 000 =
7 891 000 · 500 =
12 150 000 : 5 000 =

Riešenie 1.

$$\begin{array}{r} 2\,150\,000 \\ 3\,425\,000 \\ \hline 5\,575\,000 \end{array}$$

Môžeme počítať aj bez núl:
2 150 ⟼ 000
3 425 ⟼ 000
Teraz nuly pridáme:
5 570 000

$$\begin{array}{r} 5\,890\,000 \\ -\ 2\,560\,000 \\ \hline 3\,330\,000 \end{array}$$

Môžeme počítať aj bez núl:
5 89 ⟼ 0 000
–2 56 ⟼ 0 000
Teraz nuly pridáme:
3 330 000

$$\begin{array}{r} 7\,891\,000 \\ \cdot\ 500 \\ \hline 3\,945\,500\,000 \end{array}$$

Môžeme počítať aj bez núl:
7 891 ⟼ 000
· 5 ⟼ 00
Teraz nuly pridáme:
3 945 500 000

12 150 000 : 5 000 = 2 430
–10 000
2 150 0
–2 000 0
150 00
–150 00
0

Môžeme počítať aj tak, že rovnaký počet núl škrtneme:

12 150 ~~000~~ : 5 ~~000~~ = 2 430

2. Od **vody** závisí náš život.
Vypočítaj, aká je celková dĺžka vodných tokov uvedených v tabuľke.

vodný tok (rieka)	dĺžka vodného toku v metroch
Nitra	196 700
Váh	403 000
Hron	298 000
Hornád	193 000
Ipeľ	232 500
Dunaj	172 000

Aký je podľa teba význam tohto vypočítaného údaja?

Viete, že...?

Tieto čísla sa kedysi volali „veľké“. Nachádzame ich všade okolo nás. Napríklad v tabuľke sú počty obyvateľov v susediacich štátoch. *Zdroj: Wikipédia.*

Štát	Počet obyvateľov
Maďarsko	10 019 000
Poľsko	38 116 000
Ukrajina	46 490 000
Rakúsko	8 402 000
Česko	10 507 000

Štatisti by ich zoradili vzostupne, nakreslili stĺpcový diagram, vyhodnotili percentuálne zastúpenie a znázornili ho kruhovým diagramom.

Ako sa nazýva veda, ktorá skúma obyvateľstvo v rôznych regiónoch?
Je to:
- demografia?
- etnografia?
- ekonómia?

Zistite, čo je o tom uvedené na internete.

Hron pri Tekovskom Hrádku
foto Gcenkei

Pri počítaní s veľkými číslami môžeme používať aj iných pomocníkov.
Sú to napríklad **mocniny čísla 10**.

Pomôcka
$10 = 10^1$
$100 = 10^2$
$1\,000 = 10^3$
$10\,000 = 10^4$

3. Čísla 100 000
1 000 000
10 000 000
100 000 000
zapíš ako mocniny čísla 10.
Použi tabuľku z predchádzajúcej kapitoly.

Kde sa stretneme s údajmi napísanými pomocou mocnín čísla 10?
Vo fyzike ...
V geografii ...
V astronómii ...

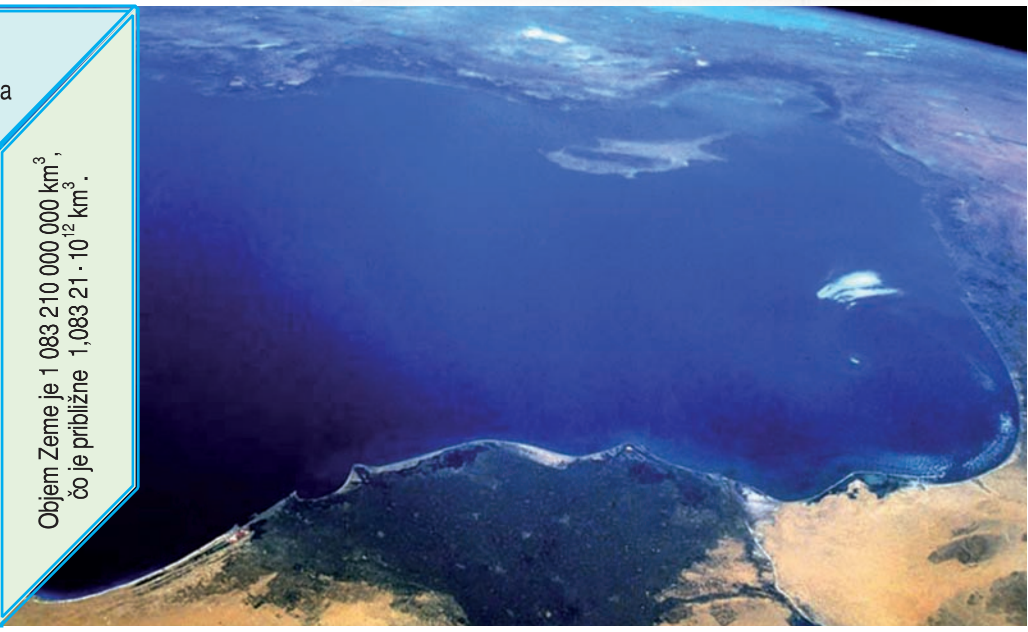
Povrch Zeme je 510,1 miliónov km^2, čo je $5{,}101 \cdot 10^8$ km^2. Z toho je pevnina 149 miliónov km^2, čo je $1{,}49 \cdot 10^8$ km^2. Voda zaberá 361 miliónov km^2, čo je $3{,}61 \cdot 10^8$ km^2.

... V roku 1983 sa vedci dohodli, že za rýchlosť svetla budú považovať rýchlosť presne 299 792 458 metrov za sekundu, približne $3 \cdot 10^8$ metrov za sekundu.

... Naša Zem je jedna z obežníc slnečnej sústavy, ktorej stred tvorí hviezda – Slnko – vzdialená od stredu Mliečnej cesty (galaxie) 33 000 svetelných rokov.

... Svetelný rok vyjadrený v metroch nám dáva číslo 9 460 730 472 580 800 m, čo je približne $9{,}4607 \cdot 10^{15}$ m.

Objem Zeme je 1 083 210 000 000 km^3, čo je približne $1{,}083\,21 \cdot 10^{12}$ km^3.



Pomocou mocnín čísla 10 zapisujeme veľké čísla takto

$50 = 5 \cdot 10^1$
$300 = 3 \cdot 10^2$
$2\,000 = 2 \cdot 10^3$
$50\,000\,000 = 5 \cdot 10^7$

$150 = 1{,}5 \cdot 10^2$
$2\,300 = 2{,}3 \cdot 10^3$
$372\,000 = 3{,}72 \cdot 10^5$
$41\,200\,000 = 4{,}12 \cdot 10^7$

Ako vzniká takýto zápis?
Použijeme:
čísla 10, 100, 1 000, 10 000, ...
mocniny čísla 10 ...
... a **súčin**.

Postup pri zápise je podobný, ako napríklad postup pri zápise čísla v desiatkovej pozičnej sústave alebo pri premene jednotiek.

$50 = 5 \cdot 10^1$
$300 = 3 \cdot 10^2$
$2\,000 = 2 \cdot 10^3$
$50\,000\,000 = 5 \cdot 10^7$

$150 = 1{,}50 \cdot 100 = 1{,}5 \cdot 10^2$
$2\,300 = 2{,}3 \cdot 1000 = 2{,}3 \cdot 10^3$
$372\,000 = 3{,}72 \cdot 100\,000 = 3{,}72 \cdot 10^5$
$41\,200\,000 = 4{,}12 \cdot 10\,000\,000 = 4{,}12 \cdot 10^7$

V zápise čísel (v súčine) používame čísla, ktoré sú vždy väčšie alebo sa rovnajú 1 a menšie ako 10.

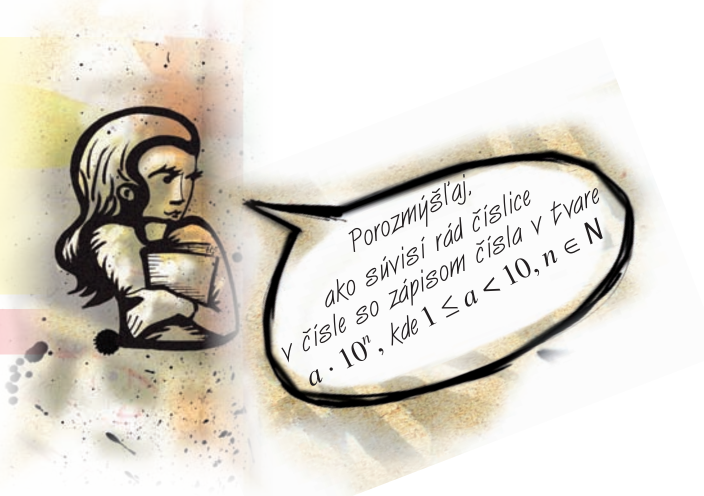
Veľké čísla zapisujeme pomocou súčinu
$a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in N$.

§

4. Zapíš dané čísla pomocou súčinu $a \cdot 10^n$, kde $1 \le a < 10$, $n \in N$.

a) 400, 6 000, 30 000, 500 000, 9 000 000
b) 360, 7 800, 62 000, 890 000, 7 200 000
c) 3 160, 72 500, 163 000, 8 910 000, 25 200 000

Úlohu môžeš riešiť aj spamäti.



Riešenie 4.

a) $4 \cdot 10^2$, $6 \cdot 10^3$, $3 \cdot 10^4$, $5 \cdot 10^5$, $9 \cdot 10^6$
b) $3{,}6 \cdot 10^2$, $7{,}8 \cdot 10^3$, $6{,}2 \cdot 10^4$, $8{,}9 \cdot 10^5$, $7{,}2 \cdot 10^6$
c) $3{,}16 \cdot 10^3$, $7{,}25 \cdot 10^4$, $8{,}91 \cdot 10^6$, $1{,}63 \cdot 10^5$, $2{,}52 \cdot 10^7$

5. Zapíš dané čísla pomocou súčinu $a \cdot 10^n$, kde $1 \le a < 10$, $n \in N$.

a) 500, 7 000, 20 000, 600 000, 3 000 000
b) 230, 8 700, 72 000, 980 000, 2 700 000
c) 6 130, 52 700, 361 000, 1 980 000, 35 300 000, 571 000 000
d) 80 800, 50 000, 580 000, 15 000 000, 40 000 000, 600 000 000

Viete, že...?

V jednej z úloh sme spomínali vodu a slovenské rieky.

Čo sa hovorí o vode?

Voda drahšia ako zlato.
Voda – nápoj.
Vodná energia – lodná doprava.
Jazerá a vodné nádrže – relax.
Priehrady – výroba elektrickej energie.

Liptovská Mara, foto: Pudelek

Pozrime sa, aké údaje vieme získať o niektorých priehradách a vodných nádržiach na Slovensku.

Pomôcka
1 ha = 100 a = 10 000 m^2
1 a = 100 m^2
1 km^2 = 1 000 000 m^2

6. V tabuľke je rozloha niektorých priehrad a vodných nádrží na Slovensku pri najvyššom stave vody v nich. Uveď rozlohu týchto priehrad v m^2 a potom ju zapíš pomocou súčinu $a \cdot 10^n$, kde $1 \le a < 10$, $n \in N$.

priehrada	Liptovská Mara	Ružín	Nitrianske Rudno	Domaša	Zemplínska Šírava
rozloha	21,6 km^2	600 ha	0,96 km^2	1 422 ha	3 350 ha

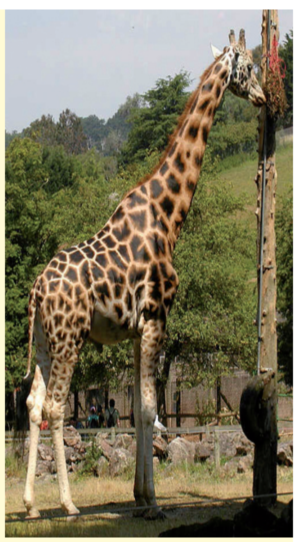
Riešenie 6.

21,6 km^2 = 21 600 000 m^2 = $2{,}16 \cdot 10^7$ m^2
600 ha = 60 000 a =
= 6 000 000 m^2 = $6 \cdot 10^6$ m^2
0,96 km^2 = 960 000 m^2 = $9{,}6 \cdot 10^5$ m^2
1 422 ha = 142 200 a =
= 14 220 000 m^2 = $1{,}422 \cdot 10^7$
3 350 ha = 335 000 a =
= 33 500 000 m^2 = $3{,}35 \cdot 10^7$ m^2

7. Zapíš pomocou súčinu $a \cdot 10^n$, kde $1 \le a < 10$, $n \in N$ zaujímavosti zo sveta živočíchov.

» Za najväčšieho suchozemského živočícha sa považuje **slon**. Jeho hmotnosť môže byť až 5 500 kilogramov.
» Najväčší živočích na svete je veľryba **vráskavec ozrutný**. Jeho hmotnosť je až 150 000 kg. To je približne ako 1 800 ľudí.
» Najväčšia ryba – **žralok veľrybí** – má hmotnosť asi 40 000 kg.
» **Žirafa** je najvyšší živočích, je 550 cm vysoká.
» K najväčším hadom na svete patrí **anakonda**, ktorá dorastá až do dĺžky 1 000 cm.

Zdroj: www.dennikrelax.sk.



Riešenie 7.

5 500 kg = $5{,}5 \cdot 10^3$ kg

150 000 kg = $1{,}5 \cdot 10^5$ kg

1 800 = $1{,}8 \cdot 10^3$

40 000 kg = $4 \cdot 10^4$ kg

550 = $5{,}5 \cdot 10^2$ cm

1 000 = $1 \cdot 10^3$ cm

8. Približný počet obyvateľov v hlavných mestách susediacich štátov sme vyjadrili pomocou už známeho súčinu. Zapíš tieto počty bez použitia mocnín.

- Varšava $1{,}70 \cdot 10^6$ obyvateľov
- Kyjev $2{,}71 \cdot 10^6$ obyvateľov
- Budapešť $1{,}69 \cdot 10^6$ obyvateľov
- Viedeň $1{,}66 \cdot 10^6$ obyvateľov
- Praha $1{,}18 \cdot 10^6$ obyvateľov

Riešenie 8.

$1{,}70 \cdot 10^6 = 1{,}70 \cdot 1\,000\,000 = 1\,700\,000$
$2{,}71 \cdot 10^6 = 2{,}71 \cdot 1\,000\,000 = 2\,710\,000$
$1{,}69 \cdot 10^6 = 1{,}69 \cdot 1\,000\,000 = 1\,690\,000$
$1{,}66 \cdot 10^6 = 1{,}66 \cdot 1\,000\,000 = 1\,660\,000$
$1{,}18 \cdot 10^6 = 1{,}18 \cdot 1\,000\,000 = 1\,180\,000$

Pomôcka

Pri **násobení** číslami 10, 100, 1 000, ... sme používali pravidlo o posúvaní desatinnej čiarky.
Desatinnú čiarku v čísle posúvame **pri násobení doprava** o rovnaký počet desatinných miest, aký je počet núl v čísle, ktorým násobíme.
$1{,}7 \cdot 1\,000\,000 = \mathbf{1{,}700\,000} = 1\,700\,000$
Počet núl v čísle 1 000 000 je 6, preto desatinnú čiarku v čísle 1,7 posúvame o 6 desatinných miest doprava.

9. Zapíš čísla bez použitia mocnín čísla 10:

a) $7 \cdot 10^4$; $3 \cdot 10^5$; $5 \cdot 10^1$; $2 \cdot 10^{10}$
b) $5{,}6 \cdot 10^1$; $3{,}7 \cdot 10^4$; $0{,}3 \cdot 10^5$; $9{,}1 \cdot 10^6$
c) $4{,}15 \cdot 10^7$; $1{,}13 \cdot 10^{12}$; $2{,}18 \cdot 10^{10}$; $8{,}23 \cdot 10^{11}$
d) $1{,}135 \cdot 10^7$; $1{,}153 \cdot 10^{12}$; $2{,}718 \cdot 10^{10}$; $8{,}253 \cdot 10^{11}$

Riešenie 9.

a) $7 \cdot 10^4 = 7 \cdot 10\,000 = 70\,000$
$3 \cdot 10^5 = 3 \cdot 100\,000 = 300\,000$
$5 \cdot 10^1 = 5 \cdot 10 = 50$
$2 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10\,000\,000\,000 = 20\,000\,000\,000$

b) $5{,}6 \cdot 10^1 = 5{,}6 \cdot 10 = 56$
$3{,}7 \cdot 10^4 = 3{,}7 \cdot 10\,000 = 37\,000$
$0{,}3 \cdot 10^5 = 0{,}3 \cdot 100\,000 = 30\,000$
$9{,}1 \cdot 10^6 = 9{,}1 \cdot 1\,000\,000 = 9\,100\,000$

c) $4{,}15 \cdot 10^7 = 4{,}15 \cdot 10\,000\,000 = 41\,500\,000$
$1{,}13 \cdot 10^{12} = 1{,}13 \cdot 1\,000\,000\,000\,000 =$
$= 1\,130\,000\,000\,000$
$2{,}18 \cdot 10^{10} = 2{,}18 \cdot 10\,000\,000\,000 =$
$= 21\,800\,000\,000$
$8{,}23 \cdot 10^{11} = 8{,}23 \cdot 100\,000\,000\,000 =$
$= 823\,000\,000\,000$

d) $1{,}135 \cdot 10^7 = 1{,}135 \cdot 10\,000\,000 = 11\,350\,000$
$1{,}153 \cdot 10^{12} = 1{,}153 \cdot 1\,000\,000\,000\,000 =$
$= 1\,153\,000\,000\,000$
$2{,}718 \cdot 10^{10} = 2{,}718 \cdot 10\,000\,000\,000 =$
$= 27\,180\,000\,000$
$8{,}253 \cdot 10^{11} = 8{,}253 \cdot 100\,000\,000\,000 =$
$= 825\,300\,000\,000$

10. Zapíš čísla bez použitia mocnín čísla 10:

a) $9 \cdot 10^6$; $4 \cdot 10^7$; $1 \cdot 10^{12}$; $8 \cdot 10^0$
b) $6{,}5 \cdot 10^1$; $7{,}3 \cdot 10^4$; $0{,}8 \cdot 10^5$; $1{,}9 \cdot 10^6$
c) $5{,}14 \cdot 10^7$; $3{,}23 \cdot 10^{12}$; $2{,}81 \cdot 10^{10}$; $3{,}28 \cdot 10^{11}$
d) $3{,}153 \cdot 10^7$; $0{,}215\,378 \cdot 10^{12}$; $25{,}817 \cdot 10^{10}$; $325{,}523 \cdot 10^{11}$

Projektová úloha

Vyhľadajte informácie o desiatich najvyšších vrchoch na Slovensku. Zapíšte ich výšky bez mocnín čísla 10 a potom aj s mocninami čísla 10. Zoraďte ich od najvyššieho po najnižší a napíšte o nich stručné charakteristiky.

11. Vypočítaj hodnoty číselných výrazov:

a) $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1$
b) $5{,}1 \cdot 10^3 - 2{,}3 \cdot 10^2 - 8{,}5 \cdot 10^1$
c) $7{,}12 \cdot 10^2 + 1{,}92 \cdot 10^3 - 2{,}78 \cdot 10^1$
d) $6{,}02 \cdot 10^3 - 3{,}2 \cdot 10^3 + 2{,}005 \cdot 10^3$

Riešenie 11.

a) $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1 =$
$= 5 \cdot 100 + 3 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 10 =$
$= 500 + 3\,000 + 90 = 3\,590$

b) $5{,}1 \cdot 10^3 - 2{,}3 \cdot 10^2 - 8{,}5 \cdot 10^1 =$
$= 5{,}1 \cdot 1\,000 - 2{,}3 \cdot 100 - 8{,}5 \cdot 10 =$
$= 5\,100 - 230 - 85 = 4\,785$

c) $7{,}12 \cdot 10^2 + 1{,}92 \cdot 10^3 - 2{,}78 \cdot 10^1 =$
$= 7{,}12 \cdot 100 + 1{,}92 \cdot 1\,000 - 2{,}78 \cdot 10 =$
$= 712 + 1\,920 - 27{,}8 = 2\,604{,}2$

d) $6{,}02 \cdot 10^3 - 3{,}2 \cdot 10^3 + 2{,}005 \cdot 10^3 =$
$= 6{,}02 \cdot 1\,000 - 3{,}2 \cdot 1\,000 + 2{,}005 \cdot 1\,000 =$
$= 6\,020 - 3\,200 + 2\,005 =$
$= 4\,825$

12. Vypočítaj výrazy bez použitia mocnín čísla 10:

a) $9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1$
b) $6{,}3 \cdot 10^3 - 1{,}5 \cdot 10^2 - 3{,}5 \cdot 10^1$
c) $9{,}17 \cdot 10^2 + 0{,}29 \cdot 10^3 - 0{,}08 \cdot 10^1$
d) $16{,}2 \cdot 10^3 - 3{,}201 \cdot 10^3 + 2{,}05 \cdot 10^3$
e) $1{,}25 \cdot 10^5 + 0{,}356\,21 \cdot 10^4 - 3{,}056 \cdot 10^2$
f) $0{,}369\,45 \cdot 10^3 - 3{,}694\,5 \cdot 10^4 + 36{,}945 \cdot 10^1$

13.** Daný je výraz:

$$A = (1{,}6 \cdot 10^3 - 2{,}04 \cdot 10^5) \cdot 10^2$$

Utvor ďalšie dva výrazy B a C tak, aby spolu spĺňali nerovnosť $B < A < C$ a oba obsahovali aspoň dva členy tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$ a $n \in N$.

14.** Daný je výraz:

$$A = (-9{,}086 \cdot 10^4 + 7{,}041 \cdot 10^3) : 10^2$$

Utvor ďalšie dva výrazy B a C tak, aby spolu spĺňali rovnosť $A = B = C$ a oba obsahovali aspoň dva členy tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$ a $n \in N$.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Číslo 30 200 môžeme zapísať ako:
A $3{,}02 \cdot 10^4$ B $3{,}2 \cdot 10^2$ C $3{,}02 \cdot 10^2$ D $3{,}2 \cdot 10^4$

2. Číslo 10 020 000 môžeme zapísať ako:
A $1{,}002 \cdot 10^4$ B $1{,}2 \cdot 10^7$ C $1{,}002 \cdot 10^7$ D $1{,}2 \cdot 10^4$

3. Číslo $9 \cdot 10^2$ je:
A 90 B 900 C 9,0 D 1,9

4. Číslo $5{,}03 \cdot 10^3$ je:
A 5 030 B 53 000 C 5 003 D 5 300

5. Číslo $1{,}302 \cdot 10^4$ je:
A 1 302 000 B 13 020 C 132 000 D 1 320

6. Milión zapíšeme ako:
A 10^7 B $1 \cdot 10^5$ C $1 \cdot 10^6$ D 10^3

7. 3,5 km^2 je:
A $3{,}5 \cdot 10^6$ m^2 B $3{,}5 \cdot 10^3$ m^2 C $3{,}5 \cdot 10^6$ m D $3{,}5 \cdot 10^3$ m

8. 7 800 km je:
A $7{,}8 \cdot 10^3$ m B $7{,}8 \cdot 10^6$ m C $7{,}8 \cdot 10^2$ m D $7{,}8 \cdot 10^4$ m

9. Výraz $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$ sa rovná:
A 4 310 B 4 302 C 4 032 D 4 320

10. Výraz $5{,}5 \cdot 10^3 - 5{,}5 \cdot 10^2 - 5{,}5 \cdot 10^1$ sa rovná:
A 48 950 B 44 C 4 445 D 4 895

Viete, že...?

Aké významné je číslo 10?

Číslo 10 je základom najpoužívanejšej desiatkovej číselnej sústavy.

Antický filozof a matematik Pytagoras považoval číslo 10 za vrchol dokonalosti.
Číslo 10 totiž vznikne súčtom čísel 1, 2, 3 a 4, ktorým tiež prisudzoval veľký význam.

1 považoval za jeden konkrétny bod
2 považoval za priamku, čo má začiatok a koniec
3 považoval za plochu (už pomocou 3 bodov môžeme definovať základnú plochu, ktorá má začiatok, koniec a „priestor medzi tým“)
4 považoval za priestor, štvrtý rozmer je čas

Zdroj: internet.

Niečo navyše – malé čísla

Čo sme sa už učili

15. Vypočítaj najprv tieto úlohy, potom rýchlejšie pochopíš nové učivo.

0,000 567 + 0,000 126 =
0,005 678 – 0,003 246 =
0,000 567 · 0,003 =
0,006 309 : 0,003 =

Riešenie 15.

0,000 567 0,000 126 **0,000 693**	0,005 678 – 0,003 246 **0,002 432**
0,000 567 · 0,003 **0,000 001 701**	0,006 309 : 0,003 = /· 1 000 6,309 : 3 = **2,103**

Projektová úloha

Zistite, čo sa o malých číslach alebo konštantách píše na internete. A ako sa s nimi počíta.

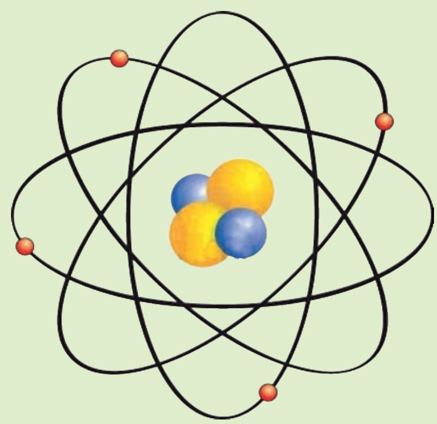
Tieto čísla sme kedysi volali „malé“. Môžeme ich nájsť v učebniciach fyziky, chémie, dokonca aj biológie, alebo aj v encyklopédiách. Zvyčajne sú to konštanty. V bežnom živote ich používame určite menej ako „veľké čísla“.

Viete, že...?

Ak spomíname malé čísla, určite viacerí začnú hovoriť
– o najmenšej častici,
– o najmenšom prvku,
– o najmenšom zvierati,
– o najmenšej planéte atď.

Za najmenšiu časticu sa dlhé roky považoval **atóm**.
Ernest Rutherford a Niels Bohr dokázali, že atóm nie je nedeliteľný.
V tabuľke sa nachádzajú častice objavené v atóme a ich hmotnosti.

subatomárna častica	objaviteľ (rok)	hmotnosť
elektrón	Joseph John Thomson (1897)	$9{,}109\,1 \cdot 10^{-31}$
protón	Ernest Rutherford (1918)	$1{,}672\,9 \cdot 10^{-27}$
neutrón	James Chadwick (1932)	$1{,}674\,9 \cdot 10^{-27}$



Zdroj: internet.

Zapamätajte si

Veľké čísla sa zapisujú pomocou súčinu $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, a $n \in N$.
Napríklad:

$1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$	$1\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^9$
$7\,000\,000 = 7 \cdot 10^6$	$7\,000\,000\,000 = 7 \cdot 10^9$
$8\,200\,000 = 8{,}2 \cdot 10^6$	$8\,200\,000\,000 = 8{,}2 \cdot 10^9$
$3\,125\,000 = 3{,}125 \cdot 10^6$	$3\,125\,000\,000 = 3{,}125 \cdot 10^9$

Čísla zapísané pomocou **súčinu** $a \cdot 10^n$ **upravujeme na reálne čísla**.
Napríklad:

$1 \cdot 10^4 = 10\,000$	$1 \cdot 10^9 = 1\,000\,000\,000$
$5 \cdot 10^6 = 5\,000\,000$	$6 \cdot 10^8 = 600\,000\,000$
$7{,}3 \cdot 10^5 = 730\,000$	$4{,}3 \cdot 10^{10} = 43\,000\,000\,000$
$9{,}031 \cdot 10^6 = 9\,031\,000$	$2{,}103 \cdot 10^3 = 2\,103$

1.5 Počítanie s veľkými a malými číslami, zaokrúhľovanie a odhad výsledku

Čo sme sa už učili

Veľké a malé čísla sme spomínali v predchádzajúcich kapitolách.

Pripomeňme si **mocniny čísla 10**, pomocou ktorých sme ich zapisovali.

$10^1 = 10$ ... desať	desatina ... $0{,}1 = 10^{-1}$
$10^2 = 100$ ... sto	stotina ... $0{,}01 = 10^{-2}$
$10^3 = 1\,000$ ... tisíc	tisícina ... $0{,}001 = 10^{-3}$
$10^4 = 10\,000$ ... desať tisíc	desaťtisícina ... $0{,}000\,1 = 10^{-4}$
$10^5 = 100\,000$ ... stotisíc	stotisícina ... $0{,}000\,01 = 10^{-5}$
$10^6 = 1\,000\,000$ ... milión	milióntina ... $0{,}000\,001 = 10^{-6}$

Teraz budeme hovoriť o veľkých a malých číslach, o ich zaokrúhľovaní a počítaní s nimi pomocou odhadu a zaokrúhľovania. Budeme používať slová ako **odhad**, **približne**, **asi**, ...
Kedy je vhodné používať **odhad** a kedy **zaokrúhľovanie**?
Odpoveď na túto otázku nám dajú riešenia nasledujúcich úloh.

Predstavte si, že stojíte pri pokladni v obchode a čo najrýchlejšie chcete zaplatiť. Chystáte si peniaze. Kupujete 2 jogurty po 35 centov, 3 rožky po 6 centov a 2 horalky po 74 centov.

Viete hneď po dočítaní tohto textu bez počítania povedať minimálny počet eur, ktoré si máte nachystať na zaplatenie nákupu?
Ak áno, máte **dobrý zmysel pre odhad**.

Nasledujúce úlohy počítajte bez použitia kalkulačky.

Pomôcka
Ako aritmeticky zaokrúhľujeme čísla?
Rozhodujúca je **číslica 5**.
1 236 zaokrúhlime na desiatky.
1 236 ≐ **1 240**
6 > **5** zaokrúhlenie nahor
4 253 zaokrúhlime na stovky
4 253 ≐ **4 300**
5 = **5** zaokrúhlenie nahor
3 254 zaokrúhlime na tisícky
3 254 ≐ **3 000**
2 < **5** zaokrúhlenie nadol

1. Odhadni výsledok sčítania a potom čísla sčítaj.
Porovnaj svoj odhad s presným výpočtom sčítania.

a) 125 369 567 + 1 758 369
b) 0,236 586 + 1,369 258 125

Riešenie 1.

a) 125 369 567 + 1 758 369 =
Ako urobíme čo najpresnejší odhad?
Odhad sa robí s presnosťou na jednotky, desiatky, stovky, tisícky..., resp. desatiny, stotiny, tisíciny...
Urobíme ho s presnosťou na milióny, lebo menšie číslo – druhý sčítanec má prvú číslicu zľava na mieste miliónov.

Znamená to, že čísla v súčte **zaokrúhlime na milióny** a tie **spamäti sčítame**.

125 369 567 ≐ 125 000 000
↓ ↑
3 < 5 zaokrúhľujeme aritmeticky nadol

1 758 369 ≐ 2 000 000
↓ ↑
7 > 5 zaokrúhľujeme aritmeticky nahor

Zaokrúhlený súčet je:
125 000 000 + 2 000 000 = 127 000 000
(Sčítame 125 + 2 spamäti a nuly pripíšeme.)

Presný súčet je:

$$\begin{array}{r} 125\,369\,567 \\ \underline{1\,758\,369} \\ 127\,127\,936 \end{array}$$

Odhad sa líši od presného súčtu o:

$$\begin{array}{r} 127\,127\,936 \\ \underline{-127\,000\,000} \\ \mathbf{127\,936} \end{array}$$

Od väčšieho z čísel odčítame menšie.

Porozmýšľaj, či je to veľa alebo málo.

pokračovanie ▷▷

Riešenie 1. *pokračovanie*

b) 0,236 586 + 1,369 258 125 =
Odhad urobíme s presnosťou na desatiny, lebo menšie číslo – prvý sčítanec má prvú nenulovú číslicu zľava na mieste desatín.

Znamená to, že čísla v súčte **zaokrúhlime na desatiny** a tie **spamäti sčítame**.

0,236 586 ≐ 0,200 000 = 0,2

3 < 5 zaokrúhlime nadol

1,369 258 125 ≐ 1,400 000 000 = 1,4

6 > 5 zaokrúhlime nahor

Zaokrúhlený súčet je 0,2 + 1,4 = 1,6.

Presný súčet je:

```
 0,236 586 000
 1,369 258 125
 1,605 844 125
```

Odhad sa líši od presného súčtu o:

```
  1,605 844 125
– 1,600 000 000
  0,005 844 125
```

Od väčšieho z čísel odčítame menšie.

Porozmýšľaj, či je to veľa alebo málo.

2. Odhadni výsledok sčítania a potom čísla sčítaj. Porovnaj výsledky odhadu s výsledkami presného sčítania.

a) 12 369 258 + 321 569 485
b) 569 458 158 + 26 352 786
c) 1,567 321 + 0,326 97
d) 2,369 564 398 + 0,025 973

3. Odhadni výsledok odčítania a potom čísla odčítaj. O koľko sa odhad líši od presného výpočtu? Porovnaj svoje riešenie s riešeniami spolužiakov.
46 896 321 – 40 526 302

Riešenie 3.

46 896 321 – **40** 526 302 =
Čísla obsahujú desiatky miliónov – číslica na tomto mieste je rovnaká, je to 4.

Odhad preto urobíme na milióny.

46 896 321 ≐ 47 000 000

8 > 5 zaokrúhlime nahor

40 526 302 ≐ 41 000 000

5 = 5 zaokrúhlime nahor

Odhady odčítame: 47 000 000 – 41 000 000 =
= 6 000 000

Spamäti odčítame 47 a 41, nuly pripíšeme.

Presný rozdiel:

```
  46 896 321
– 40 526 302
   6 370 019
```

Odhad sa líši od presného výsledku o:

```
  6 370 019
– 6 000 000
    370 019
```

Vzhľadom na počítanie v miliónoch, je odhad prijateľný.

4. Odhadni výsledok odčítania a potom čísla odčítaj. Porovnaj výsledky odhadu s výsledkami presného odčítania.

a) 3 000 236 987 – 236 258 269
b) 5 102 003 698 – 1 000 236 102
c) 0, 259 369 – 0,000 269
d) 2,236 258 369 – 2,126 458 126
e) 0,000 269 247 – 0,000 000 247

Projektová úloha
Zistite, v ktorých profesiách je vhodné používať odhad. Napíšte aspoň jeden príklad.

V nasledujúcich úlohách môžeš násobiť a deliť pomocou kalkulačky, ale len pôvodné čísla zo zadaní.

5. Odhadni výsledok násobenia a potom čísla vynásob. O koľko sa odhad líši od presného výpočtu?
Porovnaj svoje riešenie s riešeniami spolužiakov.

a) 786 · 350 **b)** 0,25 · 2,81

Riešenie 5.

a) 786 · 350 =
Prvé číslice zľava sú v oboch číslach na mieste stoviek: 786 · 350. Zaokrúhlime čísla na stovky.

786 ≐ 800

8 > 5 zaokrúhlime nahor

350 ≐ 400

5 = 5 zaokrúhlime nahor

Vynásobíme zaokrúhlené čísla:
800 · 400 = **320 000**
(Čísla 8 a 4 vynásobíme spamäti a nuly pripíšeme.)
Presný súčin vypočítame pomocou kalkulačky:
786 · 350 = **275 100**
Odhad sa líši od presného výsledku o:

```
  320 000
– 275 100
   44 900
```

Počítali sme súčin stoviek a odhad sa od presného výpočtu líši o desaťtisíce.

pokračovanie

Riešenie 5. *pokračovanie*

Bolo by lepšie zaokrúhliť čísla na desiatky a urobiť odhad pre čísla **zaokrúhlené na desiatky**?
Pozrime sa, ako by to vyzeralo.
Zaokrúhlime čísla na desiatky.

786 ≐ 790
6 > 5 zaokrúhlime nahor

350 ≐ 350
0 < 5 zaokrúhlime nadol

Ak máme vynásobiť takto zaokrúhlené čísla (790 a 350), väčšinou použijeme kalkulačku.
Nuž a potom nám takýto odhad počítanie neuľahčí.
Preto treba zvážiť, **kedy odhad použiť a ako**.
Kedy je približný výpočet vhodný a kedy nie.

b) 0,25 · 2,81 =
Prvé číslo je menšie a jeho prvá nenulová číslica zľava je na mieste desatín. Preto zaokrúhlime obe čísla na desatiny, tie ľahko **spamäti vynásobíme**.

0,25 ≐ 0,3
5 = 5 zaokrúhlime nahor

2,81 ≐ 2,8
1 < 5 zaokrúhlime nadol

Vynásobíme spamäti zaokrúhlené čísla:
2,8 · 0,3 = **0,84**

Presný súčin vypočítame pomocou kalkulačky:
0,25 · 2,81 = **0,702 5**
Odhad sa líši od presného výsledku o:

$$\begin{array}{r} 0{,}840\,0 \\ -0{,}702\,5 \\ \hline \mathbf{0{,}137\,5} \end{array}$$

Znovu si položme otázku:
Oplatilo sa počítať približne?

6. Odhadni výsledok násobenia a potom čísla vynásob. Porovnaj výsledky odhadu s výsledkami presného násobenia.

a) 325 · 12
b) 4 510 · 19
c) 4,56 · 0,97
d) 35,9 · 2,8

Projektová úloha
Pokúste sa spracovať údaje o Zemi – polomer, hmotnosť, vzdialenosť od Slnka, vzdialenosť od iných planét... Údaje vyjadrite pomocou mocnín čísla 10.

7. Odhadni výsledok delenia a potom čísla vydeľ. Aký je rozdiel medzi odhadom a presným výpočtom?
Porovnaj svoje riešenie s riešeniami spolužiakov.
964 258 : 320 =

Riešenie 7.

964 258 : 320 =
Úprava delenca a deliteľa:
964 258 ⟶ 900 000
320 ⟶ 300

Odhady delíme spamäti:
900 000 : 300 = 3 000

Teraz čísla vydelíme na kalkulačke:
964 258 : 320 = 3 013,306 25

Odhad sa líši od presného výsledku o:
3 013,306 25 – 3 000 = **13,306 25**

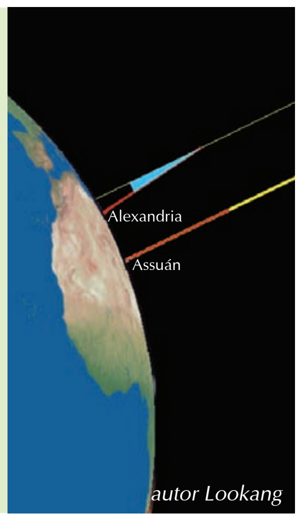
Je to veľa alebo málo?
Zdá sa, že je to dostatočne presné.

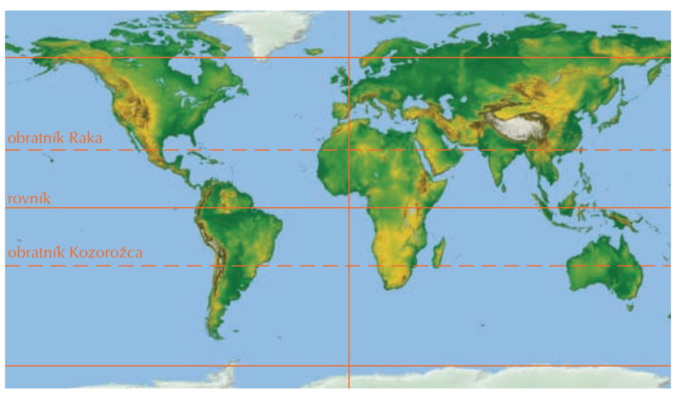
8. Odhadni výsledok delenia a potom čísla vydeľ. Aký je rozdiel medzi odhadom a presným výpočtom?

a) 256 : 36
b) 3 961 : 48
c) 36,25 : 7,9
d) 0,002 567 : 0,000 87
e) 0,000 000 357 : 0,000 000 058

Viete, že...?

O veľkých číslach hovoríme hlavne v astronómii. Eratostenes vytvoril princíp „stupňového merania Zeme“. Na jeho základe a na základe odmeranej vzdialenosti medzi Alexandriou a Asuánom stanovil dĺžku zemského poludníka na 252 000 stadiónov. Pri meraní použil prístroj skafé, ktorým možno určiť výšku Slnka. Pretože dĺžka stadiónu bola rôzna (egyptský 157,7 m, v Grécku bol olympijský stadión 177,6 m, iónsky stadión 210 m), dá sa ťažko povedať, k akej dĺžke poludníka dospel. Predpokladáme, že použil egyptský, vtedy by mal poludník dĺžku 39 690 km.





9. POČET OBYVATEĽOV

Zo správy Slovenského štatistického úradu: „K 21. máju 2011, k rozhodujúcemu okamihu sčítania, mala Slovenská republika 5 397 036 trvalo bývajúcich obyvateľov. V porovnaní so sčítaním pred desiatimi rokmi sa počet trvalo bývajúcich obyvateľov SR zvýšil o 17 581. Zistený prírastok počtu obyvateľov v období 2001 – 2011 je najnižší v histórii sčítania na Slovensku. Počet trvalo bývajúcich obyvateľov SR sa zvyšuje, ale stále pomalším tempom.“

Približne akú časť z trvalo bývajúcich obyvateľov k 21. máju 2011 tvorí zistený prírastok? Riešenie uveď v tvare zlomku.

Riešenie 9.

Zlomok bude mať tvar

$$\frac{17\,581}{5\,397\,036}$$

čitateľ zlomku – prírastok

menovateľ zlomku – počet trvalo bývajúcich obyvateľov

Hovoríme, že takýto zlomok *má malú výpovednú hodnotu*. **Zjednodušíme** ho preto **na základný tvar** (ak je to možné) alebo ho **zjednodušíme** tak, aby predstava o množstvách bola čo najzrozumiteľnejšia.

$$\frac{17\,581}{5\,397\,036} = 17\,581 : 5\,397\,036 = 0{,}003\,257... \doteq 0{,}003 = \frac{3}{1\,000}$$

Desatinné číslo zaokrúhlime na tisíciny (prvú nenulovú číslicu zľava).

Zlomok môžeme zjednodušovať aj takto:

$$\frac{17\,581}{5\,397\,036} = \frac{17\,581 : 17\,581}{5\,397\,036 : 17\,581} = \frac{1}{306{,}98...} \doteq \frac{1}{307}$$

Číslo 306,98... zaokrúhlime na celé číslo, teda na číslo 307.

Ktorý z výsledkov je **lepší**? Je nejaký **vzťah** medzi oboma výsledkami?

Porovnajme získané zlomky: $\frac{3}{1\,000}$ a $\frac{1}{307}$.

Prvý zlomok upravíme na zlomok s čitateľom 1:

$$\frac{3:3}{1\,000:3} \doteq \frac{1}{333} \qquad \text{Platí: } \frac{1}{333} < \frac{1}{307}$$

Je táto nepresnosť **významná**? Aký význam majú tieto zlomky?

$\frac{3}{1\,000}$ znamená, že na 1 000 obyvateľov z roku 2001 pribudli približne traja noví obyvatelia.

Z trvalo bývajúcich obyvateľov k 21. máju 2011 tvorí zistený prírastok približne $\mathbf{\frac{3}{1000}}$.

Prirodzený prírastok obyvateľstva sa zvyčajne vyjadruje v **percentách**.
Vyjadrime pomocou nich riešenie tejto úlohy.
Delíme zistený prírastok počtom trvalo bývajúcich obyvateľov:

$$17\,581 : 5\,397\,036 = 0{,}003\,257...$$

Desatinné číslo zaokrúhľujeme podľa vopred určených podmienok.
Podmienku nemáme určenú, tak číslo zaokrúhlime na desaťtisíciny:

$$0{,}003\,257... \doteq 0{,}003\,3$$

Počet percent získame násobením číslom 100:

$$0{,}003\,3 \cdot 100 = 0{,}33\ \%.$$

Z trvalo bývajúcich obyvateľov k 21. máju 2011 tvorí zistený prírastok približne **0,33 %**.

10. NAŠE ŠKOLY

Z celkového počtu 148 733 žiakov, ktorí študovali v roku 2010 na stredných školách, na gymnáziách študovalo 55 499 žiakov a na stredných odborných školách 93 234 žiakov.
Pomocou zlomku uveď približne, aká časť žiakov z celkového počtu študovala v roku 2010 na gymnáziách a aká časť na stredných odborných školách.

11. VOĽBY PREZIDENTA V ROKU 2009 (druhé kolo)

Počet a podiel platných hlasov odovzdaných pre kandidátov na prezidenta Slovenskej republiky.

meno a priezvisko	počet odovzdaných platných hlasov	poznámka
Ivan Gašparovič	1 234 787	Kandidát zvolený za prezidenta Slovenskej republiky
Iveta Radičová	988 808	
spolu	2 223 595	

Zdroj: http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=67

Pomocou zlomku približne uveď, akú časť z odovzdaných platných hlasov získala Iveta Radičová vo voľbách na funkciu prezidenta SR v roku 2009.

12. PREDAJ AUTOMOBILOV v roku 2011 na Slovensku

Správa zo dňa 16. januára 2012, autor Ladislav Holop.

V roku 2011 bolo na Slovensku predaných 73 938 vozidiel kategórie M1 a N1. To je o 2 987 viac než v minulom roku, no stále o 16 470 menej než v roku 2009.

V roku 2011 sa zamiešalo aj poradie značiek. Zostava lídrov Škoda, Renault a VW už neplatí. Renault značne poľavil a pred seba pustil nielen VW, ale aj Peugeot a Kiu. Pri malých úžitkových vozidlách obsadil prvé miesto Fiat s podielom 24,48 %.

Najpredávanejším osobným autom roku 2011 bola na Slovensku **Škoda Fabia**. Počas 12 mesiacov sa pre ňu rozhodlo 2 518 (hatchback), resp. 2 455 (kombi) zákazníkov.

Poradie áut podľa predaja v roku 2011 na Slovensku

1. Škoda Fabia	4 973 ks
2. Škoda Octavia	4 483 ks
3. Kia Sportage	1 904 ks
4. Škoda Octavia Tour	1 742 ks
5. Suzuki SX4	1 684 ks
5. Kia cee´d	1 627 ks
7. VW Polo	1 562 ks
8. VW Golf	1 525 ks
9. Dacia Duster	1 200 ks
10. Hyundai i30	1 019 ks

Zdroj:
http://zavolantom.autovia.sk/2012/01/16/predaje-2011-poradie-znaciek-aut-na-slovensku/

a) Vyjadri pomocou zlomku, akú časť z prvej desiatky áut predaných na Slovensku tvorí Škoda Octavia a akú VW Golf.

b) Akú časť predaja tvoria autá značky KIA?

Čo sme sa už učili

Každá počtová operácia má v matematike svoju **opačnú operáciu.**

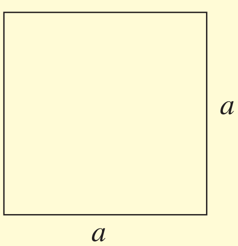
$2 \cdot 0{,}5$ $A + B$ A^2 $3 - 4$ X^3 $a - b$ $\sqrt{25}$ $0{,}5 : 2$ $\sqrt[3]{27}$ $3 + 4$

sčítanie – odčítanie
odčítanie – sčítanie
násobenie – delenie
delenie – násobenie

Opačná operácia k **u**mocňovaniu je **od**mocňovanie.

Umocňovanie	mocnina	druhá mocnina tretia mocnina mocnina s prirodzeným mocniteľom
Odmocňovanie	**od**mocnina	druhá **od**mocnina tretia **od**mocnina

1. Záhrada na okraji mesta má plochu (výmeru) 100 m² a tvar štvorca. Akú dĺžku má záhrada?



Riešenie 1.

Dĺžka záhrady je vlastne dĺžka strany štvorca s obsahom 100 m².

Úlohu môžeme počítať takto: | Úlohu môžeme počítať aj takto:

Ak označíme **stranu štvorca** ***a***,
potom **obsah** *S* počítame

ako **súčin** $S = a \cdot a$
$S = 100\ \text{m}^2$
$a \cdot a = 100$

Súčin akých **dvoch rovnakých** čísel je 100?
10 · 10 = 100
Strana štvorca je 10 m.

ako **mocninu** $S = a^2$
$S = 100\ \text{m}^2$
$a^2 = 100$

Druhá mocnina akého čísla je 100?
$\mathbf{10^2 = 100}$
Strana štvorca je 10 m.

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou **odmocniny**:

$S = a^2$
$\boldsymbol{a^2 = 100}$
$\boldsymbol{a = \sqrt{100}}$
$\boldsymbol{a = 10}$ lebo $\mathbf{10^2 = 10 \cdot 10 = 100}$
Záhrada má dĺžku 10 m.

Keď chceme kúpiť pozemok na stavbu domu alebo záhradku, alebo chatku s pozemkom, skoro vždy je daná **plocha** – hovoríme **výmera – v štvorcových metroch alebo vároch**.
Preto je užitočné vedieť, ako sa dajú vypočítať rozmery rôznych pozemkov, ktoré majú často tvar štvorca, obdĺžnika, zriedkavejšie lichobežníka, kruhu alebo trojuholníka.

2. Aký polomer má záhon v parku, ak má tvar kruhu s obsahom 12,56 m^2?

Vyber jednu z možností **A** až **D**:

A 3,14 m **B** 4 m **C** 2 m **D** 6,28 m

Riešenie 2.

Úlohu môžeme počítať takto: Úlohu môžeme počítať aj takto:

Ak označíme **polomer kruhu *r*** a **obsah** kruhu *S*, tak ***r*** počítame

takto:

ako **súčin** $S = \pi \cdot r \cdot r$

$S = 3{,}14 \cdot r \cdot r$

$12{,}56 = 3{,}14 \cdot r \cdot r$

$12{,}56 : 3{,}14 = r \cdot r$

$\mathbf{4 = r \cdot r}$

Súčin akých dvoch **rovnakých čísel** je 4?

$2 \cdot 2 = 4$

Polomer kruhového záhona je 2 m.

alebo aj takto:

ako **mocninu** $S = \pi \cdot r^2$

$S = 3{,}14 \cdot r^2$

$12{,}56 = 3{,}14 \cdot r^2$

$12{,}56 : 3{,}14 = r^2$

$\mathbf{4 = r^2}$

Druhá mocnina akého čísla je **4**?

$2^2 = 4$

Polomer kruhového záhona je 2 m.

Správna odpoveď je **C.**

Úlohu vieme riešiť aj pomocou **odmocniny**:

$S = \pi \cdot r^2$

$S = 3{,}14 \cdot r^2$

$12{,}56 : 3{,}14 = r^2$

$\mathbf{r^2 = 4}$

$\mathbf{r} = \sqrt{4}$

$\mathbf{r = 2}$ lebo $\mathbf{2^2 = 4}$

Pri riešení týchto úloh sme používali vedomosti o druhej mocnine čísla:

Druhá mocnina čísla je súčin dvoch rovnakých čísel.

Súčasne sme ukázali výpočet pomocou **druhej odmocniny čísla**.

3. Urči dĺžku strany štvorca, ak je jeho obsah 49 cm^2.

Riešenie 3.

Ak si označíme stranu štvorca *a*, potom:

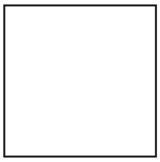
$S = a^2$

$49 = a^2$

$a = \sqrt{49}$

$a = 7$ lebo $7^2 = 49$

Dĺžka strany štvorca je 7 cm.



Úlohu určite vyriešia viacerí aj spamäti.

4. Urči dĺžku strany štvorca, ak je jeho obsah:

a) 144 dm^2
b) 625 mm^2
c) 121 m^2
d) 2 500 cm^2
e) 44 900 m^2

5. Urči dĺžku polomeru kruhu, ak je jeho obsah 28,26 mm^2.

Riešenie 5.

Nech má kruh polomer *r*. Potom platí:

$S = \pi \cdot r^2$

$28{,}26 = 3{,}14 \cdot r^2$

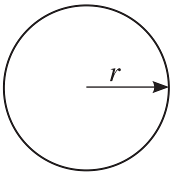
$28{,}26 : 3{,}14 = r^2$

$9 = r^2$

$r = \sqrt{9}$

$r = 3$ lebo $3^2 = 9$

Polomer kruhu má dĺžku 3 mm.



6. Urči dĺžku polomeru kruhu, ak je jeho obsah:

a) 3,14 m^2
b) 25,12 dm^2
c) 314 cm^2
d) 20,24 mm^2
e) 78,5 m^2

Hovoríme, že druhá odmocnina z a je také číslo b, ktorého druhá mocnina je a.

Stručne matematicky zapísané: $\sqrt[3]{a} = b$ práve vtedy, keď $b^2 = a$ pre $a \geq 0, b \geq 0$.

znak odmocnenia **základ odmocniny (odmocnenec)** **výsledok odmocnenia**

Druhá odmocnina má aj tento zápis: $\sqrt[2]{a}$

Platí: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

Takéto odmocniny je vhodné vedieť naspamäť:

$\sqrt{100} = 10$	lebo	$10^2 = 100$
$\sqrt{4} = 2$	lebo	$2^2 = 4$
$\sqrt{25} = 5$	lebo	$5^2 = 25$
$\sqrt{16} = 4$	lebo	$4^2 = 16$
$\sqrt{81} = 9$	lebo	$9^2 = 81$

Problémová úloha

Pokúste sa doplniť do štvorčekov správne znaky nerovnosti:

$$\sqrt{a} = b \text{ práve vtedy, keď } b^2 = a.$$

Pre a a b musia platiť **podmienky**:

$$a \square 0$$

$$b \square 0$$

Viete, že...?

Na konci 3. tisícročia sa v mezopotámskej matematike pri riešení úloh používali tabuľky druhých a tretích mocnín a druhých a tretích odmocnín. Odmocniny sa počítali pomocou metódy **regula falsi** (chybného výpočtu).

Najprv urobili odhad výsledku odmocniny a potom zisťovali pomocou druhej mocniny, ako blízko sa dostali k odmocnencovi.

Takto určili s presnosťou na 5 desatinných miest odmocninu z dvoch: $\sqrt{2} \doteq 1{,}414\ 21$

7. Vypočítaj druhé odmocniny:

a) $\sqrt{12\,100}$ **b)** $\sqrt{0{,}81}$ **c)** $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

Riešenie 7.

$\sqrt{12\,100} = 110$ lebo $110^2 = 12\,100$

$\sqrt{0{,}81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$ → lebo $9^2 = 81$ a $10^2 = 100$

→ alebo $\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$

$\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ → lebo $5^2 = 25$ a $4^2 = 16$

→ alebo $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

8. Vypočítaj druhé odmocniny:

a) $\sqrt{36}, \sqrt{64}, \sqrt{169}, \sqrt{196}, \sqrt{900}, \sqrt{2\,500}, \sqrt{160\,000}$

b) $\sqrt{0{,}09}, \sqrt{0{,}04}, \sqrt{0{,}25}, \sqrt{0{,}64}, \sqrt{0{,}0121}, \sqrt{0{,}0225}$

c) $\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{9}{16}}, \sqrt{2\frac{7}{9}}, \sqrt{1\frac{11}{25}}$

d) $\sqrt{0{,}3 - 0{,}14}, \sqrt{0{,}2 \cdot (1 - 0{,}8)}, \sqrt{\frac{3}{4} + 0{,}25}, \sqrt{\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{3}\right)}$

9. Vypočítaj odmocniny:

a) $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{100}, \sqrt{10\,000}, \sqrt{1\,000\,000}$

b) $\sqrt{0{,}01}, \sqrt{0{,}0001}, \sqrt{0{,}000\,001}$

c) $\sqrt{\frac{1}{100}}, \sqrt{\frac{1}{10\,000}}, \sqrt{\frac{1}{1\,000\,000}}$

Navrhni pravidlo pre ich počítanie.

Problémová úloha

Navrhnite úlohy, v ktorých sa dajú počítať druhé odmocniny bez kalkulačky. Povedzte ich spolužiakom – vyskúšajte si úlohu učiteľa.

10. Vypočítaj hodnotu výrazu

$$\sqrt{16} + \sqrt{121} - \sqrt{4} - \sqrt{1}$$

Riešenie 10.

Najprv vypočítame jednotlivé odmocniny a potom ich sčítame alebo odčítame.

$\sqrt{16} + \sqrt{121} - \sqrt{4} - \sqrt{1} =$

$= 4 + 11 - 2 - 1 =$

$= 15 - 3 = \mathbf{12}$

Hodnota výrazu je **12**.

11. Vypočítaj hodnoty výrazov:

a) $\sqrt{36}-\sqrt{9}+\sqrt{196}-\sqrt{169}$

b) $\sqrt{0{,}25}+\sqrt{0{,}16}-\sqrt{0{,}81}-\sqrt{0{,}01}$

c) $\sqrt{0{,}002\,5}-\sqrt{0{,}09}-\sqrt{0{,}001\,6}+\sqrt{0{,}000\,1}$

d) $\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{25}{64}}-\sqrt{\frac{1}{25}}$

e) $\sqrt{\frac{16}{196}}-\sqrt{\frac{1}{49}}+\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{25}{16}}$

12. Ktorý z výrazov A až D má najväčšiu hodnotu?

$A=\sqrt{150-6}$ $\qquad C=\sqrt{363:3}$

$B=\sqrt{25+24}$ $\qquad D=\sqrt{25\cdot 4}$

Riešenie 12.

Najprv vypočítame jednotlivé odmocniny a potom porovnáme hodnoty výrazov:

$A=\sqrt{150-6}=\sqrt{144}=12$ $\qquad C=\sqrt{363:3}=\sqrt{121}=11$

$B=\sqrt{25+24}=\sqrt{49}=7$ $\qquad D=\sqrt{25\cdot 4}=\sqrt{100}=10$

$7<10<11<\mathbf{12}\ \Rightarrow\ B<D<C<A$

Najväčšiu hodnotu má výraz $\boldsymbol{A}$ **= 12.**

13. Ktorý z výrazov A až D má najmenšiu hodnotu?

$A=\sqrt{0{,}03+0{,}06}$ $\qquad C=\sqrt{\frac{3}{4}:0{,}75}$

$B=\sqrt{\frac{1}{10}\cdot 2{,}5}$ $\qquad D=\sqrt{0{,}17-\frac{1}{100}}$

14. V Murphyho knižkách sa vraj píše aj o pyramídach. Pôvodne to vôbec nemali byť ihlany. Keď architekt priniesol faraónovi svoj návrh, ten povedal:
„Výška pyramídy sa mi páči, ale rozpočet nie.“
A tak má pyramída tvar ihlanu – bola lacnejšia.
Ak zoradíš odmocniny od najväčšej po najmenšiu, získaš odpoveď na otázku:
Aký tvar mala mať pyramída podľa Murphyho?“

$\sqrt{0{,}04}$	$\sqrt{0{,}36}$	$\sqrt{\frac{16}{100}}$	$\sqrt{0{,}25}$	$\sqrt{\frac{225}{10\,000}}$	$\sqrt{\frac{49}{100}}$
O	R	N	A	L	H

Čo vieme o druhej odmocnine?

Platí: $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$ lebo $0^2=0\cdot 0=0$, $1^2=1\cdot 1=1$

Druhé odmocniny počítame **väčšinou pomocou kalkulačky**.
Keďže **kalkulačiek je veľa druhov**, dôkladne si preštuduj **návod na jej obsluhu**.

15. Pomocou kalkulačky vypočítaj tieto odmocniny. Výsledok **zaokrúhli na dve desatinné miesta.** Výsledok odmocnenia najprv odhadni.

a) $\sqrt{52}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{0{,}265}$ $\qquad$ **c)** $\sqrt{12\frac{1}{1\,000}}$

Riešenie 15.

a) $\sqrt{52}$ sa nachádza medzi odmocninami $\sqrt{49}$ a $\sqrt{64}$.

Platí: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{49}=7\\ \sqrt{64}=8\end{array}\right\}\sqrt{52}$ sa nachádza medzi číslami 7 a 8, **odhad výsledku je 7,5.**

Výpočet kalkulačkou: $\sqrt{52}=7{,}211\,1\ldots\doteq\mathbf{7{,}21}$

b) $\sqrt{0{,}265}$ sa nachádza medzi odmocninami $\sqrt{0}$ a $\sqrt{1}$.

Platí: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{0}=0\\ \sqrt{1}=1\end{array}\right\}\sqrt{0{,}265}$ sa nachádza medzi číslami 0 a 1, **odhad výsledku je 0,5.**

Výpočet kalkulačkou: $\sqrt{0{,}265}=0{,}514\,7\ldots\doteq\mathbf{0{,}51}$

c) $\sqrt{12\frac{1}{1\,000}}$ sa nachádza medzi odmocninami $\sqrt{9}$ a $\sqrt{16}$.

Platí: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9}=3\\ \sqrt{16}=4\end{array}\right\}\sqrt{12\frac{1}{1\,000}}$ sa nachádza medzi číslami 3 a 4, **odhad výsledku je 3,2.**

Výpočet kalkulačkou:

$\sqrt{12\frac{1}{1\,000}}=\sqrt{\frac{12\,001}{1\,000}}=\sqrt{12{,}001}=3{,}464\,2\ldots\doteq\mathbf{3{,}46}$

Prečo je dobré odhadnúť výsledok? Pri počítaní s kalkulačkou sa môže stať, že zle zadáme číslo alebo znak operácie. Ak sme odhadli približný výsledok, tak nás kalkulačka „neoklame“.

16. Odmocniny vypočítaj pomocou kalkulačky. Výsledok zaokrúhli na dve desatinné miesta. Najprv výsledok odmocnenia odhadni.

a) $\sqrt{26}, \sqrt{58}, \sqrt{342}, \sqrt{892}, \sqrt{1\,206}, \sqrt{7\,920}, \sqrt{32\,000}$

b) $\sqrt{25{,}14}; \sqrt{5{,}3}; \sqrt{0{,}326}; \sqrt{102{,}1}; \sqrt{0{,}968}; \sqrt{7{,}36}; \sqrt{0{,}78}$

c)* $\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{7}{8}}, \sqrt{\frac{10}{51}}, \sqrt{1\frac{1}{5}}, \sqrt{2\frac{3}{4}}, \sqrt{1\frac{7}{100}}, \sqrt{35\frac{1}{1000}}$

17. Urči správnu odpoveď **Áno** alebo **Nie** podľa toho, či je veta pravdivá alebo nie.

a) Druhá odmocnina je vždy kladné číslo alebo nula.
Áno – Nie

b) Druhá odmocnina sa dá vypočítať z každého čísla.
Áno – Nie

c) Druhá odmocnina z čísla 1 je nula.
Áno – Nie

d) Druhá odmocnina je opačná operácia k súčinu čísel.
Áno – Nie

e) Druhá odmocnina z čísla – 100 je – 10.
Áno – Nie

Obraz Victora Vasarelyho

18. Zisti, či je rovnosť

$$\sqrt{692{,}8-251{,}8+9}=\sqrt{441}+\sqrt{81}$$

správna.

Riešenie 18.

Úlohu vyriešime tak, že vypočítame **hodnotu výrazu na ľavej strane** rovnosti a potom **hodnotu výrazu na pravej strane** rovnosti.

Ak sa **hodnoty výrazov** na ľavej a pravej strane **rovnajú, rovnosť je správna**.

Ľavá strana:

$$\sqrt{692{,}8-251{,}8+9}=\sqrt{441}+9=21+9=\mathbf{30}$$

Pravá strana:

$$\sqrt{441}+\sqrt{81}=21+9=\mathbf{30}$$

Pretože **30 = 30**, rovnosť **je správna**.

Problémová úloha

Zistite, či platia rovnosti:

$$\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

19. Zisti, ktorá z nasledujúcich rovností je správna.

a) $\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}$

b) $\sqrt{0{,}16+0{,}25}=\sqrt{0{,}16}+\sqrt{0{,}25}$

c) $\frac{\sqrt{2\cdot 144}}{12}=\frac{2\cdot\sqrt{144}}{12}$

Okrem druhej odmocniny poznáme aj iné odmocniny. Vysvetlíme si ešte **tretiu odmocninu**.

Nasledujúcu úlohu a možno aj tretiu odmocninu už poznáte. Vyriešte tieto úlohy **bez kalkulačky**.

20. Akú dĺžku hrany môže mať maxi hracia kocka, ak jej **objem je 27 dm³**? Máme na výber tieto možnosti – len jedna z nich je správna: **9 dm**, alebo **3 dm**, alebo **13,5 dm**.

Riešenie 20.

Úlohu môžeme počítať takto: Ale aj takto:

Ak označíme **hranu kocky** a,
potom **objem** V počítame

ako **súčin** $V = a \cdot a \cdot a$
$V = 27\ \text{dm}^3$
$a \cdot a \cdot a = 27$
Súčin akých troch rovnakých čísel je 27?
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \Rightarrow a = 3$ dm
Hrana kocky má dĺžku 3 dm.

ako **mocninu** $V = a^3$
$V = 27\ \text{dm}^3$
$a^3 = 27$
Tretia mocnina akého čísla je 27?
$3^3 = 27 \Rightarrow a = 3$ dm
Hrana kocky má dĺžku 3 dm.

Hracia kocka má hranu dĺžky 3 dm.

Úlohu vieme riešiť aj pomocou **odmocniny**:

$V = a^3$ $\quad$ $V = 27\ \text{dm}^3$ $\quad$ $a^3 = 27$ $\quad$ $a = \sqrt[3]{27}$ $\quad$ $a = 3$ $\quad$ lebo $\quad$ $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Pri riešení úlohy 20 sme použili vedomosti o **tretej mocnine** čísla a súčasne sme počítali aj **tretiu odmocninu** čísla.

Tretia mocnina čísla je súčin troch rovnakých čísel.

Hovoríme, že tretia odmocnina z *a* je také číslo *b*, ktorého tretia mocnina je *a*.

Stručne matematicky zapísané: $\sqrt[3]{a} = b$ **práve vtedy, keď** $b^3 = a$.

znak odmocnenia **základ odmocniny (odmocnenec)** **výsledok odmocnenia**

Platí:

$\sqrt[3]{1\,000} = 10 \rightarrow 10^3 = 1\,000$

$\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$

$\sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow 4^3 = 64$

$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

$\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1 \rightarrow 0{,}1^3 = 0{,}001$

$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2 \rightarrow (0{,}2)^3 = 0{,}008$

$\sqrt[3]{125} = 5 \rightarrow 5^3 = 125$

$\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \rightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{8}{1000}$

21. Urči dĺžku hrany kocky, ak jej objem:

a) $V = 729\ \text{cm}^3$ **b)** $V = 0{,}027\ \text{dm}^3$ **c)** $V = \frac{125}{343}\ \text{m}^3$

Použi tretiu odmocninu.

22. Vypočítaj pomocou tretej mocniny alebo súčinu tieto tretie odmocniny:

a) $\sqrt[3]{0{,}000\,125}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}216}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}064}$

Riešenie 22.

a) $\sqrt[3]{0{,}000\,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1\,000\,000}} = \frac{5}{100} = \frac{5:5}{100:5} = \frac{1}{20}$

lebo $5^3 = 125$

lebo $100^3 = 1\,000\,000$

alebo $\left(\frac{5}{100}\right)^3 = \frac{125}{1\,000\,000}$

b) $\sqrt[3]{0{,}216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1\,000}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ lebo $0{,}6^3 = 0{,}216$

c) $\sqrt[3]{0{,}064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1\,000}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ lebo $0{,}4^3 = 0{,}064$

23. Vypočítaj pomocou tretej mocniny alebo súčinu tieto tretie odmocniny:

a) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{1\,000\,000}$, $\sqrt[3]{0{,}000\,001}$, $\sqrt[3]{0}$

b) $\sqrt[3]{0{,}729}$, $\sqrt[3]{0{,}125}$, $\sqrt[3]{0{,}000\,343}$, $\sqrt[3]{0{,}000\,027}$

c) $\sqrt[3]{\frac{256}{1\,000}}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{343}{512}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{125\,000\,000}}$

Problémová úloha

Zapíšte prehľadne všetky informácie o druhej a tretej odmocnine.
Porovnajte ich definície a vlastnosti.
Pripravte prezentáciu o nich pre svojich spolužiakov.

24. Vypočítaj pomocou kalkulačky tretiu odmocninu čísel. Výsledky zaokrúhli na dve desatinné miesta.

a) $\sqrt[3]{26}$, $\sqrt[3]{136}$, $\sqrt[3]{5\,681}$, $\sqrt[3]{21\,369}$

b) $\sqrt[3]{0{,}27}$; $\sqrt[3]{0{,}145}$; $\sqrt[3]{1{,}089}$; $\sqrt[3]{30{,}48}$

c)* $\sqrt[3]{\frac{6}{1\,000}}$, $\sqrt[3]{5\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{1\frac{25}{36}}$, $\sqrt[3]{10\frac{12}{37}}$

25. Porovnaj pomocou znakov nerovnosti alebo rovnosti druhé a tretie odmocniny čísel:

$\sqrt[3]{125}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{216}}$, $\sqrt{\frac{49}{16}}$

Riešenie 25.

Najprv vypočítame jednotlivé odmocniny a potom ich zoradíme od najmenšej po najväčšiu.

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt[3]{\frac{27}{216}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$

Platí: $0{,}5 < 1{,}75 < 5 < 8$

Potom: $\sqrt[3]{\frac{27}{216}} < \sqrt{\frac{49}{16}} < \sqrt[3]{125} < \sqrt{64}$

26. Porovnaj pomocou znakov nerovnosti alebo rovnosti druhé a tretie odmocniny čísel:

a) $\sqrt[3]{8}, \sqrt{16}$ **c)** $\sqrt[3]{1\,728}, \sqrt{\frac{2\,500}{100}}$ **e)** $\sqrt{\frac{9}{16}}, \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ **g)** $\sqrt[3]{100}, \sqrt{10}$

b) $\sqrt{0{,}014\,4}, \sqrt[3]{1\,000}$ **d)** $\sqrt[3]{0{,}027}, \sqrt{1\frac{13}{36}}$ **f)** $\sqrt{3\frac{4}{64}}, \sqrt[3]{30}$ **h)** $\sqrt{1}, \sqrt[3]{1}$

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.
Ak úlohy vyriešite správne, zostavíte z písmen zmysluplné slovo.

1. Druhá odmocnina z čísla 144 sa rovná:

A -72 B 12
C -12 D 72

2. Druhá odmocnina z čísla 0,64 sa rovná:

O $0{,}08$ P $-8{,}0$
R $0{,}8$ S $0{,}4$

3. $\sqrt{\frac{16}{81}}$ sa rovná:

A $\frac{4}{9}$ B $\frac{8}{9}$
C $\frac{2}{3}$ D $-\frac{4}{9}$

4. $\sqrt{5{,}2+3{,}8}$ sa rovná:

P $\sqrt{3{,}2+6{,}8}$ R $\sqrt{10{,}08-0{,}28}$
S $\sqrt{7{,}5+2{,}5}$ T $\sqrt{11{,}2-2{,}2}$

5. Tretia odmocnina z čísla 64 sa rovná:

H 2 I 4
J -2 K -4

6. Tretia odmocnina z čísla 0,027 sa rovná:

P $0{,}9$ R $0{,}03$
S $0{,}3$ T $0{,}009$

7. $\sqrt[3]{\frac{216}{1\,000}}$ sa rovná:

I $\frac{14}{1\,000}$ J $0{,}14$
K $\frac{6}{100}$ L $0{,}6$

8. $\sqrt[3]{150-25}$ sa rovná:

A $\sqrt[3]{5^3}$ B $\sqrt[3]{2{,}5\cdot 50}$
C $\sqrt[3]{0{,}125+124{,}875}$ D $\sqrt[3]{312{,}5:2{,}5}$

9. Z daných nerovností je len jedna správna.

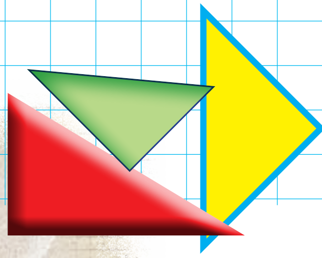
U $\sqrt{0} > \sqrt[3]{0}$ V $\sqrt{1} \geq \sqrt[3]{1}$
W $\sqrt{\frac{9}{100}} < \sqrt[3]{1{,}9}$ Z $\sqrt{2\,500} \leq \sqrt[3]{25\,000}$

10. Z uvedených viet je len jedna pravdivá.

A Neexistuje druhá odmocnina zo záporného čísla.
B Tretia odmocnina a druhá odmocnina z toho istého čísla sú rovnaké.
C Druhá odmocnina z nuly neexistuje.
D Tretia odmocnina z čísla 1 je 0,3.

Zapamätajte si

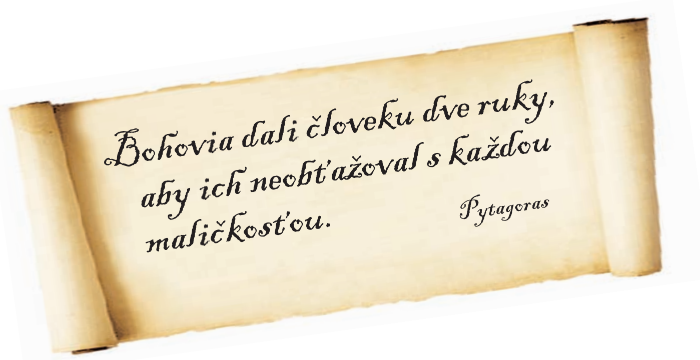
Druhá odmocnina	**Tretia odmocnina**
$\sqrt{a} = b$ **práve vtedy, keď** $b^2 = a$**, pričom** $a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt[3]{a} = b$ **práve vtedy, keď** $b^2 = a$
Napríklad: $\sqrt{81} = 9$ lebo $9^2 = 81$ $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ lebo $0{,}5^2 = 0{,}25$ $\sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$ lebo $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$	Napríklad: $\sqrt[3]{8} = 2$ lebo $2^3 = 8$ $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$ lebo $0{,}5^3 = 0{,}125$ $\sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \frac{1}{6}$ lebo $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$
Platí: $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{1} = 1$	Platí: $\sqrt[3]{0} = 0$ $\sqrt[3]{1} = 1$
Platí: $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $b \neq 0$	Platí: $\sqrt[3]{a\cdot b} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ $b \neq 0$



2 Pytagorova veta

2.1 Pytagorova veta – definícia

Pytagorova veta je veta, ktorú si **pamätá skoro každý**, kto chodil do školy. Spýtajte sa svojich rodičov, čo o nej vedia a čo vedia o **Pytagorovi**. Určite začnú hovoriť **o trojuholníkoch a geometrii**.



Viete, že...?

Slová ako **geometria**, **matematika**, **aritmetika** sú gréckeho pôvodu. Jeden z najväčších gréckych matematikov, fyzikov, konštruktérov a vojenských inžinierov bol **Archimedes**.

Čo sme sa už učili

Určite vieme riešiť tieto dve úlohy:

1. Narysuj trojuholník ABC so stranami $a = 4$ cm, $b = 3$ cm a $c = 5$ cm. Zmeraj jeho uhly a napíš, aký je to trojuholník. Vypočítaj jeho obsah.

Riešenie 1.

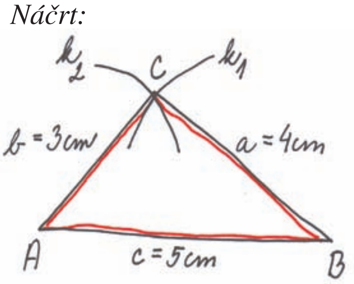
Rozbor:

$|AB| = c = 5$ cm

$|BC| = a = 4$ cm

$|AC| = b = 3$ cm

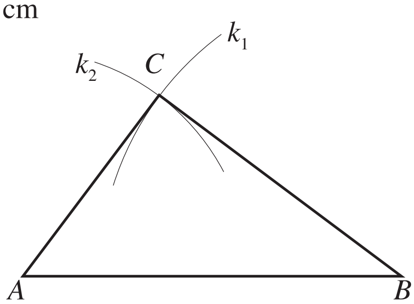
Náčrt:



Narysujeme úsečku $|AB| = c = 5$ cm. Potom zostrojíme bod C pomocou kružnicových oblúkov $k_1(B, 4$ cm$)$ a $k_2(A, 3$ cm$)$.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = c = 5$ cm
2. k_1; $k_1(B, 4$ cm$)$
3. k_2; $k_2(A, 3$ cm$)$
4. C; $C \in k_1 \cap k_2$
5. $\Delta\, ABC$



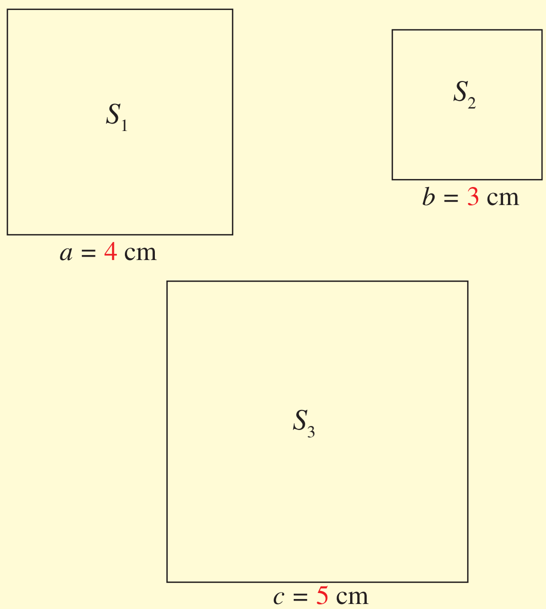
Diskusia:

Vzhľadom na zadanie má úloha jediné riešenie. Veľkosť uhlov v tomto trojuholníku je:

$|\sphericalangle ABC| = 35°$, $|\sphericalangle BAC| = 55°$, $|\sphericalangle BCA| = 90°$.

pokračovanie

2. Vypočítaj obsahy týchto štvorcov:



Riešenie 2.

Obsah štvorca so stranou a počítame:

$S = a \cdot a$ alebo $S = a^2$

Obsah štvorcov potom bude:

$S_1 = a^2 = 4^2 = 16$
$S_1 = 16$ cm^2

$S_2 = b^2 = 3^2 = 9$
$S_2 = 9$ cm^2

$S_3 = c^2 = 5^2 = 25$
$S_3 = 25$ cm^2

Čo je zaujímavé na týchto štvorcoch?

Súčet obsahov dvoch menších štvorcov sa rovná obsahu najväčšieho štvorca – platí rovnosť:

$$S_1 + S_2 = S_3$$

Riešenie 1. *pokračovanie*

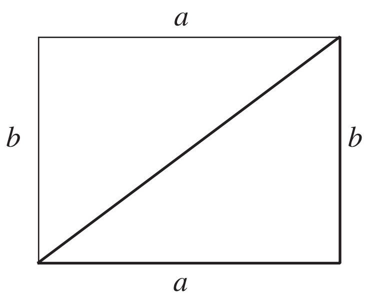
Uhol $|\sphericalangle BCA| = 90°$ nazývame **pravý uhol**, takže **trojuholník *ABC* je pravouhlý**.

Jeho **obsah** vypočítame ako polovicu obsahu obdĺžnika so stranami *a* a *b*.

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$S = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$S = 6\ \text{cm}^2$$



Obsah trojuholníka je 6 cm^2.

Problémová úloha

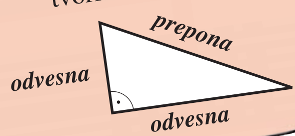
Nájdite trojicu štvorcov, pre obsahy ktorých platí rovnosť ako v riešení úlohy 2.

Pomôcka

Pripomeňme si pomenovanie strán **pravouhlého trojuholníka**:

prepona – najdlhšia strana, ležiaca oproti pravému uhlu,

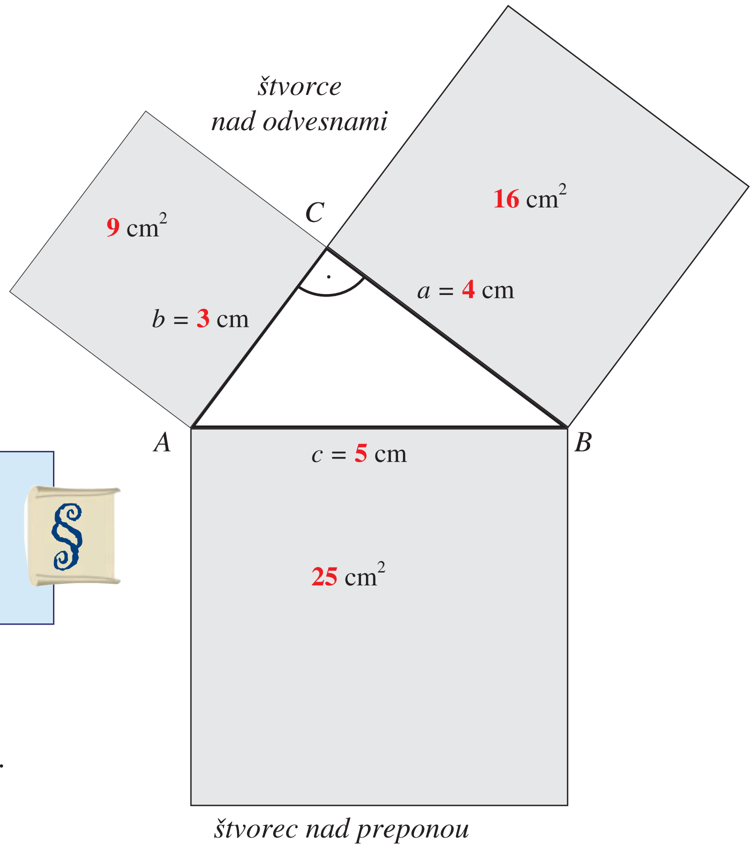
odvesny – kratšie strany trojuholníka, tvoria ramená pravého uhla.



Narysovali sme trojuholník so stranami dĺžky 3 cm, 4 cm, 5 cm. Vypočítali sme jeho obsah aj obsahy štvorcov so stranami 3 cm, 4 cm a 5 cm.

Riešenie týchto úloh súvisí s **Pytagorovou vetou**. Ako?

Vytvorme si obrázok zo zostrojeného **trojuholníka a štvorcov**.



Pytagorova veta

Obsah štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad oboma jeho odvesnami.

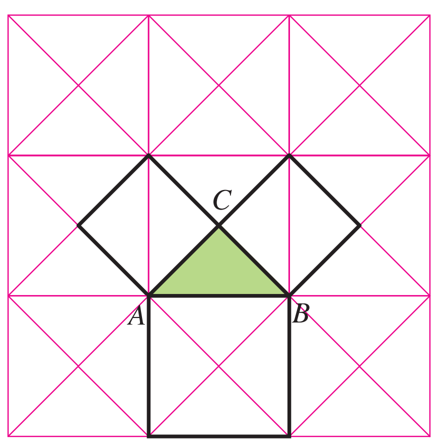
Pre náš trojuholník platí **vzťah:** $c^2 = a^2 + b^2$,
strana ***c* je prepona pravouhlého trojuholníka**,
strany ***a*** a ***b*** sú **odvesny pravouhlého trojuholníka**.

Viete, že...?

Pozrite si tento obrázok. Je na ňom štvorcová sieť a v nej sú vyznačené trojuholníky a štvorce.

Pre trojuholník zvýraznený zelenou farbou a zvýraznené štvorce platí, že štvorec pod stranou *AB* je možné zložiť zo štvorcov nad stranami *AC* a *BC*.

Keďže všetky trojuholníky, ktoré tvoria štvorce, sú pravouhlé a rovnoramenné, platí pre trojuholník *ABC* Pytagorova veta.



Pytagorova veta platí pre každý pravouhlý trojuholník.

Problémová úloha

Nájdite dôkaz, že Pytagorova veta platí pre každý pravouhlý trojuholník.
Môžete ho nájsť pomocou internetu alebo v iných učebniciach.

Obrátená Pytagorova veta

Ak pre dĺžky strán *a, b, c* trojuholníka platí vzťah

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

potom je tento trojuholník pravouhlý,
***c* je prepona, strany *a* a *b* sú jeho odvesny.**

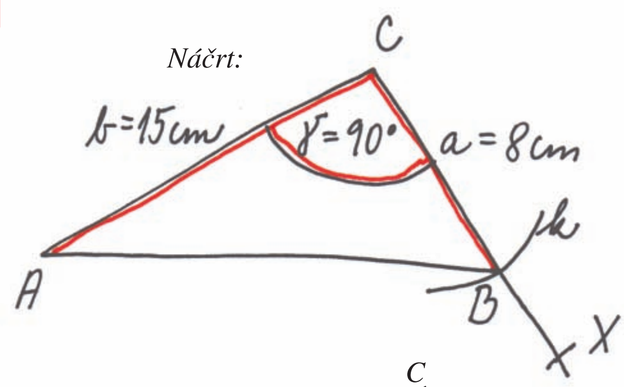
3. Narysuj trojuholník ABC, ktorého uhol γ má veľkosť 90° a dĺžky strán sú $a = 8$ cm a $b = 15$ cm. Zmeraj stranu c a over, či pre tento trojuholník platí Pytagorova veta.

Riešenie 3.

Rozbor:

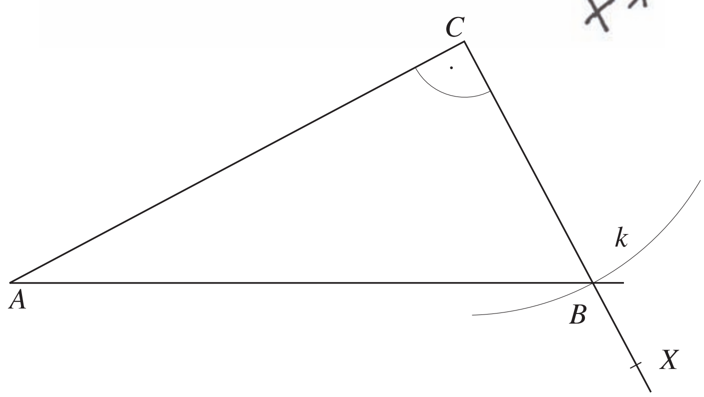
$|\sphericalangle ACB| = \gamma = 90°$
$|BC| = a = 8$ cm
$|AC| = b = 15$ cm
Narysujeme úsečku $|AC| = b = 15$ cm.
Potom zostrojíme uhol $|\sphericalangle ACX| = \gamma = 90°$.
Bod B zostrojíme pomocou kružnicového oblúka $k(C, 8\text{ cm})$.

Náčrt:



Konštrukcia:

1. AC; $|AC| = 15$ cm
2. $\sphericalangle ACX$; $|\sphericalangle ACX| = 90°$
3. k; $k(C, 8\text{ cm})$
4. B; $B \in k \cap \overrightarrow{CX}$
5. ΔABC



Diskusia:
Vzhľadom na zadanie úlohy je jediné riešenie.

Strana c má dĺžku **17 cm**.

Overíme, či pre ΔABC platí Pytagorova veta.
Trojuholník je **pravouhlý**, s pravým uhlom pri vrchole C.
Prepona je c (najdlhšia strana ležiaca oproti pravému uhlu), **odvesny** sú a a b.
Vzťah pre Pytagorovu vetu potom je:
$c^2 = a^2 + b^2$

Dosadíme do vzťahu dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť:

$17^2 = 8^2 + 15^2$
$289 = 64 + 225$
$289 = 289$

Rovnosť platí.
Overili sme, že pre **trojuholník ABC platí Pytagorova veta.**

Poznámka

Ak má ΔABC jeden uhol pravý, tak je pravouhlý. Pytagorova veta preň platí.

Poznámka

Pri meraní dĺžok strán trojuholníka počítame s určitou **nepresnosťou konštrukcie**. Zvyčajne môže byť rozdiel od očakávaného výsledku 1 až 2 mm.

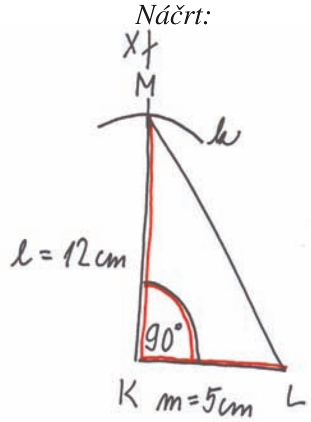
4. Narysuj trojuholník *KLM*, ktorý má dané strany $|KL| = 5$ cm, $|KM| = 12$ cm a $|\sphericalangle LKM| = 90°$.
Zmeraj stranu *LM* a over, či pre tento trojuholník platí Pytagorova veta.

Riešenie 4.

Rozbor:

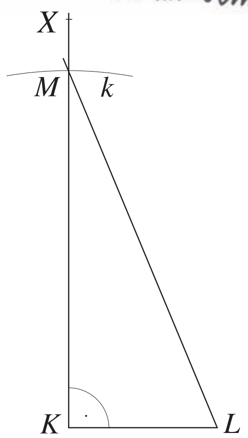
$|\sphericalangle LKM| = 90°$
$|KL| = m = 5$ cm
$|KM| = l = 12$ cm
Narysujeme úsečku:
$|KL| = 5$ cm.
Potom zostrojíme uhol:
$|\sphericalangle LKX| = 90°$.
Bod *M* zostrojíme pomocou kružnicového oblúka:
$k(K, 12 \text{ cm})$.

Náčrt:



Konštrukcia:

1. KL; $|KL| = 5$ cm
2. $\sphericalangle LKX$; $|\sphericalangle LKX| = 90°$
3. k; $k(K, 12 \text{ cm})$
4. M; $M \in k \cap \overrightarrow{KX}$
5. $\Delta\, KLM$



Diskusia:
Vzhľadom na zadanie má úloha jediné riešenie.
Strana *LM* má dĺžku 13 cm.

Overíme, či pre $\Delta\, KLM$ platí Pytagorova veta.
Trojuholník je **pravouhlý,** s pravým uhlom pri vrchole *K*. **Prepona** je úsečka *LM* (najdlhšia strana ležiaca oproti pravému uhlu), **odvesny** sú úsečky *KL* a *KM*.
Vzťah pre Pytagorovu vetu potom je:

$|LM|^2 = |KM|^2 + |KL|^2$.

Dosadíme do vzťahu dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť:

$13^2 = 12^2 + 5^2$
$169 = 144 + 25$
$169 = 169$ **Rovnosť platí.**

Overili sme, že pre **trojuholník *KLM* platí Pytagorova veta**.

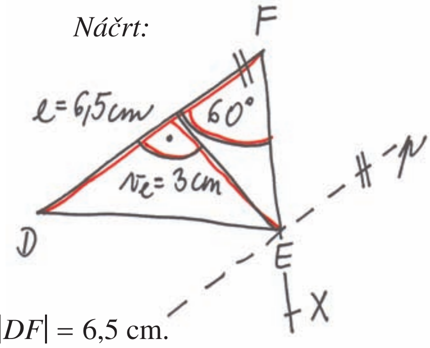
5. Narysuj trojuholník *DEF*, ak je dané: $|DF| = 6{,}5$ cm, $v_e = 3$ cm (výška na stranu *e*), $|\sphericalangle DFE| = 60°$.
Odmeraj dĺžky ostatných strán trojuholníka a zisti, či preň platí Pytagorova veta.

Riešenie 5.

Rozbor:

$|\sphericalangle DFE| = 60°$
$|DF| = e = 6{,}5$ cm
$v_e = 3$ cm

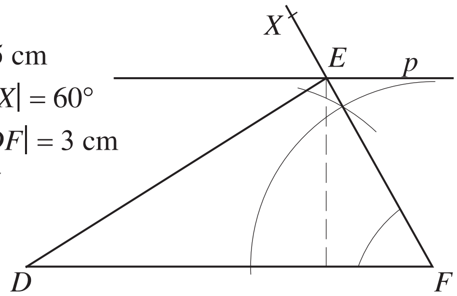
Náčrt:



Narysujeme úsečku $|DF| = 6{,}5$ cm.
Potom zostrojíme uhol $|\sphericalangle DFX| = 60°$.
Bod *E* zostrojíme pomocou priamky *p* rovnobežnej s úsečkou *DF* vo vzdialenosti 3 cm od nej.

Konštrukcia:

1. DF; $|DF| = 6{,}5$ cm
2. $\sphericalangle DFX$; $|\sphericalangle DFX| = 60°$
3. p; $p \parallel DF$, $|p, DF| = 3$ cm
4. E; $E \in p \cap \overrightarrow{FX}$
5. $\Delta\, DEF$



Diskusia:
Vzhľadom na zadanie má úloha jediné riešenie.
Strana *DE* má dĺžku 5,5 cm a strana *FE* má dĺžku 3,5 cm.
Zistíme, či pre $\Delta\, DEF$ platí Pytagorova veta.
Najdlhšiu stranu budeme považovať za preponu, kratšie strany za odvesny.
Vzťah pre Pytagorovu vetu má potom tvar:

$|DF|^2 = |DE|^2 + |FE|^2$.

Dosadíme do vzťahu dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť:

$6{,}5^2 = 5{,}5^2 + 3{,}5^2$
$42{,}25 = 30{,}25 + 12{,}25$
$42{,}25 = 42{,}50$ **Rovnosť neplatí.**

Zistili sme, že pre **trojuholník *DEF* Pytagorova veta neplatí**.
Záver:
Podľa obrátenej Pytagorovej vety trojuholník *DEF* **nie je pravouhlý**.

Viete, že...?

V starovekom Egypte pri zakladaní budov obrovských rozmerov, hlavne chrámov, sa najprv vydláždil priestor pre stavbu a do tejto dlažby sa ryli čiary. Určenie štyroch vrcholov hlavného riadiaceho obdĺžnika stavby, sa vykonávalo slávnostne a trvalo aj mesiace. Porušenie základného obdĺžnika bývalo trestané aj smrťou.

Poznámka
Ak namiesto strán odmeriate veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, čo môžete tvrdiť?

Pomôcka
Čo je výška trojuholníka?
Jednoducho povedané:
Výška je **vzdialenosť** a leží na kolmici.

6. Narysuj trojuholník PRQ, ak je dané:
$|PR| = 7$ cm, $v_q = 4$ cm (výška na stranu q),
$|\sphericalangle PRQ| = 45°$.
Odmeraj dĺžky ostatných strán trojuholníka a zisti, či preň platí Pytagorova veta.

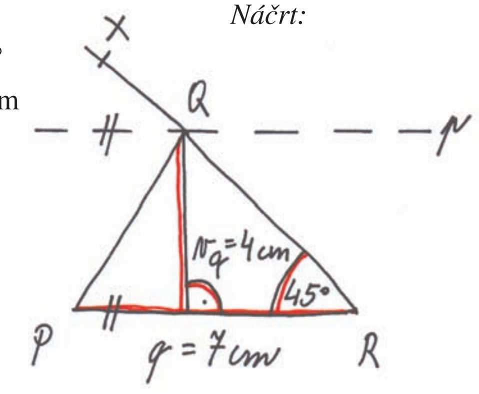
7. Narysuj trojuholník ABC, ak je dané:
$c = 5$ cm, $a = 4$ cm, $t_c = 3$ cm
(ťažnica na stranu c).
Zmeraj dĺžku chýbajúcej strany trojuholníka a zisti, či preň platí Pytagorova veta.

Riešenie 6.

Rozbor:

$|\sphericalangle PRQ| = 45°$
$|PR| = q = 7$ cm
$v_q = 4$ cm

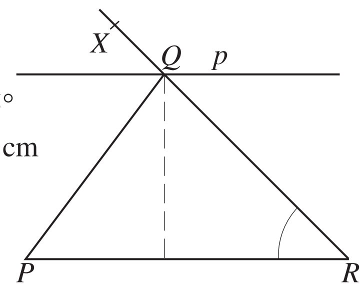
Náčrt:



Narysujeme úsečku $|PR| = 7$ cm.
Potom zostrojíme uhol $|\sphericalangle PRX| = 45°$.
Bod Q zostrojíme pomocou priamky p rovnobežnej s úsečkou PR vo vzdialenosti 4 cm od nej.

Konštrukcia:

1. PR; $|PR| = 7$ cm
2. $\sphericalangle PRX$; $|\sphericalangle PRX| = 45°$
3. p; $p \parallel PR$, $|p, PR| = 4$ cm
4. Q; $Q \in p \cap \overrightarrow{RX}$
5. $\Delta\, PRQ$



Diskusia:
Vzhľadom na zadanie má úloha jediné riešenie.

Strana RQ má dĺžku **5,5 cm** a **strana PQ** má dĺžku **5 cm**. Zistíme, či pre $\Delta\, PRQ$ platí Pytagorova veta. Najdlhšiu stranu budeme považovať za preponu, kratšie strany za odvesny.

Vzťah pre Pytagorovu vetu by mal potom tvar:
$|PR|^2 = |PQ|^2 + |RQ|^2$.

Do vzťahu **dosadíme** dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť:

$7^2 = 5^2 + 5{,}5^2$
$49 = 25 + 30{,}25$
$49 = 55{,}25$ **Rovnosť neplatí.**

Zistili sme, že pre **trojuholník PQR Pytagorova veta neplatí**.

Záver:
Podľa obrátenej Pytagorovej vety **trojuholník PQR nie je pravouhlý**.

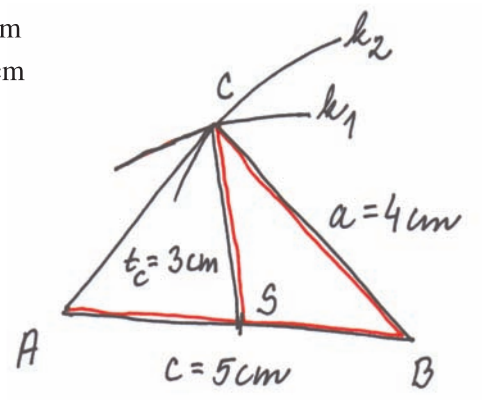
Problémová úloha
Zistite, či existuje **rovnoramenný pravouhlý trojuholník.**

Riešenie 7.

Rozbor:

$|AB| = c = 5$ cm
$|BC| = a = 4$ cm
$t_c = 3$ cm

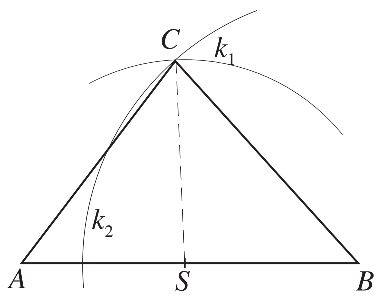
Náčrt:



Narysujeme úsečku $|AB| = 5$ cm.
Bod C je koncovým bodom ťažnice na stranu c, druhý koncový bod ťažnice je stred strany AB.
Bod C bude ležať na kružnicových oblúkoch $k_1(S, 3$ cm$)$ a $k_2(B, 4$ cm$)$, kde S je stred strany BC.

Konštrukcia:

1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. S; $|AS| = |SB|$
3. k_1; $k_1(S, 3$ cm$)$
4. k_2; $k_2(B, 4$ cm$)$
5. C; $C \in k_1 \cap k_2$
6. $\Delta\, ABC$



Diskusia:
Vzhľadom na zadanie má úloha jediné riešenie.

Strana AC má dĺžku **4 cm**. Aj **strana BC** má **4 cm**. Trojuholník je rovnoramenný. Pravdepodobne v ňom Pytagorova veta nebude platiť.
Overíme tvrdenie, že Pytagorova veta v tomto trojuholníku neplatí.
Najdlhšiu stranu budeme považovať za preponu, kratšie strany za odvesny.
Vzťah pre Pytagorovu vetu by mal tvar:
$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.
Dosadíme do vzťahu dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť:

$5^2 = 4^2 + 4^2$
$25 = 16 + 16$
$25 = 32$ **Rovnosť neplatí.**

Záver:
Podľa obrátenej Pytagorovej vety **trojuholník ABC nie je pravouhlý**.

Pomôcka
Ťažnica trojuholníka je úsečka, ktorá spája **vrchol** trojuholníka so **stredom** protiľahlej strany.

8. Narysuj trojuholník ABC, ak je dané: $b = 5$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 30°$ a $t_b = 3$ cm (ťažnica na stranu b). Zmeraj dĺžku chýbajúcich strán trojuholníka a zisti, či preň platí Pytagorova veta.

Riešenie 8.

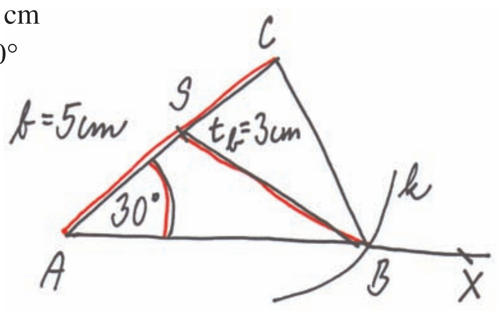
Rozbor:

$|AC| = b = 5$ cm

$|\sphericalangle BAC| = 30°$

$t_b = 3$ cm

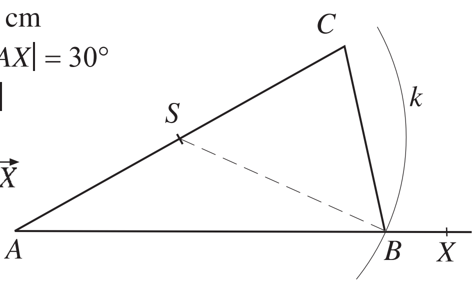
Náčrt:



Narysujeme úsečku $|AC| = 5$ cm.
Bod B je koncovým bodom ťažnice na stranu b a polpriamky AX, ktorá je ramenom $\sphericalangle CAX$.
Pre konštrukciu bodu B použijeme kružnicový oblúk $k(S, 3 \text{ cm})$.

Konštrukcia:

1. AC; $|AC| = 5$ cm
2. $\sphericalangle CAX$; $|\sphericalangle CAX| = 30°$
3. S; $|AS| = |SC|$
4. k; $k(S, 3 \text{ cm})$
5. B; $B \in k \cap \overrightarrow{AX}$
6. $\triangle ABC$



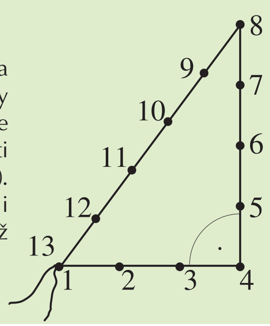
Diskusia:

Vzhľadom na zadanie má úlohy jediné riešenie.

Strana AB má dĺžku **5 cm** a **strana CB** má dĺžku **2,5 cm**. Keďže aj strana AC má dĺžku 5 cm, trojuholník je rovnoramenný. Pytagorova veta v ňom pravdepodobne neplatí.
Porozprávaj sa o pravdivosti tohto tvrdenia so spolužiakmi.

Viete, že...?

Nielen starí Egypťania ale aj Indovia stavali pozoruhodné stavby. Pravé uhly vytyčovali takto: Na napnutom špagáte uviazali 13 uzlov tak, aby vzdialenosti medzi uzlami boli rovnaké (napr. 50 cm). Špagát napli tak, že uzol 1 a 13 upevnili na tom istom mieste a uzly 4 a 8 tiež upevnili (pozri obrázok).
Potom uhol 148 je pravý.



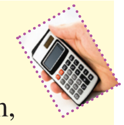
9. Narysuj dané trojuholníky. Odmeraj dĺžky ostatných strán narysovaného trojuholníka a zisti, či preň platí Pytagorova veta.

a) $\triangle ABC$, $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 70°$

b) $\triangle ABC$, $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $t_b = 5$ cm

c) $\triangle ABC$, $c = 6$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 30°$, $v_c = 4$ cm

10. Rozhodni, či sú trojuholníky s danými stranami pravouhlé:



a) $\triangle KLM$, $|KL| = 3\,367$ mm, $|LM| = 34{,}56$ dm, $|KM| = 482{,}5$ cm

b) $\triangle XYZ$, $x = 17$, $y = 14$, $z = 11$

Riešenie 10.

Pri riešení vychádzame z tvrdenia, že **trojuholníky sú pravouhlé**, ak pre ne platí **obrátená Pytagorova veta**.

a) $\triangle KLM$, $|KL| = 3\,367$ mm, $|LM| = 34{,}56$ dm, $|KM| = 482{,}5$ cm

Dĺžky strán sú v rôznych dĺžkových jednotkách. Všetky dĺžky vyjadríme v mm. Získame tak dĺžky vyjadrené prirodzenými číslami – ľahšie sa s nimi počíta.

$|KL| = 3\,367$ mm

$|LM| = 3\,456$ mm

$|KM| = 4\,825$ mm

Utvoríme **vzťah** pre **Pytagorovu vetu** a zistíme, či rovnosť po dosadení dĺžok strán platí.
Najdlhšia strana bude prepona (KM), kratšie strany budú odvesnami (LM a KL).

$$|KM|^2 = |KL|^2 + |LM|^2$$
$$4\,825^2 = 3\,367^2 + 3\,456^2$$
$$23\,280\,625 = 11\,336\,689 + 11\,943\,936$$
$$23\,280\,625 = 23\,280\,625$$

Rovnosť platí.

Zistili sme, že pre tento trojuholník **Pytagorova veta platí**.

Záver:

Podľa obrátenej Pytagorovej vety
trojuholník KLM je pravouhlý.

b) $\triangle XYZ$, $x = 17$, $y = 14$, $z = 11$

Najdlhšia strana bude prepona (x), kratšie strany budú odvesnami (y a z).

Vzťah pre Pytagorovu vetu:

$$x^2 = y^2 + z^2$$

Dosadíme do vzťahu dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť:

$$17^2 = 14^2 + 11^2$$
$$289 = 196 + 121$$
$$289 = 317$$

Rovnosť neplatí.

Zistili sme, že pre tento trojuholník **Pytagorova veta neplatí**.

Záver:

Podľa obrátenej Pytagorovej vety
trojuholník XYZ nie je pravouhlý.

11. Rozhodni, či sú trojuholníky s danými stranami pravouhlé:

a) $\triangle ABC$, $a = 8$ cm, $b = 15$ cm, $c = 17$ cm

b) $\triangle DEF$, $d = 1{,}2$ dm, $e = 1{,}3$ dm, $f = 0{,}5$ dm

c) $\triangle PRS$, $|PR| = 5$ m, $|RS| = 12$ m, $|PS| = 13$ m

d) $\triangle MNO$, $|MN| = 0{,}12$ m, $|NO| = 13$ dm, $|MO| = 50$ mm

12. Len jeden z troch uvedených trojuholníkov je pravouhlý. Zisti, ktorý:

a) $\Delta\, XYZ$, $x = 15$ cm, $y = 12$ cm, $z = 11$ cm

b) $\Delta\, KLM$, $|KL| = 6$ dm, $|LM| = 10$ dm, $|KM| = 8$ dm

c) $\Delta\, DEF$, $d = 130$ mm, $e = 215$ mm, $f = 100$ mm

Riešenie 12.

Pri riešení týchto úloh **môžeme použiť odhad – intuíciu,** ktorú získame prepočítaním veľkého počtu úloh.

Nech je správne riešenie **b)**.

Použijeme obrátenú Pytagorovu vetu a **overíme**, či je možnosť **b)** správna. Preponou bude strana *MN*, odvesnami budú strany *KL* a *KM*.

Vzťah pre **Pytagorovu vetu** bude:

$|LM|^2 = |KL|^2 + |KM|^2$.

Dosadíme do vzťahu dĺžky strán trojuholníka a zistíme, či platí rovnosť.

$10^2 = 6^2 + 8^2$

$100 = 36 + 64$

$100 = 100$ **Rovnosť platí**.

Zistili sme, že pre tento trojuholník platí obrátená Pytagorova veta. Δ ***KLM* je pravouhlý**. Riešením je možnosť **b)**.

Prečo sme vylúčili ako nesprávne možnosti **a)** a **c)**?

Mocniny v **a)** vypočítame spamäti a vidíme, že $15^2 \neq 12^2 + 11^2$ lebo $225 \neq 265$.

Podobne v **c)** vypočítame spamäti $130^2 + 100^2$, čo je menej ako 215^2.

13. Len jeden z troch uvedených trojuholníkov je pravouhlý. Zisti, ktorý:

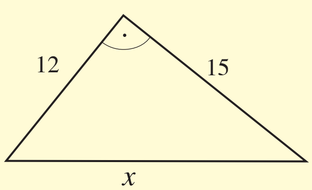
a) $\Delta\, ABC$, $a = 13$ cm, $b = 11$ cm, $c = 7$ cm

b) $\Delta\, PRS$, $|PR| = 5$ dm, $|RS| = 40$ cm, $|PS| = 0{,}3$ m

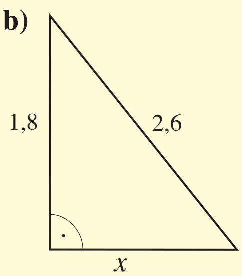
c) $\Delta\, DEF$, $d = 1{,}7$ cm, $e = 15$ mm, $f = 4$ cm

14. Na obrázkoch sú pravouhlé trojuholníky. Vypočítaj dĺžku *x* označenej strany trojuholníka. Počítaj **na dve desatinné miesta**.

a)



b)



Poznámka k úlohe 14

Počítať **na dve desatinné miesta je iné, ako zaokrúhľovať výsledok na dve desatinné miesta.**

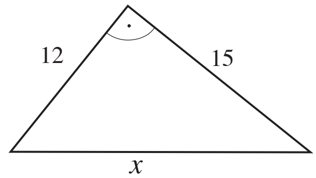
$x = 19{,}209\ 37$ vypočítané **na dve desatinné miesta je** $\boldsymbol{x = 19{,}20}$ (od tretieho desatinného miesta číslice nepíšeme)

$x = 19{,}209\ 37$ **zaokrúhlené na dve desatinné miesta je** $\boldsymbol{x \doteq 19{,}21}$ (číslo zaokrúhľujeme na stotiny)

Riešenie 14.

Trojuholníky sú pravouhlé, takže na riešenie môžeme použiť Pytagorovu vetu. Najprv určíme, čo je prepona a čo sú odvesny.

a)



Prepona leží oproti pravému uhlu – je to *x*.

Počítame **dĺžku prepony trojuholníka**.

Odvesny majú 12 a 15 dĺžkových jednotiek.

Vzťah pre **Pytagorovu vetu** bude:

$x^2 = 12^2 + 15^2$

$x^2 = 144 + 225$

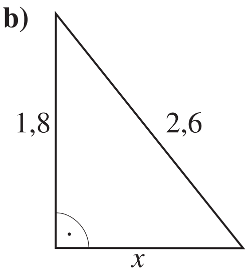
$x^2 = 369$ → **Hľadáme číslo**, ktoré **má druhú mocninu 369 –** použijeme preto **druhú odmocninu**.

$x = \sqrt{369}$

$x = \underline{19{,}209\ 37}\ldots$ Počítame **na dve desatinné miesta**, preto riešením je $\boldsymbol{x = 19{,}20}$.

Prepona *x* má dĺžku **19,20 dĺžkových jednotiek**.

b)



Prepona leží oproti pravému uhlu – má 2,6 dĺžkových jednotiek. Odvesny majú 1,8 dĺžkových jednotiek a *x* dĺžkových jednotiek. Počítame **dĺžku jednej z odvesien trojuholníka**.

Vzťah pre **Pytagorovu vetu** bude:

$2{,}6^2 = 1{,}8^2 + x^2$

$6{,}76 = 3{,}24 + x^2$

$x^2 + 3{,}24 = 6{,}76$

$x^2 = 6{,}76 - 3{,}24$

$x^2 = 3{,}52$ → **Hľadáme číslo**, ktoré **má druhú mocninu 3,52** – použijeme preto **druhú odmocninu**.

$x = \sqrt{3{,}52}$

$x = \underline{1{,}876\ 1}\ldots$ Počítame **na dve desatinné miesta**, preto riešením je $\boldsymbol{x = 1{,}87}$.

Odvesna *x* má dĺžku **1,87 dĺžkových jednotiek**.

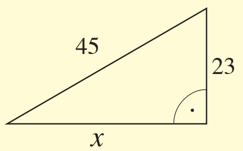
Problémová úloha

Prepočítavanie úloh – to chce veľa času. Jeden filozof povedal: „Čas je len spôsob myslenia.“ Zistite meno filozofa, ktorý to povedal. Bude to určite zaujímavé zistenie.

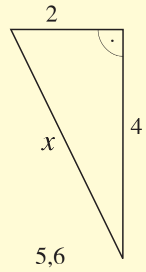
15. Na obrázkoch sú pravouhlé trojuholníky. Vypočítaj dĺžku x označenej strany trojuholníka.

Počítaj **na dve desatinné miesta**.

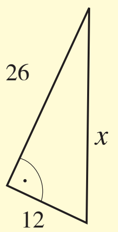
a)



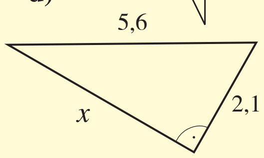
b)



c)



d)



16. Vypočítaj chýbajúce dĺžky strán v pravouhlých trojuholníkoch:

a) $\Delta\, PRS$, $|PR| = 6$ m, $|RS| = 12$ m, $|\sphericalangle PRS| = 90°$

b) $\Delta\, MNO$, $|MN| = 34$ cm, $|NO| = 1{,}4$ dm, $|\sphericalangle MON| = 90°$

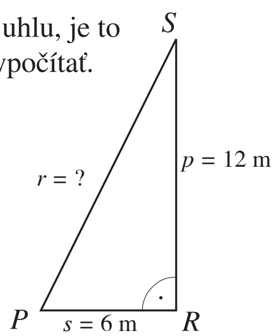
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 16.

Trojuholníky sú pravouhlé, preto na riešenie úloh použijeme Pytagorovu vetu. Určíme preponu a odvesny. Urobíme si náčrt trojuholníka.

a) ΔPRS, $|PR| = 6$ m, $|RS| = 12$ m, $|\sphericalangle PRS| = 90°$

Prepona leží oproti pravému uhlu, je to **strana** PS – jej dĺžku treba vypočítať. Odvesnami sú strany PR a RS.



Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$|PS|^2 = |PR|^2 + |RS|^2$

$r^2 = 6^2 + 12^2$

$r^2 = 36 + 144$

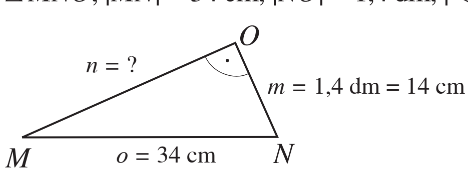
$r^2 = 180$ ⟶ **Hľadáme číslo,** ktoré **má druhú mocninu 180** – použijeme preto **druhú odmocninu**.

$r = \sqrt{180}$

$r = 13{,}416\,4...$ Počítame **na dve desatinné miesta**, preto riešením je $\boldsymbol{r = 13{,}41}$.

Strana $\boldsymbol{PS}$ má dĺžku **13,41 dĺžkových jednotiek**.

b) $\Delta\, MNO$, $|MN| = 34$ cm, $|NO| = 1{,}4$ dm, $|\sphericalangle MON| = 90°$



Prepona leží oproti pravému uhlu, je to strana MN, $|MN| = 34$ cm. Odvesny sú NO, $|NO| = 1{,}4$ dm a MO. Dĺžku **odvesny** $\boldsymbol{MO}$ máme vypočítať.

Riešenie 16. *pokračovanie*

Vzťah pre **Pytagorovu vetu** bude:

$|MN|^2 = |NO|^2 + |MO|^2$

$34^2 = 14^2 + |MO|^2$

$1\,156 = 196 + |MO|^2$

$|MO|^2 = 1\,156 - 196$

$|MO|^2 = 960$ ⟶ **Hľadáme číslo**, ktoré **má druhú mocninu 960** – použijeme preto **druhú odmocninu**.

$|MO| = \sqrt{960}$

$|MO| = 30{,}983\,8...$ Počítame **na dve desatinné miesta**, preto riešením je **30,98**.

Strana $\boldsymbol{MO}$ má dĺžku **30,98 cm**.

17. Vypočítaj chýbajúce dĺžky strany v pravouhlých trojuholníkoch:

a) $\Delta\, ABC$, $a = 8$ cm, $b = 15$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 90°$

b) $\Delta\, DEF$, $d = 1{,}2$ dm, $e = 1{,}3$ dm, $|\sphericalangle DEF| = 90°$

c) $\Delta\, KLM$, $|KL| = 100$ mm, $|LM| = 60$ mm, $|\sphericalangle KML| = 90°$

d) $\Delta\, XYZ$, $x = 1{,}4$ m, $y = 28$ dm, $|\sphericalangle XYZ| = 90°$

Počítaj **na dve desatinné miesta**.

18.** Napíš vzťah na výpočet dĺžky:

a) prepony trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B

b) odvesien trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole A

19.* Len jedna odpoveď je správna. Preponu trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole A môžeme vypočítať zo vzťahu:

A $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ **B** $a = \sqrt{c^2 + b^2}$ **C** $b = \sqrt{a^2 + c^2}$

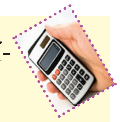
20.* Len jedna odpoveď je správna. Chýbajúcu odvesnu trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B môžeme vypočítať zo vzťahu:

A $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ **B** $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ **C** $b = \sqrt{a^2 + c^2}$

Pytagorova veta a trojuholníky

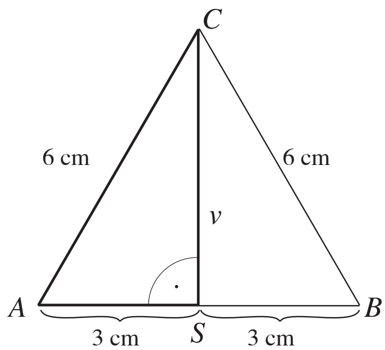
Pytagorova veta sa snáď najviac používa pri riešení úloh s rôznymi trojuholníkmi. Ktorýkoľvek z nich sa dá **výškou** rozdeliť **na pravouhlé trojuholníky**.
Najznámejšie úlohy sú tieto:

21. Vypočítaj výšku rovnostranného trojuholníka so stranou 6 cm dlhou.
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

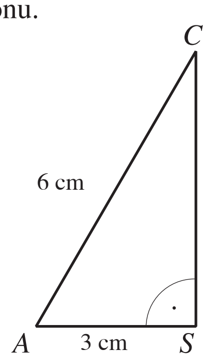


Riešenie 21.

Riešenie úlohy začneme **náčrtkom** rovnostranného trojuholníka ABC a jeho výšky v.
Keďže **výška je kolmá na stranu** trojuholníka, vzniká **pravouhlý trojuholník** ASC a na riešenie úlohy môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



Výška v **rozdelí** rovnostranný **trojuholník** na dva pravouhlé trojuholníky. S je stred strany AB.
Jeden z trojuholníkov znovu nakreslíme a určíme jeho odvesny a preponu.



Preponou je úsečka AC, **odvesnami** sú úsečky AS a SC.
Výška *v* je odvesnou SC pravouhlého trojuholníka.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$$\begin{aligned}
|AC|^2 &= |AS|^2 + |SC|^2 \\
6^2 &= 3^2 + v^2 \\
36 &= 9 + v^2 \\
v^2 &= 36 - 9 \\
v^2 &= 27 \\
v &= \sqrt{27} \\
v &= 5{,}196\,1\ldots
\end{aligned}$$

Počítame **na dve desatinné miesta**,
preto riešením je ***v* = 5,19**.
Výška *v* rovnostranného trojuholníka má dĺžku **5,19 cm**.

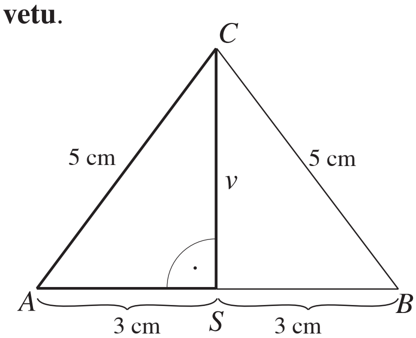
22. Vypočítaj dĺžku výšky rovnostranného trojuholníka

a) so stranou 106 mm dlhou
b) so stranou 0,23 dm dlhou
c)* so stranou a
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

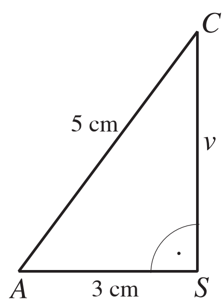
23. Vypočítaj dĺžku výšky na základňu rovnoramenného trojuholníka so základňou 6 cm dlhou a ramenami s dĺžkou 5 cm.
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 23.

Riešenie začneme **náčrtkom**. Načrtneme rovnoramenný trojuholník ABC a jeho výšku v. **Výška je kolmá na stranu** trojuholníka, takže vzniká **pravouhlý trojuholník** ASC a na riešenie úlohy môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



Výška v **rozdelí** rovnoramenný **trojuholník** na dva pravouhlé trojuholníky.
S je stred strany AB. Jeden z trojuholníkov znovu nakreslíme a určíme odvesny a preponu trojuholníka.



Preponou je úsečka AC, **odvesnami** sú úsečky AS a SC.
Výška *v* je odvesnou SC pravouhlého trojuholníka.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

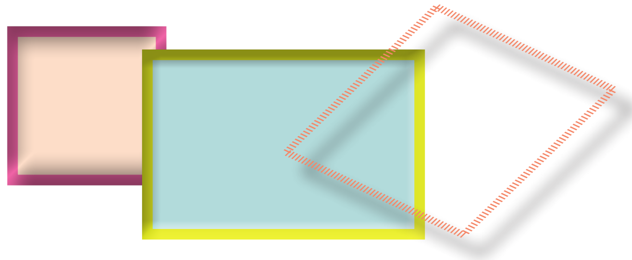
$$\begin{aligned}
|AC|^2 &= |AS|^2 + |SC|^2 \\
5^2 &= 3^2 + v^2 \\
25 &= 9 + v^2 \\
v^2 &= 25 - 9 \\
v^2 &= 16 \\
v &= \sqrt{16} \\
v &= 4
\end{aligned}$$

Výška v rovnostranného trojuholníka má dĺžku **4 cm**.

24. Vypočítaj výšku rovnoramenného trojuholníka

a) so základňou 23 mm a ramenami dlhými 35 mm
b) so základňou 0,7 dm a ramenami dlhými 9 cm
c)* so základňou z a ramenami r
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Pytagorova veta a rovnobežníky

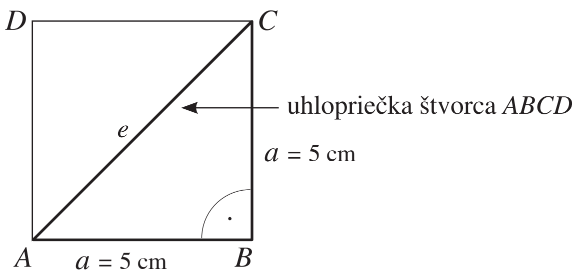


Pri riešení viacerých úloh s rovnobežníkmi tiež používame Pytagorovu vetu. Čo robíme pri riešení úloh? Delíme rovnobežníky na pravouhlé trojuholníky – pokiaľ sa to dá.

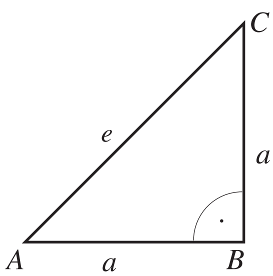
25. Vypočítaj dĺžku uhlopriečky štvorca so stranou 5 cm dlhou.
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 25.

Štvorec načrtneme a označíme jeho vrcholy, strany a uhlopriečku. Potom hľadáme na obrázku **pravouhlý trojuholník**. Keďže **strany štvorca sú na seba kolmé**, vzniká napr. **pravouhlý trojuholník** ***ABC*** a na riešenie úlohy môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



Vo štvorci vyznačíme pravouhlý trojuholník ABC.
Je vhodné nakresliť ho zvlášť.



Preponou tohto trojuholníka je uhlopriečka $e = AC$, **odvesnami** sú strany štvorca AB a BC.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$e^2 = 5^2 + 5^2$

$e^2 = 50$

$e = \sqrt{50}$

$e = 7{,}071\ 06$

Počítame na dve desatinné miesta,
preto riešením je 7,07.
Uhlopriečka e štvorca má dĺžku **7,07 cm**.

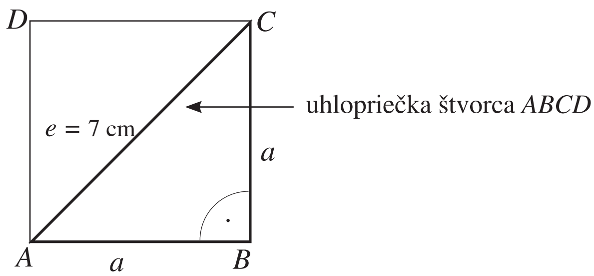
26. Vypočítaj dĺžku uhlopriečky v štvorci:

a) so stranou 7,2 dm dlhou
b) so stranou 56 mm dlhou
c)* so stranou a
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

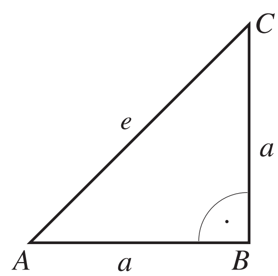
27. Vypočítaj dĺžku strany štvorca, ktorého uhlopriečka má dĺžku 7 cm.
Počítaj **na dve desatinné miesta.**

Riešenie 27.

Štvorec načrtneme a označíme jeho vrcholy a strany. Vyznačíme v ňom uhlopriečku e. **Strany štvorca sú na seba kolmé**, vzniká **pravouhlý trojuholník** a na riešenie úlohy môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



V štvorci vyznačíme pravouhlý trojuholník ABC.



Preponou tohto trojuholníka je uhlopriečka $e = AC$, **odvesnami** sú strany štvorca AB a BC.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$7^2 = a^2 + a^2$

$7^2 = 2 \cdot a^2$

$a^2 = 49 : 2$

$a^2 = 24{,}5$

$a = \sqrt{24{,}5}$

$a = 4{,}949\ 7...$

Počítame na dve desatinné miesta,
preto riešením je $a = 4{,}94$.
Strana ***a*** štvorca má dĺžku **4,94 cm**.

28. Vypočítaj dĺžku strany štvorca, ak:

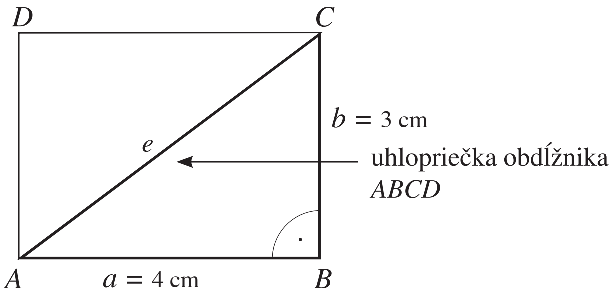
a) má uhlopriečku 4,8 dm dlhú
b) má uhlopriečku 32 mm dlhú
c)* má uhlopriečku dĺžky e
Počítaj na **dve desatinné miesta**.

29. Vypočítaj dĺžku uhlopriečky v obdĺžniku so stranami 4 cm a 3 cm dlhými.

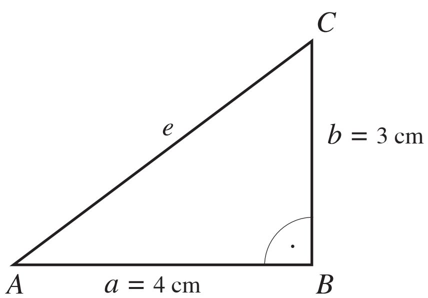
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 29.

Načrtneme obdĺžnik a označíme jeho strany, vrcholy a uhlopriečku. Aj v tomto prípade **hľadáme pravouhlý trojuholník**. Keďže **strany obdĺžnika sú na seba kolmé**, vzniká **pravouhlý trojuholník** napr. *ABC* a na riešenie úlohy môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



V obdĺžniku vyznačíme pravouhlý trojuholník *ABC*.



Preponou tohto trojuholníka je uhlopriečka $e = AC$, odvesnami sú strany obdĺžnika *AB* a *BC*.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$e^2 = 4^2 + 3^2$$
$$e^2 = 25$$
$$e = \sqrt{25}$$
$$e = 5$$

Uhlopriečka *e* obdĺžnika má dĺžku **5 cm**.

30. Vypočítaj dĺžku uhlopriečky v obdĺžniku:

a) so stranami 2,8 dm a 3,6 dm dlhými
b) so stranami 53 mm a 26 mm dlhými
c)* so stranami dĺžky a a $(a + 3)$
Počítaj na **dve desatinné miesta**.

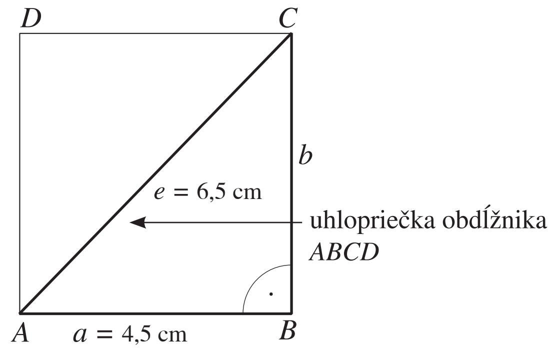
Projektová úloha

Pytagorova veta má svoje skryté využitie aj v tejto úlohe. Vyriešte ju a pokúste sa nájsť situáciu z bežného života, ktorá sa dá riešiť pomocou nej.
Obdĺžnik *ABCD* má strany *AB* a *AD* v pomere 4 : 3.
Obdĺžniku je opísaná kružnica s priemerom 10 cm.
Vypočítajte dĺžky strán obdĺžnika.

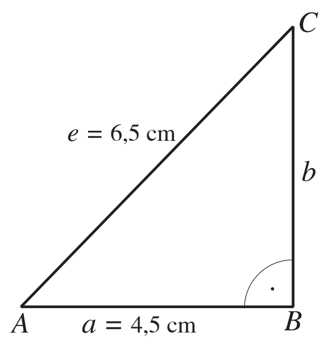
31. Vypočítaj dĺžku druhej strany obdĺžnika, ktorého uhlopriečka má dĺžku 6,5 cm a jedna zo strán je 4,5 cm dlhá.
Počítaj **na dve desatinné miesta.**

Riešenie 31.

Zmenšený obdĺžnik si načrtneme. **Strany obdĺžnika sú na seba kolmé**, vzniká **pravouhlý trojuholník** napr. *ABC* a na riešenie úlohy použijeme **Pytagorovu vetu**.



V obdĺžniku vyznačíme pravouhlý trojuholník *ABC*.



Preponou tohto trojuholníka je uhlopriečka $e = AC$, odvesnami sú strany obdĺžnika *AB* a *BC*. Stranu *AB* sme si vybrali za stranu dĺžky 4,5 cm. Vypočítať teda máme dĺžku strany *BC*.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

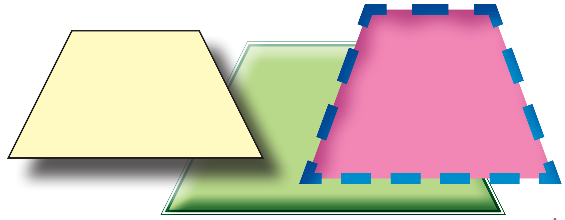
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$6{,}5^2 = 4{,}5^2 + b^2$$
$$42{,}25 = 20{,}25 + b^2$$
$$b^2 = 42{,}25 - 20{,}25$$
$$b^2 = 22$$
$$b = \sqrt{22}$$
$$b = 4{,}690\,4...$$

Počítame na dve desatinné miesta,
preto riešením je **4,69**.
Chýbajúca **strana obdĺžnika** má dĺžku **4,69 cm**.

32. Vypočítaj dĺžku druhej strany obdĺžnika, ak:
a) má uhlopriečku 35 dm dlhú a jednu zo strán 28 dm dlhú
b) má uhlopriečku 91 mm dlhú a jednu zo strán 68 mm dlhú
c)* má uhlopriečku dĺžky e a jedna zo strán má dĺžku $(e - 2)$
Počítaj na **dve desatinné miesta**.

Pytagorova veta a lichobežníky

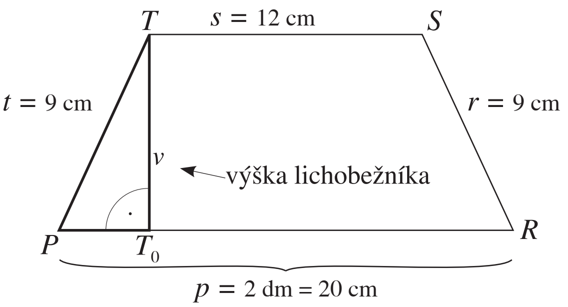
Aj vo viacerých úlohách o lichobežníku môžeme použiť Pytagorovu vetu. Pomocou **výšky** lichobežníka získavame **pravouhlý trojuholník**.



33. Aká je dĺžka výšky rovnoramenného lichobežníka *PRST*, v ktorom sú dané základne $p = 2$ dm, $s = 12$ cm a ramená $r = t = 9$ cm?
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

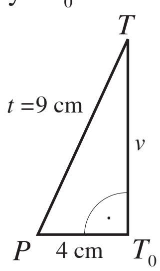
Riešenie 33.

Lichobežník si najprv načrtneme. Vyznačíme v ňom **výšku na základňu.** Keďže **výška** lichobežníka leží na **kolmici**, vzniká **pravouhlý trojuholník** PT_0T a na riešenie úlohy môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



Určíme preponu a odvesny.
Preponou trojuholníka PT_0T je úsečka *PT*, **odvesnami** sú úsečky PT_0 a hľadaná výška *v* (úsečka T_0T).
Najprv vypočítame dĺžku odvesny PT_0:

$|PT_0| = (20 - 12) : 2$
$|PT_0| = 8 : 2$
$|PT_0| = 4$ cm



Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$$|PT|^2 = |PT_0|^2 + |T_0T|^2$$
$$9^2 = 4^2 + v^2$$
$$81 = 16 + v^2$$
$$v^2 = 81 - 16$$
$$v^2 = 65$$
$$v = \sqrt{65}$$
$$v = 8{,}062\,2...$$

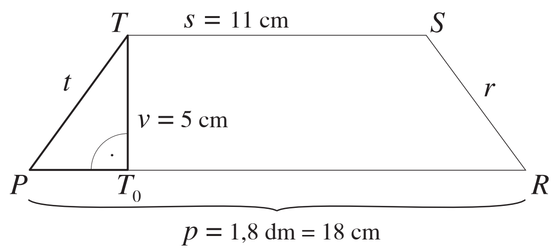
Počítame **na dve desatinné miesta**,
preto riešením je ***v* = 8,06**.
Výška *v* lichobežníka má dĺžku **8,06 cm**.

34. Aká je dĺžka výšky rovnoramenného lichobežníka, v ktorom sú dané dĺžky základní a ramien?
a) ⏢ *ABCD*, $a = 8$ cm, $c = 2$ cm, $b = d = 5$ cm
b) ⏢ *KLMN*, $k = 12$ cm, $m = 9$ cm, $l = n = 4$ cm
c) ⏢ *MNOP*, $m = 65$ mm, $o = 2{,}5$ cm, $n = p = 3{,}5$ cm
Počítaj na **dve desatinné miesta**.

35. Aká je dĺžka ramena rovnoramenného lichobežníka *PRST*, v ktorom sú dané základne $p = 1{,}8$ dm, $s = 1{,}1$ dm a výška $v = 5$ cm?
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

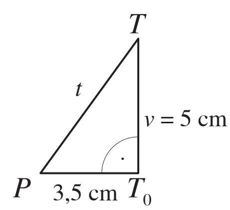
Riešenie 35.

Načrtneme si lichobežník a jeho výšku. Vyznačíme v ňom **pravouhlý trojuholník** PT_0T a na riešenie úlohy použijeme **Pytagorovu vetu**.



Preponou trojuholníka PT_0T je úsečka *PT* – rameno lichobežníka, ktorého dĺžku máme vypočítať.
Odvesnami sú úsečka PT_0 a výška *v* (úsečka T_0T).
Najprv vypočítame dĺžku odvesny PT_0:

$|PT_0| = (18 - 11) : 2$
$|PT_0| = 7 : 2$
$|PT_0| = 3{,}5$ cm



Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$$|PT|^2 = |PT_0|^2 + |T_0T|^2$$
$$t^2 = 3{,}5^2 + 5^2$$
$$t^2 = 12{,}25 + 25^2$$
$$t^2 = 37{,}25$$
$$t = \sqrt{37{,}25}$$
$$t = 6{,}103\,2...$$

Počítame **na dve desatinné miesta**,
preto riešením je ***t* = 6,10**.
Ramená lichobežníka majú dĺžku **6,10 cm**.

36. Aká je dĺžka ramena rovnoramenného lichobežníka, v ktorom sú dané dĺžky jeho základní a výšky?
a) ⏢ *ABCD*, $a = 8$ cm, $c = 2$ cm, $v = 4$ cm
b) ⏢ *KLMN*, $k = 15$ cm, $m = 10$ cm, $v = 3$ cm
c) ⏢ *MNOP*, $m = 5$ cm, $o = 25$ mm, $v = 15$ mm
Počítaj na **dve desatinné miesta**.

Pytagorova veta a kružnice

A akože ináč, aj niektoré úlohy o kružnici a kruhu vyžadujú na riešenie použitie **Pytagorovej vety**. Aj tu môže vzniknúť **pravouhlý trojuholník**.

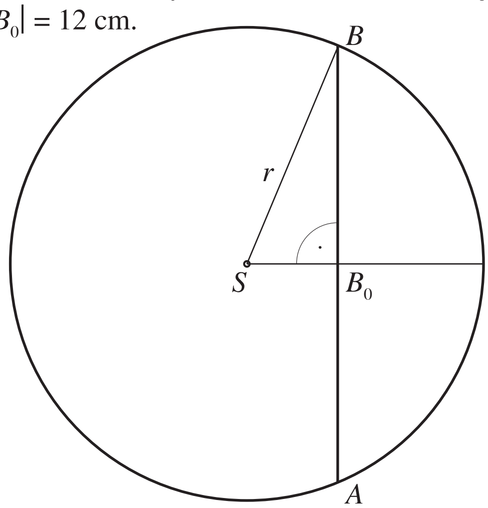
37. Aká je dĺžka tetivy kružnice s polomerom 3,14 dm, ak je tetiva vzdialená od stredu kružnice 12 cm?

Počítaj **na dve desatinné miesta**.

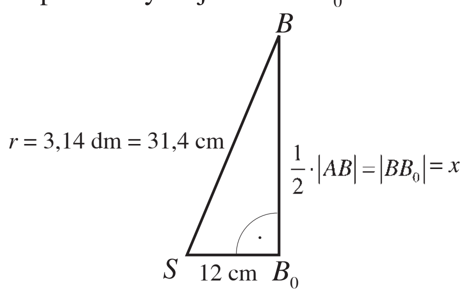
Riešenie 37.

Načrtneme si kružnicu so stredom S a polomerom r a jej tetivu AB.
Keďže **tetiva je kolmá na polomer** (aj priemer) kružnice, vzniká **pravouhlý trojuholník** a na riešenie úlohy môžeme **použiť Pytagorovu vetu**.

Vzdialenosť tetivy AB od stredu kružnice S je $|SB_0| = 12$ cm.



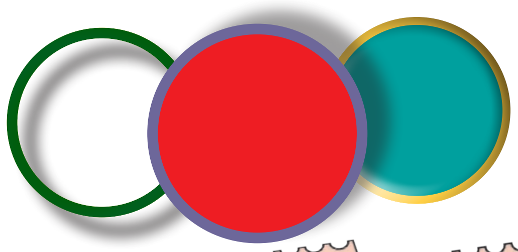
Vznikol pravouhlý trojuholník SB_0B.



Preponou trojuholníka je úsečka SB – polomer kružnice. **Odvesnami** sú úsečka BB_0 – polovica tetivy (x – máme vypočítať) a úsečka SB_0 – vzdialenosť tetivy od stredu kružnice. **Vzťah pre Pytagorovu vetu** bude:

$$|SB|^2 = |SB_0|^2 + |BB_0|^2$$
$$31{,}4^2 = 12^2 + x^2$$
$$985{,}96 = 144 + x^2$$
$$x^2 = 985{,}96 - 144$$
$$x^2 = 841{,}96$$
$$x = \sqrt{841{,}96}$$
$$x = 29{,}016\,5...$$

Počítame **na dve desatinné miesta**, preto $x = 29{,}01$.
Dĺžka $\boldsymbol{x}$ je **polovica** tetivy, preto:
$t = 2 \cdot x = 2 \cdot 29{,}01 = 58{,}02$. **Dĺžka tetivy je 58,02 cm.**



Pomôcka
Tetiva kružnice je **„úsečka, ktorej krajné body ležia na kružnici"**.

Pomôcka
Priemer kružnice je dvojnásobok jej polomeru.
Polomer kružnice označujeme $\boldsymbol{r}$.
Priemer kružnice označujeme $\boldsymbol{d}$.
Platí: $\boldsymbol{d = 2 \cdot r}$.

38. Aká je dĺžka tetivy kružnice

a) s polomerom 6 cm, ak je tetiva vzdialená od stredu kružnice 4 cm
b) s polomerom 1,28 dm, ak je tetiva vzdialená od stredu kružnice 10 cm
c) s priemerom 15 cm, ak je tetiva vzdialená od stredu kružnice 2,5 cm
d) s priemerom 7 cm, ak je tetiva vzdialená od stredu kružnice 32 mm?

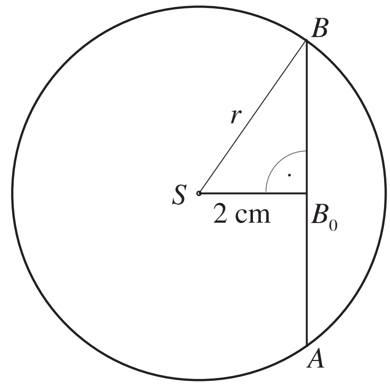
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

39. Aký je priemer kružnice, ak jej tetiva AB má dĺžku 57 mm a je od stredu kružnice vzdialená 2 cm?

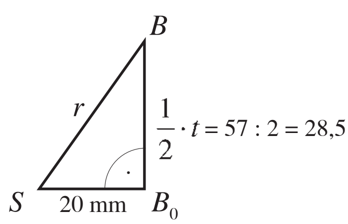
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 39.

Načrtneme kružnicu so stredom S a polomerom r a jej tetivu AB. **Tetiva je kolmá na polomer** kružnice, vzniká **pravouhlý trojuholník** a tak môžeme použiť **Pytagorovu vetu**.



Vznikol pravouhlý trojuholník SB_0B.



pokračovanie ▶▶

Riešenie 39. *pokračovanie*

Preponou trojuholníka je úsečka SB – polomer r kružnice, ktorý použijeme na výpočet priemeru kružnice: $d = 2 \cdot r$. **Odvesnami** sú úsečka BB_0 – polovica tetivy a úsečka SB_0 – vzdialenosť tetivy od stredu kružnice.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$$|SB|^2 = |SB_0|^2 + |BB_0|^2$$
$$r^2 = 20^2 + 28{,}5^2$$
$$r^2 = 400 + 812{,}25$$
$$r^2 = 1\,212{,}25$$
$$r = \sqrt{1\,212{,}25}$$
$$r = 34{,}817\,3...$$

Počítame **na dve desatinné miesta**,
preto $\boldsymbol{r}$ **= 34,81 mm**.
Potom priemer $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 34{,}81 = 69{,}62$.
Priemer kružnice je 69,62 mm.

40. Aký je polomer kružnice, ak

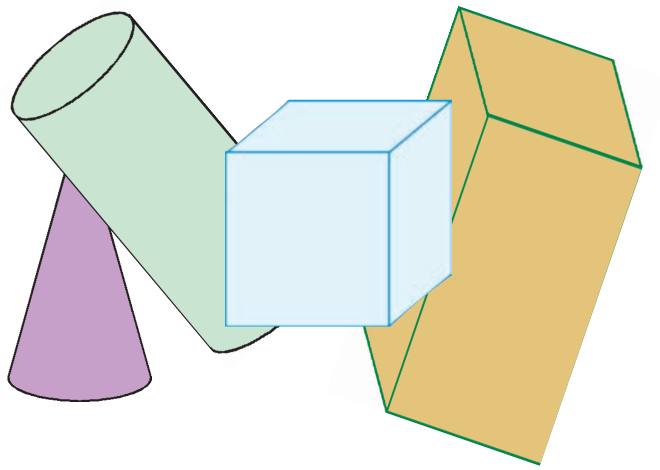
a) jej tetiva má dĺžku 8 cm a je od stredu kružnice vzdialená 3 cm

b) jej tetiva má dĺžku 3,8 dm a je od stredu kružnice vzdialená 1,5 dm

c) jej tetiva má dĺžku 26 cm a je od stredu kružnice vzdialená 1,2 dm

d) jej tetiva má dĺžku 6,2 cm a je od stredu kružnice vzdialená 3,1 cm?

Počítaj **na dve desatinné miesta**.



Pytagorova veta a telesá

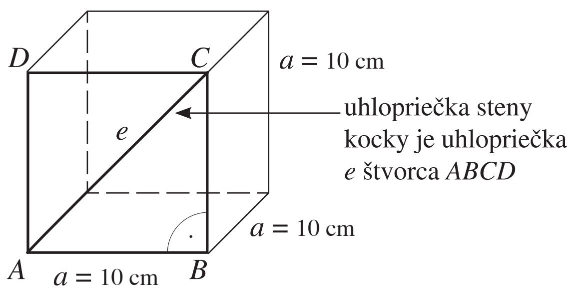
Ukážeme si riešenie úloh, ktoré sa často vyskytujú v rôznych učebniciach.

41. Vypočítaj dĺžku stenovej uhlopriečky kocky s hranou 10 cm.

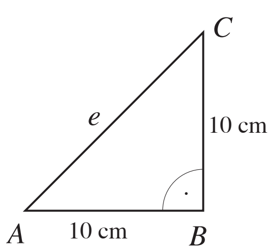
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 41.

Riešenie úlohy začneme náčrtkom kocky. Keďže steny kocky tvoria štvorce a stenová uhlopriečka je uhlopriečkou štvorca, ľahko nájdeme pravouhlý trojuholník a na riešenie úlohy použijeme **Pytagorovu vetu**.



Vo štvorci vyznačíme pravouhlý trojuholník ABC.



Preponou tohto trojuholníka je uhlopriečka $e = AC$, odvesnami sú strany štvorca AB a BC.

Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$
$$e^2 = 10^2 + 10^2$$
$$e^2 = 100 + 100$$
$$e^2 = 200$$
$$e = \sqrt{200}$$
$$e = 14{,}142\,1...$$

Počítame **na dve desatinné miesta**, preto $e = 14{,}14$.
Stenová uhlopriečka kocky má dĺžku **14,14 cm**.

42. Vypočítaj dĺžku stenovej uhlopriečky kocky:

a) s hranou 2,7 dm

b) s hranou 35 mm

c)* s hranou a

Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Problémová úloha

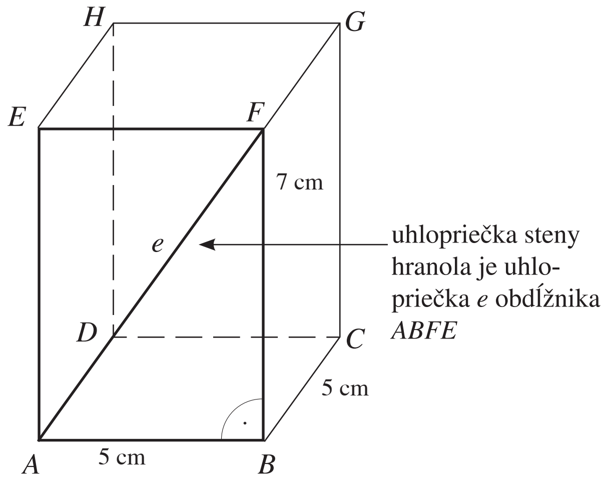
Vyjadrite pomocou strany kocky dĺžku jej **telesovej uhlopriečky**.

43. Aká je dĺžka stenových uhlopriečok pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy 5 cm a výškou 7 cm?

Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Riešenie 43.

Hranol načrtneme.
Jeho **podstavy** majú tvar **štvorca** a jeho **4 steny** majú tvar rovnakých **obdĺžnikov**.
Preto treba vypočítať dĺžku len jednej **stenovej uhlopriečky**.



V obdĺžniku vyznačíme **pravouhlý trojuholník** ABF.
Preponou tohto trojuholníka je uhlopriečka $e = AF$, **odvesnami** sú strany štvorca AB a BF.
Vzťah pre Pytagorovu vetu bude:

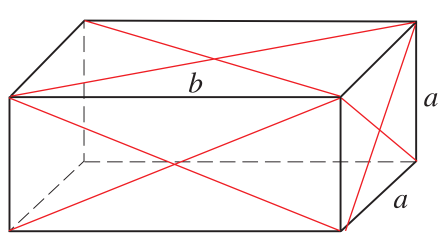
$$|AF|^2 = |AB|^2 + |BF|^2$$
$$e^2 = 5^2 + 7^2$$
$$e^2 = 25 + 49$$
$$e^2 = 74$$
$$e = \sqrt{74}$$
$$e = 8{,}602\,3...$$

Počítame **na dve desatinné miesta**, preto $e = 8{,}60$.
Stenová uhlopriečka kvádra má dĺžku **8,60 cm**.

44. Aká je dĺžka stenových uhlopriečok pravidelného štvorbokého hranola so štvorcovou postavou, ak jeho

a) hrana podstavy má 1,2 dm a výška 39 cm
b) hrana podstavy má 60 mm a výška 4 cm
c)* hrana podstavy je a a výška b
d) hrana podstavy je a a výška $(a + 3)$?

Počítaj **na dve desatinné miesta**.



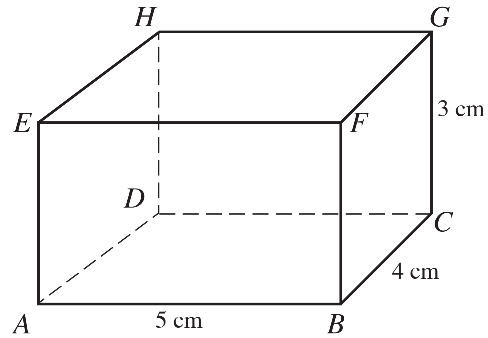
45. Vypočítaj dĺžku telesovej uhlopriečky kvádra, ktorého hrany majú dĺžky:
a) 5 cm, 4 cm a 3 cm
b) 6,2 dm, 30 cm a 0,25 m

Počítaj **na dve desatinné miesta**.

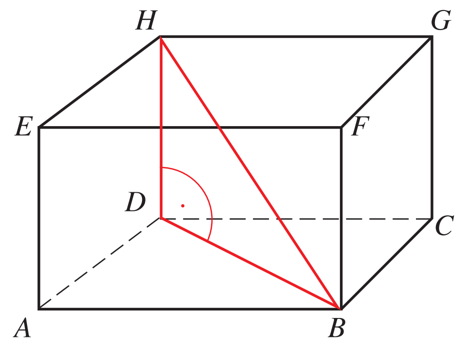
Riešenie 45.

Najprv **kváder načrtneme**, označíme jeho vrcholy, dané hrany a uhlopriečku, ktorej dĺžku máme vypočítať.
Pretože **podstavy** a **steny kvádra** majú rôzne rozmery, budú mať tvar **obdĺžnikov**.
To nám umožní pri riešení úlohy použiť **Pytagorovu vetu**.

a)



Načrtli sme kváder so zadanými údajmi.
Teraz v kvádri vyznačíme telesovú uhlopriečku BH ako stranu pravouhlého trojuholníka.



Poznámka
Telesovými uhlopriečkami sú aj úsečky AG, EC, FD.

V pravouhlom trojuholníku BDH s pravým uhlom pri vrchole D, je **telesová uhlopriečka** BH jeho **preponou** a strany BD a DH sú jeho **odvesnami**.

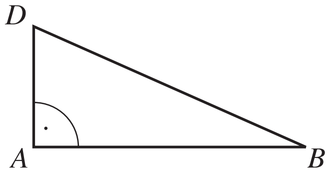
Vzťah pre Pytagorovu vetu v trojuholníku BDH je:

$$|BH|^2 = |BD|^2 + |DH|^2$$
$$|BH|^2 = |BD|^2 + 3^2$$

Dĺžku odvesny BD nepoznáme.
Vieme však, že odvesna BD **je uhlopriečkou** podstavy kvádra, ktorá má tvar **obdĺžnika**. Uhlopriečka tento obdĺžnik delí na 2 pravouhlé trojuholníky.
V pravouhlom trojuholníku BAD s pravým uhlom pri vrchole A je BD **prepona**, AD, AB **sú jeho odvesny**.

pokračovanie

Vzťah pre Pytagorovu vetu v trojuholníku *BAD*



$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$

dosadíme do

$|BH|^2 = |BD|^2 + \ 3^2$

Potom:

$|BH|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 + \ 3^2$

$|BH|^2 = \ 5^2 \ + \ 4^2 \ + 3^2$

$|BH|^2 = \ 25 \ + \ 16 \ + 9$

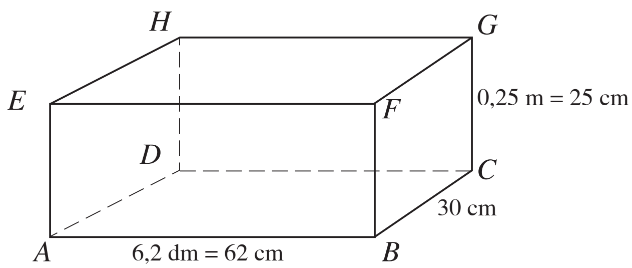
$|BH|^2 = \ 50$

$|BH| \ = \sqrt{50}$

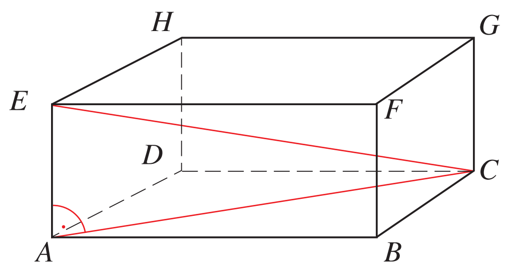
$|BH| \ = 7{,}071\ 0...$

Počítame **na dve desatinné miesta**, takže $|BH|$ **= 7,07 cm**. **Telesová uhlopriečka** kvádra má približnú dĺžku **7,07 cm**.

b) Načrtneme kváder s danými údajmi. **Vyjadríme dĺžky jeho hrán v rovnakých jednotkách (cm)**.



V kvádri **vyznačíme teraz telesovú uhlopriečku *EC*** ako stranu pravouhlého trojuholníka.



V pravouhlom trojuholníku *CAE* s pravým uhlom pri vrchole *A*, je **telesová uhlopriečka *EC*** jeho **preponou** a strany *AC* a *AE* sú jeho odvesnami.

Vzťah pre Pytagorovu vetu v trojuholníku *CAE* je:

$|EC|^2 = |AC|^2 + |AE|^2$

$|EC|^2 = |AC|^2 + \ 25^2$

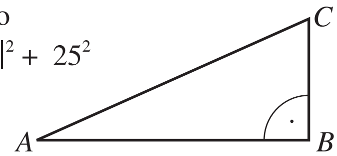
Dĺžku odvesny *AC* nepoznáme.
Vieme, že ***AC* je uhlopriečkou** podstavy kvádra, ktorú delí na 2 pravouhlé trojuholníky.
V pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri vrchole *B* je ***AC* preponou** a ***BC*** a ***AB* odvesnami**.

Vzťah pre Pytagorovu vetu v trojuholníku *ABC*:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

dosadíme do

$|EC|^2 = |AC|^2 + \ 25^2$



Potom:

$|EC|^2 = \ |AB|^2 + |BC|^2 + \ \ 25^2$

$|EC|^2 = \ \ 62^2 \ + \ 30^2 \ + \ 25^2$

$|EC|^2 = 3\ 844 \ + 900 \ \ + 625$

$|EC|^2 = 5\ 369$

$|EC| \ = \sqrt{5\ 369}$

$|EC| \ = 73{,}273\ 4...$

Počítame **na dve desatinné miesta**, takže
$|EC|$ = **73,27 cm**.
Telesová uhlopriečka kvádra má približne dĺžku **73,27 cm**.

46. Vypočítaj dĺžku telesovej uhlopriečky kvádra s hranami:

a) 15 cm, 12 cm a 11 cm
b) 3,7 dm, 52 cm a 0,36 m
c) 5 dm, 7 cm a 45 mm
d) 6,7 cm, 2 dm a 135 mm
Počítaj **na dve desatinné miesta**.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Len jedno z tvrdení je pravdivé.

M Trojuholník so stranami 12 cm, 13 cm a 5 cm **je** pravouhlý.

N Trojuholník so stranami 5 cm, 4 cm a 3 cm **nie je** pravouhlý.

O Trojuholník so stranami $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ a 1 je pravouhlý.

P Neexistuje rovnoramenný pravouhlý trojuholník.

2. Strana c trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B je:

E odvesna trojuholníka F prepona trojuholníka G rameno trojuholníka H základňa trojuholníka

3. V trojuholníku KLM s pravým uhlom pri vrchole K sa dá vzťah pre Pytagorovu vetu zapísať ako:

P $|KL|^2 = |LM|^2 + |KM|^2$ R $|LM|^2 = |KL|^2 + |KM|^2$ S $|KM|^2 = |KL|^2 + |LM|^2$

4. V trojuholníku PQR s pravým uhlom pri vrchole R sú strany $|PR| = 8$ cm a $|PQ| = 10$ cm.
Tretia strana trojuholníka sa dá vypočítať zo vzťahu:

C $|RQ| = \sqrt{5^2 - 4^2}$ A $|RQ| = \sqrt{10^2 - 8^2}$ B $|RQ| = \sqrt{10^2 + 8^2}$ D $|RQ| = \sqrt{5^2 + 4^2}$

5. V štvorci so stranou 20 cm dlhou sa dĺžka uhlopriečky e vypočíta pomocou vzťahu:

K $e = \sqrt{5^2 + 5^2}$ L $e^2 = 10^2 + 10^2$ M $e^2 + 20^2 = 20^2$ N $e = \sqrt{20^2 + 20^2}$

6. V obdĺžniku so stranami 4 cm a 3 cm dlhými sa dĺžka uhlopriečky f vypočíta pomocou vzťahu:

A $f = \sqrt{4^2 - 3^2}$ I $f^2 = 4^2 + 3^2$ I $f^2 = 16^2 + 9^2$ O $f = \sqrt{16^2 - 9^2}$

7. Ak má štvorec uhlopriečku e, potom pre výpočet jeho strany a platí vzťah:

E $a^2 = \frac{e^2}{2}$ F $a^2 = \frac{e^2}{4}$ G $a^2 = 2 \cdot e^2$ H $a^2 = 4 \cdot e^2$

Ak úlohy vyriešite správne, získate odpoveď na otázku:

Aká je v geometrii NAJČASTEJŠIA ČINNOSŤ**?**

Nuž predsa...

Zapamätajte si

Pravouhlý trojuholník je trojuholník, v ktorom je jeden z vnútorných uhlov **pravý (90°)**.
Najdlhšiu stranu ležiacu oproti pravému uhlu nazývame **prepona**.
Dve kratšie strany, ktoré tvoria ramená pravého uhla, nazývame **odvesny**.

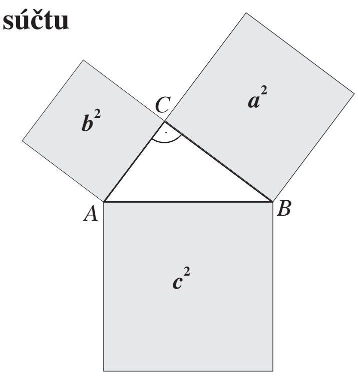
V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta:
Obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad oboma jeho odvesnami.
V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C **vzťah pre Pytagorovu vetu** je:

$c^2 = a^2 + b^2$ alebo $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

Dĺžky odvesien a a **b** môžeme vyjadriť vzťahmi:

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Obrátená Pytagorova veta:
Ak v trojuholníku platí Pytagorova veta, tak je to pravouhlý trojuholník.

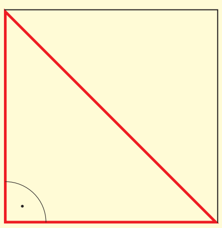


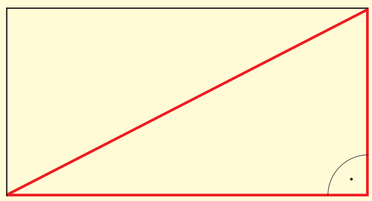
2.2 Použitie Pytagorovej vety pri riešení praktických úloh

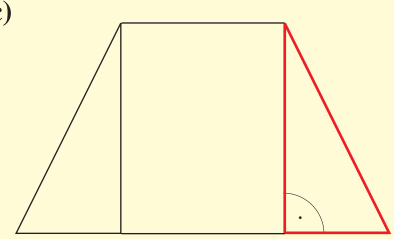
Viete, že...?
V Abecede symbolov štvorec symbolizuje Zem.

Čo sme sa už učili
Vyriešte nasledujúcu úlohu.
Použite vedomosti z predchádzajúcej kapitoly.

1. Zapíš vzťah pre Pytagorovu vetu v pravouhlých trojuholníkoch, ktoré sú súčasťou štvorca, obdĺžnika a rovnoramenného lichobežníka. Použi označenie vrcholov a strán tak, aby bolo riešenie úlohy čo najjednoduchšie.

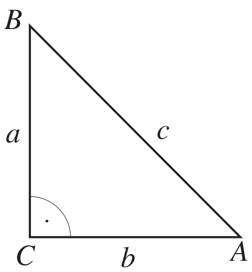
a)


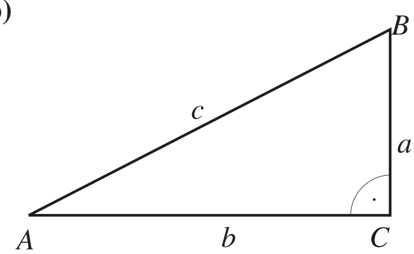
b)


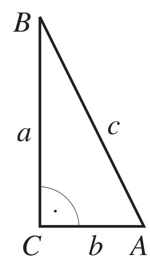
c)


Riešenie 1.

Aby bolo riešenie čo najjednoduchšie, použijeme označenia vrcholov písmenami *A, B, C* a na označenie strán použijeme písmená *a, b, c*. Písmenom *C* označíme vrchol pri pravom uhle.

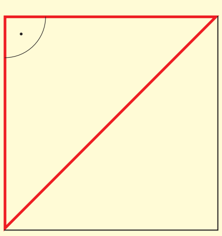
a)


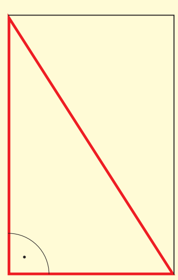
b)


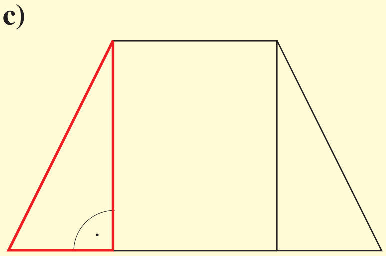
c)


Preponou je strana *c* trojuholníka *ABC*, **odvesnami** sú strany *a* a *b*.
Potom pre všetky trojuholníky platí **Pytagorova veta v tvare**: $c^2 = a^2 + b^2$

2. Zapíš vzťah pre Pytagorovu vetu v pravouhlých trojuholníkoch, ktoré sú súčasťou štvorca, obdĺžnika a rovnoramenného lichobežníka. Použi označenie vrcholov a strán tak, aby bolo riešenie úlohy čo najjednoduchšie.

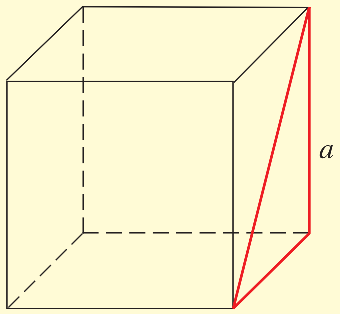
a)


b)


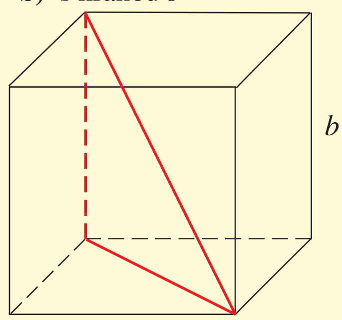
c)


3.* Zapíš vzťah pre Pytagorovu vetu v pravouhlých trojuholníkoch, ktoré sú súčasťou kocky:

a) s hranou *a*



b) s hranou *b*



Viete, že...?

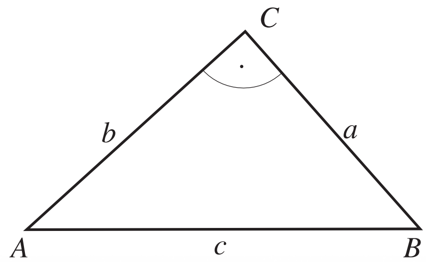
V Abecede symbolov symbolizuje rovnostranný trojuholník minulosť, súčasnosť či budúcnosť. Overte to.

4. Vypočítaj chýbajúce hodnoty z tabuľky, ak *a, b* sú označenia odvesien pravouhlého trojuholníka *ABC* a *c* je jeho prepona. Počítaj **na dve desatinné miesta**.

	a)	**b)**	**c)**
a	15 cm	**?**	0,28 m
b	**?**	2,5 dm	0,73 m
c	21 cm	8,7 dm	**?**

Riešenie 4.

Na riešenie úlohy použijeme vzťah pre Pytagorovu vetu, kde *c* je prepona a *a, b* sú odvesny pravouhlého trojuholníka *ABC*.



a) $a = 15$ cm
$c = 21$ cm
$b = ?$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$21^2 = 15^2 + b^2$$
$$441 = 225 + b^2$$
$$b^2 = 441 - 225$$
$$b^2 = 216$$
$$b = \sqrt{216}$$
$$b = 14{,}696\ 9...$$

Počítame na **dve desatinné miesta**, preto ***b* = 14,69 cm**.

b) $b = 2{,}5$ dm
$c = 8{,}7$ dm
$a = ?$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$8{,}7^2 = a^2 + 2{,}5^2$$
$$75{,}69 = a^2 + 6{,}25$$
$$a^2 = 75{,}69 - 6{,}25$$
$$a^2 = 69{,}44$$
$$a = \sqrt{69{,}44}$$
$$a = 8{,}333\ 0...$$

Počítame na **dve desatinné miesta**, preto ***a* = 8,33 dm**.

c) $a = 0{,}28$ m
$b = 0{,}73$ m
$c = ?$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 0{,}28^2 + 0{,}73^2$$
$$c^2 = 0{,}078\ 4 + 0{,}532\ 9$$
$$c^2 = 0{,}611\ 3$$
$$c = \sqrt{0{,}611\ 3}$$
$$c = 0{,}781\ 8...$$

Počítame na **dve desatinné miesta**, preto ***c* = 0,78 m**.

5. Vypočítaj do zošita chýbajúce hodnoty z tabuľky, ak *a, b* sú označenia odvesien pravouhlého trojuholníka *ABC* a *c* je jeho prepona.

a	2,5 dm	42 mm	**?**	3 m	25 cm	**?**
b	3,6 dm	**?**	74 cm	**?**	250 mm	56 cm
c	**?**	96 mm	128 cm	72 dm	**?**	9,2 m

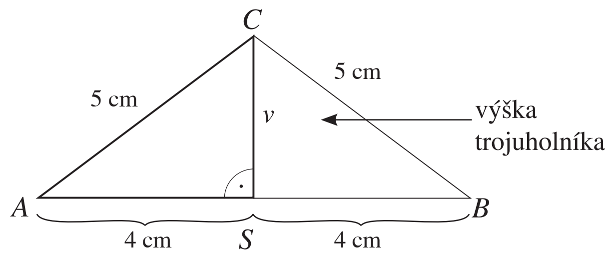
6.* V akom **pomere** je **dĺžka výšky** na základňu rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou 8 cm a ramenami 5 cm dlhými **k výške** na základňu rovnoramenného trojuholníka DEF so základňou 6 cm a ramenami 5 cm dlhými?

Riešenie 6.

Ako budeme úlohu riešiť? **Načrtneme** obidva trojuholníky a ich výšky. Potom **dĺžky týchto výšok vypočítame**. Nakoniec ich dáme do **pomeru**.

Výpočet výšky trojuholníka *ABC*:

Výška rozdelí rovnoramenný trojuholník na dva pravouhlé trojuholníky. S je stred strany AB. **Preponou** je úsečka AC, **odvesnami** sú úsečky AS a SC. Výška v je odvesnou SC pravouhlého trojuholníka. Vzťah pre **Pytagorovu vetu** bude:

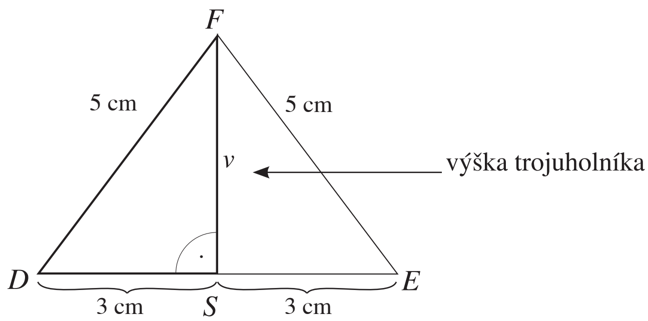


$$|AC|^2 = |AS|^2 + |SC|^2$$
$$5^2 = 4^2 + v^2$$
$$25 = 16 + v^2$$
$$v^2 = 25 - 16$$
$$v^2 = 9$$
$$v = \sqrt{9}$$
$$v = 3$$

Výška v trojuholníka ABC má dĺžku **3 cm**.

Poznámka
Výšky rovnoramenných trojuholníkov sme počítali v predchádzajúcej kapitole, a tak si vieme pomer týchto výšok určiť hneď. My si však ukážeme úplné riešenie.

Výpočet výšky trojuholníka *DEF* je podobný:



$$|DF|^2 = |DS|^2 + |SF|^2$$
$$5^2 = 3^2 + v^2$$
$$25 = 9 + v^2$$
$$v^2 = 25 - 9$$
$$v^2 = 16$$
$$v = \sqrt{16}$$
$$v = 4$$

Výška v trojuholníka DEF má dĺžku **4 cm**.

Teraz **dáme výšky do pomeru** v poradí, v akom boli trojuholníky uvedené v zadaní úlohy.
Pomer výšok trojuholníkov je 3 : 4.

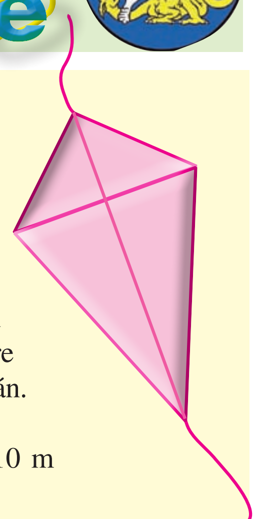
Problémová úloha
Akú dĺžku má výška na preponu c v pravouhlom trojuholníku ABC, ak vieme, že jeho obsah je 48 cm^2 a odvesna $a = 12$ cm?

Projektová úloha
Zistite, v ktorých štátoch Európy sa ešte aj dnes púšťajú na jeseň šarkany a aký majú tvar. Aké sú druhy súťažných šarkanov a kde u nás sa súťaže š arkanov a drakov organizujú?

Viete, že...?
V erbe viacerých miest sa nachádza motív boja Svätého Juraja s drakom.
Pokúste sa nájsť mestečko na Slovensku, ktorému patrí tento erb.

7.** JESEŇ A ŠARKAN

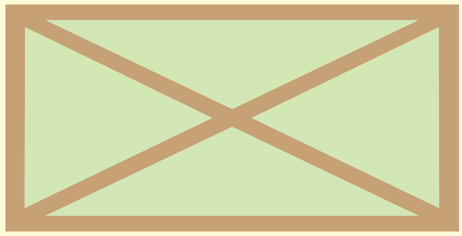
Na jeseň sa v mnohých krajinách zachoval zvyk púšťať si draka – šarkana.
Má rôzne tvary a neraz sa organizujú súťaže o najkrajšieho šarkana.



a) Naša škola tiež organizuje súťaž. Podmienkou súťaže v minulom školskom roku bolo zostrojiť šarkana z dvoch geometrických útvarov – rovnoramenných trojuholníkov, pričom dĺžka tela šarkana bola určená od 150 cm do 180 cm. Ostatné rozmery si súťažiaci volili podľa toho, ako chceli šarkana vyzdobiť. Na obrázku je návrh jedného zo šarkanov. Jeho dĺžka je 150 cm a najväčšia šírka je 60 cm. Základňa rovnoramenného trojuholníka delí dĺžku šarkana v pomere 3 : 7. Kvôli rozhodcom bolo potrebné nákres šarkana odovzdať so všetkými dĺžkami jeho strán. Aké dĺžky bolo potrebné vypočítať a aké mali hodnoty?

b) Lano súťažného šarkana je dlhé 25 m. Rozhodca stojí od súťažiaceho vo vzdialenosti 10 m a šarkan je priamo nad ním. V akej výške sa nachádza šarkan?

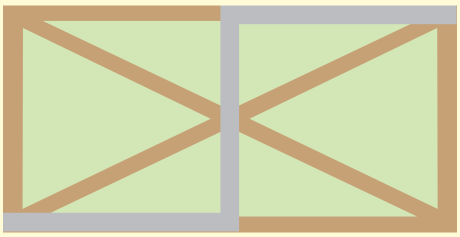
8.** PARK A ZELENÉ HLIADKY



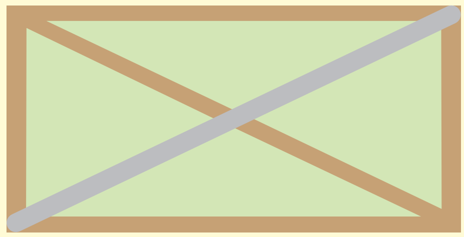
V jednom meste zbúrali starú budovu. Zelená hliadka sa rozhodla vypracovať návrh na park na mieste zbúraniska, ktoré malo rozmery 180 m a 200 m. Mal by pôdorys tvaru obdĺžnika a jednoduché cesty po obvode a po uhlopriečkach (obrázok). Tie by rozdelili park na štyri časti, v ktorých by mohlo byť ihrisko pre malé deti, hracia plocha na loptové hry pre staršie deti, miesto na koncerty pre malé hudobné skupiny a miesto na oddych pre seniorov s lavičkami. Tu by bola aj malá cukráreň.
Pre výpočet nákladov na výstavbu parku bolo potrebné určiť presné rozmery jednotlivých plôch. Aká je celková dĺžka chodníkov? Akú plochu majú jednotlivé časti parku?

Cestičky po uhlopriečke sú naplánované preto, lebo tak sa dá rýchlejšie prejsť z jedného konca parku na druhý.

A



B



O koľko metrov si skrátiš cestu, ak nepôjdeš po chodníku A ale chodníkom B po uhlopriečke?

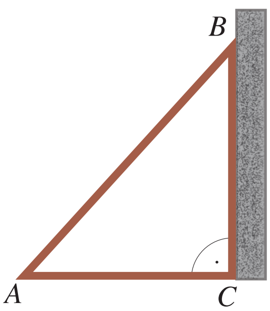
9. ZABUDLI SME KĽÚČE OD BRÁNKY

Dom je oplotený kamenným plotom vysokým 2,20 m. Je v ňom malá bránka a veľká posuvná brána. Keď si niekto zabudne kľúče od bránky, treba preliezť plot. Stalo sa to, a tak sme si požičali rebrík od suseda. Bol poriadne dlhý (3 m), preto sme ho museli oprieť dosť ďaleko od plota, aby siahal len po jeho vrchný okraj.
Ako ďaleko od plota sme rebrík umiestnili?

Riešenie 9.

Situáciu z úlohy si načrtneme. Pretože ploty sa stavajú kolmo na povrch cesty, rebrík je oň opretý, vzniká **pravouhlý trojuholník** ABC. Jeho **preponou** je rebrík (AB), **odvesnami** sú povrch cesty (AC) a plot (BC).
Vzťah pre **Pytagorovu vetu** bude:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\ 3^2 &= |AC|^2 + 2{,}2^2 \\ 9 &= |AC|^2 + 4{,}84 \\ |AC|^2 &= 9 - 4{,}84 \\ |AC|^2 &= 4{,}16 \\ |AC| &= \sqrt{4{,}16} \\ |AC| &= 2{,}039\,6... \end{aligned}$$

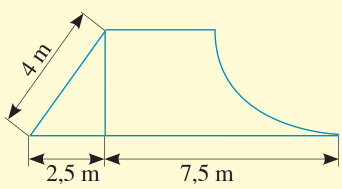


Výsledok zaokrúhlime **na dve desatinné miesta**, takže rebrík bol postavený od plota vo vzdialenosti asi **2,04 m**.

10. Aký dlhý by mal byť rebrík, aby bol od múru vysokého 2,20 m z úlohy 9 vzdialený len 1,5 m?

11. RAMPA PRE SKEJTEROV

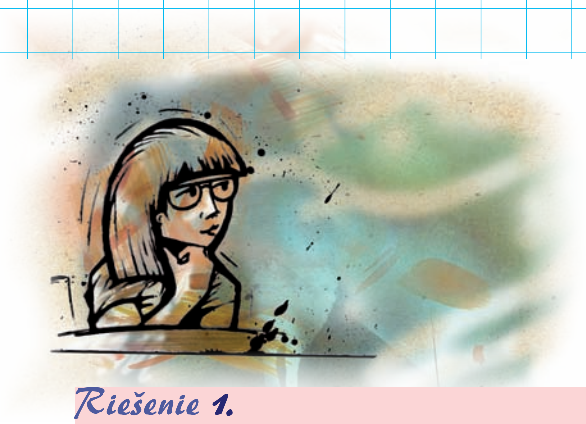
Pre skejterov bola na športovisku vybudovaná rampa. Jedna jej časť mala prierez pravouhlého trojuholníka. Do akej výšky siaha rampa na obrázku?



Projektová úloha

Zistite, aké rôzne druhy rámp sa predávajú pre cyklistov a skejterov. Napíšte, aké rôzne geometrické tvary sa používajú pri ich konštrukcii.
Pokúste sa navrhnúť svoju rampu.
Určte aj jej rozmery a odhadnite náklady na materiál v eurách.

3 Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc



3.1 Jednoduché lineárne rovnice riešené pomocou ekvivalentných úprav

Čo sme sa už učili

1. Zisti, či platí **rovnosť**:

$$3 \cdot (-2+4) + 5 = 5 \cdot 3 - 2^2.$$

Riešenie 1.

Počítali sme takto:

$$3 \cdot (-2+4) + 5 = 5 \cdot 3 - 2^2$$
$$3 \cdot 2 + 5 = 15 - 4$$
$$6 + 5 = 11$$
$$11 = 11$$

Môžeme počítať aj takto:

$$\underbrace{3 \cdot (-2+4) + 5}_{\text{ľavá strana}} = \underbrace{5 \cdot 3 - 2^2}_{\text{pravá strana}}$$

$$Ľ = 3 \cdot (-2+4) + 5 =$$
$$= 3 \cdot 2 + 5 =$$
$$= 6 + 5 =$$
$$= 11$$
$$P = 5 \cdot 3 - 2^2$$
$$= 15 - 4$$
$$= 11$$

$$Ľ = P = 11$$

Na obidvoch riešeniach vidieť, že rovnosť platí. Aký je rozdiel medzi týmito riešeniami? ... Porozmýšľajte.

2. Aké číslo môžeš doplniť do štvorčeka v zápise

$$2 \cdot \square + 1 = -12 + 3$$

tak, aby platila rovnosť?

Riešenie 2.

Počítali sme takto:
Vypočítali sme **hodnotu** výrazu

$$-12 + 3 = -9.$$

Potom sme **hľadali číslo** (väčšinou metódou pokus – omyl), ktoré po doplnení do štvorčeka vo výraze $2 \cdot \square + 1$ dá hodnotu -9.
Nech je -5 hľadané číslo. Potom

$$2 \cdot (-5) + 1 = -10 + 1 = -9$$

Do štvorčeka môžeme doplniť číslo **–5**.

Môžeme počítať aj takto:
Namiesto štvorčeka napíšeme **neznámu** $\boldsymbol{x}$.

$$2 \cdot x + 1 = -12 + 3.$$

Takýto zápis nazývame **rovnicou**, ktorú sme riešili metódou **opačných operácií**.

$$2 \cdot x + 1 = -9$$
$$2 \cdot x = -9 - 1$$
$$2 \cdot x = -10$$
$$x = -10 : 2$$
$$x = -5$$

Neznáma x je číslo – 5.

Platí $2 \cdot \boxed{-5} + 1 = -12 + 3.$

Počítaním spamäti **overíme** správnosť riešenia úlohy.

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia úlohy, namiesto neznámej x dosadíme číslo -5:

$$Ľ = 2 \cdot (-5) + 1 = -10 + 1 = -9$$
$$P = -12 + 3 = -9$$

$$Ľ = P$$

Riešiť rovnice metódou **opačných operácií znamená:**

$x + 1 = 5$	Vidíme, že $x = 4$.	Platí $x = 5 - 1$.
súčet	$\longrightarrow$	**rozdiel**
$x - 3 = 9$	Vidíme, že $x = 12$.	Platí $x = 9 + 3$.
rozdiel	$\longrightarrow$	**súčet**
$2 \cdot x = 16$	Vidíme, že $x = 8$.	Platí $x = 16 : 2$.
súčin	$\longrightarrow$	**podiel**
$x : 10 = 9$	Vidíme, že $x = 90$.	Platí $x = 9 \cdot 10$.
podiel	$\longrightarrow$	**súčin**
$\frac{x}{5} = 20$	Vidíme, že $x = 100$.	Platí $x = 20 \cdot 5$.
podiel	$\longrightarrow$	**súčin**

Projektová úloha

Pojem **„rovnosť“** poznáme nielen ako matematický pojem. Deklarácia ľudských práv používa pojem *rovnosť* častejšie ako matematici. Čo o nej viete?
A čo znamená výraz **ekvivalencia?**

Zápisy postupu riešenia rovníc sa používali rôzne. Je možné, že ste sa už o nich učili.

Namiesto tohto zápisu	sa používa aj tento zápis riešenia:
$x + 1 = 5$ $x = 5 - 1$ $x = 4$	$x + 1 = 5$ **/ – 1** $x = 4$
$x - 3 = 9$ $x = 9 + 3$ $x = 12$	$x - 3 = 9$ **/ + 3** $x = 12$
$2 \cdot x = 16$ $x = 16 : 2$ $x = 8$	$2 \cdot x = 16$ **/ : 2** $x = 8$
$x : 10 = 9$ $x = 9 \cdot 10$ $x = 90$	$x : 10 = 9$ **/ · 10** $x = 90$
$\frac{x}{5} = 20$ $x = 20 \cdot 5$ $x = 100$	$\frac{x}{5} = 20$ **/ · 5** $x = 100$
dlhší zápis riešenia	kratší zápis riešenia

Ak vieme rovnosť dvoch výrazov s neznámou *x* upraviť na tvar
$a \cdot x = b$, kde a a b sú reálne čísla,
tak túto rovnosť nazývame **lineárna rovnica s neznámou *x*.**
Riešenie lineárnej rovnice – **koreň rovnice** je číslo $x = \frac{b}{a}$, pre $a \neq 0$.

Lineárne rovnice riešime **ekvivalentnými úpravami.** Ukážeme si ich znovu trochu inak.

3. Rieš rovnice s neznámou x:

a) $x - 12 = -3$ **b)** $x + 8 = 1$ **c)** $6 \cdot x = -18$ **d)** $\frac{x}{7} = 9$

Riešenie 3.

a) $x - 12 = -3$ **/ + 12**
$x - 12 + 12 = -3 + 12$
$x = 9$

Ekvivalentná úprava zapísaná znamená:
K obom stranám rovnice môžeme pričítať ľubovoľné číslo a koreň rovnice sa nezmení.

b) $x + 8 = 1$ **/ – 8**
$x + 8 - 8 = 1 - 8$
$x = -7$

Ekvivalentná úprava zapísaná znamená:
Od oboch strán rovnice môžeme odčítať ľubovoľné číslo a koreň rovnice sa nezmení.

c) $6 \cdot x = -18$ **/ : 6**
$(6 \cdot x) : 6 = -18 : 6$
$x = -3$

Ekvivalentná úprava zapísaná znamená:
Obe strany rovnice môžeme vydeliť ľubovoľným číslom rôznym od 0 a koreň rovnice sa nezmení.

Iný zápis postupu riešenia: $6 \cdot x = -18$ **/ : 6**
$$\frac{6 \cdot x}{6} = \frac{-18}{6}$$
$x = -3$

d) $\frac{x}{7} = 9$ **/ · 7**
$\frac{x}{7} \cdot 7 = 9 \cdot 7$
$x = 63$

Ekvivalentná úprava zapísaná znamená:
Obe strany rovnice môžeme vynásobiť ľubovoľným číslom rôznym od 0 a koreň rovnice sa nezmení.

4. Vypočítaj korene rovníc, urob skúšky správnosti riešenia:

a) $4 \cdot x - 12 = 16$ **b)** $\frac{x}{2} - 1 = -5$

Riešenie 4.

a) $4 \cdot x - 12 = 16 \quad / + 12$

$4 \cdot x = 28 \quad / : 4$

$x = 7$

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia, namiesto neznámej ***x*** napíšeme vypočítané **číslo 7**:

Ľ $= 4 \cdot 7 - 12 = 28 - 12 = 16$

P $= 16$

Ľ = P

Koreňom rovnice $4 \cdot x - 12 = 16$ je číslo **7**.

b) $\frac{x}{2} - 1 = -5 \quad /+1$

$\frac{x}{2} = -4 \quad / \cdot 2$

$x = -8$

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia, namiesto neznámej ***x*** napíšeme číslo **– 8**:

Ľ $= \frac{-8}{2} - 1 = -4 - 1 = -5$

P $= -5$

Ľ = P

Koreňom rovnice $\frac{x}{2} - 1 = -5$ je číslo **– 8**.

5. Vypočítaj korene rovníc, urob skúšky správnosti riešení:

a) $3 \cdot x - 8 = 7$ **b)** $7 \cdot x + 3 = -18$

c) $\frac{x}{4} - 3 = 1$ **d)** $\frac{x}{3} + 2 = -1$

Vieš tieto úlohy riešiť aj spamäti?

6. Rieš lineárne rovnice.
Vykonaj skúšky správnosti riešení:

a) $5 \cdot x + 7 = -3 + 15$ **b)** $9 + 4 \cdot x - 3 = -1 + 5$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{5}{6}$ **d)** $-3{,}2 + 0{,}6 \cdot x = -1 - 0{,}2$

Riešenie 6.

Pred použitím ekvivalentných **úprav, zjednodušíme výrazy** na oboch stranách rovnice.

a) $5 \cdot x + 7 = -3 + 15$

$5 \cdot x + 7 = 12 \quad / - 7$

$5 \cdot x = 5 \quad / : 5$

$x = 1$

Skúška:

Ľ $= 5 \cdot 1 + 7 = 5 + 7 = 12$

P $= -3 + 15 = 12$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo **1.**

Riešenie 6. *pokračovanie*

b) $9 + 4 \cdot x - 3 = -1 + 5$

$4 \cdot x + 6 = 4 \quad / - 6$

$4 \cdot x = -2 \quad / : 4$

$x = -0{,}5$

Skúška:

Ľ $= 9 + 4 \cdot (-0{,}5) - 3 = 9 - 2 - 3 = 4$

P $= -1 + 5 = 4$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo **– 0,5**.

Pomôcka
Pri **výrazoch** a **mocninách** sa používajú aj tieto zápisy:
$5 \cdot x = 5x$
$-3 \cdot x = -3x$
$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{2x}{3}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{5}{6}$

Všetky zlomky upravíme na **spoločného menovateľa, číslo 6**.

$\frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{5}{6}$

$\frac{3x}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} \quad / \cdot 6$

$3x + 2 = 6 - 5$

Riešenie úlohy môže byť zapísané **viacerými spôsobmi**. Tu je ešte jeden:

$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{5}{6} \quad / \cdot 6$

$3 \cdot x + 2 \cdot 1 = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 5$

$3x + 2 = 6 - 5$

Od určitého riadka riešenia sa **zápisy rovnajú**.

$3x + 2 = 1 \quad / - 2$

$3x = -1 \quad / : 3$

$x = -\frac{1}{3}$

Výsledok **delenia** sme napísali v tvare **zlomku**, lebo periodické desatinné číslo –0,333... by bolo len približným riešením rovnice a skúška správnosti *by nevyšla.*

Skúška:

Ľ $= \frac{-\frac{1}{3}}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} : 2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} : \frac{2}{1} + \frac{1}{3} =$

$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

P $= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{1} - \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo $-\frac{1}{3}$.

pokračovanie ▶▶

d) $-3{,}2 + 0{,}6 \cdot x = -1 - 0{,}2$

$$-3{,}2 + 0{,}6 \cdot x = -1{,}2 \qquad / + 3{,}2$$
$$0{,}6 \cdot x = 2 \qquad / : 0{,}6$$
$$x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$2 : 0{,}6 = \frac{2}{1} : \frac{6}{10} = \frac{2}{1} \cdot \frac{10}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Skúška:

$$Ľ = -3{,}2 + 0{,}6 \cdot \frac{10}{3} = -\frac{32}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{3} =$$
$$= -\frac{32:2}{10:2} + \frac{2}{1} = -\frac{16}{5} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} =$$
$$= -\frac{16}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

$$P = -1 - 0{,}2 = -1{,}2$$

$Ľ = P$

Riešením rovnice je zmiešané číslo $\mathbf{3\frac{1}{3}}$.

Riešiť rovnicu môžeme aj tak,
že **upravíme desatinné čísla na celé čísla**.

$$-3{,}2 + 0{,}6 \cdot x = -1 - 0{,}2$$
$$-3{,}2 + 0{,}6 \cdot x = -1{,}2 \qquad / \cdot 10$$
$$-32 + 6 \cdot x = -12 \qquad / + 32$$
$$6 \cdot x = 20 \qquad / : 6$$
$$x = \frac{20}{6} = \frac{20:2}{6:2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Pomôcka
Desatinné čísla niekedy zapisujeme v tvare zlomku alebo zmiešaného čísla.
Pripomenieme si tento zápis.
0,7 čítame **nula** celých **sedem desatín** $\frac{7}{10}$

1,02 čítame **jedna** celá **dve stotiny** $1\frac{2}{100}$

7. Rieš rovnice. Vykonaj skúšky správnosti riešení.

a) $6 \cdot x + 3 = -14 + 5$
b) $2{,}5 + 2 \cdot x - 0{,}5 = 2 - 3{,}5$
c) $4{,}2 - 0{,}5 \cdot x = -7{,}5 - 0{,}2$
d) $\frac{5x}{2} - \frac{2}{3} = 0{,}2 - \frac{1}{2}$

Doteraz sme riešili rovnice, ktorých **pravá strana** obsahovala len **čísla** alebo **číselné výrazy.**
Teraz vyriešime rovnice, ktorých **pravá strana** bude obsahovať **výraz s neznámou.**

8. Rieš rovnice. Vykonaj skúšky správnosti riešení.

a) $2 \cdot (x + 3) = 1 - 4x$
b) $5x - 4 = 3 \cdot (x - 1)$
c) $-3 \cdot (0{,}2x + 1) = 2 - (1{,}6x + 1)$
d) $5 \cdot (1{,}2 + x) - 4 \cdot (0{,}5x - 1) = 0$

Riešenie 8.

Najprv **roznásobíme** zátvorky. Potom **upravíme** podľa potreby ľavú a pravú stranu rovnice. Na záver **použijeme ekvivalentné úpravy** pre výrazy s neznámou.

a) $2 \cdot (x + 3) = 1 - 4x$

$$2x + 6 = 1 - 4x \qquad / -6$$
$$2x = -5 - 4x \qquad / + 4x$$
$$6x = -5 \qquad / : 6$$
$$x = -\frac{5}{6}$$

Skúška:

$$Ľ = 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} + 3\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} + \frac{18}{6}\right) = 2 \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{3}$$
$$P = 1 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 1 + \frac{10}{3} = \frac{3}{3} + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

$Ľ = P$

Riešením rovnice je číslo $\mathbf{-\frac{5}{6}}$.

Pomôcka
Niektorí už možno tieto úlohy počítali a použili nasledujúci **zápis** postupu riešenia:

$$2 \cdot (x + 3) = 1 - 4x$$
$$2x + 6 = 1 - 4x$$
$$2x + 4x = 1 - 6$$
$$6x = -5$$
$$x = -\frac{5}{6}$$

Vidíme:
rôzny zápis riešenia úlohy = **= rovnaký koreň** rovnice.

Viete, že...?

Existuje veda o číslach, ktorá sa nevolá matematika a číslo jeden je podľa nej číslom slnka. Zistite, aká je to veda.

pokračovanie

Riešenie 8. pokračovanie

b) $5x - 4 = 3 \cdot (x - 1)$

$$5x - 4 = 3x - 3 \qquad / + 4$$
$$5x = 3x + 1 \qquad / - 3x$$
$$2x = 1 \qquad / : 2$$
$$x = 0{,}5$$

Skúška:

Ľ = $5 \cdot 0{,}5 - 4 = 2{,}5 - 4 = -1{,}5$

P = $3 \cdot (0{,}5 - 1) = 3 \cdot (-0{,}5) = -1{,}5$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo **0,5**.

c) $-3 \cdot (0{,}2x + 1) = 2 - (1{,}6x + 1)$

$$-0{,}6x - 3 = 2 - 1{,}6x - 1 \qquad / + 3$$
$$-0{,}6x = -1{,}6x + 4 \qquad / + 1{,}6x$$
$$1x = 4$$
$$x = 4$$

Skúška:

Ľ $= -3 \cdot (0{,}2 \cdot 4 + 1) =$
$= -3 \cdot (0{,}8 + 1) =$
$= -3 \cdot 1{,}8 = -5{,}4$

P $= 2 - (1{,}6 \cdot 4 + 1) =$
$= 2 - (6{,}4 + 1) =$
$= 2 - 7{,}4 = -5{,}4$

Ľ = P

Pomôcka
Pripomeňme si, že:
$1 \cdot x = x$
$-1 \cdot x = -x$

Riešením rovnice je číslo **4**.

d) $5 \cdot (1{,}2 + x) - 4 \cdot (0{,}5x - 1) = 0$

$$6 + 5x - 2x + 4 = 0$$
$$3x + 10 = 0 \qquad /-10$$
$$3x = -10 \qquad / : 3$$
$$x = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

Skúška:

$$Ľ = 5 \cdot \left[1{,}2 + \left(-\frac{10}{3}\right)\right] - 4 \cdot \left[0{,}5 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 1\right] =$$
$$= 5 \cdot \left[\frac{12}{10} + \left(-\frac{10}{3}\right)\right] - 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 1\right] =$$
$$= 5 \cdot \left[\frac{12 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \left(-\frac{10 \cdot 10}{3 \cdot 10}\right)\right] - 4 \cdot \left[-\frac{5}{3} - 1\right] =$$
$$= 5 \cdot \left[\frac{36}{30} + \left(-\frac{100}{30}\right)\right] - 4 \cdot \left[-\frac{5}{3} - \frac{3}{3}\right] =$$
$$= 5 \cdot \left[-\frac{64}{30}\right] - 4 \cdot \left[-\frac{8}{3}\right] = -\frac{64}{6} + \frac{32}{3} =$$
$$= -\frac{64:2}{6:2} + \frac{32}{3} = -\frac{32}{3} + \frac{32}{3} = 0$$

P = 0

Ľ = P

Riešením rovnice je zmiešané číslo $\mathbf{-3\frac{1}{3}}$.

Poznámka
Počítanie so zlomkami je niekedy ťažké a skúška správnosti zložitejšia ako riešenie samotnej rovnice. Úlohy so zlomkami počíta veľa žiakov a učiteľov rôzne. Počítajte ich tak, ako najlepšie viete.

9. Rieš rovnice. Vykonaj skúšky správnosti riešení.

a) $7 \cdot (x - 2) = -4 - 3x$
b) $6x - 5 = 4 \cdot (x - 1)$
c) $-2 \cdot (1{,}5x + 1) = 1 - (x + 1)$
d) $0{,}5 \cdot (3 + x) - 0{,}2 \cdot (0{,}5x - 5) = 0$

10. Rieš rovnice. Vykonaj skúšky správnosti riešení.

a) $5x \cdot (1 - x) - 3 = x \cdot (2 - 5x)$
b)* $(x - 1) \cdot (x + 3) = x \cdot (2 + x)$

Riešenie 10.

Najprv **roznásobíme** zátvorky. Potom **upravíme** podľa potreby ľavú a pravú stranu rovnice.
Na záver **použijeme ekvivalentné úpravy**.

a) $5x \cdot (1 - x) - 3 = x \cdot (2 - 5x)$

$$5x - 5x^2 - 3 = 2x - 5x^2 \qquad / + 5x^2$$
$$5x - 3 = 2x \qquad / + 3$$
$$5x = 2x + 3 \qquad / - 2x$$
$$3x = 3 \qquad / : 3$$
$$x = 1$$

Skúška:

Ľ $= 5 \cdot 1 \cdot (1 - 1) - 3 = 5 \cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3$

P $= 1 \cdot (2 - 5 \cdot 1) = 1 \cdot (2 - 5) = 1 \cdot (-3) = -3$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo **1.**

b)* $(x - 1) \cdot (x + 3) = x \cdot (2 + x)$

$$x^2 + 3x - x - 3 = 2x + x^2$$
$$x^2 + 2x - 3 = 2x + x^2 \qquad / - x^2$$
$$2x - 3 = 2x \qquad / + 3$$
$$2x = 2x + 3 \qquad / - 2x$$
$$\mathbf{0 \neq 3}$$

Pri riešení rovnice vznikla **nerovnosť $0 \neq 3$**, preto rovnica **nemá riešenie – neexistuje koreň rovnice**.

11.* Rieš rovnice a urob skúšky správnosti riešení.

a) $2x \cdot (3 - x) + 5 = x \cdot (1 - 2x)$
b) $(x + 2) \cdot (x + 1) = x \cdot (x - 7)$
c) $(x - 5) \cdot (x + 5) = (x - 10) \cdot x$
d) $(1 - x) \cdot (1 + x) = (4 - x) \cdot x$

Viete, že...?

Slovanské číslovanie, podobne ako rímske, používalo na zápis čísel písmená. Slovanské používalo až 27 písmen – nie veľkých ako rímske číslovanie, ale malých.

1 az	6 zeló
2 védi	7 zemlja
3 glagóľ	8 íže
4 dobró	9 fitá
5 esľ	

Číslo 10 000 sa im zdalo tak veľké, že ho nazvali **tma**.

12. Vypočítaj koreň rovnice a urob skúšky správnosti riešení.

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{x-2}{4}$

b)* $\frac{x}{5}-\frac{x+3}{2}=\frac{3}{10}$

c)* $\frac{x-1}{2}=0{,}5\cdot(x-1)$

Riešenie 12.

Najprv **upravíme zlomky na spoločného menovateľa**. Potom podľa potreby **upravíme ľavú a pravú stranu rovnice**. Na záver **použijeme ekvivalentné úpravy**.

a)

Spoločný menovateľ je číslo 4.

$$\frac{x+1}{2}=\frac{x-2}{4}$$
$$\frac{(x+1)\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{x-2}{4}$$
$$\frac{2x+2}{4}=\frac{x-2}{4} \qquad /\cdot 4$$
$$2x+2=x-2 \qquad /-2$$
$$2x=x-4 \qquad /-x$$
$$x=-4$$

Skúška:

$$Ľ=\frac{-4+1}{2}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$
$$P=\frac{-4-2}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-6:2}{4:2}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo **–4.**

b)*

Spoločný menovateľ je číslo 10.

$$\frac{x}{5}-\frac{x+3}{2}=\frac{3}{10}$$
$$\frac{x\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{(x+3)\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$$
$$\frac{2x}{10}-\frac{5x+15}{10}=\frac{3}{10} \qquad /\cdot 10$$
$$2x-(5x+15)=3$$
$$2x-5x-15=3$$
$$-3x-15=3 \qquad /+15$$
$$-3x=18 \qquad /:(-3)$$
$$x=-6$$

Skúška:

$$Ľ=\frac{-6}{5}-\frac{-6+3}{2}=\frac{-6}{5}-\frac{-3}{2}=\frac{-6\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{-3\cdot 5}{2\cdot 5}=$$
$$=\frac{-12}{10}-\frac{-15}{10}=\frac{-12}{10}+\frac{15}{10}=\frac{3}{10}$$
$$P=\frac{3}{10}$$

Ľ = P

Riešením rovnice je číslo **–6.**

Riešenie 12. *pokračovanie*

c)*

$$\frac{x-1}{2}=0{,}5\cdot(x-1)$$
$$\frac{x-1}{2}=0{,}5x-0{,}5 \qquad /\cdot 2$$
$$x-1=x-1 \qquad /+1$$
$$x=x \qquad /-x$$
$$\mathbf{0=0}$$

Pri riešení rovnice sme dostali **rovnosť 0 = 0,** preto **riešením rovnice môže byť ľubovoľné číslo.** Hovoríme, že rovnica má **nekonečne veľa riešení.**

Poznámka

Tento záver sme mohli vysloviť už vtedy, keď sme získali tieto rovnosti výrazov: $x-1=x-1$
$x=x$

13. Vypočítaj koreň rovnice a urob skúšky správnosti riešení.

a) $\frac{x+5}{3}=\frac{x-9}{7}$

b) $\frac{x+3}{4}+\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{10}=\frac{1}{5}$

d)* $\frac{x}{9}-\frac{x+2}{3}=\frac{5}{18}$

e)* $\frac{3\cdot(x+4)}{5}-2=\frac{3x}{5}+0{,}4$

f)* $-\frac{3-x}{7}-\frac{x-3}{7}=0$

Pomôcka

Ak je pred zlomkom znamienko **mínus**, po ekvivalentnej úprave píšeme **čitateľa v zátvorke.** **Mínus pred výrazom** v zátvorke **zmení znamienka vo výraze na opačné**.

$-(2x+3)=-2x-3$

$-(2x-3)=-2x+3$

$-(-2x+3)=2x-3$

14. Pre akú hodnotu **neznámej** u sa dané **dva výrazy rovnajú?**

a) $4\cdot(3u+5)$; $-6u+8$

b) $\frac{u+4}{3}$; $\frac{5+3u}{2}$

Riešenie 14.

Ak sa majú **dva výrazy rovnať,** znamená to, že riešime **rovnicu:**

a) $4\cdot(3u+5)=-6u+8$

$$12u+20=-6u+8 \qquad /-20$$
$$12u=-6u-12 \qquad /+6u$$
$$18u=-12 \qquad /:18$$
$$u=-\frac{12}{18}=-\frac{2}{3}$$

Riešenie rovnice si vyžaduje skúšku správnosti riešenia. V tomto prípade urob skúšku správnosti samostatne.

Dané dva výrazy sa rovnajú, ak $\boldsymbol{u=-\frac{2}{3}}$.

pokračovanie ▶▶

Riešenie 14. pokračovanie

Pomôcka
Zlomky, s ktorými sme počítali, sme upravili na **základný tvar** – čitateľa aj menovateľa sme **delili tým istým číslom rôznym od nuly.**

$$-\frac{12}{18}=-\frac{12:6}{18:6}=-\frac{2}{3}$$

b) $\frac{u+4}{3}=\frac{5+3u}{2}$

Spoločný menovateľ je číslo 6.

$\frac{(u+4)\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{(5+3u)\cdot 3}{2\cdot 3}$

$\frac{2u+8}{6}=\frac{15+9u}{6}$ $\quad /\cdot 6$

$2u+8=15+9u$ $\quad /-8$

$2u=7+9u$ $\quad /-9u$

$-7u=7$ $\quad /:(-7)$

$u=-1$

Riešenie rovnice si vyžaduje skúšku správnosti riešenia. V tomto prípade urob skúšku správnosti samostatne.

Dané dva výrazy sa rovnajú, ak ***u* = – 1.**

15. Pre akú hodnotu **neznámej *w*** sa dané dva výrazy rovnajú?

a) $6\cdot(2w-3);\ 5\cdot w+2$

b) $6{,}5\cdot(-2w)+7;\ 1{,}6\cdot w-7{,}6$

c) $\frac{w-1}{3};\ \frac{1+2w}{6}$

d) $\frac{w+4}{7};\ \frac{3-w}{6}$

16. Pre akú hodnotu **neznámej *y*** sa dané výrazy **rovnajú 0**?

a) $3{,}5\cdot(2y+4)$

b) $\frac{(0{,}2+y)\cdot 5}{2}$

Riešenie 16.

Ak sa má **výraz rovnať nule**, znovu riešime **rovnicu**.

a) $3{,}5\cdot(2y+4)=0$

$7y+14=0$ $\quad /-14$

$7y=-14$ $\quad /:7$

$y=-2$

Riešenie rovnice si vyžaduje skúšku správnosti. Urob ju samostatne.

Výraz sa rovná nule, pre ***y* = – 2**.

Poznámka
Pri riešení rovnice 3,5 · (2*y* + 4) = 0 sme mohli použiť aj vetu: **Súčin dvoch činiteľov sa rovná nule, ak sa aspoň jeden z nich rovná nule.** Vtedy stačilo riešiť rovnicu:

$2y+4=0$

$y=-2$

Riešenie 16. pokračovanie

b) $\frac{(0{,}2+y)\cdot 5}{2}=0$

$\frac{1+5y}{2}=0$ $\quad /\cdot 2$

$1+5y=0$ $\quad /-1$

$5y=-1$ $\quad /:5$

$y=-0{,}2$

Riešenie rovnice si vyžaduje skúšku správnosti riešenia. Urob ju samostatne.

Výraz sa rovná nule, pre ***y* = – 0,2**.

17. Pre akú hodnotu **neznámej *m*** sa dané výrazy **rovnajú 0?**

a) $-2+3\cdot(m+5)$

b) $2{,}4-2\cdot(m+0{,}5)$

c) $18\cdot\frac{m-7}{2}$

d) $\frac{m+1{,}5}{4}\cdot 0{,}2$

18. Ktoré z vymenovaných čísel je riešením rovnice 2 · (*x* + 5) = *x* – 4?

A – 5 **B** 1 **C** – 14 **D** –9

Riešenie 18.

Pri riešení týchto úloh často používame **odhad založený na intuícii.** Nech je riešením rovnice číslo – 9, možnosť **D**.

Dosadíme číslo do ľavej strany rovnice a potom **do pravej strany** rovnice – akoby sme robili **skúšku správnosti** riešenia rovnice.

Ľ = 2 · (*x* + 5) = 2 · (–9 + 5) = 2 · (–4) = –8

P = *x* – 4 = –9 – 4 = – 13

Pretože – 8 ≠ – 13, tak Ľ ≠ P a číslo –9 (**D**) **nie je riešením rovnice.**

Nech je riešením rovnice číslo – 14, možnosť **C**.

Dosadíme číslo do ľavej strany rovnice a potom **do pravej strany** rovnice.

Ľ = 2 · (*x* + 5) = 2 · (– 14 + 5) = 2 · (– 9) = – 18

P = *x* – 4 = – 14 – 4 = – 18

Ľ = P

Platí Ľ = P, číslo – 14, teda možnosť **C, je riešením rovnice.**

Problémová úloha

a) Pre akú hodnotu *p* nemá lineárna rovnica
(2*p* – 1) · *x* + 4 = 12
s neznámou *x* riešenie?

b) Pre akú hodnotu *q* má lineárna rovnica
q · *x* – 2*q* + 1 = 5*q* – 2
s neznámou *x* nekonečne veľa riešení?

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Riešením rovnice $5x - 12 = 3x + 4$ je číslo:

A 8 B 2 C 4 D -8

2. Riešením rovnice $0{,}5x + 0{,}4 = -1{,}5x - 0{,}6$ je číslo:

A 0,5 B $-0{,}5$ C 0,2 D $-0{,}2$

3. Riešením rovnice $2 \cdot (x - 3) - 1 = x - 2$ je číslo:

A 3 B 2 C 5 D 4

4. Riešením rovnice $3x - 4 \cdot (x + 1) = 1 - 6x$ je číslo:

A 1 B 5 C 0 D 2

5. Riešením rovnice $\frac{x-1}{2} = \frac{2x+3}{5}$ je:

A 11 B 4 C -4 D 10

6. Riešením rovnice $\frac{x+1}{4} + \frac{x-2}{2} = \frac{x}{8}$ je:

A 3 B 1,2 C 4,5 D 2

7. Ktoré z uvedených čísel je riešením rovnice $\frac{x-1}{3} = 5$?

A 10 B 15 C 16 D 14

8. Ktoré z uvedených čísel je riešením rovnice $\frac{x}{4} = 2 - \frac{1}{2}$?

A 8 B 12 C 7,5 D 6

9. Výrazy $0{,}3 \cdot (b - 2{,}5)$, $-0{,}7 \cdot b + 0{,}25$ sa rovnajú pre b rovnajúce sa:

A 2,5 B 1 C $-0{,}25$ D 2,75

10. Výraz $1{,}16 \cdot p + 0{,}08 - 0{,}16 \cdot (p - 2)$ sa rovná 0 pre p rovnajúce sa:

A 0,40 B 4 C -4 D $-0{,}40$

11.* Rovnica $\frac{x-1}{3} = \frac{2x+6}{5}$ má také isté riešenie ako rovnica:

A $\frac{x-5}{15} = \frac{2x+12}{15}$ B $\frac{2x-6}{3} = \frac{x-1}{5}$ C $\frac{x}{3} - 0{,}3 = \frac{2x}{5} + 1{,}2$ D $\frac{x+20}{2} = -1{,}5$

12. Riešením rovnice $-6x + 7 = 2x - 17$ je

A číslo menšie ako 2 B číslo väčšie ako 2 C číslo väčšie ako 5 D záporné číslo

13. Riešenie väčšie ako 10 má rovnica:

A $x + 3 = \frac{x+10}{5}$ B $0{,}4x - 0{,}5 = -0{,}2x + 1{,}5$ C $\frac{x}{3} = \frac{x}{2} - 10$ D $\frac{x+4}{2} = 5$

14. Z uvedených rovníc **nemá** riešenie rovnica:

A $0{,}5x + 0{,}1 = \frac{x+10}{2}$ B $5x - 3 = 3 - 5x$ C $1 - \frac{x}{8} = \frac{x}{2} + 1$ D $\frac{x+4}{2} = 0{,}5x + 2$

Zapamätajte si

Lineárna rovnica s neznámou *x* je rovnosť dvoch výrazov, ktorú vieme upraviť na tvar
$\boldsymbol{a \cdot x = b}$, kde a a b sú reálne čísla.

Riešenie lineárnej rovnice – **koreň rovnice,** je číslo $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$, pre $a \neq 0$.

Ak $a = 0$ a $b \neq 0$, potom lineárna rovnica **nemá riešenie.**

Ak $a = 0$ a $b = 0$ potom má lineárna rovnica **nekonečne veľa riešení.**

Ekvivalentné úpravy rovníc:
K obidvom stranám rovnice môžeme pričítať ľubovoľné číslo alebo výraz – koreň rovnice sa nezmení.

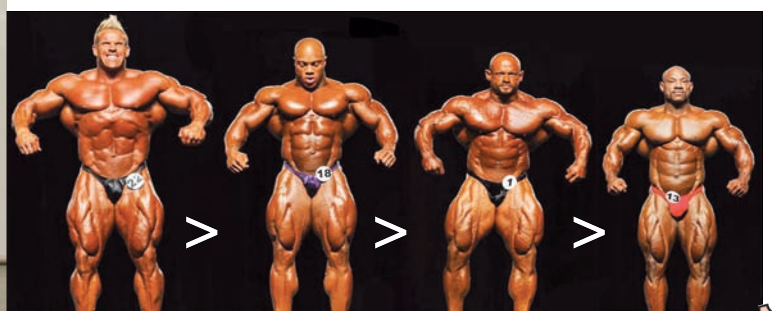
Od oboch strán rovnice môžeme odčítať ľubovoľné číslo alebo výraz – koreň rovnice sa nezmení.

Obidve strany rovnice môžeme vydeliť ľubovoľným číslom rôznym od 0 – koreň rovnice sa nezmení.

Obidve strany rovnice môžeme vynásobiť ľubovoľným číslom rôznym od 0 – koreň rovnice sa nezmení.

3.2 Jednoduché lineárne nerovnice

Porovnávanie ... robíme ho skoro stále.
Som vyšší ako ...?
Je to ťažšie alebo ľahšie...?
Stojí to viac alebo menej?
Je to dlhšie ako...?
V matematike porovnávame pomocou **znakov nerovností** alebo znaku **rovnosti.**



Problémová úloha
Nájdite a opíšte používanie znakov nerovnosti v iných predmetoch, ako je matematika.

Pomôcka
Znaky nerovnosti a rovnosti

znak	čítame
$>$	je väčšie
$<$	je menšie
$\geq$	je väčšie alebo sa rovná
$\leq$	je menšie alebo sa rovná
$\neq$	nerovná sa
$=$	rovná sa

Čo sme sa už učili

1. Zoraď hodnoty číselných výrazov od najmenšej po najväčšiu.

$$2\cdot(-3+1)$$
$$2\cdot(-3)+1$$
$$1-2\cdot(-3)$$
$$-1+2\cdot(-3)$$

Riešenie 1.

Počítali sme takto:

$$2\cdot(-3+1)=2\cdot(-2)=-4$$
$$2\cdot(-3)+1=-6+1=-5$$
$$1-2\cdot(-3)=1+6=7$$
$$-1+2\cdot(-3)=-1-6=-7$$

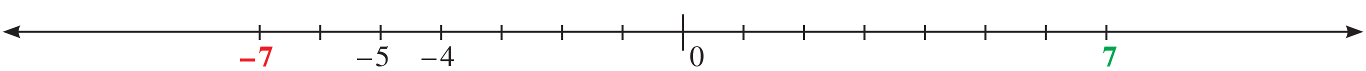
Môžeme počítať aj takto:

$$2\cdot(-3+1)=2\cdot(-3)+2\cdot 1=-6+2=-4$$
$$2\cdot(-3)+1=-6+1=1-6=-5$$
$$1-2\cdot(-3)=6+1=7$$
$$-1+2\cdot(-3)=-6-1=-7$$

Najmenšia hodnota — **Najväčšia hodnota**

$$-7 \quad < \quad -5 \quad < \quad -4 \quad < \quad 7$$

Pri zoraďovaní hodnôt (porovnávaní) sa niekedy používa **číselná os.**



Viete, že...?

Cestovanie sa tiež spája s porovnávaním:

- najväčšia vzdialenosť ↔ najkratší čas
- najrýchlejší vlak ↔ najlacnejšia doprava
- najdlhšia diaľnica ↔ najvyššia cestná daň...

Jeden z najrýchlejších vlakov na svete je v Číne. Vlak sa skrátene označuje CRH2. V závislosti od typu vlaku dosahuje rýchlosť 250 až 350 km za hodinu.
Pozdĺž západného pobrežia Taiwanu uháňa vlak THSR rýchlosťou 335 km za hodinu a od roku 2007 spája mestá Kaohsiung a Tchaj-pej.
Rýchle vlaky jazdia aj v Kórei, Korean Train eXpress dosahuje rýchlosť až 350 km za hodinu.

2. Pomocou znakov nerovností a rovnosti porovnaj mocniny $(-5)^3$ a $(-4)^2$.

Riešenie 2.

Počítali sme takto:

Zisťovali sme, či je výsledok umocnenia kladný alebo záporný. Potom sme mocniny porovnali.

$(-5)^3$
- → Mocniteľ je nepárne číslo.
- → Základ mocniny je záporné číslo.

Mocnina $(-5)^3$ je záporné číslo.

$(-4)^2$
- → Mocniteľ je párne číslo.
- → Základ mocniny je záporné číslo.

Mocnina $(-4)^2$ je kladné číslo.

Kladné číslo je vždy väčšie ako záporné.
Platí $(-5)^3 < (-4)^2$.

Môžeme počítať aj takto:

Vypočítali sme mocniny pomocou súčinu. Na základe výsledkov sme mocniny porovnali.

$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$

$(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16$

$-125 < 16$

Platí $(-5)^3 < (-4)^2$.

3. Pomocou znakov nerovností a znaku rovnosti porovnaj dva dané číselné výrazy:

a) $7\cdot(-3+1)$ a $7\cdot(-3)+1$
b) $0{,}25 + 0{,}32 : 0{,}8$ a $(0{,}25 + 0{,}32) : 0{,}8$

c) $1\frac{3}{4}$ a $1{,}25$ **d)** $(-11)^2$ a 11^2

e) $2\cdot\frac{3}{4}$ a $2{,}75$ **f)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ a $-\frac{2^3}{3}$

4. Doplň do štvorčekov správne znaky rovnosti alebo nerovnosti:

a) $5\cdot(-2+1) \ \square\ 5\cdot(-2)+1$
b) $2{,}5 : 0{,}5 - 0{,}5 \ \square\ (2{,}5 - 0{,}5) : 0{,}5$
c) $1-(-1)^4 \ \square\ 1+(-1)^3$
d) $-3:\frac{5}{7} \ \square\ -42\cdot\frac{1}{10}$

Riešenie 4.

Úlohu vyriešime tak, že n**ajprv vypočítame hodnotu** výrazu na ľavej strane, potom na pravej strane a **nakoniec porovnáme** výsledky:

a) $5\cdot(-2+1) \ \square\ 5\cdot(-2)+1$

$Ľ = 5\cdot(-2+1) = 5\cdot(-1) = -5$
$P = 5\cdot(-2)+1 = -10+1 = -9$
→ $-5 > -9$

Platí $5\cdot(-2+1) > 5\cdot(-2)+1$.

b) $2{,}5 : 0{,}5 - 0{,}5 \ \square\ (2{,}5 - 0{,}5) : 0{,}5$

$Ľ = 2{,}5 : 0{,}5 - 0{,}5 = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$
$P = (2{,}5 - 0{,}5) : 0{,}5 = 2 : 0{,}5 = 4$
→ $4{,}5 > 4$

Platí $2{,}5 : 0{,}5 - 0{,}5 > (2{,}5 - 0{,}5) : 0{,}5$.

Riešenie 4. *pokračovanie*

c) $1-(-1)^4 \ \square\ 1+(-1)^3$

Ľ $= 1-(-1)^4 = 1-1 = 0$
P $= 1+(-1)^3 = 1-1 = 0$
→ $0 = 0$

Platí $1-(-1)^4 = 1+(-1)^3$.

d) $-3:\frac{5}{7} \ \square\ -42\cdot\frac{1}{10}$

$Ľ = -3:\frac{5}{7} = -\frac{3}{1}\cdot\frac{7}{5} = -\frac{21}{5} = -4{,}2$

$P = -42\cdot\frac{1}{10} = -42\cdot 0{,}1 = -4{,}2$

→ $-4{,}2 = -4{,}2$

Platí $-3:\frac{5}{7} = -42\cdot\frac{1}{10}$.

5. Doplň do štvorčekov správne znaky rovnosti alebo nerovnosti:

a) $-1\cdot(3-5) \ \square\ (-1)\cdot(-5)+3$
b) $0{,}36\cdot 10 - 0{,}25\cdot 10 \ \square\ 10\cdot(0{,}36 - 0{,}25)$

c) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 \square \frac{1}{2}:\frac{3}{4}$ **d)** $5{,}2+\frac{3}{10} \square 0{,}3-(-5{,}2)$

6. Aké **kladné celé čísla** môžeš doplniť do štvorčeka tak, aby platila daná nerovnosť?

$5 \cdot 3 + \square < 30 - 8$

Riešenie 6.

Počítali sme takto:

Vypočítali sme **hodnoty** výrazov

$5 \cdot 3 = 15$ a $30 - 8 = 22$

Dostali sme zápis

$15 + \square < 22$

A potom **sme hľadali číslo,** väčšinou metódou pokus – omyl, ktoré **môžeme dosadiť do štvorčeka** tak, aby **hodnota výrazu** s ním bola menšia ako 22.
Čísla malú byť celé kladné.
Vidíme, že číslo 6 by mohlo vyhovovať.
Platí: $15 + 6 = 21$
$21 < 22$

Do štvorčeka môžeme doplniť **číslo 6.**
Vidíme, že aj **čísla 5, 4, 3, 2, 1** sú správnym riešením.

Počítaním spamäti overíme správnosť riešenia úlohy.

Môžeme počítať aj takto:

Namiesto štvorčeka napíšeme **neznámu *x*.**

$5 \cdot 3 + x < 30 - 8$

Vypočítame si súčin na ľavej strane a rozdiel na pravej strane nerovnice.

$15 + x < 22$

Riešime **nerovnicu** pomocou **opačných operácií**.

$15 + x < 22$
$x < 22 - 15$
$x < 7$

Pýtame sa: **Ktoré celé kladné čísla sú menšie ako 7**?
Celé kladné čísla menšie ako 7 sú čísla: **1, 2, 3, 4, 5, 6**.

Overíme správnosť riešenia pre $x = 1$.
Ľ $= 5 \cdot 3 + 1 = 15 + 1 = 16$
P $= 30 - 8 = 22$ **Ľ < P**

Do štvorčeka môžeme doplniť čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a nerovnosť platí.
Aký je rozdiel medzi týmito riešeniami? ... Porozmýšľajte.

7. Aké kladné celé čísla môžeš doplniť do štvorčekov tak, aby platili nasledujúce nerovnosti?

a) $4 \cdot 3 + \square < 42 - 8$ **b)** $\square - 18 : 3 > -5 + 6$ **c)** $\square + 2 \cdot (-3) < -1 - 3$ **d)** $\square - 12 : 4 > 6 - 1$

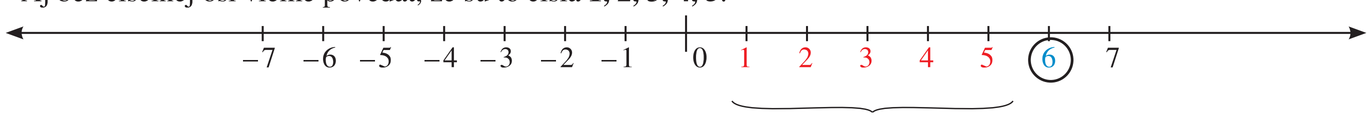
8.

a) Aké celé kladné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej *x* tak, aby platila nerovnosť $x + 4 < 10$?
b) Aké celé záporné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej *x* tak, aby platila nerovnosť $x - 3 > -7$?
c) Aké celé kladné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej *x* tak, aby platila nerovnosť $2 \cdot x < 10$?
d) Aké celé záporné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej *x* tak, aby platila nerovnosť $\frac{x}{6} > -1$?
Na riešenie použi číselnú os.

Riešenie 8.

a) $x + 4 < 10$
$x < 10 - 4$
$x < 6$ Hľadáme **celé kladné** čísla **menšie ako 6**.

Aj bez číselnej osi vieme povedať, že sú to čísla **1, 2, 3, 4, 5.**



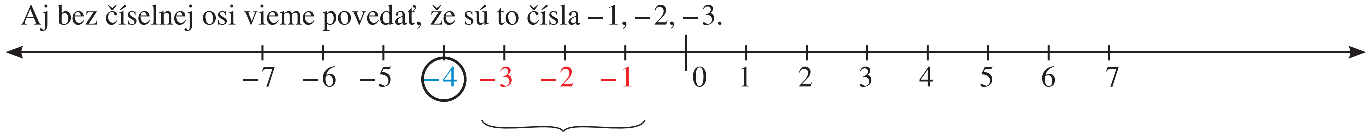
Celé kladné čísla **menšie ako 6**.

b) $x - 3 > -7$

$x > -7 + 3$

$x > -4$ Hľadáme **celé záporné** čísla **väčšie ako –4**.

Aj bez číselnej osi vieme povedať, že sú to čísla –1, –2, –3.



Celé záporné čísla väčšie **ako –4**.

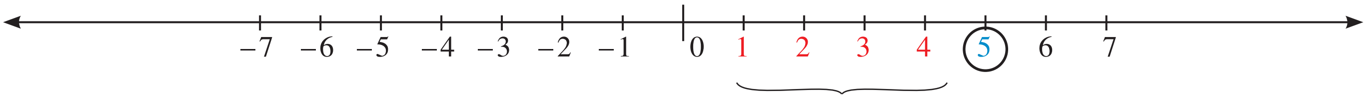
pokračovanie

c) $\quad 2 \cdot x < 10$

$\quad x < 10 : 2$

$\quad x < 5$ $\qquad$ Hľadáme **celé kladné** čísla **menšie ako 5**.

Aj bez číselnej osi vieme povedať, že sú to čísla **1, 2, 3, 4**.



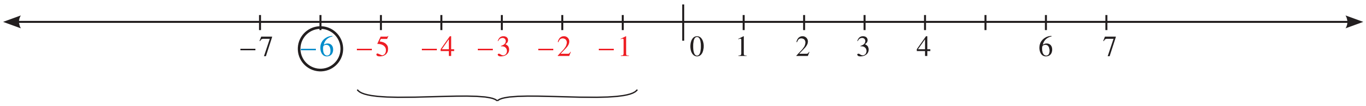
Celé kladné čísla **menšie ako 5**.

d) $\quad \dfrac{x}{6} > -1$

$\quad x > -1 \cdot 6$

$\quad x > -6$ $\qquad$ Hľadáme **celé záporné** čísla **väčšie ako –6**.

Aj bez číselnej osi vieme povedať, že sú to čísla **–5, –4, –3, –2, –1**.



Celé záporné čísla **väčšie ako –6**.

9.

a) Aké celé kladné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej x tak, aby platila nerovnosť $x + 12 < 15$?
b) Aké celé záporné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej x tak, aby platila nerovnosť $x - 8 > -10$?
c) Aké celé kladné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej x tak, aby platila nerovnosť $4 \cdot x < 20$?
d) Aké celé záporné čísla môžeš dosadiť namiesto neznámej x tak, aby platila nerovnosť $\dfrac{x}{5} > -2$?
Na riešenie použi číselnú os.

Nerovnosť dvoch výrazov s neznámou nazývame **nerovnica**.
Nerovnice v tvaroch

$$\boldsymbol{a \cdot x > b}$$
$$\boldsymbol{a \cdot x < b}$$
$$\boldsymbol{a \cdot x \le b}$$
$$\boldsymbol{a \cdot x \ge b}$$

kde a a b sú reálne čísla, nazývame **lineárne nerovnice s neznámou x**.
Riešenia lineárnej nerovnice nazývame **koreňmi nerovnice**.

Lineárne nerovnice riešime **ekvivalentnými úpravami** podobne ako **lineárne rovnice** ale s určitými **výnimkami.**
K obom stranám nerovnice môžeme **pričítať ľubovoľné číslo alebo výraz** a korene nerovnice sa nezmenia.
Od oboch strán nerovnice môžeme **odčítať ľubovoľné číslo alebo výraz** a korene nerovnice sa nezmenia.
Obe strany nerovnice môžeme **vydeliť ľubovoľným kladným číslom** a korene nerovnice sa nezmenia.
Obe strany nerovnice môžeme **vynásobiť ľubovoľným kladným číslom** a korene nerovnice sa nezmenia.
Pripomeňme si.

Písali sme:	Budeme písať:	
$x + 3 < -2$	$x + 3 < -2$	$/ -3$
$x < -2 - 3$	$x < -5$	
$x < -5$		
$x - 8 > -10$	$x - 8 > -10$	$/ + 8$
$x > -10 + 8$	$x > -2$	
$x > -2$		
$4 \cdot x < 20$	$4 \cdot x < 20$	$/ : 4$
$x < 20 : 4$	$x < 5$	
$x < 5$		
$\dfrac{x}{5} > -2$	$\dfrac{x}{5} > -2$	$/ \cdot 5$
$x > -2 \cdot 5$	$x > -10$	
$x > -10$		
dlhší zápis postupu riešenia	kratší zápis postupu riešenia	

Poznámka
Ako je to s **delením** a **násobením** nerovnice **záporným** číslom si ukážeme neskôr.

10. Rieš pomocou ekvivalentných úprav nasledujúce nerovnice s neznámou x.
Riešenie nerovnice vyznač na číselnej osi.

a) $2 \cdot x + 4 < 8$ **b)** $3 \cdot x - 2 > x + 4$ **c)** $\frac{x}{2} + 3 < 1$ **d)** $\frac{x}{5} - 1 > -2$

Riešenie 10.

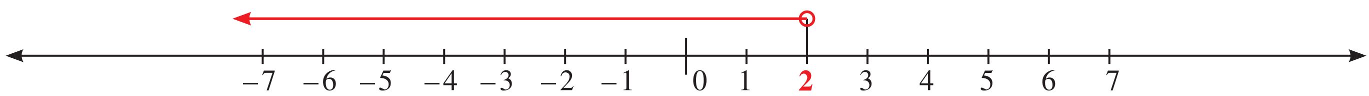
a) $2 \cdot x + 4 < 8 \qquad /-4$

$2 \cdot x < 4 \qquad /:2$

$\boldsymbol{x < 2}$

Ak **nemáme určené**, aké **čísla majú byť riešením** nerovnice (prirodzené, kladné, záporné, celé, racionálne, iracionálne, reálne), tak riešením môžu byť **reálne čísla** vyhovujúce **nerovnici** $x < 2$. Reálnych čísel je nekonečne veľa, takže riešenie vyznačíme na číselnej osi.

Na číselnej osi máme vyznačiť tie čísla, ktoré sú **menšie ako číslo** 2.

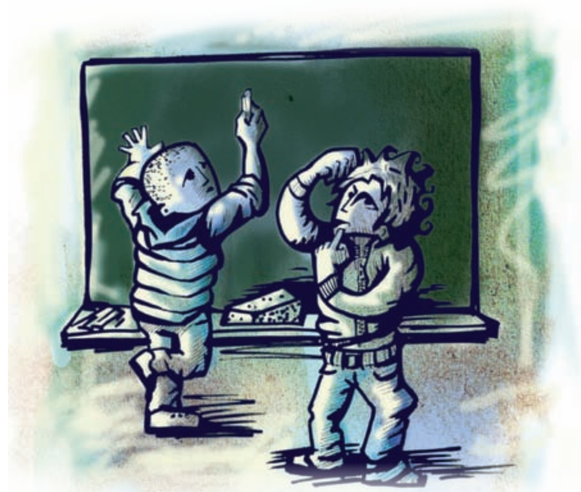


Čísla **menšie ako** 2, vyznačíme na číselnej osi **polpriamkou od čísla** 2 **vľavo**, **teda v smere čísel menších ako je 2**, napríklad $1, \frac{1}{2}, 0, -3\frac{1}{4}, -2, \ldots$

Pri **čísle 2** dáme **prázdny krúžok,** ktorý znamená, že číslo **2 nie je riešením** nerovnice.
Pri úlohách s nerovnicami zvykneme robiť **overenie správnosti riešenia** nerovnice. Prečo overenie?
Lebo riešení nerovnice je zvyčajne **nekonečne veľa** a robiť skúšku pre všetky korene by trvalo **„nekonečne dlho“**.

Overenie robíme tak, že **vyberieme** jeden z koreňov nerovnice, **dosadíme** ho do ľavej a pravej strany nerovnice a zisťujeme, či pre získané hodnoty platí uvedená nerovnosť.
Na overenie vyberieme číslo z riešenia, s ktorým sa nám **počíta jednoducho** a je **blízko k číslu 2.**

Nech je to **číslo 0.**
$Ľ = 2 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$
$P = 8$
Platí: **4 < 8,** Ľ < P.
Riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.



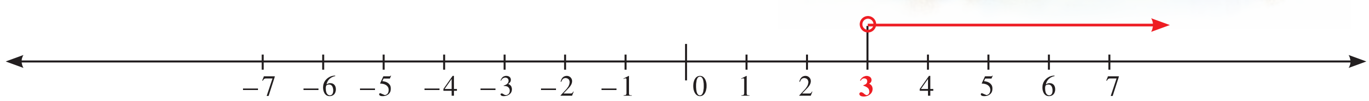
b) $3 \cdot x - 2 > x + 4 \qquad /+2$

$3 \cdot x > x + 6 \qquad /-x$

$2 \cdot x > 6 \qquad /:2$

$\boldsymbol{x > 3}$

Na číselnej osi vyznačíme tie čísla, ktoré sú **väčšie ako číslo** 3.



Čísla **väčšie ako číslo** 3, vyznačíme na číselnej osi **polpriamkou od čísla** 3 **vpravo, teda v smere čísel väčších ako je 3**, napríklad $3{,}5; 5; 6\frac{3}{4}; 7; \ldots$ Pri **čísle 3** dáme **prázdny krúžok,** ktorý znamená, že **číslo 3 nie je riešením** nerovnice.

Na overenie si vyberieme číslo **4, počíta sa s ním jednoducho** a je **blízko k číslu 3**.

$Ľ = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10$
$P = 4 + 4 = 8$

Overte správnosť riešenia pre ďalšie tri čísla, napríklad 3,1; 8; 10,5.

Platí: **10 > 8**, Ľ > P, riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

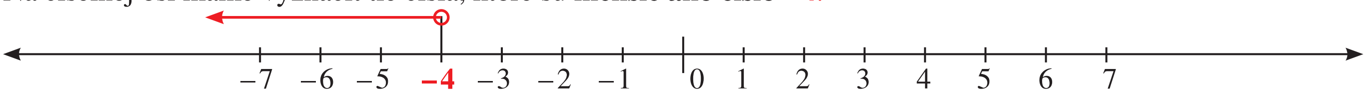
pokračovanie

c) $\frac{x}{2}+3<1 \qquad /-3$

$\frac{x}{2}<-2 \qquad /\cdot 2$

$\boldsymbol{x<-4}$

Na číselnej osi máme vyznačiť tie čísla, ktoré sú **menšie ako číslo** **–4**.



Čísla **menšie ako –4**, vyznačíme na číselnej osi **polpriamkou od čísla –4 vľavo, teda v smere čísel menších ako je –4**, napríklad $-4{,}8; -6; -10\frac{2}{5}$;...

Pri **čísle –4** dáme **prázdny krúžok,** ktorý znamená, že číslo **–4 nie je riešením** nerovnice.

Na overenie vyberieme číslo **–6, počíta sa s ním jednoducho** a je **blízko k číslu –6.**

$Ľ=\frac{-6}{2}+3=-3+3=0$

Overte správnosť riešenia pre ďalšie tri čísla, napríklad –5,9; –8; –27,5.

$P=1$

Platí: **0 < 1,** Ľ < P.

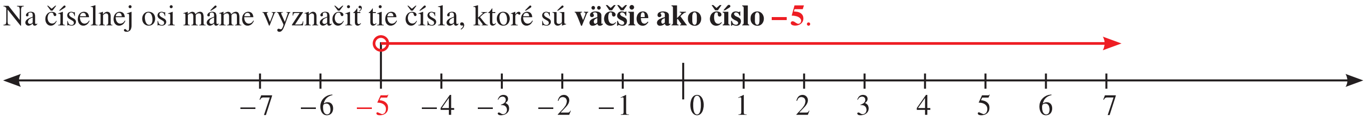
Riešenie úlohy **môžeme považovať za správne.**

d) $\frac{x}{5}-1>-2 \qquad /+1$

$\frac{x}{5}>-1 \qquad /\cdot 5$

$\boldsymbol{x>-5}$

Na číselnej osi máme vyznačiť tie čísla, ktoré sú **väčšie ako číslo** **–5**.



Čísla **väčšie ako číslo –5**, vyznačíme na číselnej osi **polpriamkou od čísla –5 vpravo, teda v smere čísel väčších ako je –5**, napríklad $-4{,}8; -3; -2; 0; \frac{3}{4}$;...

Pri **čísle –5** dáme **prázdny krúžok,** ktorý znamená, že číslo **–5 nie je riešením** nerovnice.

Na overenie by bolo výborné vybrať si číslo **0, počíta sa s ním jednoducho, ale nie je dostatočne blízko k číslu –5**.
Preto na overenie vyberieme **číslo –4.**

$Ľ=\frac{-4}{5}-1=\frac{-4}{5}-\frac{5}{5}=-\frac{9}{5}=-1{,}8$

Overte správnosť riešenia pre ďalšie tri čísla, napríklad –4,8; –1,5; 23,7.

$P=-2$

Platí: **–1,8 > –2**, Ľ > P, riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

11. Rieš pomocou ekvivalentných úprav nasledujúce nerovnice s neznámou *x*.
Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a) $5\cdot x+1<11$ **b)** $7\cdot x-10>3\cdot x+2$ **c)** $\frac{x}{5}+6<1$ **d)** $\frac{x}{3}-4>-2$

Viete, že...?

Znaky **je väčší >**
je menší <
nazývame **ostré znaky nerovností.**
Nerovnice s týmito znakmi nazývame **ostrými nerovnicami**.

Projektová úloha

Znaky nerovnosti niekedy používame na vyjadrenie „smeru trasy“. Vyhľadajte na internete možné interpretácie ostrých znakov nerovností.

12. Rieš nasledujúce nerovnice s neznámou x pomocou ekvivalentných úprav. Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a) $2x - 3 \leq x + 1$ **b)** $\frac{2x}{5} - 0{,}2 \geq -0{,}6$

Pomôcka
Aj pri zápise lineárnych nerovníc budeme využívať skrátené tvary:
$2 \cdot x = 2x$
$\frac{2}{5} \cdot x = \frac{2x}{5}$

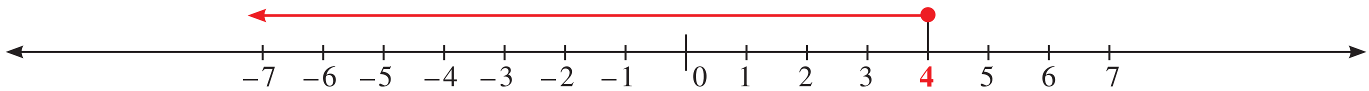
Riešenie 12.

a) $2x - 3 \leq x + 1 \qquad /+3$

$2x \leq x + 4 \qquad /-x$

$\boldsymbol{x \leq 4}$

Na číselnej osi máme vyznačiť tie čísla, ktoré sú **menšie ako číslo 4**, alebo **sa rovnajú číslu 4**.



Čísla **menšie ako 4,** vyznačíme na číselnej osi **polpriamkou od čísla 4 vľavo**, **teda v smere čísel menších ako je 4**, napríklad $3{,}5;\ 1;\ 0;\ -2\frac{4}{5}; \ldots$

Riešením je aj číslo 4, **preto pri čísle 4** dáme **plný krúžok**.

Na **overenie** vyberieme **dve čísla,** pretože riešime **nerovnicu aj rovnicu (je väčšie, rovná sa)**:
číslo **4** **je prvé číslo z riešení nerovnice**
číslo **3** **je jedno z celých čísel „blízko" čísla 4**

Ľ (**4**) = 2 · 4 – 3 = 8 – 3 = 5 P (**4**) = 4 + 1 = 5

Platí: 5 = 5, Ľ(4) = P(4), čo vyhovuje nerovnosti Ľ ≤ P a riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

Ľ (**3**) = 2 · 3 – 3 = 6 – 3 = 3 P (**3**) = 3 + 1 = 4

Platí: 3 < 4, Ľ(**3**) < P(**3**), čo vyhovuje nerovnosti Ľ ≤ P a riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

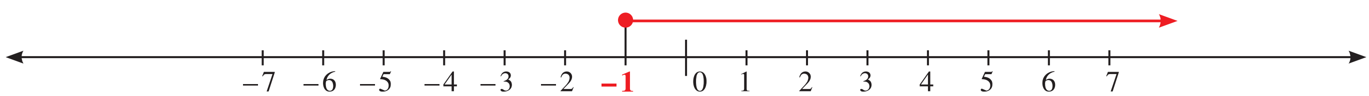
b) $\frac{2x}{5} - 0{,}2 \geq -0{,}6 \qquad /+0{,}2$

$\frac{2x}{5} \geq -0{,}4 \qquad /\cdot 5$

$2x \geq -2 \qquad /:2$

$\boldsymbol{x \geq -1}$

Na číselnej osi máme vyznačiť tie čísla, ktoré sú **väčšie ako číslo –1**, alebo **sa rovnajú číslu –1**.



Čísla väčšie ako **číslo –1**, vyznačíme na číselnej osi **polpriamkou od čísla –1 vpravo, teda v smere čísel väčších ako je –1**, napríklad čísla $-0{,}9;\ 0;\ \frac{3}{4};\ 1;\ 30;\ldots$

Keďže **riešením je aj číslo –1**, **pri čísle –1** dáme **plný krúžok**.

Na **overenie** vyberieme **dve čísla**:
číslo **–1** **je prvé číslo z riešení nerovnice**
číslo **0** **je najjednoduchšie číslo z riešení nerovnice blízko čísla –1**

Ľ (**–1**) $= \frac{2\cdot(-1)}{5} - 0{,}2 = \frac{-2}{5} - 0{,}2 = -0{,}4 - 0{,}2 = -0{,}6$ P (**–1**) $= -0{,}6$

Platí: **–0,6 = –0,6**, Ľ (–1) = P (–1), čo vyhovuje nerovnosti Ľ ≥ P a riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

Ľ (**0**) $= \frac{2\cdot 0}{5} - 0{,}2 = \frac{0}{5} - 0{,}2 = 0 - 0{,}2 = -0{,}2$ P (**0**) $= -0{,}6$

Platí: **–0,2 > –0,6**, Ľ (**0**) > P (**0**), čo vyhovuje nerovnosti Ľ ≥ P, a riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

13. Rieš nasledujúce nerovnice s neznámou x pomocou ekvivalentných úprav.
Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a) $4x - 2 \leq 3x - 5$ **b)** $9x + 0{,}3 \geq 2x + 7{,}3$ **c)** $\frac{3x}{4} - 0{,}3 \geq -3{,}3$ **d)** $\frac{4x}{9} + 0{,}6 \leq 4{,}6$

14. Rieš nasledujúce nerovnice s neznámou x pomocou ekvivalentných úprav.
Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a) $2 \cdot (1 - x) \leq 7 - x$ **b)** $-3 \cdot (2x + 4) > -8 - (x - 1)$

Riešenie 14.

Najprv **roznásobíme** zátvorky. Potom podľa potreby **upravíme** ľavú a pravú stranu nerovnice.
Na záver **použijeme** ekvivalentné úpravy a **vyznačíme** riešenie na číselnej osi.

Pomôcka
Pripomeňme si:
$-2x + x = -2x + 1x = -1x = -x$
$\underbrace{-2x + 1x}_{-2 + 1 = -1}$

a) $2 \cdot (1 - x) \leq 7 - x$

$2 - 2x \leq 7 - x \quad / -2$

$-2x \leq 5 - x \quad / + x$

$-x \leq 5 \quad / : (-1)$

$x \geq -5$

Pri delení nerovnice **záporným číslom** sme **zmenili znak** nerovnosti na **opačný**.
Prečo? Ukážeme si iné riešenie tejto nerovnice.

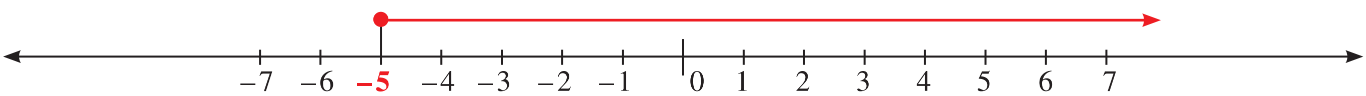
$2 \cdot (1 - x) \leq 7 - x$

$2 - 2x \leq 7 - x \quad / +2x$ **Najprv** použijeme úpravu pre **výraz s premennou** a to tak,

$2 \leq 7 + x \quad / -7$ aby **premenná** v nerovnici mala **kladný** násobok.

$-5 \leq x$

Čo bude riešením nerovnice $x \geq -5$ a čo bude riešením nerovnice $-5 \leq x$? Pri oboch odpovedáme na otázku: **Ktoré čísla sú väčšie ako číslo -5, alebo sa rovnajú číslu -5**? Takže **riešenie týchto nerovníc** bude **rovnaké**.
Na číselnej osi vyznačíme čísla, ktoré sú **väčšie ako číslo -5, alebo sa rovnajú číslu -5**.



Na **overenie** vyberieme **dve čísla**:
číslo **-5 je prvé číslo z riešení nerovnice**
číslo **-4 je jednoduché a najbližšie číslo k číslu -5 z riešení nerovnice**

$Ľ\,(-5) = 2 \cdot [1 - (-5)] = 2 \cdot [1 + 5] = 2 \cdot [6] = 12$ $\qquad P\,(-5) = 7 - (-5) = 7 + 5 = 12$

Platí: **12 = 12**, Ľ (-5) = P (-5), čo vyhovuje nerovnosti Ľ $\leq$ P a riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

$Ľ\,(-4) = 2 \cdot [1 - (-4)] = 2 \cdot [1 + 4] = 2 \cdot [5] = 10$ $\qquad P\,(-4) = 7 - (-4) = 7 + 4 = 11$

Platí: **10 < 11**, Ľ(-4) < P(-4), čo vyhovuje nerovnosti Ľ $\leq$ P a riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

b) $-3 \cdot (2x + 4) > -8 - (x - 1)$

$-6x - 12 > -8 - x + 1$

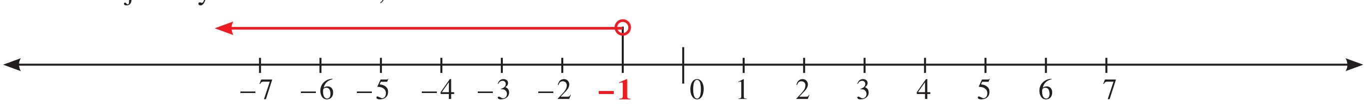
$-6x - 12 > -x - 7 \quad /+ 12$

$-6x > -x + 5 \quad /+ x$

$-5x > +5 \quad / : (-5)$

$x < -1$

Pri delení nerovnice **záporným číslom** sme **zmenili znak** nerovnosti **na opačný**.
Na číselnej osi vyznačíme čísla, ktoré sú **menšie ako číslo -1**.



Na **overenie** správnosti riešenia vyberieme číslo -2, je najbližšie k číslu -1.

$Ľ = -3 \cdot [2 \cdot (-2) + 4] = -3 \cdot (-4 + 4) = -3 \cdot (0) = 0$

$P = -8 - (-2 - 1) = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5$

Platí: **0 > –5**, Ľ > P, riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

15. Rieš nasledujúce nerovnice s neznámou x pomocou ekvivalentných úprav. Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a) $5\cdot(x-2)\leq -4+6x$

b) $6x-10\geq 2\cdot(x-1)$

c) $-2\cdot(3x+1)<19-(x+6)$

d) $5\cdot(3-x)-2\cdot(x-5)>4$

16. Rieš nasledujúce nerovnice s neznámou x pomocou ekvivalentných úprav. Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\geq\frac{1}{8}$

b) $\frac{x+1}{5}-\frac{x-2}{2}<\frac{3}{10}$

Riešenie 16.

Najprv **upravíme zlomky na spoločného menovateľa**. Potom podľa potreby **upravíme ľavú a pravú stranu nerovnice**. Na záver **použijeme ekvivalentné úpravy** a vyznačíme riešenie **na číselnej osi**.

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\geq\frac{1}{8}$ Spoločný menovateľ je číslo **8**.

$$\frac{x\cdot 4}{2\cdot 4}+\frac{x\cdot 2}{4\cdot 2}\geq\frac{1}{8}$$

$$\frac{4x}{8}+\frac{2x}{8}\geq\frac{1}{8} \qquad /\cdot 8$$

$$4x+2x\geq 1$$

$$6x\geq 1 \qquad /:6$$

$$x\geq\frac{1}{6}$$

Poznámka

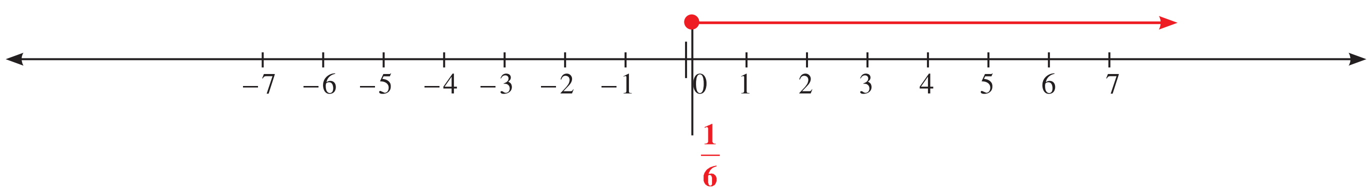
Úlohy so zlomkami riešime rôznymi spôsobmi. Pri riešení tejto nerovnice môžeme použiť aj takýto zápis riešenia:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\geq\frac{1}{8} \qquad /\cdot 8 \text{ spoločný menovateľ}$$

$$4x+2x\geq 1$$

Od tohto kroku sú riešenia rovnaké.

Na číselnej osi vyznačíme čísla, ktoré sú **väčšie ako číslo** $\frac{1}{6}$, alebo **sa rovnajú číslu** $\frac{1}{6}$.



Na **overenie** vyberieme **dve čísla**:

číslo $\frac{1}{6}$ **je prvé číslo z riešení nerovnice**

číslo **1** **je prvé celé číslo z riešení nerovnice blízko čísla** $\frac{1}{6}$

$$Ľ\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\frac{1}{6}}{2}+\frac{\frac{1}{6}}{4}=\frac{1}{6}:2+\frac{1}{6}:4=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1\cdot 2}{12\cdot 2}+\frac{1}{24}=\frac{2}{24}+\frac{1}{24}=\frac{3}{24}=\frac{3:3}{24:3}=\frac{1}{8}$$

$$P\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{8}$$

Platí: $\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$, $Ľ\left(\frac{1}{6}\right)=P\left(\frac{1}{6}\right)$, čo vyhovuje nerovnosti Ľ ≥ P. Riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

$$Ľ(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(1)=\frac{1}{8}$$

Platí: $\frac{3}{4}<\frac{1}{8}$, Ľ (1) < P (1), čo vyhovuje nerovnosti Ľ ≤ P, riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

pokračovanie ▶▶

b) $\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{x-2}{2}<\dfrac{3}{10}$ Spoločný menovateľ je číslo **10**.

$\dfrac{(x+1)\cdot 2}{5\cdot 2}-\dfrac{(x-2)\cdot 5}{2\cdot 5}<\dfrac{3}{10}$ $/\cdot 10$

$\dfrac{2x+2}{10}-\dfrac{5x-10}{10}<\dfrac{3}{10}$

$2x+2-5x+10<3$

> Ak je **pred zlomkom** znamienko **mínus**, **meníme** znamienka každého člena v čitateľovi **na opačné** (súvisí to s učivom o **výrazoch**).

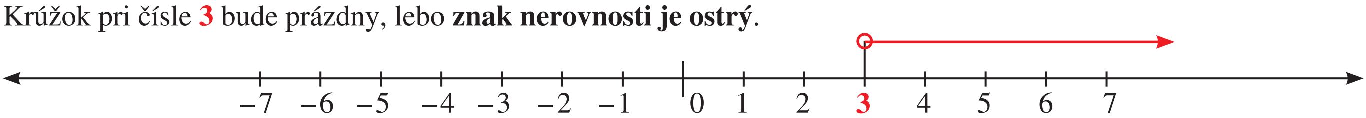
$-3x+12<3$ $/-12$

$-3x<-9$ $/:(-3)$

> Delili sme **záporným číslom**, meníme **znak** nerovnosti na **opačný**.

$\boldsymbol{x>3}$

Na číselnej osi vyznačíme čísla, ktoré sú **väčšie ako číslo 3**.
Krúžok pri čísle **3** bude prázdny, lebo **znak nerovnosti je ostrý**.



Na **overenie** vyberieme číslo **4**, je to **prvé kladné číslo** z riešenia, s ktorým sa **jednoducho** počíta.

$Ľ=\dfrac{4+1}{5}-\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{5}{5}-\dfrac{2}{2}=1-1=0$

$P=\dfrac{3}{10}$

Platí: $\boldsymbol{0<\dfrac{3}{10}}$, **Ľ < P**, riešenie úlohy **môžeme považovať za správne**.

17. Rieš nasledujúce nerovnice s neznámou x pomocou ekvivalentných úprav.
Riešenie nerovníc vyznač na číselnej osi.

a)* $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}\le 1\dfrac{4}{6}$ **b)*** $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{6}\ge\dfrac{1}{12}$ **c)**** $\dfrac{x}{9}+\dfrac{x+2}{3}<\dfrac{5}{18}$ **d)**** $\dfrac{x+1}{14}-\dfrac{x+4}{7}>2\dfrac{1}{2}$

18.*

a) Pre aké záporné celé čísla a má výraz $4\cdot(a+5)-3a$ hodnotu väčšiu ako 7?

b) Pre aké kladné celé čísla b má výraz $\dfrac{5b+4}{3}$ hodnotu menšiu ako 7?

Riešenie 18.

a) Ak má mať **výraz hodnotu väčšiu ako 7**, riešime **nerovnicu** $4\cdot(a+5)-3a>7$.
Výraz na ľavej strane roznásobíme.

$4\cdot(a+5)-3a>7$

$4a+20-3a>7$

$a+20>7$ $/-20$

$a>-13$

> **Pomôcka**
> Zmiešané číslo môžeme zmeniť na nepravý zlomok takto:
> $2\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\cdot 2+1}{3}=\dfrac{7}{3}$

a má byť **celé záporné číslo väčšie ako −13**, takže riešením nerovnice sú čísla:
−12, −11, −10, −9, −8, −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1.

Potom výraz $4\cdot(a+5)-3a$ má hodnotu **väčšiu ako 7** pre celé záporné čísla **−12, −11, −10, −9, −8, −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1**.
Každé riešenie nerovnice by sa malo overiť.
Overenie riešení tejto nerovnice urobte samostatne.

pokračovanie ▶▶

Riešenie 18. pokračovanie

b) Ak má mať výraz hodnotu **menšiu ako 7**, riešime **nerovnicu** $\frac{5b+4}{3} < 7$.

$$\frac{5b+4}{3} < 7 \qquad / \cdot 3$$

$$5b + 4 < 21 \qquad / - 4$$

$$5b < 17 \qquad / : 5$$

$$b < 3{,}4$$

Pretože b má byť kladné **celé číslo menšie ako 3,4**, riešením sú **čísla 1**, **2**, **3**.

Potom výraz $\frac{5b+4}{3}$ má hodnotu **menšiu ako 7** pre b, ktoré sa môže rovnať **1**, **2**, **3**.

Riešenie každej nerovnice by sa malo overiť. Overenie riešení tejto nerovnice urobte samostatne.

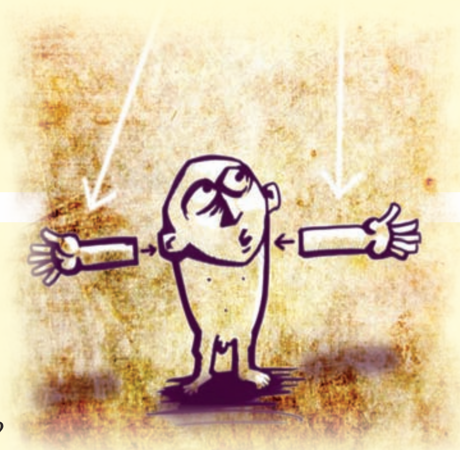
19.

a) Pre aké celé kladné čísla b má výraz $5b + 8$ hodnotu väčšiu ako 6?

b) Pre aké celé kladné čísla b má výraz $6 \cdot (2b - 3)$ hodnotu menšiu ako 1?

c) Pre aké celé záporné čísla c má výraz $\frac{c+20}{3}$ hodnotu väčšiu ako 6?

d) Pre aké celé záporné čísla c má výraz $\frac{1-2c}{6}$ hodnotu menšiu ako 1?



20.

a) Pre akú neznámu y má výraz $3{,}5 \cdot (2y + 4)$ hodnotu menšiu ako 0?

b) Pre akú neznámu z má výraz $\frac{(2{,}8 + z) \cdot 5}{2}$ hodnotu menšiu ako 0?

c) Pre akú neznámu m má výraz $2{,}4 + 2 \cdot (m + 0{,}5)$ hodnotu menšiu ako 0?

d) Pre akú neznámu n má výraz $4 \cdot \frac{n+1{,}5}{2}$ hodnotu menšiu ako 0?

21.

V ktorej z možností **A** až **D** sú všetky uvedené čísla riešením nerovnice $2 \cdot (x + 5) \leq x - 4$?

A –14, –15, –16 **B** –3, –4, –14 **C** –9, –11, –14 **D** –9, –8, –7

Riešenie 21.

Pri riešení týchto úloh často používame **odhad**, alebo **metódu pokus – omyl**, alebo môžeme danú **nerovnicu vyriešiť**.
Ukážeme si riešenie metódou **odhadu**.
V troch možnostiach sa opakuje číslo –14, tak si vyberieme jednu z nich. Ak –14 nebude riešením nerovnice, tak ani možnosť **A**, ani **B**, ani **C** nebude obsahovať riešenia nerovnice. Správna by mala byť možnosť **D**.
Nech sú riešením nerovnice čísla –14, –15, –16, možnosť **A**.
Ďalej môžeme čísla dosadzovať do nerovnice a zisťovať, či získaná nerovnosť platí:

$-14 \qquad 2 \cdot (-14 + 5) \leq -14 - 4$

$2 \cdot (-9) \leq -18$

$-18 \leq -18$ Platí: –18 = –18, **–14 je riešením nerovnice**.

$-15 \qquad 2 \cdot (-15 + 5) \leq -15 - 4$

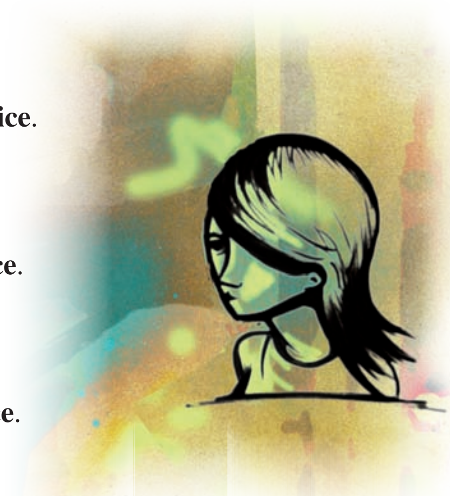
$2 \cdot (-10) \leq -19$

$-20 \leq -19$ Nerovnosť platí, **–15 je riešením nerovnice**.

$-16 \qquad 2 \cdot (-16 + 5) \leq -16 - 4$

$2 \cdot (-11) \leq -20$

$-22 \leq -20$ Nerovnosť platí, **–16 je riešením nerovnice**.



Možnosť **A** obsahuje čísla, z ktorých **všetky** sú riešením nerovnice.

22. Ktorá z možností **A** až **D** obsahuje čísla, z ktorých **všetky** sú riešením nerovnice $3+4\cdot(x-1)>2x+5$?

A 2, 3, 4 **B** 0, 1, 2 **C** –1, 0, 1 **D** 4, 5, 6

23.* Rieš lineárne nerovnice a riešenie vyznač na číselnej osi.

a) $2\cdot(4x-5)<3+8\cdot(2+x)$ **b)** $\dfrac{x+2}{3}\le\dfrac{x}{3}-1$

Riešenie 23.

Najprv **roznásobíme** zátvorky. Potom podľa potreby **upravíme** ľavú a pravú stranu nerovnice.
Na záver **použijeme** ekvivalentné úpravy a **vyznačíme** riešenie na číselnej osi.

a) $2\cdot(4x-5)<3+8\cdot(2+x)$

$8x-10<3+16+8x$

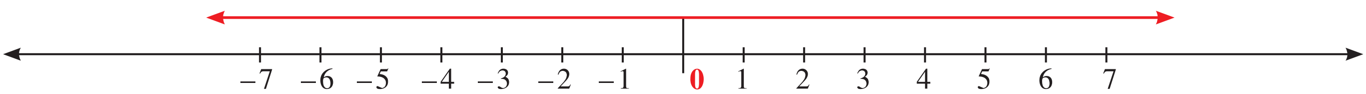
$8x-10<19+8x \qquad /+10-8x$

Pričítame výraz k obom stranám nerovnice.

$\mathbf{0<29}$

Ekvivalentnými úpravami nerovnice $2\cdot(4x-5)>3+8\cdot(2+x)$ sme získali **pravdivú nerovnosť 0 < 29**.
Preto môžeme povedať, že **riešením nerovnice je ľubovoľné reálne číslo**.

Riešenie na číselnej osi



Overenie správnosti riešenia nerovnice je tvoja ďalšia úloha.

b) $\dfrac{x+2}{3}\le\dfrac{x}{3}-1$

Spoločný menovateľ je číslo 3.

$x+2\le x-3 \qquad /-2$

$x\le x-5 \qquad /-x$

$\mathbf{0\le -5}$

Pri úpravách nerovnice $\dfrac{x+2}{3}\le\dfrac{x}{3}-1$ sme získali **nepravdivú nerovnosť 0 ≤ –5**.
Preto môžeme povedať, že **nerovnica nemá riešenie**.

24.* Rieš lineárne nerovnice a riešenie vyznač na číselnej osi.

a) $-3\cdot(2x-1)\ge 4-6\cdot(1+x)$ **b)** $\dfrac{x}{4}-3\le\dfrac{2x}{8}-1{,}5\cdot 2$

25.* Ktoré **celé kladné čísla** sú riešením nerovnice $\dfrac{1}{3}-(x+2)<\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{6}$?

Riešenie 25.

Najprv **roznásobíme** zátvorky. Potom **upravíme** ľavú a pravú stranu nerovnice.
Na záver **použijeme** ekvivalentné úpravy.

$\dfrac{1}{3}-(x+2)<\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{3}-x-2<\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{6} \qquad /+2-\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{3}$

Pričítame výraz k obom stranám nerovnice.

$-x-\dfrac{x}{3}<-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+2$

$-\dfrac{x}{1}-\dfrac{x}{3}<-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{1}$

pokračovanie ▶▶

$$-\frac{6x}{6}-\frac{2x}{6}<-\frac{1}{6}-\frac{2}{6}+\frac{12}{6} \qquad / \cdot 6$$

Spoločný menovateľ je číslo 6.

$$-6x-2x<-1-2+12$$

$$-8x<9 \qquad / : (-8)$$

$$x>-\frac{9}{8}$$

Riešením nerovnice $\frac{1}{3}-(x+2)<\frac{x}{3}-\frac{1}{6}$ majú byť celé kladné čísla, ktoré vyhovujú nerovnici $x>-\frac{9}{8}$.

Pretože nerovnici $x>-\frac{9}{8}$ vyhovujú čísla **väčšie ako je** $\mathbf{-\frac{9}{8}}$, tak riešením nerovnice budú **všetky kladné celé čísla, to znamená čísla 1, 2, 3, 4, 5**, ….
Je ich **nekonečne veľa,** preto vypisujeme **len niekoľko prvých čísel** a potom píšeme **bodky**.

26.* Ktoré **celé záporné čísla** sú riešením nerovnice $0{,}5\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)<\frac{x-1}{4}$?

Problémová úloha

Napíšte, ako závisí riešenie lineárnych nerovníc s neznámou x:

$$a\cdot x>b$$
$$a\cdot x<b$$
$$a\cdot x\le b$$
$$a\cdot x\ge b$$

od a a b.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Jedno z čísel je riešením nerovnice $5x-12<3$.

A 3 B 3,2 C $2\frac{2}{5}$ D $3\frac{1}{2}$

2. Jedno z čísel je riešením nerovnice $2x+3>-5$.

A $1\frac{1}{3}$ B $-5{,}2$ C -4 D $-4{,}3$

3. Jedno z čísel je riešením nerovnice $5x+2\le 3+4x$.

A 1,5 B 1 C $3\frac{4}{9}$ D 2

4. Medzi riešenia nerovnice $2\cdot(x-3)\le 0$ patrí číslo:

A 3,1 B 5,8 C $2\frac{3}{5}$ D $3\frac{3}{5}$

5. Medzi riešenia nerovnice $-4\cdot(x+1)\ge 1-6x$ patrí číslo:

A 2 B $\frac{13}{2}$ C 0,3 D $\frac{11}{5}$

6. Ak je x celé kladné číslo, potom riešením nerovnice $\frac{x}{2}<\frac{4}{5}$ je:

A 5 B 1,6 C 1 D 2

7. Ak je x záporné celé číslo, potom riešením nerovnice $\frac{x}{5} > -1$ je:

A 5 B -4 C -6 D -5

8. V ktorej z možností A až D sú všetky čísla riešením nerovnice $\frac{x-1}{3} \leq 5$?

A 6, 7, 8 B 18, 19, 20 C 15, 16, 17 D 11, 16, 21

9. V ktorej z možností A až D sú všetky čísla riešením nerovnice $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{x}{2}$?

A 2, 1, 0 B 3, 4, 5 C 1, 2, 3 D 2, 3, 4

10. Výraz $0{,}3 \cdot (b - 2{,}5) + 0{,}6$ je väčší ako 0 pre b:

A 0,5 B 0,4 C 0,3 D 0,6

11. Výraz $4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$ je väčší ako výraz $\frac{1}{4} \cdot (x - 2)$ pre x, ktoré spĺňa nerovnosť:

A $x < 0$ B $x > 0{,}4$ C $x > 2$ D $x > -4$

12. Nerovnica $\frac{x-1}{3} - \frac{3+x}{6} \leq 0$ má také isté riešenie ako nerovnica:

A $\frac{x-3}{6} - \frac{1+x}{3} \leq 0$ B $2 \cdot x - 1 - (3 - x) \leq 6$ C $2x - \frac{5}{3} \leq x + 1$ D $4 \cdot (x - 3) - 1 \leq 7$

13. Ktoré x je súčasne riešením nerovnice $x + 3 < 0$ a nerovnice $x + 6 \geq 0$?

A -3 B -5 C 0 D 4

14. Ktoré x je súčasne riešením nerovnice $\frac{x}{2} \geq 1$ a nerovnice $\frac{x}{2} < 2{,}5$?

A 0 B 1 C 2 D 5

Zapamätajte si

Lineárnou nerovnicou s neznámou *x* nazývame nerovnosť dvoch výrazov s neznámou *x*,
ktorú vieme upraviť na tvary:

$$a \cdot x > b$$
$$a \cdot x < b$$
$$a \cdot x \leq b$$
$$a \cdot x \geq b$$

kde a a b sú reálne čísla.

Riešenia lineárnej nerovnice nazývame **koreňmi nerovnice**. Znázorňujeme ich na **číselnej osi**.

Lineárne nerovnice riešime **ekvivalentnými úpravami**:

K obom stranám nerovnice môžeme **pričítať ľubovoľné číslo alebo výraz** – korene nerovnice sa nezmenia.

Od oboch strán nerovnice môžeme **odčítať ľubovoľné číslo alebo výraz** – korene nerovnice sa nezmenia.

Obe strany nerovnice môžeme **vydeliť ľubovoľným kladným číslom** – korene nerovnice sa nezmenia.

Obe strany nerovnice môžeme **vynásobiť ľubovoľným kladným číslom** – korene nerovnice sa nezmenia.

Pri delení alebo násobení nerovnice **záporným číslom zmeníme znak nerovnosti na opačný**.

3.3 Jednoduché lineárne rovnice s neznámou v menovateli

čísla	1 0,5 $\frac{1}{3}$ ...
neznáma	... x, y, z ...
výraz s neznámou	$x-2$ ...

zlomok	$\frac{3}{4}$
výraz s neznámou	$\frac{x-1}{2}$
rovnica	$\frac{x}{5}=2$

Čo sme sa už učili

Učili sme sa o **lineárnych rovniciach**.
Učili sme sa o **menovateli** – spolu **s čitateľom a zlomkovou čiarou** tvoria **zlomok**.

$$\frac{100}{100}=\frac{50}{100}+\frac{20}{100}+\frac{20}{100}+\frac{10}{100}$$

Čo je **rovnica s neznámou v menovateli**?
V nasledujúcej kapitole predstavíme možnosti riešenia takýchto rovníc.
Prvú úlohu pravdepodobne vyriešite.
Ak nie pomocou vzorca, určite pomocou *zdravého rozumu.*

1. Juraj si kúpil nový bicykel aj s príslušenstvom. V záručnej dobe ho potreboval dobre vyskúšať. Vybral si trasu 120 km dlhú a prešiel ju za 4,8 hodiny. Pre plánovanie ďalších ciest by chcel vedieť, akou išiel priemernou rýchlosťou. Vypočítaj ju.

Riešenie 1.

Ukážeme si riešenie pomocou vzorca z fyziky. Trochu zjednodušene.
Rýchlosť sa počíta podľa **vzorca** $v=\frac{s}{t}$, kde s je **dráha** v kilometroch (km), t je **čas** v hodinách (h).
Potom:
$s = 120$ km, $t = 4{,}8$ h, $v =$ **? km/h**

$$v=\frac{s}{t}=\frac{120}{4{,}8}=25$$

$v = 25$ km/h

Jurajova priemerná rýchlosť bola **25 km/h**.

Projektová úloha
Medzi ktorými mestami na Slovensku je približná vzdialenosť 120 km?
Nájdite aspoň 5 dvojíc a porovnajte veľkosti miest podľa ich počtu obyvateľov.

2. Juraj išiel na novom bicykli za kamarátom do obce vzdialenej 31,5 km.
Ako dlho Jurajovi trvala cesta ku kamarátovi, ak išiel priemernou rýchlosťou 21 km/h?

Riešenie 2.

Použijeme znovu vzorec na výpočet rýchlosti: $v=\frac{s}{t}$, kde $v = 21$ km/h, $s = 31{,}5$ km, $t = x$ h (čas je neznáma x)
Dosadíme známe údaje do vzorca:

$$v=\frac{s}{t}$$
$$21=\frac{31{,}5}{x} \qquad /\cdot x$$
$$21\cdot x=31{,}5 \qquad /:21$$
$$x=1{,}5$$

Vznikla rovnica so zlomkom, ktorý má v **menovateli neznámu** x. Jej hodnotu máme vypočítať.
Pretože **zlomok** je vlastne iný **zápis delenia, neznámou** x delíme – tak teraz ňou obe strany rovnice **vynásobíme**.

Keďže $t = x$, Juraj došiel ku kamarátovi za **1,5 hodiny**.

V úlohe sme riešili **lineárnu rovnicu** $21=\frac{31{,}5}{x}$.

Mali by sme vykonať skúšku správnosti riešenia rovnice.

Ľ = 21, P = $\frac{31{,}5}{1{,}5}$ = 21 Platí: **21 = 21**, Ľ = P, **číslo 1,5 je riešením rovnice**.

Viete, že...?

Cyklistické preteky Košice-Tatry-Košice (K – T – K)

V roku 1924, keď sa v spolupráci Východoslovenského atletického zväzu a KAC (Kassai Athletic Club) zrodil dnes už svetoznámy **Košický maratón.** Ani cyklistický oddiel, ktorý v tom čase viedol Jozef Fekete, nechcel zostať bokom. Vtedy sa v hlave tohto milovníka Vysokých Tatier zrodila myšlienka zorganizovať **cyklistické preteky**, ktoré by viedli z Košíc do Tatier a späť. Žiaľ, prvým organizátorom K-T-K pretekov sa nepodarilo zabezpečiť ich oficiálny rámec. Myšlienka a nádej však žili ďalej a vďaka početným zanietencom cyklistiky sa v jednu sychravú októbrovú sobotu roku 1928 postavilo pred košickou kaviarňou Andrássy na štart úvodného ročníka 14 na všetko odhodlaných cyklistov. V cieli prvej etapy na Štrbskom Plese ich čakalo –6 stupňov Celzia. Víťazom premiérového ročníka sa stal Vlasto Ružička z KAC Košice.

Zdroj: http://www.k-t-k.sk/sk/history.php

Pri **skúške správnosti** sme uviedli ako **lineárnu rovnicu** rovnicu $21 = \frac{31,5}{x}$ a **nie rovnicu** $21 \cdot x = 31,5$.
Určite vieš **prečo**...

... **preto, lebo**: Lineárna rovnica s neznámou x je rovnica, ktorá sa dá upraviť na tvar $a \cdot x = b$, kde a a b sú reálne čísla.

Lineárna rovnica s neznámou x v menovateli je **rovnica**,
ktorá obsahuje **zlomok** a dá sa upraviť na tvar
$a \cdot x = b$, kde a a b sú reálne čísla.
Pretože **neznáma v menovateli zlomku** je vlastne **deliteľom**,
uvádzame **podmienku pre delenie**:
Deliteľ sa nesmie rovnať nule = menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule.

§

Vyriešme teraz niekoľko rovníc.
Pri ich riešení môžeme použiť metódy,
ktoré sme sa učili v predchádzajúcich kapitolách.

Zopakujme si **ekvivalentné úpravy rovníc**.

Dokonči vety:

K obidvom stranám rovnice môžeme **pričítať** ...

Od obidvoch strán rovnice môžeme **odčítať** ...

Obidve strany rovnice môžeme **vynásobiť** ...

Obidve strany rovnice môžeme **vydeliť** ...

Projektová úloha

Z úloh, ktoré počítate na fyzike, chémii, biológii vyhľadajte tie, pri riešení ktorých riešite rovnicu s neznámou v menovateli. Dohodnite sa so spolužiakmi a porovnajte si výsledky svojho hľadania. Zdrojom informácií môže byť aj internet.

3. Rieš rovnice a urob skúšky správnosti riešení rovníc.

a) $7 = \frac{28}{x}$ **b)** $-3 = \frac{18}{2x}$ **c)** $\frac{5}{x} = 1$ **d)** $-\frac{4}{x} = 7$

Riešenie 3.

a)
$$7 = \frac{28}{x} \qquad / \cdot x$$
$$7 \cdot x = 28 \qquad / : 7$$
$$x = 4$$

Podmienka pre zlomok $\frac{28}{x}$ je $x \neq 0$.

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia:

Ľ = 7

P = $\frac{28}{4} = 7$

Ľ = P

Koreň rovnice spĺňa podmienku pre neznámu x, $4 \neq 0$, **riešením rovnice je číslo 4**.

pokračovanie ▶▶

b) $-3 = \dfrac{18}{2x} \quad / \cdot 2x$

$-6 \cdot x = 18 \quad / : (-6)$

$x = -3$

Podmienka pre zlomok $\dfrac{18}{2x}$:
menovateľ sa nesmie rovnať nule, teda
$2x \neq 0 \quad / : 2$
$\boldsymbol{x \neq 0}$

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia:

$Ľ = -3$

$P = \dfrac{18}{2 \cdot (-3)} = \dfrac{18}{-6} = -3$

$Ľ = P$

Koreň rovnice spĺňa podmienku pre neznámu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{-3 \neq 0}$, **riešením rovnice je číslo** $\boldsymbol{-3}$.

c) $\dfrac{5}{x} = 1 \quad / \cdot x$

$5 = x$

$x = 5$

Podmienka pre zlomok $\dfrac{5}{x}$:
menovateľ sa nesmie rovnať nule, teda $\boldsymbol{x \neq 0}$

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia:

$Ľ = \dfrac{5}{5} = 1$

$P = 1$

$Ľ = P$

Koreň rovnice spĺňa podmienku pre neznámu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{5 \neq 0}$, **riešením rovnice je číslo** $\boldsymbol{5}$.

d) $-\dfrac{4}{x} = 7 \quad / \cdot x$

$-4 = 7 \cdot x \quad / : 7$

$-\dfrac{4}{7} = x$

$x = -\dfrac{4}{7}$

Podmienka pre zlomok $-\dfrac{4}{x}$:
menovateľ sa nesmie rovnať nule, teda $\boldsymbol{x \neq 0}$

Urobíme **skúšku správnosti** riešenia:

$Ľ = -\dfrac{4}{-\frac{4}{7}} = -4 : \left(-\dfrac{4}{7}\right) = -\dfrac{4}{1} \cdot \left(-\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{7}{1} = 7$

$P = 7$

$Ľ = P$

Koreň rovnice spĺňa podmienku pre neznámu $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{-\dfrac{4}{7} \neq 0}$, **riešením rovnice je číslo** $\boldsymbol{-\dfrac{4}{7}}$.

4. Rieš rovnice a urob skúšky správnosti riešení rovníc:

a) $3 = \dfrac{24}{x}$ **b)** $-5 = \dfrac{45}{3x}$ **c)** $\dfrac{36}{x} = 9$ **d)** $-\dfrac{6}{x} = 5$

5. Vypočítaj korene rovníc a urob skúšky správnosti riešení rovníc:

a) $3 = \dfrac{9}{x-1}$ **b)** $-2 = \dfrac{8}{3-x}$ **c)** $\dfrac{5}{x+2} = 4$ **d)** $-\dfrac{4}{x+1} = 7$

Riešenie 5.

Najprv rovnicu vyriešime, urobíme skúšku správnosti riešenia a až potom určíme podmienku pre neznámu v menovateli zlomku.

a) $3 = \dfrac{9}{x-1} \quad / \cdot (x-1)$

$3 \cdot (x-1) = 9$

$3x - 3 = 9 \quad / +3$

$3x = 12$

$x = 4$

pokračovanie ▶▶

Riešenie 5. *pokračovanie*

Skúška:

Ľ = 3

$\text{P} = \dfrac{9}{4-1} = \dfrac{9}{3} = 3$

Ľ = P

Podmienka pre zlomok $3 = \dfrac{9}{x-1}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $x - 1 \neq 0 \quad / + 1$

$\boldsymbol{x \neq 1}$

Keďže **4 ≠ 1**, **riešením** rovnice je číslo **4**.

b) $-2 = \dfrac{8}{3-x} \qquad / \cdot (3-x)$

$-2 \cdot (3-x) = 8$

$-6 + 2x = 8 \qquad / + 6$

$2x = 14 \qquad / : 2$

$x = 7$

Skúška:

Ľ = −2

$\text{P} = \dfrac{8}{3-7} = \dfrac{8}{-4} = -2$

Ľ = P

Podmienka pre zlomok $\dfrac{8}{3-x}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $3 - x \neq 0 \quad / + x$

$\boldsymbol{3 \neq x}$

Keďže **7 ≠ 3**, riešením rovnice je číslo **7**.

c) $\dfrac{5}{x+2} = 4 \qquad / \cdot (x+2)$

$5 = 4 \cdot (x+2)$

$5 = 4x + 8 \qquad / - 8$

$-3 = 4x \qquad / : 4$

$-\dfrac{3}{4} = x$

$x = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$

Možno vás napadne otázka: **Prečo „zmizne" zlomok**?
Ukážeme podrobnejšie, ako sme **odstránili** zlomok:

$\dfrac{5}{x+2} = 4 \qquad / \cdot (x+2)$

$\dfrac{5}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)} = 4 \cdot (x+2)$

Násobenie na ľavej strane sme si nepísali.
Nie je to potrebné, lebo **výrazy sa vykrátia**.

Skúška:

$\text{Ľ} = \dfrac{5}{-0{,}75+2} = \dfrac{5}{1{,}25} = \dfrac{5 \cdot 100}{1{,}25 \cdot 100} = \dfrac{500}{125} = 4$

P = 4

Ľ = P

Podmienka pre zlomok $\dfrac{5}{x+2}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $x + 2 \neq 0 \quad / - 2$

$\boldsymbol{x \neq -2}$

Keďže **−0,75 ≠ −2**, **riešením** rovnice je číslo **−0,75**.

d) $-\dfrac{4}{x+1} = 7 \qquad / \cdot (x+1)$

$-4 = 7 \cdot (x+1)$

$-4 = 7x + 7 \qquad / - 7$

$-11 = 7x \qquad / : 7$

$x = -\dfrac{11}{7} = -1\dfrac{4}{7}$

Nepravý zlomok upravíme na **zmiešané číslo delením čitateľa menovateľom**.

$-\dfrac{11}{7} = -11 : 7 = -1$ **zvyšok 4**

$-1\dfrac{4}{7}$

Skúška: Vyberieme pre ňu koreň zapísaný pomocou nepravého zlomku.

$\text{Ľ} = -\dfrac{4}{-\dfrac{11}{7}+1} = -\dfrac{4}{-\dfrac{11}{7}+\dfrac{7}{7}} = -\dfrac{4}{-\dfrac{4}{7}} = -4 : \left(-\dfrac{4}{7}\right) =$

$= -\dfrac{4}{1} \cdot \left(-\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{7}{1} = 7$

P = 7

Ľ = P

Podmienka pre zlomok $-\dfrac{4}{x+1}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $x + 1 \neq 0 \quad / - 1$

$\boldsymbol{x \neq -1}$

Keďže $\boldsymbol{-1\frac{4}{7} \neq -1}$, **riešením** rovnice je číslo $\boldsymbol{-1\frac{4}{7}}$.

6.

Vypočítaj korene rovníc a urob skúšky správnosti riešení rovníc.

a) $7 = \dfrac{14}{x-3}$ **b)** $-4 = \dfrac{8}{5-x}$ **c)** $\dfrac{3}{x+6} = 1$ **d)** $\dfrac{-2}{7+x} = 3$

7.*

Rieš rovnice a urob skúšky správnosti riešení rovníc.

a) $\dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{1}{4}$ **b)** $1\dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{7-5x}$

Riešenie 7.

a) $\dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{1}{4} \qquad / \cdot (2x-1)$

$3 = \dfrac{1}{4} \cdot (2x-1)$

$3 = \dfrac{1}{4} \cdot 2x - \dfrac{1}{4}$

$3 = \dfrac{2x}{4} - \dfrac{1}{4} \qquad / \cdot 4$

$12 = 2x - 1 \qquad / + 1$

$13 = 2x \qquad / : 2$

$6{,}5 = x$

pokračovanie

Riešenie 7. pokračovanie

Skúška:

$$Ľ = \frac{3}{2\cdot 6{,}5-1} = \frac{3}{13-1} = \frac{3:3}{12:3} = \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

Ľ = P

Podmienka pre zlomok $\frac{3}{2x-1}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $2x-1\neq 0 \quad /+1$

$2x \neq 1$

$\boldsymbol{x \neq 0{,}5}$

Keďže **6,5 ≠ 0,5**, **riešením rovnice** je číslo **6,5**.

b)

$$1\frac{2}{3} = -\frac{1}{7-5x}$$

Zmiešané číslo upravíme na nepravý zlomok.

$$\frac{5}{3} = -\frac{1}{7-5x} \qquad /\cdot(7-5x)$$

$$\frac{5}{3}\cdot(7-5x) = -1$$

$$\frac{5\cdot(7-5x)}{3} = -1$$

$$\frac{35-25x}{3} = -1 \qquad /\cdot 3$$

$$35-25x = -3 \qquad /-35$$

$$-25x = -38 \qquad /:(-25)$$

$$x = \frac{38}{25} = 1\frac{13}{25}$$

Skúška:

$$Ľ = 1\frac{2}{3}$$

$$P = -\frac{1}{7-5\cdot\frac{38}{25}} = -\frac{1}{7-\frac{38}{5}} = -\frac{1}{\frac{35}{5}-\frac{38}{5}} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} =$$

$$= -1:\left(-\frac{3}{5}\right) = -1\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Ľ = P

Podmienka pre zlomok $-\frac{1}{7-5x}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $7-5x\neq 0 \quad /+5x$

$7 \neq 5x \quad /:5$

$\frac{7}{5} \neq x$

$\boldsymbol{x \neq 1\frac{2}{5}}$

Keďže $\boldsymbol{1\frac{13}{25} \neq 1\frac{2}{5}}$, **riešením rovnice** je číslo $\boldsymbol{1\frac{13}{25}}$.

8.* Rieš rovnice a urob skúšky správnosti riešení rovníc.

a) $\frac{0{,}5}{4x+3} = \frac{1}{6}$ b) $-0{,}4 = -\frac{9}{5-2x}$

9. Aké **podmienky** musia spĺňať korene rovníc?

a) $10 = \frac{-3}{x+4}$ b) $-0{,}2 = \frac{5}{3-6x}$

c) $\frac{6}{3x+1} = \frac{1}{2}$ d) $-\frac{4}{x+1} = 3$

Riešenie 9.

Rovnice obsahujú zlomky s neznámou v menovateli a tak **podmienkou** je: **menovateľ sa nesmie rovnať nule**.

a) $10 = \frac{-3}{x+4}$ **Menovateľ** zlomku $\frac{-3}{x+4}$ je $x+4$.

Potom: $x+4\neq 0 \quad /-4$

$\boldsymbol{x \neq -4}$

Podmienkou riešenia rovnice **je** $\boldsymbol{x \neq -4}$.
To znamená, že **koreň rovnice sa nesmie rovnať** **−4**.

b) $-0{,}2 = \frac{5}{3-6x}$ **Menovateľ** zlomku $\frac{5}{3-6x}$ je $3-6x$.

Potom: $3-6x\neq 0 \quad /-3$

$-6x \neq -3 \quad /:(-6)$

$\boldsymbol{x \neq 0{,}5}$

Podmienkou riešenia rovnice **je** $\boldsymbol{x \neq 0{,}5}$.
To znamená, že **koreň rovnice sa nesmie rovnať** **0,5**.

c) $\frac{6}{3x+1} = \frac{1}{2}$ **Menovateľ** zlomku $\frac{6}{3x+1}$ je $3x+1$.

Potom: $3x+1\neq 0 \quad /-1$

$3x \neq -1 \quad /:3$

$\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{3}}$

Podmienkou riešenia rovnice **je** $\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{3}}$.

To znamená, že **koreň rovnice sa nesmie rovnať** $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$.

d) $-\frac{4}{x+1} = 3$ **Menovateľ** zlomku $-\frac{4}{x+1}$ je $x+1$.

Potom: $x+1\neq 0 \quad /-1$

$\boldsymbol{x \neq -1}$

Podmienkou riešenia rovnice **je** $\boldsymbol{x \neq -1}$.
To znamená, že **koreň rovnice sa nesmie rovnať** **−1**.

10. Aké **podmienky** musia spĺňať korene rovníc?

a) $-1 = \frac{3}{x+6}$ b) $9 = \frac{-1}{8-2x}$

c) $\frac{3}{4x+1} = -6$ d) $-\frac{5}{x-0{,}5} = 7$

e) $\frac{7}{3x-0{,}2} = 0{,}1$ f)* $\frac{1}{2\cdot(x-3)+1} = 3$

g)* $\frac{4-5}{3-(x+4)} = 2$ h)** $\frac{0{,}5}{\frac{2}{3}-3\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)} = 0$

11. V ktorej z možností **A** až **D** je koreň rovnice $\frac{x+5}{x}=2$?

A -5 **B** -3 **C** 5 **D** 3

Riešenie 11.

Pri riešení úloh tohto typu často používame **odhad založený na intuícii – tipujeme**.

Nech je riešením rovnice číslo -3, **možnosť B**.

Dosadíme číslo do ľavej strany rovnice a potom **do pravej strany** rovnice, akoby sme robili **skúšku správnosti** riešenia rovnice.

$$Ľ=\frac{-3+5}{-3}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$

$$P=2$$

$-\frac{2}{3}\neq 2$, $Ľ\neq P$, číslo -3, teda možnosť **B nie je riešením rovnice**.

Nech je teraz riešením rovnice číslo **5**, **možnosť C**.

Dosadíme číslo do ľavej strany rovnice a potom **do pravej strany rovnice** – akoby sme robili **skúšku správnosti** riešenia rovnice.

$$Ľ=\frac{5+5}{5}=\frac{10}{2}=2$$

$$P=2$$

$2=2$, $Ľ=P$, číslo 5, teda možnosť **C je riešením rovnice**.

12. V ktorej z možností **A** až **D** je koreň rovnice $\frac{x-3}{x}=-1$?

A -3 **B** 3 **C** $-1{,}5$ **D** $1{,}5$

Pri riešení úloh z matematiky, pri učení ktoréhokoľvek učiva z rôznych predmetov, mnohí učitelia hovoria:

„... opakovanie je matka múdrosti...“

A náš učiteľ dejepisu stále hovoril

„... už starí Rimania hovorili...“

Prečo sa asi tieto vetné spojenia používajú?

Porozprávajte sa o tejto téme. Na hľadanie informácií využite internet, encyklopédie, výroky...

13. V ktorej z možností **A** až **D** je číslo, pre ktoré sa výraz $\frac{2a-1}{a-5}$ rovná nule?

A $a=0{,}5$ **B** $a=1$ **C** $a=5$ **D** $a=-4$

Riešenie 13.

Na riešenie úlohy **nepoužijeme tipovanie**.

Vytvoríme si rovnicu a vyriešime ju ekvivalentnými úpravami.

$$\frac{2a-1}{a-5}=0 \qquad /\cdot(a-5)$$

$$2a-1=0 \qquad /+1$$

$$2a=1 \qquad /:2$$

$$a=0{,}5$$

Podmienka pre zlomok $\frac{2a-1}{a-5}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $a-5\neq 0 \quad /+5$

$$\boldsymbol{a\neq 5}$$

Keďže **0,5 ≠ 5**, **riešením** úlohy je $\boldsymbol{a=0{,}5}$, **možnosť A**.

14.* V ktorej z možností **A** až **D** je číslo, pre ktoré sa výraz $\frac{4-5a}{a}$ rovná nule?

A $a=0$ **B** $a=4$ **C** $a=0{,}8$ **D** $a=1{,}25$

15.* V ktorej z možností **A** až **D** je číslo, pre ktoré sa výraz $\frac{3+2b}{b-1}$ rovná **najmenšiemu kladnému celému číslu**?

A $b=3$ **B** $b=-4$ **C** $b=4$ **D** $b=0{,}75$

Riešenie 15.

Úlohu vyriešime pomocou rovnice.

$$\frac{3+2b}{b-1}=1 \qquad /\cdot(b-1)$$

Najmenšie kladné celé číslo je **1**.

$$3+2b=b-1 \qquad /-3$$

$$2b=b-4 \qquad /-b$$

$$b=-4$$

Podmienka pre zlomok $\frac{3+2b}{b-1}$:

Menovateľ sa nesmie rovnať nule: $b-1\neq 0 \quad /+1$

$$\boldsymbol{b\neq 1}$$

Keďže **−4 ≠ 1**, **riešením** úlohy je $\boldsymbol{b=-4}$, **možnosť B**.

16.* V ktorej z možností **A** až **D** sa výraz $\dfrac{9c-4}{c+5}$ rovná **najväčšiemu zápornému celému číslu**?

A $c=\dfrac{1}{8}$ **B** $c=\dfrac{1}{3}$ **C** $c=-\dfrac{5}{9}$ **D** $c=-\dfrac{1}{10}$

17.** Rieš rovnice a urob skúšku správnosti. Nezabudni na podmienky riešenia rovnice.

a) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x}=\dfrac{1}{2}$ **b)** $-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x}=1$

c) $\dfrac{x+1}{x-1}=2$ **d)** $-\dfrac{x+3}{x+2}=-\dfrac{1}{3}$

Problémová úloha

Čo môžete povedať o koreňoch týchto rovníc?

$\dfrac{x+1}{x-1}=1$ $\dfrac{2}{x}=\dfrac{4}{x}$

Je riešenie týchto rovníc ťažké?

Jeden múdry človek povedal:

„Nič nie je ťažké, treba len chcieť.“

My dopĺňame:

„...premýšľať a pozorne čítať...“

Vyskúšajte sa

Pojmy z rovníc sa nachádzajú aj v iných učivách. Ak správne vyriešte úlohy v teste, získate odpoveď na hádanku:

ČO MÁ STROM A NEMÁ ROVNICA?

Pozor, písmená sú poprehadzované. Treba ich zoradiť v správnom poradí.
V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Riešením rovnice $2=\dfrac{9}{3x}$ je číslo:

M 2 N $1\dfrac{1}{2}$ O $\dfrac{1}{3}$ P 3

2. Koreňom rovnice $\dfrac{5}{x+3}=1$ je číslo:

E 2 F 5 G -3 H 8

3. Rovnicu $\dfrac{7}{4x-3}=-6$ môžeme riešiť, ak platí:

K $x\neq\dfrac{3}{4}$ L $x\neq\dfrac{4}{3}$ M $x\neq\dfrac{11}{24}$ N $x\neq\dfrac{5}{2}$

4. V ktorej z možností je koreň rovnice $\dfrac{x+5}{2x}=-0{,}5$?

M -5 N $-0{,}4$ O $-2{,}5$ P $-5{,}5$

5. Pre akú hodnotu d sa výraz $\dfrac{2}{d+5}$ rovná výrazu $\dfrac{1}{d-4}$?

O $d=3$ P $d=-3$ R $d=13$ E $d=-9$

6. Rovnica $\dfrac{-2}{x}=\dfrac{3}{x}$

Á nemá riešenie É má riešenie pre $x\neq 0$ Í má koreň $x=0$ C má koreň $x=-2$

Zapamätajte si

Lineárna rovnica s neznámou *x* v menovateli je rovnica,
ktorá obsahuje **zlomok** a dá sa upraviť na **tvar $a \cdot x = b$**, kde a a b sú reálne čísla.
Rovnica môže obsahovať rôzne neznáme, napríklad: $x, t, y, a, \ldots$.
Napríklad:

$$\frac{3}{4x+1} = -6, \; x \neq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{t} = 8, \; t \neq 0$$

$$\frac{49}{2a} = 7, \; a \neq 0$$

Pri riešení rovnice používame **ekvivalentné úpravy rovníc**.
Podmienkou riešenia je, že sa **menovateľ zlomku nerovná nule**.

3.4 Vyjadrenie neznámej zo vzorca





autor obrázka René Magritte

Čo sme sa už učili

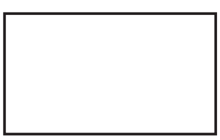
Čo je **vzorec**...
Čo je **neznáma**...
To už vieme, to sme sa už učili... v algebre, geometrii, fyzike,...
Hovoríme o
...známych osobnostiach, známych planétach, známych mestách,...
Hovoríme tiež
...toho nepoznám, to som nevidela, o tom neviem... to je pre mňa neznáme...
No a veľa vecí, ľudí, miest, štátov,... chceme samozrejme spoznať.

V tejto kapitole sa naučíme počítať viaceré **známe úlohy z matematiky** pomocou vzorcov, z ktorých **vyjadríme neznámu – hľadaný údaj** danej úlohy.

1. SUSEDOVA ZÁHRADA
Susedova záhrada v tvare obdĺžnika má výmeru 4,05 a. Dlhá je 18 m. Aká je šírka záhrady?

Riešenie 1.

Úlohu môžeme počítať takto:
Začneme náčrtom.
Pripomenieme si vzorec.
Dosadíme do vzorca a **vypočítame** potrebný údaj.



$S = 4{,}05\ \text{a} = 405\ \text{m}^2$
$d = 18\ \text{m}$
$š = ?\ \text{m}$

Výmera záhrady je vlastne **obsah** obdĺžnika.

$S = d \cdot š$
$405 = 18 \cdot š \qquad / : 18$
$22{,}5 = š$
$š = 22{,}5$

Šírka susedovej záhrady je **22,5 m**.

Úlohu môžeme riešiť aj takto:
Napíšeme si potrebný **vzorec**
$S = d \cdot š$
Potom z neho **vyjadríme neznámy údaj**, v našom prípade **šírku** záhrady *š*.

Použijeme ekvivalentnú **úpravu z riešenia rovníc**.

$S = d \cdot š \qquad / : d$

$\frac{S}{d} = š$

Vyjadrenú **šírku zapíšeme**

$š = \frac{S}{d}$

Potom **dosadíme** číselné hodnoty a vypočítame

$š = \frac{405}{18} = 22{,}5$

Šírka susedovej záhrady je **22,5 m**.

Pozrite si niekoľko úloh, ktoré riešili žiaci v roku 1935.
Úlohy sú z učebnice *Meroveda a rysovanie pre školy občianske* autora *Karola Buzeka,* prekladateľa *Jozefa Siváka,* diel druhý, pravdepodobne z roku 1935.

„Ihrište podoby podĺžnika 58 m dlhé a 39 m široké má sa ohradiť drôteným plotom. Drôt sa pribije na koly a päťkrát sa ovinie okolo ihrišťa. Koľko metrov drôtu treba objednať?“

„Karlovo námestie v Prahe má podobu podĺžnika, dlhého 520 m a širokého 160 m. Za koľko minút obídeme toto námestie, keď za minútu prejdeme 80 m?“

„Štvoruholníkový sad sa má ohradiť latovým plotom. Strany sadu sú 65 m, 78 m, 40 m a 32 m. Koly majú sa pobiť na 6 m jeden od druhého a osy šramôk vzdialené sú na 15 cm od seba. Koľko treba na ohradu kolov a koľko lát sa pribije, keď sa jedna lata prepíli na 3 šramky?

Čo je v nich známe a čo neznáme?
Vyriešte uvedené úlohy pomocou **neznámej vyjadrenej zo vzorca**.
Vyjadrenie neznámej zo vzorca znamená zapísať hľadaný – neznámy údaj pomocou známych údajov.

$$\check{s} = \frac{S}{d}$$

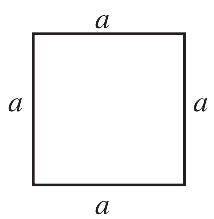
neznámy údaj známe údaje

Keďže **vzorec je rovnosť dvoch výrazov (rovnica),** na vyjadrenie neznámej môžeme použiť **ekvivalentné úpravy rovníc**.

2. Rieš úlohy pomocou vyjadrenia neznámej zo vzorca.
a) Štvorec má obvod 12,8 cm. Vypočítaj dĺžku jeho strany.
b) Obdĺžnik má obvod 36,32 cm a jednu zo strán 2 cm dlhú. Vypočítaj dĺžku druhej strany obdĺžnika.
c) Rovnostranný trojuholník má obvod 16,74 mm. Vypočítaj dĺžku jeho strany.
d) Rovnoramenný lichobežník má obvod 18,6 dm, základne dĺžky 7 dm a 5 dm. Vypočítaj dĺžky jeho ramien.

Riešenie 2.

a) Nech je daný štvorec *ABCD* so stranou *a*.
o = 12,8 cm
a = ? cm



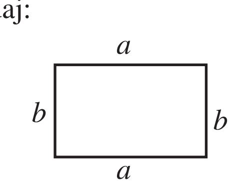
Napíšeme **vzorec na výpočet obvodu štvorca:**
$$\boldsymbol{o = 4 \cdot a}$$
Vyjadríme z neho neznámy údaj:
$$o = 4 \cdot a \quad / : 4$$
$$\frac{o}{4} = a$$
$$a = \frac{o}{4}$$

Dosadíme číselné hodnoty: $a = \frac{o}{4} = \frac{12,8}{4} = 3,2$

Dĺžka strany štvorca a je **3,2 cm**.

Skúšku správnosti riešenia urobte tak, že úlohu vyriešite **bez vyjadrenia neznámej zo vzorca**.

b) Nech je daný obdĺžnik *ABCD* so stranami *a* a *b*.
o = 36,32 cm, a = 2 cm, b = ? cm
Napíšeme **vzorec na výpočet obvodu obdĺžnika**:
$$\boldsymbol{o = 2 \cdot (a + b)}$$
Vyjadríme z neho neznámy údaj:
$$o = 2 \cdot (a + b) \quad / : 2$$
$$\frac{o}{2} = a + b \quad / - a$$
$$\frac{o}{2} - a = b$$
$$b = \frac{o}{2} - a$$

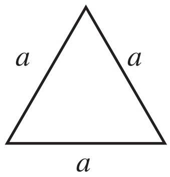


Dosadíme číselné hodnoty:
$$b = \frac{36,32}{2} - 2 = 18,16 - 2 = 16,16$$
Dĺžka druhej strany obdĺžnika je **16,16 cm**.

Ak na výpočet obvodu obdĺžnika so stranami a a b používame vzorec $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, riešenie úlohy bude takéto:
$$o = 2 \cdot a + 2 \cdot b \quad / - 2 \cdot a$$
$$o - 2 \cdot a = 2 \cdot b \quad / : 2$$
$$\frac{o - 2 \cdot a}{2} = b \Rightarrow b = \frac{o - 2 \cdot a}{2}$$

pokračovanie ▶▶

c) Nech je daný rovnostranný trojuholník *ABC* so stranou *a*.
$o = 16{,}74$ mm
$a = ?$ mm

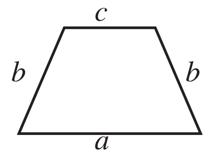


Napíšeme **vzorec na výpočet obvodu rovnostranného trojuholníka:** $\boldsymbol{o = 3 \cdot a}$
Vyjadríme z neho neznámy údaj:

$$o = 3 \cdot a \qquad / : 3$$
$$\frac{o}{3} = a$$
$$a = \frac{o}{3}$$

Dosadíme číselné hodnoty: $a = \dfrac{16{,}74}{3} = 5{,}58$.
Dĺžka strany rovnostranného trojuholníka je **5,58 mm.**

d) Nech je daný rovnoramenný lichobežník *ABCD* so základňami *a* a *c* a ramenami $b = d$.
$o = 18{,}6$ dm
$a = 7$ dm
$c = 5$ dm
$b = d = ?$ dm



Napíšeme **vzorec na výpočet obvodu rovnoramenného lichobežníka**:
$o = a + b + c + d$ vzorec pre všeobecný lichobežník
$\boldsymbol{o = a + c + 2 \cdot b}$ vzorec pre rovnoramenný lichobežník s ramenami $b = d$
Vyjadríme z neho neznámy údaj:

$$o = a + c + 2 \cdot b \qquad / - a - c$$
$$o - a - c = 2 \cdot b \qquad / : 2$$
$$\frac{o - a - c}{2} = b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{o - a - c}{2}$$

Dosadíme číselné hodnoty: $b = \dfrac{18{,}6 - 7 - 5}{2} = 3{,}3$
Dĺžka ramien rovnoramenného lichobežníka je **3,3 dm.**

3. Rieš úlohy pomocou vyjadrenia neznámej zo vzorca.
a) Štvorec má obvod 12,56 cm. Vypočítaj dĺžku jeho strany.
b) Obdĺžnik má obvod 150 cm a jednu zo strán 30 cm dlhú. Vypočítaj dĺžku druhej strany obdĺžnika.
c) Rovnostranný trojuholník má obvod 64,2 mm. Vypočítaj dĺžku jeho strany.
d) Rovnoramenný lichobežník má obvod 52,6 dm, základne dĺžky 10 dm a 16 dm. Vypočítaj dĺžky jeho ramien.

4.
a) Štvorec má obsah 64 cm^2. Akú dĺžku má jeho strana?
b) Obdĺžnik má obsah 60 cm^2 a jednu zo strán dlhú 12 cm. Akú dĺžku má jeho druhá strana?
c) Pravouhlý trojuholník má obsah 24 dm^2. Jedna odvesna má dĺžku 6 dm. Akú dĺžku má jeho druhá odvesna?
d) Kosoštvorec má obsah 3,2 m^2 a výšku 0,8 m. Akú dĺžku má jeho strana?

Riešenie 4.

a) Nech je daný štvorec *ABCD* so stranou *a*.
$S = 64\ cm^2$, $a = ?$ cm

Vzorec na výpočet obsahu štvorca: $\boldsymbol{S = a^2}$
Vyjadrenie neznámeho údaja:

$$S = a^2$$
$$\sqrt{S} = a \qquad a = \sqrt{S}$$

odmocníme
opačná operácia umocňovania

Dosadenie číselných hodnôt: $a = \sqrt{64} = 8$
Strana štvorca má dĺžku **8 cm.**

b) Nech je daný obdĺžnik *ABCD* so stranami *a*, *b*.
$S = 60\ cm^2$, $a = 12$ cm, $b = ?$ cm

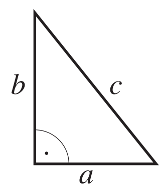
Vzorec na výpočet obsahu obdĺžnika: $\boldsymbol{S = a \cdot b}$
Vyjadrenie neznámeho údaja:

$$S = a \cdot b \qquad / : a$$
$$\frac{S}{a} = b \qquad b = \frac{S}{a}$$

Dosadenie číselných hodnôt: $b = \dfrac{60}{12} = 5$

Druhá strana obdĺžnika má dĺžku **5 cm.**

c) Nech je daný pravouhlý trojuholník *ABC* s odvesnami *a, b* a preponou *c*.
$S = 24\ dm^2$
$a = 6$ dm
$b = ?$ dm



Vzorec na výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka:

$$\boldsymbol{S = \frac{a \cdot b}{2}}$$

Vyjadrenie neznámeho údaja:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \qquad / \cdot 2$$
$$2 \cdot S = a \cdot b \qquad / : a$$
$$\frac{2 \cdot S}{a} = b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2 \cdot S}{a}$$

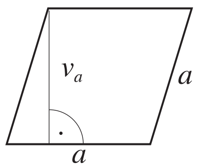
Dosadenie číselných hodnôt: $b = \dfrac{2 \cdot 24}{6} = 8$

Druhá odvesna pravouhlého trojuholníka má dĺžku **8 dm.**

pokračovanie

d) Nech je daný kosoštvorec $ABCD$ so stranou a a výškou v_a (výška na stranu a).

$S = 3{,}6\ \text{m}^2$
$v_a = 0{,}8\ \text{m}$
$a = ?\ \text{m}$



Vzorec na výpočet obsahu kosoštvorca:
$S = a \cdot v_a$

Vyjadrenie neznámeho údaja:

$$S = a \cdot v_a \qquad / : v_a$$

$$\frac{S}{v_a} = a \qquad a = \frac{S}{v_a}$$

Dosadenie číselných hodnôt: $a = \dfrac{3{,}2}{0{,}8} = 4$

Strana kosoštvorca má dĺžku **4 m**.

5.

Rieš úlohy pomocou vyjadrenia neznámej zo vzorca.

a) Štvorec má obsah 144 cm^2. Akú dĺžku má jeho strana?
b) Obdĺžnik má obsah 192 cm^2 a jednu zo strán dlhú 16 cm. Akú dĺžku má jeho druhá strana?
c)* Pravouhlý trojuholník má obsah 56 dm^2. Jedna odvesna má dĺžku 8 dm. Akú dĺžku má jeho druhá odvesna a prepona?
d) Kosoštvorec má obsah 1,62 m^2 a výšku 0,9 m. Akú dĺžku má jeho strana?

6.

Vyjadri zo vzorcov uvedené neznáme a vypočítaj ich hodnoty pre dané číselné údaje. Over správnosť riešení úlohy.

a) Rovnoramenný lichobežník $ABCD$: $o = a + c + 2 \cdot b$, $a = ?$ $\quad$ $o = 35$ cm, $c = 2$ cm, $b = 5$ cm

b) Lichobežník $ABCD$: $S = \dfrac{(a+c) \cdot v}{2}$, $c = ?$ $\quad$ $S = 56{,}5$ cm^2, $a = 10$ cm, $v = 4$ cm

Riešenie 6.

a) Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami a a c a ramenami $b = d$.
Vyjadríme neznámu a zo vzorca na výpočet **obvodu rovnoramenného lichobežníka**:

$$o = a + c + 2 \cdot b \qquad /-c-2\cdot b$$

$$o - c - 2 \cdot b = a \qquad / : 2$$

Neznáma $a = o - c - 2 \cdot b$.
Dosadíme číselné hodnoty do vyjadrenej neznámej

$a = o - c - 2 \cdot b$
$a = 35 - 2 - 2 \cdot 5 = 35 - 2 - 10 = \mathbf{23}$

Skúška správnosti:
Do vzorca $a = o + c + 2 \cdot b$ na výpočet obvodu **rovnoramenného lichobežníka** dosadíme dané údaje:

$o = a + c + 2 \cdot b$
$35 = a + 2 + 2 \cdot 5$
$35 = a + 12 \qquad /-12$
$23 = a \qquad \boldsymbol{a = 23}$

$o = 35$ cm
$c = 2$ cm
$b = 5$ cm

Pretože **pri oboch výpočtoch dĺžky strany** a sme získali **rovnaké výsledky**, riešenie je **správne.**

Na výpočet neznámej a môžeme použiť **vzorec**

$$\boldsymbol{a = o - c - 2 \cdot b}$$

b) Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami a a c a ramenami b a d.
Vyjadríme neznámu c **zo vzorca na výpočet obsahu lichobežníka**:

$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2} \qquad / \cdot 2$$

$$2 \cdot S = (a+c) \cdot v \qquad / : v$$

$$\frac{2 \cdot S}{v} = a + c \qquad / - a$$

$$\frac{2 \cdot S}{v} - a = c$$

$$c = \frac{2 \cdot S}{v} - a$$

Neznáma $c = \dfrac{2 \cdot S}{v} - a$.

Dosadíme číselné hodnoty do vyjadrenej neznámej:

$$c = \frac{2 \cdot 56{,}5}{4} - 10 = \frac{113}{4} - 10 = 28{,}25 - 10 = \mathbf{18{,}25}$$

Skúška správnosti:

Dosadíme do vzorca na výpočet obsahu $S = \dfrac{(a+c) \cdot v}{2}$ známe údaje a vypočítame dĺžku strany a:

$S = \dfrac{(a+c) \cdot v}{2}$
$56{,}5 = \dfrac{(10+c) \cdot 4}{2} \qquad / \cdot 2$
$113 = (10+c) \cdot 4$
$113 = 40 + 4c \qquad /-40$
$73 = 4c \qquad / : 4$
$18{,}25 = c \qquad \boldsymbol{c = 18{,}25}$

$S = 56{,}5$ cm^2
$a = 10$ cm
$v = 4$ cm

Pretože **pri oboch výpočtoch dĺžky strany** c sme získali **rovnaké výsledky,** riešenie je **správne.**
Na výpočet neznámej c môžeme použiť **vzorec:**

$$c = \frac{2 \cdot S}{v} - a$$

7. Vyjadri zo vzorcov uvedené neznáme a vypočítaj ich hodnotu pre dané číselné údaje. Over správnosť riešení úlohy.

a) $o = 3 \cdot a$, $a = ?$, $o = 126$ dm

b) $o = 2 \cdot (a + b)$, $b = ?$, $o = 48$ m, $a = 12$ m

c) $o = a + c + 2 \cdot b$, $b = ?$, $o = 35$ cm, $c = 2$ cm, $a = 5$ cm

d) $S = a \cdot v_a$, $a = ?$, $v_a = 7$ mm, $S = 101{,}5$ mm^2

e) $S = \dfrac{a \cdot b}{2}$, $b = ?$, $a = 5$ cm, $S = 125$ cm^2

f) $S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2}$, $a = ?$, $S = 56{,}5$ cm^2, $c = 10$ cm, $v = 4$ cm

8.

a) Aký polomer r má kruh s obvodom $o = 28{,}26$ cm?
b) Aký priemer d má kruh s obvodom $o = 3{,}14$ dm?
Použi vyjadrenie neznámej zo vzorca.

9.

a) Vypočítaj polomer r kruhu s obsahom $S = 28{,}26$ dm^2.
b) Vypočítaj priemer d kruhu s obsahom $S = 3{,}14$ cm^2.
Použi vyjadrenie neznámej zo vzorca.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Strana a zo vzorca na výpočet obvodu obdĺžnika $o = 2 \cdot (a + b)$ je vyjadrená vzťahom:

A $a = o - 2b$ B $a = \dfrac{o}{2} - b$ C $a = 2o - b$ D $a = \dfrac{o - b}{2}$

2. Strana c zo vzorca na výpočet obvodu trojuholníka $o = a + b + c$ je vyjadrená vzťahom:

A $c = o + a + b$ B $c = a - b - o$ C $c = o - a - b$ D $c = a + b - o$

3. Strana a zo vzorca na výpočet obsahu obdĺžnika $S = a \cdot b$ je vyjadrená vzťahom:

A $a = \dfrac{S}{b}$ B $a = \dfrac{b}{S}$ C $a = S - b$ D $a = b - S$

4. Strana b zo vzorca na výpočet obsahu trojuholníka $S = \dfrac{b \cdot v_b}{2}$ je vyjadrená vzťahom:

A $b = \dfrac{S}{v_b \cdot 2}$ B $b = \dfrac{S \cdot 2}{v_b}$ C $b = \dfrac{S - 2}{v_b}$ D $b = \dfrac{S : 2}{v_b}$

5. Výška v zo vzorca na výpočet obsahu lichobežníka so základňami a, c, ramenami b, d je vyjadrená vzťahom:

A $v = \dfrac{(a + c) \cdot v}{S}$ B $v = \dfrac{2S}{a + c}$ C $v = S : 2 - a - c$ D $v = \dfrac{S - 2}{a - c}$

6. Hrana b zo vzorca na výpočet objemu kvádra s hranami a, b, c je vyjadrená vzťahom:

A $b = \dfrac{V}{a - c}$ B $b = V \cdot a \cdot c$ C $b = V - a - c$ D $b = V : (a \cdot c)$

7. Polomer kruhu r zo vzorca na výpočet obvodu kruhu $o = \pi \cdot d$ je vyjadrený vzťahom:

A $d = \dfrac{o}{\pi}$ B $r = o : (2\pi)$ C $d = \dfrac{\pi}{o}$ D $r = \dfrac{o}{\pi}$

3.5 Riešenie slovných (kontextových) úloh, ktoré sa dajú riešiť pomocou lineárnej rovnice alebo nerovnice

Aké slovné úlohy sme kedysi počítali?
Aké úlohy boli na rozcvičku – **na zahriatie mozgu**?

1. Ak zväčším číslo o 17, dostanem číslo 77. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie 1.

Počítali sme takto:

$77 - 17 = \mathbf{60}$

Neznáme číslo bolo **60**.

Ale počítali sme aj takto:
Označíme neznáme číslo pomocou x.
Utvoríme rovnicu a vyriešime ju:

$$x + 17 = 77$$
$$x = 77 - 17$$
$$x = \mathbf{60}$$

zväčšiť o
+

Skúška: $60 + 17 = 77$
Neznáme číslo bolo **60**.

2. Ak zmenším číslo o 15, dostanem číslo 65. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie 2.

Počítali sme takto:

$65 + 15 = \mathbf{80}$

Neznáme číslo bolo **80**.

Ale počítali sme aj takto:
Označíme neznáme číslo pomocou x.
Utvoríme rovnicu a vyriešime ju:

$$x - 15 = 65$$
$$x = 65 + 15$$
$$x = \mathbf{80}$$

zmenšiť o
–

Skúška: $80 - 15 = 65$
Neznáme číslo bolo **80**.

3. Ak číslo zmenším trojnásobne, dostanem číslo 123. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie 3.

Počítali sme takto:
$123 \cdot 3 = \mathbf{369}$
Neznáme číslo bolo **369.**

Ale počítali sme aj takto:
Označíme neznáme číslo pomocou x.
Utvoríme rovnicu a vyriešime ju:

$$x : 3 = 123$$
$$x = 123 \cdot 3$$
$$x = \mathbf{369}$$

zmenšiť násobne
:

Skúška: $369 : 3 = 123$
Neznáme číslo bolo **369**.

4. Ak je dvojnásobok čísla 46, aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie 4.

Počítali sme takto:
$46 : 2 = \mathbf{23}$
Neznáme číslo bolo **23**.

Ale počítali sme aj takto:
Označíme neznáme číslo pomocou x.
Utvoríme rovnicu a vyriešime ju:

$$2 \cdot x = 46$$
$$x = 46 : 2$$
$$x = \mathbf{23}$$

zväčšiť násobne
·

Skúška: $2 \cdot 23 = 46$.
Neznáme číslo bolo **23**.

5. Ľubovoľnou metódou rieš uvedené úlohy.

a) Ak zväčším číslo o 5 dostaneme číslo, ktoré je dvakrát väčšie ako pôvodné číslo. Ktoré je to číslo?
b) Ak zmenším číslo o 10 dostaneme číslo, ktoré je polovicou pôvodného čísla. Ktoré je to číslo?
c) Ak zväčším číslo o 36, dostanem číslo, ktoré je štyrikrát väčšie ako pôvodné číslo. Aké bolo pôvodné číslo?
d) Polovica neznámeho čísla zmenšená o 8 sa rovná štvrtine tohto čísla zväčšenej o 4. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie 5.

Označíme neznáme číslo pomocou x.
Utvoríme rovnicu a vyriešime ju.

a) neznáme číslo zväčšené o 5 ... $x + 5$
číslo, ktoré je dvakrát väčšie ako číslo pôvodné ... $2 \cdot x$

$$x + 5 = 2 \cdot x \qquad / -x$$
$$5 = x$$
$$x = \mathbf{5}$$

Skúšku správnosti vykonáme tak, že **vypočítané číslo** dosadíme do **textu zápisu** úlohy (nie do rovnice):

Neznáme číslo zväčšené o 5 je:
$\mathbf{5} + 5 = 10.$
Číslo, ktoré je dvakrát väčšie ako číslo pôvodné je:
$2 \cdot 5 = 10.$
Platí rovnosť 10 = 10. Hľadané číslo je **5**.

b) neznáme číslo zmenšené o 10 ... $x - 10$
číslo, ktoré je polovicou pôvodného čísla ... $\dfrac{x}{2}$

$$x - 10 = \frac{x}{2} \qquad / \cdot 2$$
$$2x - 20 = x \qquad / + 20 - x$$
$$x = \mathbf{20}$$

Skúška:
Neznáme číslo zmenšené o 10 je:
$\mathbf{20} - 10 = 10.$
Číslo, ktoré je polovicou pôvodného čísla je:
$\mathbf{20} : 2 = 10.$

Platí rovnosť 10 = 10. Hľadané číslo je **20**.

c) neznáme číslo zväčšené o 36 ... $x + 36$
číslo, ktoré je štyrikrát väčšie ako číslo pôvodné ... $4 \cdot x$

$$x + 36 = 4 \cdot x \qquad / - x$$
$$36 = 3x \qquad / : 3$$
$$12 = x$$
$$x = \mathbf{12}$$

Skúška:
Neznáme číslo zväčšené o 36 je:
$\mathbf{12} + 36 = 48.$
Číslo, ktoré je štyrikrát väčšie ako číslo pôvodné, je:
$4 \cdot 12 = 48.$
Platí rovnosť 48 = 48. Hľadané číslo je **12**.

d) polovica neznámeho čísla zmenšená o 8 ... $\dfrac{x}{2} - 8$
štvrtina neznámeho čísla zväčšená o 4 ... $\dfrac{x}{4} + 4$

$$\frac{x}{2} - 8 = \frac{x}{4} + 4 \qquad / + 8 - \frac{x}{4}$$
$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 12$$

Spoločný menovateľ zlomkov je **4.**

$$\frac{2x}{4} - \frac{x}{4} = 48$$
$$2x - x = 48$$
$$x = \mathbf{48}$$

Skúška:
Polovica neznámeho čísla zmenšená o 8 je:
$\mathbf{48} : 2 - 8 = 24 - 8 = 16.$
Štvrtina neznámeho čísla zväčšená o 4 je:
$\mathbf{48} : 4 + 4 = 12 + 4 = 16.$
Platí rovnosť 16 = 16. Hľadané číslo je **48**.

Viete, že...?

Prečo sa neznáma označuje písmenom ***x***?
Pozrite sa na slová začínajúce sa na „***x***“. Zistite ich význam – napríklad pomocou internetu.

xanto – prvá časť zložených slov s významom žltý
xeno – prvá časť zložených slov s významom cudzí
xenón – prvok zo skupiny vzácnych plynov
xero – prvá časť zložených slov s významom suchý
xerostómia – sucho v ústach
xystos – v starogréckom gymnáziu – atletická krytá dráha

Najznámejšie použitie písmena ***x***: **X** – rímska číslica desať

Riešenie úloh pomocou rovníc sa používa hlavne pri riešení **zložitejších slovných úloh**.

Riešiť slovnú úlohu znamená:

1. matematicky vyjadriť, čo poznáme a **čo máme vypočítať (zápis)**
2. **ak nie je určená metóda,** ktorou máme úlohu riešiť, zvoliť si takú metódu, ktorá sa nám zdá byť **najlepšia na výpočet neznámeho prvku** (metódou môže byť trojčlenka, rovnica, nerovnica, logická úvaha, ...)
3. po vypočítaní neznámeho prvku urobiť **skúšku správnosti riešenia**
4. napísať **slovnú odpoveď** k riešeniu úlohy

6. NAKUPUJEME

a) Kamarátky Danka, Evka a Zuzka si išli kúpiť pomôcky do školy. Danka dostala od rodičov o 6 eur viac ako Evka a Zuzka dostala o 12 eur menej ako Danka. Keď zrátali peniaze, zistili, že spolu majú 84 eur. Ktoré z dievčat dostalo najviac eur a koľko?

b) Danka si kúpila batoh, Evka si kúpila súpravu pomôcok na rysovanie a Zuzka súpravu na výtvarnú výchovu. Danka zaplatila za batoh dvakrát viac ako Evka na pomôcky a Zuzka zaplatila za svoju súpravu o 3,60 € menej ako Evka. Všetko zaplatili spolu, lebo za nákup vo výške 25 eur, dávali kupujúcim súpravu troch pier. Spoločný nákup dievčat stál 36,80 eur.
Koľko eur stál nákup každého z dievčat zvlášť?

Riešenie 6.

a) Vypočítame, koľko eur dostalo každé z dievčat.
Na riešenie úlohy použijeme rovnicu s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Evka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x \\ \text{Danka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x+6 \\ \text{Zuzka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (x+6)-12 \end{array}\right\}\ \text{spolu } \mathbf{84}\ \text{€}$$

Utvoríme rovnicu:

$$x + (x + 6) + (x + 6) - 12 = 84$$
$$3x = 84 \qquad / : 3$$
$$x = \mathbf{28}$$

Skúška:

Evka dostala .... 28 eur
Danka dostala .... 28 + 6 = 34 eur
Zuzka dostala .... 34 – 12 = 22 eur

Spolu dostali 28 + 34 + 22 = **84** eur.

Evka dostala 28 eur,
Danka 34 eur,
Zuzka 22 eur.
Najviac dostala Danka, a to 34 €.

b) Vypočítame, koľko eur stál nákup každého z dievčat zvlášť. Aj teraz na riešenie úlohy použijeme rovnicu s neznámou x.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Evka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x \\ \text{Danka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2\cdot x \\ \text{Zuzka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x-3{,}60 \end{array}\right\}\ \text{spolu } \mathbf{36{,}80}\ \text{eur}$$

Utvoríme rovnicu:

$$x + 2 \cdot x + (x - 3{,}60) = 36{,}80$$
$$4x - 3{,}60 = 36{,}80 \qquad / + 3{,}60$$
$$4x = 40{,}40 \qquad / : 4$$
$$x = \mathbf{10{,}10}$$

Skúška:

Evkin nákup stál .... 10,10 eur
Dankin nákup stál .... 10,10 · 2 = 20,20 eur
Zuzkin nákup stál .... 10,10 – 3,60 = 6,50 eur
Spolu zaplatili za nákupy:
10,10 + 20,20 + 6,50 = **36,80** eur.

Evka by za nákup zaplatila **10,10 €**, **Danka 20,20 €** a **Zuzka 6,50 €**. Keby platili za svoje nákupy každá zvlášť, súpravu pier by žiadna z nich nedostala.

7. KLUB HÁDANKÁROV

Skoro každý má rád hádanky. Na škole preto založili klub hádankárov. Na stretnutia klubu si každý člen pripraví hádanku. Kto hádanku neuhádne, musí po stretnutí upratať klubovú miestnosť.
Tu sú niektoré z hádaniek na tému *Ako plynie čas*:

- Koľko rokov má moja mama, ak je **štyrikrát staršia** ako ja a **pred 5 rokmi** bola dokonca **sedemkrát staršia** ako ja?
- Syn má dnes **o 30 rokov menej** ako otec. **Pred 7 rokmi** bol otec **sedemkrát starší** ako syn.
  Koľko rokov má syn dnes?
- Otec má **38** rokov, dcéra **12** rokov a syn **14** rokov. O koľko rokov bude mať **otec toľko rokov ako jeho deti spolu**?

Riešenie 7.

Zostavíme tabuľku. Pomocou údajov v nej zostavíme rovnicu a vyriešime ju.

	teraz	pred 5 rokmi
dcéra	x	$\mathbf{x-5}$
matka	$4\cdot x$	$\mathbf{4\cdot x-5}$

Pred 5 rokmi bola matka **sedemkrát staršia ako dcéra**, preto tvar rovnice bude:

$$4\cdot x - 5 = 7\cdot(x-5)$$
$$4x - 5 = 7x - 35 \qquad / + 35 - 4x$$
$$30 = 3x \qquad / : 3$$
$$10 = x$$

Skúška:
Vek dcéry pred 5 rokmi bol:
10 – 5 = 5

Vek matky pred 5 rokmi bol:
4 · 10 – 5 = 35

Vek matky je sedemkrát väčší ako vek dcéry:
35 : 5 = 7

Matka má dnes **40 rokov** a dcéra **10 rokov**.

Ďalšie dve hádanky vyrieš **samostatne**.

8. TROCHU POHYBU

a) Akú trasu prejdem peši za 15 minút, ak idem priemernou rýchlosťou 4,5 km/h?

b) Pri akej priemernej rýchlosti prejde Jakub na bicykli 18 km za 20 minút? Rýchlosť uveď v km/h.

c) O koľko musí otec zväčšiť priemernú rýchlosť, aby na chatu prišiel autom o 12 minút skôr ako zvyčajne? Chata je vzdialená 72 km. Cesta autom mu trvá zvyčajne 1,2 hodiny.

Riešenie 8.

a) Rýchlosť vyjadríme v metroch a minútach.

za 60 minút prejdem 4 500 m

za 1 minútu prejdem 4 500 : 60 = 75 m

za 15 minút prejdem 75 · 15 = **1 125 m**

Za 15 minút prejdem **trasu dlhú 1 125 m**.

b) za 20 minút prejde Jakub na bicykli 18 km

za 1 minútu prejde 18 : 20 = 0,9 km

za 60 minút prejde 0,9 · 60 = 54 km

Jakub prejde 18 km za 20 minút **priemernou rýchlosťou 54 km/h**.

c) Vypočítame pôvodnú rýchlosť auta podľa vzorca, ktorý poznáme z fyziky (***v* – rýchlosť, *s* je dráha, *t* je čas, potrebný na prejdenie dráhy**).

$$v = \frac{s}{t} = \frac{72}{1,2} = 60$$

Pomôcka
1 hodina je 60 minút.
1 km je 1 000 m.
Pomôcť môže trojčlenka.

Pôvodná rýchlosť auta je **60** km/h.

Nová rýchlosť:

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{72}{1,2-0,2} = \frac{72}{1} = 72$$

12 minút vyjadríme v hodinách:
12 : 60 = 0,2
12 minút je 0,2 hodiny

Nová rýchlosť je **72** km/h.

Rozdiel rýchlostí je 72 – 60 = 12.

Ak chce otec prísť na chatu o 12 minút **skôr** ako zvyčajne, musí priemernú rýchlosť auta zvýšiť **o 12 km/h**.

9. RÝCHLOSŤ A ROVNICE

Za aký čas ma dobehne kamarátka, ktorá prišla na stretnutie o 30 minút neskôr a ja idem po našej dohodnutej trase rýchlosťou 6 km/h? Kamarátka, keď sa ponáhľa, ide rýchlosťou 8 km/h.

Riešenie 9.

Úlohu vyriešime pomocou rovnice. Použijeme znova poznatky z fyziky, kde sa na výpočet dráhy používa vzorec $s = v \cdot t$.

Ak chceme vypočítať **čas kamarátky,** musíme poznať aj **môj čas**, aj **trasu (km)** a **rýchlosť (km/h)**.
Môj čas nepoznáme, preto ho **označíme neznámou *x***.
Kamarátka meškala, preto má **kratší čas o pol hodiny *x* – 0,5**.
Trasa, ktorú prejdem za čas *x* (h) pri rýchlosti 6 km/h je $6 \cdot x$ (km).
Trasa, ktorú prejde kamarátka za čas *x* – 0,5 (h) pri rýchlosti 8 km/h je $8 \cdot (x - 0,5)$ (km).
Naše trasy sa majú rovnať, preto riešime rovnicu $6 \cdot x = 8 \cdot (x - 0,5)$.

$$\begin{aligned} 6x &= 8 \cdot (x - 0,5) & \\ 6x &= 8x - 4 & /-6x+4 \\ 4 &= 2x & /:2 \\ x &= 2 & \end{aligned}$$

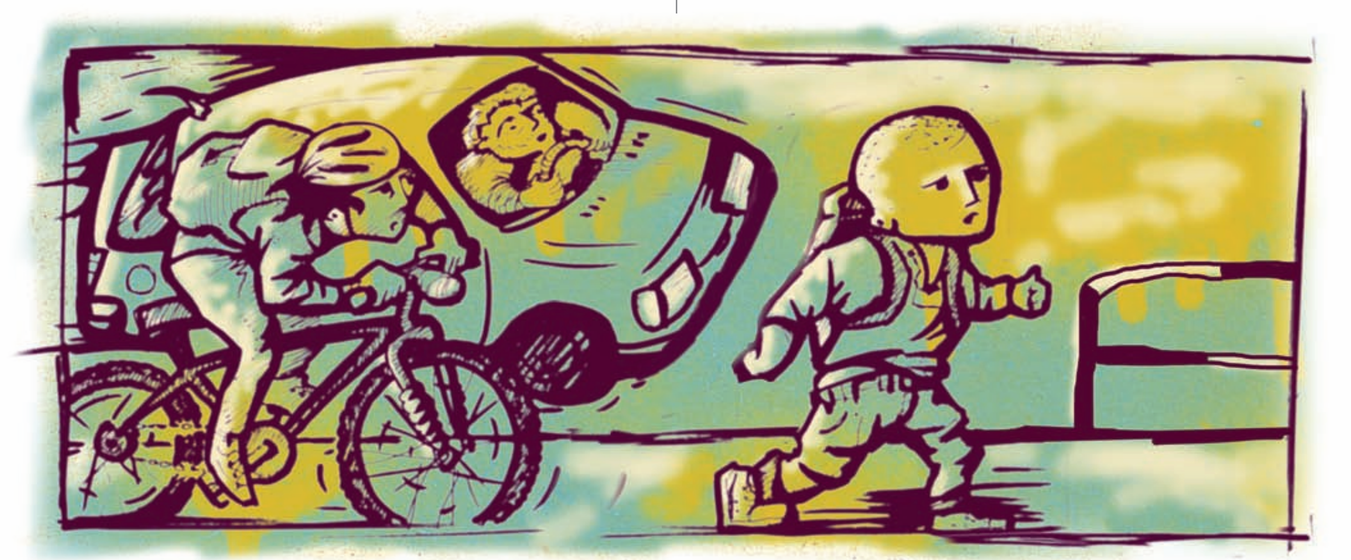
Pomôcka
Nezabudnite, že pri cestovaní – pohybe vždy ide o čas, rýchlosť a dráhu.

Skúška:
Moja trasa za 2 hodiny je 6 · 2 = 12 km.
Trasa kamarátky za 1,5 hodiny (mala 30 minút meškanie, čo je pol hodina) je 8 · 1,5 = 12 km.
Trasy sa rovnajú, riešenie je správne.

Kamarátka ma dobehne za 2 hodiny.

Niektorí z vás majú radi tabuľky.
Ukážeme si tabuľku vhodnú na zostavenie rovnice k úlohe 9.

	čas *t*	rýchlosť *v*	dráha $s = v \cdot t$
ja	x	6 km/h	$6 \cdot x$
kamarátka	$x - 0,5$	8 km/h	$8 \cdot (x - 0,5)$



10. Janko a Peter mali ísť na chatu. Chceli ísť spolu na bicykloch o 6:30 h od domu, kde býval Janko. Peter neprišiel a tak Janko odišiel z domu o 7:00 h rýchlosťou 40 km/hod. Peter, ktorý zaspal, prišiel k Jankovmu domu až o 7:30 h. Kedy Peter dostihne Janka, ak išiel od jeho domu rýchlosťou 48 km/h?

11. CESTY A ROVNICE
Z Bratislavy do Piešťan možno cestovať rýchlikom, ktorý ide priemernou rýchlosťou 140 km/h. Po tej istej trase z Piešťan do Bratislavy jazdí osobný vlak, a to rýchlosťou 60 km/h. Ak oba vlaky vyjdú z oboch miest o tej istej hodine a medzi týmito mestami je vzdialenosť 96 km, **za aký čas** sa stretnú?

Riešenie 11.

Ak chceme vypočítať, o koľko hodín sa vlaky stretnú, znovu budeme uvažovať **o dráhach.** Ak sa vlaky majú stretnúť a **idú oproti sebe**, prejdú dráhy, ktoré **sa spolu budú rovnať vzdialenosti oboch miest**, **t. j. 96 km**.
Dráhy vypočítame ako súčin času a rýchlosti vlakov (podľa vzorca $s = v \cdot t$).

Čas, ktorý oba vlaky pôjdu, nepoznáme. Označíme ho **neznámou** x.
Keďže vlaky odišli z miest o tej istej hodine, **čas**, **ktorý pôjdu, bude rovnaký.**
Dráha rýchlika $140 \cdot x$ (km)
Dráha osobného vlaku $60 \cdot x$ (km)
Vlaky idú oproti sebe a majú sa stretnúť, takže riešime rovnicu:

$$140 \cdot x + 60 \cdot x = 96$$
$$140x + 60x = 96$$
$$200x = 96 \qquad / : 200$$
$$x = 0{,}48$$

Riešením je $x = 0{,}48$ hodiny, čo je $0{,}48 \cdot 60$ minút = **28,8 minút**.

Skúška:
Dráha rýchlika je $140 \cdot 0{,}48 = 67{,}2$ km.
Dráha osobného vlaku je $60 \cdot 0{,}48 = 28{,}8$ km.
Súčet dráh rýchlika a osobného vlaku je $67{,}2 + 28{,}8 = 96$ km,
čo je vzdialenosť medzi Bratislavou a Piešťanmi.
Riešenie je správne, vlaky sa stretnú **o 0,48 h**, t. j. za **28,8 min**.
Ukážeme si tabuľku vhodnú na zostavenie rovnice k úlohe 11.

	čas t	rýchlosť v	dráha $s = v \cdot t$
rýchlik	x	140 km/h	$140 \cdot x$
osobný vlak	x	60 km/h	$60 \cdot x$
		spolu	96

12. CESTY A ROVNICE
Partnerské školy v Žiline a v Košiciach sa dohodli na výmennom pobyte. Žiaci z Košíc mali ísť na týždeň do Žiliny a žiaci zo Žiliny mali ísť do Košíc. Na pobyt cestovali žiaci autobusmi. Dohodli sa na rovnakej trase, aby sa na spoločnej trase stretli. Zo Žiliny do Košíc vyšli o 7:00 h, z Košíc do Žiliny o 8:30 h. V akej vzdialenosti od Košíc a **o ktorej hodine** sa stretli? Autobus Žilinčanov šiel priemernou rýchlosťou 84 km/h, autobus Košičanov rýchlosťou 95 km/h. Vzdialenosť medzi Košicami a Žilinou je približne 269,2 km.

Riešenie 12.

Znovu počítame dráhy. Vidíme, že **súčet dráh oboch autobusov**, bude **vzdialenosť medzi mestami** Košice a Žilina, a to 269,2 km.
Čas autobusu zo Žiliny označíme ako **neznámu** x. Čas autobusu z Košíc bude o 1,5 hodiny kratší, lebo autobus vyšiel z Košíc až o 8:30 h (zo Žiliny o 7:00 h). **Na riešenie použijeme tabuľku.**

	čas t	rýchlosť v	dráha $s = v \cdot t$
Žilina	x	84 km/h	$84 \cdot x$
Košice	$x - 1{,}5$	95 km/h	$95 \cdot (x - 1{,}5)$
		spolu	269,2

pokračovanie ▶▶

Riešenie 12. *pokračovanie*

Súčet dráh nám umožní zostaviť rovnicu: $84 \cdot x + 95 \cdot (x - 1{,}5) = 269{,}2$.

Riešením rovnice je $x =$ **2,3** hodiny, čo je 2 hodiny a 18 minút (0,3 · 60 minút).
Vypočítali sme čas, za ktorý sa stretnú.
Máme určiť **o ktorej hodine** sa stretnú: keďže 2 hodiny a 18 minút je čas autobusu zo Žiliny, pričítame ho k hodine štartu autobusu zo Žiliny:
7 hodín a 0 minút + 2 hodiny a 18 minút = **9 hodín a 18 minút**

Pri skúške správnosti riešenia úlohy vypočítame zároveň vzdialenosť od Košíc:
Dráha autobusu zo Žiliny je 84 · **2,3** = 193,2 km.
Dráha autobusu z Košíc je 95 · (**2,3** – 1,5) = 95 · 0,8 = 76 km.
Dráhy autobusov spolu sú 193,2 + 76 = 269,2 km, čo je vzdialenosť z Košíc do Žiliny.
Takže riešenie úlohy je správne.

Autobusy sa stretnú **76 km od Košíc o 9:18 h**.

Viete, že...?

„Naše lesy sú naše pľúca“.
Tak zvykneme hovoriť. Preto sa všade, kde je to možné, snažíme budovať parky, oživiť starý les, nahrádzať choré stromy zdravými, ...

13. MESTSKÝ PARK

Žiaci 9. ročníka išli sadiť mladé stromčeky do mestského parku. Vedeli, že oni to stihnú za 4 hodiny.
Sadiť stromčeky však chceli aj žiaci 8. ročníka, ktorí by to sami stihli za 5 hodín.
Za koľko hodín vysadili stromčeky v mestskom parku, ak ich sadili všetci spoločne?

Riešenie 13.

V úlohách, v ktorých pracujú všetci spolu, väčšinou počítame, koľko práce urobia **za 1 hodinu**.

Za **1 hodinu** žiaci **9. ročníka** zasadia $\frac{1}{4}$ stromčekov. Žiaci **8. ročníka** za **1 hodinu** zasadia $\frac{1}{5}$ stromčekov.

Ak budú **pracovať spolu**, tak za **1 hodinu** zasadia $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ stromčekov. Ak budú **pracovať *x* hodín**, zasadia $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot x$ stromčekov. Potom majú „urobenú celú prácu“, čo je **1 celá**. Riešime teda rovnicu: $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot x = 1$.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot x = 1$$

$$\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}\right)\cdot x = 1$$

Vyriešime zátvorku, zlomky upravíme na spoločného menovateľa.

$$\left(\frac{5}{20}+\frac{4}{20}\right)\cdot x = 1$$

$$\frac{9}{20}\cdot x = 1 \qquad / \cdot 20$$

$$9x = 20 \qquad / :9$$

$$x = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

Riešením je $x = 2\frac{2}{9}$ hodiny.

Skúška:

Deviataci zasadia za $2\frac{2}{9}$ hodiny $\frac{1}{4}\cdot 2\frac{2}{9} = \frac{5}{9}$ stromčekov. Ôsmaci zasadia za $2\frac{2}{9}$ hodiny $\frac{1}{5}\cdot 2\frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ stromčekov.

Spolu zasadia za $2\frac{2}{9}$ hodiny $\frac{5}{4}+\frac{4}{9} = 1$ celok = všetky stromčeky.

Spolu zasadili stromčeky v mestskom parku za $\mathbf{2\frac{2}{9}}$ **hodiny**.

14. GAŠTANY

Žiaci 5. a 6. ročníka zbierajú každý rok v parku **gaštany**. Dajú sa použiť ako krmivo pre zvieratá alebo na lekárske účely, prípadne na rôzne ozdobné predmety. Zbierajú ich do päťkilových alebo trojkilových vriec. Do päťkilových vriec zbierali gaštany žiaci 6. ročníka, do trojkilových vriec žiaci 5. ročníka. Keď skončili zbieranie, zistili, že spolu majú **30 vriec** a nazbierali **120 kg gaštanov**.
Koľko bolo žiakov z 5. a koľko zo 6. ročníka, ak **každý žiak** nazbieral **jedno vrece** gaštanov?

Riešenie 14.

Počet vriec nám pomôže určiť **počet žiakov**.
Ak bolo **päťkilových vriec** x kusov, tak žiakov 6. ročníka bolo x.
Trojkilových vriec bolo $30 - x$ kusov, takže žiakov 5. ročníka bolo $30 - x$.

V päťkilových bolo **5** $\cdot\, x$ kg gaštanov.
V trojkilových bolo **3** $\cdot\,(30 - x)$ kg gaštanov.

Spolu nazbierali 120 kg gaštanov, takže rovnica je:
$5 \cdot x + 3 \cdot (30 - x) = 120$

$$5x + 90 - 3x = 120$$
$$2x + 90 = 120 \qquad / -90$$
$$2x = 30 \qquad / :2$$
$$x = 15$$

Skúška:
V päťkilových vreciach bolo $5 \cdot 15 = 75$ kg.
V trojkilových vreciach bolo $3 \cdot (30 - 15) = 45$ kg.
Spolu bolo vo vreciach $(75 + 45)$ kg $= 120$ kg gaštanov.

Riešenie je správne.

Žiakov 6. ročníka bolo x, to znamená **15**.
Žiakov 5. ročníka bolo $30 - x = 30 - 15$, to znamená **15**.

Viete, že...?

Rod gaštanov (Aesculus) má asi 12 druhov stromov a krov.
Je uctievaný v Anglicku, v severnej Amerike, v Číne, ako aj v Grécku.
Vo Francúzsku naň vešali sväté obrázky.
Je bohatý na vitamíny B a C a minerály ako draslík, horčík, fosfor a železo.
Pokúste sa zistiť o gaštanoch čo najviac a nezabudnite ich chrániť.

15. ZELENÁ HLIADKA

Žiaci zo siedmych ročníkov chodia vždy v sobotu čistiť les.
Založili si Zelenú hliadku.
Zvyčajne chodia po turistických trasách. Najdlhšia trasa je označená modrou farbou. Prvú marcovú sobotu vyčistili jednu tretinu tejto trasy, druhú marcovú sobotu vyčistili zo zvyšnej časti trasy tri štvrtiny.
Koľko km im zostalo vyčistiť na tretiu marcovú sobotu?
Turistická trasa označená modrou farbou je dlhá 12,6 km.

Riešenie 15.

Prvú sobotu vyčistili **jednu tretinu** z trasy dlhej **12,6 km**:

$$\frac{1}{3} \cdot 12{,}6 = 4{,}2 \text{ km}, \quad \text{alebo} \quad \text{počítame } 12{,}6 : 3 = \mathbf{4{,}2\ km}$$

Zostalo potom vyčistiť $12{,}6 - 4{,}2 =$ **8,4 km**.
Druhú sobotu vyčistili tri štvrtiny z 8,4 km:

$$\frac{3}{4} \cdot 8{,}4 = 6{,}3 \text{ km}, \quad \text{alebo počítame } (8{,}4 : 4) \cdot 3 = 6{,}3 \text{ km}$$

Takže im ostalo vyčistiť: $12{,}6 - 4{,}2 - 6{,}3 =$ **2,1 km**.

Zelenej hliadke zostalo vyčistiť na tretiu marcovú sobotu **2,1 km** turistickej trasy.

16. PRACUJEME SPOLU – ĽUDIA AJ VECI

Okolo Edovho domu bol vysoký plot. A bol celý dočarbaný. Edo sa ho rozhodol namaľovať. Jemu samému by to trvalo 5 pracovných dní (1 pracovný deň má 8 hodín). Jeho syn predtým dokázal plot namaľovať za 3 pracovné dni. Ak budú plot maľovať spolu, koľko hodín im to bude trvať?

Riešenie 16.

Podobnú úlohu sme už riešili. V tabuľke vyjadríme množstvo práce, koľko urobí syn a koľko otec za hodinu.

	sám za	za 1 deň vykoná	za x dní vykoná	za x dní vykonajú spolu
syn	3 dni	$\frac{1}{3}$ práce	$\frac{1}{3}\cdot x$ práce	$\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{5}\cdot x=$
Edo	5 dní	$\frac{1}{5}$ práce	$\frac{1}{5}\cdot x$ práce	$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot x$ práce

Použijeme rovnicu $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot x=1$. Jej riešenie ponecháme na teba.

Ak si riešil rovnicu správne, dostaneš $x=1\frac{7}{8}$.

Skúška:

Syn za $1\frac{7}{8}$ dní vykoná $\frac{1}{3}\cdot\left(1\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{8}=\frac{5}{8}$ práce.

Edo za $1\frac{7}{8}$ dní vykoná $\frac{1}{5}\cdot\left(1\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{3}{8}$ práce.

Spolu vykonajú za $1\frac{7}{8}$ dní $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=\frac{8}{8}=1$ práce.

Riešenie úlohy je správne.

Dni vyjadríme v hodinách: $1\frac{7}{8}$ dňa = $\frac{15}{8}$ dňa = $\frac{15}{8}\cdot 8$ h = 15 h

Spolu im to bude trvať 15 hodín.

17.

a) Edovci mali na záhrade bazén. Napúšťali ho pomocou dvoch hadíc. Pomocou hrubšej by ho naplnili za 6 hodín, pomocou tenšej za 10 hodín. Edo sa chcel čo najskôr kúpať, tak použil obidve hadice naraz. Za aký čas sa bazén naplnil vodou?

b) Janka si maľovala svoju izbu. Sama by ju vymaľovala za 5 hodín. Keď maľovala 3 hodiny, pridala sa k nej kamarátka. Spolu potom domaľovali izbu za 1,5 hodiny. Koľko hodín by trvalo Jankinej kamarátke namaľovať jej izbu, keby ju maľovala sama? Bola by rýchlejšia ako Janka?

18. KAMARÁTSKE DELENIE

Rado sa sťahoval do iného mesta. Rozhodol sa podeliť so svojimi kartičkami hokejistov s kamarátmi. Prvému dal jednu tretinu, druhému polovicu zo zvyšku. Zostalo mu ešte 12 kartičiek. Koľko kartičiek Jano rozdal?

Riešenie 18.

Úlohu budeme riešiť pomocou rovnice.
Počet kartičiek je neznámy, použijeme neznámu x.

1. kamarátovi dal tretinu $\frac{1}{3}\cdot x$ **zostali mu dve tretiny (zvyšok)**

2. kamarátovi dal polovicu zo zvyšku $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x$

Zostalo mu 12 kartičiek.

Celkový počet kartičiek je x, takže použijeme rovnicu $\frac{1}{3}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x+12=x$.

pokračovanie ▶▶

Riešenie 18. *pokračovanie*

$$\frac{1}{3}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x+12=x$$
$$\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+12=x$$
$$x+x+36=3x$$
$$2x+36=3x \qquad /-2x$$
$$x=36$$

Skúška:

1. kamarátovi dal $\frac{1}{3}\cdot 36=12$ kartičiek.

2. kamarátovi dal $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 36=12$ kartičiek.

Spolu 12 + 12 + 12 = 36.
Riešenie je správne. Janko mal 36 kartičiek.

19.

Danka si delila s kamarátkami peniaze, ktoré získali predajom starých hračiek na školskej burze. Aby bola spravodlivá, Janke dala polovicu peňazí, Táni dala štvrtinu zo zvyšku. Jej ostalo 9 eur. Akú sumu v eurách vlastne Danka delila?

20.

ČO SA OPLATÍ KÚPIŤ?
V špecializovanom obchode s bicyklami predávali dva druhy mestských bicyklov. Za týždeň predali tovar za 2 940 eur. Spolu to bolo 12 bicyklov. Lacnejší druh bol po 210 eur za 1 kus, drahší bol po 350 eur za 1 kus. Skladníkovi povedali, aby objednal ten druh, ktorého sa predalo viac. Tak mu pomôž vypočítať, ktorý druh to má byť.

Riešenie 20.

Riešenie urobíme pomocou rovnice. Tú zostavíme pomocou tabuľky.
Dokončenie riešenia a skúšku ponecháme vám.

bicykle	počet	cena za jeden kus	cena za predané kusy
1. druh	x	210 €	$210 \cdot x$
2. druh	$12 - x$	350 €	$350 \cdot (12 - x)$
		spolu	2 940

Použijeme rovnicu $210 \cdot x + 350 \cdot (12 - x) = 2\,940$
Riešením je $x = 9$.
Lacnejšieho druhu sa predalo 9 kusov, drahšieho 3 kusy.
Objednať treba lacnejšie bicykle.

Viete, že...?

Za vynálezcu bicykla sa považuje Karl Friedrich Drais von Sauerbronn. Bicykel sa vtedy volal drezina. V roku 1813 zostrojil štvorkolesové vozidlo a v roku 1817 dvojkolesové, ktoré bolo z dreva a malo aj kormidlo. Aby sa dalo na ňom voziť, musel sa človek striedavo odrážať od zeme. Sedelo sa na ňom nepohodlne a nemalo brzdy. Vynález sa ale ujal. Hlavne v Anglicku, kde sa mu venovali mladí aj starí, muži i ženy.
V roku 1885 sa ukázal na svetle sveta skutočne nízky a bezpečný bicykel.
Konštruktéri William Sutton a John Starley (Angličania) ho nazvali Rover Safety.
Pozrite na internete, ako tieto bicykle vyzerali. Stojí to za to.

21.

Tomáš mal mať meniny. Rozhodol sa, že spolužiakom v triede kúpi dva druhy malých čokoládok – jeden pre dievčatá (po 30 centov za kus) a druhý pre chlapcov (po 35 centov za kus).
Za 20 čokoládok zaplatil spolu 6,60 eur. Predavačka pri pokladni bola zvedavá, koľko je v triede chlapcov a koľko dievčat. Tomáš jej počet napísal na lístok. Aké čísla tam boli?

Slovná úloha sa volá slovná asi preto, že obsahuje veľa slov.
A to sa hovorí: „*Hovoriť striebro, mlčať zlato.*“

Zisti, prečo sa niektoré úlohy volajú slovné.
Hľadaj odpovede aj u svojich spolužiakov.

22. VÝLET

Na výlet do Bojníc plánuje ísť 23 žiakov 9. ročníka z Komárna. S nimi pôjde pani učiteľka triedna, dvaja rodičia, ktorí budú mať so sebou dvojičky vo veku 5 rokov. Žiaci zisťujú, koľko ich výlet bude stáť.

- Jedna skupina žiakov zistila, že ak ich bude viac ako 20, jedna dospelá osoba môže mať vstup zdarma. Okrem toho sa dá vybaviť „rodinný lístok“ pre dve dospelé osoby (muž a žena) a jedno dieťa v cene 11 eur. Ostalo zodpovedať otázku:
  „Koľko eur bude stáť vstupné?“
- Druhá skupina žiakov zistila, že do Bojníc nemajú priame spojenie ani autobusové, ani vlakové. Bude lepšie ísť autobusom zo súkromnej prepravnej firmy. Najkratšia vzdialenosť Komárno – Bojnice im vyšla 145 km.

Z výletu – z prehliadky zámku chcú žiaci pre triednu pani učiteľku urobiť malý fotoalbum. K nákladom na výlet treba potom pripočítať použitie dvoch fotoaparátov. Pri plánovaní musia okrem počtu kilometrov počítať s týmito výdavkami: parkovné, stojné, diéty pre vodiča, mýtne, resp. diaľničné poplatky. Záleží od konkrétnej jazdy, a tak sa na konečnej cene treba dohodnúť. Základný cenník, ktorý žiakom poslali, obsahoval len dva údaje: 0,45 €/ 1 km jazdy, 7 €/ 1 h stojné. Ostatné výdavky im firma nebude účtovať. Už je možné vypočítať náklady na cestovné?

Vstupné do expozícií – nočná prehliadka

Dospelí .... 6,70 €
Deti a mládež do dovŕšenia 18 rokov /
len júl a august .... 5,00 €

Príplatky ku vstupnému

Za použitie fotoaparátu .... 2 €
Za použitie videokamery .... 5 €
Za lektorský výklad v cudzom jazyku
okrem anglického a nemeckého za 1 výpravu .... 13,30 €

Vstupné do expozícií – denné prehliadky

Dospelí 1 osoba .... 5,70 €
Deti od dovŕšenia 6 rokov do dovŕšenia 15 rokov .... 2,90 €
Deti od dovŕšenia 3 rokov do dovŕšenia 6 rokov .... 0,70 €

Pozor – je potrebné určiť, koľko hodín budú v Bojniciach. Návrh je 3 hodiny.
Na záver: Ak pôjdu priemernou rýchlosťou 80 km/h, aký čas musia plánovať na celý výlet?

Riešenie 22.

Vstupné:

Žiaci	23 · 2,90 = ... 66,70 eur
Dospelí a deti	1 dospelý .... bezplatne
	2 dospelí a 1 dieťa ... 11,0 eur
	1 dieťa .... 0,70 eur
Fotoaparáty 2:	.... 2 · 2,00 = 4,00 eur
Doprava:	
Jazda	...... 145 · 2 · 0,45 = 130,5 eur
Stojné	.... 3 · 7,00 = 21,00 eur
Spolu:	.... **233,90**

Výlet bude stáť 233,90 eur.

Celý výlet bude trvať približne 7 hodín, lebo:
(145 · 2) : 80 + 3 = **6,625**

Čas 6,625 zaokrúhlime na **7 hodín**.

23. KORČUĽOVANIE

Korčuľovanie – to je pohyb, šport a relax. Preto si šli dvaja kamaráti, Juraj a Andrej, kúpiť korčule.
Juraj dostal od rodičov 50 eur. Jeho kamarát Andrej dostal o 40 eur viac.
Jurajovi sa v obchode páčili korčule, ktoré stáli 45 eur.
Andrejovi sa páčili korčule, ktoré boli o polovicu drahšie ako Jurajove.

a) Koľko eur stáli Andrejove korčule?

Ak by chlapci kupovali korčule spolu,
dostali by za spoločný nákup 10 % zľavu.
Ak by Juraj kupoval korčule sám, dostal by len 5 % zľavu, Andrej by dostal 10 % zľavu.

b) Čo by bolo **výhodnejšie** pre chlapcov?
Spoločný nákup, pri ktorom by úsporu peňazí **delili rovným dielom,** alebo keby **každý kupoval zvlášť**?

Predavač chlapcom ponúkol ku korčuliam rukavice. Ak si ich kúpia, dá každému zľavu 5 %.

c) Ak by si každý chlapec kupoval korčule zvlášť (nie spoločne), mali by dosť peňazí na rukavice, ak stál jeden pár bez zľavy 8,70 eur?

Riešenie 23.

a) Jurajove korčule stáli **45** eur.
Andrejove korčule stáli o polovicu viac ako Jurajove: **45** + 45 : 2 = 45 + 22,5 = 67,50 eur.

b) Spolu mali chlapci za korčule zaplatiť
45 + 67,5 = **112,50** eur.
Zľava:

100 %	.... 112,50 eur
1 %	.... 112,50 : 100 = 1,125
10 %	.... 1,125 · 10 = 11,25

Zľava by bola 11,25 eur.
Polovica pre každého by bola:
11,25 : 2 = **5,625 eur**.

Juraj

100 %	... 45 eur
1 %	... 45 : 100 = 0,45 eur
95 %	... 0,45 · 95 = **42,75 eur**

Juraj by ušetril 45 – 42,5 = **2,50 eur**.

Andrej

100 %	... 67,50 eur
1 %	... 67,50 : 100 = 0,675 eur
90 %	... 0,675 · 90 = 60,75 eur

Andrej by ušetril 67,50 – 60,75 = **6,75 eur**.
Pretože polovica zo spoločného nákupu by bola 5,625 eur, pre Andreja by bol spoločný nákup nevýhodný.

c) Rukavice

100 %	... 8,70 eur
1 %	... 8,70 : 100 = 0,087
95 %	... 0,087 · 95 = **8,265 eur**

Ak by Juraj kupoval korčule zvlášť, nemal by dostatok peňazí na rukavice:
50 – 42,75 = 7,25 eur < 8,265 eur.

Ako by to bolo s **Andrejom, vypočítaj sám**.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Ak zväčšíme číslo o 30, dostaneme číslo, ktoré je štyrikrát väčšie ako pôvodné. Pôvodné číslo bolo:

A 6 B 40 C 10 D 5

2. Ak zmenšíme číslo o 15, dostaneme číslo trikrát menšie ako pôvodné. Pôvodné číslo bolo:

A 7,5 B 3,75 C 45 D 22,5

3. Erika má 126 €. Renáta má len tretinu z toho, čo Erika a Hanka o 12 € menej ako Renáta. Hanka potom má:

A 30 B 42 C 12 D 72

4. Fero má kredit na mobil 27 € na 300 minút. Mobil požičal kamarátovi s tým, že mu zaplatí za pretelefonované minúty. Kamarát v stredu pretelefonoval 12 minút, vo štvrtok 6 minút, v piatok 15 minút. Kamarát má Ferovi za tieto tri dni zaplatiť:

A 2,97 eur B 3,66 eur C 10,8 eur D 13,5 eur

5. Pri akej rýchlosti prejdeme na korčuliach 15 km za 10 minút?

A 150 km/h B 45 km/h C 90 km/h D 50 km/h

6. Ak ideme rýchlosťou 4,5 km/h, koľko prejdem za 20 minút?

A 1,5 km B 3,5 km C 9 km D 45 km

7. Táňa a Marta sa stavili, že prídu na kolieskových korčuliach do školy. Táňa trasu z domu do školy dlhú 2 700 m prešla za 18 minút, Marta trasu z domu do školy dlhú 3 600 m prešla tiež za 18 minút. O koľko km/h mala Táňa menšiu rýchlosť ako Marta?

A 3 km/h B 9 km/h C 12 km/h D 0,3 km/h

8. Róbert požičal Adamovi zo svojich úspor tri štvrtiny, čo bolo 48 eur. Róbertovi ešte ostalo:

A 12 eur B 64 eur C 16 eur D 24 eur

9. Obchodník musel dať jednu pätinu zisku do pokladne a zo zvyšku zisku jednu polovicu do banky. To, čo mu ostalo, použil na nákup nového tovaru. Ak bol zisk 1 200 eur, ostalo mu:

A 240 eur B 480 eur C 720 eur D 600 eur

10. Mám 24,60 eur. Na oslavu svojich narodenín chcem kúpiť dva druhy zákuskov. Veterníky stoja 1,80 eur, dobošky 0,60 eur. Každému hosťovi chcem dať obidva zákusky. Koľko hostí môžem pozvať?

A 10 hostí B 11 hostí C 12 hostí D 13 hostí

11. Ak má byť zlomok $\frac{n-3}{12}$ rovný číslu 0, potom n sa rovná:

A 12 B 15 C 3 D 0

12. Ak je 20% z môjho vreckového 6,80 €, moje vreckové je:

A 68 € B 13,60 € C 40,80 € D 34 €

13. Ak mám dnes dvakrát toľko rokov, ako moja sestra pred 4 rokmi, tak mám dnes:

A 4 B 8 C 12 D 16

14. Jeden záhradník by pokosil záhradu za 4 hodiny. Druhý záhradník by ju pokosil za 3 h. Ak by kosili spolu, koľko by im to trvalo?

A 12 h B $1\frac{5}{7}$ h C 7 h D $\frac{7}{12}$ h

15. Bazén by naplnili jedným prítokom vody za 3,5 h, druhým za 6,3 h. Ak by boli obidva prítoky otvorené, za koľko hodín by bazén naplnili?

A 4,9 B 2,25 C 1,4 D 2,80

24.

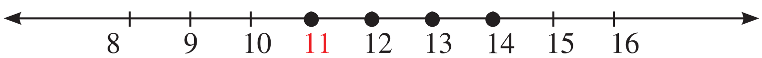
Juraj bol na zájazde s rodičmi viac ako 10 a menej ako 15 dní.
Jeho kamarát Tomáš bol na dovolenke s rodičmi menej ako 16 dní.
Kamarát Dušan bol s rodičmi na dovolenke viac ako 8 dní a menej ako 12 dní.
Nakoniec vieme, že kamaráti boli na dovolenke so svojimi rodičmi rovnaký počet dní.
Vieš povedať, aký bol ten rovnaký počet dní?

Riešenie 24.

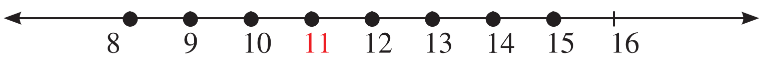
Vypíšme všetky možnosti, ktoré platia pre kamarátov.
Juraj mohol byť na zájazde alebo **11** dní, alebo 12 dní, alebo 13 dní, alebo 14 dní.
Tomáš mohol byť menej ako 16 dní, čiže 15 dní, alebo 14 dní, alebo 13 dní, alebo 12 dní, alebo **11** dní, alebo 10 dní, ...
Dušan mohol byť na dovolenke alebo 9 dní, alebo 10 dní, alebo **11** dní.
Podľa týchto údajov, mohli byť na dovolenke s rodičmi všetci traja **11** dní.

Na riešenie úlohy sme mohli použiť aj číselné osi a na nich si zaznačiť riešenie:

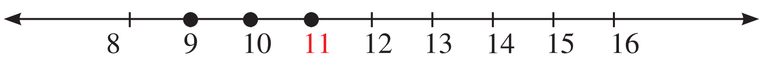
Juraj:



Tomáš (vyznačili sme len časť riešenia):



Dušan:



25.*

a) Vypíš všetky prirodzené čísla menšie ako 12 a väčšie ako 7. Zapíš úlohu pomocou nerovnice.
b) Vypíš všetky celé čísla väčšie alebo rovné číslu – 6 a menšie alebo rovné číslu 2. Zapíš úlohu pomocou nerovnice.
c) Vypíš všetky celé čísla väčšie ako – 7,2 a menšie ako + 4,6. Zapíš úlohu pomocou nerovnice.
d) Vypíš všetky celé čísla, ktoré sú menšie ako 2,5 a väčšie ako 5,2. Zapíš úlohu pomocou nerovnice.

Riešenie 25.

Najprv čísla, ktoré sú riešením úlohy vypíšeme a potom utvoríme nerovnicu.
Pri riešení úlohy používame **znaky nerovností a neznámu *x***.

a) Zadanie úlohy upravíme tak, aby sme mali menšie číslo zľava a väčšie sprava.
Potom budeme hľadať všetky prirodzené čísla väčšie ako 7 a menšie ako 12.
Sú to čísla 8, 9, 10, 11.
Platí $7 < 8, 9, 10, 11 < 12$
$7 < x < 12$
Nerovnica je $7 < x < 12$, kde x je prirodzené číslo.

b) Medzi číslami –6 a 2 (a rovné týmto číslam) sú celé čísla –6, –5, –4, –3,–2, –1, 0, 1, 2.
Platí $-6 \leq -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 \leq 2$
$-6 \leq x \leq 2$
Nerovnica je $-6 \leq x \leq 2$, kde x je celé číslo.

c) Medzi číslami –7,2 a +4,6 sú celé čísla –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4.
Platí $-7{,}2 < -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 < +4{,}6$
$-7{,}2 < x < +4{,}6$
Nerovnica je $-7{,}2 < x < +4{,}6$, kde x je celé číslo.

d) Také čísla neexistujú.
Nerovnice sú dve $5{,}2 < x$ a $x < 2{,}5$.

26.

a) Vypíš všetky prirodzené čísla deliteľné dvomi, menšie ako 12.
b) Vypíš všetky prirodzené čísla deliteľné tromi, väčšie ako 10 a menšie ako 20.
c) Koľko je prirodzených čísel deliteľných číslom 4, menších ako 40?

Riešenie 26.

Najprv vypíšeme prirodzené čísla podľa úlohy menšie alebo väčšie ako uvedené čísla.
Potom z nich vyberieme čísla podľa znakov deliteľnosti.
a) Riešením sú čísla 10, 8, 6, 4, 2.
b) Riešením sú čísla 12, 15, 18.
c) Riešením sú čísla 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4. **Je ich 9.**
Úlohy sme mohli riešiť aj pomocou číselnej osi. Pomocou číselnej osi ich vyrieš samostatne.

27.

a) Najmenej koľko eur musím mať, ak chcem kúpiť 15 rožkov po 20 centov?
b) Najmenej koľko dvojeurových mincí musím mať, ak chcem zaplatiť za 6 jogurtov, ktoré sú po 1,20 €?
c) Aspoň koľko päťeurových bankoviek musím mať, ak chcem zaplatiť za 8 čokolád v cene 2,05 € za jednu?

Riešenie 27.

Úlohy sa dajú riešiť jednoduchou úvahou. Ukážeme si riešenie úloh nerovnicami.

a) Použijeme nerovnicu, v ktorej počet eur je vyjadrený neznámou x.

$x \geq 15 \cdot 0{,}20$

$x \geq 3$ Musím mať aspoň **3 €.**

b) Použijeme nerovnicu, v ktorej počet dvojeurových mincí je vyjadrený neznámou x.
Počet musí byť **prirodzené číslo**.

$2 \cdot x \geq 6 \cdot 1{,}20$

$x \geq 3{,}60$ Musím mať aspoň **4 dvojeurové mince**.

c) Použijeme nerovnicu, v ktorej počet päťeurových bankoviek je vyjadrený neznámou x.
Počet musí byť **prirodzené číslo**.

$5 \cdot x \geq 8 \cdot 2{,}05$

$x \geq 3{,}28$ Musím mať aspoň **4 päťeurové bankovky**.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Prirodzené číslo väčšie ako 8,5 a menšie ako 9,5 je:

A 8 B 8,5 C 7,5 D 9

2. Prirodzené číslo menšie alebo rovnajúce sa číslu 6,2 a väčšie ako $\frac{11}{2}$ je:

A 6 B 7 C 5 D 8

3. Prirodzené číslo deliteľné číslom 3 a menšie ako 12 je:

A 12 B 11 C 10 D 9

4. Danka má menej pier ako Hanka, ktorá ich má 8. Má ich však viac ako Janka, ktorá ich má 5. Danka môže mať

A 8 pier B 5 pier C 7 pier D 13 pier

5. Filip má menej eur ako Dano, ktorý ich má menej ako 10. Má ich však viac ako Juraj, ktorý ich má viac ako 5. Filip môže mať

A 7 € B 10 € C 5 € D 15 €

6. Na nákup 10 žemlí po 0,45 eur potrebujem aspoň:

A 5 € B 3 € C 4 € D 6 €

7. Koľko dvojeurových mincí potrebujem na nákup 15 rožkov po 25 centov?

A 3 B 4 C 5 D 2

4 Súmernosť v rovine

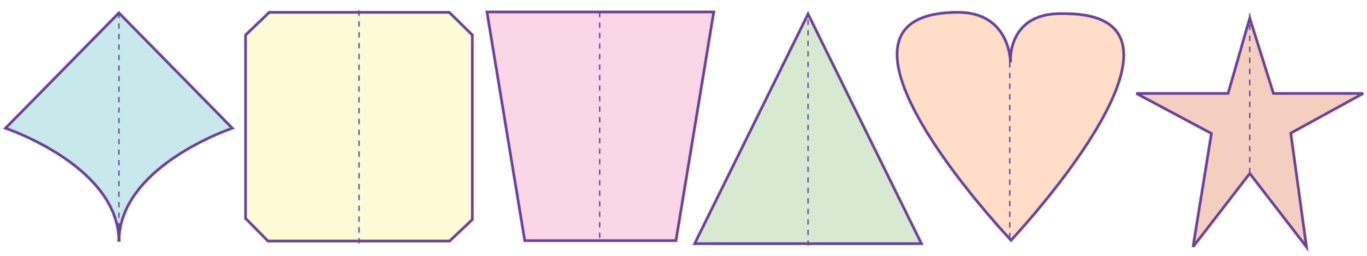
4.1 Osová súmernosť, os súmernosti. Konštrukcia obrazu v osovej súmernosti

Budovy, domy, obchody, garáže, veci, ktoré používame každý deň, všetko pripomína **útvary z geometrie**.
Budovy sú ako **kvádre**, **kocky**,
strechy sú ako **ihlany či kužele**,
steny miestností v budovách pripomínajú **štvorce**, **obdĺžniky**, **lichobežníky**,
plocha monitora počítača pripomína **obdĺžnik**,
plocha dosky stolíka pod počítačom vyzerá ako **obdĺžnik**,
obrusy, **periny**, **deky** vyzerajú ako **štvorce** alebo **obdĺžniky**...

Skúste opísať **geometrické útvary**, ktoré sa skrývajú v týchto hádankách:

» ***Má ho každý dom, vchádza sa ním doň.***
» ***Bez neho sa ani auto nepohne.***
» ***Rovná ako diaľnica.***
» ***Letecky spája dve miesta.***
» ***Je na konci noža.***

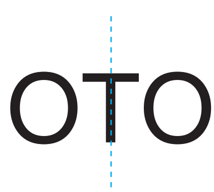
Vystrihnite niekoľko pekných tvarov na odkazy.
Vezmite hárok papiera, zložte ho na polovicu a potom vystrihnite tvar, aký sa vám páči.
Tým, že **papier preložíte na polovicu**, **získate pravidelný – súmerný tvar**.
Tu je niekoľko jednoduchých vzorov. Čiarkovaná čiara je na mieste, kde je papier preložený.



O všetkých týchto tvaroch hovoríme, že sú **osovo súmerné**.
Čiarkovaná čiara (zohnutie papiera na polovice) je **os súmernosti** vystrihnutých tvarov.

Osovo súmerné sú aj niektoré slová alebo mená.
Napríklad slovo **HOD** je osovo súmerné.

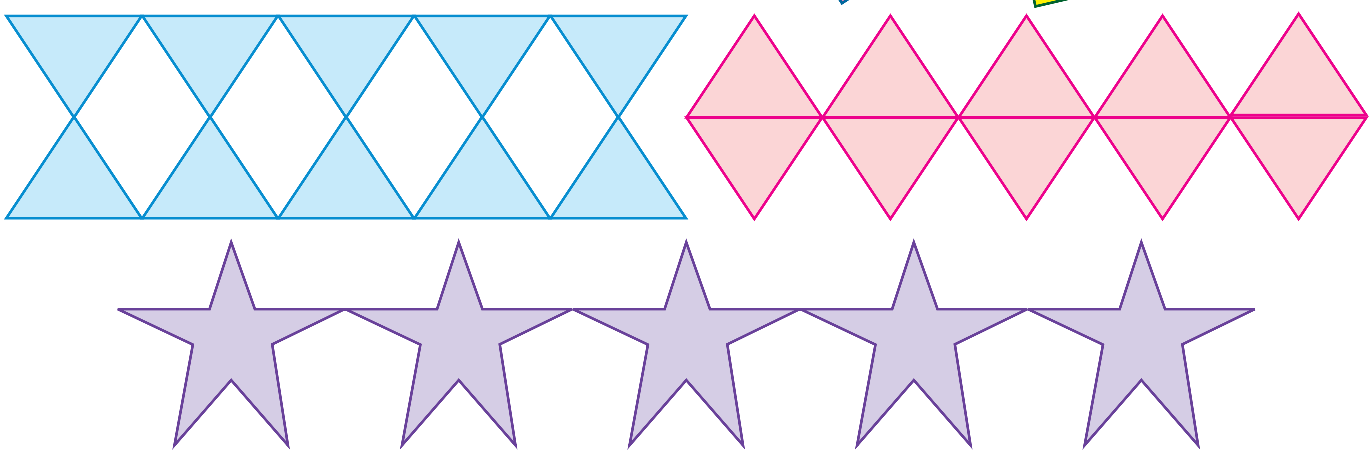
Meno **OTO** je osovo súmerné.



Kedy budú útvary osovo súmerné?
Keď budú mať os súmernosti...
... keď ich budeme môcť „rozdeliť na dve rovnaké polovice“.
Os súmernosti označujeme o.
Ak má útvar viacero osí súmernosti, píšeme o_1, o_2, o_3, ...

Problémová úloha
Vypíšte veľké tlačené písmená z abecedy, ktoré sú osovo súmerné. Uveďte aspoň štyri príklady slov, ktoré sú osovo súmerné.

Problémová úloha
Zdobíme si triedu na karneval – robíme girlandy. Navrhnite spôsob, ktorým sa dajú vytvoriť z papiera farebné girlandy znázornené na obrázkoch.



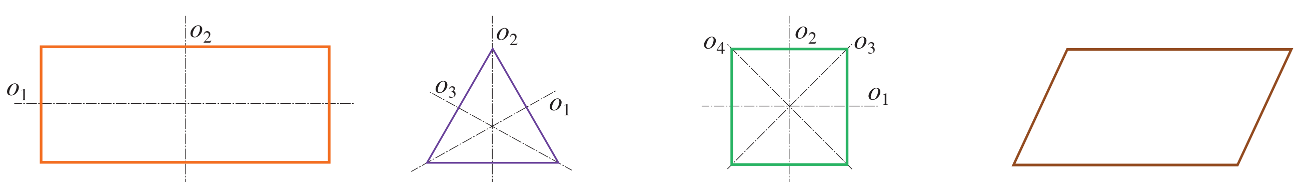
1. **Hľadáme osi súmernosti**
Zisti, ktoré z uvedených rovinných útvarov sú osovo súmerné:

Projektová úloha
Niekedy hovoríme o pravej a nepravej osovej súmernosti. Nájdite informácie o nich a vypracujte projekt v Power Pointe.

obdĺžnik | rovnostranný trojuholník | štvorec | kosodĺžnik

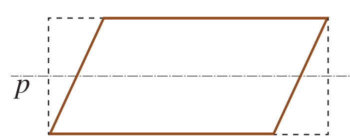
Riešenie 1.

Ak má byť útvar **osovo súmerný**, musí mať **os súmernosti**.
Hľadáme **osi súmernosti** – zisťujeme, či sa **dajú dané tvary rozdeliť na dve rovnaké polovice**.
A tiež, či je viac takýchto spôsobov.



obdĺžnik | rovnostranný trojuholník | štvorec | kosodĺžnik

- **Obdĺžnik je** osovo súmerný, má **dve** osi súmernosti.
- **Rovnostranný trojuholník je** osovo súmerný, má **tri** osi súmernosti.
- **Štvorec je** osovo súmerný, má **štyri** osi súmernosti.
- **Kosodĺžnik nie je** osovo súmerný. Dá sa rozdeliť na 2 ďalšie kosodĺžniky, ale preložením podľa priamky p vznikne obdĺžnik.



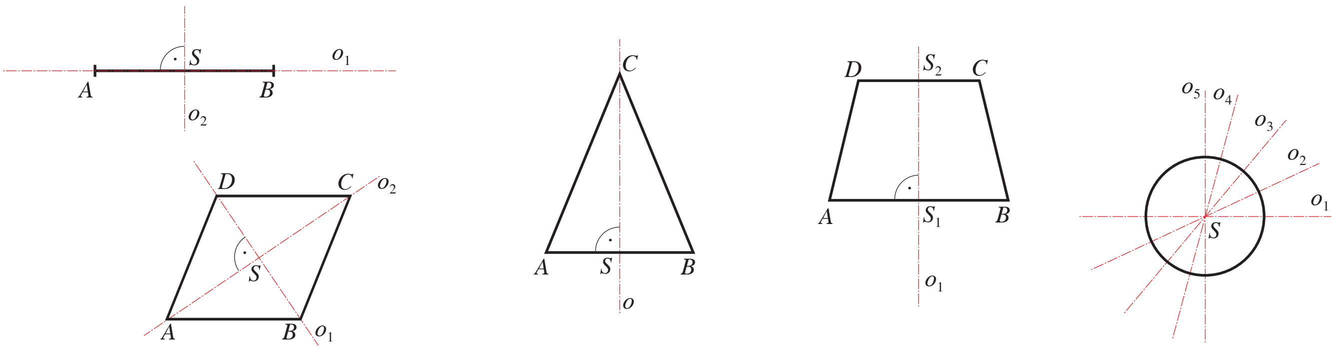
2. Zisti, ktorý z útvarov je osovo súmerný:
úsečka, priamka, polpriamka,
rovnoramenný trojuholník, pravouhlý trojuholník,
kosoštvorec,
rovnoramenný lichobežník, pravouhlý lichobežník,
kruh, kružnica.
Napíš, koľko majú osí súmerností.

Riešenie 2.

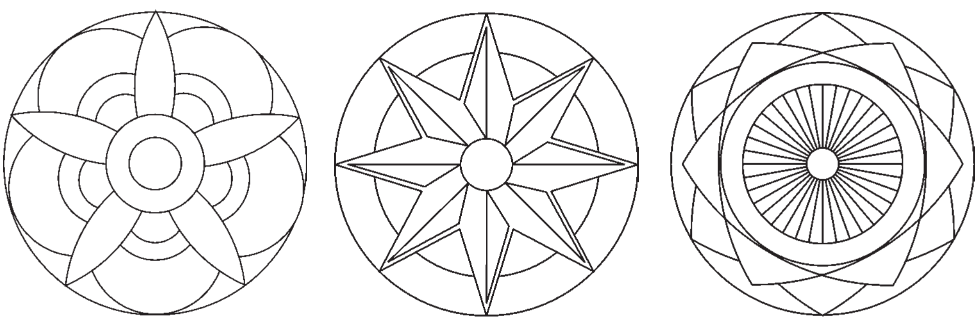
Úlohu môžeme vyriešiť tak, že útvary nakreslíme na výkres. Potom vystrihneme tie, ktoré sa dajú vystrihnúť. Pokúsime sa zložiť ich na polovice tak, aby sa prekrývali.
Osovo súmerné sú:
úsečka, priamka, rovnoramenný trojuholník, kosoštvorec, rovnoramenný lichobežník, kruh, kružnica.

- Úsečka má dve osi súmernosti.
- Priamka má nekončený počet osí súmernosti.
- Rovnoramenný trojuholník má jednu os súmernosti.
- Kosoštvorec má dve osi súmernosti.
- Rovnoramenný lichobežník má jednu os súmernosti.
- Kruh a kružnica majú nekonečný počet osí súmernosti .

Úloha sa dá riešiť aj **jednoduchou úvahou**, ak vieme **presne opísať daný útvar a jeho vlastnosti**.

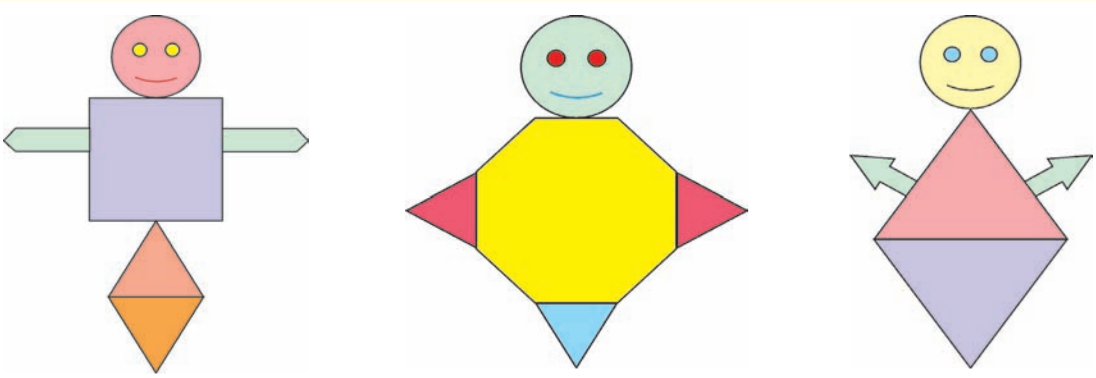


3. Na obrázku sú kresby, ktoré pripomínajú kvety. Zisti, či sú osovo súmerné. Osi súmernosti nakresli.



Projektová úloha
Obrázky v úlohe 3 sú mandaly. Zistite význam slova **mandala**. Spracujte informácie o mandalách vo forme článku do školského časopisu.

4. Na obrázku sú rôzne postavičky, ktoré z farebného papiera robili mladší žiaci.
Zisti, ktoré z nich sú osovo súmerné.



Riešenie 4.

Úloha sa dá riešiť **jednoduchou úvahou** tak, že opíšeme **z akých útvarov** sa postavičky skladajú a potom presne **opíšeme daný útvar a jeho vlastnosti**. Všetky sú osovo súmerné.

5. HRÁME SA S TVARMI

a) Utvor zo štyroch rovnostranných trojuholníkov osovo súmerný útvar.
Pokús sa ich vytvoriť čo najviac.

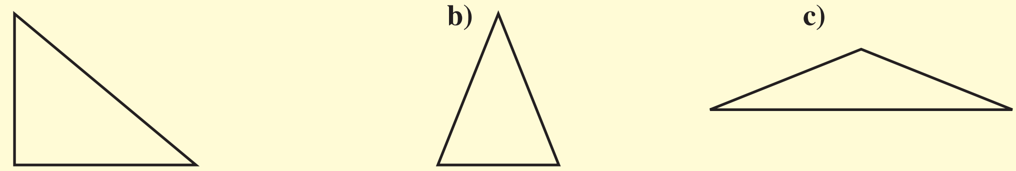
b) Máš jeden štvorec so stranou 4 cm a štyri rovnostranné trojuholníky so stranou 4 cm.
Utvor z nich osovo súmerný útvar. Pokús sa ich vytvoriť čo najviac.

Ako narysovať útvar tak, aby bol osovo súmerný?
Využijeme **os** súmernosti.

6. DOKRESĽOVAČKA

Prerysuj si dané útvary do zošita. Potom dokresli k útvaru ďalšiu časť tak, aby vznikol osovo súmerný útvar.

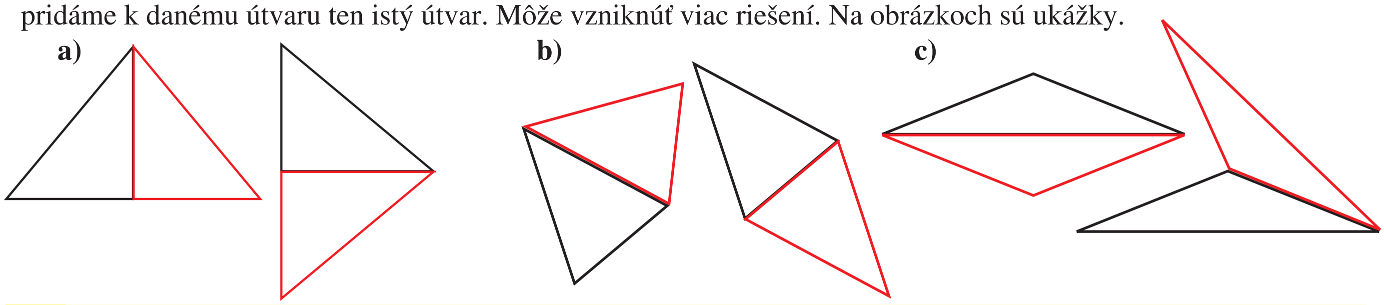
a) **b)** **c)**



Riešenie 6.

Riešenie úlohy je jednoduché. Zmeriame strany trojuholníkov a zostrojíme ich pomocou pravítka a kružidla. Potom pridáme k danému útvaru ten istý útvar. Môže vzniknúť viac riešení. Na obrázkoch sú ukážky.

a) **b)** **c)**



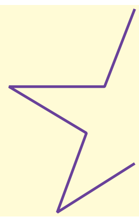
7.

a) Nakresli do zošita štvorec a obdĺžnik tak, aby mali spoločnú jednu stranu.
Potom ich doplň o jeden geometrický útvar tak, aby vznikol osovo súmerný útvar.

b) Nakresli do zošita rovnostranný trojuholník a rovnoramenný trojuholník.
Potom k nim pridaj taký útvar, aby vznikol osovo súmerný útvar.

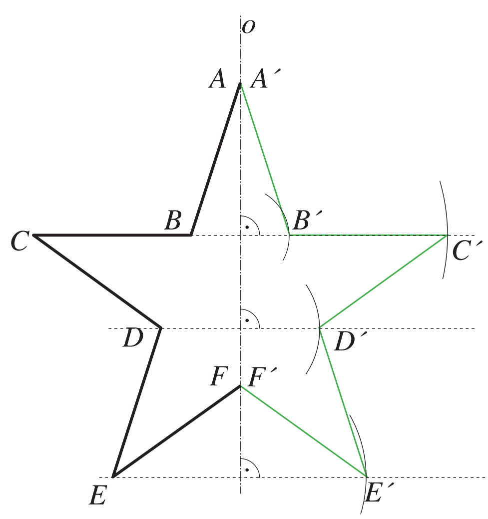
8. HVIEZDIČKA

Dokresli hviezdičke chýbajúce časti tak, aby mala pravidelný tvar.

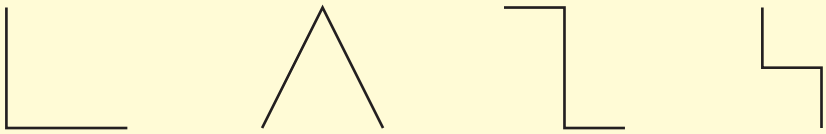


Riešenie 8.

Použijeme **os súmernosti** ***o***, pravítko s ryskou a kružidlo.
Označíme vrcholy hviezdičky *A, B, C, D, E, F*.
Na druhej strane osi k nim nájdeme osovo súmernú dvojicu.
Dvojicu ku každému bodu označíme pomocou čiarky:
A´, B´, C´, D´, E´, F´.
Použijeme **kolmice na os súmernosti a kružnicové oblúky**, aby sme zachovali **vzdialenosti – dĺžky**...
Kružnicový oblúk má stred v priesečníku osi súmernosti a kolmice vedenej z vrcholu.
Body *A, B, C, D, E, F* nazývame **vzory**.
Body *A´, B´, C´, D´, E´, F´* nazývame **obrazy**.
Body *B, B´, C, C´, D, D´* a *E, E´* nazývame **súmerne združené podľa osi súmernosti** *o*, alebo len **osovo súmerné**.
Body, ktoré ležia na osi *A, A´* a *F, F´*, nazývame **samodružné**, vzor a obraz splývajú, sú totožné.



9. Dokresli chýbajúcu časť útvaru tak, aby bol osovo súmerný.



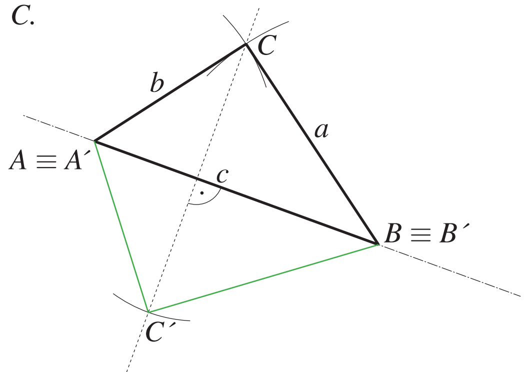
Pomôcka
Označ si vrcholy útvarov a použi os súmernosti.

10. RYSUJEME TROJUHOLNÍK 1

Zostroj obraz trojuholníka ABC so stranami $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm v osovej súmernosti, ak **os o** je **priamka AB.**

Riešenie 10.

Narysujeme trojuholník ABC pomocou pravítka a kružidla.
Naznačíme os súmernosti – priamku AB a zobrazíme body A, B, C.
Body A a B sú **samodružné**, platí $A \equiv A'$ a $B \equiv B'$.
Bod C zobrazíme (prenesieme na druhú stranu osi) pomocou kolmice na os súmernosti a kružnicového oblúka, aby sme zachovali vzdialenosti.



11.

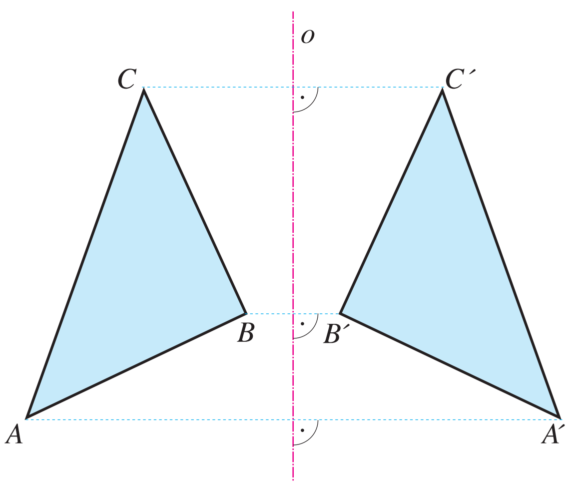
a) Narysuj trojuholník ABC a zostroj jeho obraz podľa osi súmernosti o, ak os o je priamka BC.
b) Narysuj trojuholník ABC a zostroj jeho obraz podľa osi súmernosti o, ak os o je priamka AC.

12. RYSUJEME TROJUHOLNÍK 2

Daný je trojuholník ABC a os o, ktorá nepretína strany trojuholníka.
Zostroj obraz $A'B'C'$ trojuholníka ABC v osovej súmernosti danej osou o.

Riešenie 12.

V osovej súmernosti je bod A' obrazom vrcholu A, bod B' obrazom vrcholu B a C' je obrazom vrcholu C.
Obraz $A'B'C'$ trojuholníka ABC obsahuje obrazy všatkých bodov trojuholníka ABC a žiadne iné.

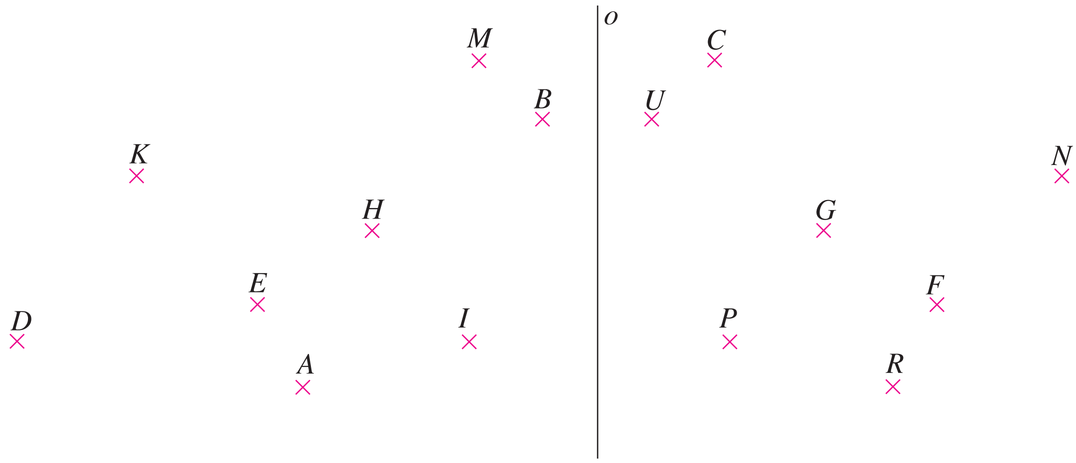


13.

a) Narysuj trojuholník ABC a zostroj jeho obraz podľa osi súmernosti o, ak os o nepretína strany trojuholníka.
b) Narysuj trojuholník ABC a zostroj jeho obraz podľa osi súmernosti o, ak os o pretína dve strany trojuholníka.

14. Ktoré z arabských a rímskych číslic sú osovo súmerné?

15. HLAVOLAM
Nájdi obrazy bodov z horného riadka tabuľky, pričom priamka o je os súmernosti.
Riešením je ukončenie nasledujúcej vety:
Vzory a obrazy – to je aj oblasť kultúry a ...



vzor	*B*	*C*	*F*	*K*	*P*	*R*
obraz						

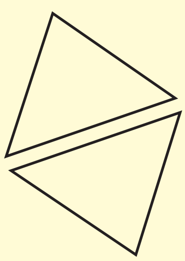
Projektová úloha
Pokúste sa na počítači vytvoriť zaujímavý obrázok pomocou osovo súmerných útvarov.

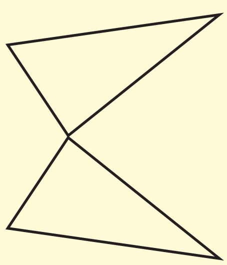
16. Zostroj obraz štvorca $ABCD$ so stranou dĺžky 5 cm v osovej súmernosti, ak os súmernosti je priamka o prechádzajúca bodmi X, Y, pričom $X \in AB$, $Y \in BC$.

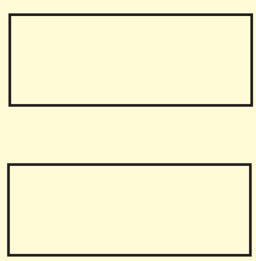
17. Zostroj obraz obdĺžnika $KLMN$ v osovej súmernosti podľa osi $o = KM$, ak sú jeho strany dlhé 4 cm a 3 cm.

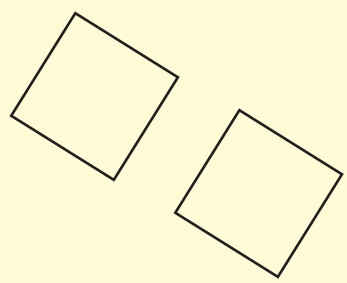
18. Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$, v ktorom $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $v = 3$ cm.
Zostroj jeho obraz v osovej súmernosti podľa osi $o = AC$.

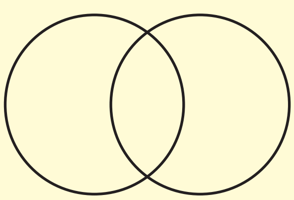
19.* Na obrázku sú dvojice osovo súmerných útvarov. Zostroj k nim osi súmernosti.

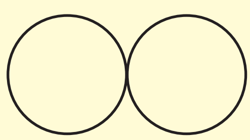
a)


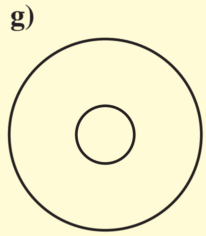
b)


c)


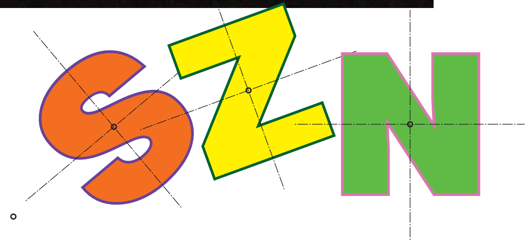
d)


e)


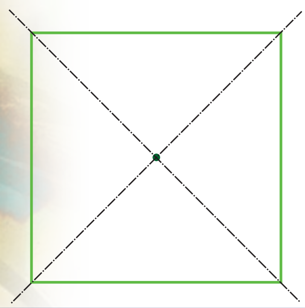
f)


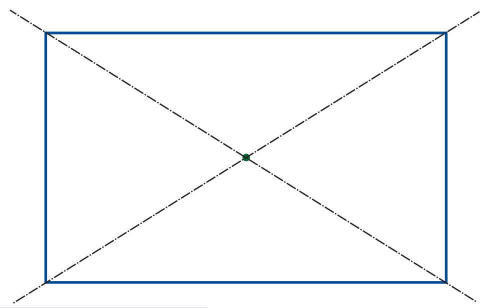
g)


4.2 Stredová súmernosť, stred súmernosti. Konštrukcia obrazu v stredovej súmernosti



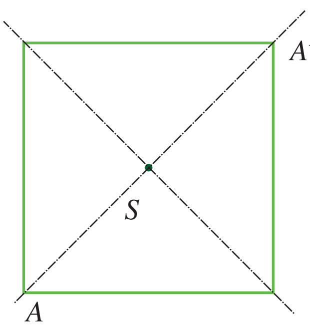
Na predchádzajúcich stranách sme vysvetlili osovú súmernosť.
Ešte si predstavíme **stredovú súmernosť**.
Stredovo súmerné sú napríklad písmená S a Z, dokonca aj písmeno N.
Stredovo súmerný je aj **štvorec** a **obdĺžnik**.
Prečo?
Majú stredy súmernosti.

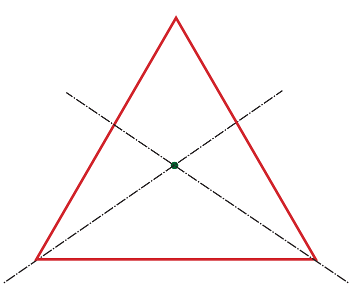


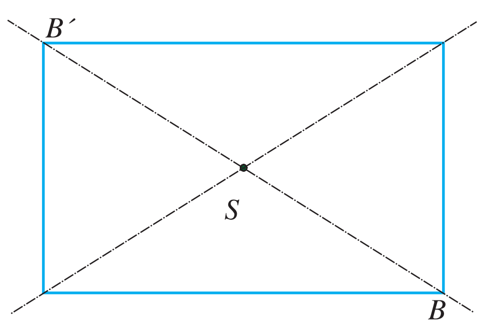


Stred súmernosti je bod,
od ktorého majú stredovo súmerné body,
napríklad **vrcholy** útvarov **rovnakú vzdialenosť**.

Či je to postačujúca definícia, uvidíme po vyriešení nasledujúcich úloh.
Pozri sa na body A a A' v štvorci a na body B a B' v obdĺžniku.

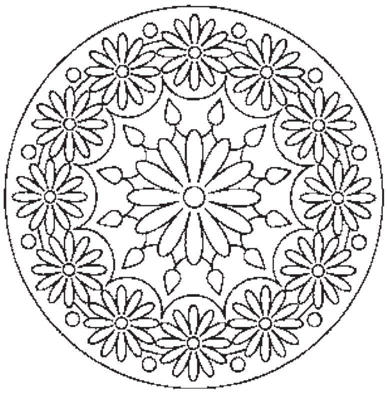
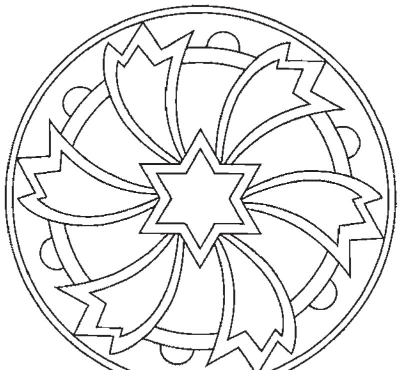
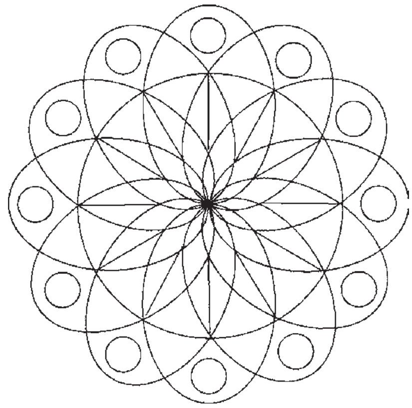






Stred súmernosti zvykneme označovať S. Platí, že **vzdialenosť** AS **je taká istá** ako **vzdialenosť** SA'.
Bod A nazývame **vzor** a **bod** A' **obraz**. Patrí trojuholník k stredovo súmerným útvarom?

Stredovo súmerné sú aj tieto útvary a ako vidíme, čo je stredovo súmerné, môže byť **aj osovo súmerné**.

1. Ktoré z arabských a ktoré z rímskych číslic sú stredovo súmerné?
Ktoré z písmen našej veľkej abecedy sú stredovo súmerné?

2. Nakresli geometrické útvary, ktoré sú stredovo súmerné. Vyznač stred súmernosti týchto útvarov.

3. HRÁME SA S TVARMI

a) Utvor zo štyroch rovnostranných trojuholníkov stredovo súmerný útvar.
Pokús sa ich vytvoriť čo najviac.

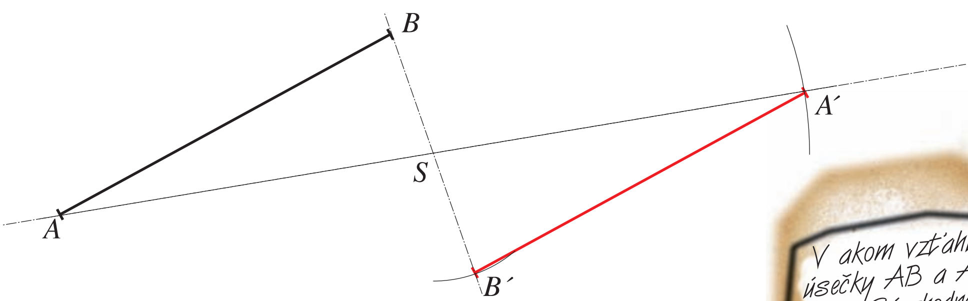
b) Máš jeden štvorec so stranou 3 cm a štyri rovnostranné trojuholníky so stranou 3 cm.
Utvor z nich stredovo súmerný tvar. Pokús sa ich vytvoriť čo najviac.

Ako zostrojíme stredovo súmerné útvary?

4. Daná je úsečka *AB*. Zostroj jej obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* – stred súmernosti – neleží na úsečke *AB*.

Riešenie 4.

Narysujeme úsečku *AB*. Vedľa nej zvolíme bod *S*.
Z koncových bodov úsečky vedieme cez bod *S* **priamky *AS*** a ***BS***.
Nakoniec kružidlom nanesieme vzdialenosti *AS* a *BS* z bodu *S* na **opačné strany**, **za bod *S***.



5.

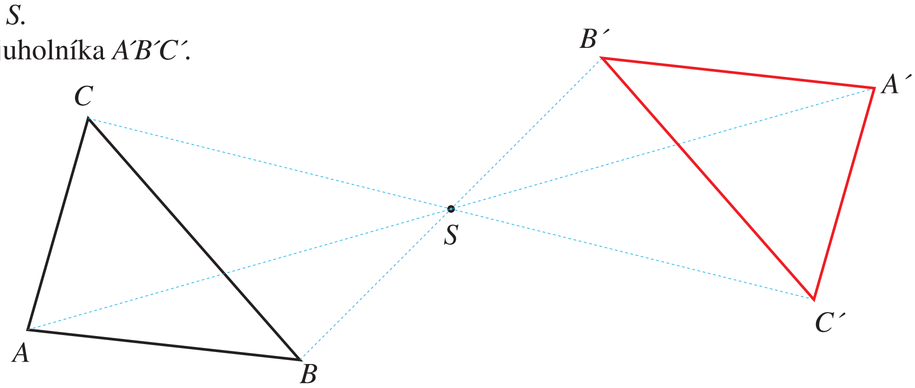
a) Narysuj úsečku dlhú 4 cm. Zostroj jej obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* leží mimo úsečky.
b) Narysuj úsečku dlhú 5 cm. Zostroj jej obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* leží na úsečke.
c) Narysuj úsečku dlhú 6 cm. Zostroj jej obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* je stredom úsečky.

6. RYSUJEME TROJUHOLNÍK 3

Daný je trojuholník *ABC* bod *S*, ktorý leží mimo neho. Zostroj útvar *A´B´C´*, ktorý je obrazom trojuholníka *ABC* v stredovej súmernosti so stredom *S*.

Riešenie 6.

Narysujeme Δ *ABC* a bod *S*, ktorý leží mimo neho. Postupne zostrojíme obrazy *A´B´C´* bodov *A, B, C,* v stredovej súmernosti podľa stredu *S.*
Trojuholník *ABC* sa zobrazil do trojuholníka *A´B´C´.*
Platí: $|AS| = |SA'|$
$|BS| = |SB'|$
$|CS| = |SC'|$

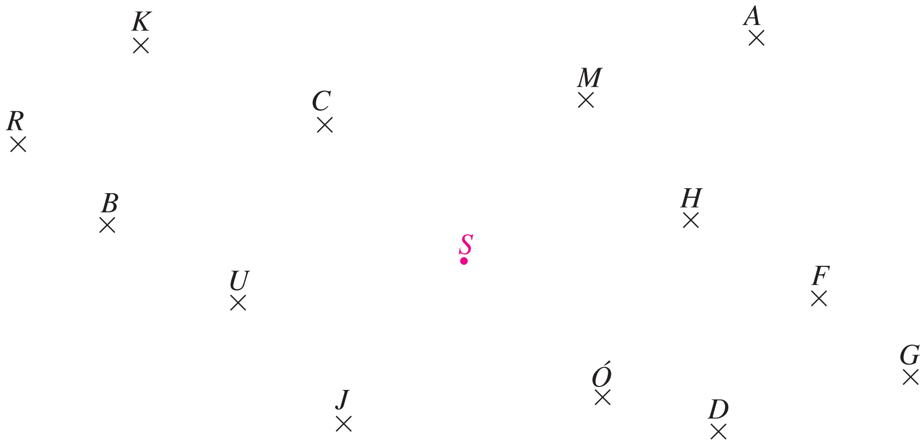


7.

a) Narysuj trojuholník *ABC*. Zostroj jeho obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* je totožný s bodom *B*.
b) Narysuj trojuholník *ABC*. Zostroj jeho obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* leží vo vnútri trojuholníka.
c) Narysuj trojuholník *ABC*. Zostroj jeho obraz v stredovej súmernosti, ak bod *S* leží mimo trojuholníka.

8. TROCHU ZÁBAVY

Nájdi obrazy bodov z horného riadka tabuľky, pričom bod *S* je stred súmernosti.



Odpoveď:

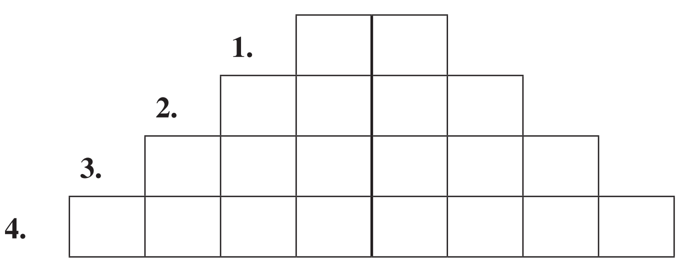
vzor	*B*	*C*	*G*	*H*	*J*
obraz					

Projektová úloha
V tabuľke vyšlo slovo – zistite na internete, čo znamená a čo má spoločné s matematikou.

Symetria a počítanie s číslami

Tento zdvojený roháčik – doplňovačka je vlastne ukážkou osovej symetrie.
Vypĺňa sa smerom zľava doprava – vodorovne. Vnútorná najhrubšia čiara nahradzuje desatinnú čiarku.
Číslice jednotlivých výsledkov sa zapisujú do každého štvorčeka zvlášť.

1. 0,5 + 0,6 = **2.** 31,4 + 0,83 = **3.** 104,39 + 92,301 = **4.** 2 153,402 1 + 901,048 2 =



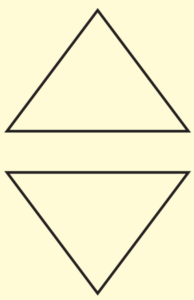
9. Zostroj obraz štvorca $ABCD$ so stranou 4 cm v stredovej súmernosti, ak stred súmernosti je bod $S \in BC$ – stred strany BC.

10. Zostroj obraz obdĺžnika $KLMN$ v stredovej súmernosti podľa stredu S, ak sú jeho strany dlhé 4 cm a 3 cm. Bod S je priesečníkom uhlopriečok obdĺžnika.

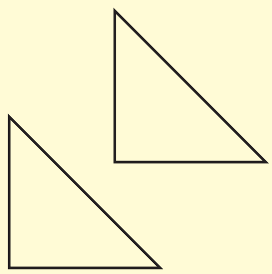
11. Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$, v ktorom $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $v = 3$ cm. Zostroj jeho obraz v stredovej súmernosti podľa stredu $S \equiv C$.

12.* Na obrázku sú dvojice stredovo súmerných útvarov. Zostroj stred súmernosti týchto útvarov.

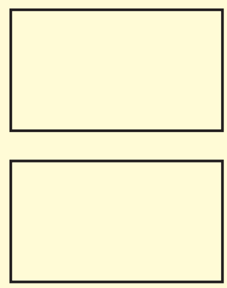
a)



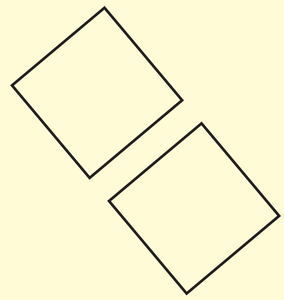
b)



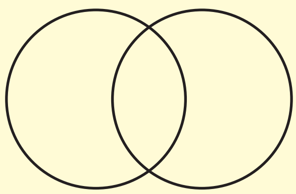
c)



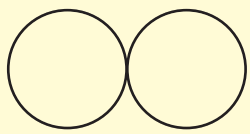
d)



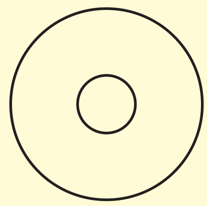
e)



f)



g)



13.** Narysuj kosoštvorec $ABCD$ so stranou $a = 3$ cm a $\sphericalangle DAB$, $|\sphericalangle DAB| = 40°$. Najprv zostroj jeho obraz $A'B'C'D'$ v stredovej súmernosti podľa bodu S, $S \equiv C$. Potom zostroj obraz kosoštvorca $A'B'C'B'$ súmerný podľa osi o, $o \equiv A'B'$. Čo platí o všetkých troch útvaroch?

Zapamätajte si

Osová súmernosť je určená **priamkou**, ktorú nazývame **os súmernosti *o***.
Osová súmernosť zachováva vzdialenosti bodov a veľkosti uhlov.
Osovú súmernosť niekedy nazývame **zrkadlový obraz**.
Pôvodný útvar pri konštrukciách osovej súmernosti nazývame **vzor**.
Zostrojený útvar v osovej súmernosti nazývame **obraz**.
Útvar je **osovo súmerný**, ak mu môžeme zostrojiť os súmernosti.
Body útvaru, ktoré ležia na osi súmernosti, nazývame **samodružné body** (vzor a obraz bodu sú totožné).

Stredová súmernosť je určená **bodom**, ktorý nazývame **stred súmernosti *S***.
Stredová súmernosť zachováva vzdialenosti bodov a veľkosti uhlov.
Pôvodný útvar pri konštrukciách stredovej súmernosti nazývame **vzor**.
Zostrojený útvar v stredovej súmernosti nazývame **obraz**.
Útvar je **stredovo súmerný**, ak mu môžeme zostrojiť stred súmernosti.

Vyskúšajte sa – opakovanie

Na záver 1. časti učebnice uvádzame také úlohy, ako ste riešili v predchádzajúcich kapitolách.
Z nich je 7 s výberom odpovede a 7 s krátkou odpoveďou, teda podobné, aké sa riešia aj v Monitore.

1. Ktorý z uvedených výrazov má hodnotu menšiu ako 100,001?

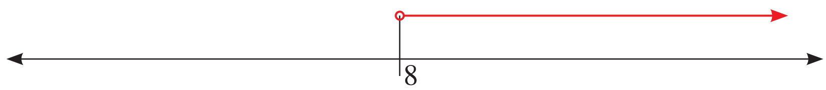
A $6{,}3 \cdot 103 + 5 \cdot 101 - 5{,}9 \cdot 10^2 - 0{,}08 \cdot 10^0$

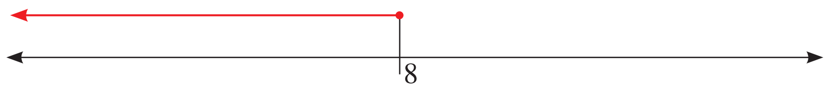
B $0{,}25 \cdot 10^4 - 0{,}3 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^0 - 6{,}1 \cdot 10^2$

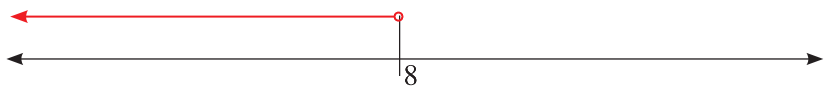
C $6 \cdot 10^2 - 0{,}32 \cdot 10^3 + 0{,}01 \cdot 10^1 - 0{,}01 \cdot 10^4$

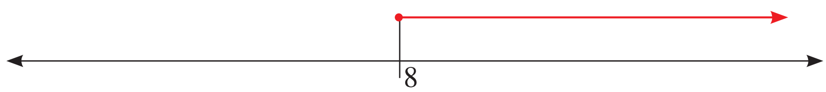
D $4{,}5 \cdot 102 - 0{,}23 \cdot 103 - 0{,}015 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^1$

2. Nech je x je reálne číslo. Potom riešenie nerovnice $5x - 3 \leq 2 \cdot (x + 8) + 5$ je znázornené na číselnej osi:

A


B


C


D


3. Pre riešenie rovnice $2 \cdot (3x - 4) - 3x = x - (3x - 2)$ platí:

A je to nepárne číslo

B je väčšie alebo sa rovná číslu 2

C je to desatinné číslo

D je to záporné číslo

4. Rovnica $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{2} = 1 - \frac{x}{8}$ má také isté riešenie ako rovnica:

A $0{,}75 \cdot x + \frac{1}{8} \cdot x = 1 + 0{,}5 \cdot (x - 1)$

B $0{,}75x - 4 \cdot (x - 1) = 1 - 0{,}125x$

C $\frac{3x}{4} + \frac{x-1}{2} - 1 = \frac{x}{8}$

D $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{8} = 1 - \frac{3x}{4}$

5. Pre riešenie rovnice $\frac{3x-5}{2x+1} = 1$ platí:

A $x = 6,\ x \neq 2$

B $x = 6,\ x \neq 0{,}5$

C $x = 6,\ x \neq 0{,}5$

D $x = 6,\ x \neq 2$

6. RÝCHLOSŤ A VESMÍR
Rýchlosť svetla je približne $3 \cdot 10^5$ km/s. Za koľko sekúnd bude vesmírna loď, ktorá letí rýchlosťou svetla vzdialená od Zeme $2{,}841 \cdot 10^4$ km?

A $9{,}47 \cdot 10^{-1}$

B $9{,}47 \cdot 10^0$

C $9{,}47 \cdot 10^{-2}$

D $9{,}47 \cdot 10^{-3}$

7. RÝCHLOSŤ A ŠKOLA
Juraj a jeho sestra chodia do tej istej školy po tej istej trase. Častokrát idú na kolieskových korčuliach. Juraj ide zvyčajne priemernou rýchlosťou 8 km/h, jeho sestra rýchlosťou 12 km/h. Vzdialenosť medzi školou a ich domom je 2 400 m. O koľko minút neskôr príde Juraj zo školy domov ako jeho sestra?

A o 4 minúty

B o 18 minút

C o 12 minút

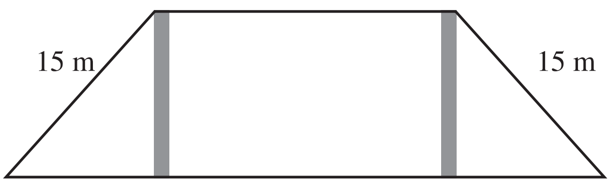
D o 6 minút

8. RÝCHLOSŤ A ZÁHRADA

Filip by malý záhradný bazén vyčistil sám za 4 hodiny. Spolu so sestrou by ho vyčistili za 3 hodiny. Za koľko hodín by Filipova sestra vyčistila bazén sama?

9. ZÁHRADA

Na obrázku je záhrada tvaru rovnoramenného lichobežníka s vyznačenými chodníkmi spájajúcimi protiľahlé strany. Chodníky majú byť široké 1 meter. Chcú ich vydláždiť zámkovou dlažbou. Vypočítajte, akú plochu treba vydláždiť. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.



10. Zostrojte trojuholník ABC, ak je daná strana $c = 4{,}5$ cm, ťažnica na stranu c je $t_c = 3$ cm a $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Zmerajte stranu a, jej dĺžku uveďte v mm.

11. Vypočítajte dĺžku ramena BC v pravouhlom lichobežníku $ABCD$, ak je dané: $|AB| = 12{,}5$ cm, $|CD| = 3{,}5$ cm, $|AD| = 6$ cm. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

12. Na jednej štvrtine pozemku je dom, na jednej tretine zvyšku pozemku je zeleninová záhrada. Zvyšok pozemku (35 m^2) je pokrytý dlažbou. Aká je celková výmera pozemku? Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta a uveďte v m^2.

13. Dosaďte dané hodnoty do vzorca a vypočítajte neznámu: $S = \dfrac{(a+b+c)\cdot v}{4d}$, $S = 12{,}3$, $a = 12$, $b = 35$, $c = 0{,}16$, $v = 0{,}5$.

14. HÁDALI SA TRAJA HRÁČI

Jeden z nich povedal:
„Ak ty máš viac ako 99 toliarov a ja mám menej ako 101 toliarov, tak máme rovnako.“
Druhý povedal:
„Ak ty máš menej ako 101 toliarov a tretí z nás má menej ako ty a viac ako ja, potom máme rovnako.“
Tretí sa spýtal: „Tak koľko toliarov máme spolu?“
Zistite to.

Výsledky

1 Mocniny a odmocniny, zápis veľkých čísel

1.1 Druhá a tretia mocnina

4. **a)** 121 cm^2 **b)** 0,280 9 dm^2 **c)** 91 204 mm^2

7. **a)** $V = 729\ cm^3$, $S = 486\ cm^2$ **b)** $V = 0{,}001\ 728\ dm^3$, $S = 0{,}086\ 4\ dm^2$ **c)** $V = 15\ 625\ mm^3$, $S = 3\ 750\ mm^2$

11. **a)** 441; 22,09; 0,828 1; $\frac{25}{81}$ **b)** 2 025; 3,24; $\frac{144}{289}$; $\frac{484}{49}$

14. **a)** 1 331; 0,343; 1,728; $\frac{125}{343}$ **b)** – 0,064; –24,389; $-\frac{8}{27}$; $-\frac{6\,859}{729}$

16. **a)** $0{,}3^3 > 0{,}09^2$ **b)** $17^2 > (-21)^3$ **c)** $5{,}1^3 > (-7{,}1)^2$ **d)** $\left(-1\frac{5}{8}\right)^2 > \left(1\frac{1}{4}\right)^3$

18.* **a)** 48 **b)** 0 **c)** 0,08 **d)** $-\frac{35}{576}$

19.

a)

	a					
	–4	–3	–2	2	3	4
a^2	16	9	4	4	9	16
a^3	–64	–27	–8	8	27	64

b)

	a					
	–0,4	–0,3	–0,2	0,2	0,3	0,4
a^2	0,16	0,09	0,04	0,04	0,09	0,16
a^3	–0,064	–0,027	–0,008	0,008	0,027	0,064

c)

	a					
	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$
a^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{36}$
a^3	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{8}{27}$	$-\frac{64}{125}$	$\frac{8}{343}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{1}{216}$

20. **a)** $144 = 12^2$; $0{,}25 = 0{,}5^2$; $\frac{36}{49} = \left(\frac{6}{7}\right)^2$; $6\ 400 = 80^2$ **b)** $64 = 4^3$; $-\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $0 = 0^3$; $-1 = (-1)^3$; $0{,}125 = 0{,}5^3$

21.*

a	$a^2 + 2 \cdot a$	$a^3 + 3 \cdot a$	$a^3 - a^2$	$a^3 + a^2$	$\frac{a^3}{a^2}$
3	15	36	18	36	3
–2	0	–14	–12	–4	–2
$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{9}$	$2\frac{8}{27}$	$-\frac{4}{27}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{63}{8}$	$-\frac{45}{8}$	$-\frac{9}{8}$	$-1\frac{1}{2}$

22.* a) $\left(-\frac{3}{6}\right)^2 = 0{,}25$ b) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{16} : 0{,}25\right)^2$ c) $-(-2)^3 = 2^3$ d) $\left(\frac{0{,}3}{0{,}2}\right)^3 = 3\frac{3}{8}$

Vyskúšajte sa

Pravé priateľstvo je len **jedno.**

1 P 2 R 3 A 4 V 5 É 6 J 7 E 8 D 9 N 10 O

1.2 Mocniny s mocniteľom – prirodzeným číslom

3. a) 15^4 b) $(-0{,}7)^5$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^7$ d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^7$

5.

mocnina	hodnota
$(-2)^4$	16
$0{,}3^5$	0,002 43
$(-100)^3$	−1 000 000
$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{64}{125}$
$(-1)^6$	1
$(-1{,}2)^3$	−1,728
$\left(1\frac{1}{2}\right)^6$	$\left(\frac{729}{64}\right)$

9. a) $2{,}7^3 > 0$ b) $(-0{,}6)^4 > 0$ c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 > 0$ d) $\left(3\frac{1}{4}\right)^5 > 0$

10. a) $3^4 = (-3)^4$ b) $(-1{,}9)^{15} = -1{,}9^{15}$ c) $\left(\frac{9}{17}\right)^3 > \left(-\frac{9}{17}\right)^3$ d) $\left(-5\frac{2}{7}\right)^{20} = \left(\frac{37}{7}\right)^{20}$

11. a) -200 b) $0{,}001$ c) $\frac{143}{729}$ d) $\frac{3}{32}$

12. a) -41 b) 0 c) $\frac{11}{648}$ d) $-\frac{124}{3\,125}$

13. $(-2)^4 \cdot (-3)^3 = -432$ $(-0{,}02)^2 \cdot (-0{,}1)^4 = 0{,}000\,000\,04$ $0{,}3^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{27}{25\,000}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{648}$

14. a) $4^5 : (-2)^4 = 64$; $8^3 : (-4)^2 = 32$; $(-3)^4 : (-9)^2 = 1$ b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}25^3$; $(-0{,}75 + 0{,}25)^3 = (-0{,}5)^3$

c) $\left(-1 - \frac{2}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$; $(-1)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1^4 = -\frac{65}{81}$

Vyskúšajte sa

1 A 2 B 3 B 4 D 5 C 6 B 7 D 8 A 9 A 10 B

Počítanie s mocninami s prirodzeným mocniteľom – rozširujúce učivo

23.* a) $7^5 = 16\,807$ b) $5^3 = 125$ c) $3^{16} = 43\,046\,721$ d) $2^2 = 4$

25.** a) $8a^7 - 8a^6 + 3a^4$ b) $0{,}1b^8 - 0{,}2b^7 + 0{,}5b^3$ c) $-4c^2 - c + 3$

d) $3d^3 - 0{,}4d^2 + 5d + 0{,}2$ e) $8e^{12}$ f) $\frac{243e^{10}}{1\,024f^{15}}$

1.3 Mocniny čísla 10, predpony a ich súvis s mocninami

2.

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000
10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9

4. $1\,002\,304 = 1\cdot10^6+0\cdot10^5+0\cdot10^4+2\cdot10^3+3\cdot10^2+0\cdot10^1+4\cdot10^0$

$60\,985\,321 = 6\cdot10^7+0\cdot10^6+9\cdot10^5+8\cdot10^4+5\cdot10^3+3\cdot10^2+2\cdot10^1+1\cdot10^0$

$132\,456\,021 = 1\cdot10^8+3\cdot10^7+2\cdot10^6+4\cdot10^5+5\cdot10^4+6\cdot10^3+0\cdot10^2+2\cdot10^1+1\cdot10^0$

$9\,780\,325\,405 = 9\cdot10^9+7\cdot10^8+8\cdot10^7+0\cdot10^6+3\cdot10^5+2\cdot10^4+5\cdot10^3+4\cdot10^2+0\cdot10^1+5\cdot10^0$

6. $6{,}731 = 6\cdot1+7\cdot0{,}1+3\cdot0{,}01+1\cdot0{,}001$

$6{,}731 = 6\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-3}$

$105{,}3 = 1\cdot100+0\cdot10+5\cdot1+3\cdot0{,}1$

$105{,}3 = 1\cdot10^2+0\cdot10^1+5\cdot10^0+3\cdot10^{-1}$

$652{,}34 = 6\cdot100+5\cdot10+2\cdot1+3\cdot0{,}1+4\cdot0{,}01$

$652{,}34 = 6\cdot10^2+5\cdot10^1+2\cdot10^0+3\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}$

$0{,}231\,056 = 0\cdot1+2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}01+1\cdot0{,}001+0\cdot0{,}0001+5\cdot0{,}000\,01+6\cdot0{,}000\,001$

$0{,}231\,056 = 0\cdot10^0+2\cdot10^{-1}+3\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-3}+0\cdot10^{-4}+5\cdot10^{-5}+6\cdot10^{-6}$

7. **a)**
$26 = 2\cdot10^1+6\cdot10^0$
$547 = 5\cdot10^2+4\cdot10^1+7\cdot10^0$
$8\,509 = 8\cdot10^3+5\cdot10^2+0\cdot10^1+9\cdot10^0$
$36\,026 = 3\cdot10^4+6\cdot10^3+0\cdot10^2+2\cdot10^1+6\cdot10^0$

b)
$0{,}2 = 0\cdot10^0+2\cdot10^{-1}$
$5{,}74 = 5\cdot10^0+7\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}$
$20{,}921 = 2\cdot10^1+0\cdot10^0+9\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-3}$
$328{,}36 = 3\cdot10^2+2\cdot10^1+8\cdot10^0+3\cdot10^{-1}+6\cdot10^{-2}$

8. **a)** 2,3 km = 2 300 m
0,5 km = 5 000 dm
0,025 km = 2 500 cm

b) 4,29 m = 42,9 dm
0,8 m = 80 cm
0,05 m = 50 mm

c) 6,8 dm = 68 cm
0,8 dm = 80 mm

9. **a)** 2,3 km^2 = 2 300 000 m^2
0,5 km^2 = 50 000 000 dm^2
0,025 km^2 = 250 000 000 cm^2

b) 4,29 m^2 = 429 dm^2
0,8 m^2 = 8 000 cm^2
0,05 m^2 = 50 000 mm^2

c) 6,8 dm^2 = 680 cm^2
0,8 dm^2 = 8 000 mm^2

d) 0,8 ha = 80 a
1,2 ha = 12 000 m^2

e) 45 a = 4 500 m^2

10. **a)** 4,29 m^3 = 4 290 dm^3
0,8 m^3 = 800 000 cm^3
0,05 m^3 = 50 000 000 mm^3

b) 6,8 dm^3 = 6 800 cm^3
0,8 dm^3 = 800 000 mm^3

c) 0,5 hl = 50 l
2,5 hl = 2 500 dl
0,09 hl = 900 cl

d) 4,1 l = 41 dl
0,60 l = 600 ml
0,003 l = 0,3 cl

11. **a)** 420 m = 0,42 km
2 050 dm = 0,205 km
310 256 cm = 3,102 56 km

b) 260 dm = 26 m
1 0260 cm = 102,6 m
36 560 mm = 36,56 m

c) 560 cm = 56 dm
3 075 mm = 30,75 dm

12. **a)** 36 580 m^2 = 0,036 58 km^2
4 500 200 dm^2 = 0,045 002 km^2
389 560 280 cm^2 = 0,038 956 028 0 km^2

b) 30 250 dm^2 = 302,5 m^2
106 520 cm^2 =10,652 m^2
560 000 mm^2 = 0,56 m^2

c) 3 298 cm^2 = 32,98 dm^2
6 280 mm^2 = 0,628 dm^2

d) 125 a = 1,25 ha
650 250 m^2 = 65,025 ha

e) 562 m^2 = 5,62 a

13. **a)** 5 620 dm^3 = 5,62 m^3
952 cm^3 = 0,000 952 m^3
7 450 mm^3 = 0,000 007 45 m^3

b) 10 253 cm^3 = 10,253 dm^3
650 280 mm^3 = 0,650 28 dm^3

c) 450 l = 4,5 hl
56 000 dl = 56 hl
4 580 000 cl = 458 hl

d) 320 dl = 32 l
4 120 cl = 41,2 l
10 250 ml = 10,25 l

e) 350 cl = 35 dl
3 520 ml = 35,2 dl

14.

a)

2,65 m = = 2 650 mm	256 cm = = 2 560 mm	0,000 625 km = = 625 mm	5,62 dm = = 562 mm	526 mm	0,652 dm = = 65,2 mm	6,25 cm = = 62,5 mm
G	R	A	F	I	T	I

b)

3,65 m^2 = = 3 650 000 mm^2	35 600 cm^2 = = 3 560 000 mm^2	56,3 dm^2 = = 563 000 mm^2	53 600 mm^2	0,000 356 a = = 35 600 mm^2
O	B	R	A	Z

c)

0,785 m^3 = 785 000 cm^3	8 750 cm^3	5,87 dm^3 = 5 870 cm^3	5,78 l = 5 780 cm^3	0,007 58 hl = 758 cm^3
S	T	E	N	A

15. **a)** Jeden meter je viac ako 50 cm. Áno
Jeden km je menej ako 1 500 m. Áno
10 dm je viac ako 1 000 cm. Nie
100 m^2 je viac ako 100 dm^2. Áno

b) 100 m^2 je menej ako 100 dm. Áno
Jeden cm^2 je menej ako 1 m^2. Áno
10 000 dm^2 je toľko ako 10 m^2. Nie
100 000 mm^2 je viac ako 100 cm^2. Áno

c) Jeden liter je viac ako 1 dm^3. Nie
100 hl je 10 dm^3. Nie
1 000 000 cm^3 je menej ako 1 l. Nie
Jeden m^3 je viac ako 10 litrov. Áno

1.4 Zápis veľkých a malých čísel v tvare $a \cdot 10^n$, kde $1 \le a < 10$, $n \in N$

2. 1 495 200 m = 1 495,2 km

3. 100 000 = 10^5, 1 000 000 = 10^6, 10 000 000 = 10^7, 100 000 000 = 10^8

5. **a)** $5 \cdot 10^2$; $7 \cdot 10^3$; $2 \cdot 10^4$; $6 \cdot 10^5$; $3 \cdot 10^6$; $4 \cdot 10^7$

b) $2{,}3 \cdot 10^2$; $8{,}7 \cdot 10^3$; $7{,}2 \cdot 10^4$; $9{,}8 \cdot 10^5$; $2{,}7 \cdot 10^6$; $1{,}5 \cdot 10^7$

c) $6{,}13 \cdot 10^3$; $5{,}27 \cdot 10^4$; $3{,}61 \cdot 10^5$; $1{,}98 \cdot 10^6$; $3{,}53 \cdot 10^7$; $5{,}71 \cdot 10^8$

d) $8{,}08 \cdot 10^4$; $5 \cdot 10^4$ $5{,}8 \cdot 10^5$; $1{,}5 \cdot 10^7$; $4 \cdot 10^7$; $6 \cdot 10^8$

10. **a)** 9 000 000; 40 000 000; 1 000 000 000 000; 8
b) 65; 73 000; 80 000; 1 900 000
c) 51 400 000; 3 230 000 000 000; 28 100 000 000; 328 000 000 000
d) 31 530 000; 215 378 000 000; 258 170 000 000; 32 552 300 000 000

12. **a)** 7 930 **d)** 15 049
b) 6 115 **e)** 128 256,5
c) 1 206,2 **f)** –36 206,1

13.** $B\ (-1{,}6 \cdot 10^5 - 2{,}04 \cdot 10^7) \cdot 10^2 < A\ (1{,}6 \cdot 10^3 - 2{,}04 \cdot 10^5) \cdot 10^2 < C\ (0{,}1 \cdot 10^1) \cdot (1{,}012 \cdot 10^7)$

14.** $A\ (-9{,}086 \cdot 10^4 + 7{,}041 \cdot 10^3) : 10^2 = B\ (-0{,}908\,6 \cdot 10^5 + 0{,}704\,1 \cdot 10^4) : 10^2 = C\ (-9{,}086 \cdot 10^2 + 7{,}041 \cdot 10^1) : 10^4$

Vyskúšajte sa

1 A 2 C 3 B 4 C 5 B 6 C 7 A 8 D 9 D 10 D

1.5 Počítanie s veľkými a malými číslami, zaokrúhľovanie a odhad výsledku

2. **a)** Presne: 333 938 743. Odhad: na milióny 334 000 000. Rozdiel: 61 257
b) Presne: 895 965 743. Odhad: na milióny 896 000 000. Rozdiel: 34 257
c) Presne: 1,605 844 125. Odhad: na stotiny 1,61. Rozdiel: 0,004 155 875
d) Presne: 2,369 800 996. Odhad: na desaťtisíciny 2,3698. Rozdiel: 0,000 000 996

4. **a)** Presne: 2 763 978 718. Odhad: 2 800 000 000. Rozdiel: 36 021 282
b) Presne: 4 101 767 596. Odhad: 4 000 000 000. Rozdiel: 101 767 596
c) Presne: 0,259 1. Odhad: 0,259 1. Rozdiel: 0
d) Presne: 0,109 800 243. Odhad: 0,1. Rozdiel: 0,009 800 243
e) Presne: 0,000 269. Odhad: 0,000 269. Rozdiel: 0

6. **a)** Presne: 3 900. Odhad: na desiatky 3 300. Rozdiel: 660
b) Presne: 85 690. Odhad: na desiatky 90 200. Rozdiel: 4 510
c) Presne: 4,423 2. Odhad: na jednotky 5. Rozdiel: 0,576 8
d) Presne: 68,21. Odhad: na jednotky 72. Rozdiel: 3,79

8. **a)** Presne: $7,\overline{1}$. Odhad: na desiatky 6,5. Rozdiel: $0,6\overline{1}$
b) Presne: $82,520\,8\overline{3}$. Odhad: na desiatky 79,2. Rozdiel: $3,320\,8\overline{3}$
c Presne: 4,588 6 ... Odhad: na jednotky 4. Rozdiel: 0,588 6 ...
d) Presne: 2,950 57... Odhad: na desiaťtisíciny $2,\overline{8}$. Rozdiel: 0,061 69...
e) Presne: 6,155 17... Odhad: 6. Rozdiel: 0,155 17....

10. Na gymnáziách: $\frac{55\,499}{148\,733} \doteq \frac{10}{27}$

Na stredných odborných školách: $\frac{93\,234}{148\,733} \doteq \frac{5}{8}$

11. I. Radičová: $\frac{988\,808}{2\,223\,595} \doteq \frac{1}{2}$

12. **a)** Škoda Octavia: $\frac{4\,483}{21\,719} \doteq \frac{1}{5}$ VW Golf: $\frac{1\,525}{21\,719} \doteq \frac{1}{14}$ **b)** KIA: $\frac{3\,531}{21\,719} \doteq \frac{1}{6}$

1.6 Druhá a tretia odmocnina

4. **a)** 12 dm **b)** 25 mm **c)** 11 m **d)** 50 cm **e)** 70 m

6. **a)** 1 m **b)** 2,82 dm (na 2 desatinné miesta) **c)** 10 cm
d) približne 2,54 mm **e)** 5 m

8. **a)** 6, 8, 13, 14, 30, 50, 400 **b)** 0,1; 0,2; 0,5; 0,8; 0,11; 0,15 **c)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}$ **d)** 0,4; 0,2; 1; $\frac{3}{4}$

9. **a)** 0; 1; 10; 100; 1 000 **b)** 0,1; 0,01; 0,001 **c)** $\frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1\,000}$

11. **a)** 4 **b)** –0,1 **c)** –0,28 **d)** $\frac{17}{40}$ **e)** $-\frac{17}{28}$

13. $A = 0,3$

14.

$\sqrt{\frac{49}{100}} = 0,7$	$\sqrt{0,36} = 0,6$	$\sqrt{0,25} = 0,5$	$\sqrt{\frac{16}{100}} = 0,4$	$\sqrt{0,04} = 0,2$	$\sqrt{\frac{225}{10\,000}} = 0,15$
H	R	A	N	O	L

17. **a)** Áno **b)** Nie **c)** Nie **d)** Nie **e)** Nie

19. **a)** Áno **b)** Áno **c)** Nie

21. **a)** 9 cm **b)** 0,3 dm **c)** $\frac{5}{7}$ m

23. **a)** 1; 100; 0,01; 0 **b)** 0,9; 0,5; 0,07; 0,03 **c)** $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \frac{3}{2}; \frac{7}{8}; \frac{1}{500}$

26. **a)** $\sqrt[3]{8} < \sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{0{,}0144} < \sqrt[3]{1\,000}$ **c)** $\sqrt[3]{1\,728} > \sqrt{\frac{2\,500}{100}}$ **d)** $\sqrt[3]{0{,}027} < \sqrt{1\frac{13}{36}}$

e) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ **f)** $\sqrt{3\frac{4}{64}} < \sqrt[3]{30}$ **g)** $\sqrt[3]{100} > \sqrt{10}$ **h)** $\sqrt{1} = \sqrt[3]{1}$

Vyskúšajte sa

1 B 2 R 3 A 4 T 5 I 6 S 7 L 8 A 9 V 10 A

2 Pytagorova veta

2.1 Pytagorova veta – definícia

9.

a) *Konštrukcia:*
1. AB; $|AB| = 4$ cm
2. $\sphericalangle BAX$; $|\sphericalangle BAX| = 70°$
3. k; $k(B, 7$ cm$)$
4. C; $C \in k \cap \overrightarrow{AX}$
5. $\Delta\, ABC$

Dĺžka strany AC je podľa konštrukcie 7 cm.
Pytagorova veta v trojuholníku neplatí.

b) *Konštrukcia:*
1. AC; $|AC| = 6$ cm
2. S; $|BS| = |SC|$
3. k_1; $k_1(C, 4$ cm$)$
4. k_2; $k_2(S, 5$ cm$)$
5. B; $B \in k_1 \cap k_2$
6. $\Delta\, ABC$

Dĺžka strany AB je podľa konštrukcie 4,5 cm.
Pytagorova veta v trojuholníku neplatí.

c) *Konštrukcia:*
1. AB; $|AB| = 6$ cm
2. $\sphericalangle ABX$; $|\sphericalangle ABX| = 30°$
3. p; $p \parallel AB$, $|p, AB| = 4$ cm
4. C; $C \in p \cap \overrightarrow{BX}$
5. $\Delta\, ABC$

Dĺžka strany BC je podľa konštrukcie 6 cm, strany AC je 4 cm.
Pytagorova veta v trojuholníku neplatí.

11. **a)** Je pravouhlý: $17^2 = 8^2 + 15^2$. **b)** Je pravouhlý: $1{,}3^2 = 1{,}2^2 + 0{,}5^2$.
c) Je pravouhlý: $13^2 = 12^2 + 5^2$. **d)** Nie je pravouhlý: $1\,300^2 \neq 120^2 + 50^2$.

13. **b)** $\Delta\, PRS$

15. **a)** $x \doteq 38{,}67$ **b)** $x \doteq 4{,}47$ **c)** $x \doteq 28{,}63$ **d)** $x \doteq 5{,}19$

17. **a)** $c \doteq 12{,}68$ **b)** $f = 0{,}5$ dm **c)** $l = 80$ mm **d)** $z \doteq 31{,}30$ dm

18.** **a)** $b = \sqrt{a^2 + c^2}$ **b)** $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

19.* **B** $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

20.* **B** $a = \sqrt{b^2 - c^2}$

Pytagorova veta a trojuholníky

22. **a)** $v \doteq 91{,}80$ mm **b)** $v \doteq 0{,}19$ dm **c)*** $v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

24. **a)** $v \doteq 33{,}05$ mm **b)** $v \doteq 8{,}29$ cm **c)*** $v = \frac{\sqrt{4r^2 - z^2}}{2}$

Pytagorova veta a rovnobežníky

26. **a)** $e \doteq 10{,}18$ dm **b)** $e \doteq 79{,}19$ mm **c)*** $e = \sqrt{2} \cdot a$

28. **a)** $a \doteq 3{,}39$ dm **b)** $a \doteq 22{,}62$ mm **c)*** $a = \frac{e}{\sqrt{2}}$

30. **a)** $e \doteq 4{,}56$ dm **b)** $e \doteq 59{,}03$ mm **c)*** $e = \sqrt{(a+3)^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + 6a + 9}$

32. **a)** $b \doteq 21$ dm **b)** $b \doteq 60{,}47$ mm **c)*** $b = 2 \cdot \sqrt{e - 1}$

Pytagorova veta a lichobežníky

34. **a)** $v = 4$ cm **b)** $v \doteq 3{,}7$ cm **c)** $v \doteq 28{,}72$ mm

36. **a)** Rameno má dĺžku 5 cm. **b)** Rameno má dĺžku približne 3,9 cm. **c)** Rameno má dĺžku približne 1,95 cm.

Pytagorova veta a kružnica

38. **a)** Dĺžka tetivy je približne 8,94 cm. **b)** Dĺžka tetivy je približne 1,59 dm.
c) Dĺžka tetivy je približne 14,14 cm. **d)** Dĺžka tetivy je približne 2,83 cm.

40. **a)** $r = 5$ cm **b)** $r \doteq 2{,}42$ dm **c)** $r \doteq 17{,}69$ dm **d)** $r \doteq 4{,}38$ cm

Pytagorova veta a telesá

42. **a)** $e \doteq 3{,}81$ dm **b)** $e \doteq 49{,}49$ mm **c)*** $e = \sqrt{2} \cdot a$

44. **a)** $e \doteq 40{,}80$ cm **b)** $e \doteq 7{,}21$ cm **c)*** $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ **d)** $e = \sqrt{2a^2 + 6a + 9}$

46. **a)** $f \doteq 22{,}13$ cm **b)** $f \doteq 73{,}27$ cm **c)** $f \doteq 50{,}68$ cm **d)** $f \doteq 250{,}42$ mm

Vyskúšajte sa

1 M **2 E** **3 R** **4 A** **5 N** **6 I** **7 E**

Aká je v geometrii najčastejšia činnosť? Nuž predsa **MERANIE.**

2.2 Použitie Pytagorovej vety pri riešení praktických úloh

2. **a)** $e^2 = 2 \cdot a^2$, e je uhlopriečka štvorca, a je strana štvorca

b) $e^2 = a^2 + b^2$, e je uhlopriečka obdĺžnika, a a b sú strany obdĺžnika

c) $v^2 = d^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$, v je výška lichobežníka, a a c sú základne lichobežníka, d je rameno lichobežníka

3.* **a)** $e^2 = 2 \cdot a^2$, e je uhlopriečka bočnej steny kocky, a je hrana kocky

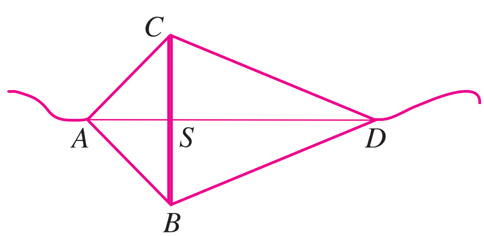
b) $f^2 = 3 \cdot b^2$, f je telesová uhlopriečka kocky, b je hrana kocky

5.

a	2,5 dm	42 mm	104,44 cm	3 m	25 cm	918,29 cm
b	3,6 dm	86,32 mm	74 cm	65,45 dm	250 mm	56 cm
c	4,38 dm	96 mm	128 cm	72 dm	35,35 cm	9,2 m

7.** **a)** $|AS| = 45$ cm, $|SD| = 105$ cm, $|BS| = |SC| = 30$ cm,
$|AB| = |AC| \doteq 54{,}08$ cm $|BD| = |CD| \doteq 109{,}20$ cm

b) $v \doteq 22{,}91$ m



8.** Dĺžka chodníkov v parku je približne 1 298 m. Plochy jednotlivých častí sú rovnaké 9 000 m^2. Cestu si skrátime chodníkom B o 111 m.

10. Približne 2,66 m.

11. Približne 3,12 m.

3 Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc

3.1 Jednoduché lineárne rovnice riešené pomocou ekvivalentných úprav

5. **a)** $x = 5$ **b)** $x = -3$ **c)** $x = 16$ **d)** $x = -9$

7. **a)** $x = -2$ **b)** $x = -1{,}75$ **c)** $x = 23{,}8$ **d)** $x = \dfrac{11}{75}$

9. **a)** $x = 1$ **b)** $x = 0{,}5$ **c)** $x = -1$ **d)** 6,25

11.* **a)** $x = -1$ **b)** $x = -0{,}2$ **c)** $x = 2{,}5$ **d)** $x = 0{,}25$

13. **a)** $x = -15{,}5$ **b)** $x = \dfrac{1}{7}$ **c)** $x = 0{,}5$ **d)*** $x = -4{,}25$

e)* nekonečne veľa riešení **f)*** nekonečne veľa riešení

15. **a)** $w = 2\dfrac{6}{7}$ **b)** $w = 1$ **c)** $w = 3$ **d)** $w = -\dfrac{3}{13}$

17. **a)** $m = -4\dfrac{1}{3}$ **b)** $m = 0{,}7$ **c)** $m = 7$ **d)** $m = -1{,}5$

Vyskúšajte sa

1 A 2 B 3 C 4 A 5 A 6 B 7 C 8 D 9 B 10 D 11* D 12 B 13 C 14 A

3.2 Jednoduché lineárne nerovnice

3. **a)** $7\cdot(-3+1) > 7\cdot(-3)+1$ **b)** $0{,}25+0{,}32:0{,}8 < (0{,}25+0{,}32):0{,}8$ **c)** $1\frac{3}{4} > 1{,}25$

d) $2\cdot\frac{3}{4} < 2{,}75$ **e)** $(-11)^2 = 11^2$ **f)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 > -\frac{2^3}{3}$

5. **a)** $-1\cdot(3-5) < (-1)\cdot(-5)+3$ **b)** $0{,}36\cdot 10 - 0{,}25\cdot 10 = 10\cdot(0{,}36-0{,}25)$

c) $1\frac{3}{4} > \frac{1}{2}:\frac{3}{4}$ **d)** $5{,}2+\frac{3}{10} = 0{,}3-(-5{,}2)$

7. **a)** 1, 2, 3, ... , 20, 21 **b)** 8, 9, 10, 11, ... **c)** 1 **d)** 9, 10, 11, 12, ...

9. **a)** 1, 2 **b)** –1 **c)** 1, 2, 3, 4 **d)** –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1

11. **a)** $x < 2$ **b)** $x > 3$ **c)** $x < -25$ **d)** $x > 6$

13. **a)** $x \le -3$ **b)** $x \ge 1$ **c)** $x \ge -4$ **d)** $x \le 9$

15. **a)** $-6 \le x$ **b)** $x \ge 2$ **c)** $-3 < x$ **d)** $3 > x$

17. **a)*** $x \le 2$ **b)*** $x \ge 0{,}5$ **c)**** $x < -\dfrac{7}{8}$ **d)**** $x < -42$

19. **a)** $b > -0{,}4$, pre všetky kladné celé čísla **b)** $b < 1\dfrac{7}{12}$, pre číslo 1

c) $c > -2$, pre číslo –1 **d)** $c > -2{,}5$, pre čísla –2 a –1

20. **a)** pre $y < -2$ **b)** pre $z < -2{,}8$ **c)** pre $m < -1{,}7$ **d)** pre $n < -1{,}5$

22. **D**

24.* **a)** $3 \ge -2$, pre všetky reálne čísla **b)** $0 \le 0$, pre všetky reálne čísla

26.* riešením sú všetky čísla $x < -2$, okrem –2 a –1

Vyskúšajte sa

1 C 2 A 3 B 4 C 5 B 6 C 7 B 8 A 9 A 10 D 11 B 12 D 13 B 14 C

3.3 Jednoduché lineárne rovnice s neznámou v menovateli

4. $x \ne 0$

a) $x = 8$ **b)** $x = -3$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = -1{,}2$

6. a) $x = 5, x \neq 3$ b) $x = 7, x \neq 5$ c) $x = -3, x \neq -6$ d) $x = -7\frac{2}{3}, x \neq -7$

8.* a) $x = 0, x \neq -\frac{3}{4}$ b) $x = -8\frac{3}{4}, x \neq 2{,}5$

10. a) $x \neq -6$ b) $x \neq 4$ c) $x \neq -\frac{1}{4}$ d) $x \neq 0{,}5$ e) $x \neq \frac{1}{15}$ f)* $x \neq 2{,}5$ g)* $x \neq -1$ h)** $x \neq 1\frac{1}{6}$

12. D

14.* C

16.* D

17.** a) $x = 18, x \neq 0$ b) $x = -5, x \neq 0$ c) $x = 3, x \neq 1$ d) $x = -3{,}5, x \neq -2$

Vyskúšajte sa

1 N 2 E 3 K 4 O 5 R 6 Á

Čo má strom a nemá rovnica? **KONÁRE.**

3.4 Vyjadrenie neznámej zo vzorca

3. a) $a = \frac{o}{4}$, $a = 3{,}14$ cm b) $b = \frac{o}{2} - a$, $b = 45$ cm

c) $a = \frac{o}{3}$, $a = 21{,}4$ mm d) $b = \frac{o - a - c}{2}$, $b = d = 13{,}3$ dm

5. a) $a = \sqrt{S}$, $a = 12$ cm b) $b = \frac{S}{a}$, $b = 12$ cm

c)* $b = \frac{2 \cdot S}{a}$, $b = 14$ dm, c $\doteq$ 16,12 dm d) $a = \frac{S}{v_a}$, $a = 1{,}8$ m

7. a) $a = \frac{o}{3}$, $a = 43$ dm b) $b = \frac{o}{2} - a$, $b = 12$ m c) $b = \frac{o - a - c}{2}$, $b = 14$ cm

d) $a = \frac{S}{v_a}$, $a = 14{,}5$ mm e) $b = \frac{2 \cdot S}{a}$, $b = 50$ cm f) $a = \frac{2 \cdot S}{v} - c$, $a = 18{,}25$ cm

8. a) $r = \frac{o}{2 \cdot \pi}$, $r = 4{,}5$ cm b) $d = \frac{o}{\pi}$, $d = 1$ dm

9. a) $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, $r = 3$ dm b) $d = \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, $d = 2$ cm

Vyskúšajte sa

1 B 2 C 3 A 4 B 5 B 6 D 7 B

3.5 Riešenie slovných (kontextových) úloh, ktoré sa dajú riešiť pomocou lineárnej rovnice alebo nerovnice

7. **Druhá hádanka:** dnes má syn 12 rokov (otec má 42 rokov). **Tretia hádanka:** o 12 rokov.

10. Rovnica: $40 \cdot x = 48 \cdot (x - 0{,}5)$, o 2,5 hodiny.

17. a) Rovnica: $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} = 1$, za $3\frac{3}{4}$ hodiny. b) Rovnica: $\frac{1}{5} \cdot 3 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{x}\right) \cdot 1{,}5 = 1$, za 15 hodín.

19. Rovnica: $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 9 = x$, 24 eur.

21. Dievčat je 8, chlapcov je 12.

Vyskúšajte sa

1 C 2 D 3 A 4 A 5 C 6 A 7 A 8 C 9 B 10 A 11 C 12 D 13 A 14 B 15 B

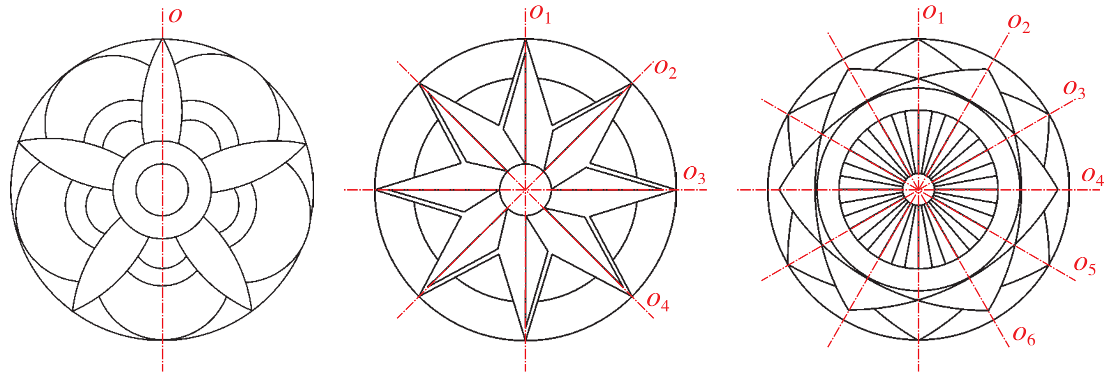
Vyskúšajte sa

1 D 2 A 3 D 4 C 5 A 6 A 7 D

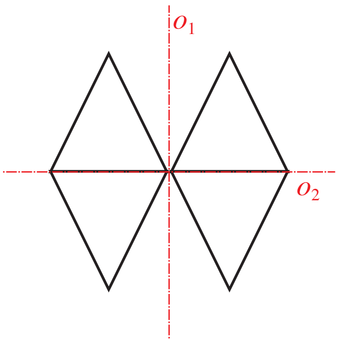
4 Súmernosť v rovine

4.1 Osová súmernosť, os súmernosti. Konštrukcia obrazu v osovej súmernosti

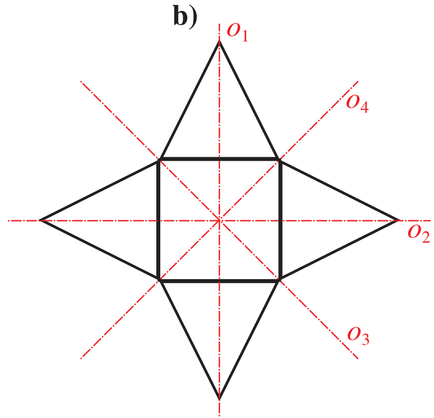
3. os súmernosti je priamka o



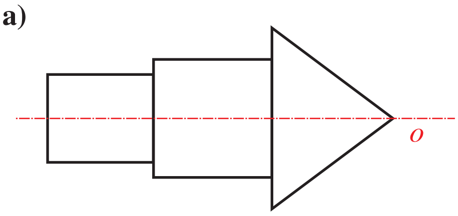
5. a)



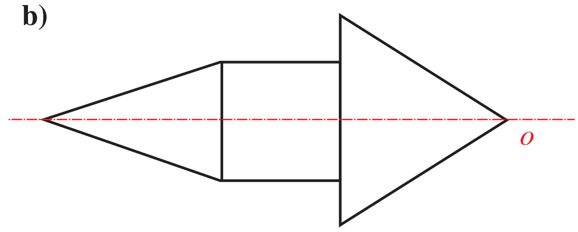
b)



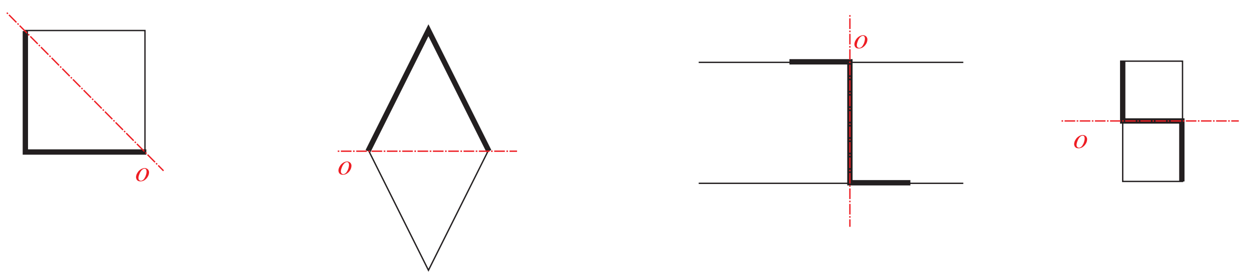
7. a)



b)

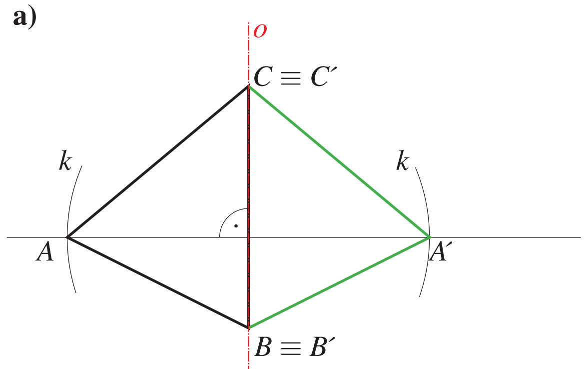


9.

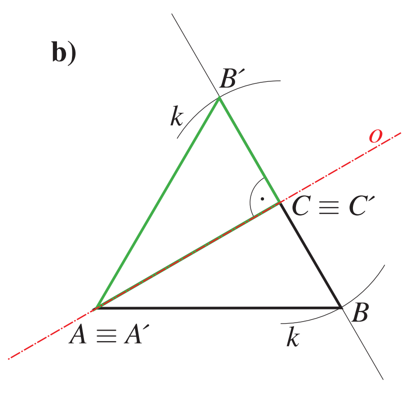


RYSUJEME TROJUHOLNÍK 1

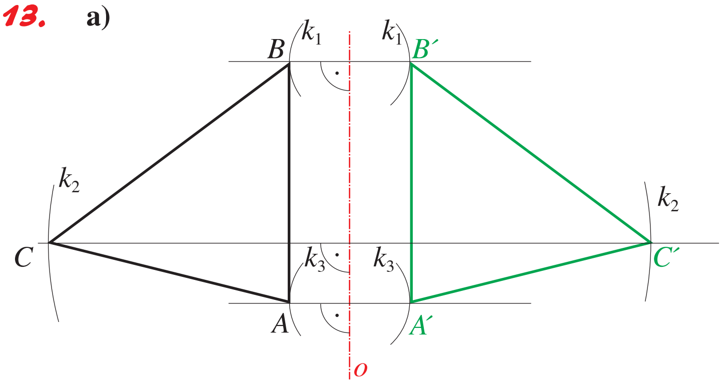
11. a)



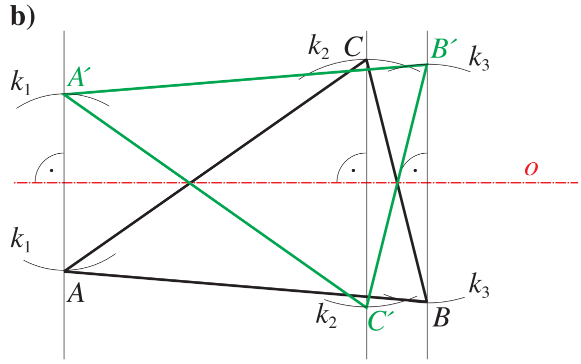
b)



13. a)



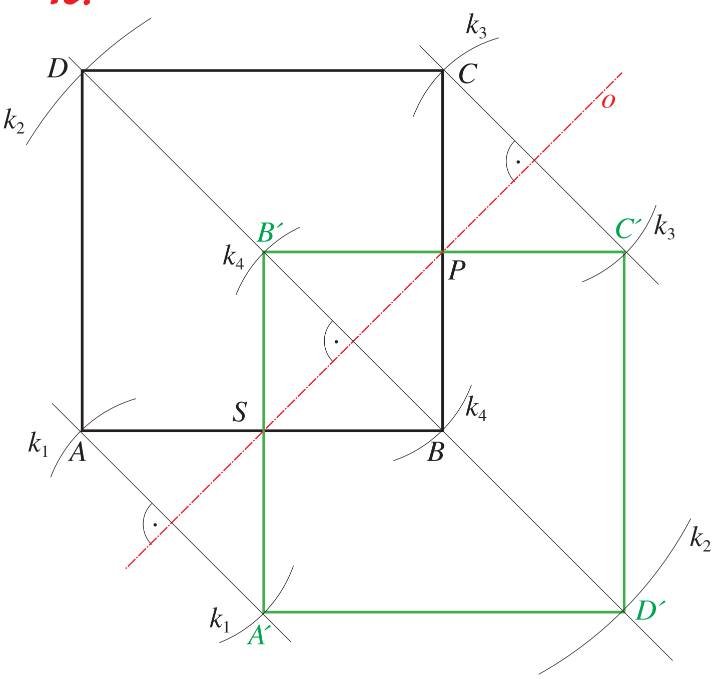
b)



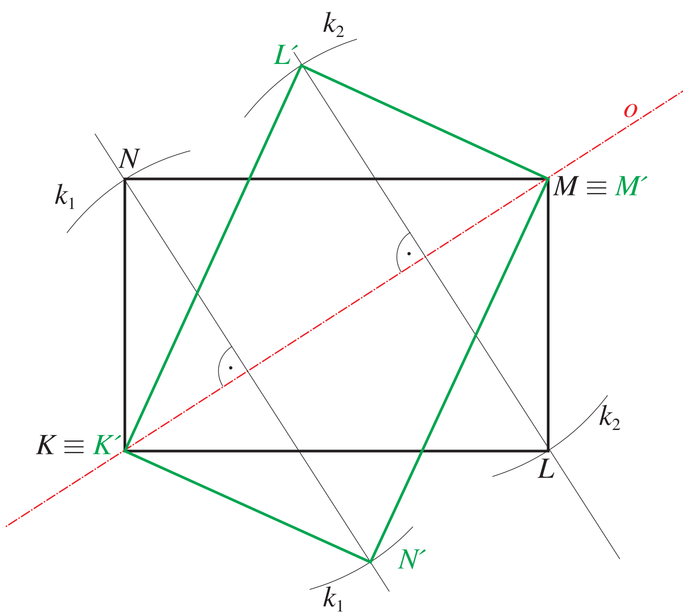
HLAVOLAM

vzor	*B*	*C*	*F*	*K*	*P*	*R*
obraz	*U*	*M*	*E*	*N*	*I*	*A*

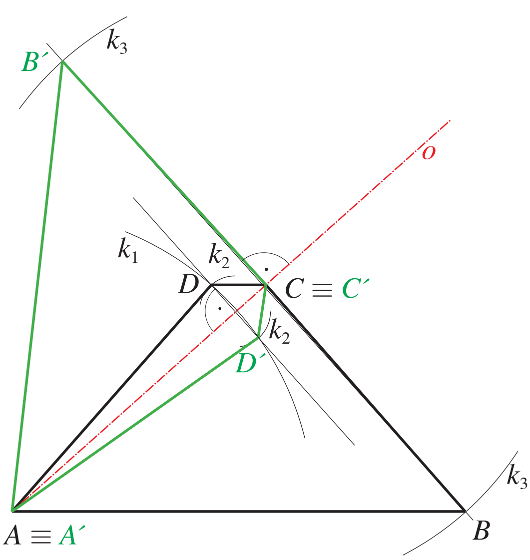
16.



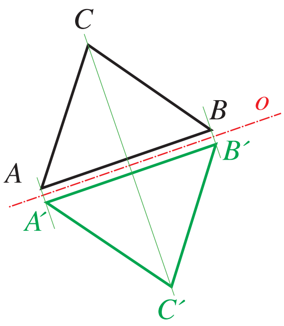
17.



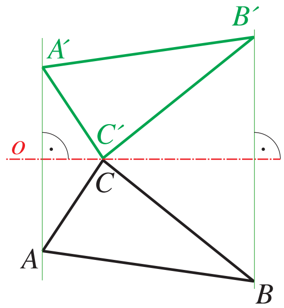
18.



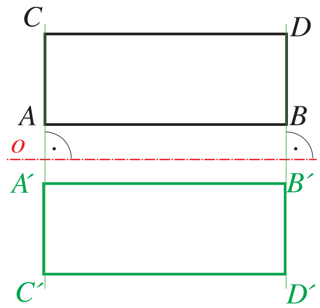
19.* a)



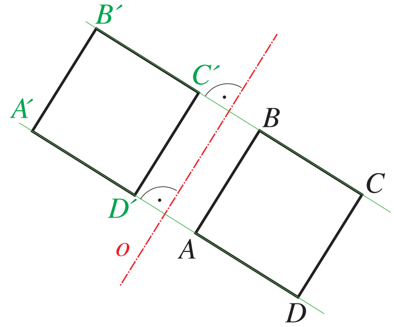
b)



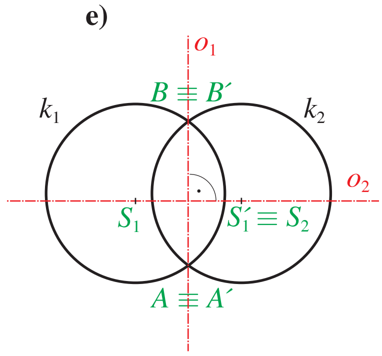
c)



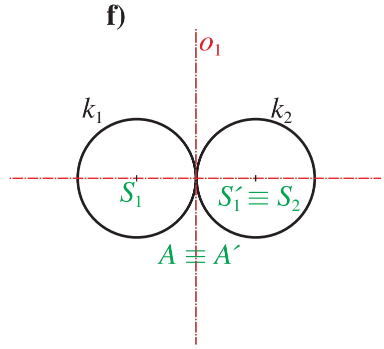
d)



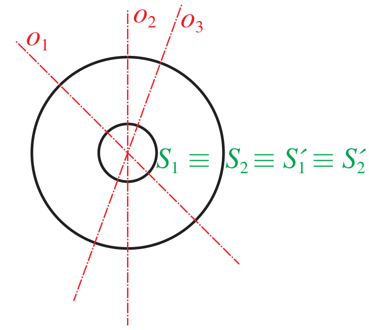
e)



f)

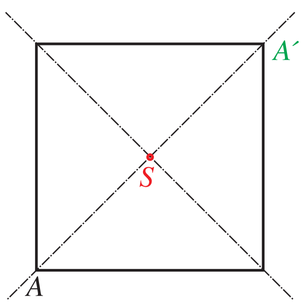


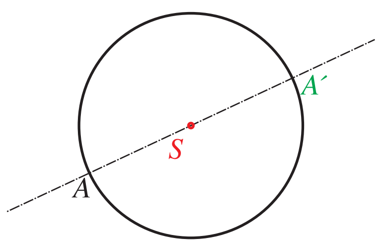
g)

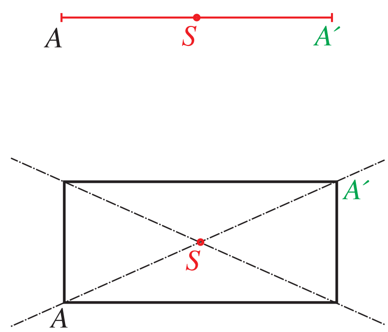


4.2 Stredová súmernosť, stred súmernosti. Konštrukcia obrazu v stredovej súmernosti

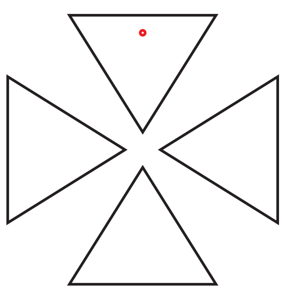
2.



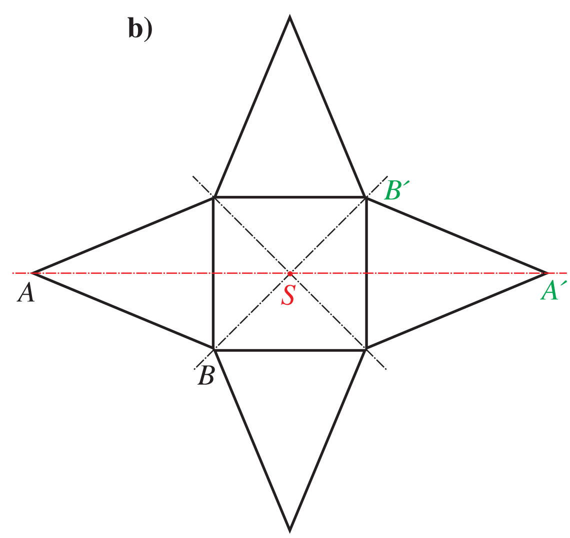




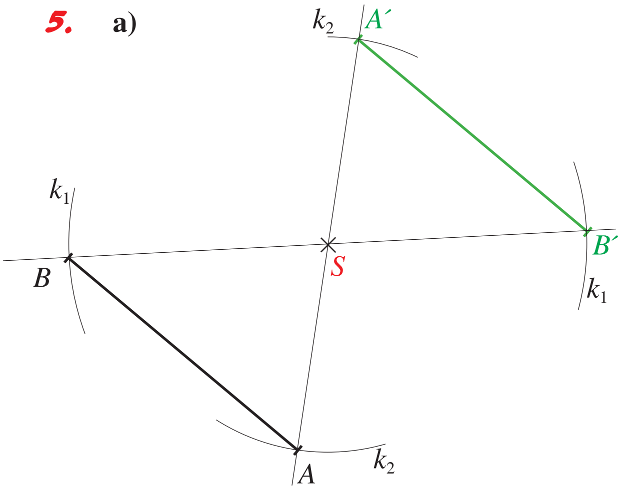
3. a)



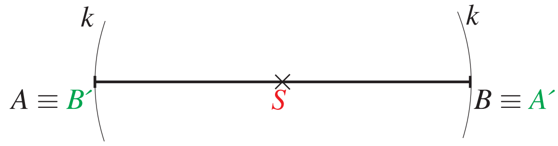
b)



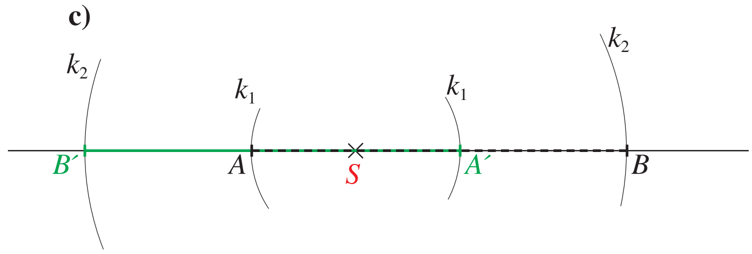
5. **a)**



b)

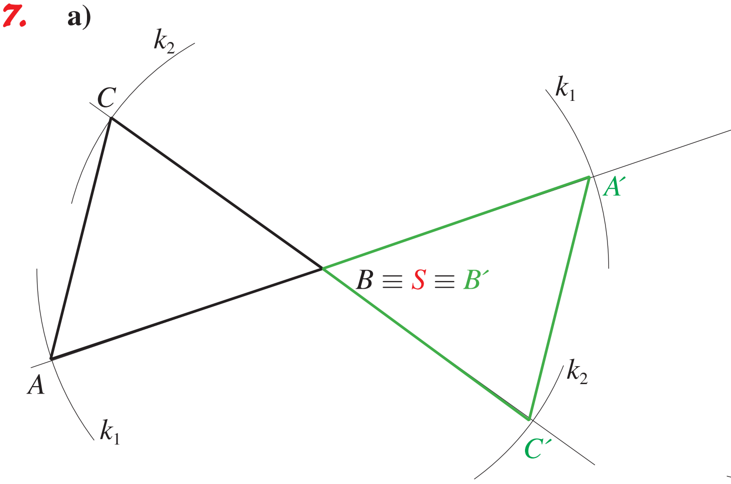


c)

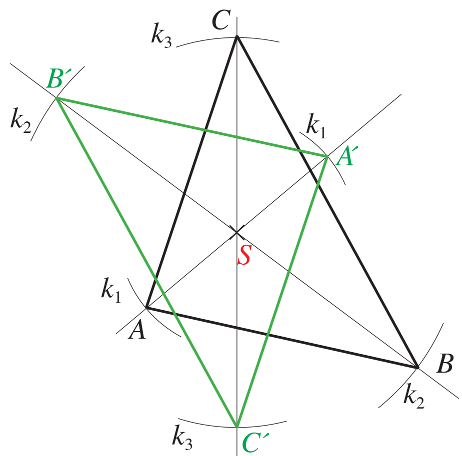


RYSUJEME TROJUHOLNÍK 3

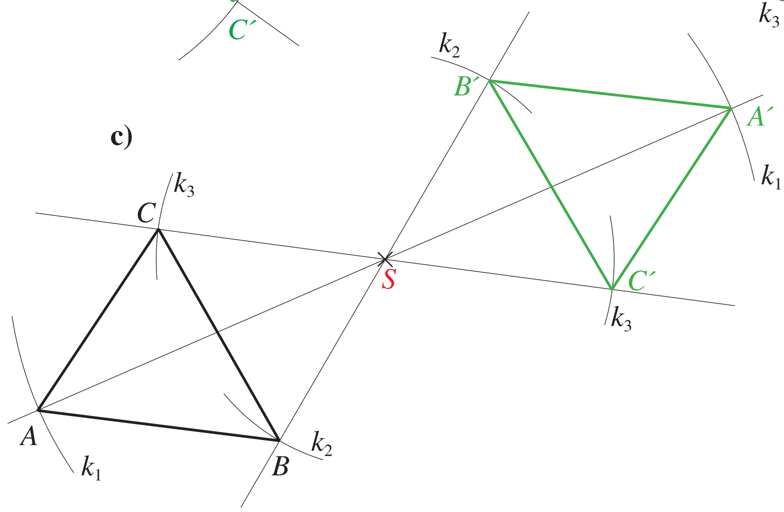
7. **a)**



b)



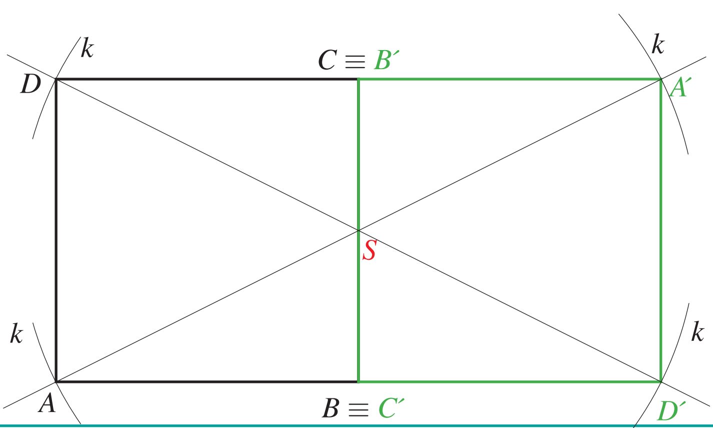
c)



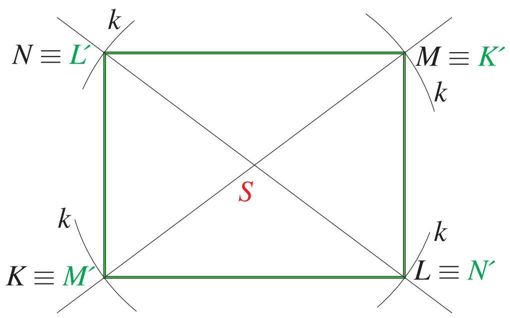
8. Odpoveď:

vzor	*B*	*C*	*G*	*H*	*J*
obraz	*F*	*Ó*	*R*	*U*	*M*

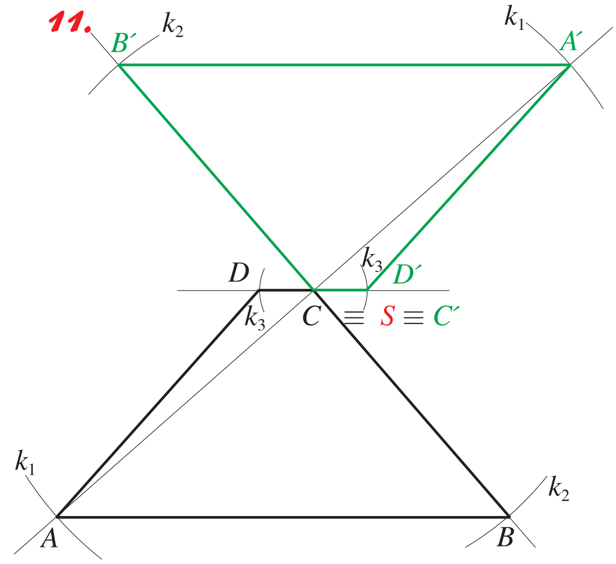
9.



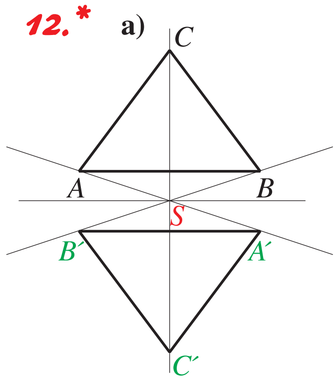
10.



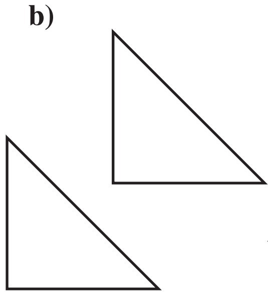
11.



12.* a)

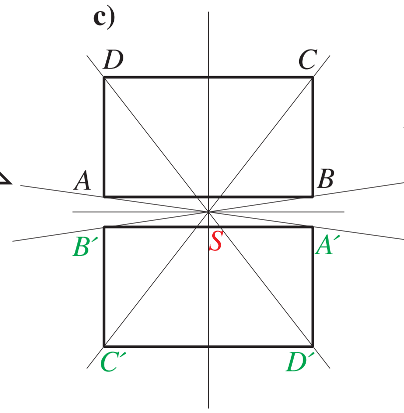


b)

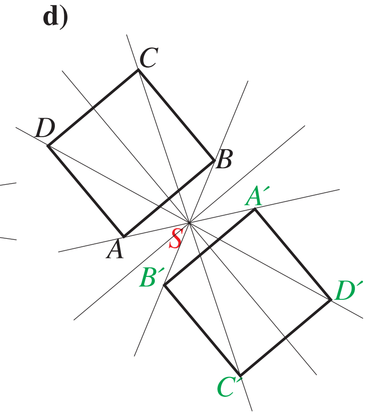


nie sú stredovo súmerné

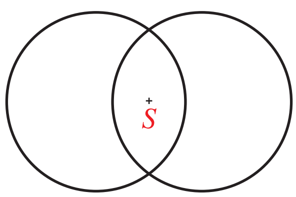
c)



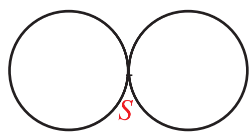
d)



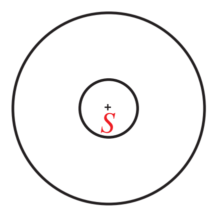
e)



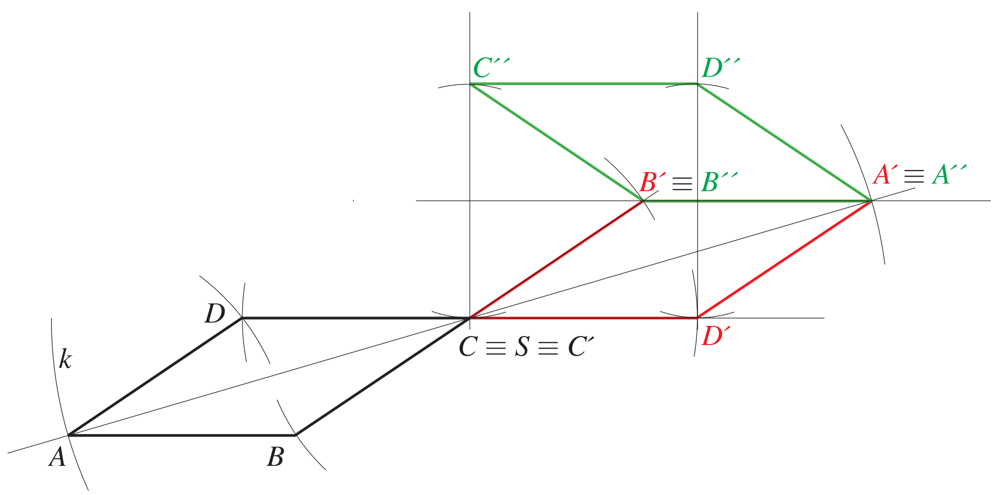
f)



g)



13.**



Vyskúšajte sa – opakovanie

1 D 2 B 3 B 4 A 5 C 6 C 7 D

8. 12 h **9.** 22,36 m^2 **10.** 3,4 mm **11.** 10,82 cm **12.** 70 m^2 **13.** $d = 0{,}52$ **14.** 300

Metodické poznámky pre učiteľov

Vážení učitelia!

Hlavnou myšlienkou pri tvorbe učebnice **Matematika pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník osemročného gymnázia**, jej obsahového a formálneho spracovania bolo, poskytnúť žiakovi **výklad učiva** v **procese,** ako sa **tvoria základné pojmy, hľadajú vzťahy medzi javmi, odhaľujú zákonitosti** v matematických vedách. Nosnou je **zásada neposkytovať žiakovi hotové poznatky, ale priviesť ho na základe predchádzajúceho poznania k novým vedomostiam, k získaniu kompetencií** uvádzaných v štátnom vzdelávacom programe.

Pri tvorbe návrhu učebnice, vzhľadom na vekové osobitosti cieľovej skupiny žiakov:

1. sme uprednostili priame oslovenie (tykanie) pri zadaniach úloh – učebnica je učebná pomôcka pre žiaka,
2. text učebnice – obsah učiva je členený na prvky procesu získavania nových kompetencií (tvorivý chaos),
3. využili sme rôzne grafické prvky na prepojenie na seba nadväzujúcich častí,
4. v úvodnej časti tematického celku zdôrazňujeme vedomosti a zručnosti (kompetencie), ktoré by už žiaci mali vedieť,
5. na poskytnutie spätnej väzby sme zaradili súbory úloh s výberom odpovede,
6. na rozvoj tímovej práce žiakov poslúžia aj projektové úlohy,
7. na motiváciu a aktivizáciu žiaka v procese učenia sa sme zvolili – stručné a vecné spracovanie textu farebne a tvarovo odlíšené, motivačné texty s historickými poznámkami alebo zaujímavosťami z iných vedných disciplín, problémové úlohy na prepojenie vedomostí z rôznych oblastí bežného života, prípadne medzipredmetových vzťahov.

Kompetencie, ktoré má žiak získať pri výučbe matematiky, sú uvádzané z pohľadu oblasti Matematika a **práca s informáciami** – a to upozornením na **využitie IKT** pri riešení viacerých úloh.

V učebnici sme zjednotili problémy, cvičenia, príklady pod jediný pojem **úlohy** – všetky úlohy sú riešené alebo neriešené, s funkciou uviesť, precvičiť alebo upevniť preberané učivo.

Pre **nadobudnutie kľúčových kompetencií** uvádzaných v ŠVP sú v texte aj otázky vedúce k uvažovaniu mimo matematiku, ako aj kontextové úlohy, ktoré sú motiváciou na riešenie úloh bežného typu (tým sa snažíme plniť ciele **prierezových tematík ŠVP,** ako sú globálna výchova, environmentálna výchova, regionálna výchova, multikultúrna výchova, ...).

Názvy jednotlivých kapitol a podkapitol spravidla korešpondujú s názvami tém v Štátnom vzdelávacom programe. Chceme tým umožniť začínajúcim učiteľom ľahšiu orientáciu v učebnici a zjednodušenie plánovania činnosti počas školského roka (tvorba tematického výchovno-vzdelávacieho plánu).

Obsah učiva v **1. časti** je spracovaný do kapitol:

Mocniny a odmocniny – v tejto kapitole ako prvé uvádzame druhú a tretiu mocninu a mocninu s prirodzeným mocniteľom. Ako rozširujúce učivo nasledujú číselné operácie s mocninami s prirodzeným mocniteľom. Potom sú uvedené **mocniny čísla 10,** úlohy na počítanie s malými a veľkými číslami a ich vyjadrenie v tvare $a \cdot 10^n$ (pre $1 \leq a < 10$, $n \in N$) a nakoniec sú definované **druhá a tretia odmocnina**. Vzhľadom na praktické využitie mocnín a odmocnín sme zaradili ako druhú kapitolu Pytagorovu vetu.

Definovanie Pytagorovej vety sme spojili **s konštrukčnými úlohami** trojuholníkov, aby si žiaci zopakovali aj základné prvky trojuholníka a mali možnosť skonštruovať si pravouhlý trojuholník. Úlohou žiakov v konštrukčných úlohách je aj meranie strán v trojuholníkoch a následné overovanie, či takýto trojuholník môže byť pravouhlý alebo nie. Týmito úlohami sme chceli pripraviť žiaka na riešenie úloh s verifikovaním tvrdenia.

V kapitole **o definovaní Pytagorovej vety** sa nachádzajú aj úlohy na praktické použitie tejto vety. Žiaci v nich počítajú **dĺžky výšok v trojuholníkoch, uhlopriečok v štvoruholníkoch, výšok v lichobežníkoch, dĺžky tetív kružníc, telesových a stenových uhlopriečok v kockách a v hranoloch** a pod. Považujeme tieto výpočty za tak dôležité **v príprave žiaka na strednú školu**, že sme ich vyňali spomedzi aplikovaných úloh a zaradili k Pytagorovej vete.

V druhej podkapitole sa nachádzajú úlohy na **použitie Pytagorovej vety** v úlohách z bežného života. Obsahovo sú zamerané na **možné skúsenosti** žiaka 2. stupňa ZŠ.

Tretia kapitola obsahuje definovanie **lineárnej rovnice a nerovnice s neznámou x.** Preto vo všetkých úlohách, v ktorých sa uvedené rovnice a nerovnice riešia, je neznáma x. **Iné neznáme** sme volili v úlohách, v ktorých žiaci riešia výrazy a majú hľadať ich hodnoty. Tým sme chceli vytvoriť úvod k téme **vyjadrenie neznámej zo vzorca**.

Na riešenie lineárnych rovníc a nerovníc odporúčame **niekoľko zápisov postupu riešenia** tak, ako sa s nimi môžeme v školách bežne stretnúť. Uvedomujeme si, že učiteľ a žiak si z nich vyberie ten, ktorý najviac vyhovuje jeho stratégiám učenia.

Lineárne rovnice s neznámou v menovateli sú definované tak, aby sme videli ich **aplikáciu** v podkapitole **vyjadrenie neznámej zo vzorca**. Vzhľadom na odporúčaný štandard kompetencií žiaka v ŠVP v predmete matematika **sme nedefinovali lomený výraz,** ale vychádzali sme z **definovania zlomku ako časti celku, ktorá vzniká delením**. Je na rozhodnutí učiteľa, či ako **rozširujúce učivo zadefinuje lomený výraz** a lineárne rovnice s neznámou v menovateli rozšíri aj o zložitejšie rovnice.

Slovné úlohy, ktoré má žiak riešiť v tejto kapitole, sú zostavené od **najjednoduchších** až po **kontextové úlohy**. Preto používame rôzne spôsoby a metódy riešenia.

Reagovali sme v nich na predchádzajúce skúsenosti žiaka a možné stratégie riešenia tohto typu úloh.

Posledná je kapitola **Súmernosť v rovine.** Zaradili sme ju do prvého polroka preto, aby bolo čo **najrovnomernejšie pokryté učivo z aritmetiky, algebry a geometrie.** Jej spracovanie je jednoduché, nenáročné, vyžadujúce základné zručnosti na konštruovanie obrazov jednoduchých geometrickývh rovinných útvarov.

Jednotlivé kapitoly sme spracovali tak, aby **žiak videl správne riešenia úloh** a pokiaľ to bolo možné, **rôznymi spôsobmi.** Ak žiak nerieši úlohy správne, je úlohou učiteľa, aby ho upozornil na tento fakt a usmernil ho.

Spravidla sa za **vyriešenou úlohou** nachádzajú **neriešené úlohy podobného typu** na precvičenie učiva. Týchto úloh sme sa snažili zaradiť čo najväčšie množstvo.

Pri niektorých riešených úlohách sú uvedené **pomôcky** – sú to stručné pripomenutia vedomostí a zručností, ktoré by mal žiak ovládať z predchádzajúcich ročníkov.

V zadaniach niektorých úloh sú **zdôraznené dôležité údaje** potrebné k riešeniu úlohy. Mysleli sme tým na žiakov **so špecifickými poruchami učenia,** pre ktorých je to prínosné v procese učenia sa.

Úlohy sme gradovali od najjednoduchších po náročnejšie. Väčšinou sú to úlohy otvorené, s ktorými sa žiaci stretávajú aj v rámci celoslovenských meraní matematických kompetencií.

Problémové a projektové úlohy sme zaradili s cieľom podporiť bádanie žiakov aj v oblastiach iných vedných disciplín, v ktorých matematika má aj nemá svoje miesto. Riešenia týchto úloh vo výsledkoch preto neuvádzame. Čiastočne sa k nim návody nachádzajú v závere kapitoly v zhrnutí **Zapamätajte si.**

Odporúčame učiteľom riešiť so žiakmi tie úlohy, ktoré zodpovedajú schopnostiam a nadobudnutým kompetenciám žiakov. Odporúčame tiež pri riešení úloh vybrať také stratégie, ktoré žiakom umožnia získať nové vedomosti a zručnosti čo najvhodnejším spôsobom.

Motivačných textov a historických poznámok je v texte zaradených pomerne málo. Výber týchto textov súvisel s plnením cieľov prierezových tém, ktoré sa realizujú v rámci ŠkVP.

V závere niektorých podkapitol sa nachádzajú úlohy s výberom odpovede **Vyskúšajte sa.** Majú žiakovi pomôcť overiť si základné vedomosti a zručnosti z daného obsahu učiva. Úlohy v nich zaradené sú preto jednoduché a ich počet nie je veľký. Zároveň majú pomôcť žiakom pri príprave na prijímacie skúšky a rôzne merania realizované štátnymi inštitúciami.

Za nimi sú v niektorých podkapitolách **stručné poznámky** k vedomostiam, ktoré by žiak mal získať po absolvovaní daného tematického celku – **Zapamätajte si.** Žiak ich môže využiť aj v svojom individuálnom štúdiu.

Do **druhej časti učebnice** zaradíme tematické celky:

- *Grafické znázorňovanie závislostí*
- *Sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi – rozširujúce učivo*
- *Podobnosť trojuholníkov*
- *Štatistika*
- *Niektoré ďalšie telesá, ich objem a povrch – tu bude zaradené rozširujúce učivo Aplikované úlohy o priestorových útvaroch.*

Dúfame, že sa táto učebnica stane dobrou pomôckou pre vás a uľahčí vám prípravu na vyučovanie.

Autorka

Por. č.	Meno a priezvisko	Školský rok	Stav učebnice	
			začiatok šk. roka	koniec šk. roka

RNDr. Viera Kolbaská

matematika 9

pre 9. ročník základnej školy
a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom

1. časť

Zodpovedná redaktorka *RNDr. Jana Belasová*
Technická redaktorka *Ivana Bronišová*
Výtvarná redaktorka *Mgr. Ľubica Suchalová*

Grafický dizajn a obálka *Ing. Zsolt Urbán*
Ilustroval *Bystrík Vančo*

Vyšlo vo vydavateľstve Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, s. r. o.,
Sasinkova 5, 811 08 Bratislava

Vytlačila Slovenská Grafia, a. s., Bratislava

ISBN 978-80-10-02291-5