Viera Kolbaská

mate-matika

pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom

9

2. časť

Slovenské pedagogické nakladateľstvo

Por. č.	Meno a priezvisko	Školský rok	Stav učebnice	
			začiatok šk. roka	koniec šk. roka

Autorka © **RNDr. Viera Kolbaská, 2014**

Odborný garant: **prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.**

Lektori: PaedDr. Dagmar Andová
RNDr. Marcel Tkáč

Illustrations © Bystrík Vančo, 2014

Grafický dizajn a obálka © Ing. Zsolt Urbán

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod č. 2014-2326/26756:9-100C zo dňa 10. júna 2014 ako 2. časť učebnice matematiky pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. Schvaľovacia doložka má platnosť 5 rokov.

Prvé vydanie, 2014

Zodpovedná redaktorka *RNDr. Jana Belasová*
Technická redaktorka *Ivana Bronišová*
Výtvarná redaktorka *Mgr. Ľubica Suchalová*

Vyšlo vo vydavateľstve Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, s. r. o., Sasinkova 5, 811 08 Bratislava

Vytlačila Slovenská Grafia, a. s., Bratislava

ISBN 978-80-10-02292-2

Obsah

Úvod

Milí deviataci a žiaci 4. ročníka gymnázia s osemročným štúdiom,

dostali ste učebnicu matematiky pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázia, jej druhú časť.

Aj v tejto časti nadväzujeme na preberané učivo z predchádzajúcich ročníkov. Pri preberaní učiva si z neho zopakujeme niektoré časti a rozšírime si ho o vedomosti, ktoré budete potrebovať na stredných školách alebo rôznych formách skúšania počas deviateho ročníka.

V učebnici znovu nájdete poznámky o **rôznych spôsoboch riešenia úloh, odkazy na predchádzajúce vedomosti a zručnosti**, informácie o využití týchto vedomostí a zručností v nových tematických celkoch alebo predmetoch.

Pri riešení úloh v druhej časti sa rozvíjajú nielen rôzne myšlienkové operácie, precvičuje sa pamäť, sústredenie na text, triedenie a zmysluplné využitie informácií, ale aj **geometrická predstavivosť**, **priestorové videnie a schopnosť prepájať informácie získané vlastnou aktivitou s bežným životom a matematickým jazykom**.

Učebnica, jej druhá časť, sa skladá zo štyroch hlavných kapitol.

Každá podkapitola

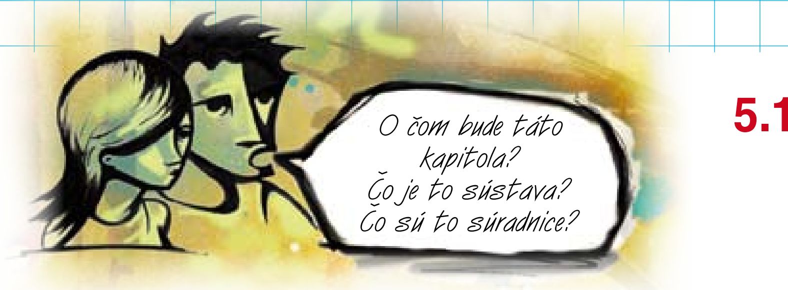
- **sa začína** textom alebo úlohou s názvom Čo sme sa už učili.
  Majú pripomenúť, čo by sme už mali vedieť
  (ako sme to počítali v minulých ročníkoch) – **v žltom poli** — Čo sme sa už učili
- **potom nasledujú úlohy** rôzneho typu
  - *bežné riešené úlohy* – sú v **žltom poli s modrým číslom** — 1.
  - *za nimi nasledujú riešenia úloh* — Riešenie 1.
  - *neriešené úlohy* (úlohy na precvičovanie učiva) – **v žltom poli s červeným číslom** — 2.
  - *náročnejšie úlohy* – pri čísle úlohy je jedna alebo dve **hviezdičky** podľa náročnosti — 2.*
  - *ak odporúčame pri riešení úlohy použiť kalkulačku,* je pri úlohe piktogram

  - ***problémové úlohy*** – to sú väčšinou úlohy, ktoré sa bežne neriešia – určené sú pre **žiakov so záujmom o matematiku** — Problémová úloha
  - ***projektové úlohy*** – to sú tie úlohy, ktoré sa bežne **riešia doma** alebo ako tímová práca – sú nepovinné – žiaci prostredníctvom nich získavajú nové informácie rôzneho druhu (nielen matematické) — Projektová úloha
- **dôležité učivo** – **v modrom poli**, je označené piktogramom paragraf — §
- **pomôcky** – informácie, ktoré môžu pomôcť pri riešení úloh — Pomôcka
- **súbory úloh** – na precvičenie učiva a sebahodnotenie — Vyskúšajte sa
- **zaujímavosti** rôzneho typu – **v zelenom poli** a začínajú sa Viete, že...? — Viete, že...?
- **súhrn prebraného učiva – Zapamätajte si** na konci tematických celkov — Zapamätajte si
- to, že odporúčame využiť **internet**, označuje piktogram

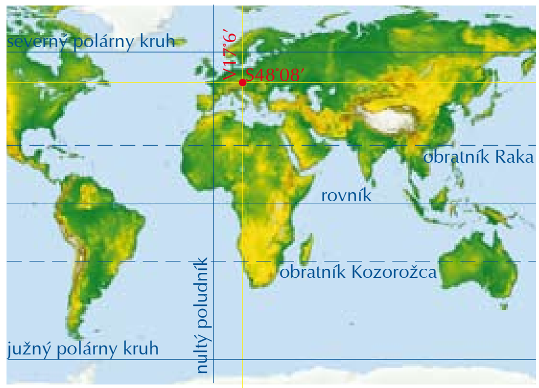
Dúfame, že sa vám s učebnicou bude ľahšie učiť.

Autorka

5 Grafické znázorňovanie závislostí



5.1 Pravouhlá sústava súradníc



Súradnicami sa určuje napríklad **poloha lode** na mori, **poloha tábora** horolezcov v horách, **miesto** pobytu cestovateľov a pod.

Aj v niektorých hrách hovoríme o **polohe**, **pozícii**, napríklad v **šachu**. Ten sa hrá na šachovnici so 64 štvorcovými poľami označenými pomocou **písmen a čísel**. Umiestnenie hracej figúrky na šachovnici označuje písmeno figúrky a dvojica, ktorá označuje šachové pole. Napríklad **Vb4** znamená, že veža **V** sa nachádza na poli **b4**. Pomocou týchto dohodnutých pravidiel, ktoré sa nazývajú *šachová notácia*, sa dá zapísať každá šachová partia.

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	a8	b8	c8	d8	e8				8
7		b7	c7	d7	e7	f7			7
6			c6	d6	e6	f6	g6		6
5				d5	e5	f5	g5	h5	5
4	a4	♜			e4	f4	g4	h4	4
3	a3	b3	c3			f3	g3	h3	3
2	a2	b2	c2	d2			g2	h2	2
1	a1	b1	c1	d1	e1			h1	1
	a	**b**	c	d	e	f	g	h	

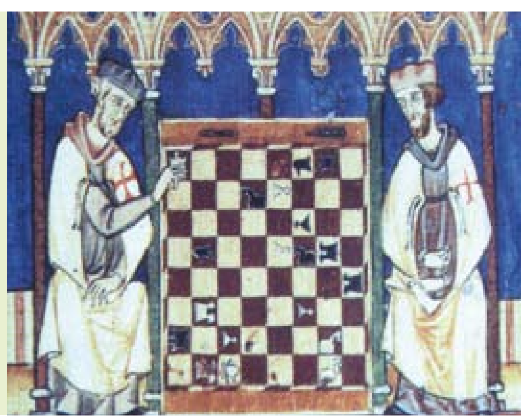
Na obrázku je šachovnica s označenými poliami.

Existuje veľa hier, v ktorých je potrebné použiť na opis priebehu hry písmená a čísla. Kedysi sa často hrala hra Lodičky. Jej obmenu, hru **Kto má viac?**, môžu hrať dvaja hráči na dvoch šachovniciach 8×8 políčok pomocou kartičiek veľkosti jedného políčka šachovnice so zobrazenými objektmi. Objekty majú určenú hodnotu, napr. 2 paláce (každý palác po 300 bodov), 4 domy (po 100 bodov), 2 hrady (po 500 bodov), 10 rôznych áut (po 10 bodov), 2 motocykle (po 15 bodov), 2 fabriky (po 400 bodov), 2 banky (po 450 bodov), 2 pošty (po 150 bodov), 2 športové štadióny (po 75 bodov). Hráči si podelia kartičky tak, aby mal každý z každého druhu rovnaký počet. Potom ich umiestnia na svoj plán hry tak, aby pozíciu objektov súper nevidel. Hra sa začína hodom klasickou hracou kockou. Každý hráč hádže raz. Ten, ktorý hodil vyšší počet bodov, začína hru. Hráči striedavo tipujú pozície objektov, ktoré chcú získať. Ak je objekt na menovanom políčku, protihráč mu ho odovzdá. Hru hrajú podľa vzájomnej dohody ohraničený čas. Vyhráva ten, kto získa za ten čas najviac bodov.

Viete, že...?

- pomenovanie hry šach pochádza z perzštiny – v prenesenom význame – kráľovská hra
- prvá podoba šachu v severnej Indii známa pod názvom čaturanga sa datuje okolo roku 500
- prvá šachová kniha vyšla v roku 847
- okolo 11. storočia sa šach objavuje v Európe
- prvú európsku šachovú knihu od Lousia de Lucena vydali v roku 1497
- prvý medzinárodný šachový turnaj sa konal v Londýne v roku 1851
- šachové hodiny prvýkrát použili na medzinárodnom šachovom turnaji v Paríži v roku 1867
- počítač Deep Blue prvý raz vyhral nad majstrom sveta v šachu v roku 1997

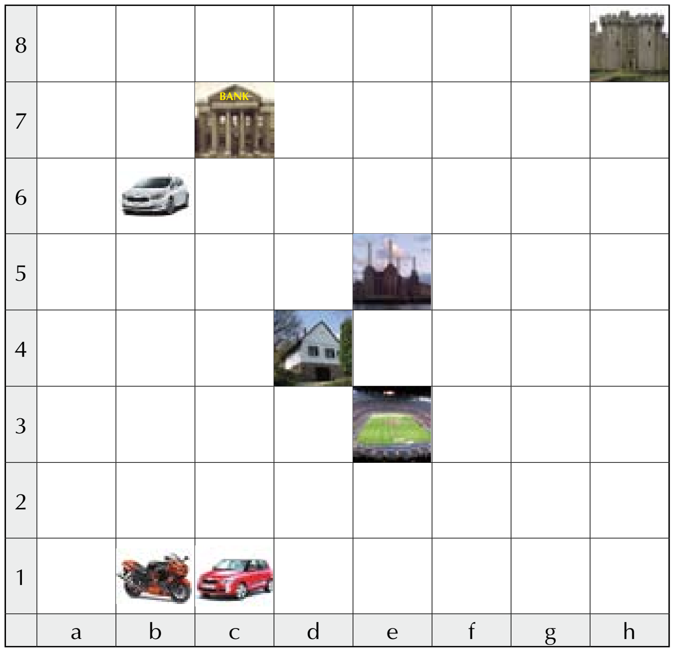
Zdroj: http://sk.wikipedia.org/wiki/%C5%A0ach_(hra)#.C5.A0achov.C3.A9_pravidl.C3.A1



Na obrázku templárski rytieri hrajú šach.

Čo sme sa už učili

Určite viete vyriešiť úlohy 1 a 2.



1. Na obrázku je plán hry jedného hráča s niekoľkými objektmi. Napíš dvojice, ktorými môžeš opísať **pozíciu** objektov na pláne.

Riešenie 1.

Na opis pozície objektov použijeme pravidlá podobné ako v šachu – napíšeme dvojicu, pričom prvé v dvojici uvedieme písmeno zo spodného riadka a potom číslo z ľavého stĺpca.
motocykel [*b*, 1],
auto biele [*b*, 6],
auto červené [*c*, 1],
banka [*c*, 7],
dom [*d*, 4],
štadión [*e*, 3],
fabrika [*e*, 5],
hrad [*h*, 8].

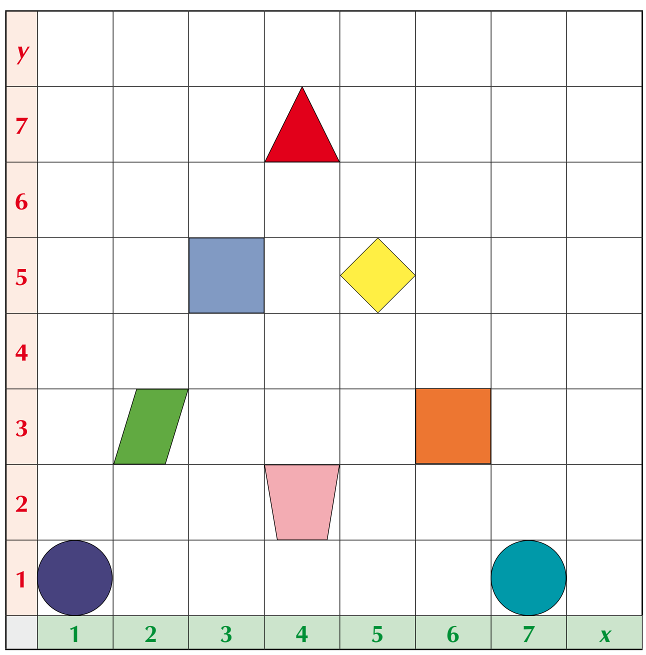
Pri rôznych hrách, v ktorých sa používa hracia doska alebo plán hry, je **poloha (pozícia) predmetu** zapísaná **dvojicou prvkov.**

Dohoda
Dvojicu zapíšeme do hranatých zátvoriek.

V matematike zapisujeme **polohu (pozíciu)** bodu v rovine **dvojicou prvkov**, zvyčajne **čísel** alebo **premenných**.
Dvojicu zapisujeme v hranatých zátvorkách a nazývame **usporiadaná dvojica**.

Dvojicu nazývame **usporiadaná** preto, lebo **záleží na poradí** prvkov.
Usporiadanú dvojicu premenných *t* a *s* zapíšeme [*t*, *s*], usporiadanú dvojicu čísel 2 a 3 zapíšeme [2, 3],
usporiadanú dvojicu premenných *x* a *y* zapíšeme [*x*, *y*].

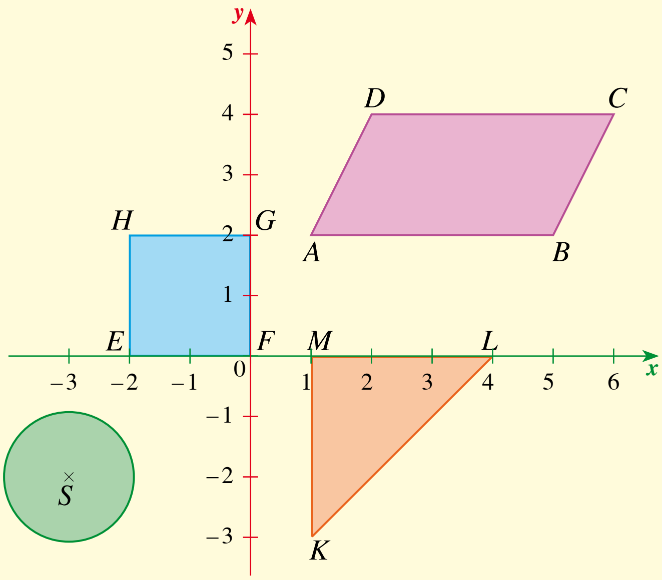
2. Na obrázku sú geometrické tvary. Zapíš ich **polohu** pomocou usporiadaných dvojíc čísel [*x*, *y*] podobne, ako v predchádzajúcej úlohe.



Riešenie 2.

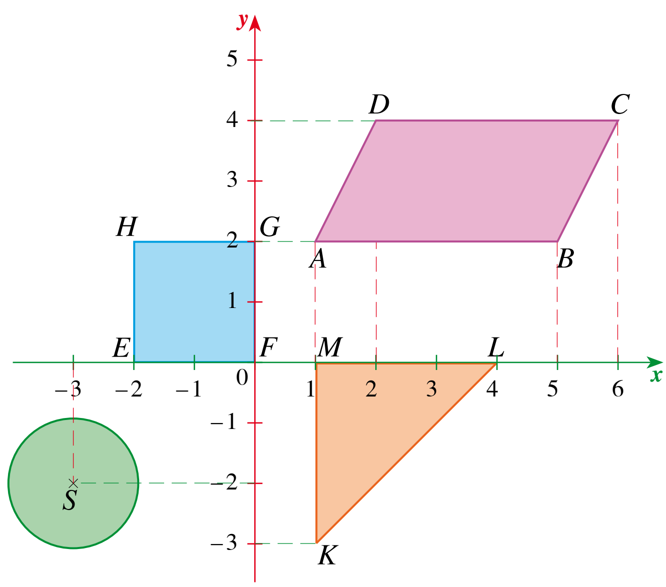
Polohu každého geometrického útvaru zapíšeme pomocou **usporiadanej dvojice čísel** do hranatých zátvoriek.
Prvé v dvojici uvedieme číslo z riadka označeného *x* a druhé uvedieme číslo zo stĺpca označeného *y*.
Takto zapísaná poloha zobrazených útvarov je:
krúžok [1, 1],
kosodĺžnik [2, 3],
štvorec [3, 5],
lichobežník [4, 2],
trojuholník [4, 7],
štvorec [5, 5],
štvorec [6, 3],
krúžok [7, 1].

3. Zapíš polohu štvoruholníkov a trojuholníka pomocou polohy ich vrcholov a polohu kruhu zapíš pomocou polohy jeho stredu.



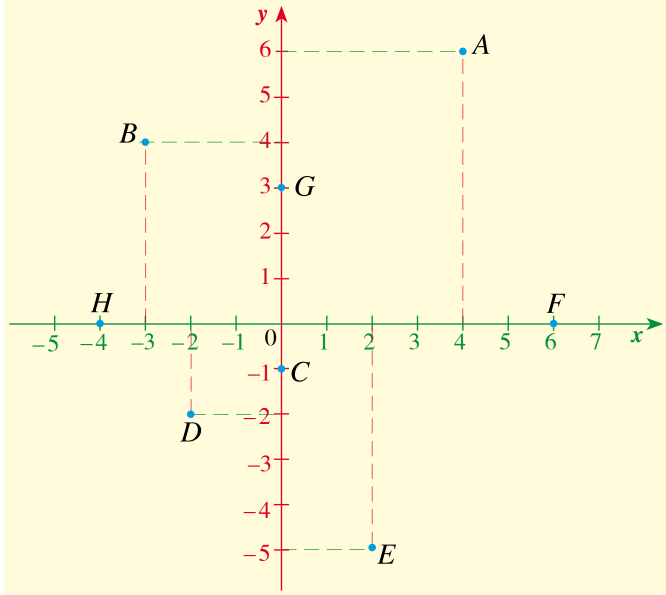
Riešenie 3.

Cez každý vrchol geometrického útvaru a zo stredu kružnice vedieme rovnobežku s osou x a s osou y.
Priesečníky rovnobežiek s osami nám umožnia určiť čísla pre usporiadané dvojice. Tie zapíšeme do hranatých zátvoriek, najprv x a potom y.



kosodĺžnik *ABCD*:	$A[1, 2]$, $B[5, 2]$, $C[6, 4]$, $D[2, 4]$
trojuholník *KLM*:	$K[1, -3]$, $L[4, 0]$, $M[1, 0]$
štvorec *EFGH*:	$E[-2, 0]$, $F[0, 0]$, $G[0, 2]$, $H[-2, 2]$
kruh so stredom *S*:	$S[-3, -2]$

4. Zapíš polohu bodov roviny $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ pomocou usporiadaných dvojíc $[x, y]$.



Riešenie 4.

V predchádzajúcej úlohe sme cez vrcholy viedli rovnobežky s osou x a s osou y. V tejto úlohe sú už rovnobežky zostrojené. Zelenou farbou sú označené rovnobežky s osou x a čísla na osi x. Červenou farbou sú označené rovnobežky s osou y a čísla na osi y. Potom
$A[4, 6]$, $B[-3, 4]$, $D[-2, -2]$, $E[2, -5]$
$F[6, 0]$, $H[-4, 0]$
$G[0, 3]$, $C[0, -1]$

V úlohách 3 a 4 sme sa zaoberali polohou bodov a útvarov v pravouhlej sústave súradníc.

Ak sú súradnicové osi číselné osi, tak polohu každého bodu v rovine môžeme zapísať pomocou dvoch čísel, ktoré nazývame **súradnicami bodu**. Uvádzame ich v poradí x a y a zapisujeme v hranatých zátvorkách $[x, y]$.
Prvé číslo v dvojici nazývame **prvá súradnica bodu** (alebo x-ová súradnica), druhé číslo v dvojici nazývame **druhá súradnica bodu** (alebo y-ová súradnica).
Súradnice bodov určujeme pomocou **priesečníkov rovnobežiek s príslušnými súradnicovými osami**.
Na obrázkoch sú zelenou farbou označené čísla na osi x aj príslušné rovnobežky na určenie x-ových súradníc.
Červenou farbou sú označené čísla na osi y a príslušné rovnobežky na určenie y-ových súradníc.

Pravouhlú sústavu súradníc v rovine tvoria dve na seba kolmé priamky, ktoré nazývame **súradnicové osi.**
Vodorovnú os označujeme zvyčajne $\boldsymbol{x}$, os na ňu kolmú zvyčajne $\boldsymbol{y}$.
Priesečník súradnicových osí nazývame **začiatok sústavy súradníc**.

§

Súradnicové osi nazývame aj osi súradníc. Jednotky dĺžky na nich vyznačené sú zvyčajne 1 cm. Podľa potreby používame aj 0,5 cm, 2 cm. Dokonca používame na každej osi aj rôzne jednotky, napríklad na osi x 1 cm, na osi y 0,5 cm.

Viete, že...?

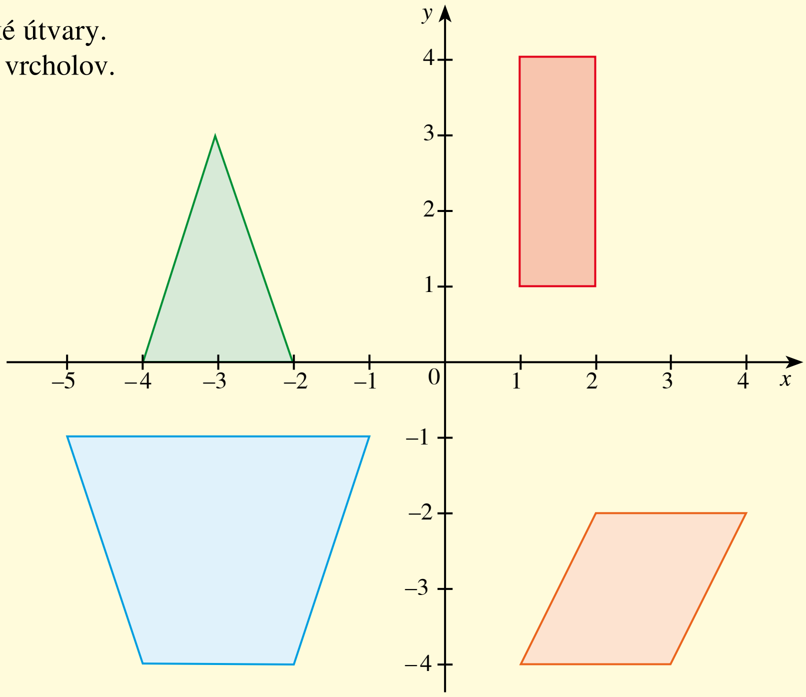
Existuje viacero súradnicových sústav. **Najznámejšia je karteziánska sústava súradníc** (iné názvy: karteziánska súradnicová sústava, karteziánsky systém súradníc). Názov má odvodený od mena René Descarta (v latinčine Renatus Cartesius), ktorý ju zaviedol.
René Descartes (1596 – 1650), významný francúzsky matematik, fyzik a filozof.
Jeho všeobecne známy výrok je:

Cogito ergo sum. (Myslím, teda som.)

Zdroj: Bednár, Roman: Najväčší géniovia západnej civilizácie. 1. vyd., Book & Book : Bratislava, 1995

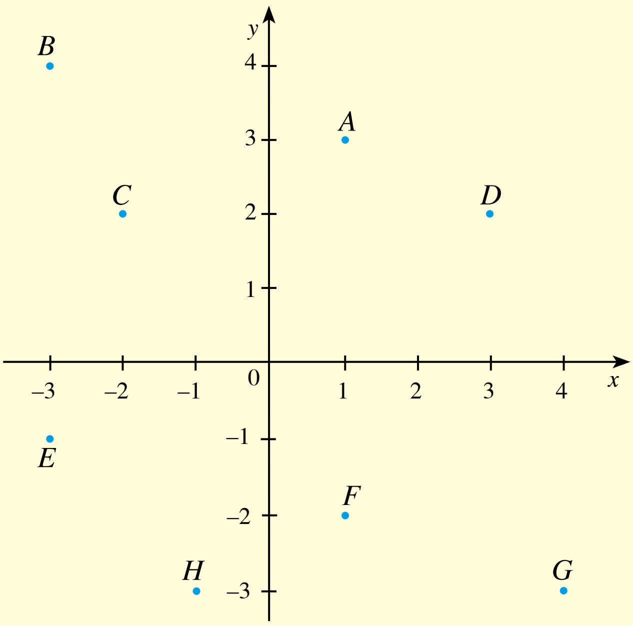
Karteziánska sústava súradníc je taká pravouhlá sústava súradníc, v ktorej sú **jednotky dĺžky** pre **obidve súradnicové osi rovnaké**. §

5. Na obrázku sú narysované geometrické útvary. Zapíš polohu útvarov pomocou súradníc ich vrcholov.

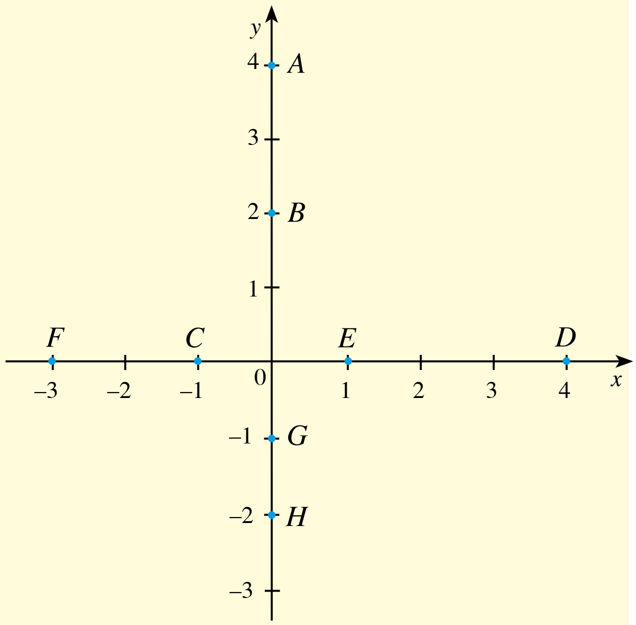


Poznámka
Ak ďalej v texte nepovieme inak, tak pod sústavou súradníc rozumieme **karteziánsku sústavu súradníc.**

6. Na obrázku sú body roviny A, B, C, D, E, F, G, H. Zapíš ich polohu pomocou **súradníc**.



7. Na obrázku sú body roviny A, B, C, D, E, F, G, H. Zapíš ich polohu pomocou **súradníc**.

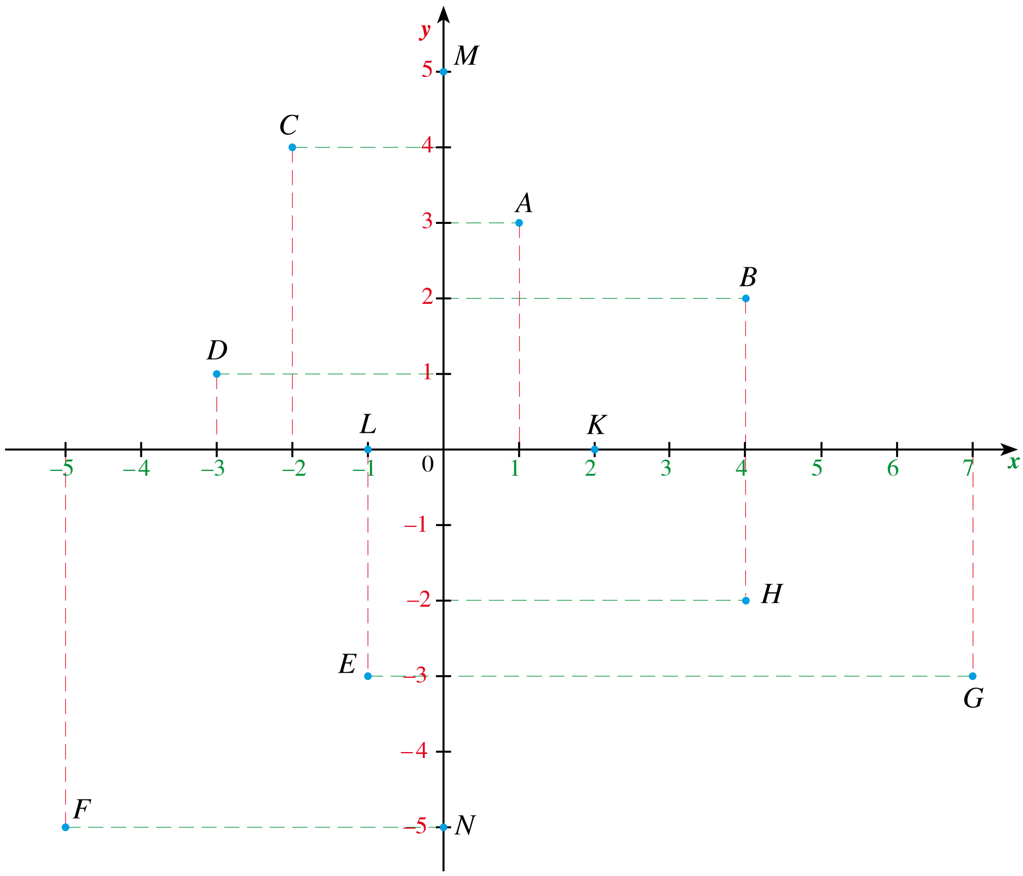


8. Zobraz v sústave súradníc body:
$A[1, 3]$, $B[4, 2]$, $C[-2, 4]$, $D[-3, 1]$, $E[-1, -3]$, $F[-5, -5]$, $G[7, -3]$, $H[4, -2]$, $K[2, 0]$, $L[-1, 0]$, $M[0, 5]$, $N[0, -5]$

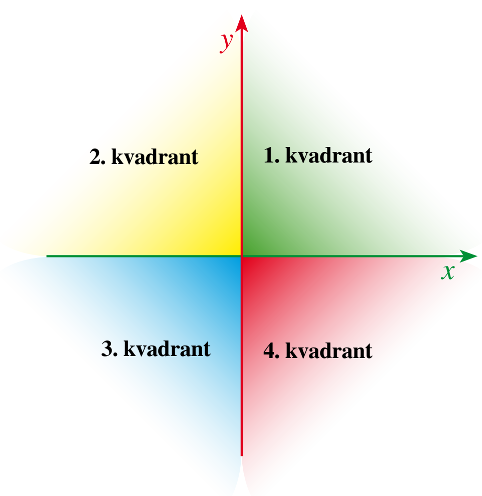
Riešenie 8.

Narysujeme sústavu súradníc s jednotkou dĺžky na osiach 1 cm. Na označenie použijeme: vodorovnú os x a na ňu kolmú (zvislú) os y. Potom pomocou rovnobežiek s osami x a y zobrazíme body v sústave súradníc. Zelenou farbou x-ové súradnice bodu a červenou farbou y-ové súradnice. Prvé číslo v dvojici je x-ová súradnica, druhé číslo v dvojici je y-ová súradnica.

Napríklad: $A[1, 3]$ — x-ová súradnica je 1 (rovnobežka s osou x prechádza cez bod 3 na osi y)
y-ová súradnica je 3 (rovnobežka s osou y prechádza cez bod 1 na osi x)
$E[-1, -3]$ — x-ová súradnica je -1 (rovnobežka s osou x prechádza cez bod -3 na osi y)
y-ová súradnica je -3 (rovnobežka s osou y prechádza cez bod -1 na osi x)



Súradnicové osi delia rovinu na 4 časti, ktoré nazývame kvadranty. Číslujeme ich proti smeru pohybu hodinových ručičiek:



Problémová úloha

Aké hodnoty (kladné alebo záporné) nadobúdajú súradnice bodov ležiace v jednotlivých farebne vyznačených kvadrantoch sústavy súradníc?

Projektová úloha

Body patria nielen medzi matematické pojmy ale patria aj medzi pojmy v predmetoch ako sú fyzika, geografia, chémia...

Vypracujte projekt, v ktorom uvediete pojem „bod“ v rôznych súvislostiach.

9. Vyznač v sústave súradníc body:

a) $A[1, 6]$, $B[2, 5]$, $C[6, -1]$, $D[2, -5]$
b) $E[-1, 6]$, $F[-5, 3]$, $G[-1, -6]$, $H[-5, -3]$
c) $K[7, 0]$, $L[-7, 0]$, $M[0, -4]$, $N[0, 4]$

10. **a)** Narysuj v sústave súradníc štvorec so stranou dĺžky 3 cm. Zapíš súradnice jeho vrcholov.
b) Narysuj v sústave súradníc pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 4 cm a 3 cm. Zapíš súradnice jeho vrcholov.

Riešenie 10.

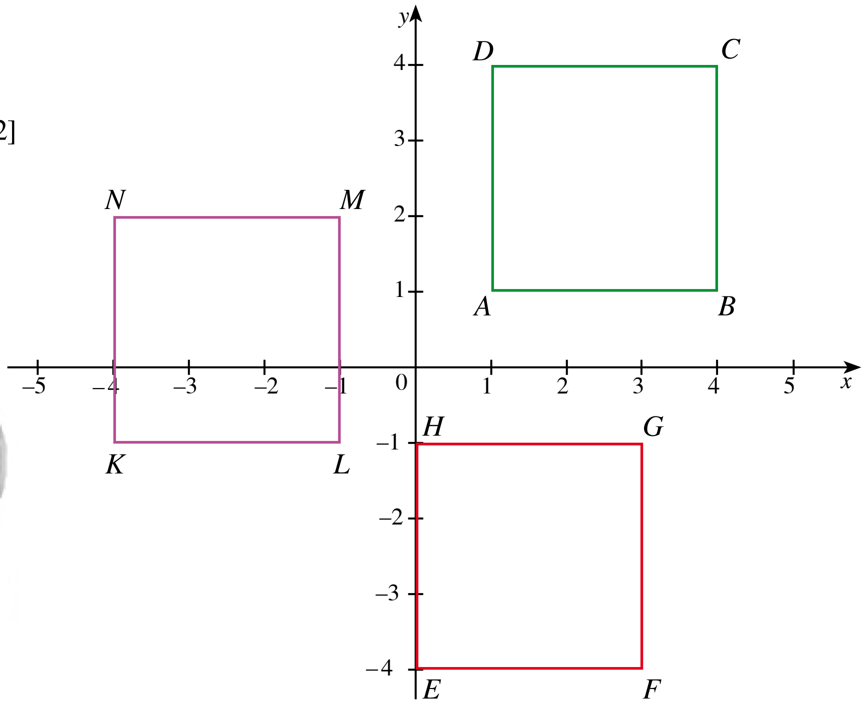
Zvolíme si sústavu súradníc s jednotkou dĺžky na osiach 1 cm, lebo štvorec a trojuholník majú dĺžky strán uvedené v cm. Geometrické útvary môžeme do sústavy súradníc umiestniť viacerými spôsobmi. Vhodné je jednu zo strán útvaru narysovať rovnobežnú s osou x alebo s osou y.

a) Narysujeme tri štvorce so stranou dĺžky 3 cm. Označíme ich vrcholy a vedieme nimi rovnobežky s osami x a y. Priesečníky rovnobežiek s osami určujú súradnice bodov. Súradnice vrcholov štvorcov sú:

zelený štvorec:
$A[1, 1]$, $B[4, 1]$, $C[4, 4]$, $D[1, 4]$

červený štvorec:
$E[0, -4]$, $F[3, -4]$, $G[3, -1]$, $H[0, -1]$

fialový štvorec:
$K[-4, -1]$, $L[-1, -1]$, $M[-1, 2]$, $N[-4, 2]$

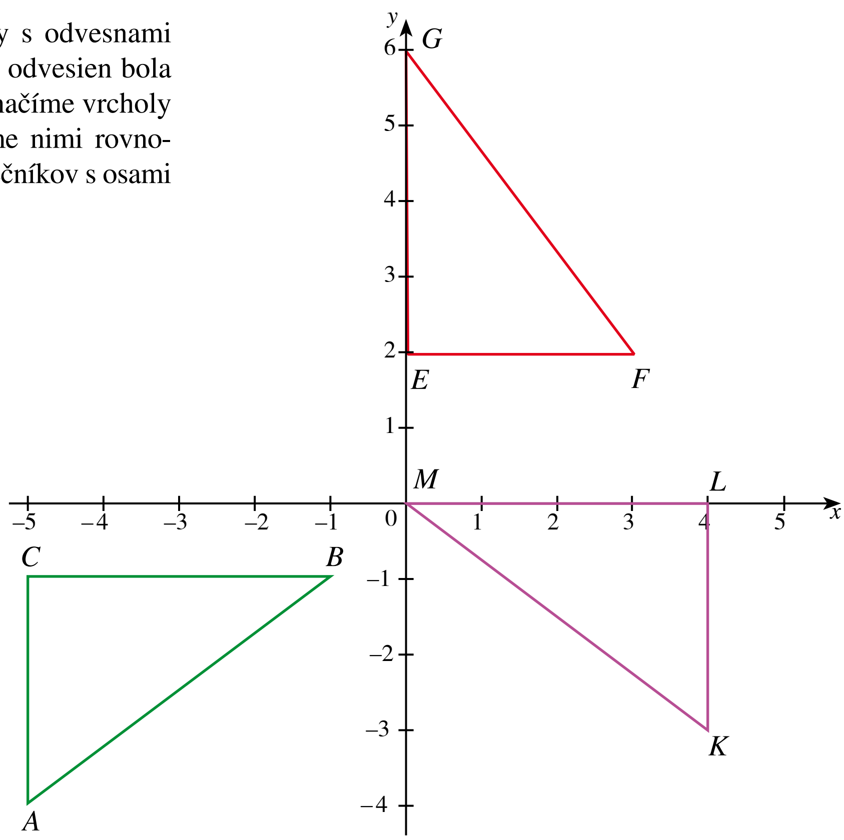


b) Narysujeme tri pravouhlé trojuholníky s odvesnami s dĺžkou 4 cm a 3 cm tak, aby jedna z odvesien bola rovnobežná s niektorou z osí x a y. Označíme vrcholy trojuholníkov a podľa potreby vedieme nimi rovnobežky s osami x a y. Pomocou ich priesečníkov s osami určujeme súradnice vrcholov.
Súradnice vrcholov trojuholníkov sú:

zelený trojuholník:
$A[-5, -4]$, $B[-1, -1]$, $C[-5, -1]$

červený trojuholník:
$E[0, 2]$, $F[3, 2]$, $G[0, 6]$

fialový trojuholník:
$K[4, -3]$, $L[4, 0]$, $M[0, 0]$



11.

a) Narysuj do sústavy súradníc štvorec so stranou dĺžky 4 cm. Zapíš súradnice jeho vrcholov. Uveď aspoň tri riešenia.

b)* Narysuj do sústavy súradníc pravouhlý trojuholník s odvesnami dlhými 4 cm. Zapíš súradnice jeho vrcholov. Uveď aspoň tri riešenia.

c) Narysuj do sústavy súradníc obdĺžnik so stranami dĺžky 5 cm a 3 cm. Zapíš súradnice jeho vrcholov. Uveď aspoň tri riešenia.

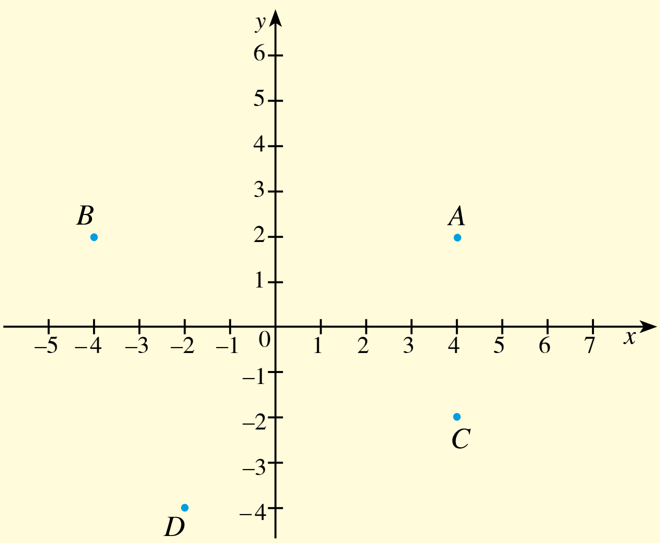
d)* Narysuj do sústavy súradníc lichobežník so základňami dĺžky 4 cm, 2 cm a výškou 3 cm. Zapíš súradnice jeho vrcholov. Uveď aspoň tri riešenia.

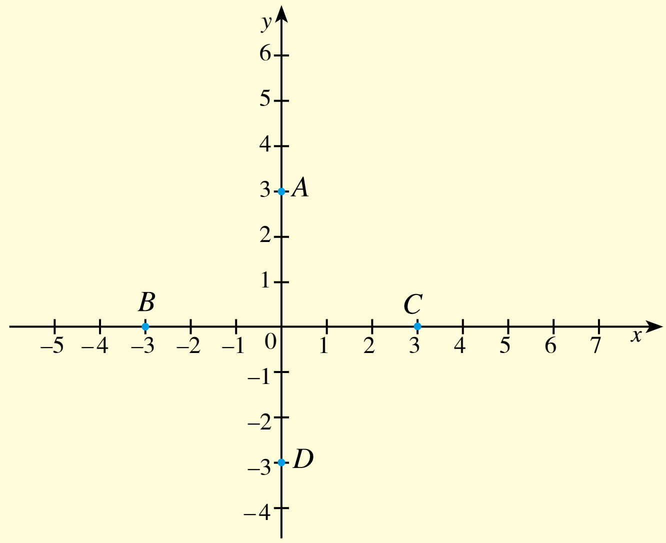
12.

Na obrázkoch sú v sústave súradníc zobrazené štyri body.

a) Ktorý z bodov *A*, *B*, *C*, *D* má súradnice [4, –2]?

b) Ktorý z bodov *A*, *B*, *C*, *D* má súradnice [–3, 0]?

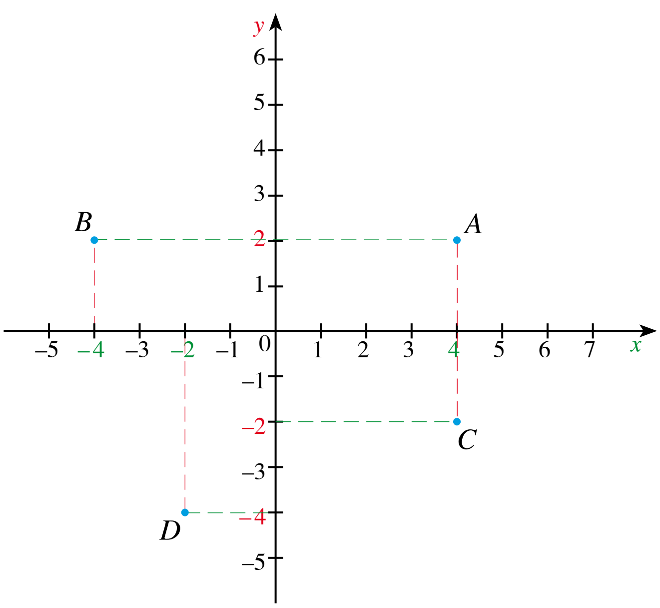


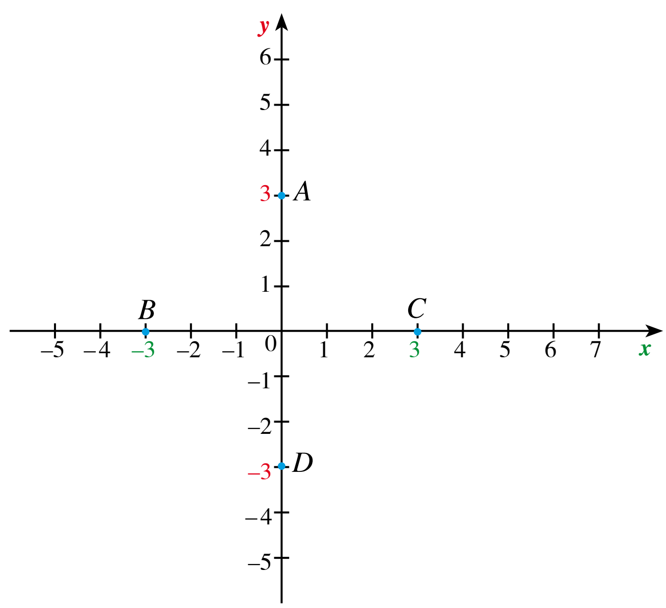


Riešenie 12.

a) Úlohu vyriešime tak, že určíme súradnice všetkých bodov a potom ich porovnáme s dvojicou [4, –2]. Súradnice bodov určíme pomocou rovnobežiek s osami ***x*** a ***y*** a ich priesečníkov s týmito osami (obrázok).

b) Každému bodu priradíme jeho súradnice a porovnáme ich so súradnicami hľadaného bodu. Súradnice bodov *A*, *B*, *C*, *D* vyznačíme farebne: ***x*-ovú zelenou farbou**, ***y*-ovú červenou farbou**.

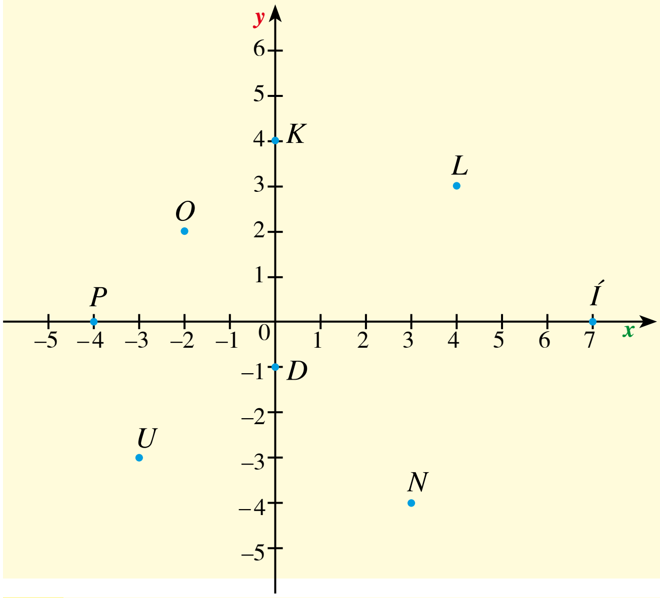




Body majú súradnice: *A*[4, 2], *B*[–4, 2], *C*[4, –2], *D*[–2, –4]. Súradnice [4, –2] má bod ***C***.

Body majú súradnice: *A*[0, 3], *B*[–3, 0], *C*[3, 0], *D*[0, –3]. Súradnice [–3, 0] má bod ***B***.

13. Na obrázku je v sústave súradníc vyznačených 8 bodov. Vedľa neho je tabuľka s ich označením. Zapíš do zošita chýbajúce súradnice bodov z tabuľky.



body	P	O	L	U	D	N	$Í$	K
súradnice	[,]	[,]	[,]	[,]	[,]	[,]	[,]	[,]

Projektová úloha

Kartografia je vedný odbor, v ktorom sa pri zhotovovaní máp používajú rôzne sústavy súradníc. Nájdite na internete čo najviac informácií na túto tému a **spracujte** ich formou **prezentácie** alebo **referátu**.

14.

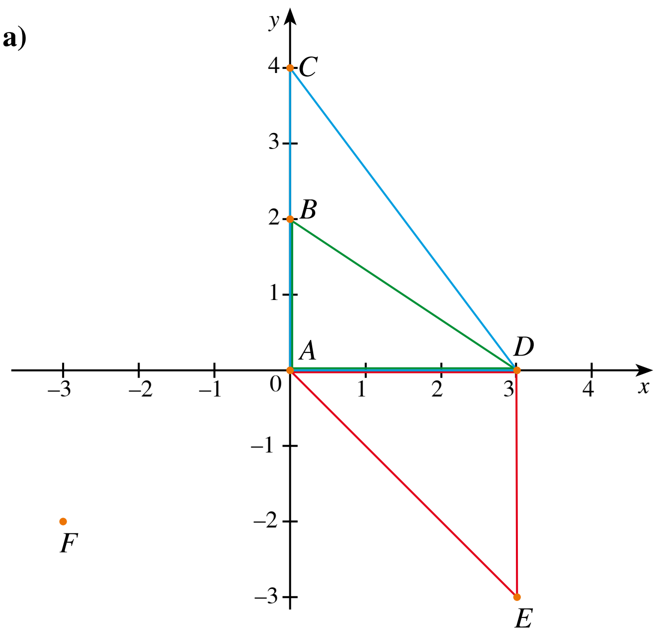
a) Ktoré trojice utvorené z bodov $A[0, 0]$, $B[0, 2]$, $C[0, 4]$, $D[3, 0]$, $E[3, –3]$, $F[–3, –2]$ môžu byť vrcholmi pravouhlého trojuholníka?

b) Ktoré štvorice utvorené z bodov $A[1, 1]$, $B[3, 1]$, $C[3, 3]$, $D[1, 3]$, $E[–1, 1]$, $F[1, –1]$, $G[–2, –2]$ môžu byť vrcholmi štvorca?

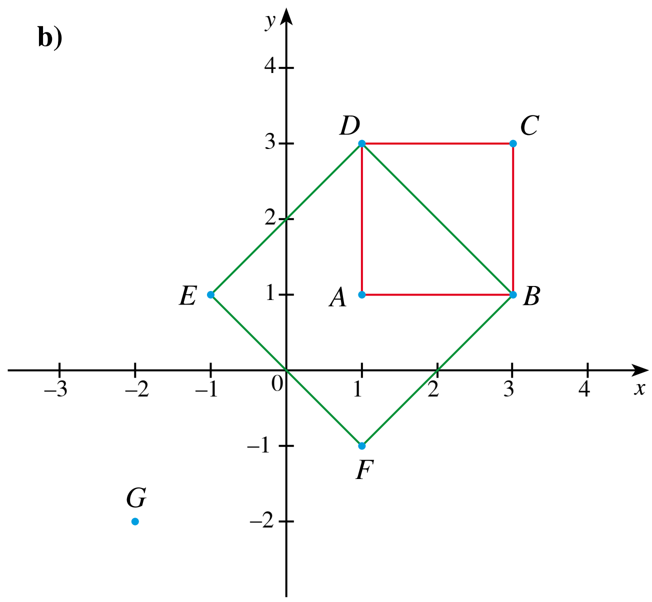
Riešenie 14.

Úlohu vyriešime tak, že dané body zobrazíme v sústave súradníc.
Vieme, že prvé číslo v dvojici je x-ová súradnica a druhé číslo je y-ová súradnica bodu.

a)



b)



a) Vrcholmi pravouhlého trojuholníka môžu byť tieto trojice bodov:
$A[0, 0]$, $B[0, 2]$, $D[3, 0]$
$A[0, 0]$, $C[0, 4]$, $D[3, 0]$
$A[0, 0]$, $D[3, 0]$, $E[3, –3]$

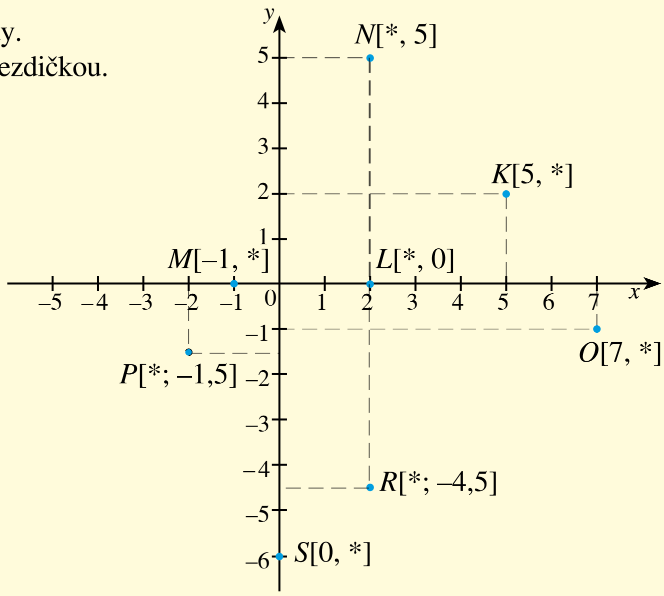
b) Vrcholmi štvorca môžu byť tieto štvorice bodov:
$A[1, 1]$, $B[3, 1]$, $C[3, 3]$, $D[1, 3]$
$E[–1, 1]$, $F[1, –1]$, $B[3, 1]$, $D[1, 3]$

15.

a) Ktoré trojice utvorené z bodov $A[-3, 0]$, $B[-1, 0]$, $C[0, 3]$, $D[1, 0]$, $E[3, 0]$, $F[0, -4]$, $G[-3, -2]$ môžu byť vrcholmi rovnoramenného trojuholníka?

b) Ktoré štvorice utvorené z bodov $A[-4, -1]$, $B[-1, -1]$, $C[-1, -2]$, $D[-4, 1]$, $E[-1, 1]$, $F[2, 1]$, $G[2, -1]$, $H[2, -2]$, môžu byť vrcholmi obdĺžnika?

16. Na obrázku sú v sústave súradníc zobrazené body.
Urči chýbajúce súradnice týchto bodov označené hviezdičkou.



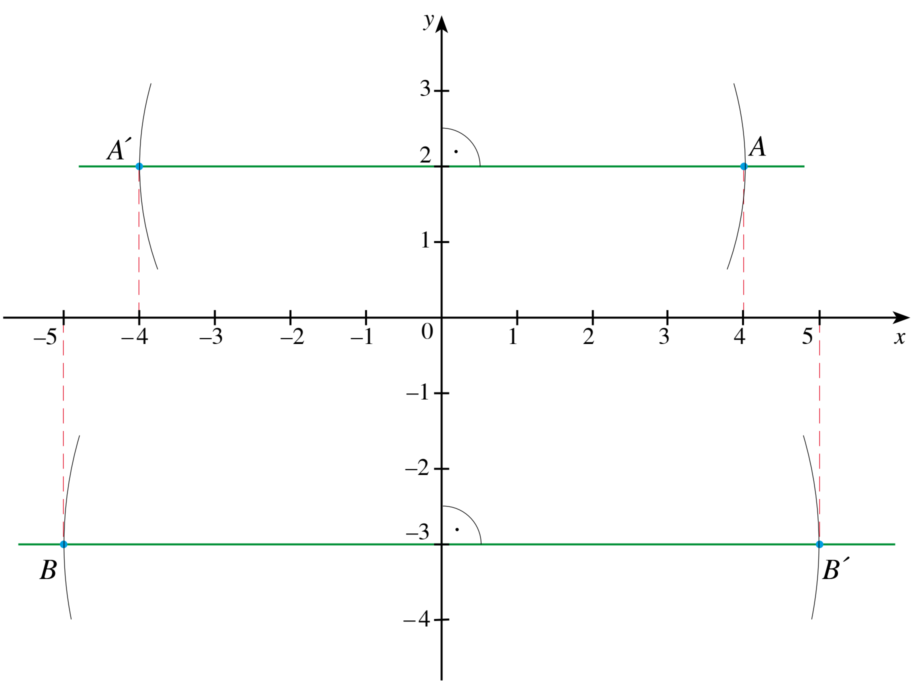
17.

a) Dané sú body $A[4, 2]$, $B[-5, -3]$. Napíš súradnice bodu A', ktorý je súmerný podľa osi y s bodom A a súradnice bodu B', ktorý je súmerný podľa osi y s bodom B.

b) Dané sú body $C[-1, 5]$, $D[3, -4]$. Napíš súradnice bodu C', ktorý je súmerný podľa osi x s bodom C a súradnice bodu D', ktorý je súmerný podľa osi x s bodom D.

Riešenie 17.

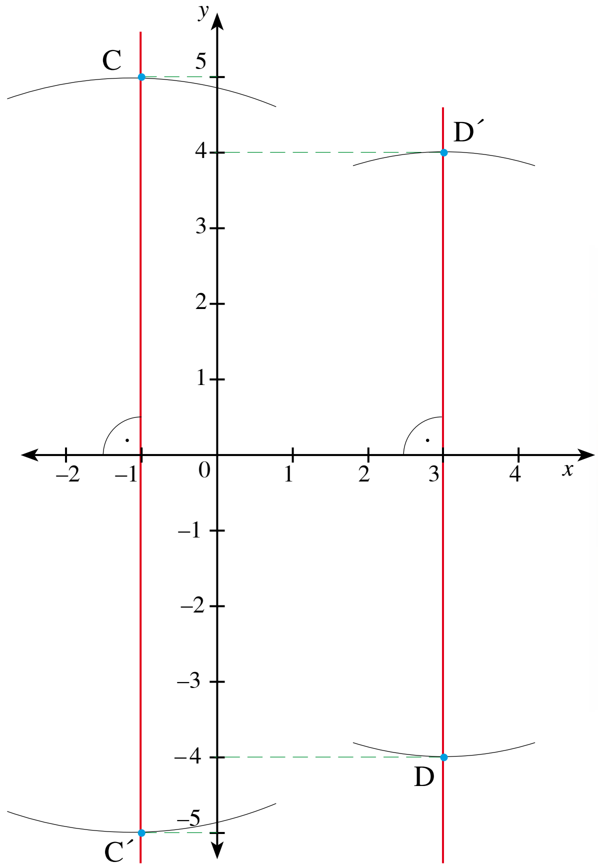
Úlohu môžeme riešiť viacerými spôsobmi.
Dané body zakreslíme do sústavy súradníc, v ktorej si za jednotku dĺžky na osiach zvolíme 1 cm. Potom podľa pravidiel konštrukcie obrazu bodu v osovej súmernosti zostrojíme obrazy daných bodov a zapíšeme ich súradnice.



Pomôcka
Pripomíname, že v osovej súmernosti podľa osi o zostrojíme obraz bodu A pomocou **kolmice na os** súmernosti o.
Platí: body A, A' ležia na kolmici, pričom $|A', o| = |A, o|$. Vzdialenosť A a A' od osi o je rovnaká.
V tejto úlohe $o \equiv y$.

Body súmerné podľa osi y s bodmi A, B sú: $A'[-4, 2]$, $B'[5, -3]$.

b)



Problémová úloha

Zapíšte súradnice bodu M, ktorý je súmerný s bodom A podľa osi x.
Zapíšte súradnice bodu N, ktorý je súmerný s bodom B podľa osi y.
Úlohu riešte pre polohy bodov A, B v jednotlivých kvadrantoch.

Body súmerné podľa osi x s bodmi C, D sú:
$C´[-1, -5]$, $D´[3, 4]$.

18.*

a) Dané sú body $K[-1, 4]$, $L[1, 6]$, $M[-5, -4]$, $N[2, -3]$. Napíš súradnice bodov, ktoré sú s nimi súmerné podľa osi y.
b) Dané sú body $D[1, 2]$, $E[-3, 4]$, $F[5, -2]$, $G[-4, -1]$. Napíš súradnice bodov, ktoré sú s nimi súmerné podľa osi x.

19.

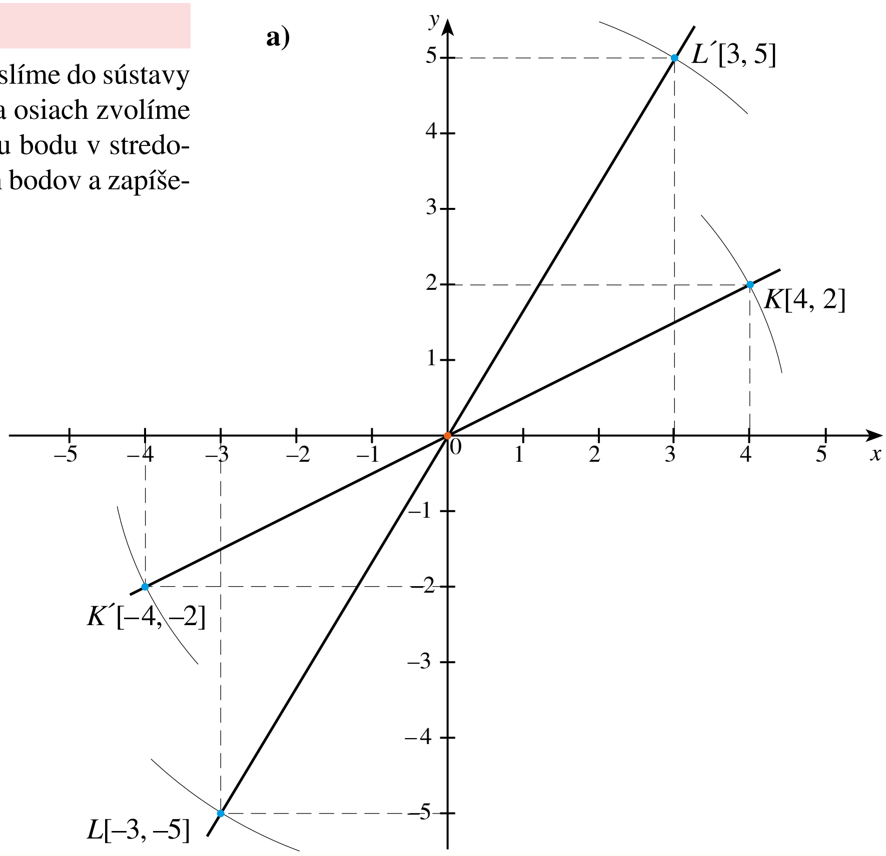
a) Dané sú body $K[4, 2]$, $L[-3, -5]$. Napíš súradnice bodov, ktoré sú s nimi súmerné podľa začiatku sústavy súradníc.
b) Dané sú body $M[-2, -4]$, $N[2, -5]$. Napíš súradnice bodov, ktoré sú s nimi súmerné podľa bodu $S[2, -3]$.

Riešenie 19.

Úlohu vyriešime tak, že dané body zakreslíme do sústavy súradníc, v ktorej si za jednotku dĺžky na osiach zvolíme 1 cm. Podľa pravidiel konštrukcie obrazu bodu v stredovej súmernosti zostrojíme obrazy daných bodov a zapíšeme ich súradnice.

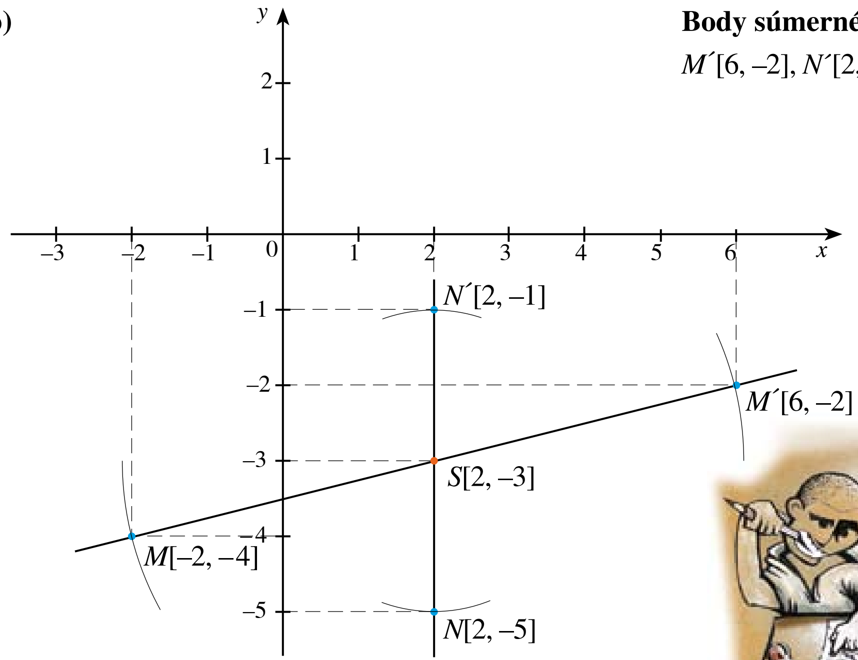
Pomôcka
V stredovej súmernosti podľa stredu S zostrojíme obraz bodu A pomocou priamky, ktorej patria body A a S. Potom pomocou kružidla zostrojíme na tejto priamke bod $A´$, pre ktorý platí: $|A´S| = |AS|$.
Vzdialenosť bodu $A´$ od stredu S sa rovná vzdialenosti bodu A od stredu S.

a)



Body súmerné s bodmi K a L podľa začiatku sústavy súradníc sú: $K´[-4, -2]$, $L´[3, 5]$.

b)



Body súmerné podľa bodu $S[2, –3]$ s bodmi M a N sú:
$M´[6, –2]$, $N´[2, –1]$.

20.*

a) Dané sú body $P[3, 5]$, $R[–3, –5]$, $Q[–3, 5]$, $T[3, –5]$. Napíš súradnice bodov, ktoré sú s nimi stredovo súmerné podľa začiatku sústavy súradníc.
b) Dané sú body $A[3, 2]$, $B[–6, 5]$, $C[–2, –3]$, $D[6, –4]$, $E[0, –4]$, $F[–3, 0]$. Napíš súradnice bodov, ktoré sú s nimi stredovo súmerné podľa bodu $S[1, 3]$.

Problémová úloha

Zapíšte súradnice bodov, ktoré sú súmerné podľa začiatku sústavy súradníc s bodmi:
a) A, ktorý leží v 1. kvadrante,
b) B, ktorý leží v 2. kvadrante,
c) C, ktorý leží v 3. kvadrante,
d) D, ktorý leží v 4. kvadrante.

Viete, že...?

Významný nemecký matematik Gottfried Wilhelm **Leibniz** zaviedol označenie pre súradnicové osi:
abscisa – os x, ordináta – os y
Starovekí Gréci poznali podobné výrazy:
pre abscisu – absindere s významom odrezať,
pre ordinátu – tetagmenos – usporiadaný.
Zdroj: Pavlič, G.: Školská encyklopédia matematiky. Príroda : Bratislava, 2001.

21.**

a) Dané sú dva body $A[0, 2]$, $B[–3, 0]$. Napíš súradnice ďalších dvoch bodov tak, aby tieto body spolu tvorili vrcholy štvorca. Uveď aspoň dve riešenia.
b) Dané sú dva body $C[–3, –3]$, $D[2, –2]$. Napíš súradnice ďalších dvoch bodov tak, aby tieto body spolu tvorili vrcholy obdĺžnika. Uveď aspoň dve riešenia.
c) Dané sú dva body $E[–1, –4]$, $F[2, –3]$. Napíš súradnice tretieho bodu tak, aby tieto body spolu tvorili vrcholy pravouhlého trojuholníka. Uveď aspoň dve riešenia.
d) Dané sú dva body $G[0, –5]$, $H[–4, 0]$. Napíš súradnice tretieho bodu tak, aby tieto body spolu tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka. Uveď aspoň dve riešenia.

22.

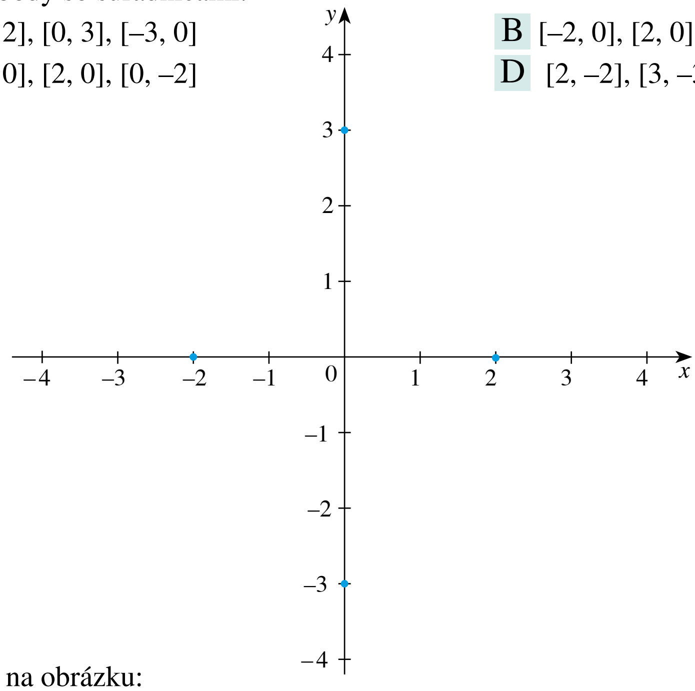
a) Narysuj v sústave súradníc štvorec $ABCD$ so stranou dlhou 4 cm, ak je daný jeho vrchol $A[–1, 2]$. Napíš súradnice ďalších troch vrcholov narysovaného štvorca.
b) Narysuj v sústave súradníc obdĺžnik $DEFG$ so stranami dlhými 5 cm a 4 cm, ak je daný jeho vrchol $E[1, –3]$. Napíš súradnice ďalších troch vrcholov narysovaného obdĺžnika.
c)* Narysuj v sústave súradníc rovnostranný trojuholník KLM so stranou dlhou 3 cm, ak je daný jeho vrchol $K[–2, –4]$. Napíš súradnice ďalších dvoch vrcholov narysovaného trojuholníka.
d)* Narysuj v sústave súradníc rovnoramenný trojuholník DEF so základňou DE dlhou 3 cm, výškou na základňu 4 cm, ak je daný jeho vrchol $E[1, –3]$. Napíš súradnice ďalších dvoch vrcholov narysovaného trojuholníka.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

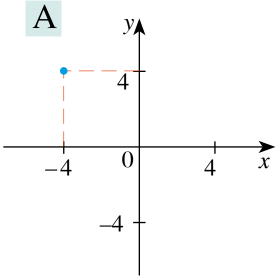
1. Na obrázku sú body so súradnicami:

A [0, –2], [0, 2], [0, 3], [–3, 0]
B [–2, 0], [2, 0], [0, 3], [0, –3]
C [0, –3], [3, 0], [2, 0], [0, –2]
D [2, –2], [3, –3], [–2, 2], [–3, 3]

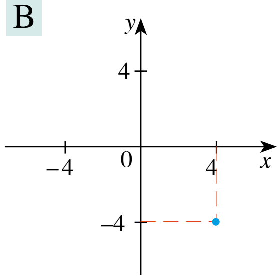


2. Bod $A[-4, 4]$ je na obrázku:

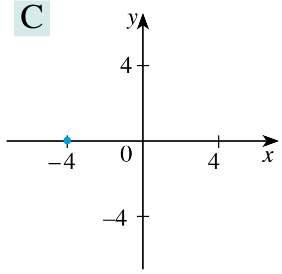
A



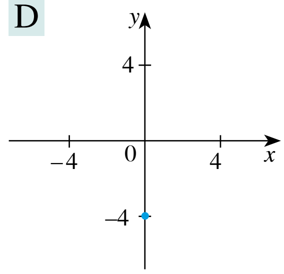
B



C



D



3. Uvedené súradnice troch bodov, ku ktorým môžeme pridať štvrtý bod tak, aby spolu tvorili vrcholy štvorca sú:

A [0, –4], [0, 4], [4, 4]
B [–4, 0], [4, 0], [0, 4]
C [–4, 0], [4, 0], [4, 4]
D [0, 0], [0, –4], [0, 4]

4. Uvedené súradnice troch bodov, ku ktorým môžeme pridať štvrtý bod tak, aby spolu tvorili vrcholy obdĺžnika sú:

A [1, 2], [4, 2], [1, 3]
B [0, 0], [–4, 0], [–2, –1]
C [–2, 0], [1, 0], [–1, –2]
D [0, 0], [0, –2], [0, 2]

5. Tri body **nie sú** vrcholmi pravouhlého trojuholníka:

A $A[0, 1]$, $B[1, 0]$, $C[1, 2]$
B $A[-1, 1]$, $B[-2, 2]$, $C[-3, 1]$
C $A[-2, -4]$, $B[0, 4]$, $C[2, -4]$
D $A[0, 0]$, $B[0, -3]$, $C[1, -3]$

6. V pravouhlej sústave súradníc je k bodu $A[-1, 3]$ súmerný podľa osi x bod so súradnicami:

A [1, 3] B [–3, 1] C [–1, –3] D [3, –1]

7. V pravouhlej sústave súradníc je k bodu $B[1, -4]$ súmerný podľa osi y bod so súradnicami:

A [1, 4] B [–4, –1] C [–4, 1] D [–1, –4]

8. K bodu $C[-1, -5]$ je súmerný podľa začiatku sústavy súradníc bod so súradnicami:

A [–1, –5] B [–5, 1] C [1, 5] D [–1, 5]

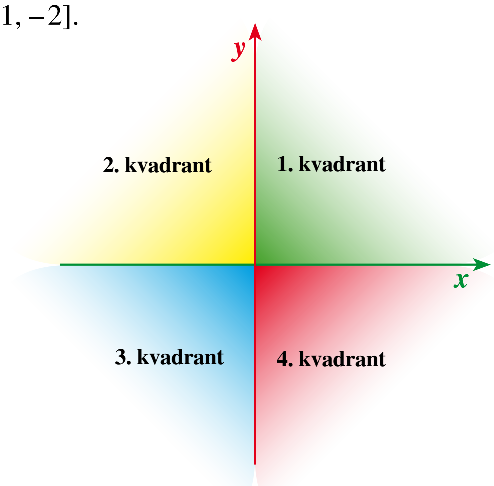
9. K bodu $D[3, -7]$ je súmerný podľa začiatku sústavy súradníc bod so súradnicami:

A [3, 7] B [–3, 7] C [–3, –7] D [3, –7]

Zapamätajte si

Pravouhlá sústava súradníc v rovine je **sústava dvoch na seba kolmých priamok s vyznačenými jednotkami dĺžky.**
Tieto dve priamky sústavy sa nazývajú **súradnicové osi** a označujú sa zvyčajne x a y.
Súradnicové osi sú spravidla číselnými osami.
Vodorovnú os označujeme písmenom $\boldsymbol{x}$ a os na ňu kolmú (zvislú os) označujeme písmenom $\boldsymbol{y}$.
Priesečník súradnicových osí nazývame **začiatok sústavy súradníc**.
V sústave súradníc každému bodu v rovine priraďujeme dve čísla, ktoré nazývame **súradnice bodu**.
Súradnice bodu tvorí **usporiadaná dvojica čísel**, ktoré zapisujeme v hranatých zátvorkách.
Bod A s x-ovou súradnicou 1 a y-ovou súradnicou -2 zapíšeme ako $A[1, -2]$.

Súradnicové osi delia rovinu na 4 časti, ktoré nazývame **kvadranty**.
Číslujeme ich proti smeru pohybu hodinových ručičiek.



5.2 Rôzne spôsoby znázorňovania – grafy závislostí. Súvis grafu s niektorými základnými vlastnosťami závislostí (rast, klesanie, najväčšie a najmenšie hodnoty)

Čo sme sa už učili

Vieme, čo znamená slovo závislosť.
Riešili sme úlohy:
o závislosti počtu žiakov, ktorí sa zúčastnili výletu a celkovej sumy za výlet,
o závislosti počtu porcií pizze a celkovej ceny za ne,
o závislosti počtu kopčekov zmrzliny a celkovej ceny za ne,
o závislosti dvoch veličín, ktorú nazývame priama úmernosť,
o závislosti dvoch veličín, ktorú nazývame nepriama úmernosť.

Vieme, čo znamená slovo **diagram** a z informatiky vieme, ako môžeme **zostaviť tabuľky**, **diagramy** a **grafy** v určitej sústave súradníc v prostredí tabuľkových kalkulátorov, napr. v tabuľkovom kalkulátore EXCEL.

Pozrime sa na niektoré úlohy o závislostiach rôznych veličín.

1. TURISTIKA

Adam ide na turistiku do hôr. Pri plánovaní trasy si vypočíta, koľko hodín mu bude trvať prejdenie celej trasy. Zisťuje, koľko kilometrov môže za určitý počet hodín prejsť. Ak Adam prejde v lesnom teréne za 1 hodinu 3 km:

a) Vypočítaj, koľko kilometrov prejde Adam za 2 hodiny, 3 hodiny, 4 hodiny a za 5 hodín, ak nebude robiť prestávky.

b) Riešenie úlohy zapíš do **tabuľky** a zostroj k nej **graf**.

Riešenie 1.

a) Riešenie je jednoduché.

Za 1 hodinu prejde Adam 3 km.
Za 2 hodiny prejde: $3 \cdot 2 = 6$ km.
Za 3 hodiny prejde: $3 \cdot 3 = 9$ km.
Za 4 hodiny prejde: $3 \cdot 4 = 12$ km.
Za 5 hodín prejde: $3 \cdot 5 = 15$ km.

Úlohu môžeme riešiť aj takto:
Napíšeme si zápis, ktorý vyjadruje **závislosť** počtu hodín (počet hodín – čas t) a počtu prejdených km (počet prejdených kilometrov – dráha s):

$$s = 3 \cdot t$$

Vypočítame hodnotu výrazu $3 \cdot t$, pre $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

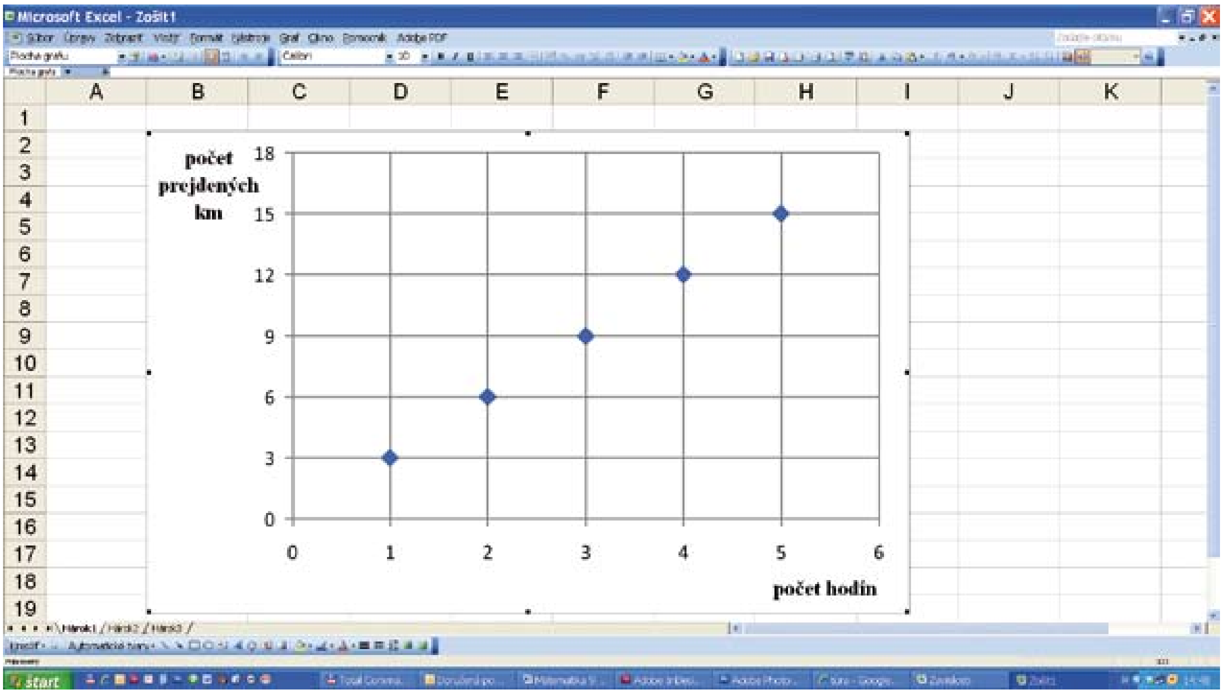
b) Riešenie úlohy zapíšme do tabuľky.

	Turistika				
počet hodín (čas t)	1	2	3	4	5
počet prejdených km (dráha s)	3	6	9	12	15

Z tabuľky ľahko prečítame, koľko kilometrov prešiel Adam za 1 hodinu, 2 hodiny, 3 hodiny a koľko za 4 alebo 5 hodín. Na informatike k tabuľke vkladáme graf, ktorý sprehľadňuje riešenie a umožňuje rýchlejšiu orientáciu v údajoch. Tabuľku aj graf si vytvoríme napr. v tabuľkovom kalkulátore EXCEL.

V tabuľke máme 5 dvojíc [1, 3], [2, 6], [3, 9], [4, 12], [5, 15].

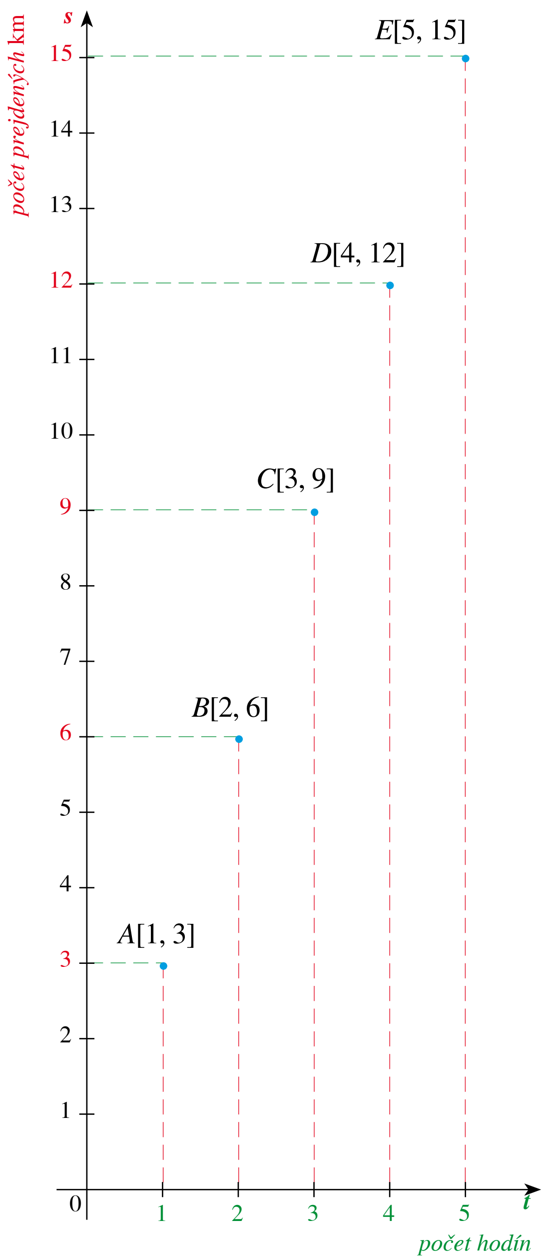
Graf k tabuľke tvorí 5 bodov so súradnicami [1, 3], [2, 6], [3, 9], [4, 12], [5, 15].



Ak nemáme možnosť zostrojiť graf pomocou počítača, zostrojíme ho v sústave súradníc pomocou pravítka.
Vodorovnú os označíme ***t***, os na ňu kolmú – zvislú os – označíme *s*.
Za jednotku dĺžky na súradnicových osiach si zvolíme napr. 1 cm.

Na os ***t*** vyznačíme hodnoty pre počet hodín,
na os ***s*** hodnoty pre počet prejdených kilometrov z tabuľky.
Potom každej dvojici z tabuľky priradíme bod grafu.

Body, ktoré tvoria graf sú:
A[1, 3], *B*[2, 6], *C*[3, 9], *D*[4, 12], *E*[5, 15].



Poznámka
Na označenie osí v sústave súradníc používame namiesto *x* a *y* písmená, ktoré súvisia so vzťahom pre závislosť.

K zdravému spôsobu života patrí pohyb. Pokiaľ je to možné v prírodnom prostredí. Prepočítaj si nasledujúce úlohy, možno budú námetom pre školský výlet.

2. NÁUČNÝ CHODNÍK

Náučný chodník Sivá Brada – Dreveník v okrese Levoča má dĺžku 14,5 km a 8 zastávok s informáciami o prírodných zaujímavostiach v tejto oblasti. Skupina žiakov sa po ňom pohybuje priemernou rýchlosťou 2,5 km/h.

Vypočítaj, koľko kilometrov prejde skupina po 30 minútach, 1 hodine, 1,5 hodine, 2 hodinách, 2,5 hodine, 3 hodinách, 3,5 hodine, 4 hodinách, 4,5 hodine a po 5 hodinách. Výpočet zapíš do **tabuľky** a narysuj k nej **graf** závislosti počtu kilometrov, ktoré skupina prejde, od počtu hodín.

Zdroj: lesytanap.sk

Riešenie 2.

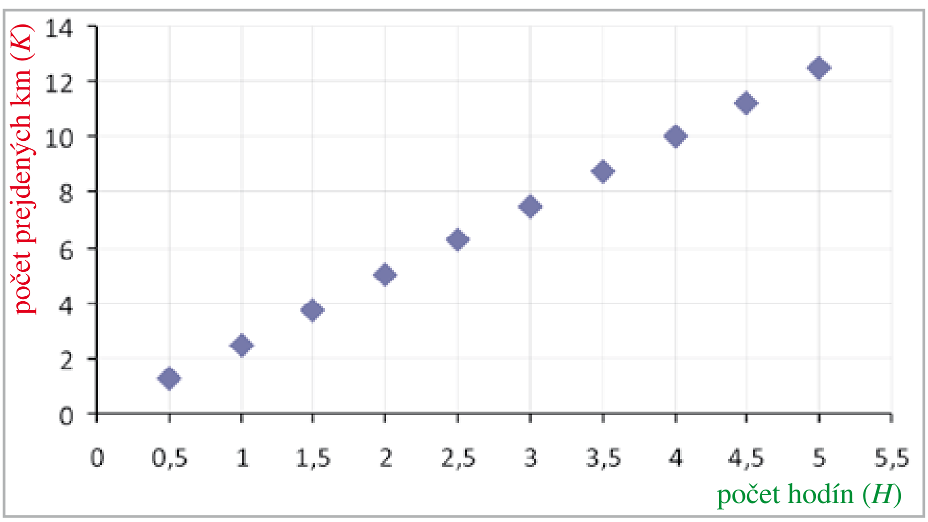
Za 0,5 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25$ km.
Za 1 hodinu skupina prejde: $2{,}5 \cdot 1 = 2{,}5$ km.
Za 1,5 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}75$ km.
Za 2 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 2 = 5$ km.
Za 2,5 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$ km.
Za 3 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$ km.
Za 3,5 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 3{,}5 = 8{,}75$ km.
Za 4 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 4 = 10$ km.
Za 4,5 hodiny skupina prejde: $2{,}5 \cdot 4{,}5 = 11{,}25$ km.
Za 5 hodín skupina prejde: $2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$ km.

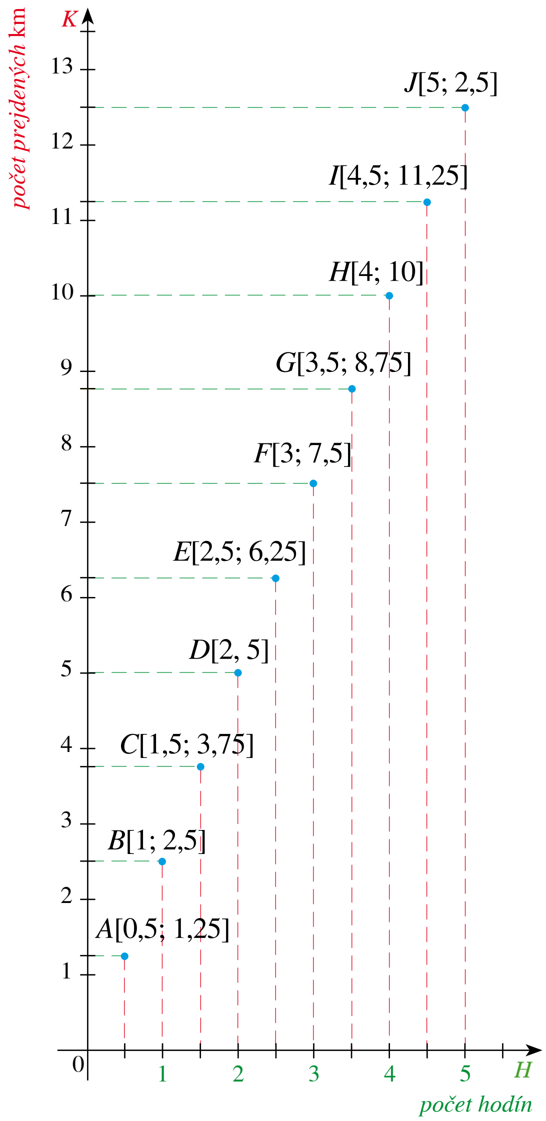
Úlohu môžeme riešiť aj takto:
Vzťah, ktorý vyjadruje **závislosť** počtu hodín (H) a počtu prejdených kilometrov (K) je:
$K = 2{,}5 \cdot H$
Vypočítame hodnotu výrazu $2{,}5 \cdot H$ s premennou H.
Za H postupne dosadíme:
0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5.

Do prvého riadka tabuľky napíšeme počet hodín, ktorý skupina žiakov prejde a do druhého riadka napíšeme príslušný počet kilometrov pri priemernej rýchlosti 2,5 km/h.

	Náučný chodník									
počet hodín (H)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
počet prejdených kilometrov (K)	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,5	8,75	10	11,25	12,5

Graf závislosti počtu prejdených kilometrov od počtu hodín zostrojíme pomocou ECXELu. Graf k tabuľke tvorí 10 bodov.





Aj teraz si graf zostrojíme bez pomoci počítača.
V sústave súradníc si za jednotku dĺžky na osiach znovu zvolíme 1 cm.
Vodorovnú os označíme *H*, zvislú os označíme *K*.
Na os *H* uvedieme hodnoty pre počet hodín, na os *K* zobrazíme hodnoty prejdených kilometrov z tabuľky.
Dvojiciam v tabuľke priradíme body grafu.

Body, ktoré tvoria graf sú:
A[0,5; 1,25], *B*[1; 2,5], *C*[1,5; 3,75], *D*[2, 5], *E*[2,5; 6,25], *F*[3; 7,5], *G*[3,5; 8,75], *H*[4; 10], *I*[4,5; 11,25], *J*[5; 2,5].

Z tabuľky a z grafu je vidieť, že **s rastúcim počtom hodín, rastie aj počet kilometrov**, ktoré prejde skupina pri danej rýchlosti.

3. TURISTIKA V MALEJ FATRE

Na stránke *http://www.malafatra.org* sa píše o turistickej trase Vrátna dolina – Snilovské sedlo – Chrapáky – Kraviarske – Baraniarky, že je to jedna z náročnejších trás v Malej Fatre so začiatkom vo Vrátnej doline. Prevýšenie je viac ako 700 metrov, dĺžka trasy približne 12,8 km. Skupina žiakov z turistického oddielu Svište sa rozhodla túto trasu absolvovať. Pri plánovaní túry riešili tieto úlohy:

a) Ak pôjdeme priemernou rýchlosťou 3,2 km/h, koľko kilometrov nám ešte zostane do cieľa po 1 hodine, 2 hodinách, 3 hodinách a po 4 hodinách cesty?

b) Zostrojíme **graf** závislosti počtu kilometrov, ktoré nám ešte zostávajú do cieľa, od počtu hodín podľa **tabuľky**.

c) Ak vyrazíme na túto trasu o 7.00 h a pôjdeme priemernou rýchlosťou 3,2 km/h, kedy budeme v cieli?

Riešenie 3.

a) Po prvej hodine zostane skupine do cieľa: $12{,}8 - 3{,}2 \cdot 1 = 12{,}8 - 3{,}2 = 9{,}6$ km.
Po druhej hodine zostane skupine do cieľa: $12{,}8 - 3{,}2 \cdot 2 = 12{,}8 - 6{,}4 = 6{,}4$ km.
Po tretej hodine zostane skupine do cieľa: $12{,}8 - 3{,}2 \cdot 3 = 12{,}8 - 9{,}6 = 3{,}2$ km.
Po štvrtej hodine zostane skupine do cieľa: $12{,}8 - 3{,}2 \cdot 4 = 12{,}8 - 12{,}8 = 0$ km.

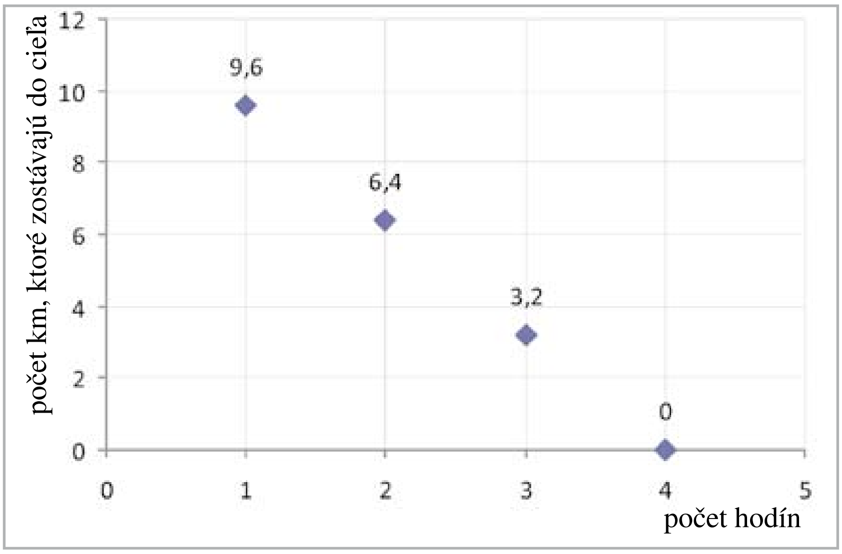
Úlohu niektorí riešili aj takto:
Vzťah, ktorý vyjadruje **závislosť** počtu hodín (čas *t*) a počtu kilometrov, ktoré skupine ešte zostáva do cieľa (dráha *s*), je:

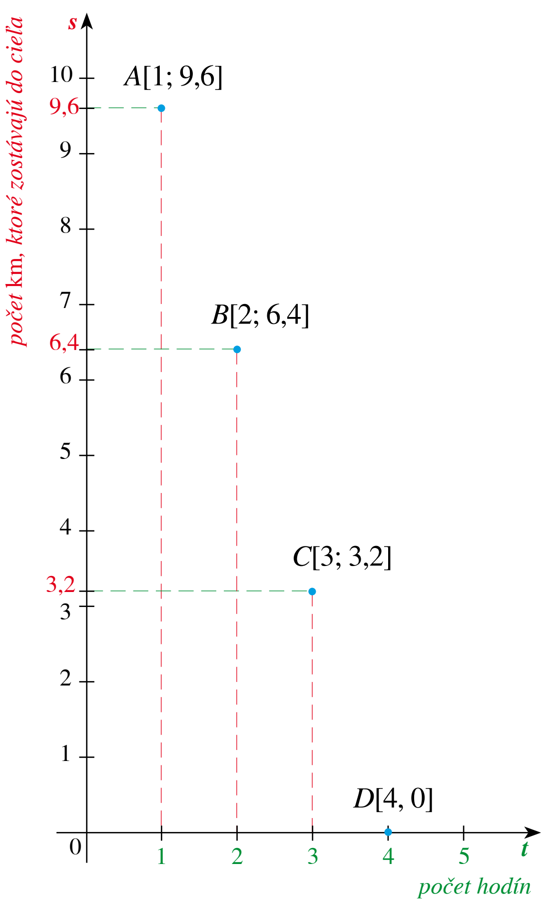
$$s = 12{,}8 - 3{,}2 \cdot t$$

Za premennú *t* vo výraze $12{,}8 - 3{,}2 \cdot t$ sme postupne dosadili hodnoty 1, 2, 3, 4.

	Turistika v Malej Fatre			
počet hodín (čas *t*)	1	2	3	4
počet km, ktorý skupine zostane do cieľa (dráha *s*)	9,6	6,4	3,2	0

b) Na zostrojenie grafu použili EXCEL.





Niektorí zo skupiny zostrojili graf bez pomoci počítača.
V sústave súradníc si za jednotku dĺžky na súradnicových osiach zvolili 1 cm.
Vodorovnú os označili *t*, zvislú os označili *s*.
Každej dvojici v tabuľke priradili bod grafu.

Grafom je súbor štyroch bodov:
A[1; 9,6], *B*[2; 6,4], *C*[3; 3,2], *D*[4, 0].

c) Teraz vypočítali, **o ktorej hodine príde skupina do cieľa**.
Ak skupina pôjde priemernou rýchlosťou 3,2 km/h, tak čas, za ktorý prejde trasu bude:

$$12{,}8 : 3{,}2 = 4 \text{ hodiny}$$

Ak sa skupina žiakov vyberie na túto trasu o 7.00 h, v cieli budú **o 11.00 h**.

Z tabuľky a z grafu je vidieť, že **s rastúcim počtom hodín klesá počet kilometrov**, ktoré zostávajú skupine do cieľa pri danej rýchlosti.

V úlohách 1, 2, 3 sme si zopakovali, v akej závislosti môžu byť veličiny **čas** a **dráha**.
V riešeniach úloh sme znovu pracovali s tabuľkami a grafmi, ktoré poznáte z práce s počítačom (informatika).

4. Chodec kráča na rovnom teréne priemernou rýchlosťou 5,5 km/h.
Zostav **tabuľku** a narysuj **graf** počtu kilometrov, ktoré tento chodec **prejde** za 1 hodinu, 1,5 hodiny, 2 hodiny, 2,5 hodiny, 3 hodiny, 3,5 hodiny, 4 hodiny a za 4,5 hodiny.

5. SLIMÁK
Slimák vraj prejde za 1 hodinu aj 45 metrov. Vypočítaj, koľko metrov prejde slimák za 5 minút, 10 minút, 15 minút, 20 minút, 25 minút a 30 minút.
Odpoveď zapíš do **tabuľky** a narysuj **graf** závislosti slimákom prejdenej dráhy (v metroch) od času (v minútach).

6. SKAUTI
Trasa, ktorú má skupina skautov prejsť je dlhá 26 km. Priemerná rýchlosť, ktorou sa skupina pohybuje, je 4,6 km/h.
a) Zostav **tabuľku** a narysuj **graf**, v ktorom bude uvedený počet kilometrov, ktoré ešte skupine zostáva po 1 hodine, 2 hodinách, 3 hodinách, 4 hodinách a po 5 hodinách cesty.
b) Ak sa skupina vyberie na trasu o 7:30 h, kedy bude v cieli?

Základné **veličiny**	Základné **jednotky**
dĺžka (l)	meter (m)
hmotnosť (m)	kilogram (kg)
čas (t)	sekunda (s)
eletrický prúd (I)	amper (A)
termodynamická teplota (T)	kelvin (K)
látkové množstvo (n)	mól (mol)
svietivosť (I)	kandela (cd)

O **veličinách** a **závislostiach** ste sa učili v 7. a 8. ročníku. Pojem veličina používate aj vo fyzike.
Základné fyzikálne veličiny si pripomeňme touto tabuľkou.

Spolu so spolužiakmi sa pokúste vytvoriť tabuľku základných veličín pre niektorú z oblastí matematiky, napr. geometriu.

Problémová úloha
Sformulujte úlohu, na riešenie ktorej je možné použiť vzťah $C = 120 - 80 \cdot H$, kde C a H sú premenné.
Spolu so spolužiakmi ju vyriešte, zostavte tabuľku a graf.

7. PRETEKY DÁŽĎOVIEK
Možno ti niekto hovoril o pretekoch dážďoviek. Najrýchlejšia z nich prešla trať dlhú 60 cm za 2 minúty a 15 sekúnd.
a) Vypočítaj, koľko cm prejde táto dážďovka za 1 sekundu, 15 sekúnd, 30 sekúnd, 45 sekúnd, 60 sekúnd, 75 sekúnd. Výsledky zaokrúhli aritmeticky na desatiny.
b) Vypočítaj, v akej vzdialenosti bude dážďovka od cieľa na uvedenej trati po 15, 30, 45, 60, 75 sekundách a narysuj **graf** závislosti.

8. NOVÉ KOLIESKOVÉ KORČULE
Marek si chce kúpiť nové kolieskové korčule za 105 eur. Preto išiel na brigádu a rozhodol sa každý týždeň odložiť 7 eur. Vypočítaj, za koľko týždňov si Marek naspori na korčule. Priebeh Marekovho sporenia znázorni **grafom**.

Riešenie 8.

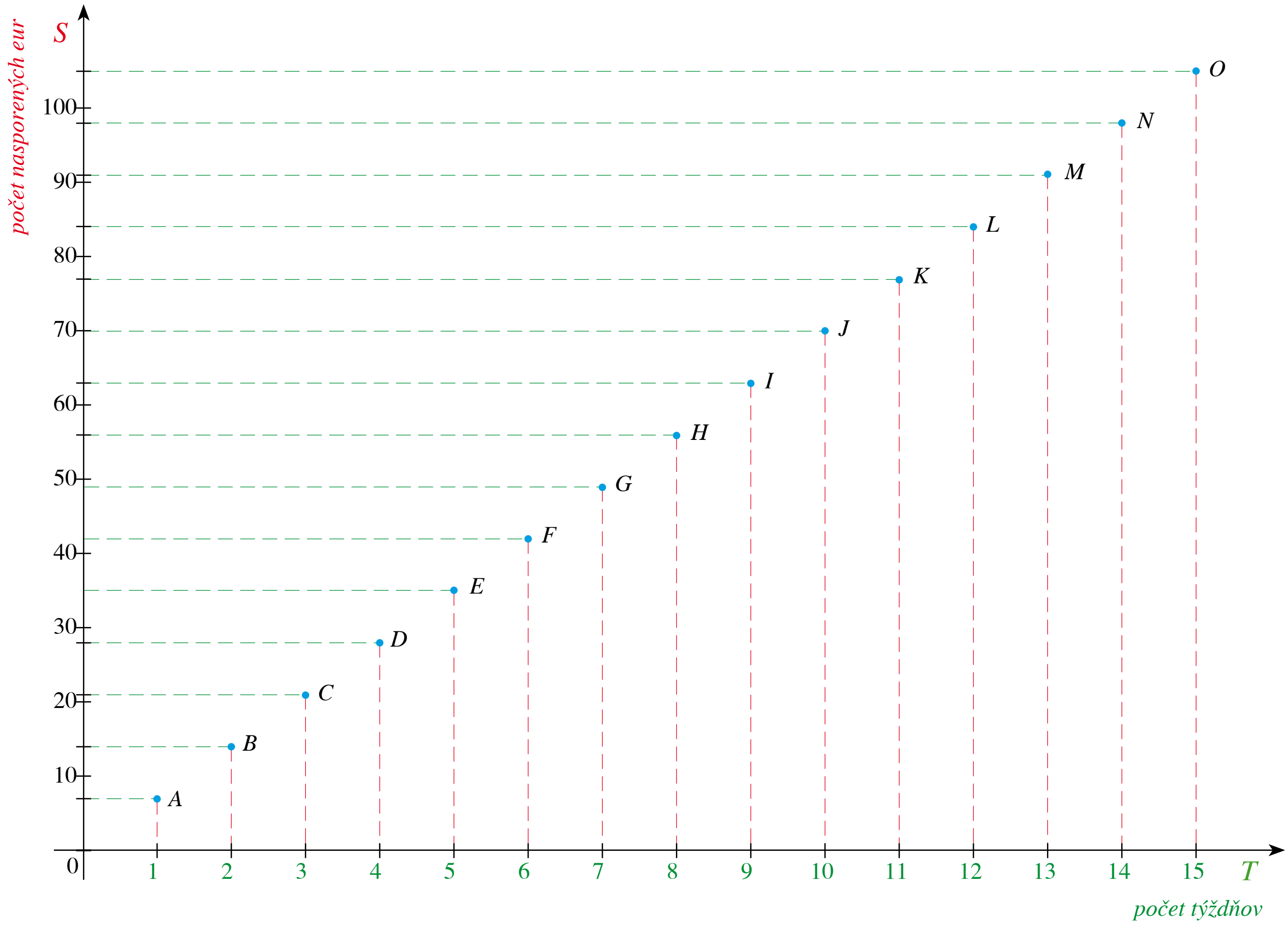
Ak máme priebeh Marekovho sporenia znázorniť grafom, je vhodné zostaviť tabuľku, v ktorej v prvom riadku bude počet týždňov a v druhom riadku množstvo eur, ktoré Marek odloží na korčule. Vypisovanie hodnôt do tabuľky skončíme vtedy, keď získame sumu potrebnú na kúpenie korčúľ (105 eur).
Marek si na korčule naspori za 15 týždňov, lebo: 105 : 7 = 15.

	Nové kolieskové korčule														
počet týždňov (T)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
počet nasporených eur (S)	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105

Úlohu sme mohli riešiť aj pomocou **vzťahu**, ktorý vyjadruje **závislosť** nasporených peňazí od počtu týždňov.
Počet týždňov označíme T, počet nasporených eur označíme S. Potom vzťah na výpočet hodnôt do tabuľky bude:
$S = 7 \cdot T$, kde za premennú T môžeme dosadiť 1, 2, ..., 15.

Priebeh Marekovho sporenia znázorníme **grafom závislosti** počtu nasporených eur od počtu týždňov.

Pre graf zostrojený bez pomoci počítača použijeme v sústave súradníc na vodorovnej osi (T) jednotku dĺžky 1 cm. Na zvislej osi použijeme jednotku dĺžky 1 cm pre 10 €.



Grafom závislosti je **súbor 15 bodov**: $A[1, 7]$, $B[2, 14]$, $C[3, 21]$, $D[4, 28]$, $E[5, 35]$, $F[6, 42]$, $G[7, 49]$, $H[8, 56]$, $I[9, 63]$, $J[10, 70]$, $K[11, 77]$, $L[12, 84]$, $M[13, 91]$, $N[14, 98]$, $O[15, 105]$.
Z tabuľky a z grafu je názorne vidieť, ako **s rastúcim počtom týždňov rastie aj počet eur**, ktoré si Marek sporí na kolieskové korčule.

9. TELEFONOVANIE 1
Erika má mesačný kredit 300 minút na telefonovanie. Pravidelne – každý deň volá kamarátke Alici 6 minút. Za koľko dní pretelefonuje Erika svoj kredit iba telefonovaním s Alicou?
Zostav tabuľku a narysuj graf závislosti počtu pretelefonovaných minút od počtu dní.

10. TELEFONOVANIE 2
Juraj má na telefonovanie mesačný paušál 20 eur. Pravidelne každý deň volá kamarátovi Edovi, čo ho stojí denne 80 centov. Za koľko dní pretelefonuje Juraj svoj paušál iba telefonovaním s Edom?
Zostav tabuľku a narysuj graf závislosti počtu eur, ktoré mu z paušálu na konci dňa ešte ostávajú, od počtu dní.

V úlohách 8, 9, 10 sme sa zaoberali závislosťami medzi veličinami, ako sú čas (v minútach, dňoch, týždňoch) a suma (v centoch, eurách). Závislosti rôznych veličín si všímame aj v nasledujúcich úlohách.

Projektová úloha
Sformulujte úlohu, na riešenie ktorej je možné použiť vzťah $E = 20 + 5 \cdot T$, kde T označuje počet týždňov a E je počet eur. Zostavte tabuľku a zostrojte graf.

11. TROCHU GEOMETRIE 1

Daný je štvorec so stranou *a* dĺžky 2 cm. Ak budeme jeho stranu postupne zväčšovať o 0,5 cm, ako sa bude meniť obvod štvorca? **Zostav tabuľku a narysuj graf** závislosti obvodu štvorca od dĺžky jeho strany.

Riešenie 11.

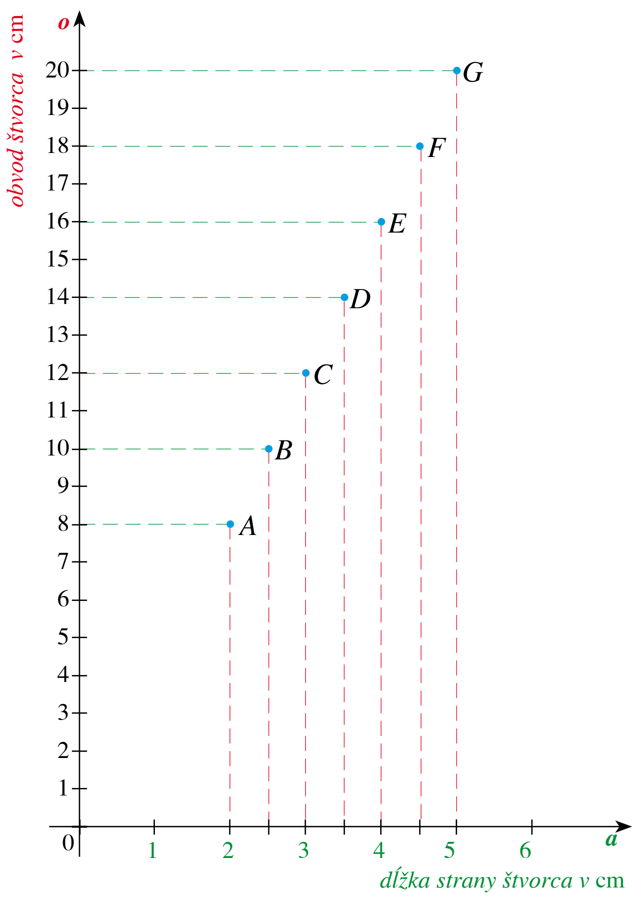
Na výpočet **obvodu** štvorca použijeme vzorec $o = 4 \cdot a$. **Tabuľku** zostavíme tak, že do prvého riadka napíšeme dĺžky zväčšujúcich sa strán štvorca a do druhého riadka tabuľky prislúchajúci obvod.

Vypíšeme 7 dvojíc, aby bolo lepšie vidieť **závislosť obvodu štvorca od dĺžky jeho strany**.

$a = 2$ cm $\quad o = 4 \cdot 2 = 8$ cm
$a = 2{,}5$ cm $\quad o = 4 \cdot 2{,}5 = 10$ cm
$a = 3$ cm $\quad o = 4 \cdot 3 = 12$ cm
$a = 3{,}5$ cm $\quad o = 4 \cdot 3{,}5 = 14$ cm
$a = 4$ cm $\quad o = 4 \cdot 4 = 16$ cm
$a = 4{,}5$ cm $\quad o = 4 \cdot 4{,}5 = 18$ cm
$a = 5$ cm $\quad o = 4 \cdot 5 = 20$ cm

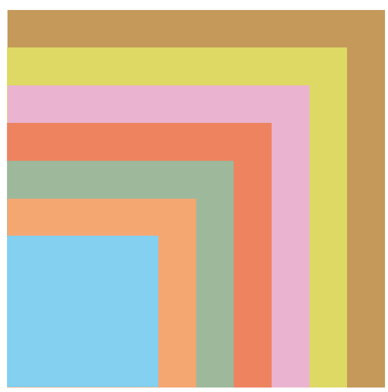
	Trochu geometrie 1						
a [cm]	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
o [cm]	8	10	12	14	16	18	20

Graf zostrojíme najprv v sústave súradníc, v ktorej vodorovnú os označíme *a* a zvislú os označíme *o*.



Graf **závislosti obvodu štvorca od meniacej sa dĺžky jeho strany** tvorí **nekonečný počet** bodov, z ktorých 7 je znázornených na grafe.

Z tabuľky a z grafu je vidieť, že **so zväčšujúcou sa dĺžkou strany štvorca sa zväčšuje aj obvod tohto štvorca.**



Zapíš závislosť obvodu štvorca *o* od dĺžky strany štvorca *a* postupne sa zväčšujúcej o 0,5 cm pomocou výrazu s premennými.

12. TROCHU GEOMETRIE 2

Obdĺžnik má strany $a = 2$ cm a $b = 3$ cm. Ak stranu *b* budeme postupne zväčšovať o 1 cm, ako sa zmení jeho obsah? **Zostav tabuľku a narysuj graf** závislosti obsahu obdĺžnika od dĺžky strany *b*.

13. TROCHU GEOMETRIE 3

Rovnostranný trojuholník má stranu dĺžky 2 cm. Ako sa zväčší obvod rovnostranného trojuholníka, ak budeme dĺžku jeho strany postupne zväčšovať o 1 cm? **Zostav tabuľku a narysuj graf** závislosti obvodu rovnostranného trojuholníka od dĺžky strany.

V týchto úlohách sme hovorili o závislosti **veličín** v rôznych **jednotkách**:

čas (sekundy, minúty, hodiny)	dráha (m, km)
čas (dni, týždne, mesiace)	našetrená suma (eurá)
dĺžka strany štvorca (cm, dm)	obvod štvorca (cm, dm)
čas (dni, týždne)	paušál – kredit (v centoch, eurách)

Závislosť dvoch veličín je vyjadrenie istého vzťahu medzi nimi. Tento vzťah môžeme vyjadriť napr. pomocou výrazu s premennou, tabuľkou alebo pomocou grafu v pravouhlej sústave súradníc.

Projektová úloha

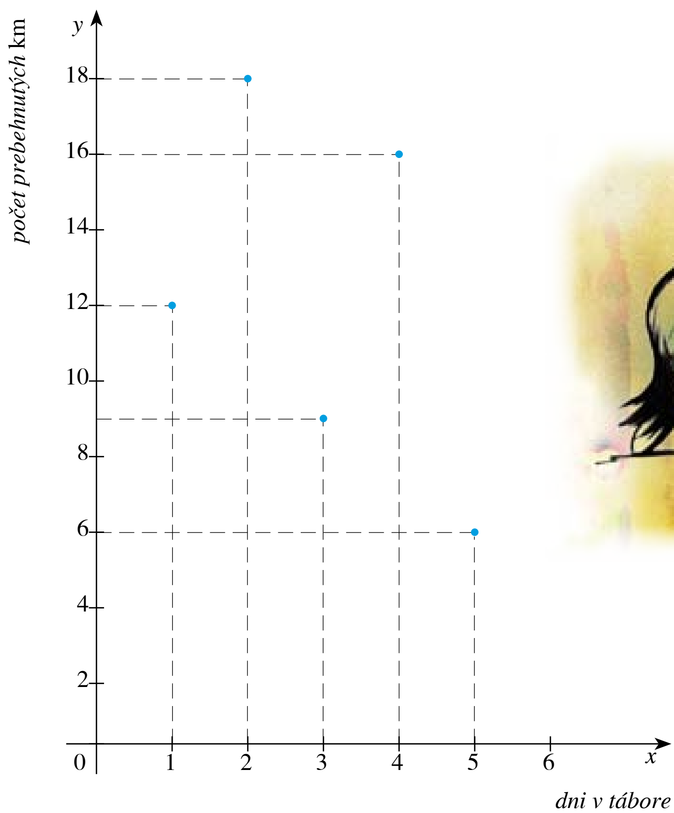
Vyhľadajte informácie o rôznych veličinách a uveďte závislosti medzi nimi. Informácie spracujte do prezentácie.

A teraz závislosti a grafy trochu inak.

14. Združenie MLADÍ BEŽCI organizovalo šesťdňový letný tréningový tábor. Prvých 5 dní absolvovali deti niekoľkokilometrové bežecké trasy. Počet prebehnutých kilometrov zakresľovali každý deň do grafu. Posledný deň ráno tréner vyhodnotil bežecké výkony detí:

1. Za každý deň, počas ktorého prebehli viac ako 15 km, dostanú všetci nanuk.
2. Za každý deň, počas ktorého prebehli menej ako 10 km, urobia dobrý skutok.
3. Ak za 5 dní prebehli viac ako 50 km, autobus príde pre nich až k táboru.

Vyhodnoť, ako tréner rozdelil odmeny.

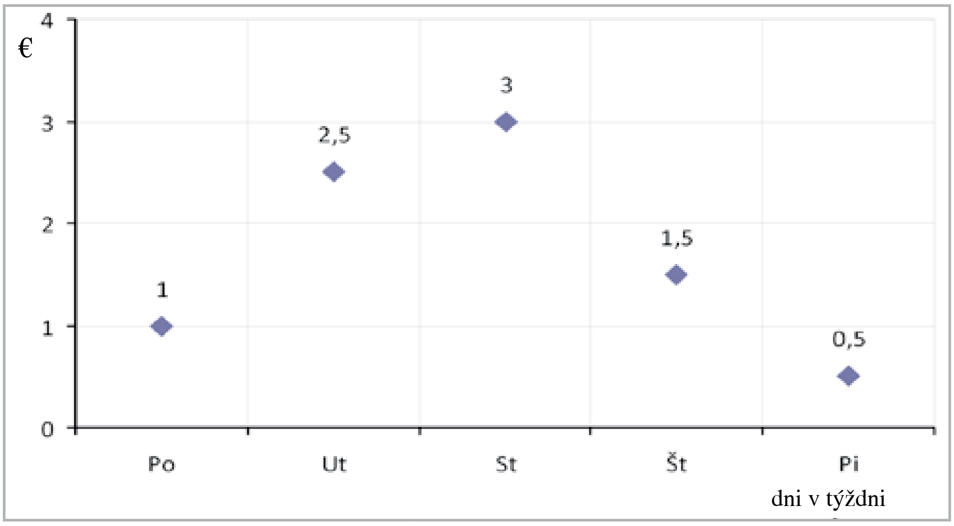


Riešenie 14.

Z grafu je vidieť, že:
1. deň prebehli 12 km,
2. deň prebehli 18 km,
3. deň prebehli 9 km,
4. deň prebehli 16 km,
5. deň prebehli 6 km.

Viac ako 15 km prebehli 2. a 4. deň, takže každý dostal po 2 nanuky.
Menej ako 10 km prebehli 3. a 5. deň, takže každý mal spraviť dva dobré skutky.
Za 5 dní prebehli spolu 12 + 18 + 9 + 16 + 6 = 61 km, čo je viac ako 50 km. Takže autobus pre nich príde až k táboru.

15. Denisa sa učí ekonomicky hospodáriť so svojím vreckovým. Postupne si zapisuje do tabuľky sumy, ktoré minula v priebehu týždňa na desiatu v školskom bufete. Na záver týždňa si z údajov v tabuľke zostrojí graf. Porovnáva, kedy minula **najviac**, kedy **najmenej**. Spočítava, koľko minula **za týždeň**. Poznačila si tieto údaje:
Najviac som minula na desiatu v stredu.
Najmenej som minula na desiatu v piatok.
Najväčší rozdiel je medzi sumami v stredu a v piatok.
Najmenší rozdiel je len medzi sumami v utorok a v stredu.
Za týždeň som minula na desiatu **menej** ako 10 eur.
Zisti z nasledujúceho grafu, či sú Denisine údaje správne.



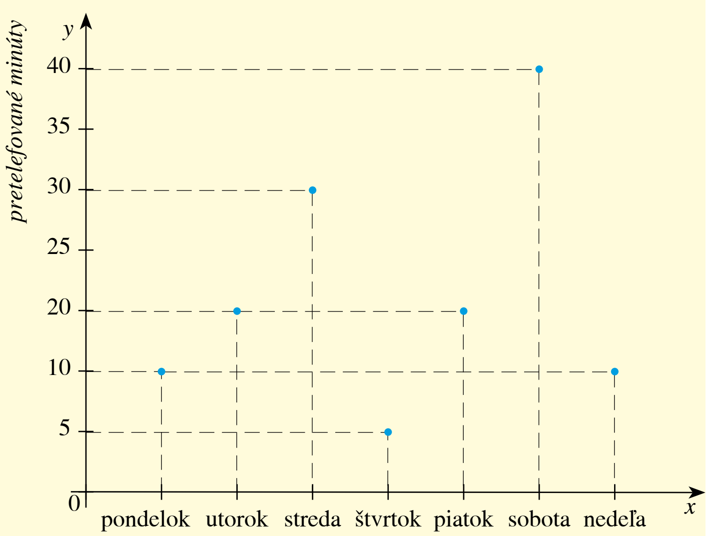
Riešenie 15.

Z grafu je vidieť, že Denisa na desiatu minula:

pondelok	1 €
utorok	2,50 €
stredu	3 €
štvrtok	1,50 €
piatok	0,50 €
spolu	8,50 €

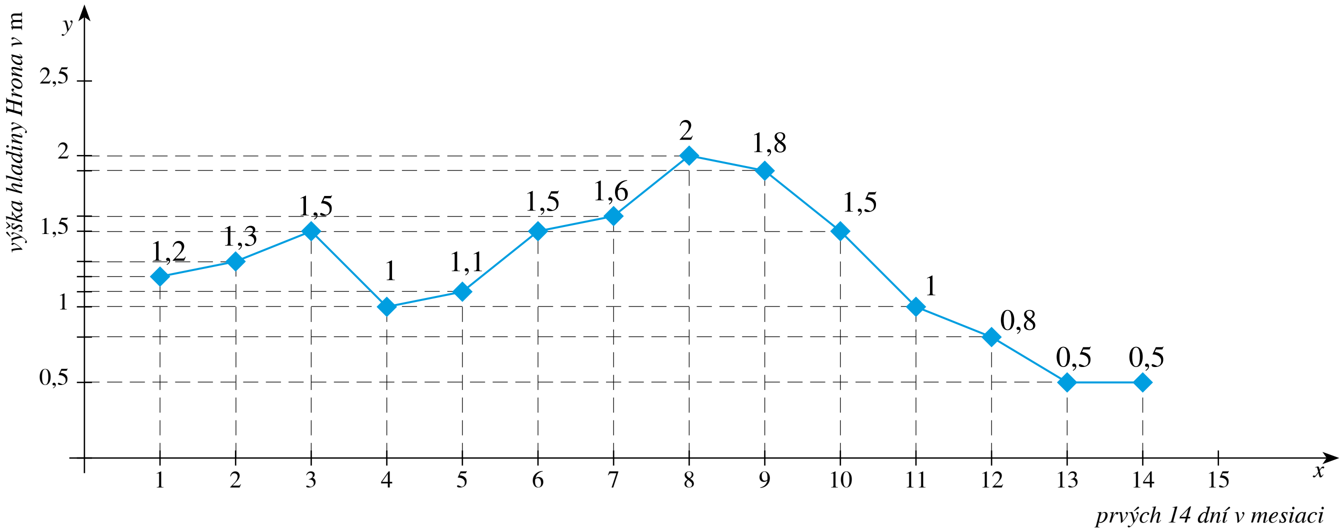
Porovnanie údajov, ktoré Denisa zistila z grafu:
Najviac minula na desiatu v stredu, 3 €. .... správny údaj
Najmenej minula na desiatu v piatok, 0,50 €. .... správny údaj
Najväčší rozdiel je medzi sumami v stredu a v piatok, a to 2,50 €. .... správny údaj
Najmenší rozdiel je medzi sumami v utorok a stredu, a to 0,50 €. ..... správny údaj
Za týždeň minula spolu 8,50 €, čo je menej ako 10 €. .... správny údaj

16. Graf znázorňuje počet minút, ktorý v priebehu týždňa pretelefonovala Daniela zo svojho telefónu. Napíš, ktorý deň pretelefonovala **najviac**, ktorý **najmenej** a koľko minút pretelefonovala **spolu** za uvedený čas.
Vypočítaj, koľko eur zaplatila za pretelefonované minúty v **priebehu týždňa**, ak za 1 minútu hovoru platila 8 centov.



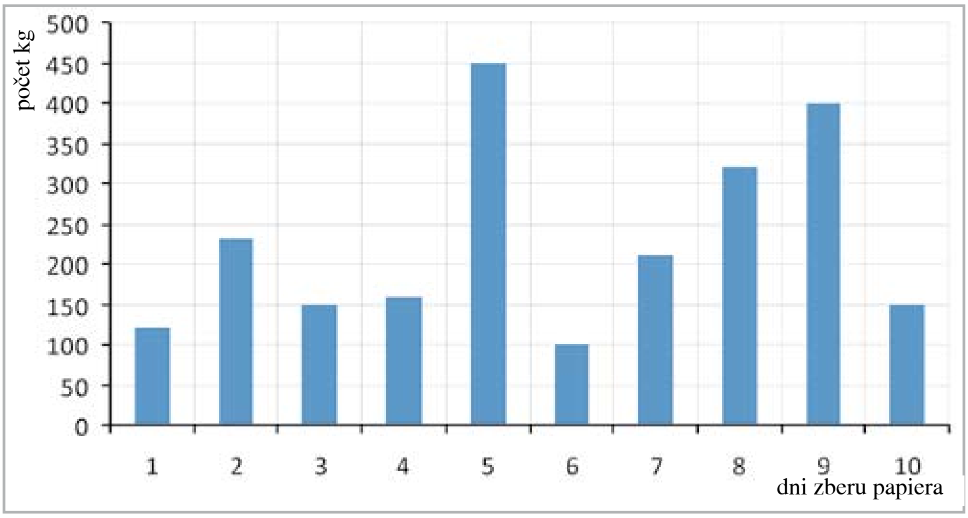
17. RIEKA HRON

Graf znázorňuje stav hladiny rieky Hron nameraný denne o 7.00 h počas prvých dvoch týždňov v mesiaci.
V ktorých dňoch bola nameraná hladina rieky **vyššia** ako predchádzajúci deň? V ktorých dňoch bola nameraná hladina rieky **nižšia** ako predchádzajúci deň? Ktorý deň bol stav hladiny **najvyšší** a ktorý deň **najnižší**?



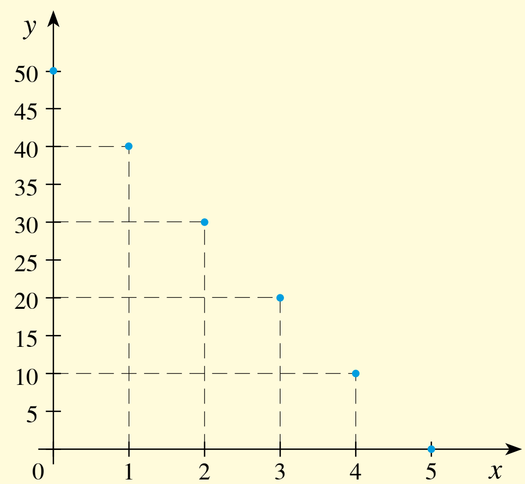
18. MAREC MESIAC KNIHY

Počas marca, mesiaca knihy, zorganizovali v škole zber papiera. Za peniaze zo zberu chceli nakúpiť knihy do školskej knižnice. Zber trval 10 pracovných dní. Na obrázku je graf prehľadne zobrazujúci všetky dni zberu.
Na základe tohto grafu sformuluj odpovede na tieto otázky:
V ktorých dňoch bol počet kilogramov odovzdaného papiera **väčší** ako predchádzajúci deň?
V ktorých dňoch bol počet kilogramov odovzdaného papiera **menší** ako predchádzajúci deň?
Kedy sa nazbieralo **najviac** papiera a kedy **najmenej**?



19. PEČENIE PIZZE

Na grafe je znázornený počet kilogramov múky (y), ktorý zostal na sklade (po odobratí pravidelného množstva na upečenie pizze) od počtu dní (x).



Zisti, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé:

A Každý deň odobrali zo skladu 20 kg múky.
B Tretí deň im na sklade ostalo 30 kg múky.
C Múka sa im minula po šiestom dni.
D Závislosť z grafu môžeme zapísať $y = 50 - 10x$.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.
Ak zakrúžkuješ správne odpovede, získaš slovo chýbajúce vo vete:

Je to ...., ktorá dáva mnohým ľuďom do rúk neobmedzenú moc.

1. Ak je hodnota y štvornásobkom hodnoty x, potom pre $y = 32$ sa x rovná:

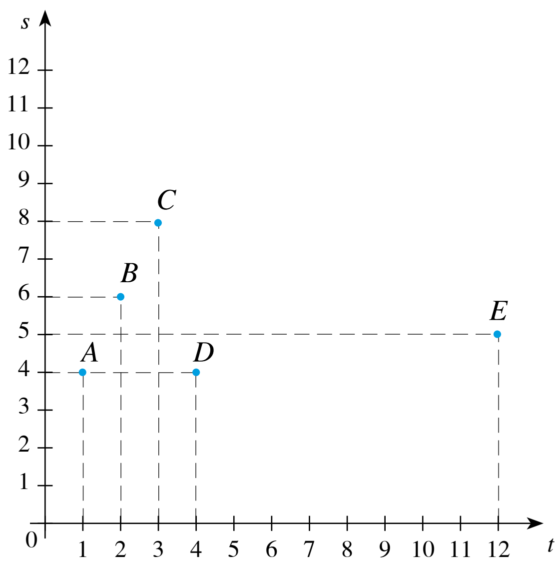
E 16 F 8 G 0 H 1

2. Daná je tabuľka s hodnotami t a s.

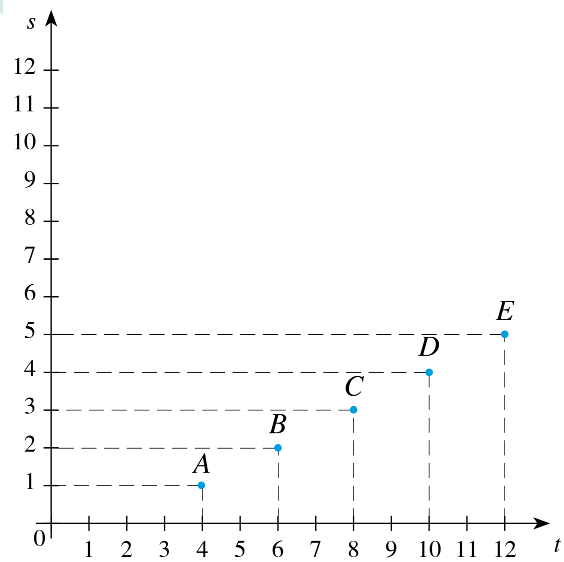
t	1	2	3	4	5
s	4	6	8	10	12

Usporiadané dvojice [t, s] z tabuľky sú zobrazené grafom:

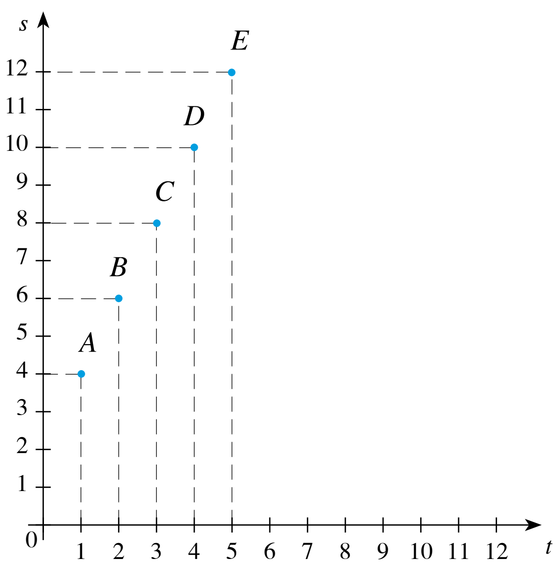
V



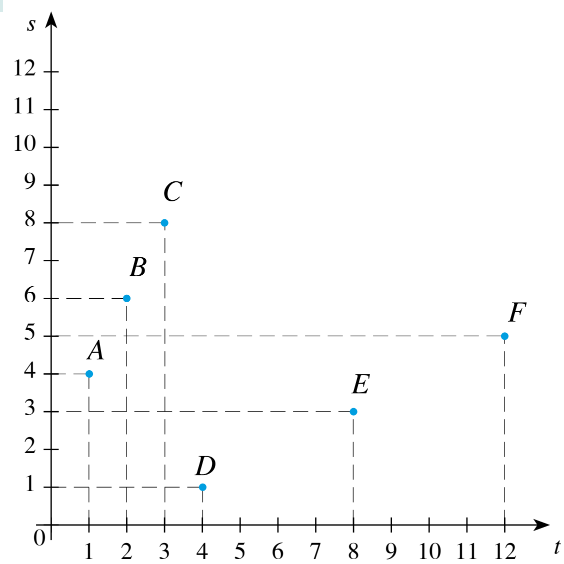
Z



U



W



3. Ak ide turista priemernou rýchlosťou $v = 5{,}5$ km/h, potom závislosť počtu prejdených km (s) od času (t) môžeme zapísať pomocou vzťahu:

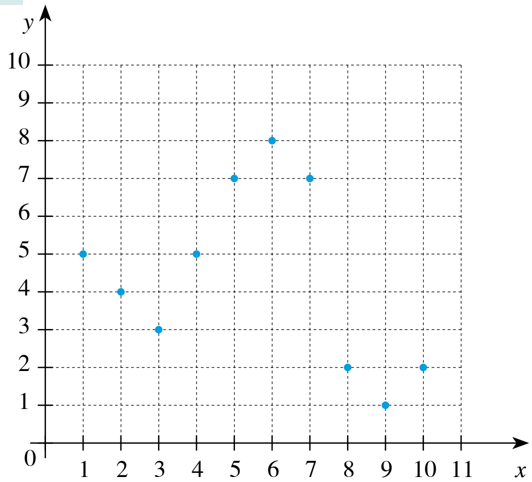
M $t = 5{,}5 \cdot s$ N $s = 5{,}5 \cdot t$ O $s = \dfrac{5{,}5}{t}$ P $t = 5{,}5 : s$

4. Ak si každý mesiac odkladáme 12 eur, potom závislosť počtu usporených eur (e) od počtu mesiacov (m) môžeme zapísať pomocou vzťahu:

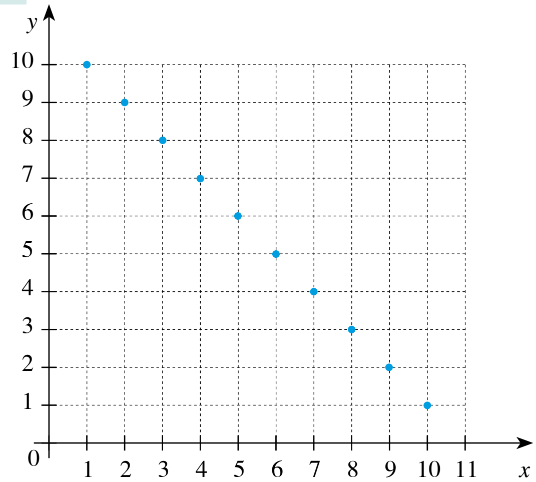
K $e = 12 \cdot m$ **L** $e = 7 \cdot m$ **M** $e = 12 \cdot 7$ **N** $m = 12 \cdot e$

5. Na ktorom z grafov A, B, C, D rastie hodnota y pre x od $x = 6$?

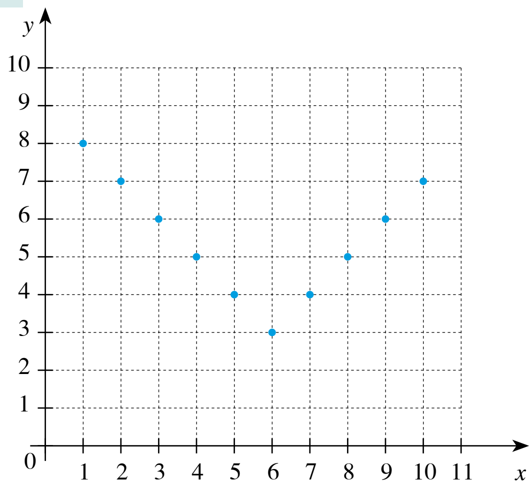
A



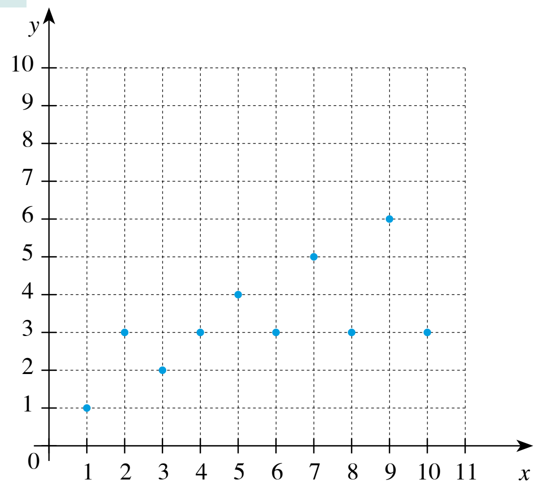
B



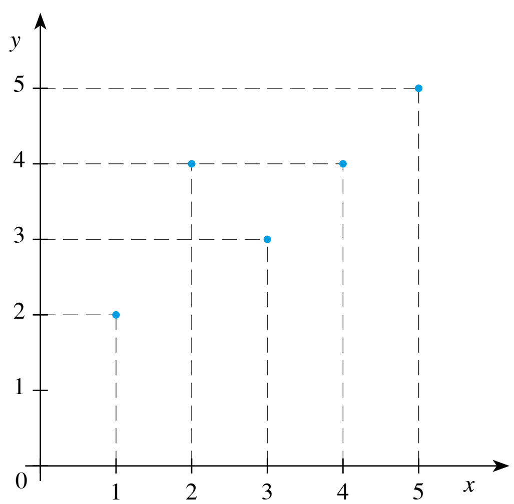
C



D



6. Ak sú na vodorovnej osi x vyznačené hodnoty z prvého riadka tabuľky a na zvislej osi y hodnoty z druhého riadka tabuľky, potom body grafu zodpovedajú hodnotám z tabuľky:



I

1	3	5	2	4
2	3	5	4	4

J

1	2	3	4	5
2	2	3	4	5

K

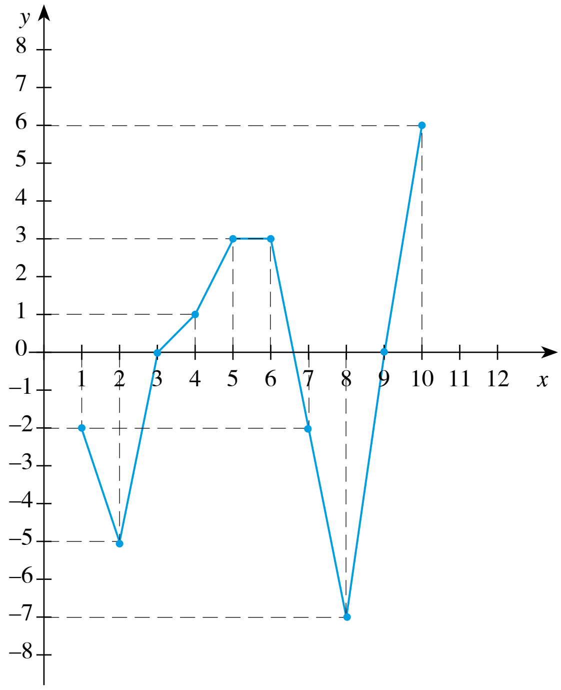
2	3	5	4	1
2	3	4	5	2

L

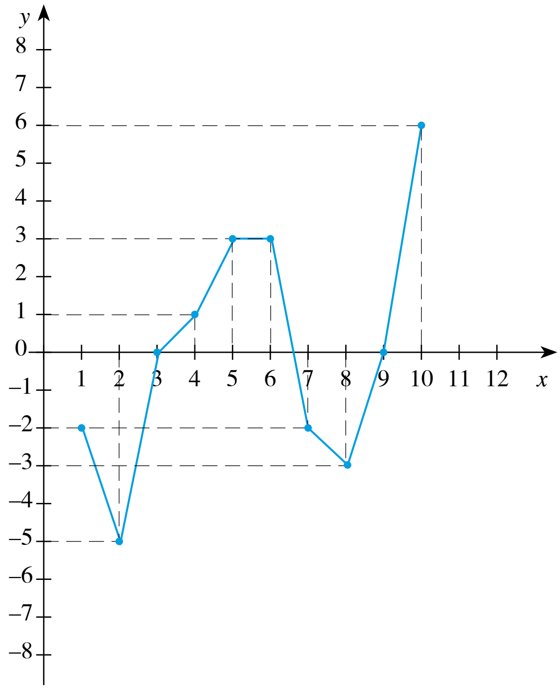
5	4	3	2	1
2	4	3	4	5

7. Najnižšia nameraná teplota (na zvislej osi) je znázornená na grafe:

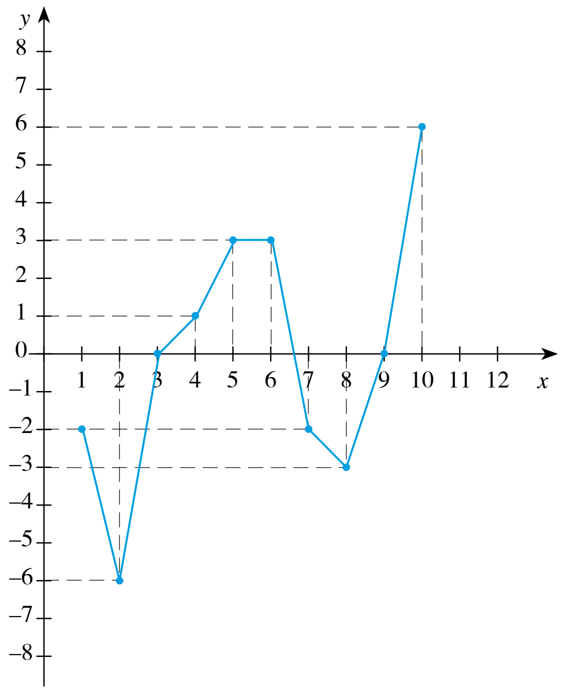
A



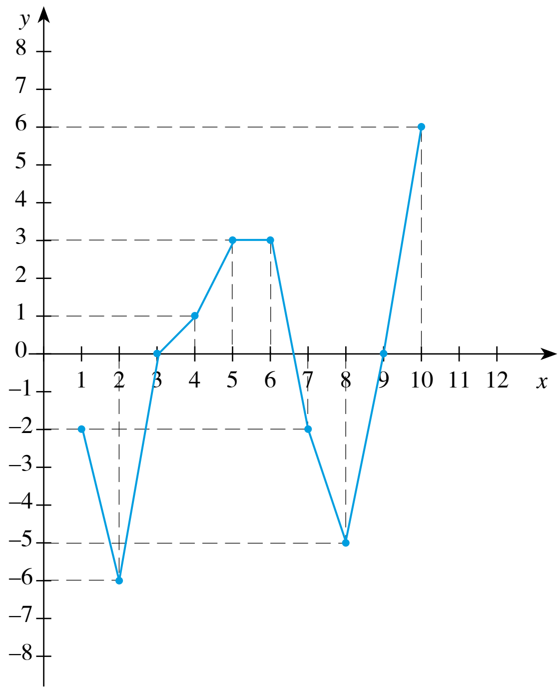
B



C



D



Zapamätajte si

Závislosť dvoch veličín je vyjadrenie vzťahu medzi nimi.
Napríklad:

- závislosť počtu prejdených kilometrov (dráhy) od počtu hodín (času),
- závislosť obvodu štvorca (*o*) od dĺžky jeho strany (*a*),
- závislosť počtu pretelefonovaných minút od počtu dní.

Závislosť dvoch veličín môžeme zapísať napr. pomocou **výrazu s premennými**, vyjadriť pomocou **tabuľky**, znázorniť **pomocou grafu**.
Napríklad:

- $y = 5{,}5 \cdot x$
- $o = 4 \cdot a$
- $M = 6 \cdot D$

5.3 Priama a nepriama úmernosť ako druhy závislostí. Graf a rovnica priamej a nepriamej úmernosti

Čo sme sa už učili

Počítali sme úlohy, v ktorých sme využívali vedomosti o **priamej** a **nepriamej úmernosti**.
Na riešenie sme používali **tabuľky**,
vedomosti o **pomere**, **trojčlenke**,
vedomosti o **výrazoch**, o **zväčšovaní**, **zmenšovaní** hodnôt.

Riešili sme podobné úlohy, ako sú nasledujúce štyri. Uvádzame v nich dve rôzne riešenia.

1. Matej si po každom dni v škole odloží z peňazí, ktoré dostáva od rodičov na desiatu 27 centov. Vypočítaj, akú sumu by si takto nasporil za 165 dní školského roka.

Riešenie 1.

Úlohu môžeme riešiť takto:
Ak každý deň odloží 27 centov, potom počet ušetrených eur vypočítame **pomocou súčinu:**
$27 \cdot 165 = 4\,455$ centov.
$4\,455$ centov = **44,55** eur

Úlohu môžeme riešiť aj takto:
Pomocou trojčlenky pre priamu úmernosť.

↑ za 1 deň .... 27 centov ↑
za 165 dní .... x centov

$$x : 27 = 165 : 1$$

súčin **vonkajších** členov sa rovná súčinu **vnútorných** členov

$$1 \cdot x = 27 \cdot 165$$
$$x = 4\,455 \text{ centov}$$

Trojčlenku počítame aj takto:

$$\frac{x}{27} = \frac{165}{1}$$
$$x = 165 \cdot 27$$
$$x = 4\,455 \text{ centov}$$

Matej by si za 165 dní nasporil 44,55 eur.

Pomôcka
O **priamej úmernosti** hovoríme vtedy, keď platí:
- koľkokrát sa **zväčší** (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa **zväčší** (zmenší) druhá veličina.

V našej úlohe platí:
- *koľkokrát sa zväčší počet dní sporenia, toľkokrát sa zväčší počet usporených centov.*
Ak bude Matej šetriť viac dní, tak ušetrí viac peňazí.

2. Za 1,5 hodiny vyčistí skupina skautov 474 m lesného chodníka.
Za koľko hodín pri rovnakom výkone skauti vyčistia chodník, ktorý je dlhý 1,106 km?

Riešenie 2.

Úlohu môžeme riešiť takto:
Najprv vypočítame, koľko metrov lesného chodníka vyčistí skupina **za 1 hodinu**:

$$474 : 1{,}5 = \mathbf{316\ m}$$

Ak za 1 h vyčistí skupina 316 m chodníka, potom 1,106 km (1 106 m) vyčistí skupina za:

$$1\,106 : 316 = \mathbf{3{,}5\ h}$$

Úlohu môžeme riešiť aj takto:
Pomocou trojčlenky pre priamu úmernosť.

Platí: koľkokrát sa **zväčší** počet hodín na čistenie chodníka, toľkokrát sa **zväčší** dĺžka vyčisteného chodníka.
V našom prípade:
Ak skauti budú robiť viac hodín, tak vyčistia dlhšiu časť chodníka.

pokračovanie ▶▶

$$\begin{array}{ll} \text{za } 1{,}5 \text{ h} \dots\dots\dots\dots\dots & 474 \text{ m} \\ \text{za } x \text{ h} \dots\dots\dots\dots\dots & 1{,}106 \text{ km} = 1\,106 \text{ m} \end{array}$$

$$x : 1{,}5 = 1\,106 : 474$$

$$474 \cdot x = 1{,}5 \cdot 1\,106$$
$$474x = 1\,659$$
$$x = 1\,659 : 474$$
$$\boldsymbol{x = 3{,}5 \text{ h}}$$

Trojčlenku počítame aj takto:

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{1\,106}{474}$$

$$x = \frac{1\,106 \cdot 1{,}5}{474}$$

$$\boldsymbol{x = 3{,}5 \text{ h}}$$

Skauti vyčistia chodník za 3,5 h.

Viete, že...?

Zakladateľom skautského hnutia bol britský generál R. S. Baden-Powell. Na ostrove Brownsea na juhu Anglicka založil v roku 1907 prvý skautský tábor.

Začiatky skautingu na slovenskom území (ktoré bolo vtedy súčasťou Uhorska) sa viažu k dátumu 23. 5. 1913. Prvý chlapčenský skautský oddiel vznikol pri gymnáziu v Komárne.

Zdroj: http://storocnica.skauting.sk/historia-slovenskeho-skautingu/skauting-neprekonany-svetovy-fenomen/

3. Svetový rekord v behu na 100 m je 9,58 sekundy. Dosiahol ho Usain Bolt v roku 2009 pri priemernej rýchlosti 37,58 km/h. Ak by chcel dosiahnuť čas 9,40 sekundy, akou priemernou rýchlosťou by musel bežať? Výsledok zaokrúhli aritmeticky na stotiny.

Riešenie 3.

Úlohu môžeme riešiť **pomocou trojčlenky** pre **nepriamu úmernosť**.
Platí: koľkokrát sa **zväčší** rýchlosť bežca, toľkokrát sa **skráti** čas behu.

$$\begin{array}{ll} \text{čas } 9{,}58 \text{ sekundy} \dots\dots\dots & \text{rýchlosť } 37{,}58 \text{ km/h} \\ \text{čas } 9{,}40 \text{ sekundy} \dots\dots\dots & \text{rýchlosť } x \text{ km/h} \end{array}$$

$$x : 37{,}58 = 9{,}58 : 9{,}40$$

$$9{,}40 \cdot x = 37{,}58 \cdot 9{,}58$$
$$9{,}40\, x = 360{,}016\,4$$
$$x = 360{,}016\,4 : 9{,}40$$
$$x = 38{,}299\ \dots$$
$$\boldsymbol{x \doteq 38{,}30 \text{ km/h}}$$

Vyrieš úlohu bez použitia trojčlenky.

Pomôcka
O **nepriamej úmernosti** hovoríme vtedy, keď platí:
- koľkokrát sa **zväčší** (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa **zmenší** (zväčší) druhá veličina.

Ak chce bežec dosiahnuť čas 9,40 sekundy, musí bežať rýchlosťou približne **38,30 km/h**.

Problémová úloha
- **Beh na 100 metrov** je ľahkoatletický šprint, pri ktorom sa beží s maximálnym úsilím od štartu až po cieľ.
  Víťaz tejto disciplíny sa považuje za najrýchlejšieho muža či ženu sveta.
- Zistite, kto z vašej školy dosahuje najlepší čas v behu na 100 m.
  a) Vypočítajte jeho rýchlosť v km/h.
  b) Vypočítajte, o koľko by mal zvýšiť svoju rýchlosť, aby dosiahol súčasný platný svetový rekord.

4. V ponuke obchodu s mobilmi je aj mobil, ktorý si chce kúpiť Zlatica.
Našla si brigádu, na ktorej jej vyplácajú týždennú mzdu. Ak by si týždenne odkladala 12 eur, mobil by si mohla kúpiť za 8 týždňov. Ak by si ho chcela kúpiť za 3 týždne, koľko eur by si musela každý týždeň odložiť?

Riešenie 4.

Úlohu vyriešime **pomocou trojčlenky** pre **nepriamu úmernosť**.
Platí: koľkokrát sa **zmenší** počet týždňov sporenia, toľkokrát sa musí **zväčšiť** týždenná suma, ktorú sporíme.
V našom prípade:
Ak chce Zlatica za menej týždňov našetriť na nový telefón, musí si týždenne odložiť viac peňazí, diskutujte o tom.

↑ 12 eur .... 8 týždňov ↓
x eur .... 3 týždne

$x : 12 = 8 : 3$
$x \cdot 3 = 12 \cdot 8$
$3x = 96$
$x = 96 : 3$
$\mathbf{x = 32}$ **eur**

Vyrieš úlohu bez použitia trojčlenky.

Ak chce Zlatica našetriť na mobil za 3 týždne, musí si týždenne odložiť 32 eur.

Teraz si ukážeme riešenia úloh, v ktorých sú veličiny priamo alebo nepriamo úmerné, pomocou výrazov s rôznymi premennými a zostrojíme k nim grafy.

5. Adam ide na skejte zo školy domov priemernou rýchlosťou 8 km/h.
a) Vypočítaj, koľko kilometrov prejde touto rýchlosťou za 0,25 h, 0,5 h, 0,75 h, 1 h. Riešenie zapíš do **tabuľky**.
b) Narysuj **graf** závislosti počtu prejdených kilometrov (dráha) od počtu hodín (čas) podľa tabuľky.
Pri riešení úlohy použi výrazy s premennými.

Riešenie 5.

a) Úlohu riešime pomocou výrazu s premennými.
Úlohu môžeme riešiť takto:

Nech x označuje počet hodín a y počet prejdených kilometrov.

Potom závislosť zapíšeme $y = 8 \cdot x$
a do tabuľky vpisujeme hodnoty y vypočítané pre $x = 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1$.

$x = 0{,}25$ $\quad y = 8 \cdot 0{,}25 = 2$
$x = 0{,}5$ $\quad y = 8 \cdot 0{,}5 = 4$
$x = 0{,}75$ $\quad y = 8 \cdot 0{,}75 = 6$
$x = 1$ $\quad y = 8 \cdot 1 = 8$

Na výpočet počtu kilometrov môžeme použiť aj zápis používaný v 8. ročníku ZŠ.

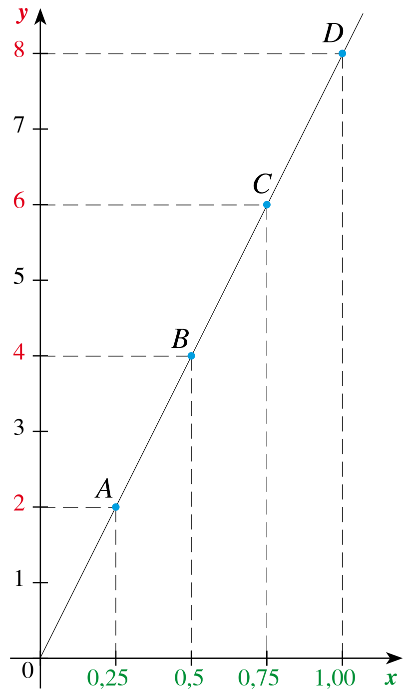
Nech H je počet hodín, K je počet prejdených kilometrov.

Potom závislosť zapíšeme $K = 8 \cdot H$
a počítame hodnoty:

$K(0{,}25) = 8 \cdot 0{,}25 = 2$
$K(0{,}5) = 8 \cdot 0{,}5 = 4$
$K(0{,}75) = 8 \cdot 0{,}75 = 6$
$K(1) = 8 \cdot 1 = 8$

	Adamova cesta domov			
x (h)	0,25	0,5	0,75	1
y (km)	2	4	6	8

b) Graf zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc so súradnicovými osami označenými premennými x a y.
Na osi x sú hodnoty pre počet hodín, na osi y hodnoty pre počet prejdených kilometrov.
Jednotku dĺžky na osi x zvolíme 1 cm pre 0,25 h, čo je štvrť hodiny. Na osi y zvolíme 1 cm pre 1 km.



Graf tvoria 4 body ležiace na priamke:
$A[0{,}25;\ 2]$, $B[0{,}5;\ 4]$, $C[0{,}75;\ 6]$, $D[1,\ 8]$.

Zápisy $K = 8 \cdot H$ a $y = 8 \cdot x$ vyjadrujú **priamo úmernú závislosť** medzi počtom hodín (časom) a počtom prejdených kilometrov (dráhou).
Zápis $y = 8 \cdot x$ nazývame aj **rovnicou** (**predpisom**) **priamej úmernosti**.

Osi sme mohli označiť aj písmenami H a K.

6. Erika ide na kolieskových korčuliach priemernou rýchlosťou 7 km/h.
a) Vypočítaj, koľko kilometrov by pri tejto rýchlosti prešla za 1 h, 2 h, 3 h, 4 h, 5 h. Riešenie **zapíš do tabuľky**.
b) **Narysuj graf** závislosti počtu prejdených Erikiných kilometrov (dráhy) od počtu hodín (času).
Na riešenie úlohy použi výraz s premennými.

7. Lukáš jazdí na bicykli priemernou rýchlosťou 30 km/h.
a) Vypočítaj, koľko kilometrov by prešiel touto rýchlosťou za 0,5 h, 1 h, 1,5 h, 2 h, 2,5 h, 3 h, 3,5 h, 4 h, 4,5 h, 5 h. Riešenie **zapíš do tabuľky**.
b) **Narysuj graf** závislosti počtu prejdených kilometrov (dráhy) od počtu hodín (času).
Na riešenie úlohy použi výraz s premennými.

8. Peter ide k spolužiakovi, ktorý býva 2 km od jeho domu.
a) Vypočítaj, akou priemernou rýchlosťou by mal ísť, aby k nemu prišiel za 10 minút, 20 minút, 30 minút, 40 minút. Na riešenie úlohy použi výraz s premennými. Riešenie **zapíš do tabuľky**.
b) **Narysuj graf** závislosti veličín (rýchlosť v, čas t) v úlohe.

Riešenie 8.

a) Máme vypočítať Petrovu rýchlosť na ceste k spolužiakovi pomocou výrazu s premennými.
Na označenie premenných použijeme v (priemerná rýchlosť) a t (čas).

Potom použijeme známy vzťah z fyziky $v = \frac{s}{t}$, kde $s = 2$ km, čiže $v = \frac{2}{t}$.

Rýchlosť uvádzame väčšinou v kilometroch **za hodinu**, preto si najprv **čas uvedený v minútach** vyjadríme **v hodinách**.

10 minút $= \frac{10}{60}\text{h} = \frac{1}{6}$ hodiny

20 minút $= \frac{20}{60}\text{h} = \frac{1}{3}$ hodiny

30 minút $= \frac{30}{60}\text{h} = \frac{1}{2}$ hodiny

40 minút $= \frac{40}{60}\text{h} = \frac{2}{3}$ hodiny

Vypočítame **rýchlosť pre dané hodnoty času a dráh**y zo vzťahu $v = \frac{2}{t}$.

pokračovanie ▷▷

Ak $t=\frac{1}{6}$, tak $v=\frac{2}{\frac{1}{6}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{1}:\frac{1}{6}=\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{1}=12$ km/h.

Ak $t=\frac{1}{3}$, tak $v=\frac{2}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{1}:\frac{1}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}=6$ km/h.

Ak $t=\frac{1}{2}$, tak $v=\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}:\frac{1}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}=4$ km/h.

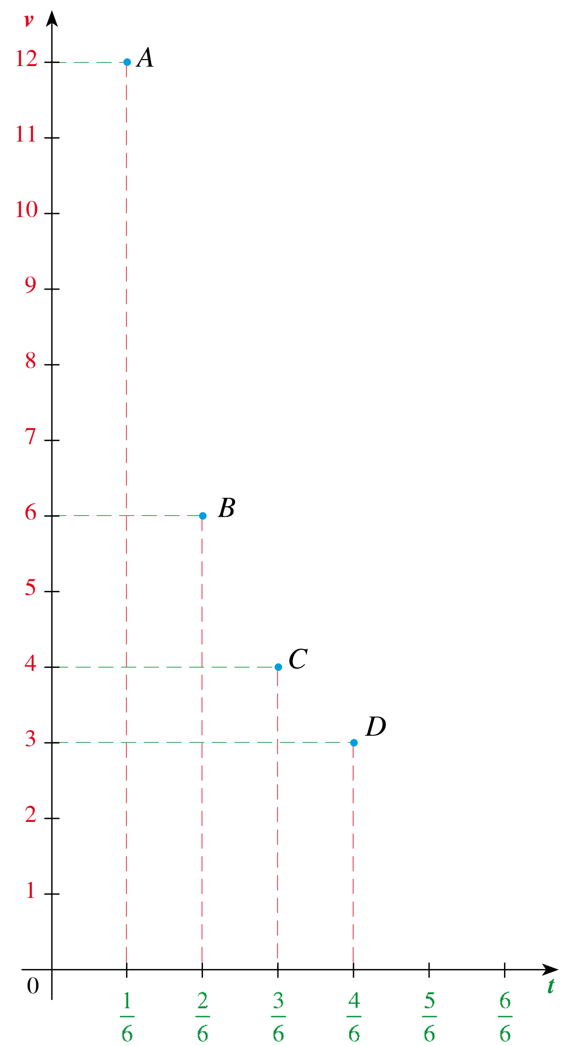
Ak $t=\frac{2}{3}$, tak $v=\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{1}:\frac{2}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3$ km/h.

Ak by sme použili premenné x pre čas a y pre rýchlosť, vzťah na výpočet by bol $y=\frac{2}{x}$.

Riešenie zapíšeme do tabuľky.

	Petrova rýchlosť			
čas t (h)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
rýchlosť v (km/h)	12	6	4	3

b) Graf zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc.
Na vodorovnú os dáme hodnoty pre čas, na zvislú os hodnoty pre rýchlosť.



Jednotku dĺžky na osi t zvolíme 1 cm pre $\frac{1}{6}$ hodiny, lebo 10 minút je šestina hodiny.
Jednotku dĺžky na osi v zvolíme 1 cm.

Graf tvoria 4 body:

$\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{6}, 12\right], \boldsymbol{B}\left[\frac{1}{3}, 6\right], \boldsymbol{C}\left[\frac{1}{2}, 4\right], \boldsymbol{D}\left[\frac{2}{3}, 3\right]$.

Zápisy $v=\frac{2}{t}$ a $y=\frac{2}{x}$ vyjadrujú nepriamo úmernú **závislosť** medzi rýchlosťou a časom.

Zápis $y=\frac{2}{x}$ nazývame aj **rovnicou (prepisom) nepriamej úmernosti**.

Viete, že...?
René Descartes a **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) – dvaja francúzski matematici sa zaoberali znázorňovaním závislostí v sústave súradníc.

Zdroj: RÉNYI, Alfred: Dialogy o matematice. 1. vyd., Mladá fronta : Praha, 1980

Projektová úloha
Zistite o dielach R. Descarta a P. de Fermata viac informácií a **spracujte** ich formou **posteru**.

9. Martinov kamarát býva vo vzdialenosti 20 km od ich mesta. Zvyčajne k nemu ide autobusom. Vypočítaj, akou priemernou rýchlosťou (v km/h) by musel ísť autobus, aby Martin prišiel ku kamarátovi za 10 minút, 20 minút, 30 minút, 40 minút. Riešenie **zapíš do tabuľky a narysuj graf**. Závislosť medzi veličinami zapíš pomocou **rovnice**.

10. Vypočítaj, akou rýchlosťou v km/h by musel ísť rýchlik, aby vzdialenosť 360 km prešiel za 1 h, 1,5 h, 2 h, 2,5 h, 3 h, 3,5 h. Riešenie **zapíš do tabuľky a narysuj graf**. Závislosť medzi veličinami zapíš pomocou **rovnice**. Rýchlosť zaokrúhli aritmeticky na jednotky.

11. Zuzana dostane od rodičov mesačne vreckové 12 eur. Koľko eur je to za 1, 2, 3, 4, 5 mesiacov? Riešenie **zapíš do tabuľky a narysuj graf**. Závislosť medzi veličinami zapíš pomocou **rovnice**.

Riešenie 11.

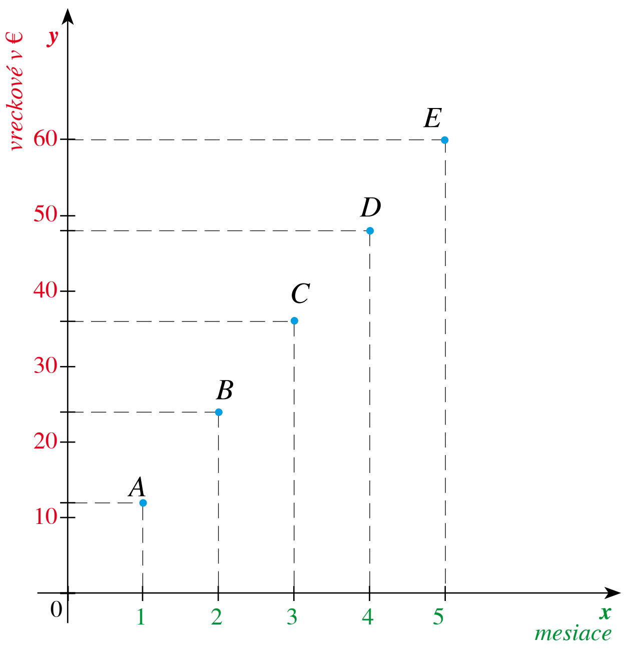
Riešenie úlohy je veľmi jednoduché. Počítame spamäti súčiny a zapisujeme do tabuľky. Do prvého riadka tabuľky zapíšeme počet mesiacov, do druhého vreckové.

	Zuzkine vreckové za polrok školského roka				
x – počet mesiacov	1	2	3	4	5
y – vreckové (€)	12	24	36	48	60

Vreckové sme mohli počítať aj pomocou zápisu vyjadrujúceho závislosť počtu mesiacov (M) a počtu eur na vreckové (V).

V = 12 · M
V(1) = 12 · 1 = 12
V(2) = 12 · 2 = 24
V(3) = 12 · 3 = 36
V(4) = 12 · 4 = 48
V(5) = 12 · 5 = 60

Graf zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc.
Na osi x je počet mesiacov, na osi y je vreckové.
Na osi x použijeme jednotku dĺžky 1 cm pre mesiace, na osi y bude 1 cm vyjadrovať hodnotu 10 eur.



Graf tvorí 5 bodov:
$A[1, 12]$, $B[2, 24]$, $C[3, 36]$, $D[4, 48]$, $E[5, 60]$.

Zostavíme rovnicu pre závislosť počtu eur, ktoré Zuzana dostane ako vreckové, od počtu mesiacov. Ak použijeme x na označenie počtu mesiacov, y na označenie počtu eur, potom **rovnica závislosti** je:

$y = 12 \cdot x$, pre $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rovnica $y = 12 \cdot x$ vyjadruje priamo úmernú závislosť medzi počtom mesiacov a počtom eur ako vreckového.

12. Rodina zaplatí každý mesiac za elektrinu preddavkovú platbu 50 eur.
Zostav tabuľku výdavkov za elektrinu za 1 mesiac, 2 mesiace, 3 mesiace, 4 mesiace, 5 mesiacov, za pol roka. Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf**. Vypočítaj, koľko zaplatí rodina v preddavkoch za elektrinu za rok. Pomocou **rovnice** zapíš závislosť výdavkov za elektrinu od počtu mesiacov.

13. Boris dostane každý týždeň rovnaké vreckové. Za 5 mesiacov je to 100 eur. Ak neutratí ani cent, koľko si našetrí za 1 týždeň, 2 týždne, 3 týždne, 4 týždne? Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf** (1 mesiac sú 4 týždne). Pomocou **rovnice** zapíš závislosť hodnoty našetrenej sumy od počtu týždňov.

14. Na výlete išli žiaci cez obed do bufetu. Jeden toast so šunkou a syrom stál 2,30 €. Vypočítaj, koľko eur stojí 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 toastov. Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf**. Pomocou **rovnice** zapíš závislosť sumy zaplatenej za toasty od ich počtu.

15. Dvaja kamaráti natierali farbou plot. Za 1 hodinu dokázali natrieť 3 m plota. Vypočítaj, koľko metrov plota natreli za pol hodiny, za 1 hodinu, 1,5 hodiny, 2 hodiny, 2,5 hodiny, 3 hodiny. Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf**. Pomocou **rovnice** zapíš závislosť dĺžky natretého plota od počtu hodín.

16. Žiak má vypočítať 18 úloh. Predpokladaný priemerný čas na vyriešenie jednej úlohy je 2 minúty.
a) Vypočítaj, koľko úloh vyrieši za 4 minúty, 6 minút, 8 minút, 10 minút, 12 minút a 14 minút. Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf**.
b) Vypočítaj, za koľko minút vyrieši všetky úlohy.
c) Pomocou **rovnice** zapíš závislosť počtu vypočítaných úloh od celkového času riešenia úloh (počtu minút).

17. Bazén napĺňajú prítokom vody s prietokom 12 m^3 za 1 hodinu.
a) Vypočítaj, koľko m^3 vody natečie do bazéna za 10 minút, 20 minút, 30 minút, 40 minút, 50 minút a 60 minút. Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf**.
b) Pomocou **rovnice** zapíš závislosť množstva vody pritečenej do bazéna od času napĺňania bazéna (počtu minút).

18. Karol by vymaľoval telocvičňu sám za 6 hodín.
a) Za koľko hodín by vymaľoval telocvičňu s jedným kamarátom? Za koľko hodín by ju vymaľoval s dvomi kamarátmi, s tromi kamarátmi, so štyrmi kamarátmi? Predpokladáme, že všetci kamaráti pracujú rovnakým tempom ako Karol. Riešenie **zapíš do tabuľky a zostroj graf**.
b) Zapíš **rovnicou** závislosť veličín v úlohe.

Riešenie 18.

a) Do prvého riadka tabuľky zapíšeme počet kamarátov s Karolom, do druhého riadka počet hodín, za ktorý Karol s kamarátmi vymaľuje telocvičňu.
Postupne vypočítame **za koľko hodín** vymaľuje Karol s kamarátmi telocvičňu.

Karol s jedným kamarátom (dvaja) vymaľuje za $\frac{6}{2} = 3$ hodiny.

Karol s dvomi kamarátmi (traja) vymaľuje za $\frac{6}{3} = 2$ hodiny.

Karol s tromi kamarátmi (štyria) vymaľuje za $\frac{6}{4} = 1,5$ hodiny.

Karol so štyrmi kamarátmi (piati) vymaľuje za $\frac{6}{5} = 1,2$ hodiny.

	Karol, kamaráti a telocvičňa				
Karol a kamaráti	1	2	3	4	5
počet hodín maľovania telocvične	6	3	2	1,5	1,2

Pomôcka
V úlohe sú veličiny **nepriamo úmerné**. V akom pomere sa **zväčší počet kamarátov**, v takom pomere sa **zmenší počet hodín** (skráti sa čas) potrebných na vymaľovanie telocvične.

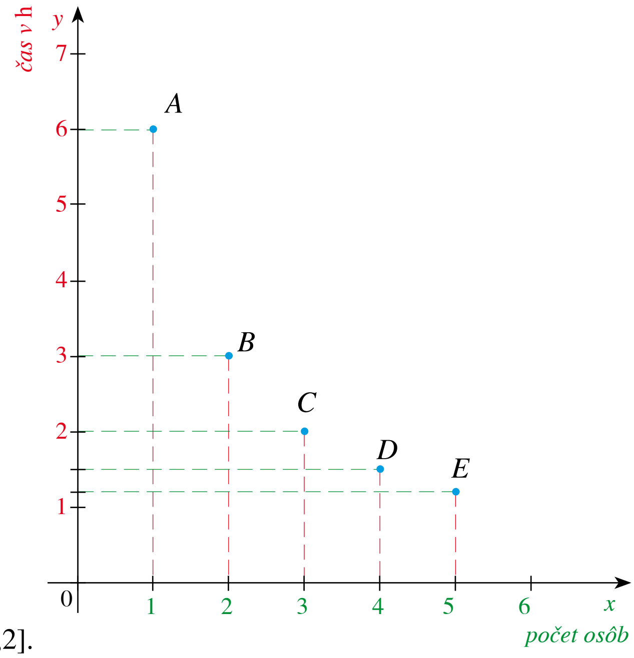
Karol sám .... 6 h
Karol a 1 kamarát .... y h

$$\frac{y}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 6$$

$$y = 3$$

Graf zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc.
Na os x zaznačíme počet osôb, ktoré vymaľujú telocvičňu (Karol s kamarátmi), na os y uvedieme čas v hodinách, za ktorý by Karol s kamarátmi vymaľoval telocvičňu. Jednotka dĺžky na osi x aj y bude 1 cm.



Graf tvorí 5 bodov: $A[1, 6]$, $B[2, 3]$, $C[3, 2]$, $D[4; 1{,}5]$, $E[5; 1{,}2]$.

b) Závislosť veličín v úlohe zapíšeme pomocou rovnice. Počet osôb, ktoré vymaľujú telocvičňu označíme premennou x. Čas, za ktorý vymaľujú telocvičňu, premennou y. Potom rovnica závislosti je:

$y = \frac{6}{x}$, pre $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rovnica $y = \frac{6}{x}$ vyjadruje **nepriamo úmernú závislosť** medzi počtom osôb maľujúcich telocvičňu a počtom hodín.

19. Na kosenie trávy na obecných lúkach si starosta obce objednáva koscov z firmy.
Jeden ich kosec má podľa normy pokosiť trávu na lúkach za 8 hodín.
a) Ak by firma poslala 2 koscov pracujúcich s rovnakou výkonnosťou, koľko by im to trvalo?
Vypočítaj, koľko by trvalo pokosenie lúk, ak by firma poslala 3, 4, 5, 6 koscov s rovnakou výkonnosťou.
Riešenie **zapíš do tabuľky a narysuj graf**.
b) Zapíš **rovnicou** závislosť veličín v úlohe.

20. Bazén sa zvyčajne napúšťa jedným prítokom vody. Vtedy naplnenie bazéna trvá 12 hodín.
a) Za aký čas by sa bazén naplnil, ak by k nemu pridali ešte jeden prítok, dva prítoky, tri prítoky, štyri prítoky, päť prítokov s rovnakým prietokom vody? Riešenie **zapíš do tabuľky a narysuj graf**.
b) Zapíš **rovnicou** závislosť veličín v úlohe.

V tejto kapitole sme riešili úlohy na priamu a nepriamu úmernosť. Poznatky z riešenia slovných úloh sme rozšírili o rysovanie **grafov** a **zápis priamo a nepriamo úmerných veličín rovnicou**.
Priama úmernosť je daná rovnicou (predpisom) $y = \boldsymbol{k} \cdot x$, $\boldsymbol{k}$ nazývame **koeficient priamej úmernosti**.
Podmienka pre k: $k > 0$
Nepriama úmernosť je daná rovnicou (predpisom) $y = \frac{\boldsymbol{k}}{x}$, kde $\boldsymbol{k}$ nazývame **koeficient nepriamej úmernosti**.
Podmienka pre x: $x \neq 0$. Podmienka pre k: $k > 0$.

21. Nasledujúca tabuľka je tabuľkou priamej úmernosti $y = k \cdot x$.
Nájdi koeficient priamej úmernosti a vypočítaj chýbajúce hodnoty y. Napíš rovnicu priamej úmernosti.

x	0,5	1	1,8	2	3,4	4	4,3
y			7,2				

Riešenie 21.

V tabuľke je pre $x = 1{,}8$ hodnota $y = 7{,}2$.
V priamej úmernosti platí, že hodnota y je násobkom hodnoty x.
$y = 7{,}2 = 4 \cdot 1{,}8$

Koeficient priamej úmernosti je $k = 4$.

pokračovanie ▶▶

Rovnica priamej úmernosti bude $y = \mathbf{4} \cdot x$. Z nej vypočítame hodnoty do tabuľky.

$x = 0{,}5$ $\quad y = 4 \cdot 0{,}5 = 2$

$x = 1$ $\quad y = 4 \cdot 1 = 4$

$\boldsymbol{x = 1{,}8}$ $\quad y = 4 \cdot \mathbf{1{,}8} = \mathbf{7{,}2}$

$x = 2$ $\quad y = 4 \cdot 2 = 8$

$x = 3{,}4$ $\quad y = 4 \cdot 3{,}4 = 7{,}2$

$x = 4$ $\quad y = 4 \cdot 4 = 16$

$x = 4{,}3$ $\quad y = 4 \cdot 4{,}3 = 17{,}2$

Overíme, či po dosadení daných hodnôt do rovnice dostaneme rovnosť.

x	0,5	1	**1,8**	2	3,4	4	4,3
$y = 4 \cdot x$	2	4	**7,2**	8	13,6	16	17,2

Koeficient k sme mohli určiť dosadením $x = 1{,}8$ a $y = 7{,}2$ do rovnice priamej úmernosti $y = k \cdot x$:

$y = 7{,}2 \qquad x = 1{,}8$

$$y = k \cdot x$$
$$7{,}2 = k \cdot 1{,}8$$
$$k = 7{,}2 : 1{,}8 = 4$$

22. Nasledujúca tabuľka je tabuľkou nepriamej úmernosti $y = \dfrac{k}{x}$.

Nájdi rovnicu, ktorou je daná táto úmernosť a vypočítaj do zošita chýbajúce hodnoty y.

x	0,1	0,5	1	1,2	2	5	10
y		8					

Riešenie 22.

Pre rovnicu nepriamej úmernosti musíme určiť koeficient k. V tabuľke nepriamej úmernosti je pre $x = 0{,}5$ hodnota $y = 8$. Na výpočet koeficientu k použijeme rovnicu nepriamej úmernosti $y = \dfrac{k}{x}$.

$y = 8 \qquad x = 0{,}5$

$$y = \frac{k}{x}$$
$$8 = \frac{k}{0{,}5} \qquad / \cdot 0{,}5$$
$$4 = k$$

Koeficient nepriamej úmernosti je $k = 4$.

Do rovnice nepriamej úmernosti $y = \dfrac{k}{x}$ dosadíme $k = 4$. Potom je **rovnica nepriamej úmernosti** $y = \dfrac{\mathbf{4}}{x}$.

$x = 0{,}1$ $\quad y = \dfrac{4}{0{,}1} = 4 : 0{,}1 = 40$

$\boldsymbol{x = 0{,}5}$ $\quad y = \dfrac{4}{0{,}5} = 4 : 0{,}5 = \mathbf{8}$

$x = 1$ $\quad y = \dfrac{4}{1} = 4$

$x = 1{,}2$ $\quad y = \dfrac{4}{1{,}2} = \dfrac{4 \cdot 10}{1{,}2 \cdot 10} = \dfrac{40 : 4}{12 : 4} = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3}$

$x = 2$ $\quad y = \dfrac{4}{2} = 2$

$x = 5$ $\quad y = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$x = 10$ $\quad y = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

Overíme, či po dosadení daných hodnôt do rovnice dostaneme rovnosť.

x	0,1	**0,5**	1	1,2	2	5	10
y	40	**8**	4	$3\frac{1}{3}$	2	0,8	0,4

23.* Nasledujúce tabuľky sú tabuľkami **priamej úmernosti**.
Vypočítaj koeficient *k* priamej úmernosti a chýbajúce hodnoty v tabuľke.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y		14					

b)

x	2	4	6	8	10	12	14
y				3,2			

c)

x	4	6	2	0	8	5	7
y						7,5	

d)

x	0,5	3,6	7,08	8,1	1,4	5,06	0,25
y			3,54				

e)

x		3,2		5,2		2,8	
y	4,5		4,6	20,8	0,84		12,5

24. Nasledujúce tabuľky sú tabuľkami **nepriamej úmernosti**.
Nájdi rovnice, ktorými sú dané a vypočítaj do zošita chýbajúce hodnoty.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y		2,25					

b)

x	0,5	2	1,5	9	10	0,3	1
y			2				

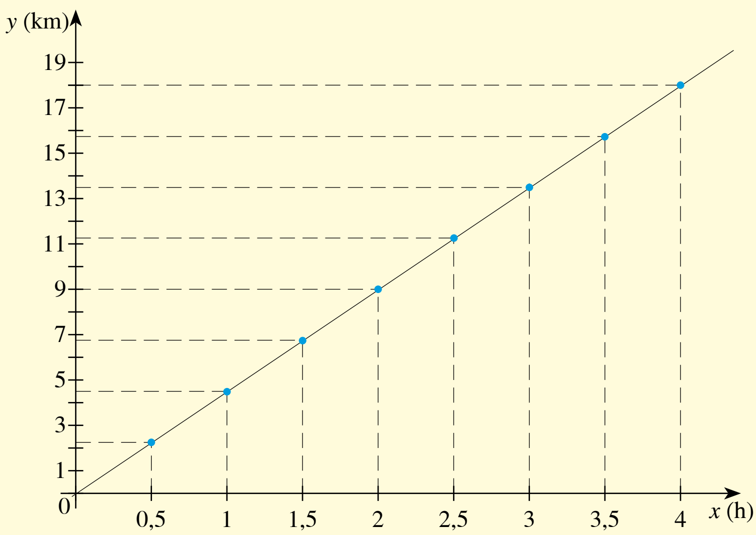
c)*

x				0,25			
y	9	3	1	12	0,3	0,9	6

d)*

x	0,3		0,9		0,36		0,18
y	1	3		6		12	

25. Na grafe je znázornený počet kilometrov, ktoré prejde chodec na bežnej turistickej trase za určitý počet hodín.



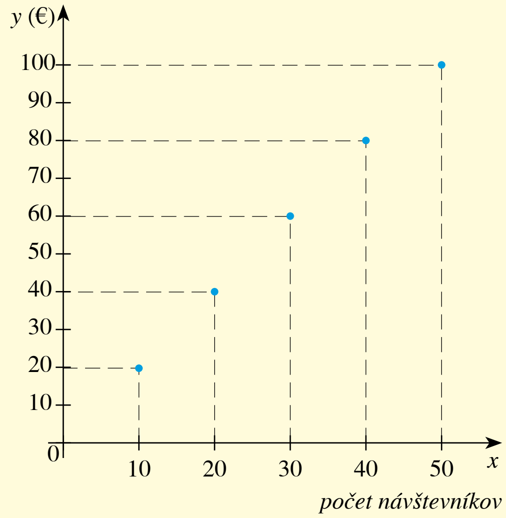
a) Doplň z grafu do tabuľky chýbajúce hodnoty.

x – čas (h)	2	4
y – dĺžka prejdenej trasy (km)		

b) Napíš rovnicu závislosti dĺžky prejdenej trasy od času.

c) Urči, či táto rovnica je rovnicou priamej alebo nepriamej úmernosti.

26. Na grafe je znázornená suma (y) za vstupenky do múzea v závislosti od zväčšujúceho sa počtu návštevníkov (x).



Zisti, ktoré z nasledujúcich viet sú pravdivé:
A Lístok do múzea stojí viac ako 2 eurá.
B 40 návštevníkov zaplatilo za lístky 80 eur.
C Závislosť z grafu môžeme zapísať rovnicou $y = 2 \cdot x$, pre $x \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$.
D Suma za vstupenky je nepriamo závislá od počtu návštevníkov.

27. Dané sú rovnice

$y = \frac{0{,}2}{x}$, $y = \frac{1}{5} \cdot x$, $y = 0{,}4 \cdot x$, $y = \frac{5}{x}$, $y = \frac{2}{3 \cdot x}$, $y = 1{,}5 \cdot x$.

a) Vyber z nich rovnice priamej úmernosti a urči ich koeficienty.
b) Vyber z nich rovnice nepriamej úmernosti a urči ich koeficienty.

V predchádzajúcich úlohách sme použili pojmy priama a nepriama úmernosť.

Rovnosťou $y = k \cdot x$ je vyjadrená priamo úmerná závislosť veličín x a y. Keďže ku každej hodnote x existuje práve jedna hodnota y, pre ktorú $y = k \cdot x$ hovoríme, že $\boldsymbol{y = k \cdot x}$ je **rovnica** (predpis) **funkcie priamej úmernosti.**

Rovnosťou $y = \frac{k}{x}$ je vyjadrená nepriamo úmerná závislosť veličín x a y. Keďže ku každej hodnote x, $x \neq 0$ existuje práve jedna hodnota y, pre ktorú $y = \frac{k}{x}$ hovoríme, že $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ je **rovnica** (predpis) **funkcie nepriamej úmernosti.**

Úlohy o funkciách priamej a nepriamej úmernosti nájdete aj v nasledujúcej kapitole 5.4.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Ak za 300 pretelefonovaných minút zaplatil telefonujúci 36 eur, potom za 10 pretelefonovaných minút zaplatil:

A 0,80 € B 0,12 € C 8,30 € D 1,20 €

2. Ak za 12 súprav pomôcok na rysovanie zaplatila škola 48,60 eur, potom päť súprav pomôcok stálo:

A 4,50 € B 20,25 € C 12,34 € D 36,60 €

3. Závislosť počtu prejdených kilometrov s od času v hodinách t, ak je priemerná rýchlosť chodca 4,5 km/h, vyjadruje vzťah:

A $s = 4{,}5 \cdot t$ B $s = \frac{4{,}5}{t}$ C $s = \frac{t}{4{,}5}$ D $s = 45 \cdot t$

4. Závislosť času jazdy auta t od jeho rýchlosti v, ak je dráha 150 km, vyjadruje vzťah:

A $t = 150 \cdot v$ B $t = \frac{150}{v}$ C $t = \frac{v}{150}$ D $t = 0{,}150 \cdot v$

5. Ak stojí 1 minerálka v školskom bufete 29 centov, potom závislosť tržieb za predané minerálky e v eurách od počtu predaných minerálok p, vyjadruje zápis:

A $e = 0{,}29 \cdot p$ B $e = \frac{0{,}29}{p}$ C $e = \frac{p}{0{,}29}$ D $e = 29 \cdot p$

6. Ak stoja dve čokolády 2,50 eur, potom závislosť tržieb za predané čokolády e v eurách od počtu predaných čokolád p, vyjadruje zápis:

A $e = 1{,}25 \cdot p$ B $e = \frac{1{,}25}{p}$ C $e = \frac{p}{2{,}50}$ D $e = 2{,}50 \cdot p$

7. Koeficient k priamej úmernosti danej tabuľkou je:

x	1	2	4	8	10
y	$\frac{3}{5}$	1,2	$2\frac{2}{5}$	4,8	6

A $k = 1{,}2$ B $k = 0{,}6$ C $k = 6$ D $k = 2{,}4$

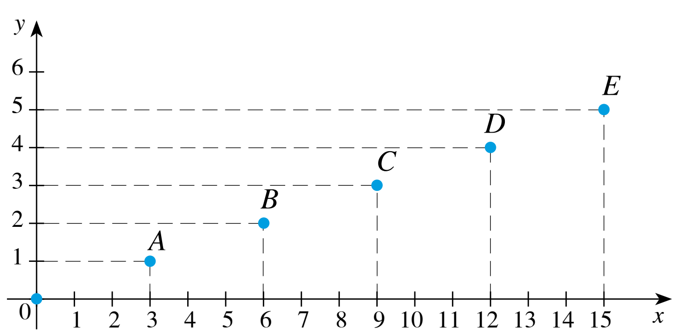
8. Určte, ktorá z nasledujúcich rovníc vyjadruje závislosť medzi x a y v tabuľke:

x	2	3	5	7	8
y	1	1,5	2,5	3,5	4

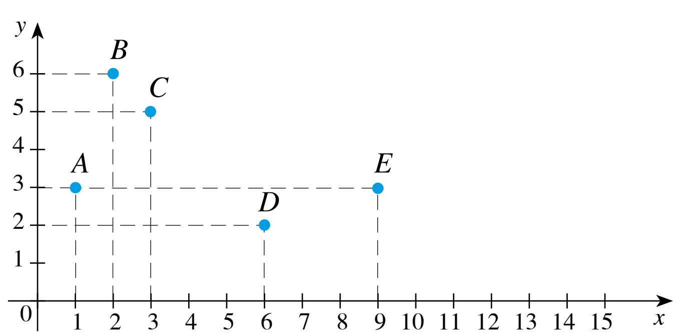
A $y = 2x$ B $y = \frac{x}{2}$ C $y = \frac{x}{4}$ D $y = 4x$

9. Grafom priamej úmernosti danej rovnicou $y = 3 \cdot x$, pre $x \in \{0, 3, 5, 2, 4, 1\}$ je graf:

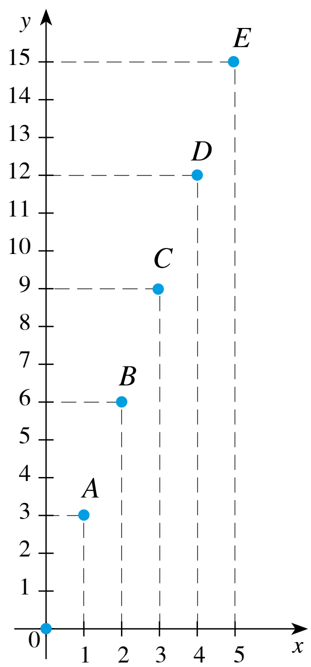
A



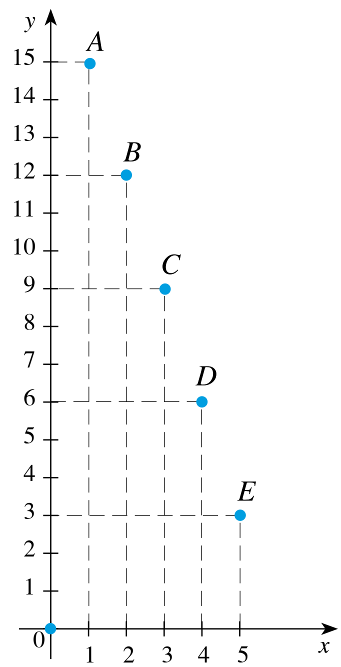
B



C



D



10. Ktorá z uvedených rovníc (predpisov) je rovnicou (predpisom) nepriamej úmernosti?

A $y = \frac{2x}{7}$ B $y = \frac{7}{2x}$ C $y = \frac{2}{7} \cdot x$ D $y = \frac{7x}{2}$

11. Ktorá z uvedených rovníc (predpisov) je rovnicou (predpisom) priamej úmernosti?

A $y = \frac{3}{5} \cdot x$ B $y = \frac{3}{5x}$ C $y = \frac{5}{3x}$ D $y = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x}$

Zapamätajte si

O **priamej úmernosti** hovoríme vtedy, keď platí:
koľkokrát sa **zväčší** (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa **zväčší** (zmenší) druhá veličina.

O **nepriamej úmernosti** hovoríme vtedy, keď platí:
koľkokrát sa **zväčší** (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa **zmenší** (zväčší) druhá veličina.

Priama úmernosť je daná rovnicou (predpisom) $y = \boldsymbol{k} \cdot x$, $\boldsymbol{k}$ nazývame **koeficient priamej úmernosti**.
Podmienka pre k: $k > 0$.

Nepriama úmernosť je daná rovnicou (predpisom) $y = \frac{\boldsymbol{k}}{x}$, kde $\boldsymbol{k}$ nazývame **koeficient nepriamej úmernosti**.
Podmienka pre x: $x \neq 0$. Podmienka pre k: $k > 0$.

5.4 Lineárna závislosť.
Graf a rovnica lineárnej funkcie

Čo sme sa už učili

Učili sme sa o:
- závislostiach rôznych veličín
- priamej a nepriamej úmernosti
- pravouhlej sústave súradníc
- grafe a rovnici priamej a nepriamej úmernosti

1. Juraj si našetril 15 eur a rozhodol sa kúpiť si nový počítač. Každý ďalší týždeň si preto začal odkladať z vreckového 5 eur. Po 8 týždňoch mu rodičia dali k jeho našetrenej sume toľko eur, aby si už počítač mohol kúpiť. Zostav z daných údajov **tabuľku**. K tabuľke zostroj **graf** a zapíš **rovnicou** závislosť počtu nasporených eur od počtu týždňov.

Riešenie 1.

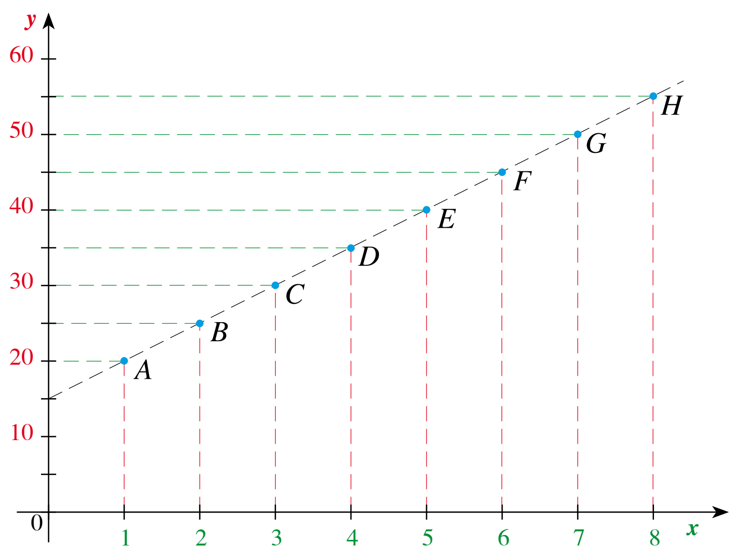
Tabuľku urobíme tak, že do prvého riadka vpíšeme týždne a do druhého riadka zapíšeme, koľko eur Juraj našetril. Počet eur, ktoré Juraj našetril, vypočítame pomocou **súčtu**, v ktorom prvý sčítanec bude **15 (počet eur, ktoré mal Juraj na začiatku sporenia)** a druhý sčítanec bude suma, ktorú si odložil za každý týždeň:

Po 1. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{1} = 20$ €.
Po 2. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{2} = 25$ €.
Po 3. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{3} = 30$ €.
Po 4. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{4} = 35$ €.
Po 5. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{5} = 40$ €.
Po 6. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{6} = 45$ €.
Po 7. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{7} = 50$ €.
Po 8. týždni je počet eur $15 + 5 \cdot \mathbf{8} = 55$ €.

Z výpočtov hodnôt do tabuľky vieme ľahko zostaviť **rovnicu**:
Počet týždňov označíme **premennou x**.
Počet nasporených eur **premennou y**.
Potom **rovnica** závislosti je
$y = 15 + 5 \cdot x, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

	Jurajovo sporenie							
x – čas sporenia (týždne)	1	2	3	4	5	6	7	8
y – nasporená suma (€)	20	25	30	35	40	45	50	55

Narysujeme graf do sústavy súradníc, pričom jednotkou dĺžky 1 cm na osi x bude 1 týždeň, na osi y bude 10 €.



Graf pre túto úlohu zostrojte aj na počítači.

Graf tvorí 8 bodov: $A[1, 20]$, $B[2, 25]$, $C[3, 30]$, $D[4, 35]$, $E[5, 40]$, $F[6, 45]$, $G[7, 50]$, $H[8, 55]$.
Ak by sme spojili všetky body grafu, zistili by sme, že ležia na priamke.
V tejto úlohe sú nasporená suma a čas sporenia **lineárne závislé premenné**.

2. Veronika dostala od rodičov na telefonovanie kredit 6 eur na mesiac.
Každý deň v mesiaci pravidelne pretelefonovala 30 centov.
Koľko eur jej zostalo po 5 dňoch, 10 dňoch, 15 dňoch a po 20 dňoch?
Riešenie zapíš do **tabuľky** a **zostroj graf**. Zapíš **rovnicou** závislosť veličín v úlohe.

Riešenie 2.

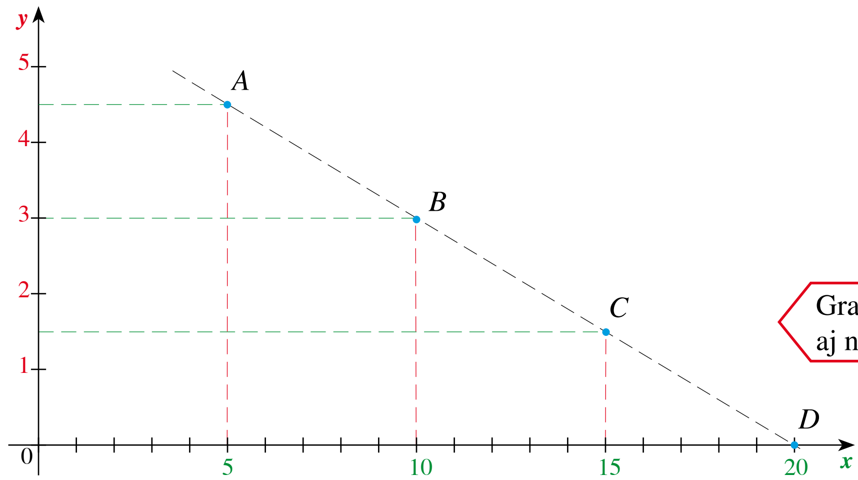
Do prvého riadka tabuľky vpíšeme dni a do druhého riadka tabuľky zapíšeme, koľko eur Veronike ešte zostalo po telefonovaní v daných dňoch. Kredit, ktorý jej zostal po telefonovaní, vypočítame pomocou rozdielu:

Po 5 dňoch jej zostalo $6 - 0{,}30 \cdot 5 = 6 - 1{,}50 = 4{,}50$ €.
Po 10 dňoch jej zostalo $6 - 0{,}30 \cdot 10 = 6 - 3{,}00 = 3{,}00$ €.
Po 15 dňoch jej zostalo $6 - 0{,}30 \cdot 15 = 6 - 4{,}50 = 1{,}50$ €.
Po 20 dňoch jej zostalo $6 - 0{,}30 \cdot 20 = 6 - 6{,}00 = 0{,}00$ €.

Z uvedených výpočtov vieme ľahko zostaviť **rovnicu** závislosti.
Počet dní označme x a počet eur označme y.
Potom rovnica bude mať tvar:
$\boldsymbol{y = 6 - 0{,}30 \cdot x}$, $x \in \{5, 10, 15, 20\}$.

	Veronikine telefonovanie			
x – počet dní telefonovania	5	10	15	20
y – zostávajúci kredit	4,50	3,00	1,50	0,00

Graf zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc, ktorá nie je karteziánska. Jednotku dĺžky na osi x zvolíme 0,5 cm, jednotku dĺžky na osi y zvolíme 1 cm. Na os x dáme hodnoty pre Veronikine telefonovanie v jednotlivých dňoch, na os y hodnoty pre zostávajúci kredit v eurách.



Graf pre túto úlohu zostrojte aj na počítači.

Graf tvoria 4 body: $A[5; 4{,}50]$, $B[10, 3]$, $C[15; 1{,}50]$, $D[20, 0]$.
Keby sme body grafu spojili čiarou, zistili by sme, že ležia na priamke.
V tejto úlohe sú zostávajúci kredit a počet dní telefonovania **lineárne závislé premenné**.

3. Klaudia má narodeniny. Jej brat so spoločnými priateľmi sa rozhodli kúpiť pre ňu spoločný darček.
Klaudiin brat dal 5 eur a kamaráti sa skladali po 1,50 €.
Zapíš **rovnicu** závislosti vyzbieraného počtu eur na darček od počtu kamarátov. Zostroj graf na počítači.

4. Rodina minie za týždeň na potraviny priemerne 240 eur. Mesačný príjem rodiny je 1 020 eur. Napíš **rovnicu** závislosti počtu eur, ktoré rodine ostanú po prvom týždni, druhom týždni, treťom týždni, po mesiaci. Zostroj **graf** na počítači.

Projektová úloha
Zistite, aké pravidelné mesačné výdavky má vaša rodina. Vypočítajte, koľko je to ročne. Zostrojte do jednej sústavy súradníc grafy vyjadrujúce závislosť výdavkov vydaných na jednotlivé položky. Porovnajte ich a pokúste sa vytvoriť pre svoju rodinu plán sporenia na jeden rok.

Aj veličiny v úlohách 3 a 4 sú **lineárne závislé**.

Zápis lineárnej závislosti dvoch veličín x a y v tvare $y = k \cdot x + q$, kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla, nazývame rovnicou tejto lineárnej závislosti.

Pretože ku každej hodnote x bola jednoznačne priradená hodnota y, hovoríme, že rovnica (predpis)

$$y = k \cdot x + q$$

je **rovnicou (predpisom) lineárnej funkcie**.
V rovnici $y = k \cdot x + q$, kde k, q sú koeficienty lineárnej funkcie, x nazývame **nezávislá premenná** a y nazývame **závislá premenná**.
Grafom lineárnej funkcie je **priamka** alebo jej časti v závislosti od hodnôt premennej x.

Napríklad:

$y = 5 \cdot x + 15,\ x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$k = 5$
$q = 15$
Grafom je súbor **izolovaných bodov**.

$y = 4 \cdot x,\ x \in R.$
$k = 4$
$q = 0$
Grafom je **priamka**.

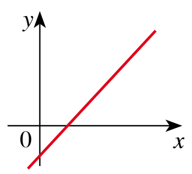
$y = 6 - 0{,}30 \cdot x,\ x \in \{5, 10, 15, 20\}$
$k = -0{,}30$
$q = 6$
Grafom je súbor **izolovaných bodov**.

$y = -2 \cdot x - 3,\ x \in R,\ x \geq 1$
$k = -2$
$q = -3$
Grafom je **polpriamka**.

Poznámka
Rovnica lineárnej funkcie sa uvádza aj v tomto tvare:
$y = a \cdot x + b$, kde a, b sú reálne čísla.

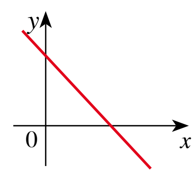
V súvislosti s lineárnymi funkciami zvykneme na základnej škole hovoriť o dvoch vlastnostiach:

Graf rastúcej funkcie



Lineárna funkcia je rastúca, ak platí:
ak sa **zväčšujú** (zmenšujú) hodnoty nezávislej premennej x, tak sa **zväčšujú** (zmenšujú) aj hodnoty závislej premennej y.
Funkcia je klesajúca, ak platí:
ak sa **zväčšujú** (zmenšujú) hodnoty nezávislej premennej x, tak sa **zmenšujú** (zväčšujú) hodnoty závislej premennej y.

Graf klesajúcej funkcie



5. Narysuj **grafy** lineárnych funkcií. Urči **koeficienty** funkcií. Zisti, či sú funkcie **rastúce** alebo **klesajúce**.

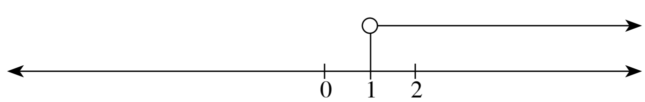
a) $y = -3 \cdot x + 2,\ x \in R, x > 1$
b) $y = \frac{2}{3} \cdot x - 1,\ x \in R, x < 3$
c) $y = \frac{2x}{5},\ x \in R, x \geq -5$
d) $y = 2 \cdot x + 1,\ x \in R$

Riešenie 5.

Grafy funkcií sme rysovali z tabuliek. Zostavme tabuľku pre každú funkciu. V závislosti od číselného oboru funkcie vyberieme do tabuľky hodnoty pre nezávislú premennú x a z rovnice funkcie vypočítame hodnoty y.
Graf narysujeme v sústave súradníc s jednotkou dĺžky na osiach 1 cm.

a) $y = -3 \cdot x + 2,\ x \in R,\ x > 1$

Nerovnicu $x > 1$ sme riešili na číselnej osi. Jej riešením sú čísla z číselnej osi od čísla 1 napravo. Prázdny krúžok znamená, že číslo 1 nie je riešením nerovnice ale napríklad číslo 1,1 už riešením nerovnice je.



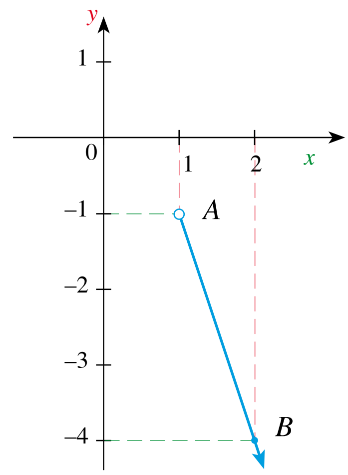
Vzhľadom na tieto poznatky vyberieme do tabuľky pre premennú x čísla 1 a 2. Môžeme povedať, že grafom funkcie bude **polpriamka bez začiatočného bodu**, ktorý má x-ovú súradnicu 1.

x	1	2
$y = -3 \cdot x + 2$	-1	-4

$y = -3 \cdot 1 + 2 = -1$

$y = -3 \cdot 2 + 2 = -4$

Vypočítaj hodnoty funkcie $y = -3 \cdot x + 2$ aj pre $x = 1{,}5;\ 3{,}6;\ 4{,}8$ a zakresli ich do grafu funkcie.



Grafom funkcie je polpriamka AB, bez začiatočného bodu A (preto prázdny krúžok).

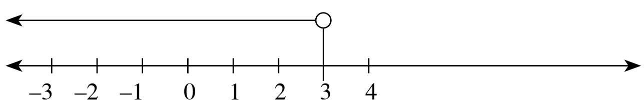
Koeficienty funkcie $y = -3 \cdot x + 2$

$k = -3 \qquad q = 2$

Z grafu je vidieť: ako sa **zväčšujú** hodnoty premennej x, tak sa **zmenšujú** hodnoty y. **Funkcia je klesajúca.**

b) $y = \frac{2}{3} \cdot x - 1,\ x \in R,\ x < 3$

Riešením nerovnice $x < 3$ sú čísla z číselnej osi od čísla 3 naľavo. Prázdny krúžok znamená, že číslo 3 nie je riešením nerovnice, ale napríklad číslo 2,9 už riešením nerovnice je.



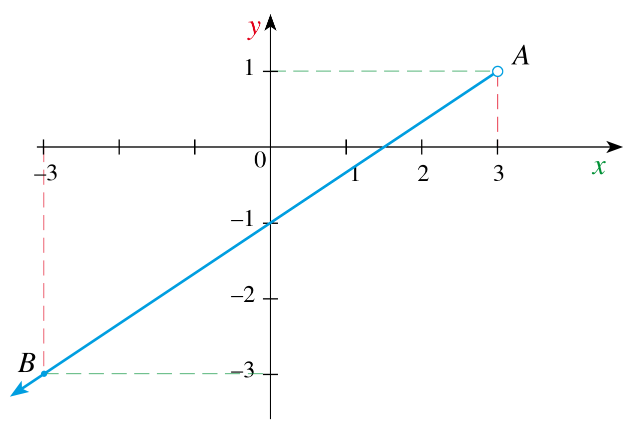
Vzhľadom na tieto poznatky vyberieme do tabuľky pre premennú x čísla 3 a -3. Môžeme povedať, že grafom funkcie bude **polpriamka bez začiatočného bodu** s x-ovou súradnicou 3.

x	3	-3
$y = \frac{2}{3} \cdot x - 1$	1	-3

$y = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 = 2 - 1 = 1$

$y = \frac{2}{3} \cdot (-3) - 1 = -2 - 1 = -3$

Vypočítaj hodnoty funkcie $y = \frac{2}{3} \cdot x - 1$, aj pre $x = -6, -9, -12$ a zakresli ich do grafu funkcie.



Grafom funkcie je polpriamka AB, bez začiatočného bodu A (preto prázdny krúžok).

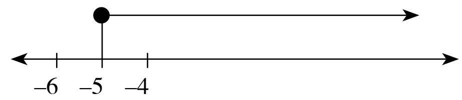
Koeficienty funkcie $y = \frac{2}{3} \cdot x - 1$

$k = \frac{2}{3} \qquad q = -1$

Z grafu je vidieť: ako sa **zväčšujú** hodnoty premennej x, tak sa **zväčšujú** hodnoty y. **Funkcia je rastúca.**

c) $y = \dfrac{2x}{5}$, $x \in R$, $x \geq -5$

Riešením nerovnice $x \geq -5$ sú čísla z číselnej osi od čísla -5 napravo. Plný krúžok znamená, že aj číslo -5 je riešením nerovnice.



Vzhľadom na tieto poznatky vyberieme do tabuľky pre premennú x čísla -5 a 0.
Môžeme povedať, že grafom funkcie bude **polpriamka so začiatočným bodom** s x-ovou súradnicou -5.

x	-5	0
$y = \dfrac{2x}{5}$	-2	0

$y = \dfrac{2 \cdot (-5)}{5} = -2$

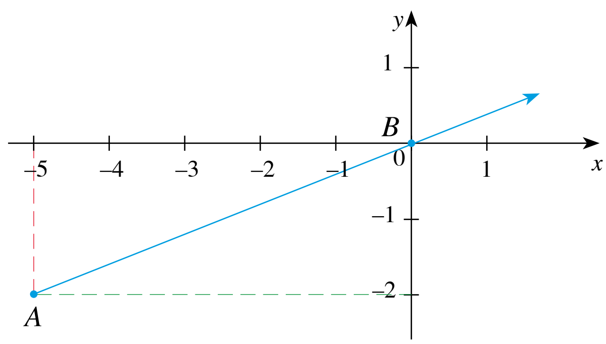
$y = \dfrac{2 \cdot 0}{5} = 0$

Grafom funkcie je polpriamka AB, so začiatočným bodom A (plný krúžok).

Koeficienty funkcie $y = \dfrac{2x}{5} = \dfrac{2}{5} \cdot x + 0$

$k = \dfrac{2}{5}$ $\qquad q = 0$

Z grafu je vidieť: ako sa **zväčšujú** hodnoty premennej x, tak sa **zväčšujú** hodnoty y.
Funkcia je rastúca.



d) $y = 2 \cdot x + 1$, $x \in R$

Ak $x \in R$, grafom funkcie je priamka.
Keďže priamka je určená dvomi bodmi, stačí, ak si do tabuľky pre hodnoty x zvolíme dve ľubovoľné čísla.
My si vyberáme **čísla 0 a 1**. Sú to reálne čísla a hodnoty y pre ne jednoducho vypočítame.

x	0	1
$y = 2 \cdot x + 1$	1	3

$y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

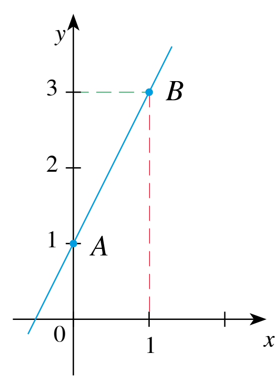
$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Vypočítaj hodnoty funkcie $y = 2 \cdot x + 1$ aj pre $x = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5$ a zakresli ich do grafu funkcie.

Grafom funkcie je **priamka AB**.
Koeficienty funkcie $y = 2 \cdot x + 1$

$k = 2$ $\qquad q = 1$

Z grafu je vidieť: ako sa **zväčšujú** hodnoty premennej x, tak sa **zväčšujú** hodnoty y.
Funkcia je rastúca.



Skôr než vyriešime nasledujúce úlohy, pozrime sa, ako **koeficient k** v rovnici lineárnej funkcie $y = k \cdot x + q$ súvisí s vlastnosťami rastúcej a klesajúcej funkcie.

rovnica funkcie	k	q	vlastnosť
$y = 5 \cdot x + 15$	$k = 5$	$q = 15$	rastúca funkcia
$y = \frac{2}{3} \cdot x - 1$	$k = \frac{2}{3}$	$q = -1$	rastúca funkcia

$k > 0$

Ak je v rovnici $y = k \cdot x + q$ koeficient k **kladné** číslo, tak je funkcia **rastúca**.

rovnica funkcie	k	q	vlastnosť
$y = 6 - 0{,}30 \cdot x$	$k = -0{,}30$	$q = 6$	klesajúca funkcia
$y = -3 \cdot x + 2$	$k = -3$	$q = 2$	klesajúca funkcia

$k < 0$

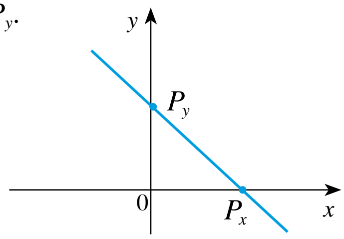
Ak je v rovnici $y = k \cdot x + q$ koeficient k **záporné** číslo, tak je funkcia **klesajúca**.

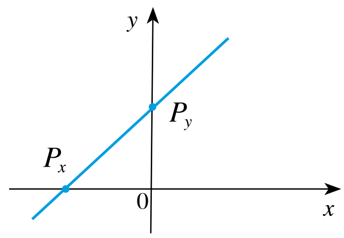
6. Narysuj grafy lineárnych funkcií, urči ich koeficienty. Napíš, či sú funkcie rastúce alebo klesajúce.

a) $y = 4 \cdot x - 3,\ x \in R$ **b)** $y = 0{,}4 \cdot x + 0{,}2,\ x \in R, x < 0$ **c)** $y = 1 - 5 \cdot x,\ x \in R$

d) $y = \frac{1}{4} \cdot x - 1,\ x \in R, x < 8$ **e)** $y = -2 \cdot x + 4,\ x \in R, x \geq 0$ **f)** $y = \frac{x}{5},\ x \in R, x > -5$

Rysovať grafy lineárnych funkcií môžeme aj pomocou **priesečníkov grafu funkcie so súradnicovými osami.** Označujeme ich P_x a P_y.





7. Urči priesečníky grafov funkcií s **osou x**:

a) $y = -2 \cdot x + 5,\ x \in R$ **b)** $y = \frac{1}{4} \cdot x + 3,\ x \in R$

Riešenie 7.

Body ležiace na osi x majú y-ovú súradnicu 0.

Ak máme určiť priesečník grafu funkcie s osou x, riešime rovnicu $y = 0$.

a)
$$y = -2 \cdot x + 5$$
$$0 = -2 \cdot x + 5 \quad / + 2x$$
$$2x = 5 \quad / : 2$$
$$x = 2{,}5$$

Priesečník grafu funkcie $y = -2 \cdot x + 5$ s osou x má súradnice [2,5; 0].

b) Za y dosadíme do rovnice funkcie $y = \frac{1}{4} \cdot x + 3$ číslo 0 a riešime rovnicu $0 = \frac{1}{4} \cdot x + 3$.
$$0 = \frac{1}{4} \cdot x + 3 \quad / \cdot 4$$
$$0 = x + 12 \quad / - 12$$
$$-12 = x$$
$$x = -12$$

Priesečník grafu funkcie $y = \frac{1}{4} \cdot x + 3$ s osou x má súradnice [–12, 0].

8. Urči priesečníky grafov funkcií s **osou y**:

a) $y = 3 \cdot x - 4$ **b)** $y = 3 - 0{,}5 \cdot x$

Riešenie 8.

Body ležiace na osi y majú x-ovú súradnicu 0.

Ak máme určiť priesečník grafu funkcie s osou y, **dosadíme** do rovnice funkcie za premennú x číslo 0.

a)
$$y = 3 \cdot x - 4$$
$$y = 3 \cdot 0 - 4 = -4$$

Priesečník grafu funkcie $y = 3 \cdot x - 4$ s osou y má súradnice [0, –4].

b) Do rovnice funkcie $y = 3 - 0{,}5 \cdot x$ **dosadíme** za premennú x číslo 0.

$y = 3 - 0{,}5 \cdot x$

$y = 3 - 0{,}5 \cdot 0 = 3$

Priesečník grafu funkcie $y = 3 - 0{,}5 \cdot x$ s osou y má súradnice [0, 3].

Pri určovaní priesečníka s osou y si môžeme všimnúť, že v rovnici funkcie $y = kx + q$ **sa hodnota q rovná druhej súradnici priesečníka grafu funkcie s osou y**. Napríklad:

$y = 3 \cdot x - 4$ priesečník s osou y má súradnice $[0, -4]$, $q = -4$

$y = 3 - 0{,}5 \cdot x$ priesečník s osou y má súradnice $[0, 3]$, $q = 3$

9. Urči priesečníky grafov funkcií **s osou x a s osou y**, $x \in R$.

a) $y = 2 \cdot x + 0{,}5$ **b)** $y = \dfrac{5-x}{3}$ **c)** $y = \dfrac{x-1}{4} + 2$ **d)** $y = 4 - \dfrac{x}{2}$ **e)** $y = \dfrac{2}{5} - 3x$

10. Pomocou priesečníkov grafu funkcie s osami sústavy súradníc zostroj graf lineárnej funkcie $y = \dfrac{6}{5} - 3x$, pre $x \in R$.

Riešenie 10.

Najprv určíme priesečník s osou x. Má y-ovú súradnicu 0.
Do rovnice funkcie dosadíme za y číslo 0 a riešime rovnicu:

$$y = \frac{6}{5} - 3x$$

$$0 = \frac{6}{5} - 3x \qquad / + 3x$$

$$3x = \frac{6}{5} \qquad / : 3$$

$$x = \frac{2}{5}$$

Pomôcka

$$\frac{6}{5} : 3 = \frac{6}{5} : \frac{3}{1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$$

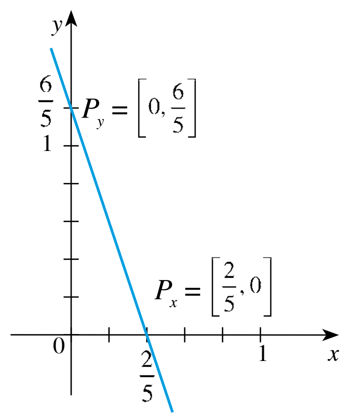
Priesečník grafu funkcie s osou x je bod so súradnicami $\left[\frac{2}{5}, 0\right]$.

Priesečník grafu funkcie s osou y má x-ovú súradnicu 0.
Do rovnice funkcie dosadíme za premennú x číslo 0.

$$y = \frac{6}{5} - 3x = \frac{6}{5} - 3 \cdot 0 = \frac{6}{5}$$

Priesečník grafu funkcie s osou y je bod so súradnicami $\left[0, \frac{6}{5}\right]$.

Graf zostrojíme v pravouhlej sústave súradníc.



11. Pomocou priesečníkov grafu funkcie s osami sústavy súradníc zostroj v jednej sústave súradníc grafy štyroch funkcií, $x \in R$:
a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = 2x - 1$ **c)** $y = 2x + 3$ **d)** $y = 2x - 3$

12. Pomocou priesečníkov grafu funkcie s osami sústavy súradníc zostroj v jednej sústave súradníc grafy štyroch funkcií, $x \in R$:
a) $y = -2x + 1$ **b)** $y = -2x - 1$ **c)** $y = -2x - 3$ **d)** $y = -2x + 3$

Viete, že...?

Jedným zo zakladateľov modernej teórie funkcií bol český matematik a filozof **Bernard Bolzano (1781 – 1848)**, profesor teológie na Karlovej univerzite v Prahe. Napísal množstvo matematických diel, ktorých význam docenili až neskoro po jeho smrti. Francúzsky vedec **Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830)** a nemecký matematik **Peter Dirichlet (1805 – 1859)** vyslovili záver, že funkciu treba chápať ako určitú závislosť medzi veličinami, bez ohľadu na to, či je k dispozícii rovnica vyjadrujúca túto závislosť. Dirichletova definícia funkcie:

"Premennú veličinu y nazývame funkciou premennej veličiny x, ak každej hodnote veličiny x zodpovedá jediná, presne určená hodnota veličiny y."

Zdroj: http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/funkcie/Histor.htm

Problémová úloha

Sformulujte z riešení úloh 11 a 12 tvrdenie, ktoré platí pre grafy týchto funkcií.

13. Z funkcií daných rovnicami $y = 0{,}5x + 2$, $y = \dfrac{x-1}{4}$, $y = -2 - 0{,}5x$, $y = 0{,}25x + 4$, $x \in R$, vyber tie, ktorých grafy sú rovnobežné priamky.

14. Z funkcií daných rovnicami $y = x + 2$, $y = \dfrac{x+8}{4}$, $y = \dfrac{x}{4} - 8$, $y = -2 - x$, $x \in R$, vyber tie, ktorých priesečníky grafov s osou y sú totožné.

15. Zisti, na grafe ktorej z funkcií **a)** až **d)** leží bod $M[0, -4]$.

a) $y = 0{,}5x + 4$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{4}$ **c)** $y = -4 - x$ **d)** $y = 4 + x$

Riešenie 15.

Úlohu môžeme riešiť viacerými spôsobmi.

Jeden zo spôsobov riešenia vychádza z úvahy:
Bod M má x-ovú súradnicu 0, je teda priesečníkom grafu funkcie s osou y.
O ktorú funkciu ide, môžeme zistiť tak, že postupne určíme priesečníky grafov funkcií v **a)** až **d)** s osou y.

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou tejto úvahy:
Ak je bod M bodom grafu funkcie, tak po dosadení hodnoty x-ovej súradnice bodu do rovnice funkcie, musíme dostať y-ovú súradnicu daného bodu.

Prvé riešenie urob samostatne.

My si ukážeme druhé riešenie.
Tipujeme, že riešením by mohli byť funkcie v **a)** alebo **c)**. Dosadíme hodnotu x-ovej súradnice do rovnice prvej funkcie:

a) $[0, -4]$

$x = 0$

Potom: $y = 0{,}5x + 4 = 0{,}5 \cdot 0 + 4 = 4$

V bode $M[0, -4]$ je y-ová súradnica -4.
Keďže $4 \neq -4$, **bod** M **nepatrí grafu funkcie** $y = 0{,}5x + 4$.

Samostatne over aj možnosti **b)** a **d)**.

c) $[0, -4]$

$x = 0$

Potom: $y = -4 - x = -4 - 0 = -4$

V bode $M[0, -4]$ je y-ová súradnica -4.
Keďže $-4 = -4$, **bod** M **patrí grafu funkcie** $y = -4 - x$.

16. Zisti, ktorému grafu funkcie patrí bod $B[-2, -1]$:

a) $y = 0{,}2x - 1$ **b)** $y = \dfrac{x-2}{4}$ **c)** $y = -2 - x$ **d)** $y = -1 - 2x$

17.*

a) Zisti, pre ktoré reálne čísla x sa hodnota funkcie $y = \dfrac{3x-1}{2}$ rovná 0.

b) Zisti, pre ktoré reálne čísla x sú hodnoty funkcie $y = 4x + 5$ väčšie alebo sa rovnajú číslu 2.

c) Zisti, pre ktoré reálne čísla x sú hodnoty funkcie $y = 3 - 5x$ menšie alebo sa rovnajú číslu 3.

d) Zisti, pre ktoré reálne čísla x sú hodnoty funkcie $y = -0{,}2x + 0{,}7$ väčšie ako -5 a súčasne menšie ako 4.

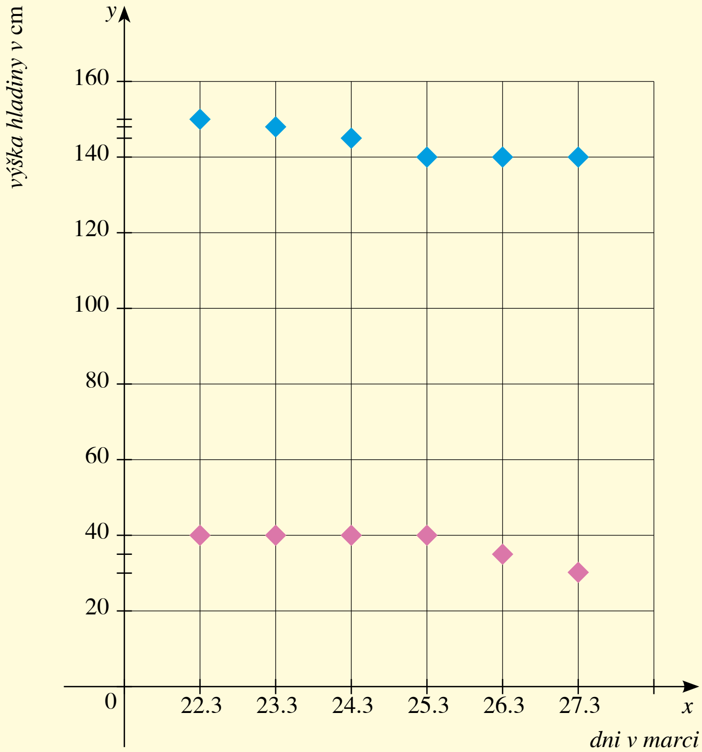
18.* Napíš rovnicu lineárnej funkcie, ak poznáš priesečníky jej grafu s osami sústavy súradníc:

a) $P_x[-2, 0]$, $P_y[0, -2]$ **b)** $P_x[3, 0]$, $P_y[0, -5]$

c) $P_x[-0{,}5; 0]$, $P_y[0; -0{,}1]$ **d)** $P_x\left[\dfrac{2}{5}, 0\right]$, $P_y\left[0, \dfrac{3}{4}\right]$

19. HRON

Hron je druhá najdlhšia slovenská rieka. Pramení na svahoch Kráľovej hole v Nízkych Tatrách vo výške 1 005 m n. m. (pramenia tam štyri rieky: Hron, Čierny Váh, Hnilec a Hornád).
Hron patrí medzi najvyhľadávanejšie vodácke trasy, pričom sa splavuje asi 270 km. Rieka sa môže splavovať, keď jej hladina dosahuje určitú výšku. Vodáci preto pozorne sledujú odpočty výšky hladiny (vodočet) merané v Brezne a v Banskej Bystrici.
Na grafe je znázornený stav hladiny rieky Hron nameraný v marci v Brezne a v Banskej Bystrici.



a) Napíš, v ktorých dňoch bol stav hladiny rieky Hron bez zmeny oproti predchádzajúcemu dňu, v Brezne a v ktorých dňoch v Banskej Bystrici.

b) Napíš, v ktorých dňoch hladina rieky Hron stúpala oproti predchádzajúcemu dňu a kedy klesala v Brezne a v ktorých dňoch stúpala a klesala v Banskej Bystrici.

Riešenie 19.

a) Bez zmeny v Brezne bol stav hladiny rieky Hron v dňoch 23. 03., 24. 03., 25. 03., výška hladiny bola 40 cm.
Bez zmeny v Banskej Bystrici bol stav hladiny rieky Hron v dňoch 26. 03, 27. 03.
Výška hladiny bola 140 cm.

b) Hladina rieky Hron klesala v Brezne v dňoch 26. 03., 27. 03., na grafe stúpanie hladiny nie je znázornené.
Hladina rieky Hron klesala v Banskej Bystrici v dňoch 23. 03., 24. 03., 25. 03., na grafe nie je stúpanie hladiny znázornené.

V predchádzajúcej úlohe sme zisťovali, kedy bola **výška hladiny** rieky Hron **bez zmeny**.

> **Závislosť**, v ktorej pri **zmene jednej** veličiny (nezávislej premennej) **nenastane zmena druhej** veličiny (závislej premennej), označujeme pojmom **konštantná funkcia**.
>
> §

Ak **premenou** x označíme dni, v ktorých je v Brezne hladina rieky bez zmeny (1. deň – 23. 03., 2. deň – 24. 03., 3. deň – 25. 03.), a **premennou** y označíme výšku hladiny rieky, potom **konštantná funkcia znázorňujúca** túto situáciu je:

$y = 40$, kde $x \in \{1, 2, 3\}$

Pozrime sa na rovnicu lineárnej funkcie a súvis jej koeficientov so známymi funkciami.

> Pre $k = 0$ má rovnica $y = kx + q$ tvar $y = q$, $q \in R$ a nazýva sa **rovnicou konštantnej funkcie**.
> Ak $q = 0$ a $k \neq 0$, potom má rovnica $y = kx + q$ tvar $y = kx$, $x \in R$, čo je rovnica (predpis) pre **priamu úmernosť**.
>
> §

20. Zostroj grafy konštantných funkcií:

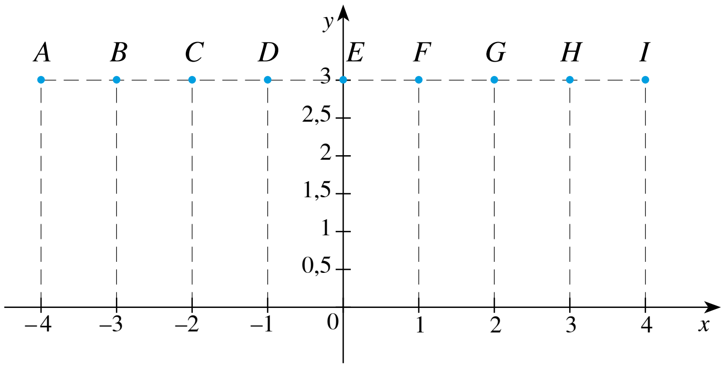
a) $y = 3,\ x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **b)** $y = -2,\ x \in R$

Uveď súradnice priesečníka grafu funkcie s osou y.

Riešenie 19.

a) Na zostrojenie grafu funkcie $y = 3$ zostavíme tabuľku hodnôt.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	3	3	3	3	3	3	3	3

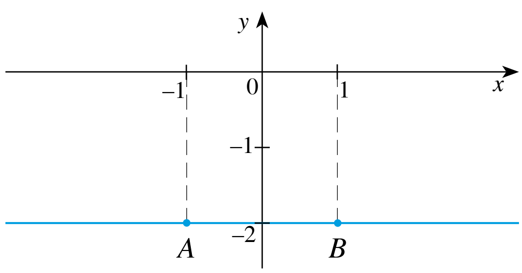


Grafom je súbor **9 bodov** so súradnicami [–4, 3], [–3, 3], [–2, 3], [–1, 3], [0, 3], [1, 3], [2, 3], [3, 3], [4, 3].
Priesečník grafu funkcie s osou y je bod E, ktorý má súradnice [0, 3].

b) $y = -2,\ x \in R$

Premenná x je z oboru reálnych čísel. Grafom tejto konštantnej funkcie je priamka.
Na jej zostrojenie stačia dva body, napr. $A[-1, -2]$, $B[1, -2]$,

x	-1	1
y	-2	-2



Grafom danej funkcie je priamka *AB*.
Priesečník priamky AB s osou y má súradnice [0, –2].

21. Zostroj grafy konštantných funkcií:

a) $y = 4,\ x \in \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$ **b)** $y = -1,\ x \in R, x > 0$ **c)** $y = 1{,}5,\ x \in R, x > 2$ **d)** $y = -\dfrac{3}{4},\ x \in R, x \le 4$

22. Narysuj graf funkcie $y = \dfrac{2}{5} \cdot x,\ x \in R$.

Riešenie 22.

Funkcia daná rovnicou $y = \dfrac{2}{5} \cdot x$ je funkcia **priamej úmernosti**. Pri zostrojovaní grafu priamo úmerných závislostí, kde prvá premenná bola súborom štyroch, piatich, ..., desiatich čísel, bol grafom súbor konkrétneho počtu bodov (štyroch, piatich, ..., desiatich bodov) ležiacich na priamke. Keďže reálne čísla vypĺňajú celú číselnú os, tak **grafom danej funkcie pre reálne čísla bude priamka**. Priamka je určená **dvomi bodmi**, preto na zostrojenie grafu danej funkcie stačí vybrať **dve hodnoty pre nezávislú premennú x**.

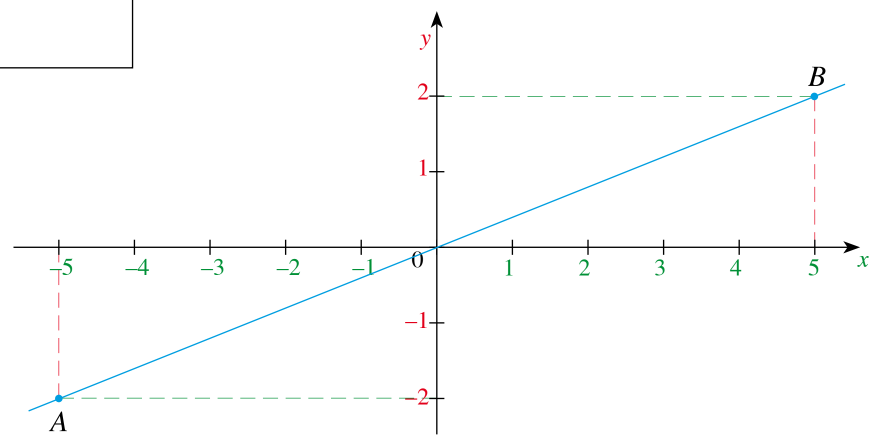
pokračovanie ▶▶

Vyberieme napr. $x = -5$ a $x = 5$.

x	-5	5
$y = \frac{2}{5} \cdot x$	-2	2

$x = -5 \qquad y = \frac{2}{5} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot (-5) = \frac{-10}{5} = -2$

$x = 5 \qquad y = \frac{2}{5} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot 5 = \frac{10}{5} = 2$



Grafom funkcie je priamka *AB*.

23. Zostroj graf funkcie $y = \frac{2}{3x}$, $x \in R$ a $x \neq 0$.

Riešenie 23.

Funkcia daná rovnicou $y = \frac{2}{3x}$ je funkciou **nepriamej úmernosti**.
Pri rysovaní grafu nepriamo úmerných veličín, kde prvá premenná bola súborom štyroch, piatich, ..., desiatich čísel, bol grafom súbor konkrétneho počtu bodov (štyroch, piatich, ..., desiatich bodov) ležiacich na hyperbole. Keďže reálne čísla vypĺňajú celú číselnú os, tak **grafom danej funkcie pre reálne čísla bude hyperbola**.

Hyperbola sa dá najlepšie zostrojiť pomocou grafickej kalkulačky alebo pomocou počítača.
Ak hyperbolu zostrojujeme bez týchto pomôcok, zvolíme si pre premennú x **aspoň**:
– tri záporné hodnoty, napr. $x = -1$, $x = -1{,}5$, $x = -2$
– tri kladné hodnoty, napr. $x = 1$, $x = 1{,}5$, $x = 2$

Hodnotu x **= 0 nemôžeme** zvoliť, pretože pre zlomok platí: **menovateľ sa nesmie rovnať 0.**

x	-2	$-1{,}5$	-1	1	$1{,}5$	2
$y = \frac{2}{3x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$

$x = -2 \qquad y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot (-2)} = -\frac{1}{3}$

$x = -1{,}5 \qquad y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot (-1{,}5)} = -\frac{2}{4{,}5} = -\frac{2 \cdot 2}{4{,}5 \cdot 2} = -\frac{4}{9}$

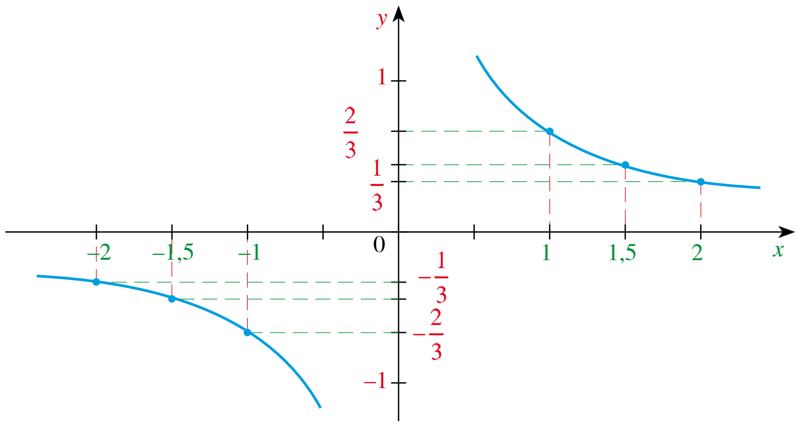
$x = -1 \qquad y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot (-1)} = -\frac{2}{3}$

$x = 1 \qquad y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$

$x = 1{,}5 \qquad y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot 1{,}5} = \frac{2 \cdot 2}{4{,}5 \cdot 2} = \frac{4}{9}$

$x = 2 \qquad y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$

Grafom funkcie je **hyperbola**, jedna jej časť pre kladné čísla, druhá časť pre záporné čísla. Táto hyperbola sa nazýva **rovnoosová hyperbola**, jej jednotlivé časti nazývame **vetvy**.



Zostav tabuľku pre viac hodnôt premennej x a narysuj graf. Potom do tej istej sústavy súradníc narysuj graf len pomocou hodnôt z tabuľky uvedenej v našom riešení. K akému záveru si prišiel?

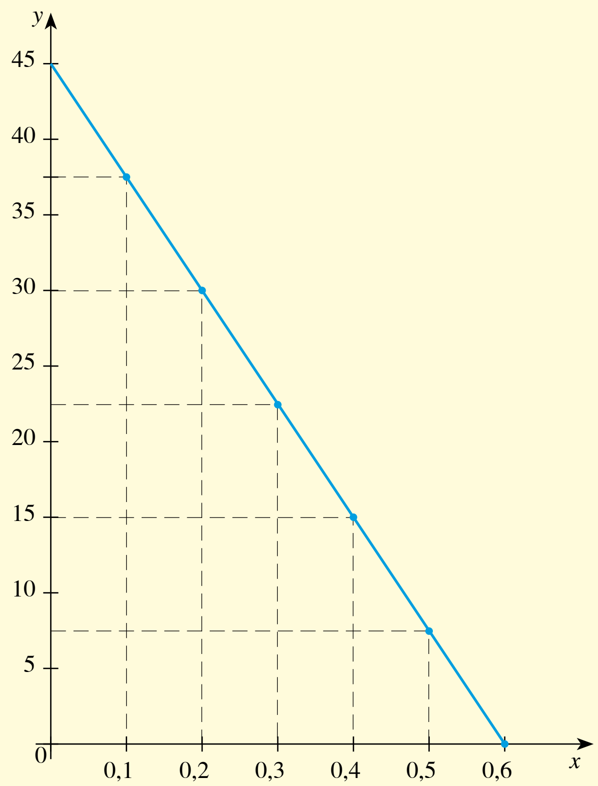
Problémová úloha

Narysuj čo najpresnejšie hyperboly, ktoré sú grafmi funkcií $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{3}{x}$. Ovplyvňuje koeficient nepriamej úmernosti grafy týchto funkcií? Svoje zistenia prediskutuj so spolužiakmi a učiteľom.

24. Zostroj grafy funkcií priamej a nepriamej úmernosti:

a) $y = 4x,\ x \in R$ **b)** $y = \frac{x}{4},\ x \in R$ **c)** $y = \frac{2}{x},\ x \in R,\ x \neq 0$ **d)** $y = -\frac{2}{x},\ x \in R,\ x \neq 0$

25. Auto išlo z obce A do obce B priemernou rýchlosťou 75 km/h. Na grafe je znázornená závislosť počtu km (y), ktoré má do cieľa cesty, od času jazdy (x) v hodinách. Odčítaj z grafu:
a) aká je vzdialenosť medzi obcami A a B,
b) po akom čase príde auto do cieľa cesty.



Riešenie 25.

a) Úlohu môžeme počítať takto:
Od hodiny štartu (0 hodín cesty) do cieľa cesty išlo auto 0,6 hodiny (bod na osi x).
Podľa zadania išlo auto priemernou rýchlosťou 75 km/h, teda prešlo $0{,}6 \cdot 75 = 45$ km.

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou priesečníka grafu funkcie s osou y.

Na osi y je nulový bod s y-ovou súradnicou 45.

Vzdialenosť medzi obcami je 45 km.

b) Úlohu môžeme počítať takto:
Dráha, ktorú má auto prejsť je 45 km. Priemerná rýchlosť je 75 km/ h. Potom čas jazdy je 45 : 75 = 0,6 h.
Ak išlo auto priemernou rýchlosťou 75 km/h, do cieľa cesty prišlo za 0,6 hodiny.

Úlohu môžeme riešiť pomocou priesečníka grafu funkcie s osou x.
Na osi x je nulový bod s x-ovou súradnicou 0,6.

Auto príde do cieľa po 0,6 h jazdy.

V nasledujúcich úlohách si zopakujeme aj vedomosti z predchádzajúcich kapitol.

26. Na grafe je znázornený počet eur (y), ktoré vyzbierali na Deň Zeme dobrovoľníci z našej školy na nákup krovín a stromov na voľné priestranstvo pri škole, v závislosti od počtu dní (x).

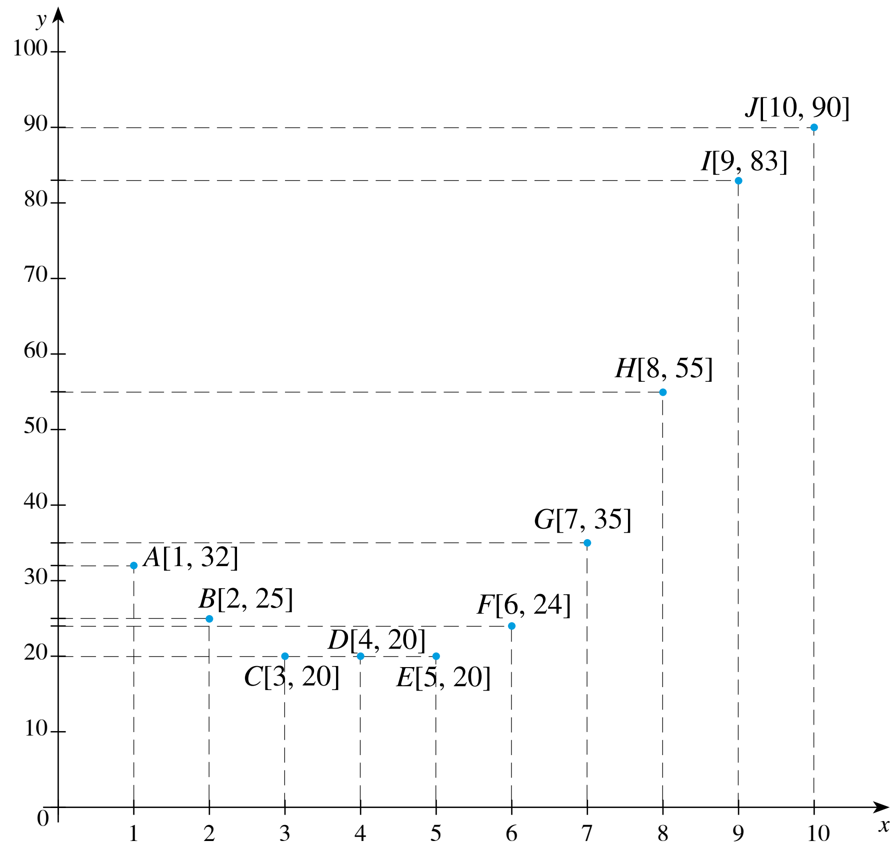
a) Odčítaj z grafu, aký bol najväčší rozdiel medzi jednotlivými dňami vo výbere peňazí.

b) Vypočítaj, aký bol priemerný počet eur vyzbieraný za deň.

c) Napíš, v ktorých za sebou nasledujúcich dňoch nadobúdal výber eur **rastúce** hodnoty.

d) Napíš, v ktorých za sebou nasledujúcich dňoch nadobúdal výber eur **klesajúce** hodnoty.

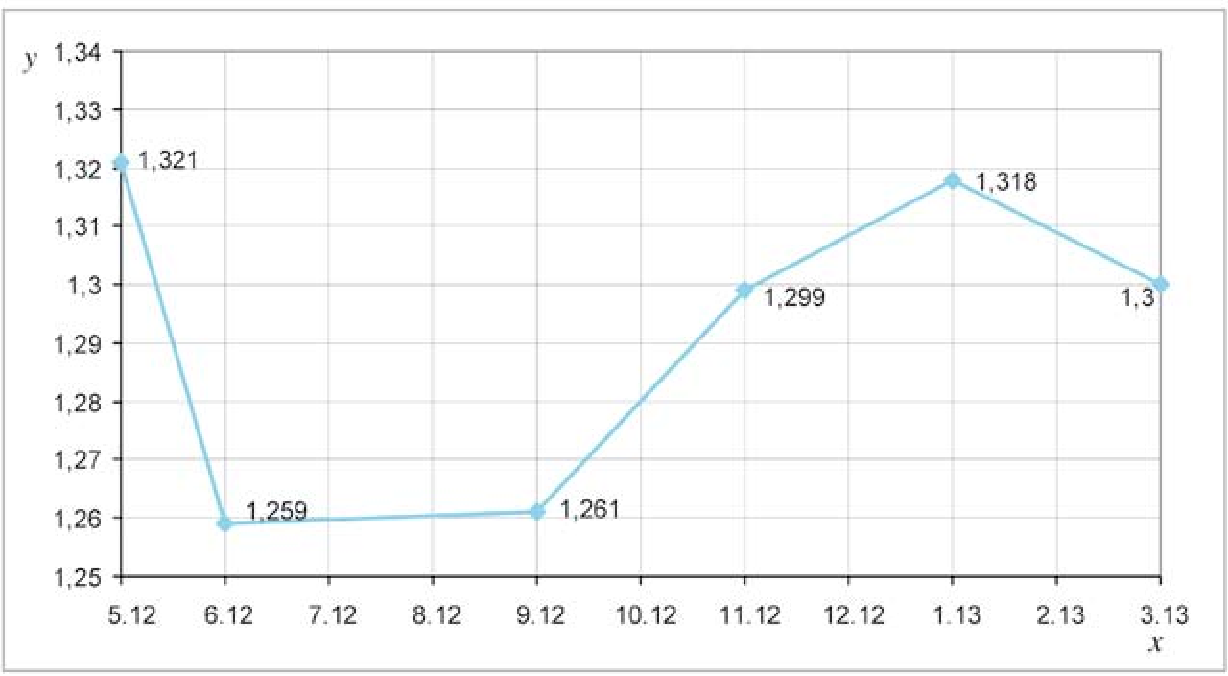
e) Napíš, v ktorých za sebou nasledujúcich dňoch bol výber eur **konštantný**, nemenil sa.



27. Na grafe je znázornený kurz amerického dolára k euru (y) v závislosti od mesiaca a roka (x).

a) Odčítaj z grafu, v ktorom mesiaci a roku bol kurz eura k doláru najnižší.

b) Odčítaj z grafu, v ktorom mesiaci a roku bol kurz eura k doláru najvyšší.



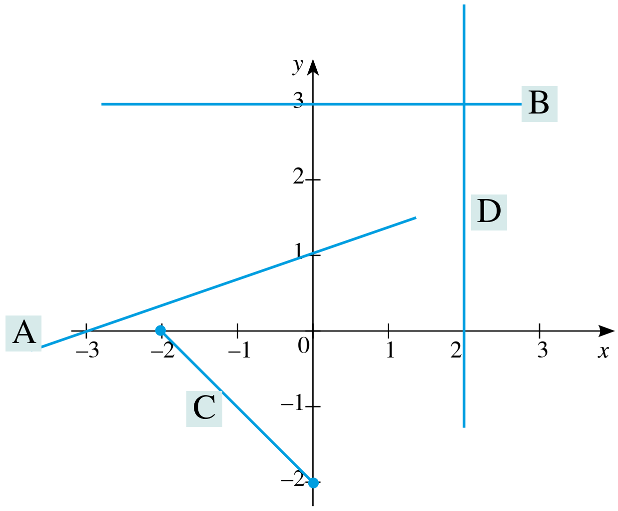
Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Lineárnou funkciou je funkcia daná rovnicou:

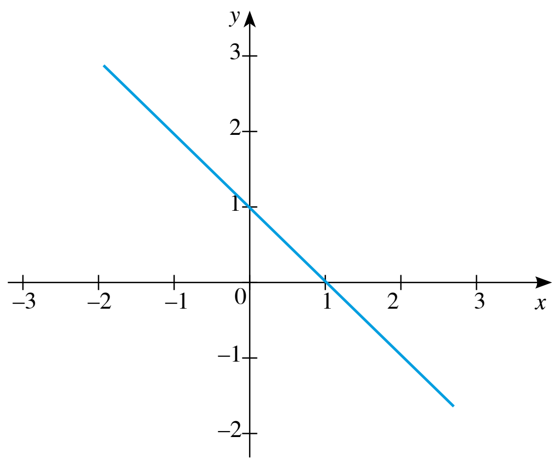
A $y = \dfrac{2}{x+3}$ B $y = \dfrac{3}{x}$ C $y = \dfrac{x-3}{2}$ D $y = \dfrac{2}{x} + 3$

2. Grafom rastúcej lineárnej funkcie pre $x \in R$, je graf:



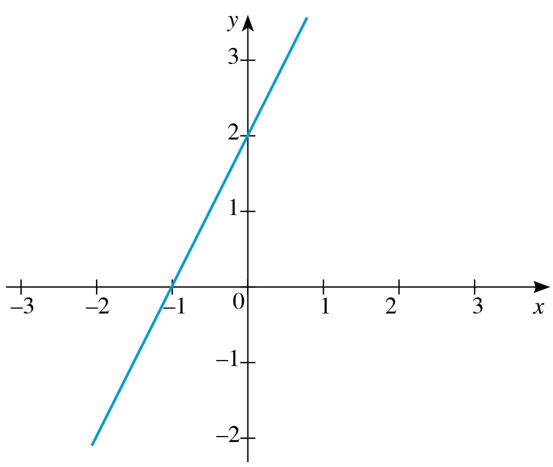
3. Grafu lineárnej funkcie na obrázku patrí bod so súradnicami:

A [–1, 1] B [0, 2] C [0, 1] D [1, 2]



4. Grafu lineárnej funkcie na obrázku patrí bod so súradnicami:

A [–1, 2] B [2, 0] C [–1, –1] D [–1, 0]



5. Hodnota lineárnej funkcie $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ pre $x = \frac{5}{3}$, je:

A 1 B $\frac{2}{3}$ C $\frac{11}{12}$ D $\frac{7}{18}$

6. Bod $M[-4, -2]$ patrí grafu funkcie danej rovnicou:

A $y = x - 4$ B $y = 2x + 6$ C $y = 2x - 2$ D $y = x - 2$

7. Grafu funkcie danej rovnicou $y = 3 - 2x$ patrí bod so súradnicami:

A $[3, 9]$ B $[2, -1]$ C $[0, 1]$ D $[-1, 6]$

8.* Bod $N[2, -5]$ patrí grafu funkcie danej rovnicou $y = kx + 3$, ak:

A $k = 3$ B $k = -4$ C $k = -1$ D $k = 2$

9.* Bod $P[-2, 1]$ patrí grafu funkcie danej rovnicou $y = 4x + q$, ak:

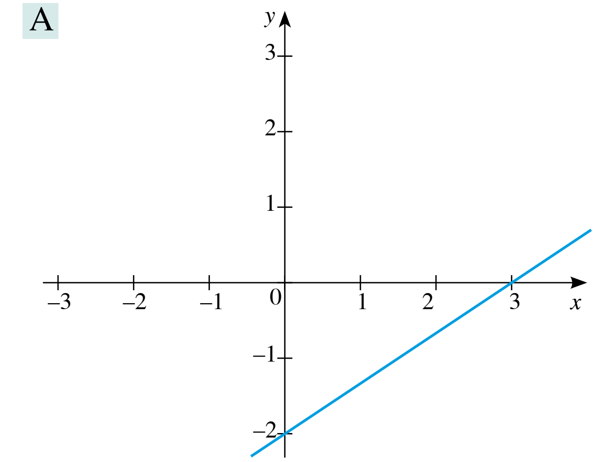
A $q = 3$ B $q = -6$ C $q = 9$ D $q = -2$

10. Z uvedených závislostí **nie je** lineárna:

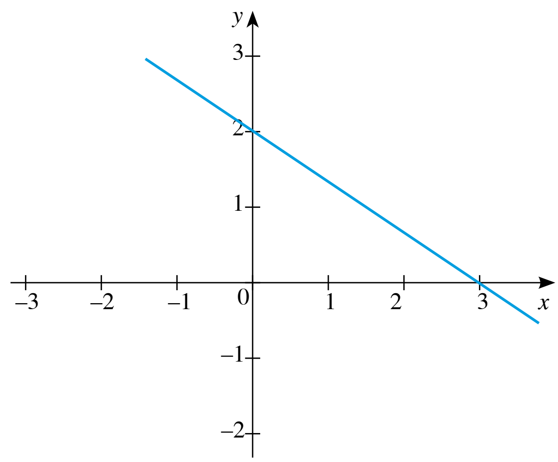
A závislosť obvodu štvorca od dĺžky jeho strany
B závislosť obvodu rovnostranného trojuholníka od dĺžky jeho strany
C závislosť objemu kocky od dĺžky jej hrany
D závislosť obvodu kruhu od jeho polomeru

11. Graf lineárnej funkcie danej rovnicou $y = kx + q$, ak $q = 3$, je:

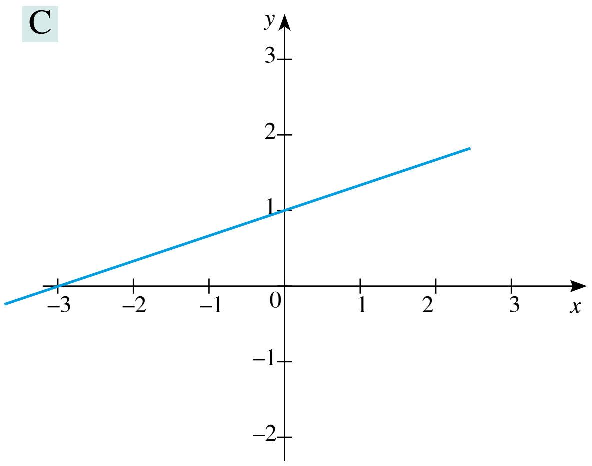
A



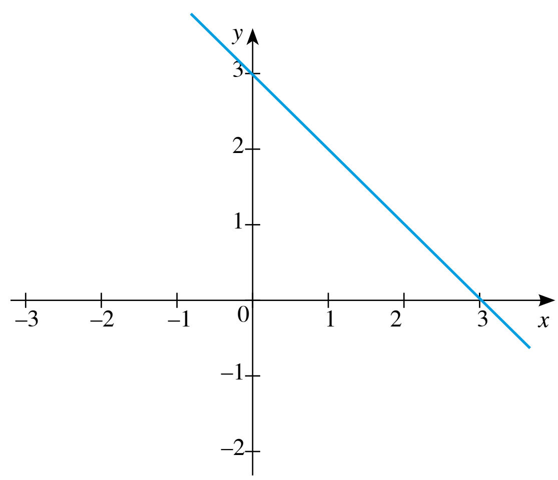
B



C



D



12. Graf funkcie danej rovnicou $y = 0{,}5x - 1{,}25$ pretína os y v bode so súradnicami:

A $[0, -5]$ B $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ C $\left[\frac{5}{2}, 0\right]$ D $\left[0, -\frac{5}{4}\right]$

13. Graf funkcie $y = \frac{1-x}{3}$ pretína os x v bode so súradnicami:

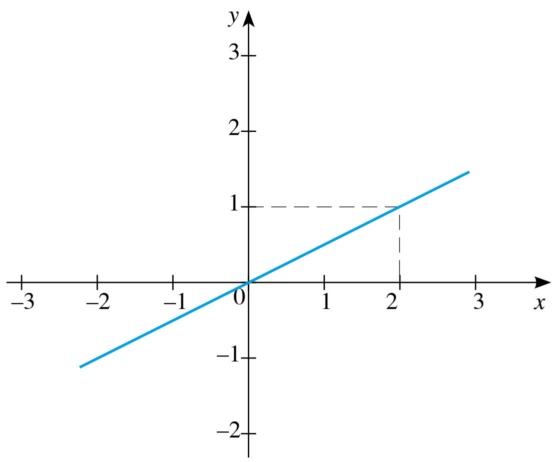
A $\left[\frac{1}{3}, 0\right]$ B $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ C $[1, 0]$ D $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

14.* Grafu lineárnej funkcie patria body so súradnicami [2, –3], [0, –1]. Rovnica tejto funkcie je:

A $y = -x + 1$ B $y = x + 1$ C $y = -x - 1$ D $y = x - 1$

15. Rovnica funkcie, ktorej graf je na obrázku je:

A $y = \frac{x}{2}$ B $y = 2x$ C $y = x + 1$ D $y = x + 2$



Zapamätajte si

Lineárna funkcia je každá funkcia, ktorá sa dá zapísať rovnicou v tvare:

$$y = k \cdot x + q,$$

kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla.
x je **nezávislá premenná**
y je **závislá premenná** (závisí od hodnoty premennej x)

Grafom tejto funkcie je priamka alebo jej časti v závislosti od hodnôt premennej x.

Ak $k = 0$, ide o **konštantnú** funkciu, napríklad $y = 4$.
Ak $k \neq 0$, $q = 0$, ide o funkciu **priama úmernosť**, napríklad $y = 2x$.
Ak $k > 0$, hovoríme, že lineárna funkcia je **rastúca**, napríklad $y = 3x + 1$.
Ak $k < 0$, hovoríme, že lineárna funkcia je **klesajúca**, napríklad $y = -3x + 2$.
Číslo q určuje y-ovú súradnicu priesečníka grafu funkcie s osou y.
Priesečník grafu funkcie s osou $\boldsymbol{x}$ má $\boldsymbol{y}$**-ovú** súradnicu **0**.
Priesečník grafu funkcie s osou $\boldsymbol{y}$ má $\boldsymbol{x}$**-ovú** súradnicu **0**.

6 Podobnosť geometrických útvarov

Sme si podobní ako vajce vajcu...
Podobajú sa ako dve zrnká piesku...

Podobnosť je pojem používaný v bežnom živote. Zvyčajne sa používa vtedy, keď sa ľudia, zvieratá alebo veci podobajú tak, že si ich možno pomýliť.

V matematike sa s pojmom podobnosť stretávame v geometrii. Hovoríme o podobných trojuholníkoch, štvoruholníkoch, rovnobežníkoch, kruhoch, kružniciach, telesách...

Existujú ľudia, ktorí sa snažia hľadať podobnosti, a tým aj baviť ľudí. Najbežnejšie je porovnávanie majiteľa psa s jeho psom.

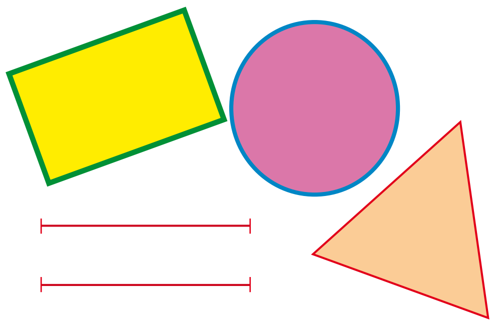
Zistite, čo sa o podobnosti píše aj v iných odvetviach každodenného života – v umení, v športe...

6.1 Podobnosť geometrických útvarov, pomer podobnosti

Čo sme sa už učili

Vymenovať a narysovať rôzne geometrické útvary: *úsečku, trojuholník, štvorec, obdĺžnik, rovnobežníky, lichobežník, kruh, kružnicu.*

Určiť, kedy sú **útvary zhodné**, čo je **pomer**, **mierka**.
Zväčšovali a zmenšovali sme geometrické útvary v štvorcovej sieti.



V tejto kapitole si povieme o súvislosti **pomeru** so **zväčšovaním** či **zmenšovaním** geometrického útvaru. Určite budete vedieť riešiť tieto úlohy. Podobné ste riešili v 7. a 8. ročníku.

1. Dĺžky strán trojuholníka sú v pomere 2 : 3 : 4. Najdlhšia strana tohto trojuholníka má dĺžku 12 cm. Vypočítaj dĺžky chýbajúcich strán tohto trojuholníka.

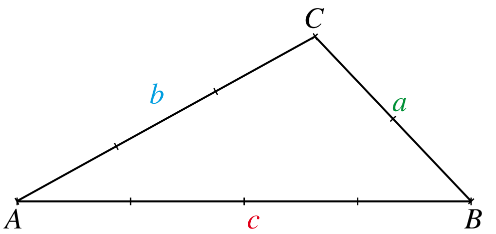
Riešenie 1.

Úlohu môžeme riešiť takto:

V pomere 2 : 3 : 4 prislúchajú dĺžke najdlhšej strany trojuholníka 4 dieliky.
Potom dĺžku jedného dielika vypočítame: 12 cm : 4 = **3 cm**.
Kratším stranám trojuholníka prislúchajú 2 dieliky a 3 dieliky.
Potom sú dĺžky kratších strán: **3 cm** · 2 = 6 cm
3 cm · 3 = 9 cm

Riešenie úlohy môžeme zapísať aj takto:

Trojuholník si načrtneme, označíme jeho vrcholy a strany.
Dielikom v pomere priradíme označenia strán podľa ich dĺžky.



$$\begin{array}{ccccc} 2 & : & 3 & : & 4 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & : & b & : & c \\ & & & & \downarrow \\ & & & & 12\text{ cm} \end{array}$$

4 dieliky v pomere je **12** cm, **1** dielik je 12 cm : 4 = **3 cm**

Dĺžky zvyšných strán trojuholníka vypočítame: $a = 2 \cdot \mathbf{3\ cm} = \mathbf{6\ cm}$
$b = 3 \cdot \mathbf{3\ cm} = \mathbf{9\ cm}$

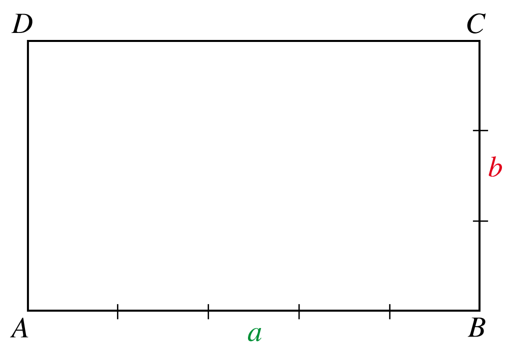
Chýbajúce strany trojuholníka majú dĺžky 6 cm a 9 cm.

2. Dĺžky strán obdĺžnika sú v pomere 5 : 3. Kratšia strana tohto obdĺžnika meria 3,6 cm. Vypočítaj dĺžku dlhšej strany obdĺžnika.

Riešenie 2.

Úlohu môžeme riešiť takto:

V pomere 5 : 3 dĺžke kratšej strany obdĺžnika prislúchajú 3 dieliky. Potom dĺžku jedného dielika vypočítame: 3,6 cm : 3 = **1,2 cm**. Dlhšej strane obdĺžnika prislúcha 5 dielikov, takže jej dĺžka bude 5 · **1,2 cm = 6 cm**.



Riešenie úlohy môžeme zapísať aj takto:

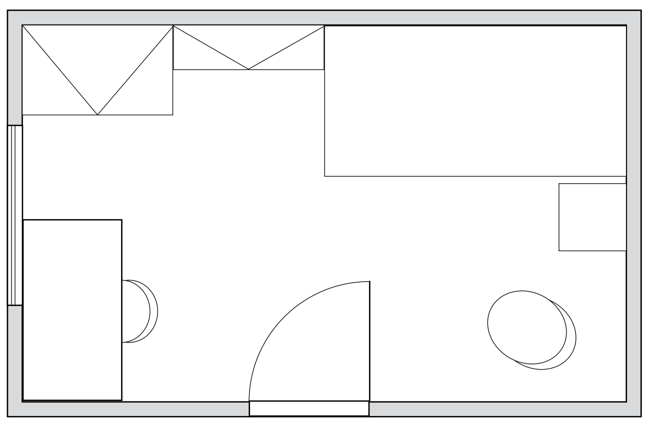
Obdĺžnik si načrtneme, označíme jeho vrcholy a strany.
Dielikom v pomere priradíme označenia strán podľa ich dĺžky.

$$\begin{array}{ccc} 5 & : & 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & : & b \\ & & \downarrow \\ & & 3{,}6\text{ cm} \end{array}$$

3 dieliky v pomere sú **3,6 cm**,
1 dielik je potom 3,6 cm : 3 = **1,2 cm**

Dĺžku dlhšej strany obdĺžnika vypočítame:
$a = 5 \cdot \mathbf{1{,}2\ cm} = \mathbf{6\ cm}$

Dĺžka dlhšej strany obdĺžnika je 6 cm.



3. MIERKA PLÁNU
Jankovi rodičia dostali od stavebnej firmy plán poschodia s pôdorysom bytu, ktorý chcú kúpiť. Jankova izba mala na pláne rozmery 8 cm × 5 cm. Vypočítaj skutočné rozmery Jankovej izby, ak je mierka plánu 1 : 50.

Riešenie 3.

Ak nie je ináč uvedené, mierka plánu 1 : 50 znamená, že dĺžke **1 cm** na pláne zodpovedá **50 cm** v skutočnosti.

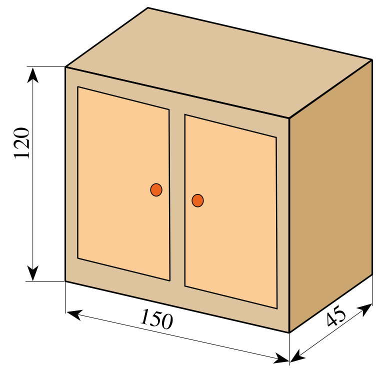
Potom:
→ rozmeru 8 cm zodpovedá **50** · 8 cm = 400 cm v skutočnosti, čo je 4,0 m.
→ rozmeru 5 cm zodpovedá **50** · 5 cm = 250 cm v skutočnosti, čo je 2,5 m.

Jankova izba má v skutočnosti rozmery **4,0 m** × **2,5 m**.

4. MIERKA PLÁNU

Danka dostala v škole úlohu (učili sa o rôznych hranoloch) zostrojiť z papiera model svojej skrine. Skrinka mala rozmery: dĺžka 150 cm, výška 120 cm a hĺbka 45 cm. Mierka, podľa ktorej zostrojila model, bola 2 : 15. Vypočítaj rozmery Dankinho modelu.

Riešenie 4.



Úlohu môžeme riešiť takto:
Mierka pre model 2 : 15 znamená, že rozmery modelu budú dve pätnástiny zo skutočného rozmeru vzoru – skrinky. Potom:

150 cm v skutočnosti zodpovedá $\frac{2}{15} \cdot \mathbf{150\ cm} = \frac{300}{15} = \mathbf{20\ cm}$ modelu.

120 cm v skutočnosti zodpovedá $\frac{2}{15} \cdot \mathbf{120\ cm} = \frac{240}{15} = \mathbf{16\ cm}$ modelu.

45 cm v skutočnosti zodpovedá $\frac{2}{15} \cdot \mathbf{45\ cm} = \frac{90}{15} = \mathbf{6\ cm}$ modelu.

Dankin model skrinky mal rozmery 20 cm, 16 cm a 6 cm.
Spolužiaci povedali Danke, že podľa jej modelu si vedia predstaviť, ako jej skrinka vyzerá.

Viete, že...?

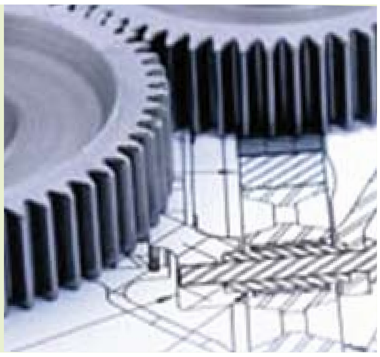
Mierka sa používa aj na technických výkresoch, pretože nemožno všetky predmety zobrazovať v skutočnej veľkosti. Najčastejšie sa ich obrazy buď zväčšujú, alebo zmenšujú. Mierka zobrazenia sa volí podľa:

1. zložitosti a hustoty kresby obrazových prvkov zobrazeného predmetu
2. účelu a obsahu výkresu
3. požiadaviek na zreteľnosť a ľahkú čitateľnosť zobrazovaných informácií

Mierka zobrazovania je pomer rozmeru prvku predmetu zobrazeného na výkrese ku skutočnému rozmeru toho istého prvku skutočného predmetu.

Odporúčané mierky zobrazenia a spôsoby ich zapisovania na všetkých druhoch **technických výkresov** určuje príslušná norma.

Zdroj: http://www.konstruovanie1.uniza.sk/Subory/2.4.html



5. MIERKA – ZVÄČŠENIE A ZMENŠENIE

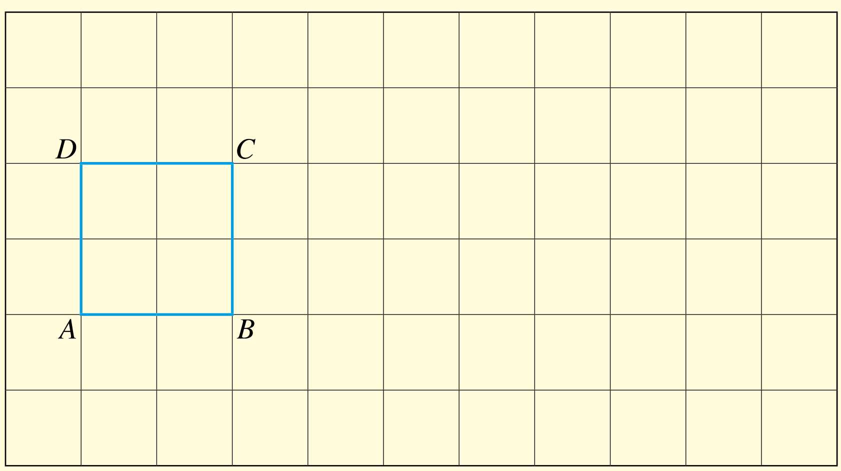
V modelárskom krúžku si jeho členovia vytvárali modely rôznych predmetov podľa vlastných mierok. Vypíš, ktoré z mierok 1 : 10 000, 1 : 50, 10 : 3, 100 : 1, 20 : 9, 2 : 15 predstavujú zmenšenie a ktoré zväčšenie oproti skutočnosti.

Riešenie 5.

Pretože **prvé číslo** v pomere uvádza **dĺžku na pláne** alebo **rozmer modelu** a **druhé číslo** zodpovedá **dĺžkam** alebo **rozmerom v skutočnosti**, potom:
zmenšenie oproti skutočnosti predstavujú pomery: 1 : 50, 2 : 15, 1 : 10 000
zväčšenie oproti skutočnosti predstavujú pomery: 10 : 3, 20 : 9, 100 : 1.

Vyriešime nasledujúce úlohy a rozšírime si vedomosti o nové pojmy.

6. V štvorčekovej sieti je daný štvorec *ABCD*. Prerysuj ho v mierke 3 : 1. Strana jedného štvorčeka siete má dĺžku 1 cm.



Riešenie 6.

Mierka 3 : 1 znamená **zväčšenie** oproti skutočnosti. Vrcholy zväčšeného štvorca označíme $A'B'C'D'$.

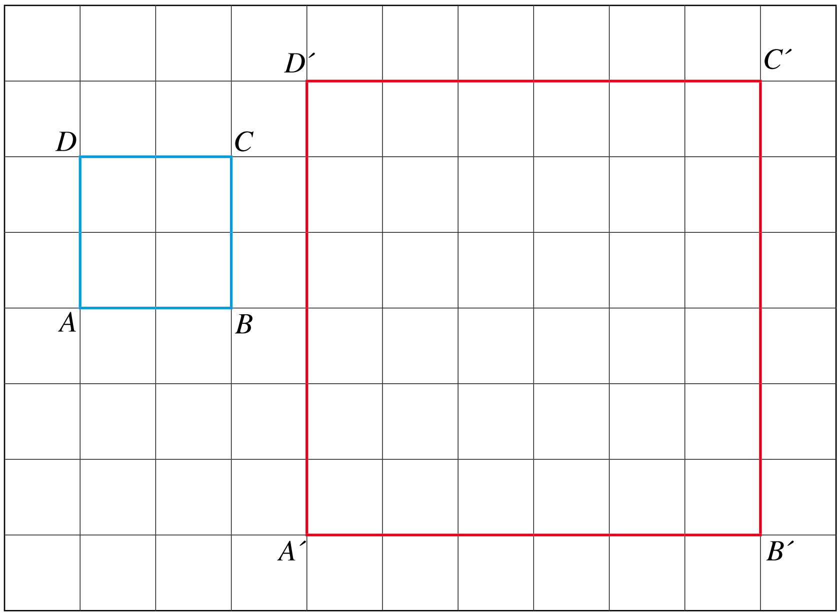
Strana štvorca $ABCD$ má dĺžku 2 cm, strana štvorca $A'B'C'D'$ bude **trikrát dlhšia**, čiže **3** · 2 cm = 6 cm.

Platí: $|A'B'| = \mathbf{3} \cdot |AB|$ alebo

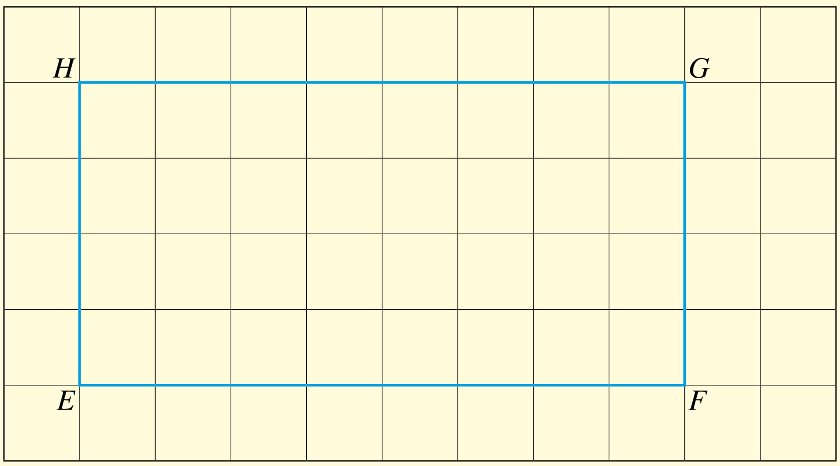
$$|A'B'| = \frac{3}{1} \cdot |AB|.$$

Štvorec $A'B'C'D'$ vznikol **zväčšením štvorca *ABCD* v pomere** 3 : 1.

Hovoríme, že **štvorec *ABCD*** a **štvorec *A´B´C´D´*** sú **podobné s pomerom podobnosti** $3 : 1 = \frac{3}{1}$



7. V štvorčekovej sieti je daný obdĺžnik $EFGH$.
Prerysuj ho v mierke 1 : 4.
Napíš, čo pozoruješ.

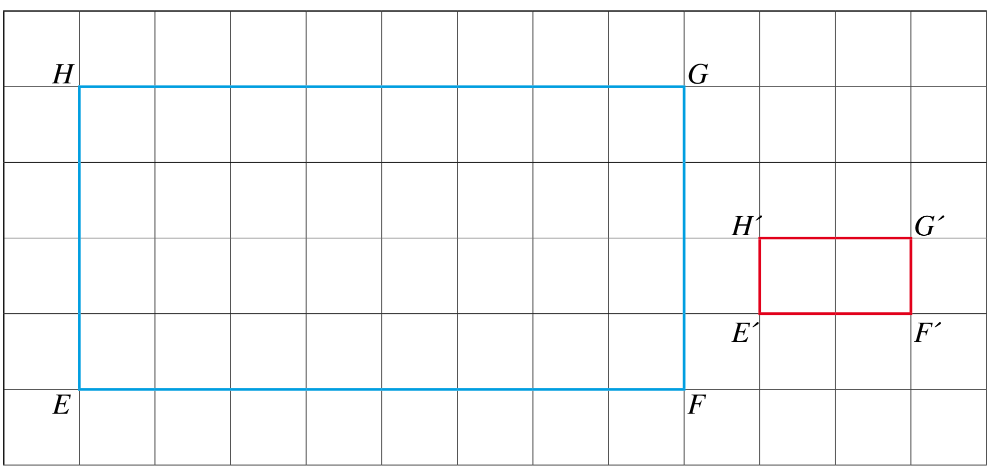


Riešenie 7.

Mierka 1 : 4 znamená **zmenšenie** oproti skutočnosti. Vrcholy prerysovaného obdĺžnika označíme $E'F'G'H'$.

Dĺžka strany $E'F'$ obdĺžnika $E'F'G'H'$ bude jednou štvrtinou EF, teda $|E'F'| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot 8 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

Dĺžka strany $F'G'$ obdĺžnika $E'F'G'H'$ bude jednou štvrtinou FG, teda $|F'G'| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot 4 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$.



Hovoríme, že **obdĺžnik *EFGH*** a **obdĺžnik *E´F´G´H´*** sú **podobné s pomerom podobnosti** $1 : 4 = \frac{1}{4}$.

Platí: $|E'F'| = \frac{1}{4} \cdot |EF|$, $\quad |F'G'| = \frac{1}{4} \cdot |GF|$.

Obdĺžnik $E'F'G'H'$ vznikol **zmenšením obdĺžnika *EFGH* v pomere** $1 : 4 = \frac{1}{4}$.

Dva geometrické útvary sú **podobné**, ak jeden z nich vznikol zväčšením (zmenšením) druhého.
Pomer zväčšenia alebo zmenšenia útvaru vyjadrený reálnym číslom rôznym od nuly, nazývame **koeficient podobnosti** a označujeme ho $\boldsymbol{k}$.
Ak sú AB a $A'B'$ **podobné úsečky**, tak platí:

$$|A'B'| = \boldsymbol{k} \cdot |AB|, \text{ čiže } \boldsymbol{k} = \frac{|A'B'|}{|AB|}, \ \boldsymbol{k} > 0.$$

Úsečku AB nazývame **vzorom**, úsečku $A'B'$ nazývame **obrazom** úsečky AB.

Doplň do viet a napíš do zošita vzťahy pre $\boldsymbol{k}$:

Ak ...., ide o **zväčšenie**.
Ak ...., ide o **zmenšenie**.
Ak ...., ide o **zhodnosť**.

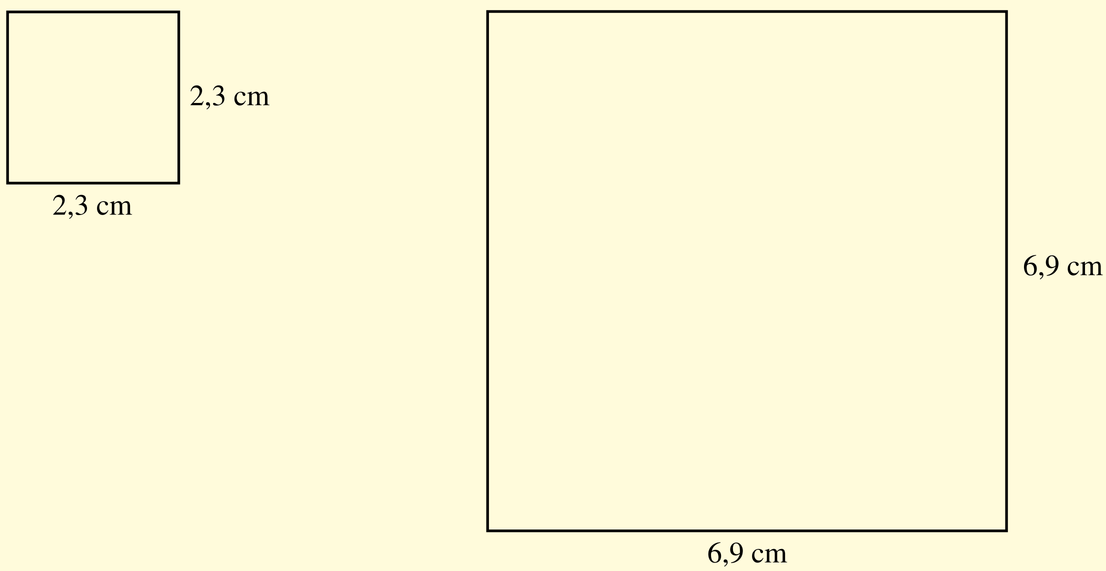
Riešenie si skontroluj v časti Zapamätajte si.

Pozrime sa ešte raz na súvislosť:

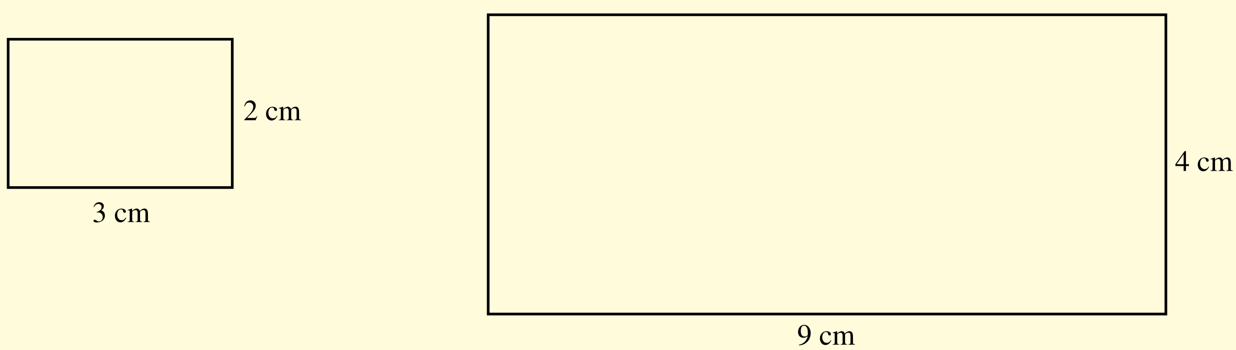
podobné útvary	**pomer podobnosti**	**koeficient podobnosti**.
v úlohe 6: $\lvert A'B'\rvert = 3 \cdot \lvert AB\rvert$	pomer podobnosti 3 : 1	koeficient podobnosti $k = 3$
v úlohe 7: $\lvert E'F'\rvert = \frac{1}{4} \cdot \lvert EF\rvert$	pomer podobnosti 1 : 4	koeficient podobnosti $k = \frac{1}{4}$

8. Na obrázkoch sú dvojice geometrických útvarov. Zisti, či sú dané dvojice podobné. Ak sú, vypočítaj koeficient podobnosti.

a)

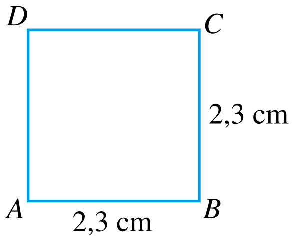


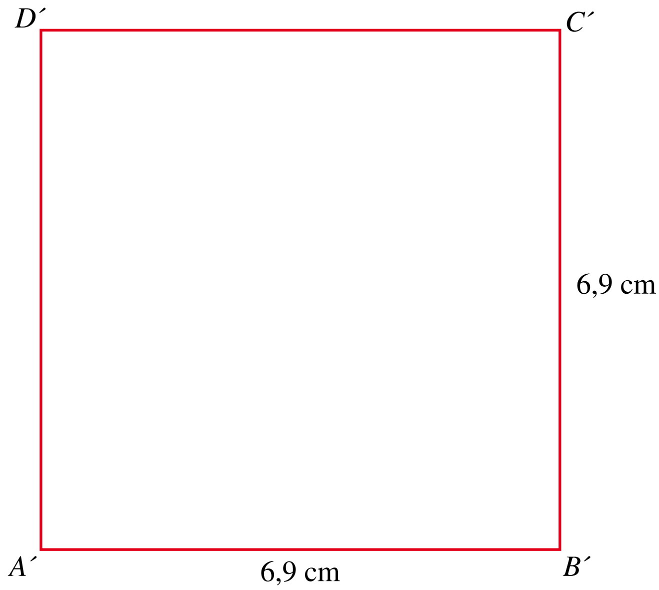
b)



Riešenie 8.

a) Označme si vrcholy útvarov. Jeden z dvojice útvarov označme ako **vzor** (použijeme písmená **bez čiarok**) a druhý ako **obraz** (použijeme písmená **s čiarkami**).





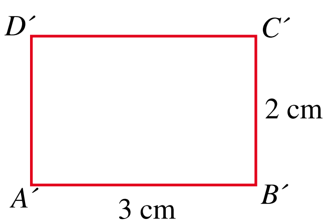
Vypočítaj pomocou Pytagorovej rovnosti dĺžky uhlopriečok štvorcov a zisti, či platí: $|A'C'| = k \cdot |AC|$.

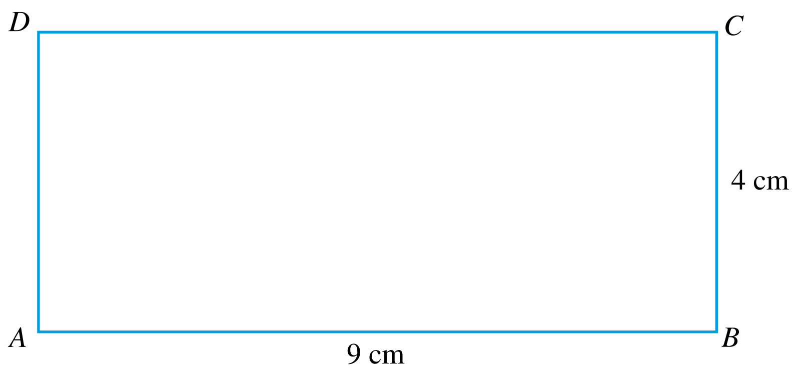
Ak sú útvary podobné, tak by jeden z nich mal byť **zväčšením** alebo **zmenšením** druhého útvaru v nejakom pomere. Hľadáme preto **pomery** medzi odpovedajúcimi dvojicami úsečiek. Tie by mali byť rovnaké.

Dané útvary sú štvorce. Zisťujeme či je štvorec $A'B'C'D'$ zväčšením štvorca $ABCD$.
Dĺžka strany štvorca $A'B'C'D'$ je **trojnásobkom** dĺžky strany štvorca $ABCD$:
6,9 cm = **3** · 2,3 cm
$|A'B'| = \mathbf{3} \cdot |AB|$
Štvorec $A'B'C'D'$ je **zväčšením** štvorca $ABCD$ v pomere **3 : 1**, čiže **koeficient podobnosti** je $\boldsymbol{k = 3}$.

Štvorce sú podobné s koeficientom podobnosti $\boldsymbol{k = 3}$, platí $\boldsymbol{|A'B'| = 3 \cdot |AB|}$.

b) Dané útvary sú obdĺžniky. Zisťujeme, či obdĺžnik $A'B'C'D'$ je zmenšením obdĺžnika $ABCD$.





Dĺžka strany $A'B'$ je **tretinou** dĺžky strany AB, 3 cm = $\mathbf{\frac{1}{3}}$ · 9 cm.

Dĺžka strany $B'C'$ je **polovicou** dĺžky strany BC, 2 cm = $\mathbf{\frac{1}{2}}$ · 4 cm.

$\rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$

Obdĺžnik $A'B'C'D'$ nie je zmenšením obdĺžnika $ABCD$, dané obdĺžniky nie sú podobné.

Úlohu sme mohli riešiť aj takto: Vypočítame koeficient k zo vzťahu pre dĺžky strán podobných útvarov:

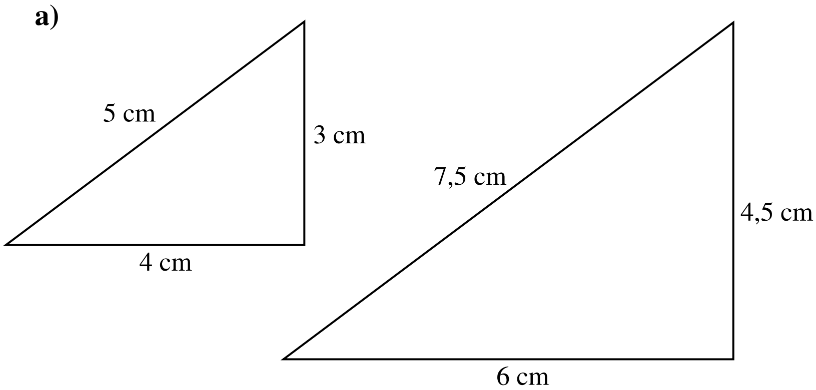
$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

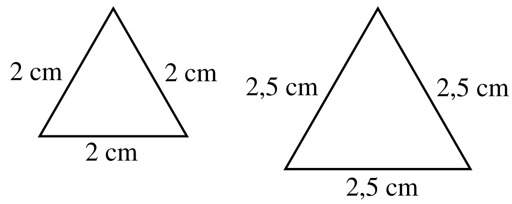
Pretože $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, obdĺžniky **nie sú podobné**.

9. Na obrázku sú narysované dvojice geometrických útvarov. Zisti, či sú tieto dvojice útvarov podobné. Vypočítaj koeficient podobnosti.

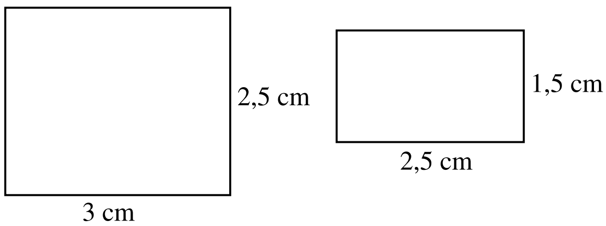
a)



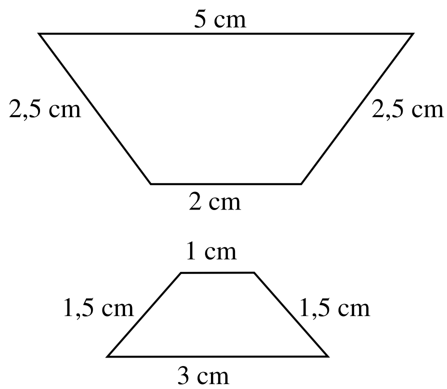
b)



c)

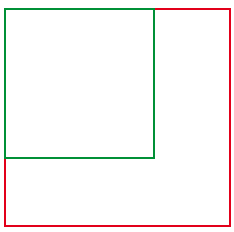


d)

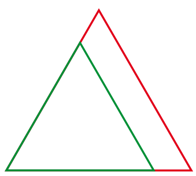


10.* Zisti, či sú narysované dvojice útvarov podobné. Svoje tvrdenie odôvodni.

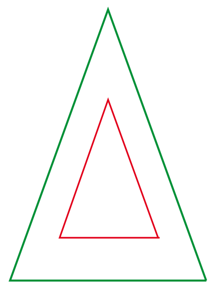
a)



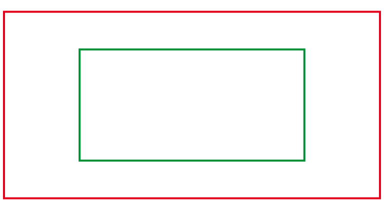
b)



c)



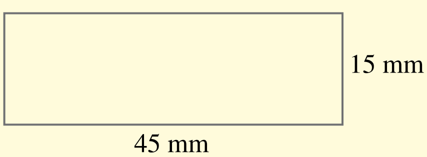
d)

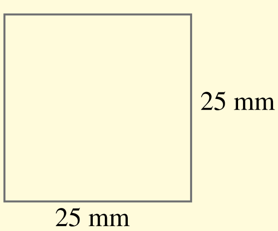


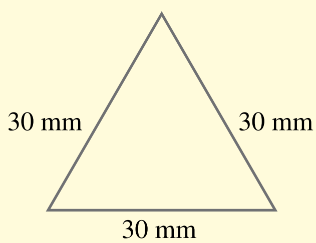
Problémová úloha

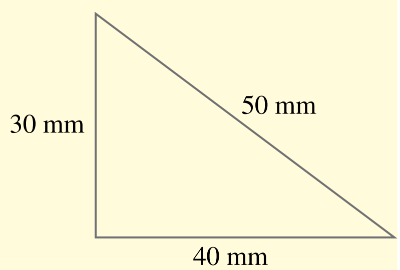
Vymenujte geometrické útvary, z ktorých každé dve dvojice sú vždy podobné. Svoje tvrdenie odôvodnite.

11.* Na obrázku sú geometrické útvary s uvedenými dĺžkami strán.
Uveď ku každému z nich dva obrazy v podobnosti s koeficientom $0 < k < 1$ a $k > 1$.









12.

a) Daný je štvorec *ABCD* so stranou $|AB| = 2{,}5$ cm. Vypočítaj dĺžku strany štvorca $A'B'C'D'$ podobného so štvorcom *ABCD*, ak koeficient podobnosti $\boldsymbol{k = 2}$.

b) Daný je obdĺžnik *LMNO* so stranami $|LM| = 3{,}6$ cm a $|MN| = 1{,}4$ cm. Vypočítaj dĺžky strán obdĺžnika $L'M'N'O'$ podobného s obdĺžnikom *LMNO*, ak koeficient podobnosti $\boldsymbol{k = 0{,}5}$.

c) Daný je rovnostranný trojuholník *RST* so stranou $|RS| = 4{,}2$ dm. Vypočítaj dĺžky strán rovnostranného trojuholníka $R'S'T'$ podobného s trojuholníkom *RST*, ak koeficient podobnosti $\boldsymbol{k = \frac{3}{4}}$.

d) Daný je lichobežník *MNOP* so základňami $|MN| = 9$ cm, $|OP| = 3$ cm a ramenami $|NO| = |PM| = 6$ cm. Vypočítaj dĺžky strán lichobežníka $M'N'O'P'$, podobného s lichobežníkom *MNOP*, ak koeficient podobnosti $\boldsymbol{k = \frac{5}{3}}$.

Riešenie 12.

a) Platí: $|A'B'| = \boldsymbol{k} \cdot |AB| = \boldsymbol{2} \cdot 2{,}5 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.
Štvorec $A'B'C'D'$ má stranu dlhú 5 cm.

Mohli sme písať:
$a' = k \cdot a$

b) Platí: $|L'M'| = \boldsymbol{k} \cdot |LM| = \boldsymbol{0{,}5} \cdot 3{,}6 \text{ cm} = 1{,}8 \text{ cm}$.
$|M'N'| = \boldsymbol{k} \cdot |MN| = \boldsymbol{0{,}5} \cdot 1{,}4 \text{ cm} = 0{,}7 \text{ cm}$.
Obdĺžnik $L'M'N'O'$ má strany dĺžky 1,8 cm a 0,7 cm.

Mohli sme písať:
$l' = k \cdot l,\ m' = k \cdot m$

c) Platí: $|R'S'| = \boldsymbol{k} \cdot |RS| = \boldsymbol{\frac{3}{4}} \cdot 4{,}2 \text{ dm} = 0{,}75 \cdot 4{,}2 \text{ dm} = 3{,}15 \text{ dm}$.
Trojuholník $R'S'T'$ má stranu dlhú 3,15 dm.

Mohli sme písať:
$t' = k \cdot t$

d) Platí: $|M'N'| = \boldsymbol{k} \cdot |MN| = \boldsymbol{\frac{5}{3}} \cdot 9 \text{ cm} = \frac{45}{3} \text{ cm} = 15 \text{ cm}$.
$|O'P'| = \boldsymbol{k} \cdot |OP| = \boldsymbol{\frac{5}{3}} \cdot 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.
$|N'O'| = \boldsymbol{k} \cdot |NO| = \boldsymbol{\frac{5}{3}} \cdot 6 \text{ cm} = \frac{30}{3} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.
Lichobežník $M'N'O'P'$ má základne dĺžky 15 cm a 5 cm, ramená dĺžky 10 cm.

Mohli sme písať:
$m' = k \cdot m$
$o' = k \cdot o$
$n' = k \cdot n$

13.

a) Daný je kosoštvorec *ABCD* so stranou $a = 3{,}2$ cm. Vypočítaj dĺžku strany kosoštvorca $A'B'C'D'$ podobného s kosoštvorcom *ABCD*, ak koeficient podobnosti $k = 4$.

b) Daný je kosodĺžnik *EFGH* so stranami $e = 7{,}5$ cm a $f = 2{,}5$ cm. Vypočítaj dĺžky strán kosodĺžnika $E'F'G'H'$ podobného s kosodĺžnikom *EFGH*, ak je koeficient podobnosti $k = 0{,}6$.

c)* Daný je rovnoramenný trojuholník *TUV* so základňou $u = 9$ dm a výškou na základňu 3 dm dlhou. Vypočítaj dĺžky strán rovnoramenného trojuholníka $T'U'V'$ podobného s trojuholníkom *TUV*, ak koeficient podobnosti $k = \frac{4}{3}$.

d)* Daný je lichobežník *MNOP* so základňami $m = 85$ mm, $o = 45$ mm, ramenom n dlhým 55 mm a uhlom *PMN* s veľkosťou $90°$. Vypočítaj dĺžky strán lichobežníka $M'N'O'P'$, ktorý je podobný s lichobežníkom *MNOP*, ak koeficient podobnosti $k = \frac{2}{5}$.

Zapamätajte si

Dva geometrické útvary sú **podobné** vtedy, ak jeden z nich vznikol **zväčšením** alebo **zmenšením** druhého z nich. Pomer zväčšenia alebo zmenšenia útvaru nazývame **pomer podobnosti** alebo **koeficient podobnosti**. Označujeme ho písmenom $\boldsymbol{k}$.

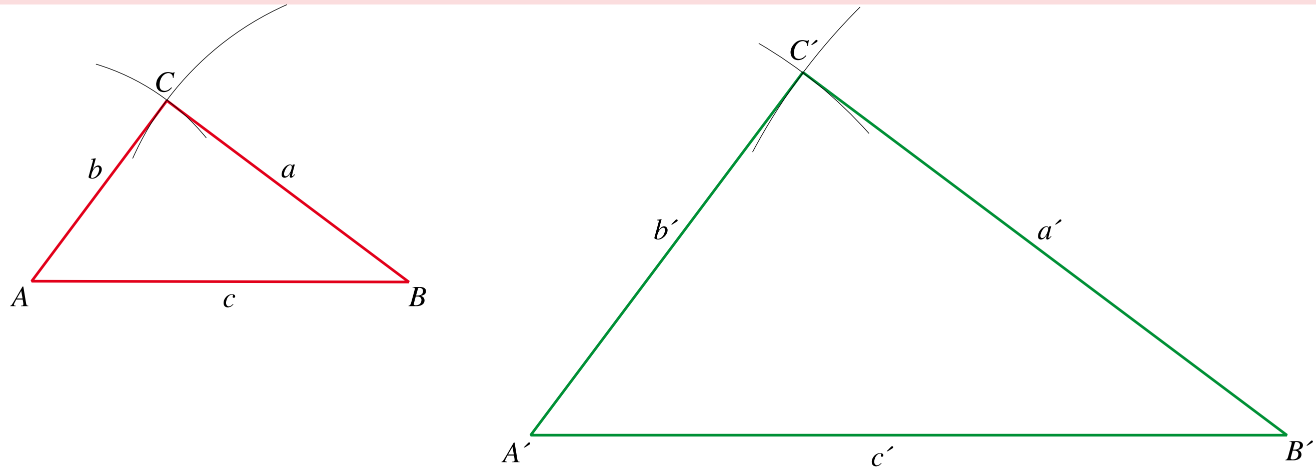
Platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|$, kde $A'B'$ je obraz úsečky *AB*.
Úsečku *AB* nazývame vzorom, úsečku $A'B'$ obrazom úsečky *AB*.

Koeficient podobnosti k vypočítame zo vzťahu: $k = \dfrac{|A'B'|}{|AB|}$.
Ak $0 < k < 1$, hovoríme o **zmenšení**.
Ak $k > 1$, hovoríme o **zväčšení**.
Ak $k = 1$, hovoríme o **zhodnosti**.

Trojuholníky patria ku geometrickým útvarom, o ktorých sa v geometrii najviac hovorí.
Rysujeme ich, počítame ich **obvod** a **obsah**, môžu byť **zhodné**, **podobné**...

1. Narysuj trojuholník *ABC* so stranami $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm, a trojuholník $A'B'C'$ so stranami $a' = 8$ cm, $b' = 6$ cm, $c' = 10$ cm. Zisti, či sú tieto **trojuholníky podobné**. Napíš, čo pozoruješ.

Riešenie 1.



Zisťujeme, či sú trojuholníky **podobné**, či je jeden z nich **zväčšením** alebo **zmenšením** druhého.
Nech $\triangle ABC$ je vzor a $\triangle A'B'C'$ je obraz.
Určíme **pomer** zmenšenia alebo zväčšenia odpovedajúcich si strán.

Pre dĺžky strán trojuholníkov platí:

$$8\text{ cm} = \mathbf{2} \cdot 4\text{ cm} \;\rightarrow\; a' = \mathbf{2} \cdot a \;\rightarrow\; \frac{a'}{a} = 2 = k$$

$$6\text{ cm} = \mathbf{2} \cdot 3\text{ cm} \;\rightarrow\; b' = \mathbf{2} \cdot b \;\rightarrow\; \frac{b'}{b} = 2 = k$$

$$10\text{ cm} = \mathbf{2} \cdot 5\text{ cm} \;\rightarrow\; c' = \mathbf{2} \cdot c \;\rightarrow\; \frac{c'}{c} = 2 = k$$

Trojuholník $A'B'C'$ je zväčšením trojuholníka *ABC* v pomere 2 : 1.
Môžeme pozorovať, že dané trojuholníky sú podobné s koeficientom podobnosti $k = 2$.

Ak uhlomerom zmeriame dvojice odpovedajúcich si uhlov, tieto sú zhodné:
$\sphericalangle\alpha \cong \sphericalangle\alpha'$ $\quad\sphericalangle\beta \cong \sphericalangle\beta'$ $\quad\sphericalangle\gamma \cong \sphericalangle\gamma'$

O trojuholníkoch *ABC* a $A'B'C'$ hovoríme, že sú **podobné podľa vety *sss***.

Veta *sss*:
Dva trojuholníky sú podobné, ak sa pomery dĺžok každých dvoch odpovedajúcich strán rovnajú.

Môžeme písať: Ak $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, tak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k, \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k, \; k \text{ je pomer podobnosti, } k > 0.$$

$\sim$ je znak podobnosti

§

Pri zisťovaní, či sú trojuholníky podobné, napríklad:
$\triangle ABC$ a $\triangle LMN$, $\triangle PRS$ a $\triangle XYZ$, $\triangle CDE$ a $\triangle MNO$, **vzor** a **obraz** určíme ľubovoľne.

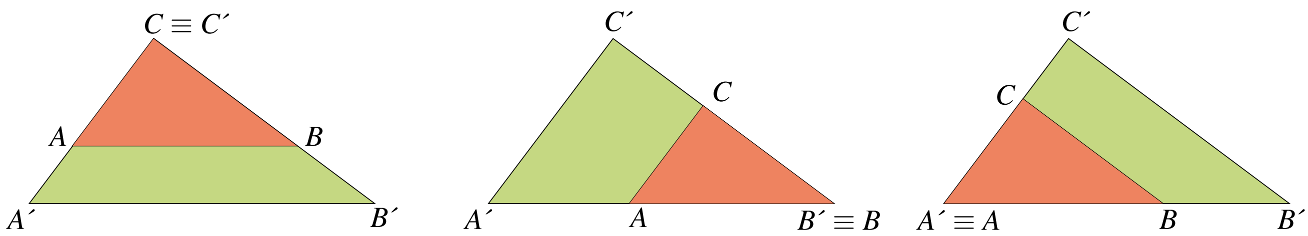
2. Zisti, či sú dané trojuholníky podobné. Najprv si ich načrtni. Pozor na odpovedajúce dvojice strán.

a) Trojuholník ABC: $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 6$ cm.
Trojuholník EFG: $e = 5$ cm, $f = 4$ cm, $g = 3$ cm.

b) Trojuholník PRS: $p = 25$ mm, $r = 40$ mm, $s = 55$ mm.
Trojuholník LMO: $l = 50$ mm, $m = 80$ mm, $o = 110$ mm.

c) Trojuholník RST: $|RS| = 1{,}2$ cm, $|ST| = 3{,}4$ cm, $|TR| = 2{,}8$ cm.
Trojuholník XYZ: $|XY| = 4{,}8$ cm, $|YZ| = 6{,}8$ cm, $|XZ| = 5{,}6$ cm.

Urob si experiment:
Vystrihni si narysované trojuholníky ABC a $A´B´C´$ z úlohy 1 a postupne polož trojuholník ABC na trojuholník $A´B´C´$, ako je to na obrázku. Presvedč sa, že veľkosti dvojíc odpovedajúcich si uhlov trojuholníkov sú rovnaké.



O podobnosti trojuholníkov platí nasledujúca veta:

Veta *uu*:
Dva trojuholníky sú podobné,
ak sa zhodujú v dvoch odpovedajúcich uhloch.

3. Zisti, či sú dané trojuholníky podobné. Pozor na odpovedajúce dvojice uhlov.

a) Trojuholník ABC: $|\sphericalangle CAB| = 45°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$.
Trojuholník EFG: $|\sphericalangle GEF| = 45°$, $|\sphericalangle EGF| = 105°$.

b) Trojuholník PRS: $|\sphericalangle PRS| = 56°$, $|\sphericalangle RSP| = 96°$.
Trojuholník LMO: $|\sphericalangle LMO| = 56°$, $|\sphericalangle OLM| = 28°$.

c) Trojuholník XYZ : $|\sphericalangle ZXY| = 20°10´$, $|\sphericalangle XZY| = 129°30´$.
Trojuholník DEF: $|\sphericalangle FDE| = 20°10´$, $|\sphericalangle DEF| = 30°30´$.

4. Zisti, či sú trojuholníky MNO a $M´N´O´$ podobné. Trojuholník MNO: $|MN| = 6$ cm, $|\sphericalangle OMN| = 85°$, $|\sphericalangle MNO| = 30°$. Trojuholník $M´N´O´$: $|M´N´| = 3{,}6$ cm, $|\sphericalangle O´M´N´| = 85°$, $|\sphericalangle M´O´N´| = 65°$.
Ak sú podobné, urči koeficient podobnosti.

Riešenie 4.

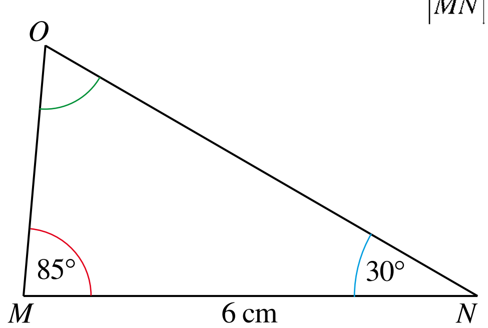
Trojuholníky načrtneme, určíme odpovedajúce dvojice uhlov a porovnáme ich veľkosti:

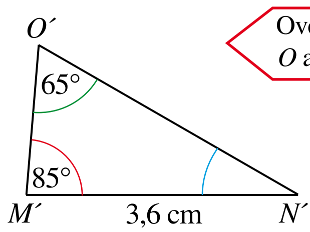
$|\sphericalangle OMN| = |\sphericalangle O´M´N´| = 85°$

$|\sphericalangle MNO| \equiv |\sphericalangle M´N´O´| = 30°$ (lebo $|\sphericalangle M´N´O´| = 180° - 85° - 65° = 30°$)

Trojuholníky sa zhodujú v dvoch uhloch, podľa vety **uu** sú podobné.

Vypočítame **koeficient podobnosti**: $\boldsymbol{k} = \dfrac{|M'N'|}{|MN|} = \dfrac{3{,}6}{6} = \mathbf{0{,}6}$.



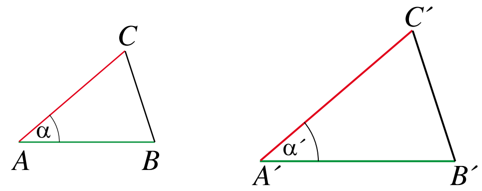


Over, či aj uhly pri vrchole O a $O´$ majú rovnaké veľkosti.

V predchádzajúcich úlohách sme riešili podobnosť dvoch trojuholníkov, ak boli dané trojicou strán alebo dvomi uhlami. Vyriešme teraz úlohu o podobnosti trojuholníkov, ak bude každý z nich daný dvojicou strán a uhlom nimi zovretým. O podobnosti dvoch takto určených trojuholníkov platí nasledujúca veta:

Veta *sus*:
Dva trojuholníky sú podobné, ak sa pomery dĺžok dvoch dvojíc odpovedajúcich strán rovnajú a trojuholníky sa zhodujú v uhle nimi zovretom.

Napríklad:

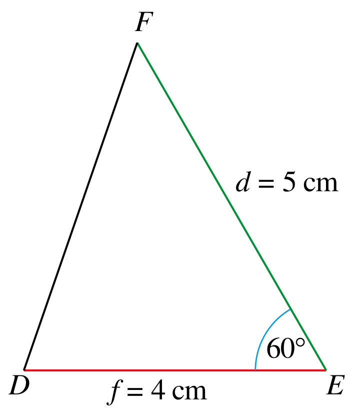


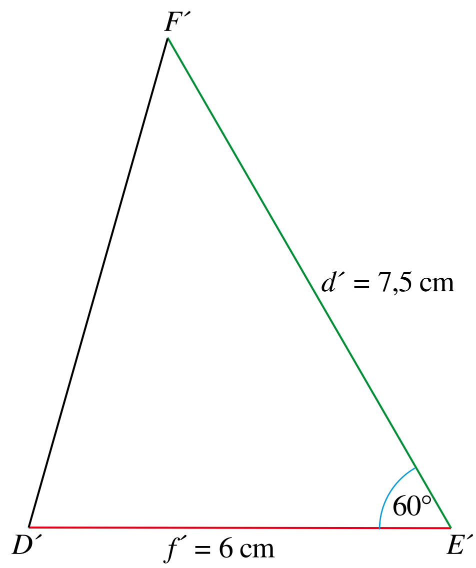
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} \quad \text{a} \ \sphericalangle\alpha \cong \sphericalangle\alpha'$$

5. Zisti, či sú trojuholníky *DEF* a *D´E´F´* podobné. Trojuholník *DEF*: $f = 4$ cm, $d = 5$ cm, $|\sphericalangle DEF| = 60°$. Trojuholník *D´E´F´*: $f' = 6$ cm, $d' = 7{,}5$ cm, $|\sphericalangle D'E'F'| = 60°$. Ak sú podobné, urči koeficient podobnosti.

Riešenie 5.

Dané trojuholníky načrtneme.





Rovnakou farbou označíme **odpovedajúce strany** a **príslušné uhly**, ktoré poznáme.
Platí: $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle D'E'F'| = 60°$. Platí $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle D'E'F'$.

Vypočítame **pomery dĺžok** odpovedajúcich strán.

Nech je trojuholník ***DEF*** vzor a trojuholník ***D´E´F´*** obraz trojuholníka ***DEF***.
Do pomeru dáme strany podľa ich dĺžky – k najdlhšej danej strane v trojuholníku *DEF* priradíme najdlhšiu danú stranu trojuholníka *D´E´F´* atď. – vytvárame odpovedajúce dvojice strán.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|D'E'|}{|DE|} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5 \\[2ex] \dfrac{|E'F'|}{|EF|} = \dfrac{7{,}5}{5} = 1{,}5 \end{array}\right] \rightarrow k = 1{,}5$$

Pomery strán sa rovnajú, podľa vety ***sus*** sú trojuholníky **podobné**. **Koeficient podobnosti** je 1,5.

6. Zisti, či sú dané trojuholníky podobné. Najprv ich načrtni. Pozor na odpovedajúce dvojice uhlov a strán.

a) Trojuholník *ABC*: $b = 8$ cm, $c = 6$ cm, $|\sphericalangle CAB| = 45°$.
Trojuholník *EFG*: $f = 4$ cm, $g = 3$ cm, $|\sphericalangle GEF| = 45°$.

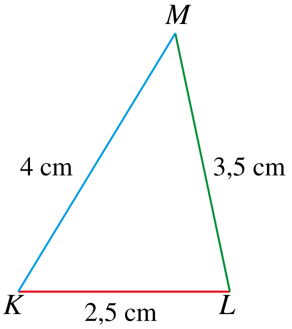
b) Trojuholník *STU*: $s = 30$ mm, $t = 40$ mm, $|\sphericalangle SUT| = 30°$.
Trojuholník *LMO*: $l = 50$ mm, $m = 80$ mm, $|\sphericalangle LOM| = 30°$.

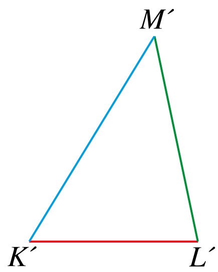
c) Trojuholník *XYZ*: $|XY| = 7{,}5$ cm, $|XZ| = 10{,}5$ cm, $|\sphericalangle YXZ| = 48°20'$.
Trojuholník *DEF*: $|DE| = 2{,}5$ dm, $|EF| = 3{,}5$ dm, $|\sphericalangle DEF| = 48°20'$.

7. Vypočítaj dĺžky strán trojuholníka $K'L'M'$, ak platí:
$\triangle KLM \sim \triangle K'L'M'$, koeficient podobnosti $k = 0{,}8$, $|KL| = 2{,}5$ cm, $|LM| = 3{,}5$ cm, $|MK| = 4$ cm.

Riešenie 7.

Trojuholníky najprv načrtneme. Takto ľahšie zostavíme dvojice odpovedajúcich strán.
Vzor nech je **trojuholník** $\boldsymbol{KLM}$ a jeho **obraz** v podobnosti s koeficientom $k = 0{,}8$ je trojuholník $\boldsymbol{K'L'M'}$.





Pomôcka
Dĺžky strán podobných útvarov počítame ako v časti 6.1.

Farebne označíme dvojice **odpovedajúcich strán** a vypočítame dĺžky strán trojuholníka $K'L'M'$ pomocou koeficientu podobnosti k.
Pre strany podobných trojuholníkov KLM a $K'L'M'$ platí:

$$|K'L'| = \boldsymbol{k} \cdot |KL| = \mathbf{0{,}8} \cdot |KL| = 0{,}8 \cdot 2{,}5\text{ cm} = 2\text{ cm}$$
$$|L'M'| = \boldsymbol{k} \cdot |LM| = \mathbf{0{,}8} \cdot |LM| = 0{,}8 \cdot 3{,}5\text{ cm} = 2{,}8\text{ cm}$$
$$|M'K'| = \boldsymbol{k} \cdot |MK| = \mathbf{0{,}8} \cdot |MK| = 0{,}8 \cdot 4\text{ cm} = 3{,}2\text{ cm}$$

Dĺžky strán trojuholníka $K'L'M'$ sú: $|K'L'| = 2$ cm, $|L'M'| = 2{,}8$ cm, $|M'K'| = 3{,}2$ cm.

8.

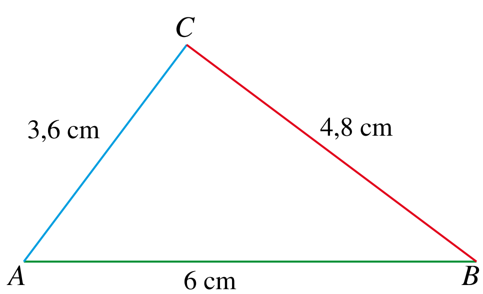
a) Vypočítaj dĺžky strán trojuholníka $K'L'M'$, ak platí: $\triangle KLM \sim \triangle K'L'M'$, koeficient podobnosti $k = 1{,}5$.
$\triangle KLM$: $|KL| = 4$ cm, $|LM| = 2{,}5$ cm, $|MK| = 3{,}5$ cm.

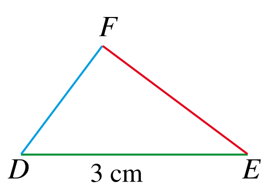
b) Vypočítaj dĺžky strán trojuholníka ABC, ak platí: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, koeficient podobnosti $k = \dfrac{2}{5}$.
$\triangle A'B'C'$: $|A'B'| = 14$ cm, $|B'C'| = 21$ cm, $|C'A'| = 28$ cm.

9. Vypočítaj neznáme dĺžky strán trojuholníka DEF, ak $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4{,}8$ cm, $|AC| = 3{,}6$ cm a $|DE| = 3$ cm.

Riešenie 9.

Trojuholníky **načrtneme** a farebne vyznačíme **odpovedajúce strany** podobných trojuholníkov.
Nech je $\triangle ABC$ **vzor** a $\triangle DEF$ **obraz** trojuholníka ABC.





Pomôcka
Koficient podobnosti k pre dané trojuholníky je
$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AC|}$$

Na výpočet dĺžok strán trojuholníka DEF potrebujeme určiť **koeficient podobnosti**.
Vypočítame ho zo známych dĺžok odpovedajúcich strán AB a DE.

Koeficient podobnosti $\boldsymbol{k} = \dfrac{|DE|}{|AB|} = \dfrac{3}{6} = \mathbf{0{,}5}$.

Potom pre strany $\triangle DEF$ platí:
$|EF| = \boldsymbol{k} \cdot |BC| = \mathbf{0{,}5} \cdot 4{,}8\text{ cm} = 2{,}4\text{ cm}$, $|DF| = \boldsymbol{k} \cdot |AC| = \mathbf{0{,}5} \cdot 3{,}6\text{ cm} = 1{,}8\text{ cm}$

$|DE| = 0{,}5 \cdot 6\text{ cm} = 3\text{ cm}$

Chýbajúce dĺžky strán trojuholníka $\boldsymbol{DEF}$ sú: $|EF| = 2{,}4$ cm, $|DF| = 1{,}8$ cm.

10. Vypočítaj chýbajúce dĺžky strán trojuholníka

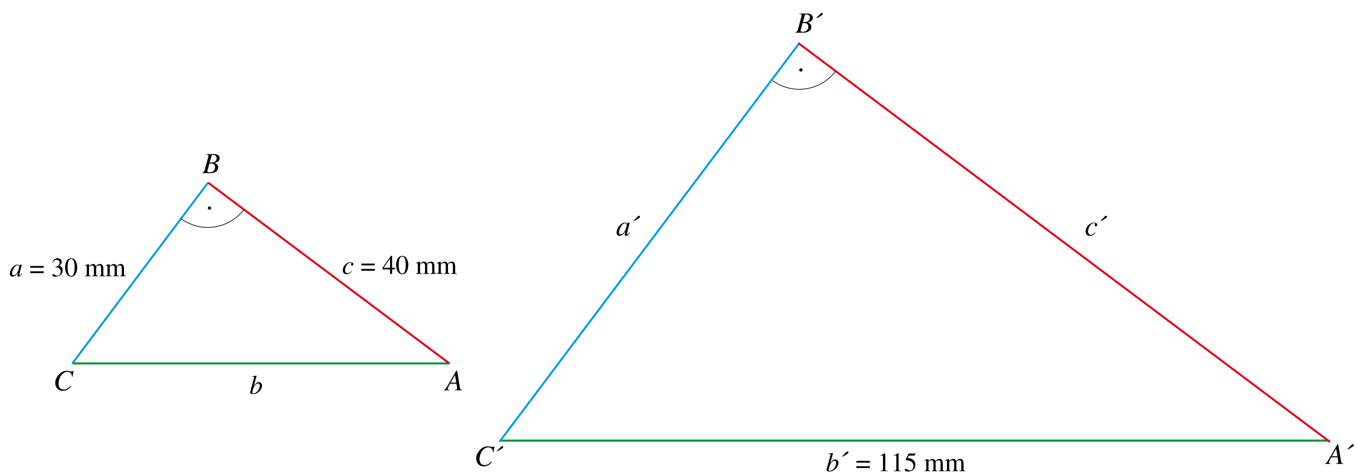
a) KLM, ak platí: $\triangle ABC \sim \triangle KLM$, $|AB| = 3{,}6$ cm, $|BC| = 5{,}6$ cm, $|AC| = 4{,}2$ cm, $|LM| = 14$ cm.

b) RST, ak platí: $\triangle ABC \sim \triangle RST$, $|AB| = 7$ dm, $|BC| = 10$ dm, $|AC| = 5$ dm, $|RT| = 4$ dm.

11.* Vypočítaj chýbajúce dĺžky strán pravouhlého trojuholníka $A'B'C'$, ak platí:
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $|AB| = 40$ mm, $|BC| = 30$ mm, $|\sphericalangle ABC| = 90°$, $|\sphericalangle A'B'C'| = 90°$, $|A'C'| = 115$ mm.

Riešenie 11.

Trojuholníky **načrtneme** a farebne vyznačíme **odpovedajúce strany** podobných trojuholníkov.
Vzor je $\triangle ABC$, obraz je $\triangle A'B'C'$.



Najprv vypočítame dĺžku prepony b trojuholníka ABC z Pytagorovej vety. Platí rovnosť:

$b^2 = a^2 + c^2$

$b^2 = 30^2 + 40^2$

$b^2 = 900 + 1\,600$

$b^2 = 2\,500$

$b = \sqrt{2\,500}$

$\boldsymbol{b = 50}$ **mm**

Keďže dĺžka prepony $\triangle A'B'C'$ je daná, vypočítame **koeficient podobnosti** z odpovedajúcich strán CA a $C'A'$:

$$\boldsymbol{k} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = \frac{115}{50} = \mathbf{2{,}3}$$

Potom:

$|A'B'| = \boldsymbol{k} \cdot |AB| = \mathbf{2{,}3} \cdot |AB| = 2{,}3 \cdot 40 \text{ mm} = 92 \text{ mm}$

$|B'C'| = \boldsymbol{k} \cdot |BC| = \mathbf{2{,}3} \cdot |BC| = 2{,}3 \cdot 30 \text{ mm} = 69 \text{ mm}$

Chýbajúce dĺžky strán trojuholníka $A'B'C'$ sú: $|A'B'| = 92$ mm, $|B'C'| = 69$ mm.

12.* Vypočítaj chýbajúce dĺžky strán pravouhlého trojuholníka

a) DEF, ak platí: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $a = 12$ cm, $c = 5$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 90°$, $|\sphericalangle DEF| = 90°$, $|DE| = 3{,}5$ cm.

b) PRS, ak platí: $\triangle ABC \sim \triangle PRS$, $|BC| = 80$ mm, $|AB| = 170$ mm, $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|\sphericalangle PSR| = 90°$, $|PS| = 450$ mm.

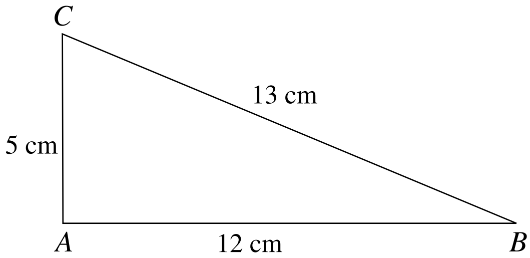
Problémová úloha

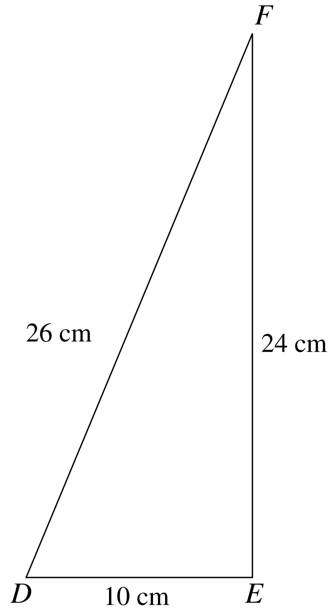
Overte pravdivosť tvrdenia:
Výška na preponu ľubovoľného pravouhlého trojuholníka rozdelí tento trojuholník na dva podobné trojuholníky.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.
Obrázky trojuholníkov sú len ilustračné, dĺžky strán a veľkosti uhlov nezodpovedajú skutočnosti.

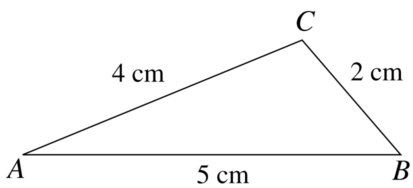
1. Trojuholníky ABC a DEF:

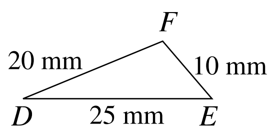




A sú podobné
B sú zhodné
C nie sú ani podobné ani zhodné

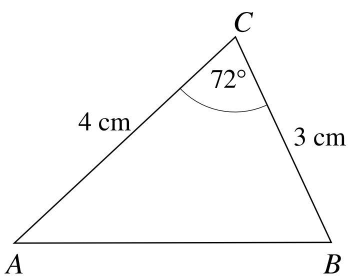
2. Trojuholníky ABC a DEF sú podobné s koeficientom podobnosti:

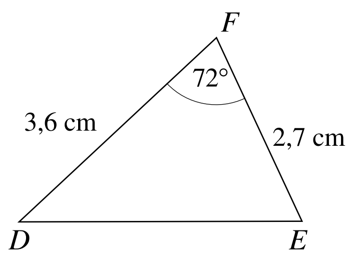




A $k = 2$ B $k = 0{,}25$ C $k = 5$ D $k = 0{,}2$

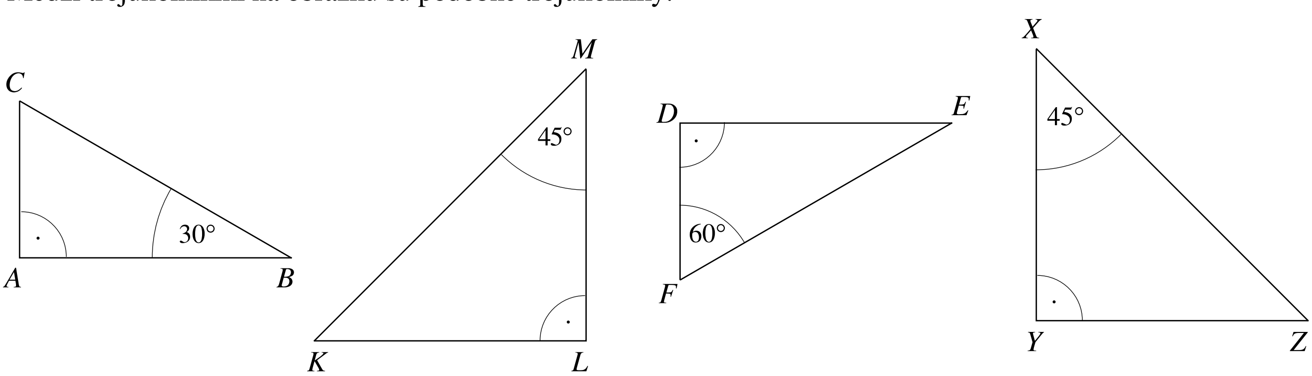
3. Trojuholníky ABC a DEF sú podobné s koeficientom podobnosti:





A $k = 9$ B $k = 0{,}9$ C $k = 0{,}3$ D $k = 3$

4. Medzi trojuholníkmi na obrázku sú podobné trojuholníky:



A $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ B $\triangle KLM \sim \triangle DEF$ C $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ D $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$

5. Trojuholníky *ABC* a *DEF* sú podobné s koeficientom podobnosti $k = 2{,}5$. Dĺžky strán trojuholníka *ABC* sú: $|BC| = 15$ mm, $|AB| = 27$ mm, $|AC| = 32$ mm. Dĺžka strany *DF* trojuholníka *DEF* je:

A 80 mm B 37,5 mm C 67,5 mm D 12,8 mm

6. Trojuholníky *ABC* a *DEF* sú podobné. Trojuholník *ABC* má dĺžky strán $|AB| = 3$ dm, $|AC| = 8$ dm, veľkosť uhla α je 60°. Trojuholník *DEF* má $|DE| = 12$ dm, $|\sphericalangle EDF| = 60°$. Dĺžka strany *DF* trojuholníka *DEF* sa rovná:

A 11 dm B 4,5 dm C 2 dm D 32 dm

7. Rovnoramenný trojuholník *ABC* má uhol pri základni 58° a dĺžka jeho základne je 12 cm. Rovnoramenný trojuholník *A´B´C´* má uhol, ktorý zvierajú jeho ramená 64° a jeho základňa má dĺžku 3,6 cm.
Pre trojuholníky *ABC* a *A´B´C´* platí:

A Trojuholník *A´B´C´* je podobný s trojuholníkom *ABC*, koeficient podobnosti $k = 3{,}3$.

B Trojuholník *A´B´C´* je podobný s trojuholníkom *ABC*, koeficient podobnosti $k = 0{,}3$.

C Trojuholníky nie sú podobné.

8.* Trojuholník *ABC* má uhly veľkosti $|\sphericalangle ABC| = 68°15´$, $|\sphericalangle CAB| = 36°45´$.
Trojuholník *DEF* má uhly veľkosti $|\sphericalangle DEF| = 68°15´$, $|\sphericalangle DFE| = 75°$.
Platí:

A Ak je trojuholník *ABC* obraz trojuholníka *DEF*, potom je trojuholník *ABC* zväčšením trojuholníka *DEF*.

B Ak je trojuholník *ABC* obraz trojuholníka *DEF*, potom trojuholník *ABC* je zmenšením trojuholníka *DEF*.

C Trojuholník *ABC* a trojuholník *DEF* sú zhodné.

D Trojuholník *ABC* a *DEF* sú podobné.

Zapamätajte si

Ak sú dva trojuholníky podobné, používame tento zápis:

$$\triangle ABC \sim \triangle A´B´C´$$

Čítame: Trojuholník *ABC* je podobný s trojuholníkom *A´B´C´*.
Trojuholník *ABC* je vzor, trojuholník *A´B´C´* je obraz v podobnosti s koeficientom *k*.

Odpovedajúce vrcholy píšeme v zápisoch na odpovedajúcich miestach:

$$\triangle ABC \sim \triangle A´B´C´$$

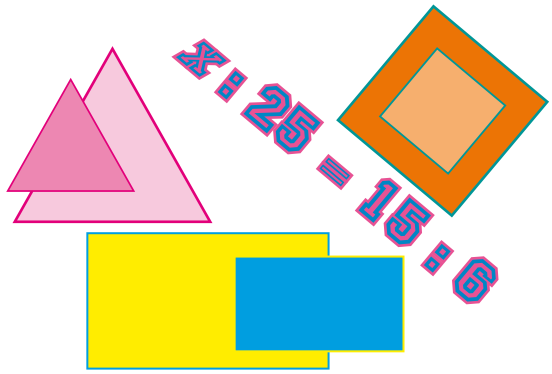
Pri určovaní koeficientu podobnosti **si treba dať pozor na odpovedajúce strany trojuholníkov**.

Vety o podobnosti trojuholníkov:
Veta *sss*:
Dva trojuholníky sú podobné, ak sa pomery dĺžok každých dvoch odpovedajúcich strán trojuholníkov rovnajú.

Veta *uu*:
Dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch.

Veta *sus*:
Dva trojuholníky sú podobné, ak sa pomery dĺžok dvoch dvojíc odpovedajúcich strán rovnajú a uhly nimi zovreté majú rovnakú veľkosť (sú zhodné).

6.3 Riešenie výpočtových a konštrukčných úloh pomocou podobnosti. Použitie podobnosti pri meraní výšok a vzdialeností



Čo sme sa už učili

Zväčšovať a **zmenšovať** úsečky, trojuholníky, štvoruholníky.
Používať **pomer** a **mierku**.
Počítať **obvody** a **obsahy** rôznych geometrických útvarov.
Zisťovať, či sú geometrické útvary **podobné**.

Zopakujeme si vedomosti o podobnosti trojuholníkov spolu s výpočtom obvodu a obsahu trojuholníka.

1. Daný je trojuholník RST so stranami dĺžky $r = 4$ cm, $s = 7$ cm a $t = 5$ cm.
Vypočítaj obvod trojuholníka $R'S'T'$, ktorý je podobný s trojuholníkom RST s koeficientom podobnosti $k = 3{,}5$.

Riešenie 1.

Obvod trojuholníka je súčtom dĺžok jeho strán.
Dĺžky strán trojuholníka $R'S'T'$ vypočítame pomocou koeficientu podobnosti a dĺžok odpovedajúcich strán trojuholníka RST.
$\triangle RST$ je vzor, $\triangle R'S'T'$ je obraz.
Potom platí:
$r' = \boldsymbol{k} \cdot r = \mathbf{3{,}5} \cdot 4\text{ cm} = 14\text{ cm}$
$s' = \boldsymbol{k} \cdot s = \mathbf{3{,}5} \cdot 7\text{ cm} = 24{,}5\text{ cm}$
$t' = \boldsymbol{k} \cdot t = \mathbf{3{,}5} \cdot 5\text{ cm} = 17{,}5\text{ cm}$
$o' = r' + s' + t' = 14\text{ cm} + 24{,}5\text{ cm} + 17{,}5\text{ cm} = 56\text{ cm}.$

Obvod trojuholníka $R'S'T'$ je 56 cm.

Pomôcka
$$k = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s} = \frac{t'}{t}$$
$$r' = k \cdot r,\ s' = k \cdot s,\ t' = k \cdot t$$

Všimnite si, že koeficient podobnosti je rovnaký aj pre obvody týchto trojuholníkov.
$o = 4\text{ cm} + 7\text{ cm} + 5\text{ cm} = 16\text{ cm},\ o' = 56\text{ cm}$
$$k = \frac{o'}{o} = \frac{56}{16} = 3{,}5$$

2.

a) Daný je trojuholník ABC so stranami dĺžky $a = 2{,}5$ dm, $b = 4{,}8$ dm, $c = 3{,}3$ dm.
Vypočítaj obvod trojuholníka $A'B'C'$, ak je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ a koeficient podobnosti $k = 0{,}2$.
b) Vypočítaj obvod trojuholníka $X'Y'Z'$, ak $\triangle XYZ \sim \triangle X'Y'Z'$, $x = 26$ mm, $y = 35$ mm, $z = 44$ mm.
Koeficient podobnosti $k = 2$.

Problémová úloha
Vyjadrite vzťah medzi obvodmi podobných trojuholníkov pomocou koeficientu podobnosti.

3. Vypočítaj obsah pravouhlého trojuholníka ABC s odvesnami a a b, ak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ s odvesnami $a' = 12$ cm, $b' = 9$ cm. Koeficient podobnosti $k = 3$.

Riešenie 3.

Obsah pravouhlého trojuholníka s odvesnami a, b vypočítame podľa vzorca $S = \frac{a \cdot b}{2}$. Dĺžky odvesien trojuholníka ABC vypočítame pomocou koeficientu podobnosti k a odpovedajúcich dĺžok strán trojuholníka $A'B'C'$.

Platí: $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

Potom $a = \frac{a'}{k}$, $b = \frac{b'}{k}$, $c = \frac{c'}{c}$, kde $k = 3$.

$$a = \frac{a'}{k} = \frac{12\text{ cm}}{3} = 4\text{ cm},\quad b = \frac{b'}{k} = \frac{9\text{ cm}}{3} = 3\text{ cm}$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2$$

Úlohu sme mohli počítať aj takto:
$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{a'}{k} \cdot \frac{b'}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{9}{3} = 6\text{ cm}^2.$$

Obsah trojuholníka ABC je 6 cm².

Problémová úloha
Vyjadrite vzťah medzi obsahmi podobných trojuholníkov pomocou koeficientu podobnosti.
Zistite, či obdobný vzťah platí aj medzi obsahmi ľubovoľných geometrických útvarov, ktoré sú podobné.

4.

a) Vypočítaj obsah S pravouhlého trojuholníka DEF s odvesnami d a e, ak:
$\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$ a $d' = 7{,}5$ cm, $e' = 4{,}5$ cm a koeficient podobnosti $k = 1{,}5$.

b)* Vypočítaj obsah S' pravouhlého trojuholníka $A'B'C'$, ak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, odvesna $a = 5$ cm, prepona $c = 17$ cm a koeficient podobnosti $k = 0{,}4$. Počítaj s presnosťou na stotiny.

5. AKO VYSOKO JE BOCIANIE HNIEZDO

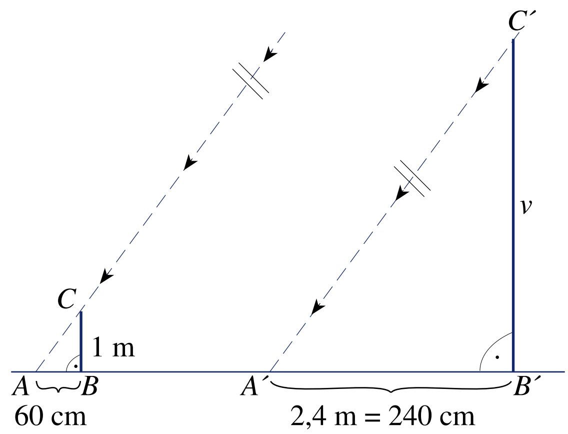
Neďaleko domu, kde býva Juraj, je telegrafný stĺp. Každú jar si na ňom bociany stavajú hniezdo. Juraj bol zvedavý, ako vysoko je hniezdo, ale nikto zo susedov mu na to nevedel povedať. Učiteľ mu poradil, aby použil vedomosti z matematiky a fyziky. Nech vezme nejakú tyč, zapichne ju neďaleko stĺpa do zeme a pozoruje, ako sa mení veľkosť tieňa stĺpa a tyče. Potom stačí použiť vedomosti o podobnosti trojuholníkov a kalkulačku.

Riešenie 5.

Nakreslime si vedľa seba stojaci telgrafný stĺp a tyč zapichnutú do zeme. Nakreslime aj tiene a slnečné lúče prechádzajúce horným koncom tyče a bocianím hniezdom. Vznikli dva trojuholníky. Označme ich ABC a $A'B'C'$.

Slnečné lúče dopadajú na obidva predmety stojace **kolmo** na zem pod **rovnakým uhlom**. Preto sú obidva trojuholníky podobné podľa **vety uu**:
Uhly ABC a $A'B'C'$ sú zhodné a majú veľkosť 90° (tyč aj stĺp sú kolmé na zem).
Uhly CAB a $C'A'B'$ sú zhodné (dopad slnečných lúčov na predmet v rovnakom čase).
Ak trojuholník ABC je **vzor** a trojuholník $A'B'C'$ je **obraz**,
tak pre dĺžky odpovedajúcich strán podobných trojuholníkov platí:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k \text{, kde } k \text{ je koeficient podobnosti}$$



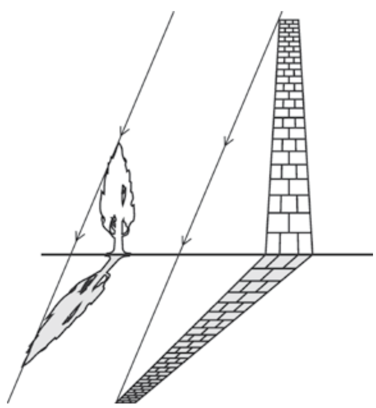
Ak nadzemná časť Jurajovej tyče má dĺžku 1 meter, jej tieň má dĺžku 60 cm a tieň, ktorý vytvoril stĺp s hniezdom je dlhý 2,4 m, potom

$$\boldsymbol{k} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{240}{60} = \mathbf{4}$$

Výšku, v akej je hniezdo, potom vypočítame:
$\boldsymbol{v} = |B'C'| = k \cdot |BC| = 4 \cdot 1 \text{ m} = \mathbf{4\ m}$.

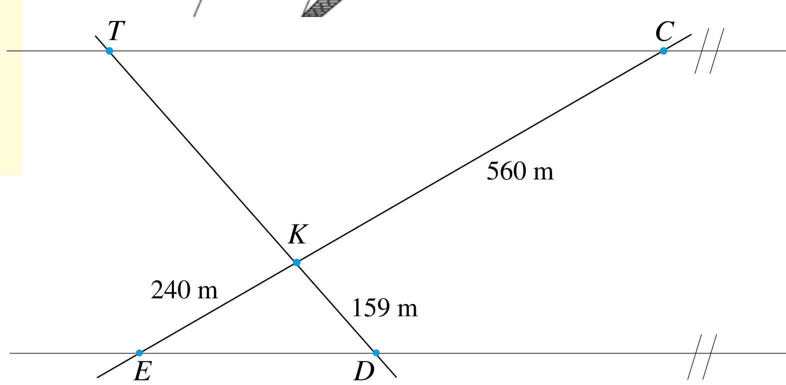
Hniezdo je vo výške 4 m.

6. Vypočítaj výšku továrenského komína, ktorý popoludní vrhá tieň dlhý 6,5 m. V tom istom čase neďaleko neho stojaci 6 m vysoký strom vrhá tieň dlhý 2,5 m.



7.* Úlohou skautov na turistickom zraze bolo vypočítať vzdialenosť križovatky od ich tábora. Vytvorili si mapku (na obrázku) a úlohu vypočítali pomocou podobnosti trojuholníkov. Cesty znázornili priamkami, križovatku označili písmenom K a polohu tábora písmenom T.

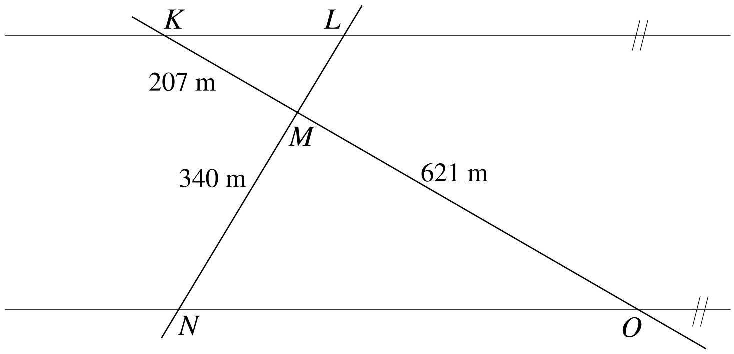
Pomôcka
Využi vedomosti o vrcholových, striedavých a súhlasných uhloch.



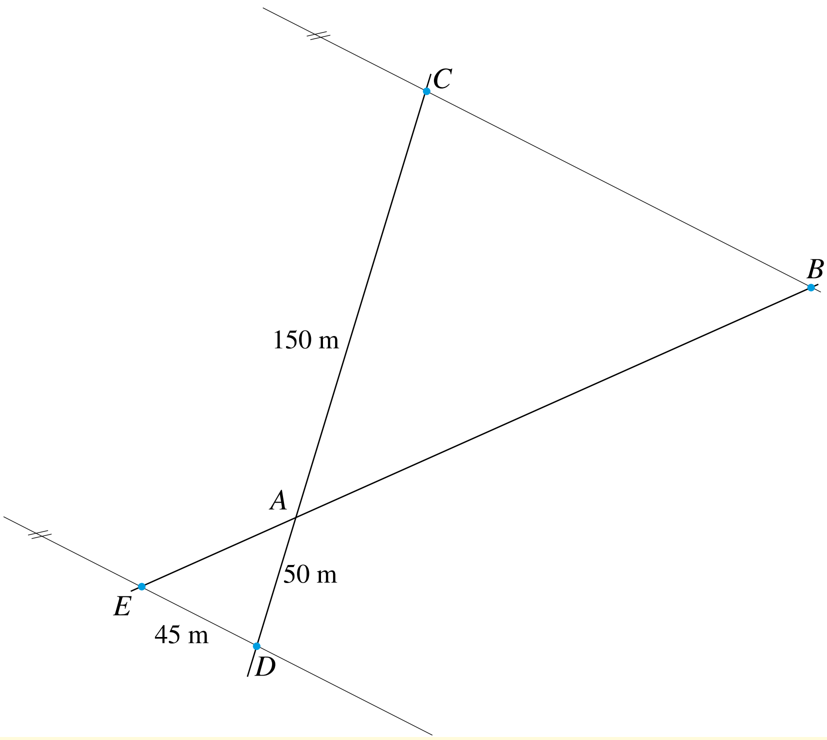
Viete, že...?

Najstarším kružidlom na svete bol povrázok.
Priamku si v dávnych dobách predstavovali ako prútik, z ktorého sa neskôr odvíjali najstaršie meracie nástroje.
Vyhľadajte na internete informácie o najstarších rysovacích pomôckach a spracujte ich formou prezentácie.

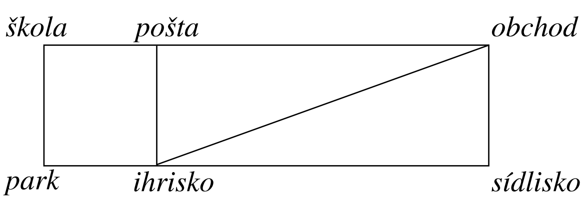
8.* Vypočítaj dĺžku úsečky *LM* na obrázku. Dĺžku zaokrúhli na jednotky nahor.



9.* Z protiľahlých brehov rieky pozorovali loď (bod *A*) štyria pozorovatelia *B*, *C*, *D*, *E*.
Ako ďaleko od pozorovateľa *B* bol pozorovateľ *C*, ak je situácia znázornená na nasledujúcom obrázku?



10. Na pláne, ktorý nakreslili žiaci pri riešení projektu z geografie, je vzdialenosť medzi školou a poštou znázornená úsečkou dĺžky 1,5 cm. Vypočítaj skutočnú vzdialenosť medzi školou a poštou, ak mierka plánu je 1 : 100 000.



Riešenie 10.

Mierka plánu znamená, že **1 cm** na pláne je **100 000 cm** v skutočnosti.
Potom 1,5 cm na pláne je 1,5 · 100 000 cm = 150 000 cm v skutočnosti, čo je 1,5 km.
Vzdialenosť medzi školou a **poštou** je **1,5 km**.

O mierke ste sa už učili. Niektorí možno úlohu riešili trojčlenkou.

11.

a) Vypočítaj vzdialenosť medzi Košicami a Žilinou (v km), ak na mape Slovenskej republiky v mierke 1 : 1 100 000 je táto vzdialenosť znázornená úsečkou dĺžky 22,5 cm.

b) Urči vzdialenosť miest A a B na mape s mierkou 1 : 50 000, ak skutočná vzdialenosť medzi nimi je 6 km.

Viete, že...?

Praktické merania na rovine sa týkali hlavne pozemkov a ich zaznačenia do katastrálnej mapy. Významnejšie body na pozemkoch sa vyznačovali kamennými medzníkmi. Na vymeriavanie pozemku sa používali merníckе žŕďky.
Každý pozemok mal v katastrálnej mape svoje číslo. Podľa rozlohy pozemku sa vymeriavala pozemková daň.
Jednou z používaných mierok na katastrálnych mapách bola mierka 1 : 2 880.

Zdroj: http://www.pce.sk/clanky/pozuprav.htm

12. Na katastrálnej mape s mierkou 1 : 2 000 je pozemok pána Dobrého znázornený lichobežníkom so základňami 5,6 cm a 3,8 cm dlhými a ramenami 2,5 cm a 4 cm dlhými. Vypočítaj skutočné rozmery pozemku pána Dobrého v metroch.

13. Záhrada má tvar obdĺžnika s rozmermi 180 m × 25 m. Vypočítaj, aké rozmery má záhrada na katastrálnej mape s mierkou 1 : 2 000. Rozmery uveď v centimetroch.

Piešťany sú jedno z najznámejších a najvyhľadávejších kúpeľných miest na Slovensku. Preslávili ich termálne pramene a liečivé sírne bahno. Zaujímavé sú aj svojím názvom. Pôvod názvu Pescan je vraj v slove piesok. S výstavbou prvých vaňových a bazénových kúpeľov začal v roku 1821 gróf Jozef Erdődy. Prvé zrkadlisko v Piešťanoch a prvé kúpeľné domy, dnes známe ako Napoleonské kúpele, dal postaviť po skončení napoleonských vojen v r. 1822.

14. PIEŠŤANY

a) Ak sa niekto rozhodne pre liečbu v Piešťanoch, v informačnom centre mu poskytnú informácie o pamiatkach v meste, kultúrnych podujatiach a podobne.
K dispozícii je aj mapka Piešťan s mierkou 1 : 10 000.
Ak je kúpeľný hosť ubytovaný v Napolenských kúpeľoch a chce prejsť cez kúpeľný ostrov priamo k minigolfu na konci ostrova, akú vzdialenosť musí prejsť? Na mapke je táto vzdialenosť zobrazená úsečkou dlhou 9,8 cm.

b) Do Piešťan sa prišiel liečiť pacient z Košíc. Na dopravu využil ponuku súkromnej leteckej spoločnosti.
Ak je vzdialenosť Košice – Piešťany približne 378 km, akou dlhou úsečkou je znázornená na mape Slovenska s mierkou 1 : 500 000?

Viete, že...?

Mapa a jej mierka

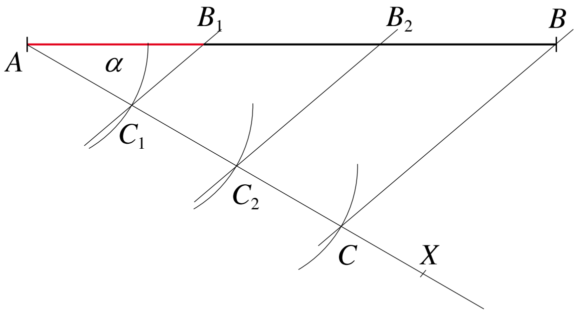
Mapa je zmenšený obraz zemského povrchu. Jednotlivé objekty a javy na Zemi, ktoré znázorňuje, sú zjednodušené do výstižných mapových znakov a symbolov. Mapy slúžia všetkým, ktorí sa potrebujú orientovať v krajine. Každá mapa má svoj pomer zmenšenia oproti skutočnosti vyjadrený mierkou.
Mierka mapy vyjadruje pomer vzdialenosti na mape ku skutočnej vzdialenosti. Mierka mapy 1 : 100 000 označuje, že dĺžka 1 cm na mape zobrazuje skutočných 100 000 cm, teda skutočných 1 000 m, resp. 1 km.
Geografi delia mapy podľa mierky na mapy veľkých mierok (od 1 : 10 000 do 1 : 200 000), ktoré zobrazujú veľmi podrobne malé územia, mapy stredných mierok (od 1 : 200 000 do 1 : 1 000 000) a mapy malých mierok (viac ako 1 : 1 000 000) zobrazujúce menej podrobne veľké územia. Turistické mapy sa vydávajú vo veľkých mierkach (1 : 100 000, 1 : 50 000, 1 : 25 000). Sú na nich zakreslené značené turistické trasy a ďalšie údaje významné pre turistov (pamätihodnosti, cyklistické trasy, ubytovacie zariadenia, vyhliadky, jaskyne, pramene a pod.).

Zdroj: http://referaty.aktuality.sk/zaklady-mapovania/referat-15073

15. Narysuj úsečku DE, ktorej dĺžka je **trikrát menšia ako** dĺžka úsečky AB, $|AB| = 7$ cm.

Riešenie 15.

Máme narysovať úsečku, ktorej dĺžka je tretinou dĺžky danej úsečky.
Takže budeme **deliť úsečku *AB* na** tretiny.



Na riešenie úlohy použijeme nasledujúci postup:
1. Narysujeme úsečku dĺžky 7 cm a označíme ju AB.
2. Narysujeme ľubovoľný ostrý uhol BAX (odporúčame veľkosť uhla 30°).
3. Na rameno uhla AX nanesieme tri zhodné úsečky AC_1, C_1C_2, C_2C.
   Posledný bod C spojíme s bodom B.
4. Bodmi C_1, C_2 vedieme rovnobežky s úsečkou BC tak, aby preťali úsečku AB.
5. Rovnobežkami rozdelíme úsečku AB na tri časti. Platí $|AB_1| = |B_1B_2| = |B_2B|$.
6. Jedna z častí, napríklad AB_1, $|\boldsymbol{AB_1}| = |\boldsymbol{DE}|$ je **riešením úlohy**.

Pomôcka
Zhodné úsečky zvyčajne nanášame pomocou kružidla.

Uvedený postup sme mohli použiť preto, lebo o trojuholníkoch AC_1B_1, AC_2B_2, ACB platí, že sú podobné podľa vety *uu*.

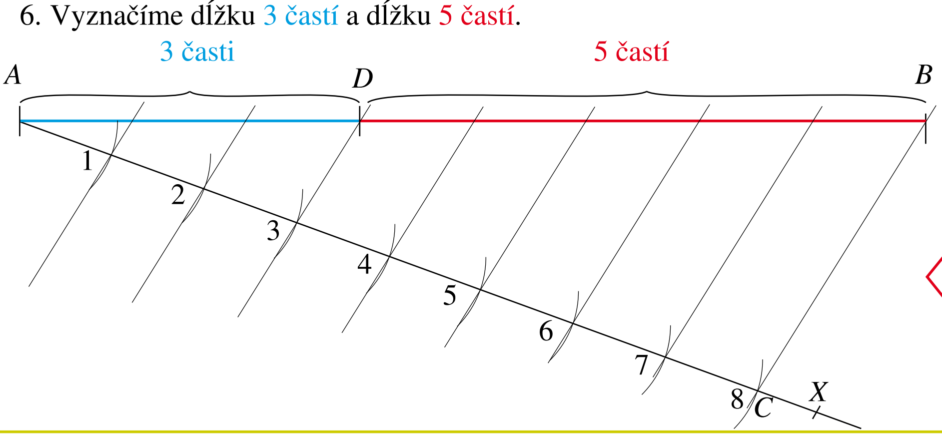
16.

a) Narysuj úsečku EF, ktorej dĺžka je dvakrát menšia, ako dĺžka úsečky AB, ak $|AB| = 5$ cm.
b) Narysuj úsečku KL, ktorej dĺžka je trikrát menšia, ako dĺžka úsečky AB, ak $|AB| = 4{,}6$ cm.
c) Narysuj úsečku MN, ktorej dĺžka je štyrikrát menšia ako dĺžka úsečky AB, ak $|AB| = 6{,}4$ cm.
d) Narysuj úsečku PR, ktorej dĺžka je šesťkrát menšia ako dĺžka úsečky AB, $|AB| = 4{,}8$ cm.

17. Rozdeľ konštrukčne úsečku dĺžky 12 cm v **pomere** 3 : 5.

Riešenie 17.

Na riešenie úlohy použijeme nasledujúci postup:
1. Narysujeme úsečku dĺžky 12 cm a označíme ju AB.
2. Narysujeme ľubovoľný ostrý uhol BAX (napríklad 20°).
3. Na rameno uhla AX nanesieme kružidlom postupne osem zhodných úsečiek (**tvorba** 8 **rovnakých dielov**), priesečník posledného kružnicového oblúka a ramena uhla označíme ako bod C.
4. Spojíme bod B s bodom C.
5. Koncovými bodmi úsečiek vedieme rovnobežky s úsečkou CB – tie rozdelia úsečku AB na osem rovnakých častí.
6. Vyznačíme dĺžku 3 častí a dĺžku 5 častí.



Vypočítaj dĺžku úsečiek AD a DB. Potom zmeraj dĺžky úsečiek v konštrukcii a porovnaj výsledky.

18. Rozdeľ úsečku

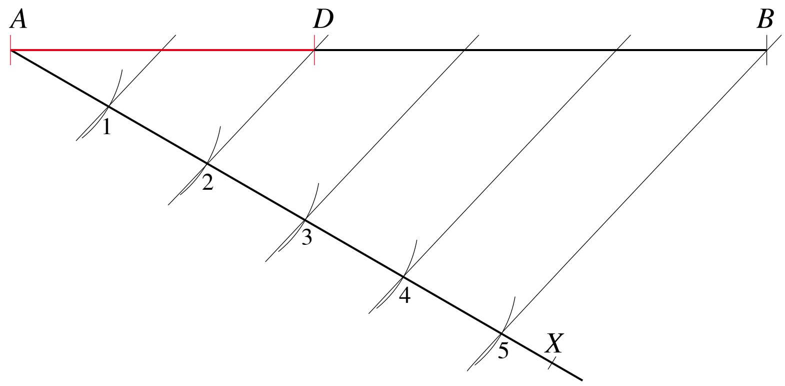
a) dĺžky 10 cm v pomere 3 : 2,
b) dĺžky 7 cm v pomere 4 : 3,
c) dĺžky 9,5 cm v pomere 2 : 3,
d) dĺžky 1,5 dm v pomere 7 : 8,
e) dĺžky 85 mm v pomere 1 : 4.

Úlohu rieš **konštrukčne** a potom **výpočtom**.

19. Zmenši **konštrukčne** úsečku dĺžky 10 cm v **pomere** 2 : 5. Vypočítaj dĺžku zmenšenej úsečky.

Riešenie 19.

Máme **zmenšiť danú úsečku v pomere** 2 : 5. To znamená, že získaná úsečka má mať dĺžku dve pätiny **pôvodnej úsečky**. Nech je pôvodná úsečka *AB*. **Rozdelíme ju na pätiny.** Použijeme postup z predchádzajúcich úloh.



Zmenšená úsečka je **úsečka** ***AD***.
Vypočítame dĺžku zmenšenej úsečky. Počítame $\frac{2}{5}$ z 10 cm: $\frac{2}{5} \cdot 10\text{ cm} = \frac{20}{5}\text{ cm} = 4\text{ cm}$.
Dĺžka zmenšenej úsečky je 4 cm.

20. Zmenši úsečku

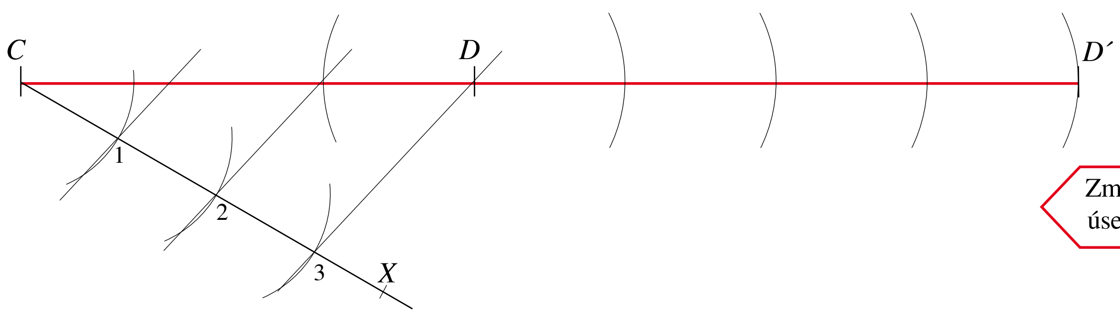
a) dĺžky 12 cm v pomere 3 : 5,
b) dĺžky 7 cm v pomere 3 : 4,
c) dĺžky 9,5 cm v pomere 2 : 5,
d) dĺžky 1,6 dm v pomere 7 : 8,
e) dĺžky 85 mm v pomere 1 : 4.

Úlohu rieš **konštrukčne** a potom **výpočtom**.

21. Zväčši **konštrukčne** úsečku *CD*, $|CD| = 6$ cm, v **pomere** 7 : 3. Vypočítaj dĺžku zväčšenej úsečky.

Riešenie 21.

Máme konštrukčne **zväčšiť danú úsečku v pomere** 7 : 3.
To znamená, že získaná úsečka má mať **dĺžku** sedem tretín **pôvodnej úsečky**.
Rozdelíme ju teda na tretiny a potom doplníme úsečku *CD* o chýbajúce tretiny (štyri).
Rozdelenie úsečky na tretiny spravíme pomocou postupu z predchádzajúcich úloh.



Zmeraj dĺžku zväčšenej úsečky. Má byť 14 cm.

Zväčšená úsečka je úsečka ***CD´***.
Vypočítajme, akú dĺžku má mať zväčšená úsečka: Počítame $\frac{7}{3}$ zo 6 cm: $\frac{7}{3} \cdot 6\text{ cm} = \frac{42}{3}\text{ cm} = 14\text{ cm}$
Dĺžka zväčšenej úsečky je 14 cm.

22. Zväčši úsečku

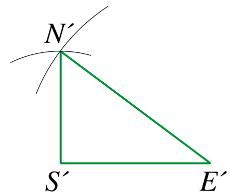
a) dĺžky 12 cm v pomere 5 : 3,
b) dĺžky 6 cm v pomere 4 : 3,
c) dĺžky 9,5 cm v pomere 5 : 2,
d) dĺžky 1,4 dm v pomere 8 : 7,
e) dĺžky 85 mm v pomere 4 : 1.
Úlohu rieš **konštrukčne** a potom **výpočtom**.

23. K trojuholníku SEN so stranami $s = 10$ cm, $e = 6$ cm, $n = 8$ cm zostroj podobný trojuholník $S'E'N'$ s koeficientom podobnosti $k = 0{,}25$.

Riešenie 23.

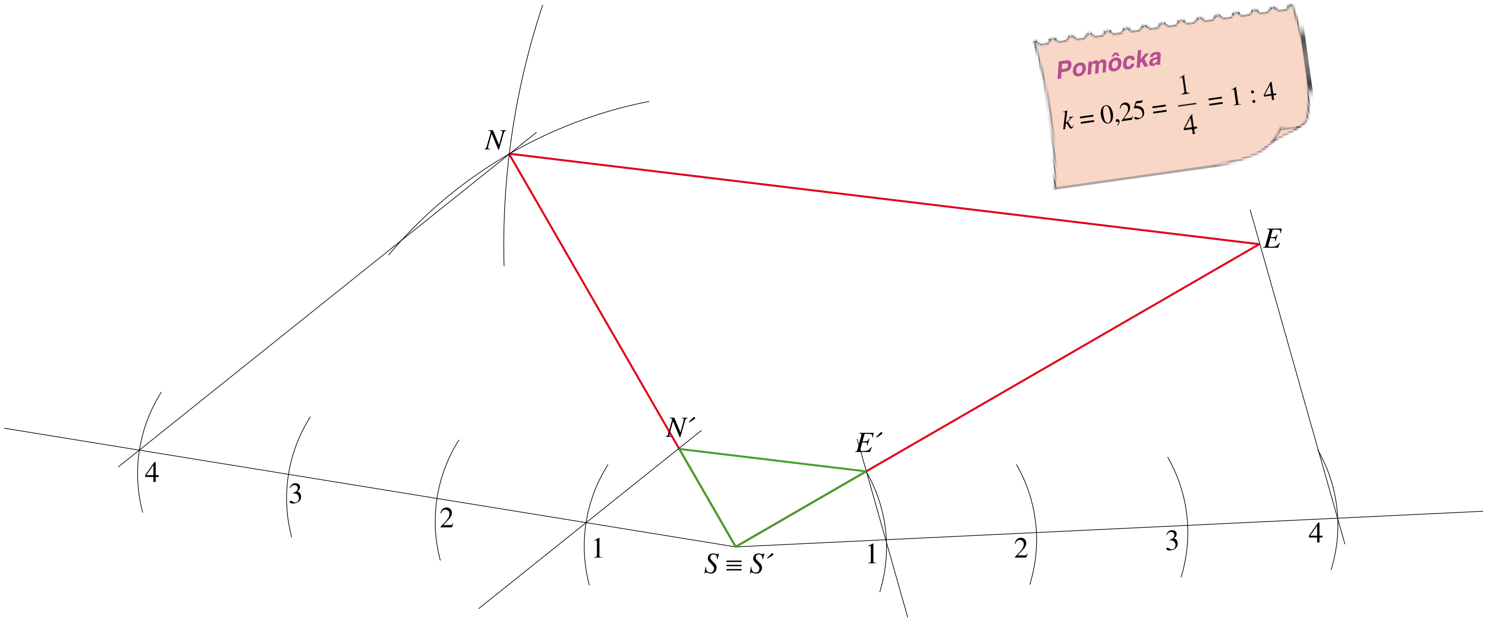
Úlohu môžeme riešiť tak, že si dĺžky strán podobného trojuholníka vypočítame a potom ho zostrojíme.
Ak trojuholník $S'E'N'$ je **obraz**, trojuholník SEN je **vzor**, v podobnosti s koeficientom $k = 0{,}25$, potom pre strany trojuholníkov platí:

$s' = k \cdot s \qquad s' = 0{,}25 \cdot 10 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ cm}$
$e' = k \cdot e \qquad e' = 0{,}25 \cdot 6 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ cm}$
$n' = k \cdot n \qquad n' = 0{,}25 \cdot 8 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$



Môžeme ju však riešiť aj tak, že narysujeme trojuholník SEN a potom konštrukčne zmenšíme $(0 < k < 1)$ jeho strany.

Pomôcka
$k = 0{,}25 = \frac{1}{4} = 1 : 4$



Dĺžky strán trojuholníka $S'E'N'$ sú jednou štvrtinou dĺžok strán trojuholníka SEN.

24. Zostroj podobný trojuholník:

a) k trojuholníku ABC so stranami $a = 4$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 9$ cm s koeficientom podobnosti $k = 2$,
b) k trojuholníku DEF so stranami $d = 5$ cm, $e = 7$ cm, $|\sphericalangle DFE| = 60°$ s koeficientom podobnosti $k = 1{,}5$,
c) k trojuholníku LMN so stranou $n = 6$ cm, $|\sphericalangle LMN| = 30°$, $|\sphericalangle MLN| = 40°$ s koeficientom podobnosti $k = 2{,}5$.

Viete, že...?

Keď hovoríme o geometrii, najčastejšie počujeme „Euklidova geometria“.
Euklides okolo roku 325 pred n. l. v Alexandrii vypracoval svoje *Stoicheia* (*Základy*), ktoré sa stali skutočnými základmi matematickej vedy. Napísal: „Bod je to, čo sa nedá rozdeliť“.
Zdroj: internet

Problémová úloha

Spracujte informácie o živote a diele Euklida z Alexandrie.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Obvod trojuholníka $A´B´C´$ podobného s trojuholníkom ABC so stranami a = 2,5 cm, b = 4,5 cm, c = 3,5 cm, ak koeficient podobnosti k = 2,5, sa rovná:

A 26,25 cm B 13 cm C 4,2 cm D 9 cm

2. Obsah trojuholníka $A´B´C´$ podobného s trojuholníkom ABC, ak koeficient podobnosti k = 0,5 a obsah trojuholníka ABC je 15 cm^2 sa rovná:

A 112,5 cm^2 B 7,5 cm^2 C 30 cm^2 D 3,75 cm^2

3. Mierka mapy je 1 : 250 000. Vzdialenosť medzi mestami A a B je na nej znázornená úsečkou dĺžky 7,5 cm. Skutočná vzdialenosť medzi mestami A a B v km je:

A 3 km B 7,5 km C 9,5 km D 18,75 km

4. Mierka mapy je 1 : 50 000. Vzdialenosť medzi mestami A a B je v skutočnosti 35 km.
Na mape je vzdialenosť A a B:

A 7 cm B 70 cm C 5 cm D 50 cm

5. Výška stĺpa pouličného osvetlenia je 4,5 m. Tyč dlhá 1 m postavená kolmo k zemi vrhá počas dňa tieň 4 dm dlhý. Dĺžka tieňa pouličného osvetlenia je v tom istom čase:

A 1,125 m B 0,5 m C 1,8 m D 0,45 m

6. Vysoké Tatry
Na turistickej mape s mierkou 1 : 50 000 je vzdialenosť medzi Starým Smokovcom a Štrbským Plesom 24 cm.
Skutočná vzdialenosť medzi Starým Smokovcom a Štrbským Plesom je:

A 20,8 km B 12 km C 48 km D 24 km

7. Janko si na modelárskom krúžku zložil model auta. Bol zhotovený v mierke 1 : 45. Model mal dĺžku 11,6 cm, šírku 3,8 cm a výšku 3,5 cm. Skutočné rozmery auta boli v cm:

A 522 × 171 × 157,5 B 533,6 × 174,8 × 161 C 257 × 84 × 77 D 387 × 118 × 128

7 Štatistika

7.1 Štatistické prieskumy, triedenie, početnosť, tabuľky

Čo sme sa už učili

Zostavovať **tabuľky**.
Zostrojovať **grafy** a **diagramy**.
Čítať údaje z tabuliek.
Čítať údaje z grafov či diagramov.
Počítať **percentá**, **aritmetický priemer**.
Porovnávať pomocou pomeru.

To všetko využijeme pre oblasť matematiky, ktorá sa volá **štatistika**.
Podľa toho, čím sa štatistika zaoberá, hovoríme napríklad **o demografickej štatistike**, ktorá sa zaoberá zberom, triedením a spracovaním údajov o obyvateľstve (narodenia, úmrtia, sobáše, rozvody, sťahovanie a pod.).
Na vyjadrenie vzťahu medzi zisťovanými údajmi sa často používajú pomer a percentá.

1. Z 500 osôb sa proti tuberkulóze zaočkovalo 50 osôb. Vyjadri **pomerom** počet zaočkovaných osôb k celkovému počtu osôb. Uveď v **percentách** počet zaočkovaných osôb z celkového počtu osôb.

Riešenie 1.

Pomer počtu zaočkovaných osôb k celkovému počtu osôb je 50 : 500, čo je **1 : 10**.
V percentách je počet zaočkovaných osôb z 500 osôb **10 %**.

Pomer 1 : 10 v tejto úlohe znamená, že na **10** osôb pripadá **1 zaočkovaná osoba**.

Pomôcka
100 % je 500,
1 % je 500 : 100 = 5
50 osôb je 50 : 5 = 10 %.

2. Otec má 40 rokov a jeho syn má 10 rokov. Vyjadri **pomerom** vek otca k veku syna.

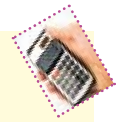
Riešenie 2.

Pomer otcovho veku k veku syna je 40 : 10, čo možno vyjadriť pomerom **4 : 1**.

Ak bol zadaný pomer veku matky a veku dcéry 5 : 2, mohli by sme povedať, že ak by mala matka 50 rokov, jej dcéra by mala 20 rokov.

3. V deviatom ročníku bolo na škole 45 chlapcov a 10 dievčat.

a) Vyjadri pomerom počet chlapcov k počtu dievčat.
b) Uveď v percentách počet dievčat z celkového počtu žiakov v 9. ročníku.
c) Uveď v percentách počet chlapcov z celkového počtu žiakov v 9. ročníku.



4. V mestskom parku je viac druhov stromov. Najviac je bukov – 48 a dubov – 32.
Celkový počet stromov v parku je 96.
a) Vyjadri pomerom počet bukov k počtu dubov v parku.
b) Uveď v percentách počet bukov z celkového počtu stromov v parku.
c) Uveď v percentách počet dubov z celkového počtu stromov v parku.

5. Na farme chovajú zajace a sliepky. Počet zajacov je 4-krát menší ako počet sliepok.
a) Zapíš uvedený údaj pomocou pomeru. **b)** Vyjadri uvedený údaj pomocou percent.

Štatistika pomáha **rozlišovať** medzi **pravdepodobným** a **nepravdepodobným** a aj medzi **dôležitým** a **nedôležitým**. Napríklad:

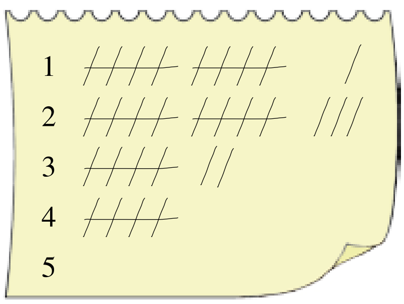
- Ak niekto povie, že v 9. A triede je priemerná známka z matematiky 2,1, môže a nemusí to byť pravda. Či je to pravda si overíme tak, že zistíme akú známku mal z matematiky každý žiak 9. A triedy a vypočítame z nich priemer. Ak je vypočítaná priemerná známka 2,1, tvrdenie je pravdivé.
- O obci so 720 domácnosťami napísali, že 20 % domácností nemá ani jeden počítač. Ak si **náhodne vyberieme** 100 domácností a zistíme, že z nich 18 % domácností nemá ani jeden počítač, je pravdepodobné, že uvedený údaj je pre túto obec pravdivý.

V štatistike získavame **číselné informácie** o rôznych **skupinách** osôb, predmetoch, udalostiach, javoch **pozorovaním**, **meraním** a **skúmaním**. Získané údaje potom **triedime**, podľa potreby spracúvame do **tabuliek**, znázorňujeme pomocou **grafov** alebo **diagramov**.
Kvôli informáciám, ktoré chceme získať, sa často realizujú **prieskumy**.

6. Deviataci uskutočnili v škole prieskum o známkach žiakov. Zisťovali, aká je priemerná známka z matematiky v jednotlivých ročníkoch. Kristína a Evka zisťovali známky z matematiky u piatakov. Ich zisťovanie je uvedené v riešení 6.

Riešenie 6.

Dievčatá si zapisovali odpovede piatakov čiarkami na papier.



Výsledky prieskumu zapísali do nasledujúcej tabuľky.

	piataci				
známky	1	2	3	4	5
počet žiakov	11	13	7	5	0

Z tabuľky vypočítali priemernú známku z matematiky u piatakov.
Použili aritmetický priemer, pričom výsledok zaokrúhlili na stotiny.
Kristína použila tento zápis:

$$\bar{x} = (1 \cdot 11 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0) : (11 + 13 + 7 + 5 + 0) =$$
$$= 78 : 36 = 2{,}1666... \doteq 2{,}17$$

Označenie $\bar{x}$ pre aritmetický priemer budeme používať aj v ďalšom texte.

Priemerná známka z matematiky u žiakov piateho ročníka bola približne 2,17.

Kontrolu výpočtu aritmetického priemeru urobila Evka takto:

známka	počet žiakov	hodnota známok
1	11	$1 \cdot 11 = 11$
2	13	$2 \cdot 13 = 26$
3	7	$3 \cdot 7 = 21$
4	5	$4 \cdot 5 = 20$
5	0	$5 \cdot 0 = 0$
spolu	36	78

Aritmetický priemer: $\bar{x} = 78 : 36 \doteq 2{,}17$.

7. Peter zameral svoj projekt z biológie na zisťovanie počtu a druhov stromov, ktoré rastú v blízkom zámockom parku. Mal tiež vypočítať, priemerne koľko stromov sa vyskytuje na 1 ha územia parku. Zámocký park má rozlohu 3 ha.

Riešenie 7.

Peter si pomocou sčítacích čiarok zapisoval počet stromov jednotlivých druhov. Zistil, že v parku sú 3 druhy stromov: lipa, topoľ a gaštan. Líp napočítal 22, topoľov 18 a gaštanov 14.

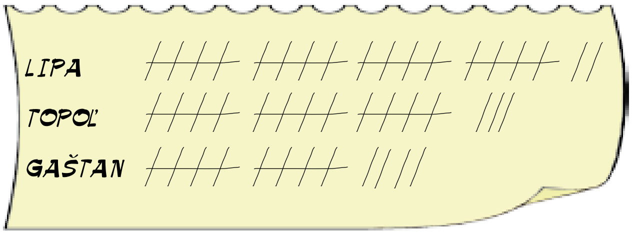



foto: Martin Hlauka (Pescan)

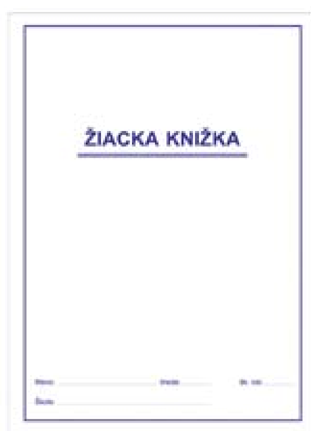
Mal vypočítať, priemerne koľko stromov sa vyskytuje v parku na 1 ha.
Počet stromov delil počtom hektárov: 54 : 3 = 18.
Na jednom hektári sa nachádza priemerne 18 stromov.

Činnosti – **prieskumy**, ktorými získavame štatistické údaje, ako napríklad zisťovanie počtu známok z matematiky, zisťovanie počtu stromov a ich druhov, nazývame **štatistickým zisťovaním** alebo **štatistickým prieskumom**.
Predmetom štatistického zisťovania je **štatistický súbor**.
V našich úlohách tvoria štatistický súbor napríklad piataci alebo stromy.
Štatistický súbor tvoria **štatistické jednotky**. Počet štatistických jednotiek určuje **rozsah** štatistického súboru.
V našich úlohách sú štatistickými jednotkami jednotliví žiaci 5. ročníka (rozsah súboru je 36), každý strom v zámockom parku (rozsah súboru je 54), o ktorých zisťujeme určité údaje.
Štatistickej jednotke zisťujeme zvolený **znak** z hľadiska jeho číselnej hodnoty, kvality, druhu atď.
Štatistickým znakom v prípade žiakov 5. ročníka bola **známka** vyjadrená číslom 1 až 5.
V prípade stromov bol štatistickým znakom **druh** vyjadrený slovne.
Pojem, ktorým označujeme, koľkokrát sa objavil hľadaný štatistický znak, nazývame **početnosť znaku (absolútna početnosť znaku)**.

Napríklad: znak – jednotka z matematiky mal početnosť 11
znak – päťka z matematiky mal početnosť 0
znak – lipa mal početnosť 22
znak – gaštan mal početnosť 14

Tabuľky, ktoré si zostavujeme pri riešení úloh zo štatistiky, musia **spĺňať určité podmienky**.
Dohodneme sa, že si zatiaľ budeme tabuľky zostavovať tak, aby sme úlohy vyriešili čo najjednoduchšie podľa svojich predchádzajúcich vedomostí.
Keďže ste sa aritmetický priemer a percentá už učili, počítajte ich v úlohách samostatne.
Výsledok si potom skontrolujte.

8. Pred koncom školského roka Juraj zisťoval, aká známka mu vychádza z jednotlivých predmetov. Spočítal si všetky známky: z matematiky má 2 jednotky, 3 dvojky a 1 trojku, z chémie 1 trojku a 1 dvojku, z fyziky 2 jednotky, 1 trojku a 1 štvorku, z dejepisu 2 jednotky a 1 dvojku, zo slovenského jazyka 3 jednotky, 2 dvojky a 3 trojky, z anglického jazyka získal 4 jednotky, 1 dvojku a 1 štvorku.



Juraj si potom vypočítal svoje priemerné známky z jednotlivých predmetov.
Dospel k týmto záverom:
Z matematiky by som mohol mať 2.
Z chémie by som mohol mať 2.
Z fyziky by som mohol mať 3.
Z dejepisu by som mohol mať 1.
Zo slovenského jazyka by som mohol mať 3.
Z anglického jazyka by som mohol mať 1.
Ktoré z Jurajových záverov môžeme považovať za správne, ak zaokrúhľujeme priemernú známku z predmetu aritmeticky na celé číslo?

Riešenie 8.

Urobme si dve tabuľky na riešenie tejto úlohy.

známka	počet známok z					
	matematiky	chémie	fyziky	dejepisu	slovenského jazyka	anglického jazyka
1	2		2	2	3	4
2	3	1		1	2	1
3	1	1	1		3	
4			1			1
5						
počet známok	6	2	4	3	8	6

Vypočítame priemerné známky z jednotlivých predmetov (priemernú známku zaokrúhlime na desatiny):

matematika: $\bar{x} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3) : 6 = 11 : 6 = 1{,}833 ... \doteq 1{,}8$

chémia: $\bar{x} = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3) : 2 = 5 : 2 = 2{,}5$

fyzika: $\bar{x} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4) : 4 = 9 : 4 = 2{,}25$

dejepis: $\bar{x} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) : 3 = 4 : 3 \doteq 1{,}3$

slovenský jazyk: $\bar{x} = (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) : 8 = 16 : 8 = 2$

anglický jazyk: $\bar{x} = (4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4) : 6 = 10 : 6 = 1{,}666 ... \doteq 1{,}7$

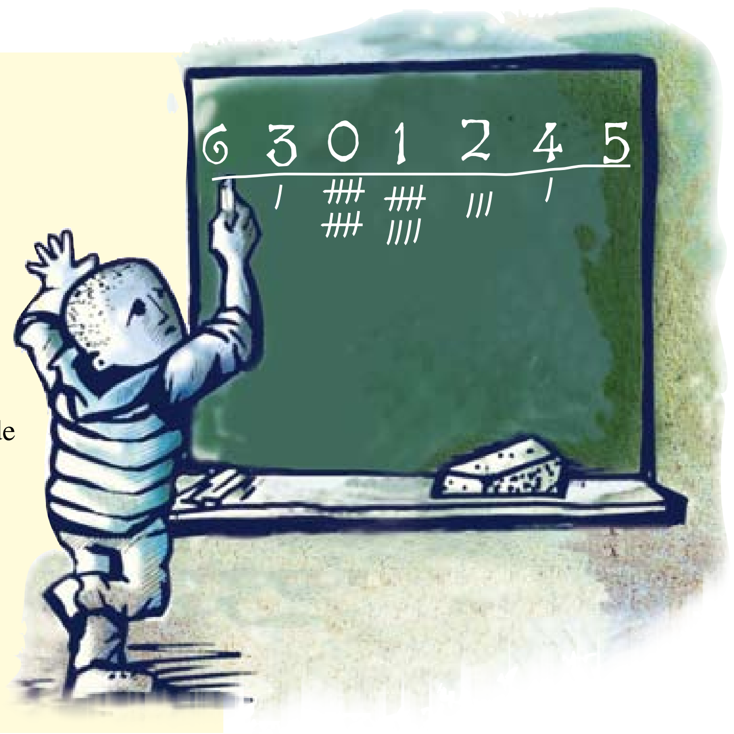
predmet	priemerná známka	zaokrúhlené na celé čísla
matematika	1,8	2
chémia	2,5	3
fyzika	2,25	2
dejepis	1,3	1
slovenský jazyk	2	2
anglický jazyk	1,7	2

Správne závery:
Z matematiky by som mohol mať 2.
Z dejepisu by som mohol mať 1.

O tabuľkách ste sa učili v predchádzajúcich ročníkoch.
Učili ste sa, čo sú to **riadky**, **stĺpce**, **záhlavie tabuľky**, **legenda**...
Tabuľky ste určite vytvárali aj v **tabuľkovom kalkulátore**.

9. Na hodine občianskej náuky zisťovali žiaci počet svojich súrodencov.
Každý žiak triedy prišiel k tabuli a pod príslušný počet súrodencov napísal čiarku.

Tabuľa po tomto zisťovaní vyzerala takto:



Zapíš získané údaje do tabuľky a vypočítaj:

a) priemerný počet súrodencov na jedného žiaka v triede
b) koľko percent žiakov z triedy má viac ako 2 súrodencov
c) koľko percent žiakov z triedy nemá súrodenca

Výsledky v **a)** zaokrúhli na jednotky nahor.
Výsledky v **b)** a v **c)** zaokrúhli aritmeticky na stotiny.

10. V školskom bufete si predavačka zapisovala počet predaných fliaš rôznych nápojov. Jej zápis vyzeral takto:

Zisti, ktorý nápoj sa na základe jeho najväčšieho predaja v dl rozhodla predavačka objednať.

Pomôcka
1 liter = 10 decilitrov
1 l = 10 dl

Viete, že...?

Základom ceruzky je grafit (tuha), ktorý je chemickou modifikáciou uhlíka. Jeho názov pochádza z gréckeho slova grafien, čo znamená písať. Grafit bol objavený v 16. storočí. Prvá grafitová ceruzka vznikla až v roku 1662. O viac ako 100 rokov prišiel Napoleonov dvorný vynálezca Jacques Conté na to, že je možné na náplň ceruziek použiť zmes kaolínu, grafitu a vody. Táto zmes je za tepla tvárna a možno ju vsunúť do drážky vytvorenej v kúsku dreva. Tak sa vyrábajú ceruzky dodnes.

Zdroj: http://akotofunguje.hladas.sk/clanok/veda-a-technika/produkty/ako-sa-vyrabaju-ceruzky-a-pastelky/

11. Aké písacie potreby sa v škole najviac používajú?
Tajomníčka školy predložila učiteľom zoznam písacích potrieb, do ktorého každý učiteľ vyznačil svoju objednávku. Tabuľka, do ktorej si tajomníčka vpísala výsledky objednávky, vyzerala takto:

	počet v kusoch	cena za 1 kus (v €)
obyčajná ceruzka	24	0,23
gélové pero	10	0,29
guľôčkové pero	5	1,32
grafitová ceruzka	5	0,12
keramické pero	0	2,3
guľôčkové trojfarebné pero	2	7,64
guľôčkové pero – ťahák	12	0,49

Z tabuľky si vypracovala nasledujúce odpovede:
- Celková suma objednávky je ...
- Najviac zaplatíme za ...
- Najmenej zaplatíme za ...
- V škole je 25 učiteľov, takže na jedného učiteľa pripadá priemerne ... objednaných písacích potrieb.
- Ceruzky tvorili ... % objednávky.
- Perá tvorili ... % objednávky.

Doplň do odpovedí správne údaje.

Projektová úloha

Internetový predaj
Vytvorte si v triede štvorčlenné skupiny. Zistite na internete, aká je ponuka rôznych kancelárskych potrieb a v skupinách ich spracujte do reklamného letáka tak, aby bola ponuka čo najvýhodnejšia pre zákazníkov.

12. Na hodine telesnej výchovy dosiahli žiaci jednej desaťčlennej skupiny v hode guľou nasledujúce výkony: Juraj – 6,4 m, Fero – 5,3 m, Noro – 4,2 m, Andrej – 6,7 m, Karol – 5,6 m, Jano – 8,6 m, Milan – 9,1 m, Tomáš – 7,2 m, Dávid – 8,1 m, Miro – 6 m.
a) Zapíš získané údaje do tabuľky.
b) Vypočítaj priemernú dĺžku hodu.
c) Koľko žiakov má nadpriemernú dĺžku hodu? Koľko je to percent vzhľadom na danú skupinu?
d) Koľko žiakov má podpriemernú dĺžku hodu? Koľko je to percent vzhľadom na danú skupinu?

Riešenie 12.

a) Získané údaje zapíšeme do tabuľky.
Zvolíme si tabuľku, v ktorej prvý riadok obsahuje mená žiakov a druhý riadok ich výkony v hode guľou.

	Hod guľou									
meno žiaka	Juraj	Fero	Noro	Andrej	Karol	Jano	Milan	Tomáš	Dávid	Miro
dĺžka hodu v m	6,4	5,3	4,2	6,7	5,6	8,6	9,1	7,2	8,1	6

b) Priemernú dĺžku hodu guľou vypočítame tak, že sčítame všetky dĺžky hodov a potom súčet vydelíme počtom hodov (počtom žiakov, ktorí hádzali guľou).
(6,4 + 5,3 + 4,2 + 6,7 + 5,6 + 8,6 + 9,1 + 7,2 + 8,1 + 6) : 10 = 67,2 : 10 = 6,72

Priemerná dĺžka hodu guľou je 6,72 m.

c) Počet žiakov, ktorí majú **nadpriemernú dĺžku hodu je 4**:
Jano 8,6 m, Milan 9,1 m, Tomáš 7,2 m, Dávid 8,1 m.
Vypočítame, koľko percent žiakov má **nadpriemernú dĺžku hodu**:
štyria žiaci z desiatich žiakov sú $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$, čo je 40 %.

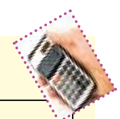
Nadpriemernú dĺžku hodu má 40 % žiakov.

Počet percent môžeme počítať aj takto:
100 %................ 10
1 %................ 10 : 100 = 0,1
x %................ 4
x = 4 : 0,1 = 40 %

d) Spočítame, koľko žiakov má **podpriemernú dĺžku hodu**. Je ich **6**:
Juraj 6,4 m, Fero 5,3 m, Noro 4,2 m, Andrej 6,7 m, Karol 5,6 m, Miro 6 m.

Nadpriemernú dĺžku hodu dosiahlo 40 % žiakov (štyria z desiatich),
podpriemernú dĺžku hodu dosiahlo 60 % žiakov (šiesti z desiatich).

13. Na súťaži v skoku do diaľky dievčat mali súťažiace nasledujúce dĺžky skokov:
Anna – 120 cm, Beáta – 142 cm, Cila – 135 cm, Dana – 128 cm, Eva – 121 cm, Gizela – 135 cm, Hana – 136 cm, Iveta – 123 cm, Jana – 134 cm, Karina – 125 cm.
a) Zapíš získané údaje do tabuľky.
b) Vypočítaj priemernú dĺžku skoku v súťaži.
c) Koľko dievčat má nadpriemernú dĺžku skoku? Koľko je to percent vzhľadom na danú skupinu?
d) Koľko dievčat má podpriemernú dĺžku skoku? Koľko je to percent vzhľadom na danú skupinu?



14. Prieskum výskytu dievčenských mien v škole zapísali do nasledujúcej tabuľky:

	Dievčenské mená											
meno	Jana	Dana	Eva	Erika	Júlia	Terézia	Kristína	Marcela	Zuzana	Petra	Monika	Viktória
početnosť	10	5	14	2	1	5	15	8	3	1	7	9

a) Vypočítaj, koľko percent z celkového počtu dievčat má meno Kristína.
b) Vypočítaj, koľko percent z celkového počtu dievčat má meno Viktória.

15. Na jednej strednej škole zisťovali, koľko minút trvá žiakom cesta do školy. Počty minút uvádzali zaokrúhlené na celé čísla. Výsledky v jednej triede vyzerali takto:

	Dochádzanie do školy										
čas (v minútach)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
početnosť (počet žiakov)	1	5	7	1	2	3	0	0	1	1	4

a) Vypočítaj, priemerne koľko minút trvá cesta do školy jednému žiakovi.
b) Vypočítaj, koľko percent žiakov príde do školy za čas dlhší, ako je priemerný čas príchodu do školy.
c) Vypočítaj, koľko percent žiakov príde do školy za čas kratší, ako je priemerný čas príchodu do školy.

16. V knižnici robili prieskum na náhodne vybranej vzorke 100 ľudí. Pýtali sa ich, koľko kníh prečítali za posledný rok. Najväčší počet prečítaných kníh bol 10. Výsledok prieskumu je uvedený v nasledujúcej tabuľke.

	Knihy										
počet prečítaných kníh	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
početnosť (počet ľudí)	12	52	11	3	5	10	0	0	1	5	1

a) Vypočítaj priemerný počet kníh, ktorý prečítal jeden človek z oslovených ľudí za rok.
b) Vypočítaj, koľko percent oslovených ľudí prečítalo menej ako 2 knihy za rok.
c) Vypočítaj, koľko percent oslovených ľudí prečítalo viac ako 3 knihy za rok.
d) Ak požičanie jednej knihy stálo v priemere 0,35 €, priemerne koľko eur zaplatil jeden človek za prečítané knihy?

V štatistike okrem početnosti znaku vyjadrenej prirodzeným číslom (absolútna početnosť) hovoríme aj o relatívnej početnosti.

Relatívna početnosť je podiel **absolútnej početnosti** znaku a **rozsahu** súboru. V praxi býva zvykom násobiť relatívnu početnosť číslom 100, čím ju vyjadríme v **percentách**.

Viete, že...?

Slovo štatistika má koreň v latinskom slove ***status***.
Malo dvojaký význam:
1. stav určitých dejov
2. štát ako politická organizácia krajiny (spoločenstva)

V minulosti sa štatistika využívala prevažne v rámci ekonomiky a demografie.

Zdroj: Pavlič, G.: Školská encyklopédia matematiky. Príroda : Bratislava, 2001

17. V rámci ochrany života a zdravia zisťovali študenti zdravotníckej školy na náhodne vybranej skupine ľudí, koľko dní z kalendárneho roka ostali kvôli ochoreniu doma. Tri dni ostalo doma 28 ľudí, 7 dní ostalo doma 26 ľudí, 14 dní ostalo doma 15 ľudí a 21 dní ostalo doma 11 ľudí. Viac dní doma neostal nikto z opýtaných. Celkový počet ľudí, ktorých náhodne oslovili, bol 200.
Uvedené údaje zapíš do tabuľky, uveď absolútnu početnosť a relatívnu početnosť pre zisťovaný znak štatistickej jednotky v súbore s daným rozsahom.

Riešenie 17.

Štatistickým súborom sú ľudia oslovení študentmi zdravotníckej školy. Rozsah štatistického súboru je 200. Štatistický znak je počet dní, keď kvôli chorobe ostali doma. Absolútna početnosť je počet ľudí vyjadrená prirodzeným číslom. Zistené údaje zapíšeme do tabuľky, v ktorej uvedieme absolútnu aj relatívnu početnosť. Relatívnu početnosť vyjadríme zlomkom aj percentami.

počet dní, keď ostali kvôli ochoreniu doma	**absolútna početnosť**	**relatívna početnosť** vyjadrená	
		zlomkom (podielom)	**percentami**
0 dní	120	$\frac{120}{200}$	60 %
3 dni	28	$\frac{28}{200}$	14 %
7 dní	26	$\frac{26}{200}$	13 %
14 dní	15	$\frac{15}{200}$	7,5 %
21 dní	11	$\frac{11}{200}$	5,5 %

Zlomky môžeš upraviť na základný tvar. Napríklad:
$$\frac{120}{100} = \frac{6}{5}$$

18. Na podporu Vysokých Tatier sa rozhodli žiaci 9. ročníkov kupovať len určitý druh minerálnej vody. Zaujímalo ich, koľko ľudí v ich najbližšom okolí sa pripojilo k akcii *Vodou pomôžeme našim horám* a koľko fliaš minerálky kúpili za posledných 5 dní. Celkovo oslovili 50 náhodne vybraných ľudí. Z nich si dvadsaťosem kúpilo 1 fľašu, desať kúpilo 3 fľaše, traja kúpili 4 fľaše, sedem kúpilo 5 fliaš, dvaja si nekúpili žiadnu fľašu.
Uvedené údaje zapíš do tabuľky, uveď absolútnu a relatívnu početnosť pre zisťovaný znak štatistickej jednotky v súbore s daným rozsahom.

19. VYSIELAČE

Rozhlasový vysielač Stebnícka Magura sa nachádza 6 km severne od Bardejova, niekoľko metrov pod vrcholom Stebníckej Magury. Bol dokončený v roku 1975, kedy z neho zahájili aj televízne vysielanie.
Vysielač patrí medzi najvyššie vysielače na Slovensku.
Prehľad (niektorých) najvyšších televíznych a rozhlasových vysielačov na Slovensku je v tabuľke.

názov vysielača	výška vysielača	najbližšie mesto
Dubník	318 m	Prešov
Jarok	133 m	Nitra
Kamzík	194 m	Bratislava
Kráľova hoľa	137 m	Poprad
Krížava	116 m	Žilna
Magurica	98 m	Snina
Magurka	80 m	Námestovo
Nad Oborou	81 m	Trenčín
Stebnícka Magura	81 m	Bardejov
Suchá Hora	312 m	Kremnica
Veľká Javorina	80 m	Stará Turá
Zobor	64 m	Nitra


foto Clowiecik

a) Vyjadri pomerom počet uvedených vysielačov nižších ako 100 m k počtu vysielačov vyšších ako 100 m.
b) Zostroj pomocou PC vhodný graf pre uvedené údaje.

Projektová úloha
Zistite čo najviac informácií o niektorom z uvedených vysielačov, napr. o tom, ktorý sa nachádza vo vašom regióne. Spracujte ich formou prezentácie. Porovnajte výkon vášho vysielača s výkonmi iných vysielačov z tabuľky. Zaraďte uvedené vysielače podľa oblasti, v ktorej sa nachádzajú, do príslušného kraja.

20.

Boris dostal úlohu od rodičov zapisovať si denne v priebehu týždňa počet kilometrov, ktoré prejdú na aute z domu do novej školy.
Hľadajú najkratšiu cestu do školy.

Borisov zápis vyzeral takto:

pondelok → stav tachometra - dom....... 45 281 km
stav tachometra - škola....... 45 290 km
utorok → stav tachometra - dom....... 45 315 km
stav tachometra - škola...... 45 330 km
streda → stav tachometra - dom....... 45 385 km
stav tachometra - škola...... 45 397 km
štvrtok → stav tachometra - dom....... 45 400 km
stav tachometra - škola...... 45 416 km
piatok → stav tachometra - dom....... 45 425 km
stav tachometra - škola...... 45 434 km

a) Zapíš do tabuľky hodnoty Borisovho zisťovania a zostroj vhodný diagram pre túto tabuľku, napríklad v EXCELi.
b) Vypočítaj, koľko litrov benzínu minuli v tomto týždni na cesty do školy, ak priemerná spotreba ich auta je 5,6 litra benzínu na 100 km.
c) Vypočítaj, koľko eur zaplatia za uvedené dni na cesty do školy, ak 1 l benzínu stojí 1,545 €. Výsledky zaokrúhli aritmeticky na tisíciny.

7.2 Grafické znázornenie údajov. Grafy a diagramy, ich tvorba, čítanie a interpretácia

Čo sme sa už učili

Učili sme sa zapisovať údaje do tabuliek.
Z tabuliek čítať informácie.
Z údajov v tabuľkách tvoriť rôzne grafy a diagramy.
Počítať aritmetický priemer.
Počítať percentá.

V tejto kapitole si zopakujeme vedomosti **o diagramoch** a **grafoch** a rozšírime ich o nové informácie.
Grafy a diagramy umožňujú niektoré informácie z tabuliek ukázať **zrozumiteľnejšie**, **prehľadnejšie** a **jednoduchšie**.
Údaje z tabuliek sme doteraz znázorňovali hlavne stĺpcovým a kruhovým diagramom v EXCELi.

Kruhové diagramy používame predovšetkým pri počítaní s percentami.
Stĺpcové diagramy používame pri porovnávaní viacerých údajov.
Teraz si prepočítame viacero úloh podobných tým, ktoré ste už možno počítali v predchádzajúcich ročníkoch.

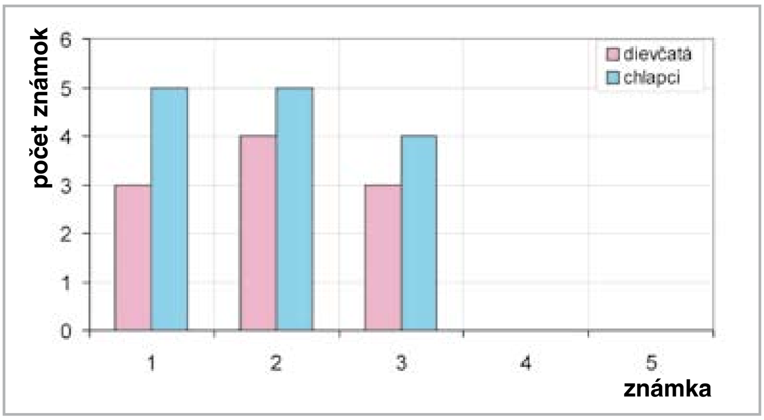
1. Učiteľka matematiky sa na začiatku školského roka opýtala žiakov, akú známku by chceli mať v deviatom ročníku. Zaujímala ju priemerná známka z matematiky, ktorá by mohla byť na konci deviateho ročníka, ak by sa priania žiakov splnili. Známky si zapisovala postupne, ako ich žiaci hovorili, zvlášť u dievčat a zvlášť u chlapcov.
Dievčatá: 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 1.
Chlapci: 3, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 1.
Výsledky zisťovania spracovali spoločne. Znázornili si ich aj graficky.

Riešenie 1.

Výsledky zisťovania zapísali najprv do nasledujúcej tabuľky.

	Známky v triede					
známka	1	2	3	4	5	spolu
dievčatá	3	4	3	0	0	10
chlapci	5	5	4	0	0	14
spolu	8	9	7	0	0	24

Potom vypočítali priemernú známku žiakov v triede:
$\bar{x} = (8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5) : 24 = (8 + 18 + 21) : 24 = 47 : 24 = 1{,}958 ... \doteq 1{,}96$
Výsledok zaokrúhlili aritmeticky na dve desatinné miesta.
Priemerná známka žiakov z matematiky by mohla byť 1,96.
Aby bolo lepšie vidieť, ktoré známky si žiaci volili najčastejšie, zostrojili stĺpcový diagram.



Čo by sa dalo z diagramu ešte odčítať?

Na diagrame vidieť, že dievčatá najviac volili známku 2 a chlapci rovnako známku 1 a 2.

2. V škole organizujú každý rok zber papiera. Papier zbierajú 5 dní – od pondelka do piatka. Vedúci zberu zapisuje množstvo papiera do tabuľky po jednotlivých ročníkoch.

ročníky	Zber papiera (kg)				
	pondelok	**utorok**	**streda**	**štvrtok**	**piatok**
5. ročník	120	155	96	45	80
6. ročník	97	85	110	115	78
7. ročník	40	50	46	75	90
8. ročník	35	78	82	75	80

a) Vypočítaj priemerný počet kilogramov papiera vyzbieraný v jednotlivých dňoch na jeden ročník.
b) Vypočítaj, priemerne koľko kilogramov papiera vyzbierali za deň žiaci jednotlivých ročníkov.
c) Znázorni údaje uvedené v tabuľke pomocou diagramov.

Riešenie 2.

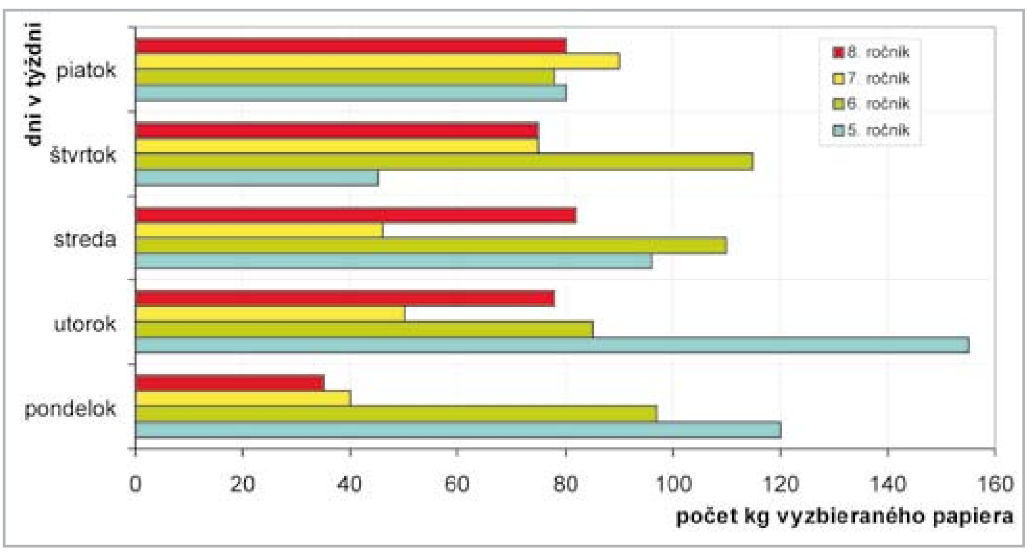
Aby sme dané úlohy rýchlejšie vyriešili, je vhodné doplniť tabuľku o súčty v riadkoch aj stĺpcoch.

ročníky	Zber papiera (kg)					
	pondelok	**utorok**	**streda**	**štvrtok**	**piatok**	**spolu**
5. ročník	120	155	96	45	80	**496**
6. ročník	97	85	110	115	78	**485**
7. ročník	40	50	46	75	90	**301**
8. ročník	35	78	82	75	80	**350**
spolu	**292**	**368**	**334**	**310**	**328**	**1 632**

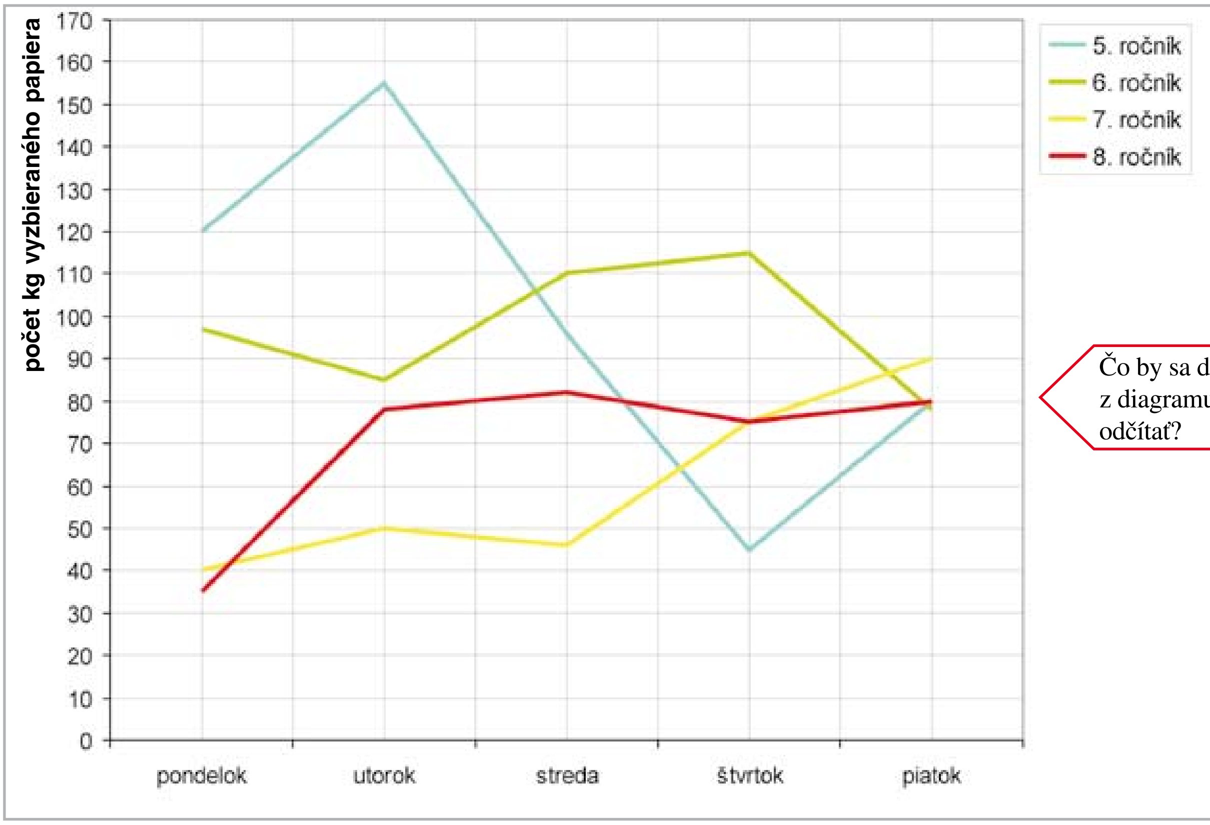
a) Počítame priemerný počet kilogramov papiera vyzbieraný v jednotlivých dňoch na jeden ročník.
Priemerné množstvo papiera vyzbierané v **pondelok**: 292 : 4 = **73 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané v **utorok**: 368 : 4 = **92 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané v **stredu**: 334 : 4 = **83,5 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané v **štvrtok**: 310 : 4 = **77,5 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané v **piatok**: 328 : 4 = **82 kg**

b) Počítame priemerný počet kilogramov papiera vyzbieraný v jednotlivých ročníkoch za deň.
Priemerné množstvo papiera vyzbierané za **deň** v **5.** ročníku: 496 : 5 = **99,2 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané za **deň** v **6.** ročníku: 485 : 5 = **97 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané za **deň** v **7.** ročníku: 301 : 5 = **60,2 kg**
Priemerné množstvo papiera vyzbierané za **deň** v **8.** ročníku: 350 : 5 = **70 kg**

c) Údaje uvedené v tabuľke môžeme znázorniť pomocou rôznych diagramov. Použijeme napr. pruhový diagram:



Vhodné je aj znázornenie spojnicovým (čiarovým) diagramom:



Čo by sa dalo z diagramu ešte odčítať?

3. POČET OBYVATEĽOV MESTA BRATISLAVY

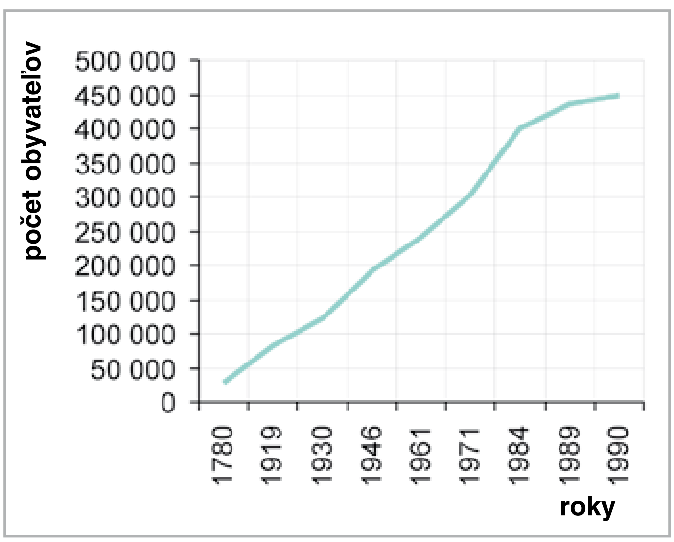
V nasledujúcej tabuľke je uvedený počet obyvateľov Bratislavy aj v čase, keď sa nazývala Pozsony, Prešporok, Pressburg. Uvedené údaje, ktoré sú približné, znázorni pomocou spojnicového (čiarového) a stĺpcového diagramu. Vypočítaj, o koľko percent vzrástol počet obyvateľov po sčítaní v roku 1990 v porovnaní s rokom 1780. Výsledok zaokrúhli na celé čísla. Vypočítaj, koľkokrát vzrástol počet obyvateľov po sčítaní v roku 1990 v porovnaní s rokom 1946. Výsledok zaokrúhli na jedno desatinné miesto.

	Bratislava								
rok	1780	1919	1930	1946	1961	1971	1984	1989	1990
počet obyvateľov	29 223	83 200	123 000	191 354	241 796	302 119	400 000	435 710	450 000

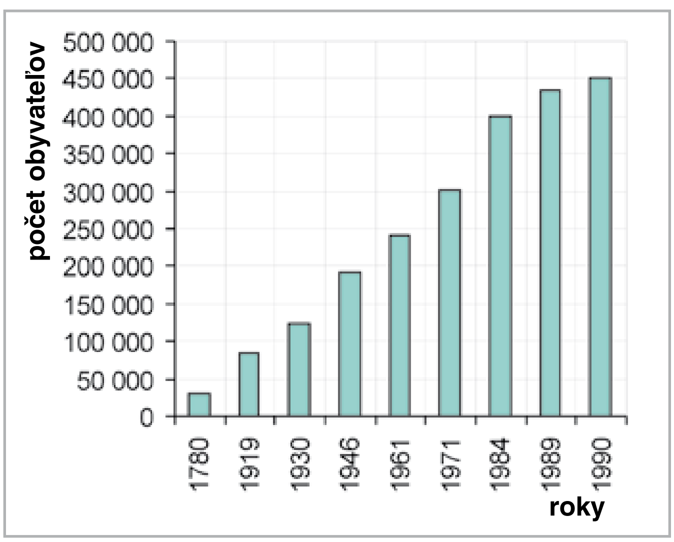
Riešenie 3.

Vložíme z EXCELu alebo iného tabuľkového kalkulátora spojnicový (čiarový) a stĺpcový graf.

spojnicový (čiarový) graf



stĺpcový graf



pokračovanie

Teraz vypočítame, **o koľko percent vzrástol** počet obyvateľov v roku 1990 v porovnaní s rokom 1780.

Môžeme počítať takto:
Urobíme krátky zápis a použijeme trojčlenku.
v roku 1780 bolo ....29 223 obyvateľov ....čo je 100 %
v roku 1990 bolo ......450 000 obyvateľov ....čo je x %

$$x : 100 = 450\,000 : 29\,223$$
$$29\,223 \cdot x = 450\,000 \cdot 100$$
$$x = \frac{450\,000 \cdot 100}{29\,223}$$
$$x = 1\,539{,}882...$$ Výsledok zaokrúhlime na celé čísla.

Potom $x = 1\,540$ %.

Počet obyvateľov vzrástol na 1 540 %, v porovnaní s rokom 1780 je to o 1440 % viac.

Ostalo nám vypočítať, **koľkokrát vzrástol počet obyvateľov** po sčítaní v roku 1990 v porovnaní s rokom 1946.
V roku 1946 bol počet obyvateľov 191 354. V roku 1990 bol počet obyvateľov 450 000.
Pomocou podielu zistíme, koľkokrát počet obyvateľov vzrástol: 450 000 : 191 354 = 2,351...

Po zaokrúhlení na jedno desatinné miesto môžeme povedať, že **počet obyvateľov od roku 1946 do roku 1990 vzrástol 2,4-násobne.**

Viete, že...? História sčítania obyvateľov, domov a bytov
Sčítanie ľudu patrí nepochybne medzi štatistiky s najdlhšou históriou. Zisťovanie stavu a štruktúry obyvateľstva, v podstate demografická štatistika, existovala skôr, ako vôbec vznikla nejaká demografická teória. Prvé moderné sčítanie ľudu sa uskutočnilo v roku 1869. Zákon o sčítaní ľudu z 29. marca 1869 určil, že sčítanie sa bude vykonávať vždy k 31. decembru v rokoch končiacich nulou, a to (s výnimkou roku 1869) v rokoch 1880, 1890, 1900 a 1910.

Zdroj: http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=5843

Projektová úloha
Zistite, ako sa vyvíjal počet obyvateľov vo vašej obci, meste, ...
Výsledky zisťovania znázornite pomocou vhodného diagramu.
Dá sa podľa vývoja počtu obyvateľov predpokladať budúci **nárast** alebo **pokles** počtu obyvateľov v obci?
Pre koho je dôležitá informácia o počte obyvateľov?

4. Uvádzame tabuľku predaja mobilných zariadení z roku 2011 s údajmi zaokrúhlenými na tisícky.

Celosvetový predaj mobilných zariadení v roku 2011

výrobca	počet zariadení
Apple	89 263 000
HTC	43 266 000
Huawei	40 663 000
LG Electronics	86 370 000
Motorola	40 269 000

výrobca	počet zariadení
Nokia	422 478 000
Research In Motion	51 541 000
Samsung	313 904 000
Sony Ericsson	32 597 000
ZTE	56 881 000

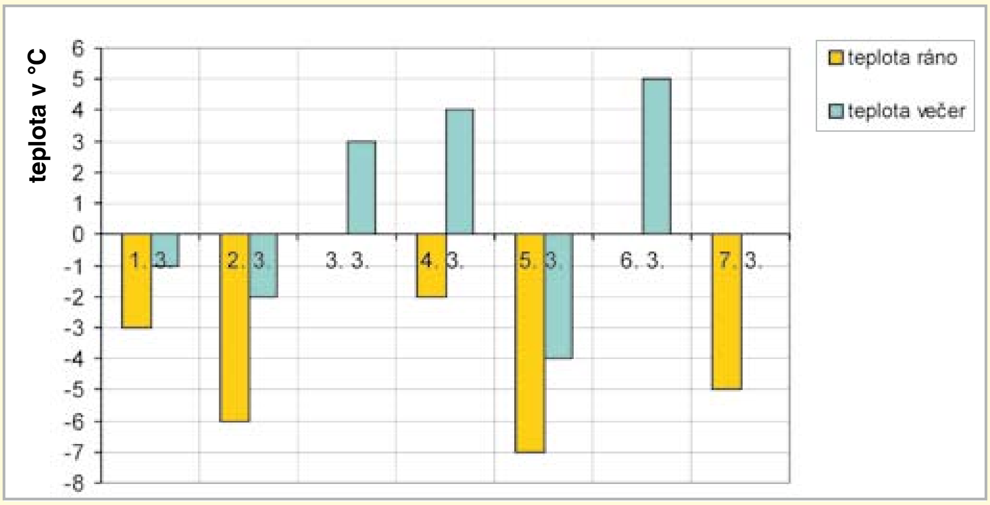
Zdroj: Gartner (február 2012)

a) Zostroj graf vhodný pre túto tabuľku.
b) Uveď, ktorý výrobca predal najviac mobilných zariadení a ktorý najmenej.
c) Vypočítaj, koľko percent z predaja mobilných zariadení uvedených v tabuľke tvoria prví traja najúspešnejší výrobcovia.

5. V knihe o zvieratách Európy sú opísané rôzne druhy živočíchov.
Z plazov sú uvedené aj tieto jašterice: jašterica krikľavá (priemerná dĺžka tela 9 cm), jašterica piesočná (telo 5 cm), jašterica červenochvostá (8 cm), jašterica kýlošupinatá (5 cm), jašterica červenoboká (7 cm), jašerica Marchova (5 cm), jašterica Fitzingerova (4 cm), jašterica zelená (13 cm), jašterica krátkohlavá (9 cm), jašterica múrová (7,5 cm).
a) Dané údaje znázorni graficky. Vyber si na znázornenie vhodný druh grafu.
b) Vypočítaj, koľko percent uvedených druhov jašteríc má dĺžku tela kratšiu alebo rovnajúcu sa 5 cm.
c) Vypočítaj, koľko percent uvedených druhov jašteríc má dĺžku tela dlhšiu ako 7 cm.

6. Znázorni graficky údaje z niektorých úloh v predchádzajúcej kapitole. Zvoľ vhodný typ diagramu.

7. Na diagrame sú znázornené teploty namerané v priebehu prvého marcového týždňa ráno a večer.
a) Napíš, ktorý deň bol rozdiel teplôt najväčší, kedy najmenší.
b) Vypočítaj priemernú teplotu nameranú v priebehu týždňa ráno.
c) Vypočítaj priemernú teplotu nameranú v priebehu týždňa večer.
Výsledky zaokrúhli na jedno desatinné miesto.



Riešenie 7.

a) Úlohu môžeme riešiť tak, že si vytvoríme tabuľku.

	1. 3.	2. 3.	3. 3.	4. 3.	5. 3.	6. 3.	7. 3.
teplota ráno	–3	–6	0	–2	–7	0	–5
teplota večer	–1	–2	3	4	–4	5	0
rozdiel	+ 2	+ 4	+ 3	+ 6	+ 3	+ 5	+ 5

Rozdiel teplôt bol najväčší 4. 3. , teplota stúpla o 6 °C.
Rozdiel teplôt bol najmenší 1. 3., teplota stúpla o 2 °C.

b) Teploty ráno boli:

teplota ráno	–3	–6	0	–2	–7	0	–5

Vypočítame priemernú rannú teplotu v priebehu týždňa:
$(-3 - 6 + 0 - 2 - 7 + 0 - 5) : 7 = -23 : 7 = -3{,}285$ ...
Výsledok zaokrúhlime na jedno desatinné miesto, **potom priemerná ranná teplota bola –3,3 °C.**

c) Teploty večer boli:

teplota večer	–1	–2	3	4	–4	5	0

Vypočítame priemernú večernú teplotu v priebehu týždňa:
$(-1 - 2 + 3 + 4 - 4 + 5 + 0) : 7 = 5 : 7 = 0{,}714$ ...
Výsledok zaokrúhlime na jedno desatinné miesto, **potom priemerná večerná teplota bola –0,7** °C.

Viete, že...? **O počasí**
Medzi základné informácie o počasí patria údaje o teplote ovzdušia.
Teplotu ovzdušia meriame teplomerom.
V roku 1714 nemecký fyzik **Daniel Gabriel Fahrenheit** zostrojil prvý ortuťový teplomer. Bol presnejší, ako dovtedy používané liehové teplomery a mohol sa použiť pre väčší rozsah teplôt. Fahrenheit určil teplotnú stupnicu, ktorá je po ňom pomenovaná. Používa sa napríklad v USA.
V roku 1742 švédsky astronóm **Anders Celsius** predstavil stostupňovú stupnicu, ktorá sa dodnes používa vo väčšine sveta. Značku °C prijali v roku 1948 na medzinárodnej konferencii pre miery a váhy.
Prevody jednotiek: 1 °F ≐ –17,22 °C, 100 °C ≐ 212 °F, 0 °C ≐ 32 °F.
Zdroj: http://sk.wikipedia.org/wiki/Anders_Celsius

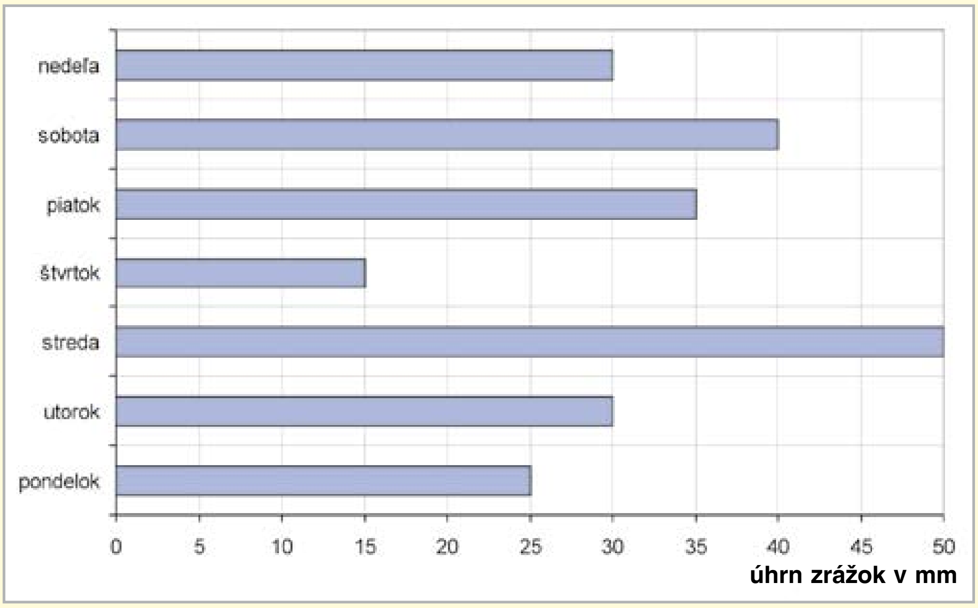
Anders Celsius

8. ZRÁŽKY

Kondenzáciou vodnej pary v ovzduší vznikajú oblaky. Skladajú sa z kvapiek vody alebo ľadových kryštálikov, ktoré sa spájajú a padajú na zem ako vertikálne zrážky. Môžu byť v kvapalnom (dážď) alebo tuhom (sneh) skupenstve.
V dôsledku kondenzácie na kontakte atmosféry so zemským povrchom vznikajú horizontálne zrážky (hmla).
Pri výskyte zrážok pozorovateľ sleduje:

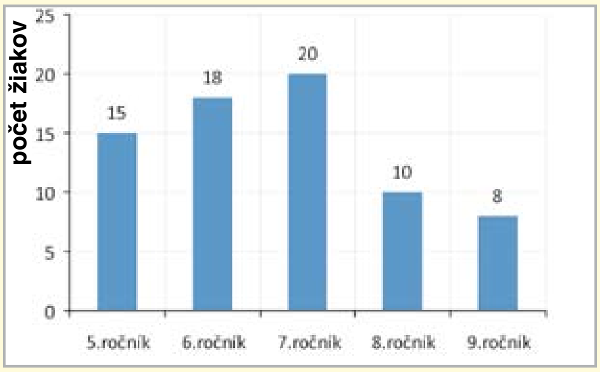
- čas výskytu a dobu trvania zrážok,
- množstvo zrážok,
- intenzitu (silu) zrážok.

Úhrn zrážok nameraný za týždeň na určitej hydrometeorologickej stanici je znázornený nasledujúcim pruhovým diagramom:



Posúď pravdivosť tvrdení, ktoré boli zostavené na základe diagramu:
A Najväčší úhrn zrážok nebol v stredu.
B Najväčší rozdiel zrážok medzi za sebou nasledujúcimi dňami bol medzi štvrtkom a piatkom.
C Najmenší rozdiel zrážok medzi dvomi za sebou nasledujúcimi dňami bol medzi pondelkom a utorkom.
D Úhrn zrážok za prvé dva dni bol menší ako úhrn zrážok v stredu.
E Úhrn zrážok za pondelok a štvrtok spolu bol väčší ako úhrn zrážok za stredu.

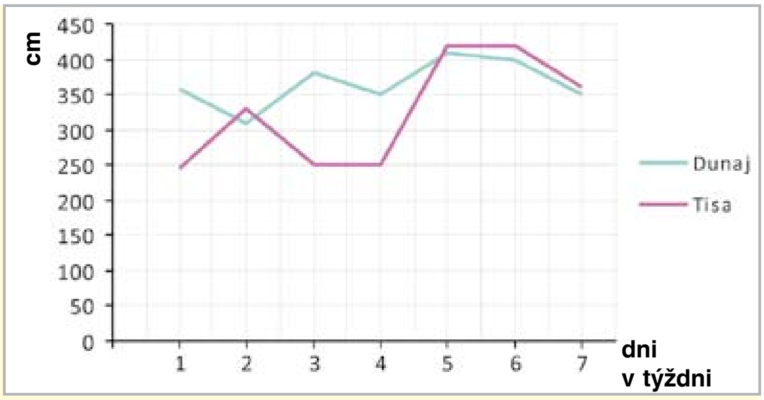
9. Na stĺpcovom diagrame je uvedený počet žiakov v ročníkoch 5., 6., 7., 8., 9., ktorí mali na polročnom hodnotení známku z matematiky dobrý, teda 3. Ktoré z uvedených tvrdení sú pravdivé?



A Najväčší rozdiel medzi počtom trojok je medzi 7. a 9. ročníkom.
B Najmenší rozdiel medzi počtom trojok je medzi 6. ročníkom a 7. ročníkom, 8. ročníkom a 9. ročníkom.
C 7. ročník spolu so 6. ročníkom majú viac trojok ako 5. ročník spolu s 9. ročníkom.
D Žiaci 8. a 6. ročníka majú spolu viac trojok ako žiaci 7. a 9. ročníka.

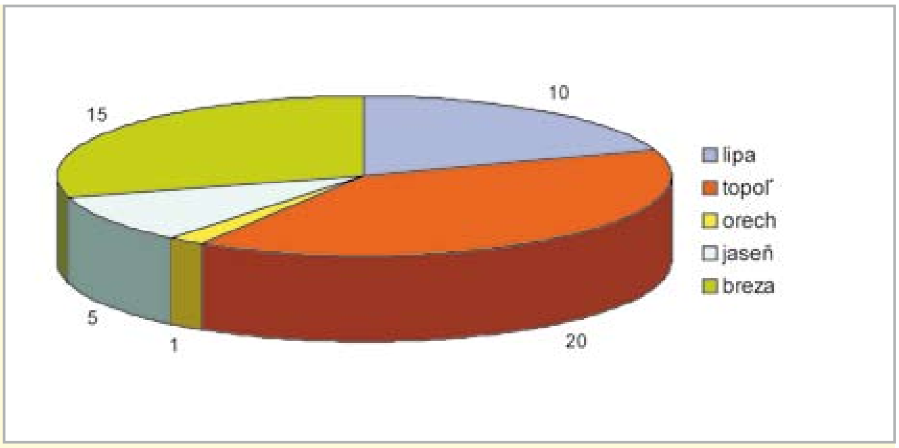
10. Na spojnicovom (čiarovom) diagrame sú znázornené výšky hladín riek Dunaj a Tisa počas prvého jarného týždňa (v cm).
Rozhodni o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

A Rieka Dunaj mala tri dni vyšší stav hladiny vody ako rieka Tisa.
B Rieka Dunaj mala dva dni nižší stav hladiny vody ako rieka Tisa.
C Rieka Tisa mala aspoň tri dni vyšší stav hladiny vody ako rieka Dunaj.
D Rieka Tisa mala vyrovnanejší stav hladiny vody ako rieka Dunaj.



11. Koláčovým diagramom sú znázornené počty stromov rôznych druhov v mestskom parku.
Rozhodni z diagramu, ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé:

A Topoľov je v parku viac ako jaseňov a briez spolu.
B Orechov a jaseňov spolu je v parku taký istý počet ako líp.
C Briez je v parku menej ako líp.
D Jaseňov a topoľov je v parku presne polovica zo všetkých stromov.

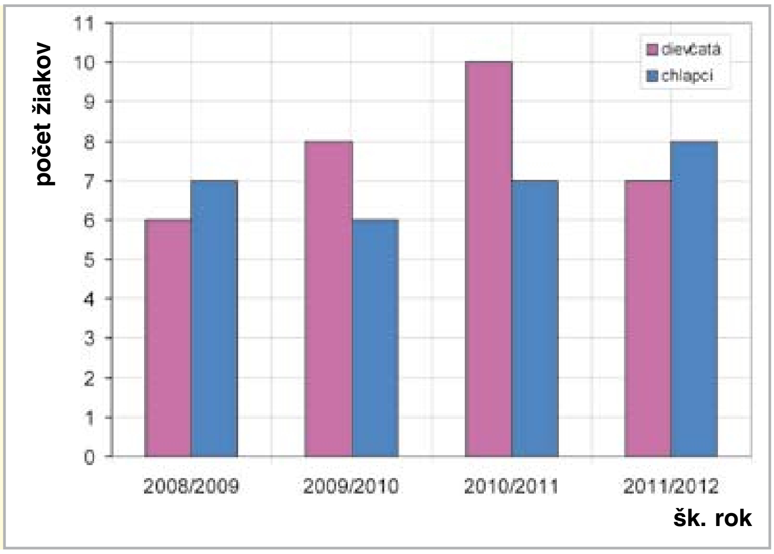


12. Na stĺpcovom diagrame je uvedený počet žiakov, ktorí navštevovali šachový krúžok v školských rokoch 2008/2009 až 2011/2012.

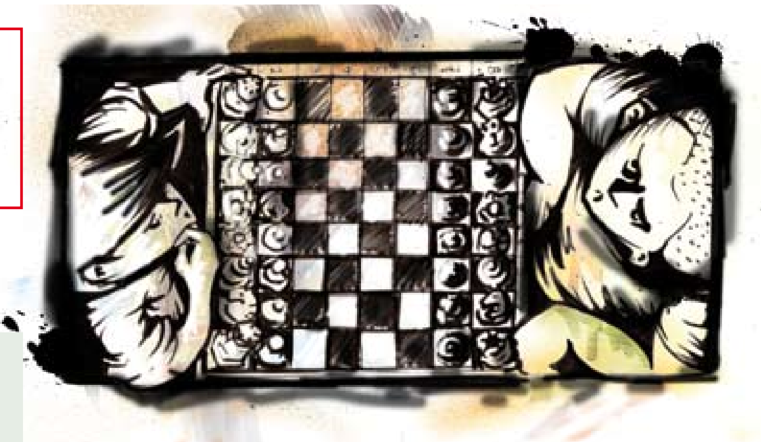
a) Zisti, koľko dievčat chodilo na krúžok v rokoch 2008/2009 až 2011/2012.

b) Uveď, v akom pomere bol počet dievčat k počtu chlapcov za roky 2008 až 2012.

c) Vypočítaj, aký bol priemerný počet žiakov v krúžku za školský rok.



Poznámka
V úlohe 11 nazývame použitý diagram koláčový, pretože ide o znázornenie údajov v priestore. Diagram znázorňujúci údaje v rovine nazývame kruhový.



Problémová úloha
K úlohám 8 a 11 utvorte tvrdenia, ktoré budú pravdivé.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

Ak zakrúžkujete správne riešenia, získate odpoveď na otázku: *Akú rolu môže hrať aj „neherec"*?

1. Karol mal na konci školského roka na vysvedčení 3 dvojky, 1 jednotku, 5 trojok a 1 štvorku. Jeho priemerná známka bola:

R 2,0 S 3,2 Š 2,6 T 3,5

2. Priemerný stav hladiny rieky Váh po prvom aprílovom týždni, v ktorom zaznamenali tieto výšky hladiny v cm: 120, 321, 241, 230, 195, 150, 136 bol:

S 139,3 T 199 U 278,6 V 331

3. V tabuľke sú počty rôzneho druhu mincí a bankoviek tak, ako si ich predavačka v obchode poznačila pri spočítavaní dennej tržby.

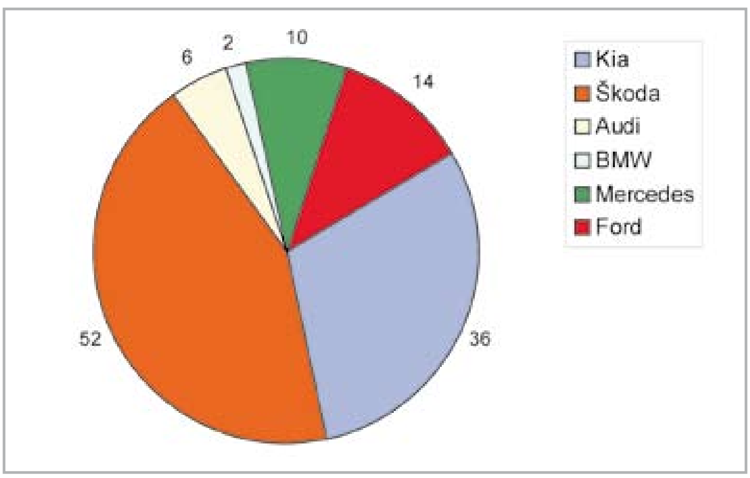
druh mincí a bankoviek	počet kusov
dvojeurové mince	43
desaťeurové bankovky	7
jednoeurové mince	61
päťeurové bankovky	13

Hodnota peňazí bola najvyššia v prípade:

A dvojeurových mincí B jednoeurových mincí

C päťeurových bankoviek D desaťeurových bankoviek

4. Kruhovým diagramom je znázornené zisťovanie, koľko áut a akej značky prešlo v piatok doobeda pred školou.



Pravdivé je tvrdenie:

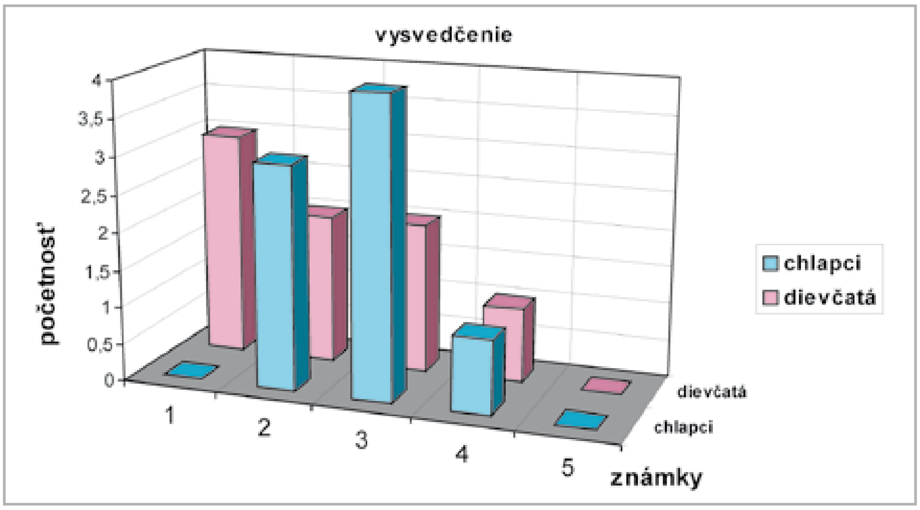
S Áut značky KIA spolu s autami značky Škoda prešlo pred školou v piatok doobeda menej ako ostatných áut spolu.

T Áut značky KIA prešlo v piatok doobeda pred školou viac ako áut značiek Audi, BMW, Mercedes a Ford spolu.

U Počet áut značky Škoda ku počtu áut značky KIA je v pomere 13 : 6.

V Počet áut značky Audi ku počtu áut značky BMW je v pomere 1 : 3.

5. Stĺpcový diagram znázorňuje počet známok (1, 2, 3, 4, 5) ôsmich chlapcov a ôsmich dievčat.



Pravdivá je veta:

I Rozdiel v počte známky dobrý medzi chlapcami a dievčatami je 2.

J Len jednu známku nemá ani jeden chlapec ani jedno dievča.

K Známky chválitebný majú dvaja chlapci.

L Známku nedostatočný má jedno dievča.

6. Pri prieskume jednej firmy sa pýtali náhodne vybraných 500 ľudí, koľko majú mobilných telefónov. Štatistickým súborom tohto zisťovania bol:

O mobilné telefóny P firmy R muži a ženy S 500 ľudí

7. Pri sledovaní obľúbenosti programov v televíziách sa pýtali na ulici náhodne vybraných 100 okoloidúcich chodcov. Štatistickou jednotkou zisťovania je:

T okoloidúci chodec U program v televízii V obľúbenosť programu Z výborný, zlý

8. Pri zisťovaní najčastejších chorôb medzi deťmi školského veku, oslovili 300 žiakov základných škôl. Štatistickým znakom je:

Š žiak základnej školy T 300 U choroba V školský vek

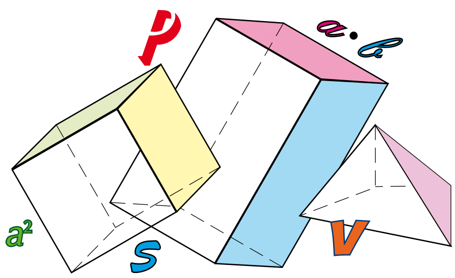
Zapamätajte si

Štatistické zisťovanie je zhromažďovanie a analyzovanie údajov o osobách, veciach, javoch, ...
Na zápis výsledkov štatistického zisťovania používame **tabuľky**.
Štatistický súbor sú osoby, veci, javy, o ktorých hľadáme určité informácie. Počet osôb, vecí, javov v súbore je **rozsah** štatistického súboru.
Štatistická jednotka je jeden prvok štatistického súboru.
Štatistický znak je to, čo nás na skúmanom prvku zo štatistického súboru zaujíma, je predmetom skúmania.
Početnosť štatistického znaku je počet prvkov, ktoré nadobúdajú istú hodnotu v rámci daného súboru.
Relatívna početnosť je podiel **absolútnej početnosti** znaku a **rozsahu** súboru.
V praxi býva zvykom násobiť relatívnu početnosť číslom 100, čím ju vyjadríme v **percentách**.

8 Niektoré ďalšie telesá, ich objem a povrch

Čo sme sa už učili

Učili sme sa o **kvádroch**, **kockách**, **hranoloch** s rôznymi podstavami.
Rysovali sme **siete** týchto telies.
Hovorili sme o plášti a podstavách telies.
Počítali sme ich **objem** a **povrch**.

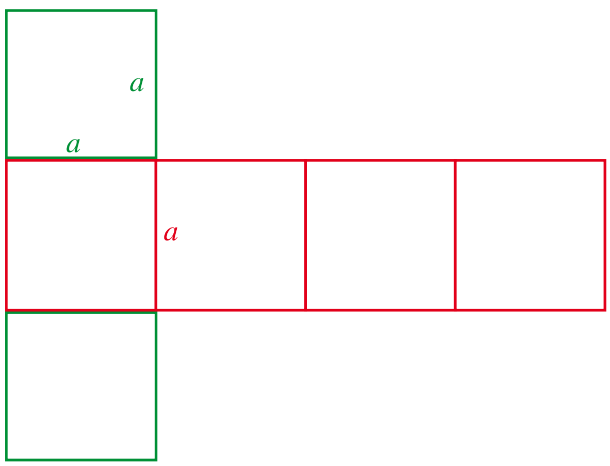


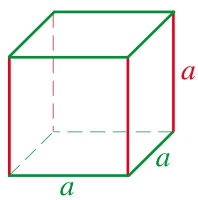
Pripomeňme si niekoľko úloh, ktoré sme riešili. Pri ich riešení si dané telesá načrtnite.

1. Narysuj **sieť** kocky s hranou $a = 2$ cm. Vypočítaj jej **objem** a **povrch**.

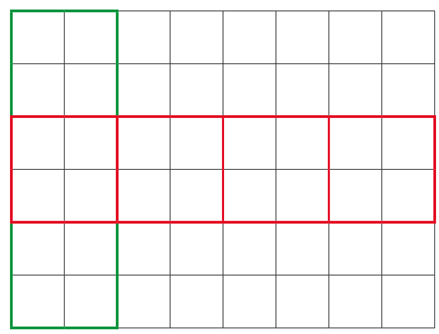
Riešenie 1.

Sieť kocky sa skladá zo **6 zhodných štvorcov** so stranou dĺžky 2 cm.





Siete telies sme rysovali do štvorčekovej siete.



Objem kocky $V = a^3 = 2^3\ \text{cm}^3 = \mathbf{8\ cm^3}$
Povrch kocky $S = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 2^2\ \text{cm}^2 = 6 \cdot 4\ \text{cm}^2 = \mathbf{24\ cm^2}$

Poznámka
Povrch telesa sa označuje aj písmenom P.

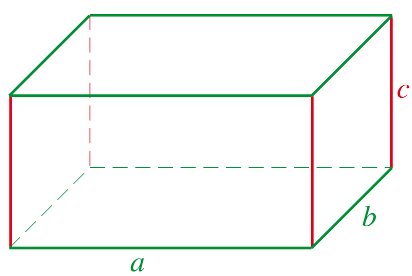
Pomôcka
Obsah S štvorca so stranou dĺžky a vypočítame pomocou druhej mocniny a.
Platí: $S = a^2$.

2. Narysuj **sieť** kvádra s rozmermi $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm. Vypočítaj jeho **povrch** a **objem**.

Riešenie 2.

Sieť kvádra sa skladá z **2 podstáv** a **plášťa**.
Podstavy kvádra sú obdĺžniky s rozmermi $a = 4$ cm, $b = 3$ cm.

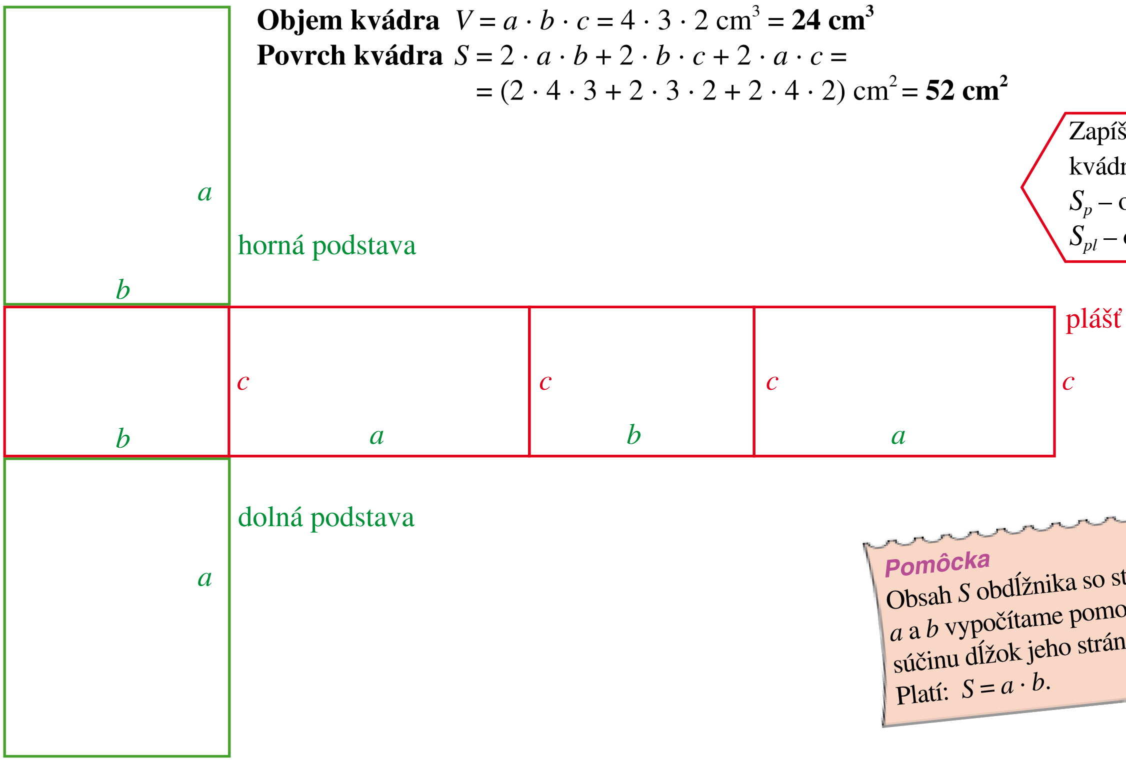
Kváder má **plášť** zložený:
z 2 obdĺžnikov s rozmermi $a = 4$ cm a $c = 2$ cm
z 2 obdĺžnikov s rozmermi $b = 3$ cm a $c = 2$ cm



Objem kvádra $V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 3 \cdot 2\ \text{cm}^3 = \mathbf{24\ cm^3}$

Povrch kvádra $S = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c =$

$= (2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2)\ \text{cm}^2 = \mathbf{52\ cm^2}$



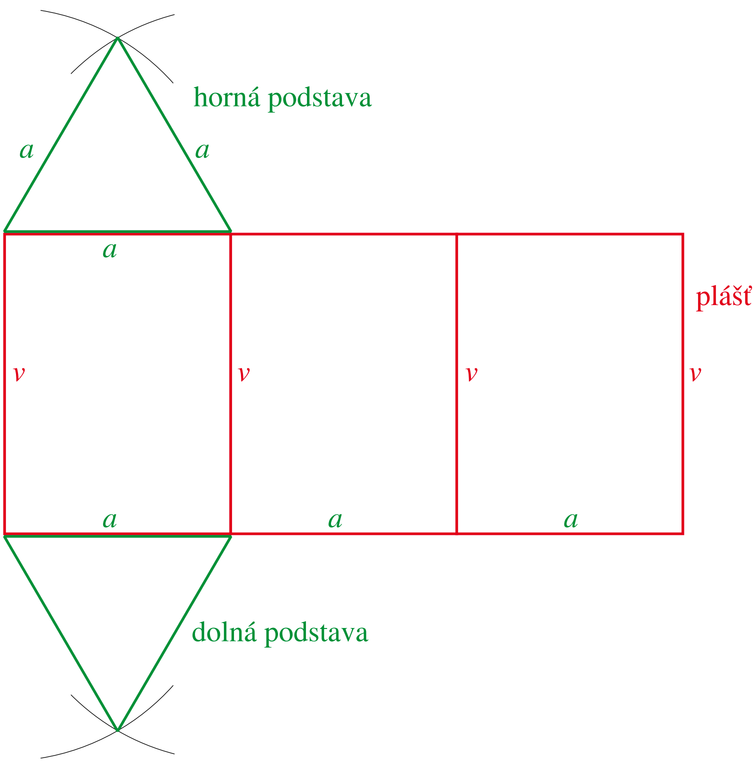
Zapíš vzorce pre V a S kvádra pomocou S_p a S_{pl}.
S_p – obsah podstavy
S_{pl} – obsah plášťa

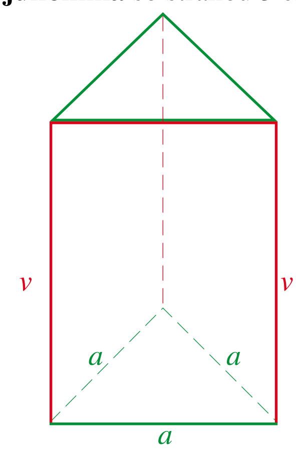
Pomôcka
Obsah S obdĺžnika so stranami a a b vypočítame pomocou súčinu dĺžok jeho strán.
Platí: $S = a \cdot b$.

3. Narysuj **sieť** pravidelného trojbokého hranola s hranou podstavy $a = 3$ cm a výškou telesa $v = 4$ cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**. Výsledok zaokrúhli na desatiny.

Riešenie 3.

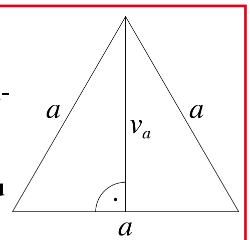
Pravidelný trojboký hranol má podstavu tvaru **rovnostranného trojuholníka** so stranou 3 cm dlhou.
Na konštrukciu siete potrebujeme aj kružidlo.





Náčrtok telesa.

Poznámka
Podstava pravidelného trojbokého hranola je rovnostranný **trojuholník**.
Ak chceme vypočítať jej **obsah**, musíme vypočítať **výšku** rovnostranného trojuholníka.



Na jej výpočet použijeme Pytagorovu vetu:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2$$

Potom platí:

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{\mathbf{6{,}75}}$$

Objem hranola $V = S_p \cdot v = \dfrac{a \cdot v_a}{2} \cdot v =$

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{\mathbf{6{,}75}}}{2} \cdot 4\ \text{cm}^3 = 15{,}588...\ \text{cm}^3 \doteq \mathbf{15{,}6\ cm^3}$$

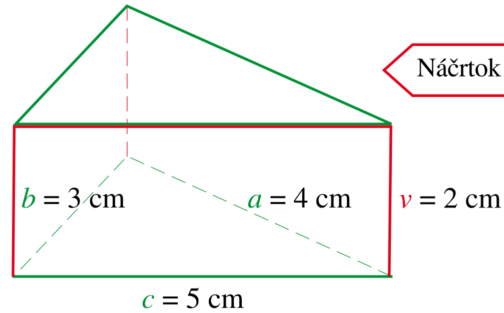
Povrch hranola $S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot \dfrac{a \cdot v_a}{2} + 3 \cdot a \cdot v = \left(2 \cdot \dfrac{3 \cdot \sqrt{6{,}75}}{2} + 3 \cdot 3 \cdot 4\right)\ \text{cm}^2 = 43{,}794...\ \text{cm}^2 \doteq \mathbf{43{,}8\ cm^2}$

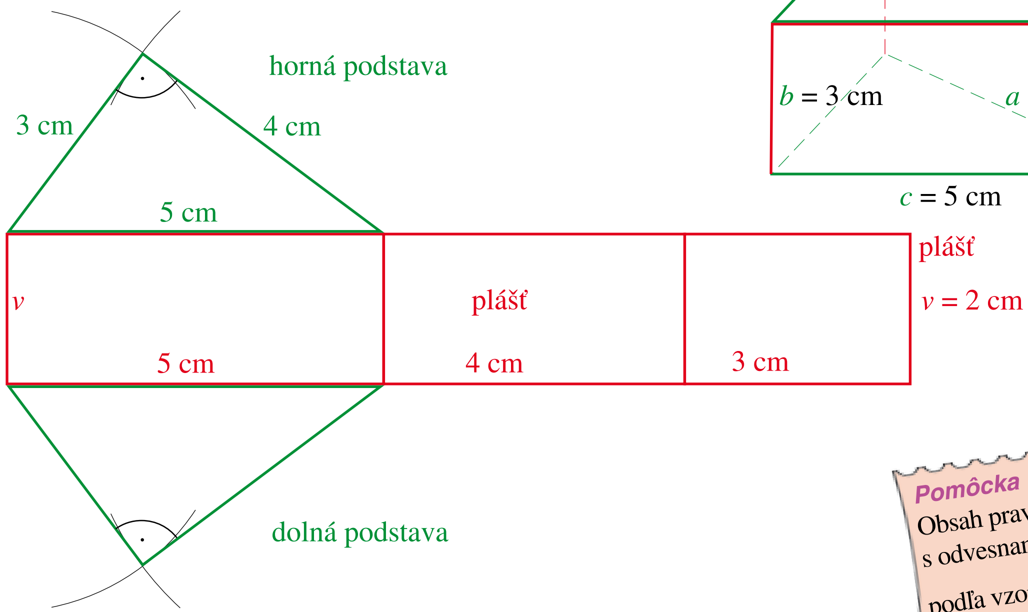
4. Narysuj **sieť** trojbokého hranola, ktorý má podstavu s hranami dĺžky 5 cm, 4 cm a 3 cm a výška hranola je 2 cm. Vypočítaj jeho **povrch** a **objem**.

Riešenie 4.

Trojboký hranol má podstavu tvaru pravouhlého trojuholníka so stranami 5 cm, 4 cm, 3 cm dlhými.
Na konštrukciu siete použijeme aj kružidlo.

Náčrtok telesa.





Pomôcka
Obsah pravouhlého trojuholníka s odvesnami a a b vypočítame podľa vzorca: $S = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

Objem hranola $V = S_p \cdot v = \dfrac{a \cdot b}{2} \cdot v = \dfrac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 \text{ cm}^3 = \mathbf{12\ cm^3}$

Povrch hranola $S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot \dfrac{a \cdot b}{2} + c \cdot v + b \cdot v + a \cdot v = \left(2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2} + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2\right) \text{cm}^2 = \mathbf{36\ cm^2}$

5. Narysuj **siete** daných geometrických telies. Vypočítaj ich **objem** a **povrch**.

a) Kocka s hranou dĺžky 4 cm.
b) Kváder s hranami dĺžky a = 2 cm, b = 3,5 cm, c = 4 cm.
c) Pravidelný trojboký hranol s dĺžkou hrany podstavy 4 cm a výškou 3 cm.
d) Pravidelný štvorboký hranol s dĺžkou hrany podstavy 3 cm a výškou 5 cm.
Výsledok zaokrúhli na dve desatinné miesta.

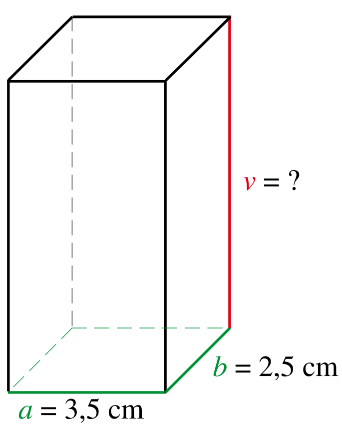
6.

a) Vypočítaj **výšku** štvorbokého hranola, ktorý má rozmery podstavy 3,5 cm a 2,5 cm a objem 75,25 cm^3.
b) Vypočítaj **výšku** trojbokého hranola, ktorý má obsah podstavy 6 dm^2 a objem 24,6 dm^3.

Riešenie 6.

Vždy je vhodné daný útvar **načrtnúť**, **označiť všetky prvky**, ktoré **poznáme** ako aj tie, ktoré máme **vypočítať**.

a)



Spravíme stručný zápis:
$\boldsymbol{a}$ = 3,5 cm
$\boldsymbol{b}$ = 2,5 cm
$\boldsymbol{V}$ = 75,25 cm^3
$\boldsymbol{v}$ = ?

Poznáme objem telesa, tak si **napíšeme vzorec** na jeho výpočet:

$V = S_p \cdot v$

$S_p = a \cdot b$

$V = a \cdot b \cdot v$

Úlohu vyriešime dosadením daných údajov do vzorca:

$V = a \cdot b \cdot v$
$75{,}25 = 3{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot v$
$75{,}25 = 8{,}75 \cdot v \qquad / : 8{,}75$
$8{,}6 = v$
$\mathbf{v = 8{,}6\ cm}$

Výška štvorbokého hranola je v = 8,6 cm.

Úlohu môžeme riešiť aj vyjadrením neznámej zo vzorca.

$V = a \cdot b \cdot v \qquad / : (a \cdot b)$

$$v = \frac{V}{a \cdot b}$$

Podiel zapíšeme v tvare zlomka

$$v = \frac{75{,}25}{3{,}5 \cdot 2{,}5} = \mathbf{8{,}6\ cm}$$

Čo všetko vyzerá ako hranol či kváder? Tehly, paneláky a iné budovy, škatule a podobne...

Viete, že...?

Úvod do „panelákológie"

Prvé panelové domy sa začali stavať po prvej svetovej vojne v Holandsku. V Nemecku sa objavili v 20. rokoch minulého storočia. Prvé sídlisko postavili v Paríži v roku 1939. Paneláky stoja aj v Rakúsku a Švédsku. V západnej Európe sa však v 70. rokoch prestali stavať.

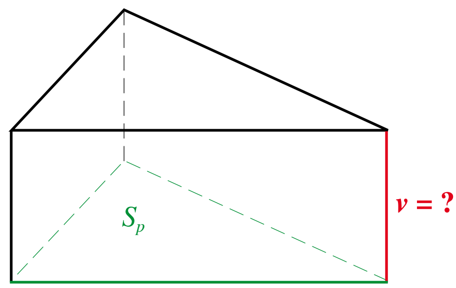
Zdroj: http://www.sme.sk/c/4834309/panelstory-po-slovensky.html

foto Darkreider

b)

Stručný zápis:

$S_p = 6\ dm^2$
$V = 24{,}6\ dm^3$
$\mathbf{v = ?}$



Poznáme objem telesa, tak si **napíšeme vzorec** na jeho výpočet.

$V = S_p \cdot v$

Do **vzorca dosadíme známe údaje** a vypočítame výšku telesa.

$V = S_p \cdot v$
$24{,}6 = 6 \cdot v \qquad / : 6$
$4{,}1 = v$
$\mathbf{v = 4{,}1\ dm}$

Výška hranola je 4,1 dm.

Úlohu môžeme riešiť aj vyjadrením neznámej zo vzorca.

$V = S_p \cdot v \qquad / : S_p$
$v = V : S_p$
$v = 24{,}6 : 6$
$\mathbf{v = 4{,}1\ dm}$

7.

a) Vypočítaj **výšku** pravidelného štvorbokého hranola s objemom 441 cm^3, ktorého hrana podstavy má dĺžku 4,2 cm.
b) Vypočítaj **výšku** kvádra, ktorého podstava má rozmery 7 cm a 4 cm a jeho objem je 1 008 cm^3.
c) Vypočítaj **výšku** trojbokého hranola, ktorý má obsah podstavy 13,7 dm^2 a objem 575,4 dm^3.
d) Vypočítaj **výšku** pravidelného trojbokého hranola, ktorý má obsah podstavy 12,8 dm^2 a objem 40,96 dm^3.

8. Trojboký hranol má podstavu tvaru pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny majú dĺžky 9 cm a 40 cm. Výška hranola je 20 cm. Vypočítaj objem a povrch hranola.

Projektová úloha

Nájdite na internete budovy, ktoré majú tvary hranolov alebo kvádra. Napíšte všetky informácie, ktoré sa dajú o nich zistiť a vytvorte prezentáciu týchto budov so zistenými údajmi.

9.* Trojboký hranol má podstavu tvaru pravouhlého trojuholníka s dĺžkou odvesny 5 cm. Najväčšia stena plášťa hranola má obsah 104 cm^2. Hranol je vysoký 8 cm. Vypočítaj objem a povrch hranola.

10.* Pravidelný štvorboký hranol má obsah podstavy 25 cm^2 a telesovú výšku dvakrát dlhšiu ako je dĺžka hrany podstavy. Vypočítaj objem a povrch hranola.

11.* Tehlička zlata má zvislý prierez tvaru rovnoramenného lichobežníka s podstavami 4 cm a 2 cm dlhými a výškou 3 cm. Vypočítaj jej objem, ak je tehlička dlhá 0,8 dm.

Viete, že...?

Zlato je na Zemi veľmi vzácny prvok. Vo vesmíre pripadá na **jeden atóm zlata** približne **300 miliárd atómov vodíka**.
Na Slovensku existuje **Slovenská asociácia zlatokopov** (SAZ), je registrovaná a oficiálne patrí pod **svetovú organizáciu zlatokopov** WGA (World Goldpanning Association), ktorá má sídlo vo Fínsku. V súčasnosti sa organizujú majstrovstvá sveta v zlatokopectve, ktoré sa už považuje za šport.

Zdroj: http://goldpanning.sk/index.php/component/content/category/7-saz

12.** Podstava hranola je kosoštvorec s uhlopriečkami dlhými 24 cm a 10 cm. Ak obsah plášťa tvorí 52 % z celkovej plochy povrchu hranola, vypočítaj výšku a objem hranola.

Pomôcka

Pripomíname: 1 % je 0,01 alebo $\frac{1}{100}$ celku.

1 % z 50 vypočítame $50 : 100 = 50 \cdot 0{,}01 = 0{,}5$
30 % zo 75 vypočítame $(75 : 100) \cdot 30 = 0{,}75 \cdot 30 = 22{,}5$

13. Ak sa zmenší výška pravidelného trojbokého hranola trikrát, zmenší sa jeho objem:

A deväťkrát **B** šesťkrát
C trikrát **D** jedenkrát

14. Objem pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy dĺžky b a telesovou výškou v vypočítame podľa vzorca:

A $V = b \cdot b \cdot v$ **B** $V = b \cdot b \cdot b \cdot v$
C $V = 6 \cdot b \cdot b \cdot v$ **D** $V = 2 \cdot b \cdot v$

15. Ak zväčšíme dĺžku hrany podstavy pravidelného štvorbokého hranola dvakrát, zväčší sa jeho objem:

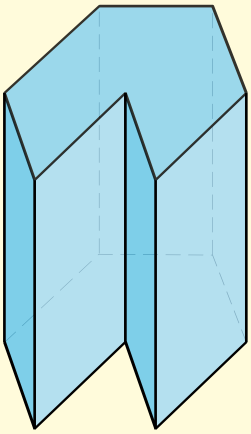
A dvakrát **B** štyrikrát
C šesťkrát **D** osemkrát

16. Objemy kvádrov K_1 s hranami dĺžky 20 cm, 50 cm, 10 cm, K_2 s hranami dĺžky 20 cm, 25 cm, 2 dm a K_3 s hranami dĺžky 2,5 dm, 10 cm, 40 cm, sú v pomere $K_1 : K_2 : K_3$:

A 2 : 5 : 1 **B** 10 : 100 : 1 000
C 1 000 : 1 000 : 1 000 **D** 2 : 2 : 25

17. Z oceľového profilu tvaru pravidelného šesťbokého hranola s hranou podstavy1 dm a výškou 2 dm vyfrézovali smerom ku stredu jednu šestinu (pozri obrázok).

a) Vypočítaj objem a povrch vyfrézovanej časti.
b) Napíš, koľko percent objemu profilu tvorila vyfrézovaná časť hranola.



Problémová úloha

Váza má tvar pravidelného päťbokého hranola s objemom 2 l. Navrhnite vázy v tvare štvorbokého hranola a trojbokého hranola s rovnakým objemom, aký má uvedená váza.

Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.

1. Povrch pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy 4 cm a výškou 5 cm sa rovná:

A 160 cm^2 B 112 cm^2 C 80 cm^2 D 360 cm^2

2. Obsah podstavy trojbokého hranola s podstavou tvaru pravouhlého trojuholníka so stranami 5 cm, 4 cm, 3 cm sa rovná:

A 6 cm^2 B 60 cm^2 C 18 cm^2 D 45 cm^2

3. Plášť pravidelného trojbokého hranola s výškou 10 cm a hranou podstavy 5 cm sa rovná:

N 30 cm^2 O 50 cm^2 P 100 cm^2 R 150 cm^2

4. Bazén tvaru kvádra s rozmermi 10 m × 15 m × 1,5 m naplnený do dvoch tretín objemu naplníme po okraj, ak do neho napustíme ešte:

A 75 cm^3 B 225 cm^3 C 150 cm^3 D 100 cm^3

5. Ak hranu kocky zväčšíme trikrát, jej objem sa zväčší:

J 3-krát K 27-krát L 9-krát M 6-krát

Aké slovo vznikne z písmen správnych odpovedí?
Over v Pravidlách slovenského pravopisu, či je vzniknuté slovo spisovné.

Zapamätajte si

Hranol

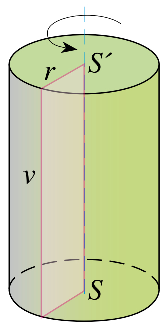
- sieť hranola má **dve podstavy a plášť**
- **výška** hranola sa rovná vzdialenosti jeho podstáv
- **podstavy** môžu byť v tvare trojuholníka, štvorca, obdĺžnika (vtedy ide o kváder), kosoštvorca, kosodĺžnika, lichobežníka, päťuholníka, šesťuholníka, ...
- ak je podstavou **pravidelný** rovinný útvar, ide o pravidelný hranol, napríklad:
  podstava – rovnostranný trojuholník → pravidelný trojboký hranol,
  podstava – štvorec → pravidelný štvorboký hranol,
  podstava – pravidelný šesťuholník → pravidelný šesťboký hranol
- **povrch hranola** vypočítame tak, že spočítame obsah oboch podstáv a obsah plášťa $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$
- **objem hranola** je súčin obsahu podstavy a výšky hranola $V = S_p \cdot v$, v – výška

8.1 Valec, jeho sieť, objem a povrch

Čo sme sa už učili

Každému telesu vieme vypočítať **povrch** a **objem**.
Povrch telesa je súčet obsahov jeho podstáv a plášťa.
Objem telesa je súčin obsahu podstavy a výšky telesa.

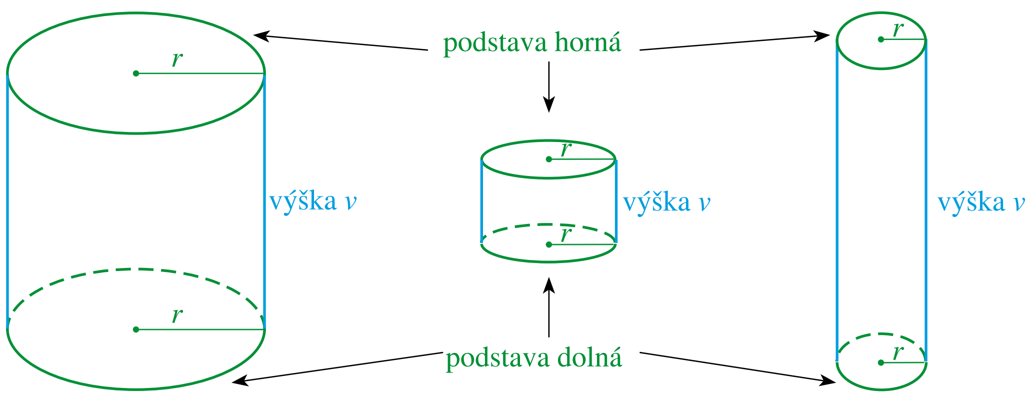
V bežnom živote sa vyskytujú rôzne telesá, napríklad **valec**.
Nádrže na rôzne tekutiny, stĺpy rôzneho druhu sú často valcového tvaru.
Aj hrnce majú tvar valca.
Rolka papiera, ceruzka, pero mávajú valcový tvar.
Sviečky, kovové sudy, odpadkové koše... valcové tvary sú všade okolo nás.



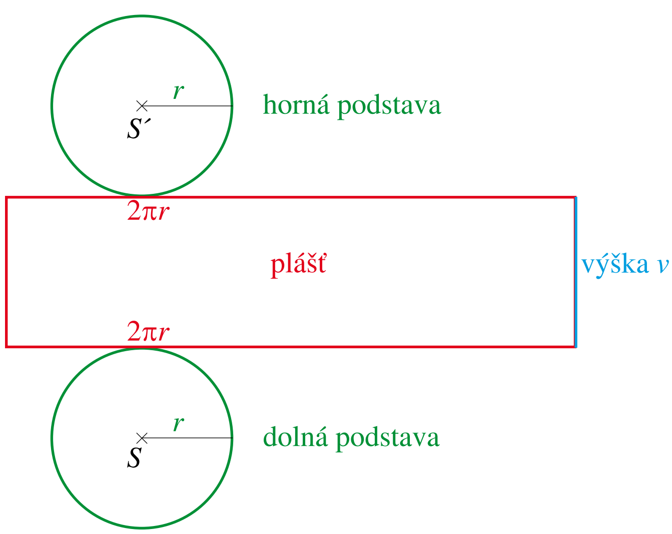
Ako mohol vzniknúť valec? Možno vznikol takto:

- obdĺžnik otáčali okolo jednej jeho strany alebo okolo jeho osi súmernosti,
- ale mohol vzniknúť aj tak, že na seba nakladali kruhy rovnakej veľkosti (vraj sa tak stavali obrovské stĺpy v starovekých ríšach).

Podstavami valca sú **kruhy** s rovnakým polomerom.
Plášť valca tvorí **obdĺžnik**. Dĺžka jeho strany pri podstavách sa rovná obvodu kruhovej podstavy a druhá strana obdĺžnika je výška valca.
Výška valca je **vzdialenosť jeho podstáv**.



Pomôcka
Obsah kruhu s polomerom r:
$S = \pi r^2$
Obvod kruhu s polomerom r:
$o = 2\pi r$



Povrch valca S sa rovná súčtu obsahu dvoch podstáv a plášťa.

$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$

$S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r v$

Objem valca V sa rovná súčinu obsahu jeho podstavy a výšky.

$V = S_p \cdot v$

$V = \pi r^2 \cdot v$

Vypočítajme teraz niekoľko úloh. Pri výpočtoch použijeme pre číslo π približnú hodnotu 3,14.

Projektová úloha

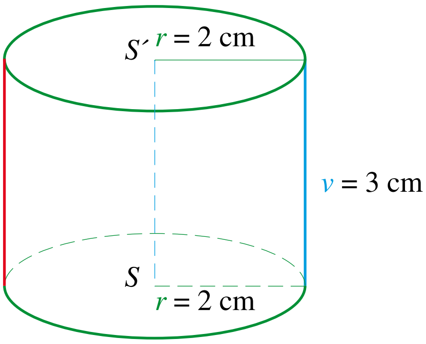
Zistite o čísle π viac informácií a **spracujte** ich formou **posteru**.

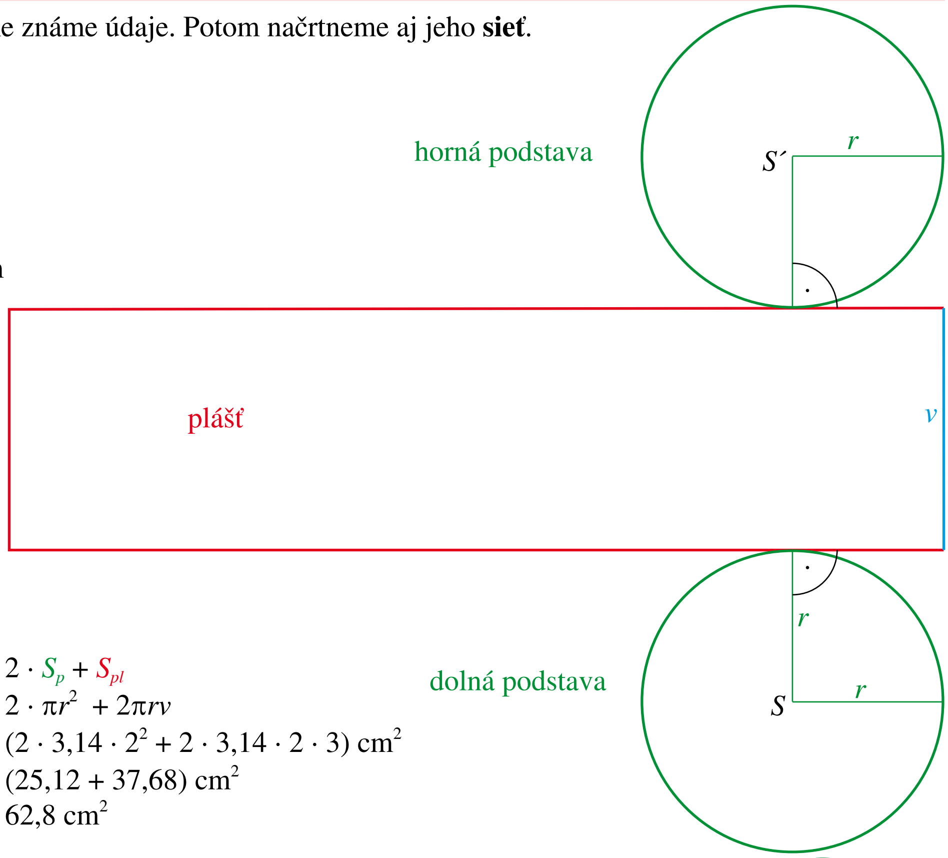
1. a) Načrtni **sieť** valca s výškou 3 cm a polomerom podstavy 2 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.
b) Načrtni **sieť** valca s výškou 2 cm a priemerom podstavy 2 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

Riešenie 1.

Valec najprv **načrtneme** a doplníme známe údaje. Potom načrtneme aj jeho **sieť**.

a)





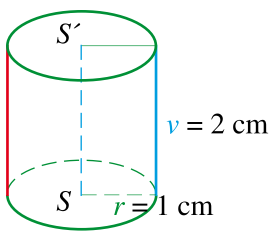
Stručný zápis:
$r = 2$ cm
$v = 3$ cm
$V = ?$
$S = ?$

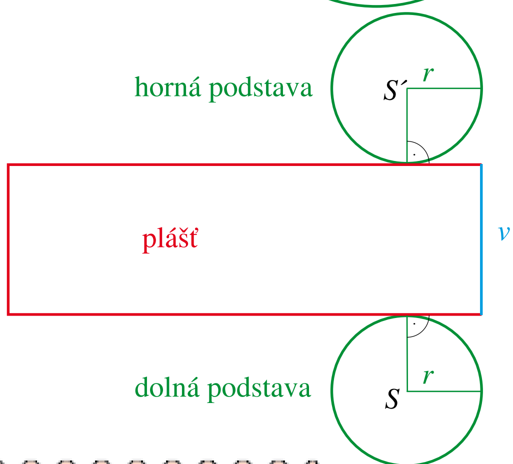
$V = S_p \cdot v$
$V = \pi r^2 \cdot v$
$V \doteq 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 3\ \text{cm}^3$
$V \doteq 37{,}68\ \text{cm}^3$

$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$
$S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r v$
$S \doteq (2 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 3)\ \text{cm}^2$
$S \doteq (25{,}12 + 37{,}68)\ \text{cm}^2$
$S \doteq 62{,}8\ \text{cm}^2$

Objem valca je približne 37,68 cm³ a povrch je približne 62,8 cm².

b)





Stručný zápis:
$d = 2$ cm, $r = 2$ cm : 2 = 1 cm
$v = 2$ cm
$V = ?$
$S = ?$

$V = \pi r^2 \cdot v$
$V \doteq 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 2\ \text{cm}^3$
$V \doteq 6{,}28\ \text{cm}^3$

$S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r v$
$S \doteq (2 \cdot 3{,}14 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2)\ \text{cm}^2$
$S \doteq (6{,}28 + 12{,}56)\ \text{cm}^2$
$S \doteq 18{,}84\ \text{cm}^2$

Objem valca je približne 6,28 cm³ a povrch je približne 18,84 cm².

Pomôcka

Priemer kruhu je dvojnásobok polomeru kruhu.

Platí $d = 2 \cdot r$, potom $r = \dfrac{d}{2}$ alebo $r = d : 2$.

2. a) Načrtni **sieť valca** s výškou 4 cm a polomerom podstavy 2 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.
b) Načrtni **sieť valca** s výškou 1,5 cm a polomerom podstavy 1,5 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.
c) Načrtni **sieť valca** s výškou 3,5 cm a priemerom podstavy 4 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.
d) Načrtni **sieť valca** s výškou 5 cm a priemerom podstavy 6 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

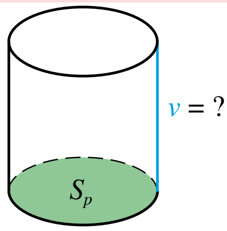
3.* Načrtni **sieť** valca, ktorého pomer polomeru r podstavy k výške v je 2 : 3.
Vypočítaj **objem** a **povrch** valca, ak jeho výška $v = 9$ cm.

4.* Načrtni **sieť** valca, ktorého polomer podstavy je 30 % jeho výšky.
Vypočítaj **objem** a **povrch** valca, ak jeho výška $v = 7$ cm.

5. Váza tvaru valca má objem $V = 1$ liter. Vypočítaj výšku vázy, ak jej podstava má obsah 0,5 dm^2.

Riešenie 5.

Valcovú vázu najprv načrtneme a doplníme údaje, ktoré poznáme a ktoré máme vypočítať.
Stručný zápis:
$V = 1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$
$S_p = 0{,}5\ \text{dm}^2$
$v = ?$



Vzorec na výpočet objemu valca: $V = S_p \cdot v$
Úlohu vyriešime tak, že do **vzorca dosadíme známe údaje** a vypočítame výšku valca:
$V = S_p \cdot v$
$1 = 0{,}5 \cdot v \qquad / : 0{,}5$
$2 = v$
$\mathbf{v = 2\ dm}$
Výška vázy je 2 dm.

Úlohu vyriešime aj **vyjadrením neznámej zo vzorca**:
$V = S_p \cdot v \qquad / : S_p$
$v = V : S_p$

Dosadíme známe hodnoty:
$v = 1 : 0{,}5$
$\mathbf{v = 2\ dm}$

6.

a) Vypočítaj polomer podstavy valca, ak sa obsah jeho podstáv rovná 12,56 cm^2.
b) Vypočítaj polomer podstavy valca, ak sa obsah plášťa valca rovná 65,42 dm^2, výška valca sa rovná polomeru podstavy valca.
c) Vypočítaj výšku valca, ktorý má polomer podstavy 25 mm a objem 1 786 mm^3.
d) Vypočítaj výšku valca, ktorý má priemer podstavy 1,5 m a objem 6,45 m^3.

7. **Biologická čistička**
Nádrž biologickej čističky má tvar valca s priemerom podstavy 2,5 m.
Zvyčajne je naplnená do štyroch pätín svojho objemu.
Aký je objem náplne čističky, ak jej výška je 2,8 m?
Nádobu čističky vkladajú do vybetónovanej jamy. Dno jamy je štvorcové a čistička sa musí dotýkať stien jamy. Vypočítaj šírku dna jamy pre čističku.

8. **Detský bazén**
Detský bazén má tvar valca s priemerom podstavy 4 m a hĺbkou 50 cm.
Vypočítaj objem vody, ktorý môže byť v bazéne, ak je naplnený po okraj.
Ak bazén naplníme len na 25 %, koľko bude vody v bazéne?
Ak chcú vymaľovať steny bazéna, akú veľkú plochu treba vymaľovať?

Zapamätajte si

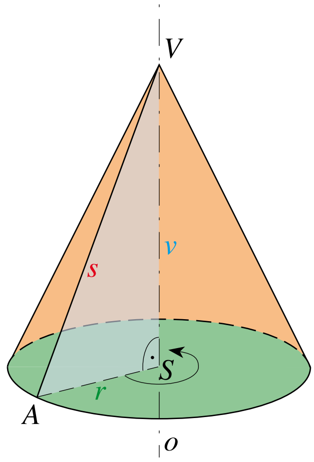
Valec
- sieť valca má **dve podstavy a plášť**
- **výška** valca sa rovná vzdialenosti jeho podstáv
- **podstavy** sú tvaru **kruhu**
- **plášť** tvorí obdĺžnik, ktorého dĺžka jednej strany je obvod kruhu – podstavy a druhá strana je výška valca, pričom plášť môže mať aj tvar štvorca so stranou, ktorej dĺžka sa rovná dĺžke kruhu – podstavy
- **povrch valca** vypočítame tak, že spočítame obsahy oboch podstáv a obsah plášťa $S = 2 \cdot \pi r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$
- **objem valca** je súčin obsahu podstavy a výšky valca $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$, r – polomer, v – výška

Čo sme sa už učili?

Ako vznikol kužeľ? Možno vznikol takto:
- pravouhlý trojuholník otáčali okolo jednej jeho strany ako osi otáčania,
- rovnoramenný trojuholník otáčali okolo jeho výšky ako osi otáčania.

Kužeľ má **jednu podstavu**, ktorou je **kruh**.
Polomer podstavy je r.

Každá úsečka, ktorá spája vrchol kužeľa s ľubovoľným bodom kružnice podstavy je **strana kužeľa**. Všetky strany kužeľa tvoria **plášť kužeľa**.
Plášť kužeľa tvorí **kruhový výsek**.



Vzdialenosť vrcholu kužeľa od podstavy je výška kužeľa.

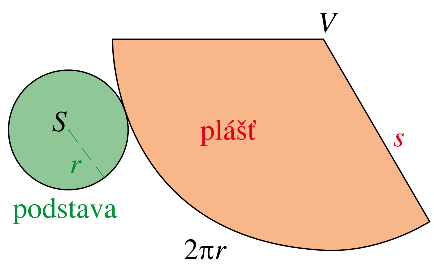
Povrch kužeľa S sa rovná súčtu obsahu podstavy a plášťa.

$S = S_p + S_{pl}$ $\qquad$ $S = \pi r^2 + \pi r \cdot s$

Objem kužeľa V sa rovná jednej tretine súčinu obsahu podstavy a výšky. Objem kužela je teda jedna tretina objemu valca s tým istým polomerom podstavy a výškou.

$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot v$

Vypočítajme teraz niekoľko úloh.

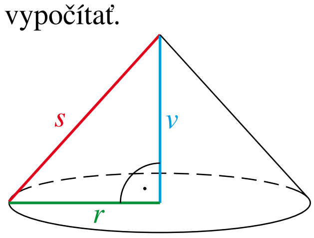


sieť kužeľa

1. Načrtni kužeľ a jeho **sieť**, ak je strana dlhá 3 cm a polomer podstavy je 2 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

Riešenie 1.

Kužeľ najprv načrtneme a **náčrt** doplníme o údaje, ktoré poznáme a ktoré máme vypočítať.
Potom načrtneme **sieť** a vypočítame V a S.



Stručný zápis:
$r = 2$ cm
$s = 3$ cm
$v = ?$ cm
$V = ?$
$S = ?$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{5}\ \mathrm{cm}^3$

$V \doteq$ **9,4 cm^3** $\qquad$ Výsledok sme zaokrúhlili na desatiny.

Výšku kužeľa v vypočítame pomocou Pytagorovej vety.

$s^2 = v^2 + r^2$

$3^2 = v^2 + 2^2$

$v = \sqrt{5}$

pokračovanie ▶▶

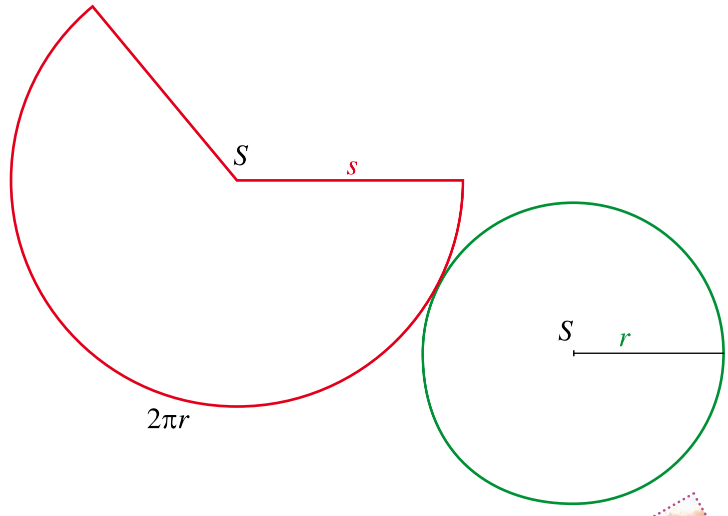
$S = S_p + S_{pl}$

$S = \pi r^2 + \pi r \cdot s$

$S = (3{,}14 \cdot 2^2 + 3{,}14 \cdot 2 \cdot 3)\ \text{cm}^2$

$S = (12{,}56 + 18{,}84)\ \text{cm}^2$

$\mathbf{S \doteq 31{,}4\ cm^2}$



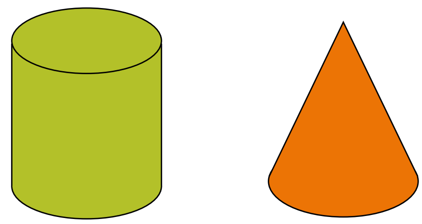
Objem kužeľa je približne 9,4 cm^3 a jeho povrch je 31,4 cm^2.

2.

a) Načrtni kužeľ a **sieť** kužeľa so stranou 4 cm a polomerom podstavy 2 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.
b) Načrtni kužeľ a **sieť** kužeľa s výškou 1,5 cm a polomerom podstavy 1,5 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.
c) Načrtni kužeľ a **sieť** kužeľa s výškou 3,5 cm a priemerom podstavy 4 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

Problémová úloha

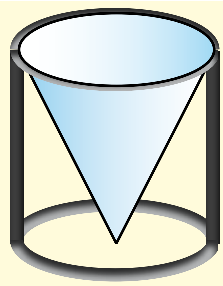
Porovnajte:
- povrch kužeľa a povrch valca s rovnakým polomerom podstavy,
- objem kužeľa a objem valca s rovnakým polomerom podstavy.



3.* Načrtni sieť kužeľa, ktorého pomer polomeru podstavy r ku výške v je 3 : 4. Vypočítaj jeho objem a povrch, ak výška v = 8 cm.

4.* Načrtni sieť kužeľa, ktorého polomer podstavy je 20 % z jeho výšky. Vypočítaj jeho objem a povrch, ak výška v = 6 cm.

5. Ozdobný svietnik sa skladá z podstavca, do ktorého vložili sklenú nádobu tvaru kužeľa s objemom 0,5 litra. Aká vysoká je nádoba, ktorej obsah podstavy je 0,24 dm^2? Pozri obrázok.



Riešenie 5.

Obrázok svietnika doplníme o údaje, ktoré poznáme a ktoré máme vypočítať.

Stručný zápis úlohy:

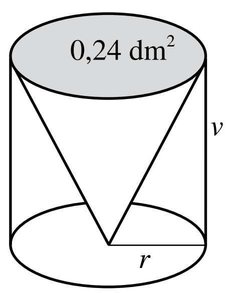
$V = 0{,}5\ \text{l} = 0{,}5\ \text{dm}^3$

$S_p = 0{,}24\ \text{dm}^2$

$v = ?$

Poznáme **objem** kužeľa.
Vzorec na jeho výpočet je:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$$



Do vzorca **dosadíme známe údaje** a vypočítame výšku kužeľa.

$$V = \frac{1}{3}\, S_p \cdot v$$

$$0{,}5 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}24 \cdot v$$

$0{,}5 = 0{,}08 \cdot v \qquad / : 0{,}08$

$6{,}25 = v$

$\mathbf{v = 6{,}25\ dm}$ **Výška nádoby je 6,25 dm.**

6.

a) Vypočítaj **polomer** podstavy kužeľa, ak je plocha jeho podstavy 6,28 cm^2.
b) Vypočítaj **výšku** kužeľa, ktorý má priemer podstavy 3,4 m a objem 12,48 m^3.

7. LETNÉ SLADKOSTI

Kornútik na zmrzlinu má tvar kužeľa s priemerom podstavy 5 cm a hĺbkou 9 cm. Aký objem zmrzliny sa doň zmestí, ak zmrzlinár dá zmrzlinu zarovno okraja kornútika?

8. LIEVIK

Kužeľovitý lievik treba zhotoviť z plechu tak, aby sa výška rovnala priemeru horného otvoru a jeho objem mal 1 liter. Urči rozmery hornej časti lievika a množstvo plechu potrebného na jeho zhotovenie. (Spodný otvor lievika a spodnú rúrku pri tomto výpočte zanedbávame.)

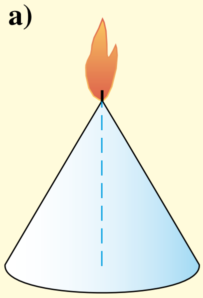
9. ROTUNDA

Starý kostolík má strechu v tvare kužeľa. Potrebujú opraviť 25 % plochy celej strechy. Aká je plocha strechy v m^2, ktorú majú opraviť, ak jej šírka (priemer podstavy kužeľa) je 9 m a kužeľ má výšku 5 m?

10.* Kužeľ a valec majú rovnaké polomery podstáv a výšky, a to $r = 5$ cm a $v = 12$ cm. Koľko percent obsahu plášťa valca tvorí plášť kužeľa?

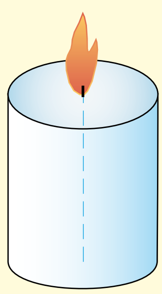
11. Na obrázku sú sviečky rôznych tvarov. V každej je knôt, z ktorého 10 % sa nachádza ešte aj nad sviečkou. Vypočítaj dĺžky knôtov potrebné pre jednotlivé sviečky, ak všetky sviečky majú rovnaký objem, $V = 40$ cm^3.

a)



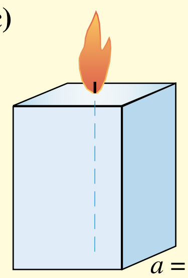
$d = 8$ cm

b)



$d = 5{,}4$ cm

c)



$a = 6$ cm

$a = 6$ cm

Zapamätajte si

Kužeľ

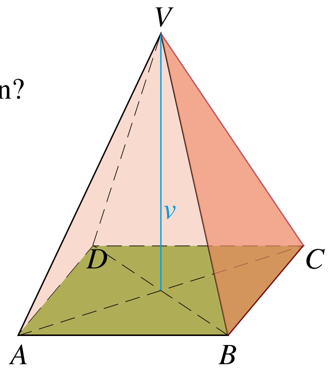
- sieť kužeľa má **podstavu** a **plášť**
- **výška** kužeľa je vzdialenosť vrcholu kužeľa od jeho podstavy
- **podstavou** kužeľa je kruh
- **plášť** je časťou kruhu
- **povrch kužeľa** vypočítame súčtom obsahu podstavy a obsahu plášťa $S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
- **objem kužeľa** je jedna tretina súčinu obsahu podstavy a jeho výšky $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$

8.3 Ihlan, jeho sieť, objem a povrch


Aktron/Wikimedia Commons

Poznáte televíznu vežu Kamzík v Bratislave?
Tvoria ju dva ihlany spojené podstavami, stavali ju v 70. rokoch minulého storočia a má výšku skoro 200 metrov.
Keď sa pozeráme na strechy historických budov či kostolov môžeme v nich rozoznať ihlany. Ihlanové strechy majú rôzne katedrály, dómy, hrady...
Aj pyramídy majú tvar ihlana.

Ako vyzerá ihlan?

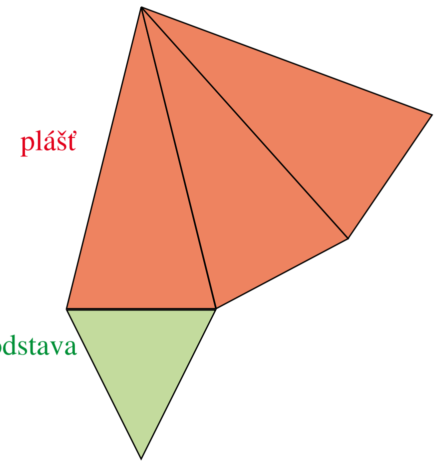


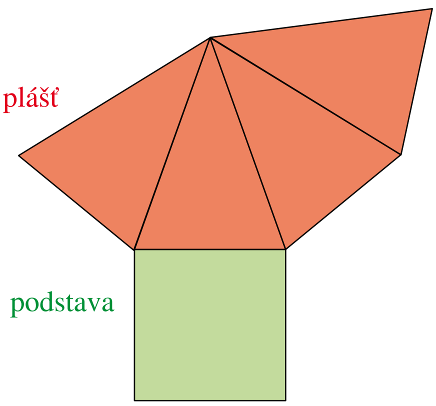
Čo má a čo nemá spoločné s telesami, o ktorých sme sa učili?
Vieme vypočítať jeho **povrch** a **objem**.
Povrch je súčtom obsahu podstavy a plášťa.

Objem je $\frac{1}{3}$ súčinu obsahu podstavy a výšky telesa.

Ihlan má jednu podstavu, ktorou môže byť **trojuholník**, **štvoruholník**, **päťuholník**, ...
Ak je podstavou pravidelný geometrický útvar (napr. štvorec, rovnostranný trojuholník), hovoríme o pravidelnom ihlane.
Plášť ihlana tvoria **rovnoramenné trojuholníky**.
Vzdialenosť vrcholu ihlana od podstavy je výška ihlana.
Zaoberáme sa len kolmými ihlanmi, ktorých výška spája vrchol ihlana so stredom jeho podstavy – je na ňu kolmá.

Siete niektorých ihlanov: **trojboký** **štvorboký**





Povrch ihlana S sa rovná súčtu obsahu podstavy a plášťa.

$S = S_p + S_{pl}$

Od tvaru podstavy závisí výpočet obsahu plášťa:
Podstava: trojuholník ⟶ plášť tvoria tri rovnoramenné trojuholníky
Podstava: štvoruholník ⟶ plášť tvoria štyri rovnoramenné trojuholníky
Objem ihlana V sa rovná jednej tretine súčinu obsahu podstavy a výšky.
Je to teda jedna tretina objemu hranola s rovnakou podstavou a výškou.

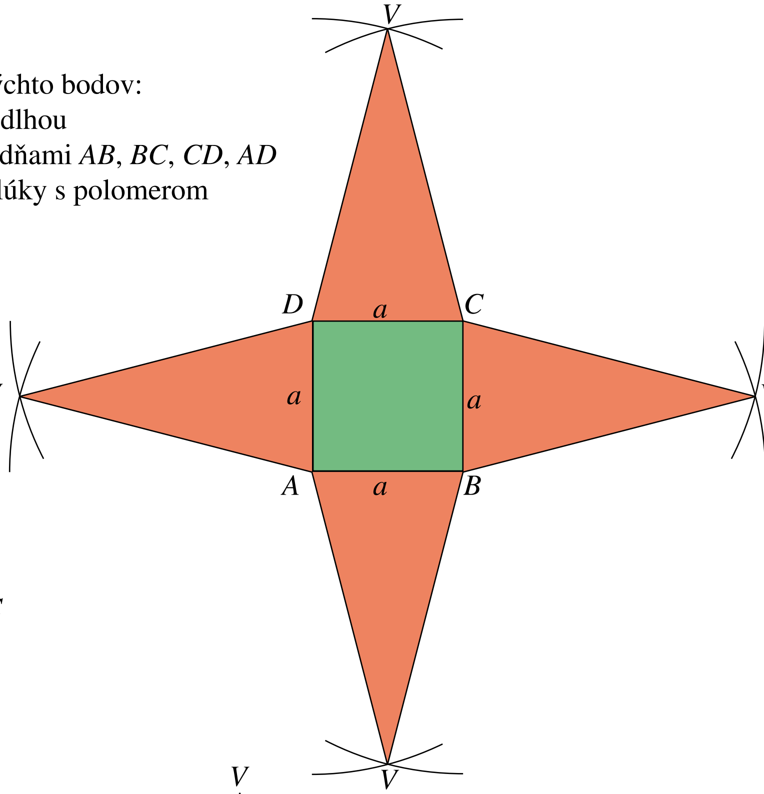
$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

Vypočítame teraz niekoľko úloh.

1. Narysuj **sieť** pravidelného štvorbokého ihlana s hranou podstavy 2 cm a bočnými hranami dĺžky 4 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

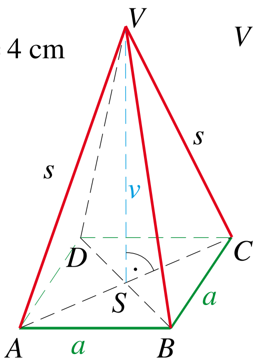
Riešenie 1.

Ihlan najprv **načrtneme** a náčrtok doplníme o údaje, ktoré poznáme a ktoré máme vypočítať.
Potom rysujeme sieť.



Na narysovanie siete je vhodné postupovať podľa týchto bodov:
1. narysujeme štvorec $ABCD$ so stranou a = 2 cm dlhou
2. zostrojíme rovnoramenné trojuholníky so základňami AB, BC, CD, AD (z vrcholov A, B, C, D rysujeme kružnicové oblúky s polomerom 4 cm – dĺžka bočnej hrany)

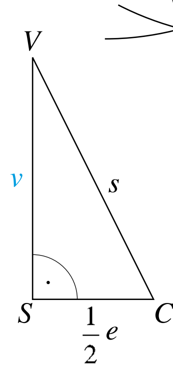
Stručný zápis:
$a = 2$ cm
$s = |AV| = |BV| = |CV| = |DV| = 4$ cm
$V = ?$
$S = ?$



$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot v$$

Na výpočet objemu chýba výška ihlana.



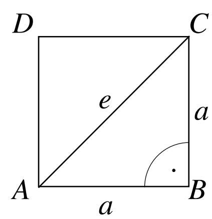
Pre trojuholník CSV použijeme Pytagorovu vetu:

$$s^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot e\right)^2 + v^2$$

$$4^2 = \frac{e^2}{4} + v^2$$

Vidíme, že treba vypočítať aj dĺžku uhlopriečky podstavy – štvorca.

Aj tu môžeme použiť Pytagorovu vetu.



$$e^2 = a^2 + a^2$$

$$e^2 = 2^2 + 2^2$$

$$e^2 = 8 \;\ldots\; \frac{e^2}{4} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$$

Vypočítaný údaj dosadíme do predchádzajúcej rovnice.

$4^2 = \mathbf{2} + v^2$
$v^2 = 14$
$v = \sqrt{14}$

Vypočítaný údaj v dosadíme do vzorca na výpočet objemu ihlana.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{14}\ \text{cm}^3$$

$V \doteq \mathbf{4{,}99\ cm^3}$ Výsledok sme zaokrúhlili na stotiny.

Počítame povrch ihlana.
Vzorec upravíme podľa podstavy ihlana, ktorou je štvorec.

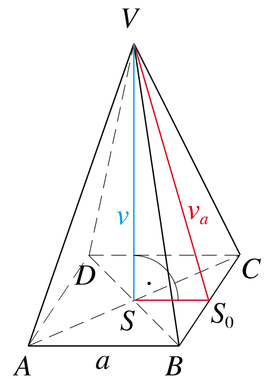
$S = S_p + S_{pl}$

$S = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a \cdot v_a}{2} = a^2 + 2 \cdot a \cdot v_a$

$S = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot v_a$

$S_{pl} = 4 \cdot \dfrac{a \cdot v_a}{2}$
4 trojuholníky

$S_p = a^2$
štvorec



Na výpočet obsahu plášťa chýba výška trojuholníka bočnej steny ihlana.
Vypočítame ju znovu pomocou Pytagorovej vety z trojuholníka SS_0V.
Môžeme použiť aj trojuholník BCV.

$v_a^2 = v^2 + \left(\dfrac{1}{2}a\right)^2$

$v_a = \sqrt{15}$

Výpočet výšky bočnej steny z trojuholníka *BCV* urob samostatne.

$S = (2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{15})\,\mathrm{cm}^2$

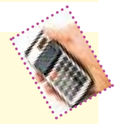
S ≐ **19,49 cm^2** Výsledok sme zaokrúhlili na stotiny.

Objem ihlana je približne 4,99 cm^3 a povrch ihlana je 19,49 cm^2.

2.* Narysuj **sieť** pravidelného trojbokého ihlana s hranou podstavy 4 cm a bočnou hranou 5 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

3.* Narysuj **sieť** pravidelného štvorbokého ihlana s hranou podstavy 3 cm a výškou bočnej steny 4 cm. Vypočítaj jeho **objem** a **povrch**.

4. Vypočítaj **objem** a **povrch** pravidelného trojbokého ihlana, ktorého výška je rovnaká ako dĺžka hrany podstavy, t. j. 10 cm.



5. Vypočítaj dĺžku bočnej hrany pravidelného štvorbokého ihlana, ak je výška ihlana 4 cm a obsah podstavy je 16 cm^2.

6. Strecha má tvar štvorbokého ihlana s podstavou tvaru obdĺžnika s rozmermi 6 m a 8 m a výškou 4 m. Pri búrke sa poškodilo 30 % krytiny strechy. Vypočítaj, koľko krytiny v m^2 treba opraviť.

7. Povrch ihlana so štvorcovou podstavou s hranou dĺžky 6 cm a výškou 6 cm je v porovnaní s povrchom ihlana s obdĺžnikovou podstavou s rozmermi 9 cm a 4 cm a výškou 6 cm:
A väčší **B** menší **C** rovnaký **D** v pomere 2 : 1

Zapamätajte si

Ihlan
- sieť ihlana má **jednu podstavu** a **plášť**
- **výška** ihlana je vzdialenosť vrcholu ihlana od jeho podstavy
- **podstavou** môže byť trojuholník, štvorec, obdĺžnik, päťuholník, šesťuholník ...
- ak je podstavou pravidelný útvar, získame **pravidelný ihlan**
- **plášť** ihlana tvoria bočné steny, sú to trojuholníky
- **povrch ihlana** je súčet obsahu podstavy a obsahu plášťa $S = S_p + S_{pl}$
- **objem ihlana** je jedna tretina súčinu obsahu podstavy a výšky ihlana $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$

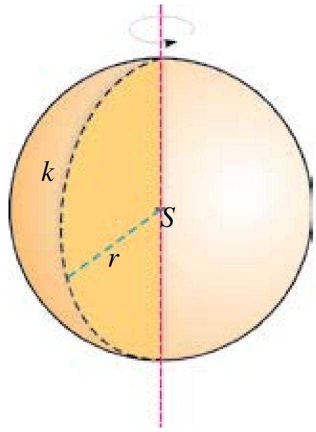


Slovo guľa. Kde všade sa vyskytuje.

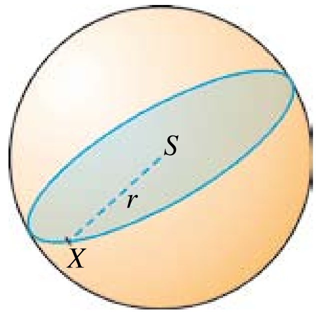
Guľa – Zem.
Guľa – snehová guľa.
Guľa – na hranie – lopta.

Ako vzniká guľa?

Guľa môže vzniknúť tak, že polkruh otáčame okolo jeho priemeru, alebo kruh okolo osi súmernosti.
Minca rotujúca na hrane, tiež „vytvára guľu“.



Guľa je geometrické teleso. Skladá sa zo všetkých bodov priestoru *X*, ktoré majú od pevného bodu *S* (stredu gule) vzdialenosť menšiu alebo rovnajúcu sa polomeru gule *r*.
Guľovú plochu tvoria všetky body *X* priestoru, ktorých vzdialenosť od stredu *S* sa rovná polomeru gule $|SX| = r$.
Guľovú plochu nemožno rozvinúť do roviny, teda sieť gule nemôžeme zostrojiť.
Určite si viete predstaviť, prečo sa to nedá.



Môžeme ju však rezať. Rovina, ktorá pretína guľovú plochu v kružnici sa nazýva sečná rovina.

Objem gule vypočítame pomocou vzorca:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

Povrch gule vypočítame pomocou vzorca:

$$S = 4 \cdot \pi r^2$$

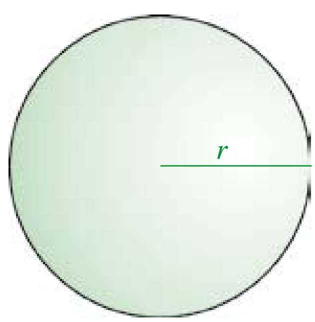
Projektová úloha
Planétu Zem považovali kedysi ľudia za plochú, ale existovali aj iné názory na jej tvar.
Zistite, aké boli názory na tvar našej planéty v minulosti.
Aký tvar prisudzujeme našej planéte dnes?

1. Vypočítaj **objem** a **povrch** gule. Počítaj s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.
a) s polomerom 4 cm **b)** s priemerom 10 cm

Riešenie 1.

a) Úlohu vypočítame dosadením známych hodnôt do vzorcov.

$r = 4$ cm
$V = ?$
$S = ?$



$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 \ \text{cm}^3$$

$\mathbf{V \doteq 267{,}95\ cm^3}$ Výsledok sme zaokrúhlili na stotiny.

$$S = 4 \cdot \pi r^2$$

$$S = 4 \cdot \pi \cdot 4^2 \ \text{cm}^2$$

$\mathbf{S \doteq 200{,}96\ cm^2}$

Objem gule je približne 267,95 cm^3, povrch gule je 200,96 cm^2.

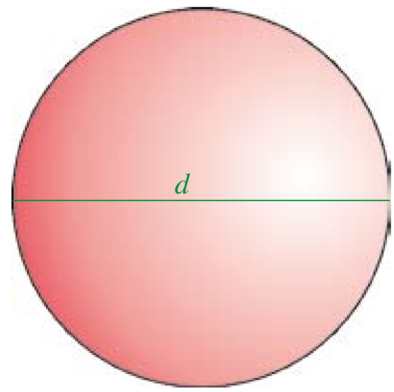
pokračovanie

b) Úlohu vypočítame jednoduchým dosadením známych hodnôt do vzorcov.

$d = 10$ cm, $r = 10 : 2 = 5$ cm

$V = ?$

$S = ?$



$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 \ \text{cm}^3$$

$\boldsymbol{V \doteq 523{,}33\ \text{cm}^3}$ Výsledok sme zaokrúhlili na stotiny.

$$S = 4 \cdot \pi r^2$$

$$S = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \ \text{cm}^2$$

$\boldsymbol{S \doteq 314\ \text{cm}^2}$

Objem gule je približne 523,33 cm^3, povrch gule je približne 314 cm^2.

2. Počítaj s približnou hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

a) Urči **polomer** gule, ktorej povrch je 5,26 m^2.

b) Urči **priemer** gule, ktorej povrch je 4,2 cm^3.

Riešenie 2.

Úlohu vypočítame dosadením známych hodnôt do vzorcov.

Môžeme použiť vyjadrenie neznámej zo vzorca alebo rovnicu.

a) Počítame s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

$S = 4 \cdot \pi r^2$

$5{,}26 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$5{,}26 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \qquad / : 12{,}56$

$r^2 = 0{,}4187...$

$r = \sqrt{0{,}418\,7...}$

$\boldsymbol{r \doteq 0{,}65\ \text{m}}$ Výsledok sme zaokrúhlili na stotiny.

Vyjadrenie r zo vzorca na výpočet povrchu:

$$S = 4 \cdot \pi r^2 \qquad / : 4\pi$$

$$\frac{S}{4\pi} = r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

b)

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

$$4{,}2 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \qquad / \cdot 3$$

$$12{,}6 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \qquad / : 12{,}56$$

$$r^3 = 1{,}003...$$

$$r = \sqrt[3]{1{,}003...}$$

Priemer d = $2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt[3]{1{,}003...} \doteq \mathbf{2{,}002\ cm}$

Vyjadrenie r zo vzorca na výpočet objemu:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \qquad / \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot V = \pi r^3 \qquad / : \pi$$

$$\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} = r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

3.* Vypočítaj polomer gule, ktorá má rovnaký objem ako kužeľ s polomerom podstavy 5 cm a výškou 7 cm.

4. Vyjadri v štvorcových centimetroch povrch gule, ktorej polomer sa rovná jednej štvrtine polomeru kužeľa. Priemer podstavy kužeľa je 20 cm.

5.* Objem gule je o 20 % väčší ako objem kužeľa. Urči jej povrch, ak objem kužeľa je 320 cm^3.

6.* Do drevenej gule s priemerom 20 dm bol vyvŕtaný otvor tvaru ihlana. Vypočítaj, koľko kubických centimetrov dreva vyvŕtali, ak to bola jedna štvrtina objemu gule.

7.* Objem gule s polomerom dvakrát menším, ako je polomer podstavy kužeľa s výškou rovnakou, ako je dĺžka jeho polomeru, je:

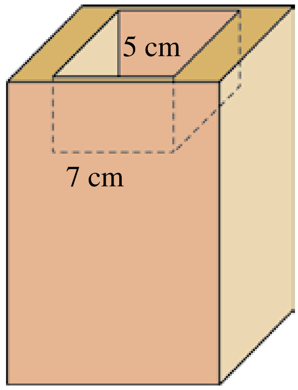
A o polovicu menší
B dvakrát väčší
C o polovicu väčší
D dvakrát menší

Projektová úloha

Lietať sa v minulosti začalo najprv pomocou balónov. Prvé balóny mali zvyčajne tvar gule.
Zistite na internete niečo z histórie prvých letov balónov. Aké tvary majú dnešné balóny?

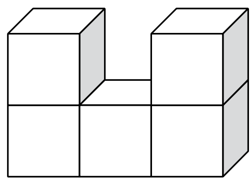
Vyskúšajte sa

V každej úlohe je len jedna z uvedených možností správna.
Na výpočty použite $\pi \doteq 3{,}14$.



1. Do dreveného kvádra urobili do hĺbky 5 cm otvor tvaru štvorca (pozri obrázok). Ak mala strana štvorca dĺžku 7 cm, objem hranola sa takto zmenšil o:

A $49\ cm^3$ B $560\ cm^3$
C $245\ cm^3$ D $490\ cm^3$

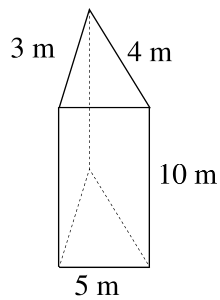


2. Teleso na obrázku je zložené z 5 kociek s hranou dlhou 10 cm. Povrch tohto telesa je:

A $2\,200\ cm^2$ B $1\,900\ cm^2$
C $1\,100\ cm^2$ D $1\,500\ cm^2$

3. Povrch štvorbokého hranola je $3{,}4\ dm^2$, hrany podstavy sú dlhé 8 cm a 10 cm. Objem hranola je:

A $800\ cm^3$ B $180\ cm^3$
C $3{,}6\ dm^3$ D $0{,}4\ dm^3$



4. Objem trojbokého hranola na obrázku je:

A $60\ m^3$ B $100\ m^3$
C $120\ m^3$ D $75\ m^3$

5. Do valcovej nádoby vliali 3,5 l vody. Ak mala nádoba priemer podstavy 3 dm, voda siahala približne do výšky:

A 9 cm B 7 cm C 5 cm D 3 cm

6. Cestný valec má priemer 2 m a šírku 3 m. Ak sa otočí päťkrát, tak zvalcuje približne:

A $18{,}84\ m^2$ B $25{,}12\ m^2$ C $94{,}2\ m^2$ D $125{,}6\ m^2$

7. Kužeľ je vysoký 12 cm a polomer podstavy je 9 cm. Jeho povrch zaokrúhlený na jednotky je:

A $371\ m^2$ B $678\ m^2$ C $479\ m^2$ D $523\ m^2$

8. Ozdobný predmet má tvar pravidelného štvorbokého ihlana, podstavnú hranu 0,7 dm a bočnú hranu 1,4 dm dlhú. Výška tohto predmetu je približne:

A 1,9 dm B 1,7 dm C 1,5 dm D 1,3 dm

9. Keramickú guľu s priemerom 10 dm prerezali na dve rovnaké časti. Plocha rezu bola približne:

A $157\ cm^2$ B $78{,}5\ cm^2$ C $314\ cm^2$ D $523\ cm^2$

5 Grafické znázorňovanie závislostí

5.1 Pravouhlá sústava súradníc

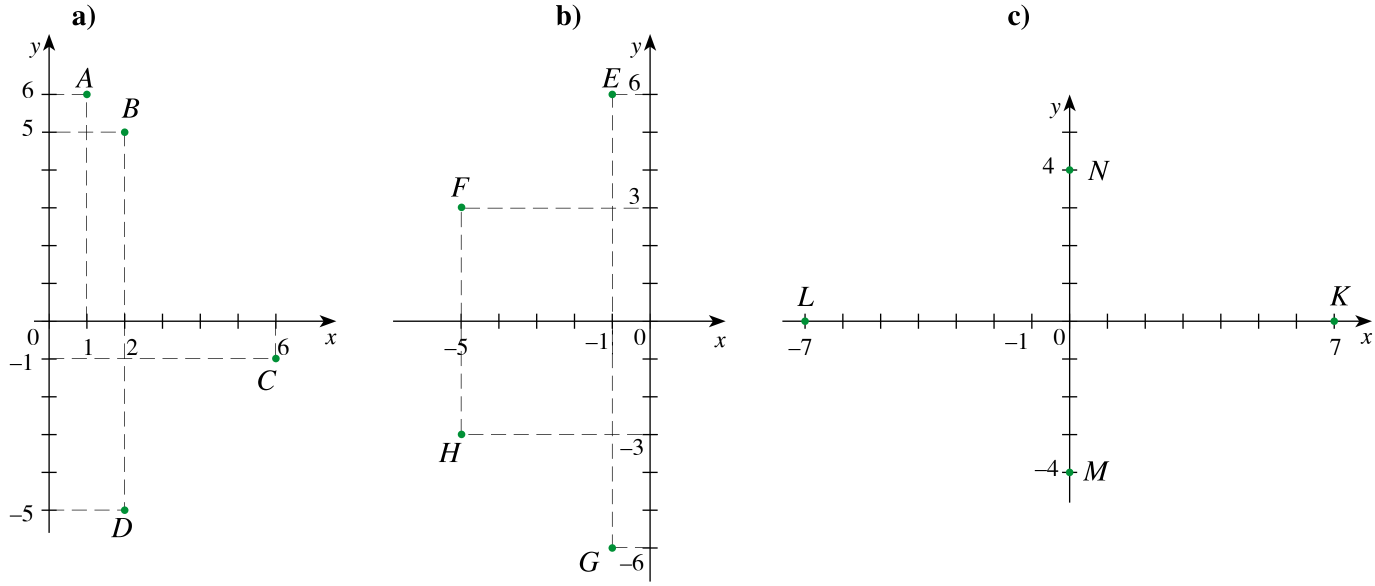
5. Súradnice vrcholov trojuholníka: [–4, 0], [–2, 0], [–3, 3].
Súradnice vrcholov obdĺžnika: [1, 1], [2, 1], [2, 4], [1, 4].
Súradnice vrcholov lichobežníka: [–5, –1], [–1, –1], [–4, –4], [–2, –4].
Súradnice vrcholov kosodĺžnika: [1, –4], [3, –4], [4, –2], [2, –2].

6. *A*[1, 3], *B*[–3, 4], *C*[–2, 2], *D*[3, 2], *E*[–3, –1], *F*[1, –2], *G*[4, –3], *H*[–1, –3].

7. *A*[0, 4], *B*[0, 2], *C*[–1, 0], *D*[4, 0], *E*[1, 0], *F*[–3, 0], *G*[0, –1], *H*[0, –2].

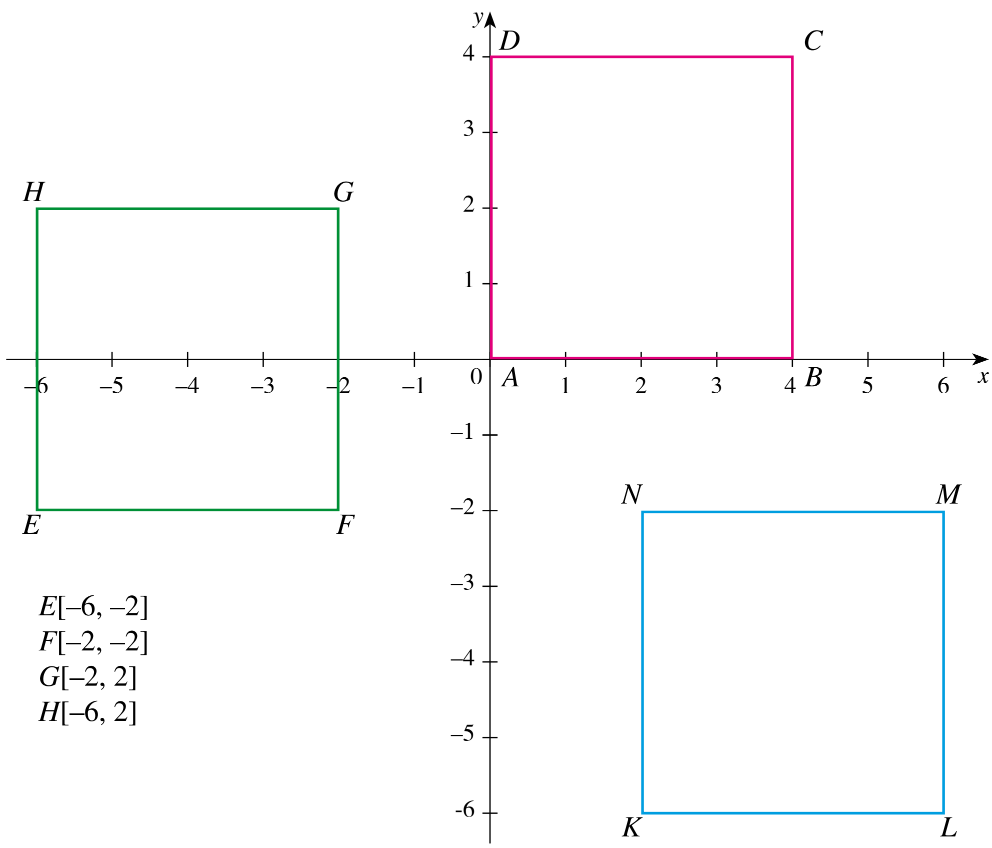
9.

a) **b)** **c)**



11. Napríklad:

a)

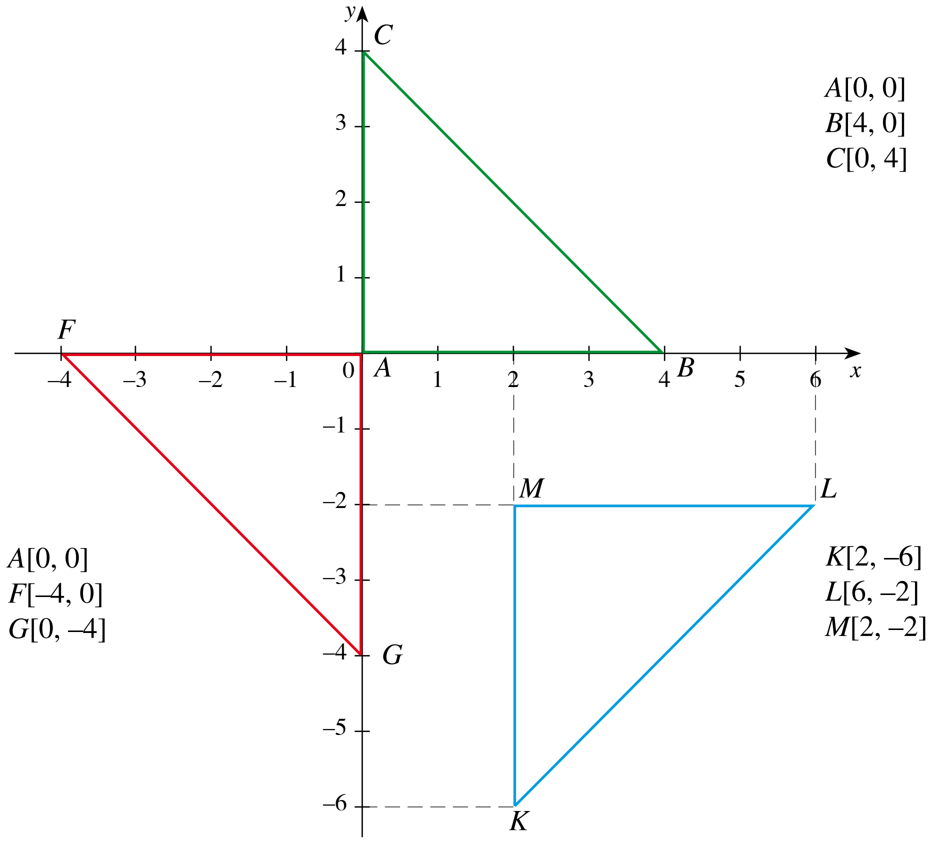


A[0, 0]
B[4, 0]
C[4, 4]
D[0, 4]

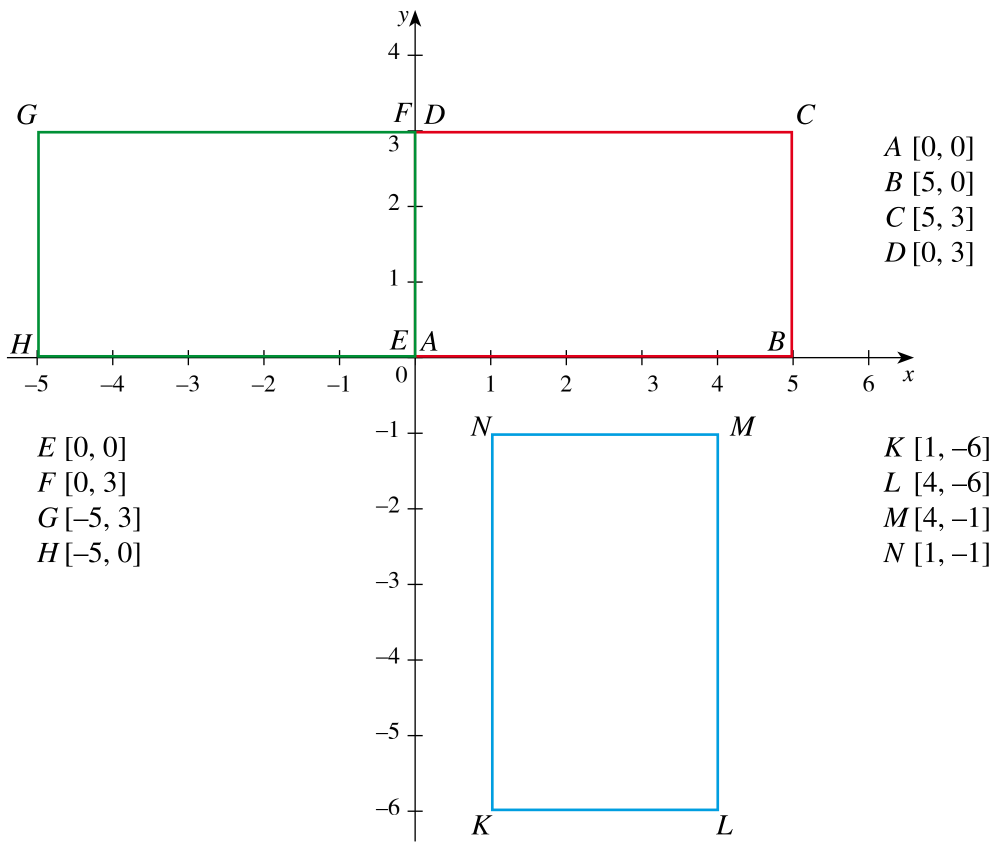
E[–6, –2]
F[–2, –2]
G[–2, 2]
H[–6, 2]

K[2, –6]
L[6, –6]
M[6, –2]
N[2, –2]

b)*

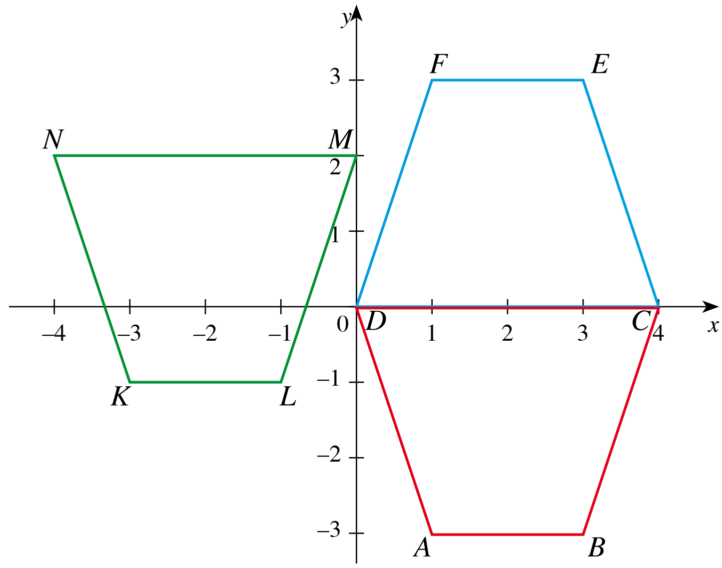

y
x
C
A
B
F
G
M
L
K
A[0, 0]
B[4, 0]
C[0, 4]
A[0, 0]
F[–4, 0]
G[0, –4]
K[2, –6]
L[6, –2]
M[2, –2]

c)


y
x
G
F
D
C
H
E
A
B
N
M
K
L
A [0, 0]
B [5, 0]
C [5, 3]
D [0, 3]
E [0, 0]
F [0, 3]
G [–5, 3]
H [–5, 0]
K [1, –6]
L [4, –6]
M [4, –1]
N [1, –1]

d)*

K [–3, –1]
L [–1, –1]
M [0, 2]
N [–4, 2]



D [0, 0]
C [4, 0]
E [3, 3]
F [1, 3]

A [1, –3]
B [3, –3]
C [4, 0]
D [0, 0]

13.

body	P	O	L	U	D	N	$Í$	K
súradnice	[–4, 0]	[–2, 2]	[4, 3]	[–3, –3]	[0, –1]	[3, –4]	[7, 0]	[0, 4]

15. **a)** Napríklad: trojuholníky *AEC*, *AFE*, *BCD*. **b)** Napríklad: obdĺžniky *ABED*, *BGFE*, *CHGB*.

16. K[5, 2], L[2, 0], M[–1, 0], N[2, 5], O[7, –1], P[–2; –1,5], R[2; –4,5], S[0, –6]

18.* **a)** K'[1, 4], L'[–1, 6], M'[5, –4], N'[–2, –3] **b)** D'[1, –2], E'[–3, –4], F'[5, 2], G'[–4, 1]

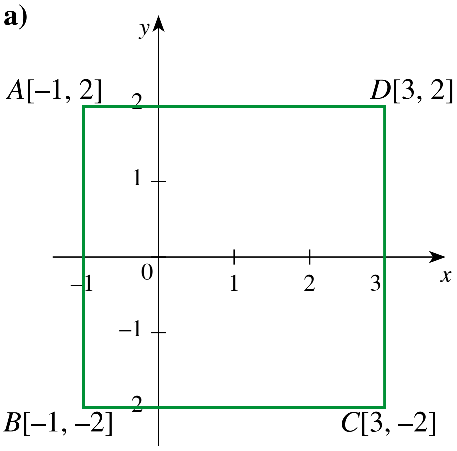
20.* **a)** P'[–3, –5], R'[3, 5], Q'[3, –5], T'[–3, 5] **b)** A'[–1, 4], B'[8, 1], C'[4, 9], D'[–4, 10], E'[2, 10], F'[5, 6]

21.** Napríklad:

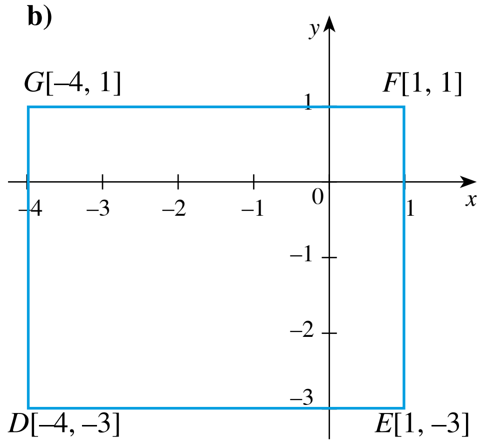
a) C[–1, –3], D[2, –1] **b)** E[–3, –2], F[2, –3] **c)** G[2, –4] **d)** F[4, 0]

22. Napríklad:

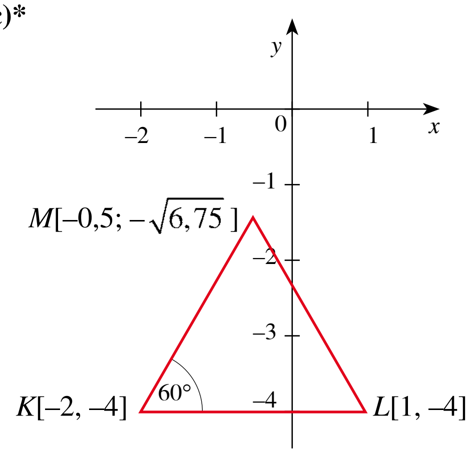
a)



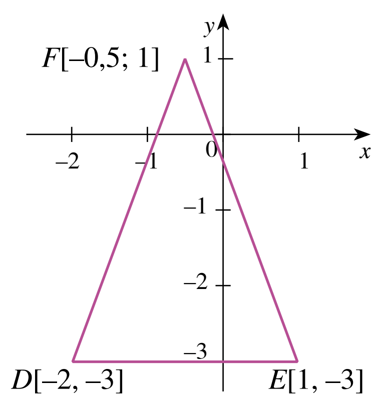
b)



c)*



d)*



Vyskúšajte sa

1B 2A 3B 4A 5C 6C 7D 8C 9B

5.2 Rôzne spôsoby znázorňovania – grafy závislostí. Súvis grafu s niektorými základnými vlastnosťami závislostí (rast, klesanie, najväčšie a najmenšie hodnoty)

4.

počet hodín (čas)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
počet km (dráha)	5,5	8,25	11	13,75	16,5	19,25	22	24,75

Graf tvoria body so súradnicami: [1; 5,5], [1,5; 8,25], [2, 11], [2,5; 13,75], [3; 16,5], [3,5; 19,25], [4, 22], [4,5; 24,75].

5. Za 1 hodinu 45 m, za 1 minútu 0,75 m.

počet minút (čas)	5	10	15	20	25	30
počet m (dráha)	3,75	7,5	11,25	15	18,75	22,5

Graf tvoria body so súradnicami: [5; 3,75], [10; 7,5], [15; 11,25], [20, 15], [25; 18,75], [30; 22,5].

6. **a)**

počet hodín (čas)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
počet km, ktoré skupina prejde	4,6	9,2	13,8	18,4	23
počet km, ktoré má ešte skupina prejsť	**21,4**	**16,8**	**12,2**	**7,6**	**3**

Graf tvoria body so súradnicami: [1; 21,4], [2; 16,8], [3; 12,2], [4; 7,6], [5, 3].

b) Počet hodín 26 : 4,6 = 5,652... zaokrúhlime nahor na desatiny... 5,7 h, čo je 5 h a 42 minút. Skupina príde približne o 13.12 h.

7. **a)** Za 1 sekundu prejde 60 : 135 = 0,4 cm (zaokrúhlené aritmeticky na desatiny), za 15 sekúnd prejde (60 : 135) · 15 ≐ 6,7 cm.

počet sekúnd (čas)	1	15	30	45	60	75
počet cm (dráha)	0,4	6,7	13,3	20	26,7	33,3

b)

počet sekúnd (čas)	15	30	45	60	75
počet cm od cieľa	53,3	46,7	40	33,3	26,7

Graf tvoria body so súradnicami: [15; 53,3], [30; 46,7], [45, 40], [60; 33,3], [75; 26,7].

9. Kredit pretelefonuje za 300 : 6 = 50 dní. Tabuľku zostavíme napríklad pre 7 dní.

počet dní (čas)	1	2	3	4	5	6	7
počet pretelefono-vaných minút	6	12	18	24	30	36	42

Graf tvorí 50 bodov, uvedieme 7 bodov so súradnicami: [1, 6], [2, 12], [3, 18], [4, 24], [5, 30], [6, 36], [7, 42].

10. Paušál pretelefonuje za 20 : 0,80 = 25 dní.

počet dní (čas)	1	2	3	4	5	6	7
počet eur, ktoré pretelefonuje	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60
počet eur, ktoré mu z paušálu ostávajú	19,20	18,40	17,60	16,80	16,00	15,20	14,40

Graf tvorí 25 bodov, uvedieme 7 bodov so súradnicami: [1; 19,20], [2; 18,40], [3; 17,60], [4; 16,80], [5; 16,00], [6; 15,20], [7; 14,40].

12. Vzorec na výpočet obsahu obdĺžnika so stranami *a* a *b*: $S = a \cdot b$.
Do tabuľky uvedieme len niekoľko hodnôt pre stranu *b* a obsah obdĺžnika.

dĺžka strany *a* (cm)	2	2	2	2	2	2	2
dĺžka strany *b* (cm)	3	4	5	6	7	8	9
obsah obdĺžnika (cm^2)	6	8	10	12	14	16	18

Ak dĺžku strany ***b*** postupne zväčšujeme o 1 cm, obsah obdĺžnika sa postupne zväčšuje o 2 cm.
Graf tvorí nekonečný počet bodov závislých od dĺžky strany *b*. Súradnice bodov, ktorých hodnoty sú uvedené v tabuľke: [3, 6], [4, 8], [5, 10], [6, 12], [7, 14], [8, 16], [9, 18].

13. Vzorec na výpočet obvodu rovnostranného trojuholníka so stranou a: $o = 3 \cdot a$.
Do tabuľky uvedieme len niekoľko hodnôt pre stranu a a obvod trojuholníka.

dĺžka strany *a* (cm)	2	3	4	5	6	7	8
obvod trojuholníka *o* (cm)	6	9	12	15	18	21	24

Ak stranu a zväčšujeme postupne o 1 cm, obvod rovnostranného trojuholníka sa zväčšuje postupne o 3 cm. Graf tvorí nekonečný počet bodov závislých od dĺžky strany a, uvedieme súradnice bodov, ktorých hodnoty sú uvedené v tabuľke: [2, 6], [3, 9], [4, 12], [5, 15], [6, 18], [7, 21], [8, 24].

16. Najviac pretelefonovala v sobotu (40 minút), najmenej vo štvrtok (5 minút).
Za týždeň pretelefonovala spolu $10 + 20 + 30 + 5 + 20 + 40 + 10 = 135$ minút.
Za pretelefonované minúty zaplatila $135 \cdot 0{,}08 = 10{,}80$ eur.

17. Hladina bola vyššia ako prechádzajúci deň v týchto dňoch: 2., 3., 5., 6., 7., 8.
Hladina bola nižšia ako prechádzajúci deň v týchto dňoch: 4., 9., 10., 11., 12., 13.
Stav hladiny bol najvyšší 8. deň.
Stav hladiny bol najnižší 13. a 14. deň.

18. Počet kilogramov odovzdaného papiera bol väčší ako predchádzajúci deň v týchto dňoch: 2. deň, 4. deň, 5. deň, 7. deň, 8. deň, 9. deň. Počet kilogramov odovzdaného papiera bol menší ako predchádzajúci deň v týchto dňoch: 3. deň, 6. deň, 10. deň. Najviac 5. deň, najmenej 6. deň.

19. **A** – nie je pravdivé, **B** – nie je pravdivé, **C** – nie je pravdivé, **D** – je pravdivé.

Vyskúšajte sa

1F 2U 3N 4K 5C 6I 7A Chýbajúce slovo je **FUNKCIA**.

5.3 Priama a nepriama úmernosť ako druhy závislostí. Graf a rovnica priamej a nepriamej úmernosti

6. **a)** Výraz s premennými: $s = 7 \cdot t$.

***t* – čas** (h)	1	2	3	4	5
***s* – dráha** (km)	7	14	21	28	35

b) Graf tvorí 5 bodov so súradnicami: [1, 7], [2, 14], [3, 21], [4, 28], [5, 35].

7. **a)** Výraz s premennými: $s = 30 \cdot t$.

***t* – čas** (h)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
***s* – dráha** (km)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

b) Graf tvorí 10 bodov so súradnicami: [0,5; 15], [1, 30], [1,5; 45], [2, 60], [2,5; 75], [3, 90], [3,5; 105], [4, 120], [4,5; 135], [5, 150].

9. **Rovnica**: $v = \frac{20}{t}$ alebo $y = \frac{20}{x}$.

***t* – čas** (min)	10	20	30	40
***v* – rýchlosť** (km/h)	120	60	40	30

Graf tvoria 4 body so súradnicami: [10, 120], [20, 60], [30, 40], [40, 30].

10. **Rovnica**: $v = \frac{360}{t}$ alebo $y = \frac{360}{x}$.

t alebo ***x* – čas** (h)	1	1,5	2	2,5	3	3,5
v alebo ***y* – rýchlosť** (km/h)	360	240	180	144	120	$\doteq 103$

Graf tvorí 6 bodov so súradnicami: [1, 360], [1,5; 240], [2, 180], [2,5; 144], [3, 120], [3,5; 103].

12. **Rovnica**: $y = 50 \cdot x$

x – **počet mesiacov**	1	2	3	4	5	6
y – **výdavky za elektrinu (€)**	50	100	150	200	250	300

Graf tvorí 12 bodov so súradnicami: [1, 50], [2, 100], [3, 150], [4, 200], [5, 250], [6, 300].

13. **Rovnica**: $y = 5 \cdot x$ (na jeden týždeň dostane 100 : 20 = 5 eur)

x – **počet týždňov**	1	2	3	4
y – **našetrená suma (€)**	5	10	15	20

Graf tvoria 4 body so súradnicami: [1, 5], [2, 10], [3, 15], [4, 20].

14. **Rovnica**: $y = 2{,}30 \cdot x$

x – **počet toastov**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y – **zaplatená suma (€)**	2,30	4,60	6,90	9,20	11,50	13,80	16,10	18,40	20,70	23

Graf tvorí 9 bodov so súradnicami: [1; 2,30], [2; 4,60], [3; 6,90], [4; 9,20], [5; 11,50], [6; 13,80], [7; 16,10], [8; 18,40], [9; 20,70], [10, 23].

15. **Rovnica**: $y = 3 \cdot x$

x – **čas** (h)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y – **dĺžka natretého plota** (m)	1,5	3	4,5	6	7,5	9

Graf tvorí 6 bodov so súradnicami: [0,5; 1,5], [1, 3], [1,5; 4,5], [2, 6], [2,5; 7,5], [3, 9].

16. **a)**

x – **čas** (min)	4	6	8	10	12	14
y – **počet úloh**	2	3	4	5	6	7

Graf tvorí 6 bodov so súradnicami: [4, 2], [6, 3], [8, 4], [10, 5], [12, 6], [14, 7].

b) Všetky úlohy vyrieši za 18 · 2 minúty = 36 minút.

c) Rovnica: $y = x : 2 = \frac{x}{2}$

17. Za 1 minútu natečie do bazéna 12 m^3 : 60 minút = 0,2 m^3 vody.

a)

x – **čas** (min)	10	20	30	40	50	60
y – **množstvo vody** (m^3)	2	4	6	8	10	12

Graf tvorí 6 bodov so súradnicami: [10, 2], [20, 4], [30, 6], [40, 8], [50, 10], [60, 12].

b) Rovnica: $y = 0{,}2 \cdot x$

19. Dvom koscom by pokosenie lúk trvalo 4 hodiny.

a)

x – **počet koscov**	2	3	4	5	6
y – **čas kosenia lúk** (h)	4	$2\frac{2}{3}$	2	$1\frac{3}{5}$	$1\frac{1}{3}$

Graf tvorí 5 bodov so súradnicami: [2, 4], [3, $2\frac{2}{3}$], [4, 2], [5, $1\frac{3}{5}$], [16, $1\frac{1}{3}$].

b) Rovnica: $y = \frac{8}{x}$

20. **a)**

x – **počet prítokov**	1	2	3	4	5	6
y – **čas naplnenia bazéna vodou** (h)	12	6	4	3	2,4	2

Graf tvorí 6 bodov so súradnicami: [1, 12], [2, 6], [3, 4], [4, 3], [5; 2,4], [6, 2].

b) Rovnica: $y = \frac{12}{x}$

23.* **a)** Koeficient je 14 : 2 = 7, potom rovnica je $y = 7 \cdot x$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	14	21	28	35	42	49

b) Koeficient je 3,2 : 8 = 0,4, potom rovnica je $y = 0{,}4 \cdot x$.

x	2	4	6	8	10	12	14
y	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4,8	5,6

c) Koeficient je 7,5 : 5 = 1,5, potom rovnica je $y = 1{,}5 \cdot x$.

x	4	6	2	0	8	5	7
y	6	9	3	0	12	7,5	10,5

d) Koeficient je 3,54 : 7,08 = 0,5, potom rovnica je $y = 0{,}5 \cdot x$.

x	0,5	3,6	7,08	8,1	1,4	5,06	0,25
y	0,25	1,8	3,54	4,05	0,7	2,53	0,125

e) Koeficient je 20,8 : 5,2 = 4, potom rovnica je $y = 4 \cdot x$.

x	1,125	3,2	1,15	5,2	0,21	2,8	3,125
y	4,5	12,8	4,6	20,8	0,84	11,2	12,5

24. **a)** Koeficient je 2,25 · 2 = 4,5, potom rovnica je $y = \dfrac{4{,}5}{x}$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4,5	2,25	1,5	1,125	0,9	0,75	$\frac{9}{14}$

b) Koeficient je 1,5 · 2 = 3, potom rovnica je $y = \dfrac{3}{x}$.

x	0,5	2	1,5	9	10	0,3	1
y	6	1,5	2	$\frac{1}{3}$	0,3	10	3

c)* Koeficient je 0,25 · 12 = 3, potom rovnica je $y = \dfrac{3}{x}$.

x	$\frac{1}{3}$	1	3	0,25	10	$\frac{10}{3}$	0,5
y	9	3	1	12	0,3	0,9	6

d)* Koeficient je 0,3 · 1 = 0,3, potom rovnica je $y = \dfrac{0{,}3}{x}$.

x	0,3	0,1	0,9	0,05	0,36	$\frac{1}{40}$	0,18
y	1	3	$\frac{1}{3}$	6	$\frac{5}{6}$	12	$\frac{5}{3}$

25. **a)**

x – čas (h)	2	4
y – dĺžka prejdenej trasy (km)	9	18

b) Rovnica: $y = 4{,}5 \cdot x$.

c) Rovnica je rovnicou priamej úmernosti.

26. **A** – nie je pravdivá, **B** – je pravdivá, **C** – je pravdivá, **D** – nie je pravdivá.

27. **a)** $y = \frac{1}{5} \cdot x$, $k = \frac{1}{5}$; $y = 0{,}4 \cdot x$, $k = 0{,}4$; $y = 1{,}5 \cdot x$, $k = 1{,}5$

b) $y = \frac{0{,}2}{x}$, $k = 0{,}2$; $y = \frac{5}{x}$, $k = 5$; $y = \frac{2}{3x}$, $k = \frac{2}{3}$

Vyskúšajte sa

1D 2B 3A 4B 5A 6A 7B 8B 9C 10B 11A

5.4 Lineárna závislosť. Graf a rovnica lineárnej funkcie

3. **Rovnica** je $y = 5 + 1{,}5 \cdot x$, kde x je počet kamarátov, y je počet vyzbieraných eur na darček.
$(17 - 5) : 1{,}50 = 8$, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

4. **Rovnica** je $y = 1\,020 - 240 \cdot x$, kde x je počet týždňov, y je počet eur, ktoré zostanú z príjmu rodiny po jednotlivých týždňoch.

6. **a)** $k = 4$, $q = -3$, funkcia je rastúca, **b)** $k = 0{,}4$, $q = 0{,}2$, funkcia je rastúca,

c) $k = -5$, $q = 1$, funkcia je klesajúca, **d)** $k = \dfrac{1}{4}$, $q = -1$, funkcia je rastúca,

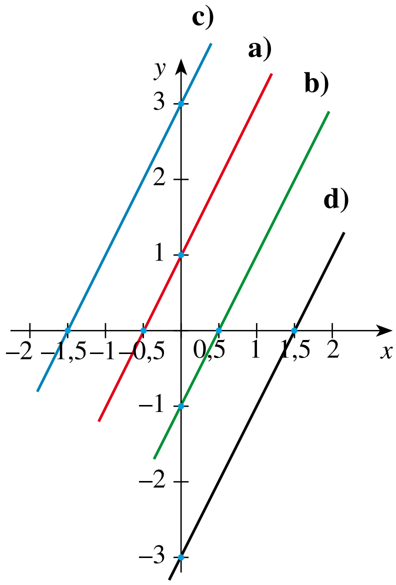
e) $k = -2$, $q = 4$, funkcia je klesajúca, **f)** $k = \dfrac{1}{5}$, $q = 0$, funkcia je rastúca.

9. **a)** $P_y[0; 0{,}5]$, $P_x[-0{,}25; 0]$ **b)** $P_y\left[0, \dfrac{5}{3}\right]$, $P_x[5, 0]$

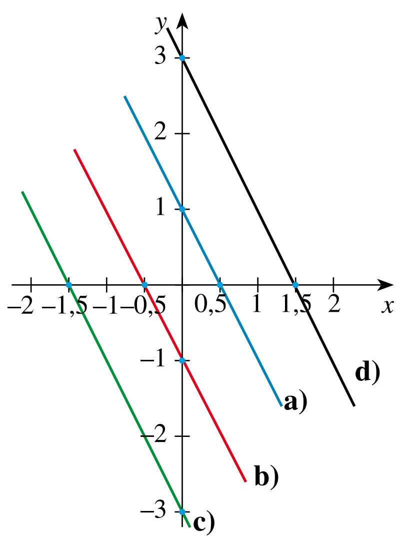
c) $P_y[0; 1{,}75]$, $P_x[-7, 0]$ **d)** $P_y[0, 4]$, $P_x[8, 0]$

e) $P_y\left[0, \dfrac{2}{5}\right]$, $P_x\left[\dfrac{2}{15}, 0\right]$

11. Priesečníky grafov funkcií s osami súradníc sú:
a) $P_y[0, 1]$, $P_x[-0{,}5; 0]$ **b)** $P_y[0, -1]$, $P_x[0{,}5; 0]$ **c)** $P_y[0, 3]$, $P_x[-1{,}5; 0]$ **d)** $P_y[0, -3]$, $P_x[1{,}5; 0]$



12. Priesečníky grafov funkcií s osami súradníc sú:
a) $P_y[0, 1]$, $P_x[0{,}5; 0]$ **b)** $P_y[0, -1]$, $P_x[-0{,}5; 0]$ **c)** $P_y[0, -3]$, $P_x[-1{,}5; 0]$ **d)** $P_y[0, 3]$, $P_x[1{,}5; 0]$



13. $y = 0{,}25x + 4$ $\qquad y = \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot (x - 1) = 0{,}25x - 0{,}25$

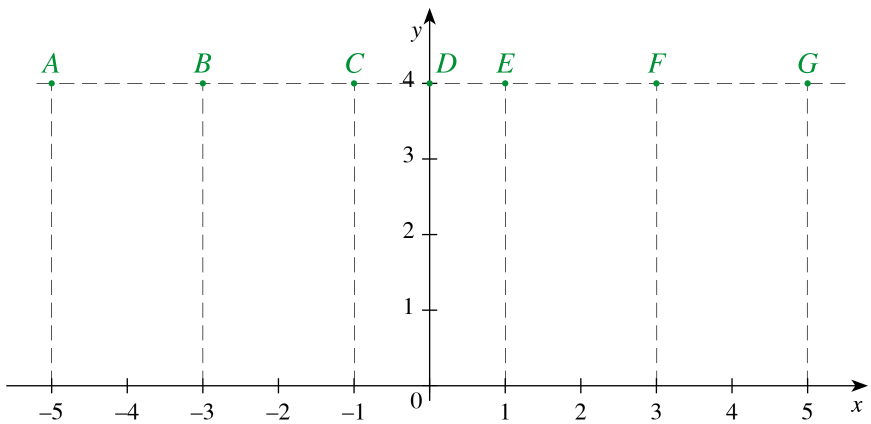
14. $y = x + 2$ $\qquad$ $y = \dfrac{x+8}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot (x+8) = 0{,}25x + 2$

16. **b)** $y = \dfrac{x-2}{4}$

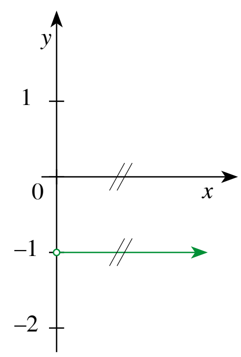
17.* **a)** $x = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ **b)** $x \geq \dfrac{-3}{4}$ $\qquad$ **c)** $x \geq 0$ $\qquad$ **d)** $-16{,}5 < x < 28{,}5$

18.* **a)** $y = -x - 2$ $\qquad$ **b)** $y = \dfrac{5}{3} \cdot x - 5$ $\qquad$ **c)** $y = -0{,}2x - 0{,}1$ $\qquad$ **d)** $y = -\dfrac{15}{8} \cdot x + \dfrac{3}{4}$

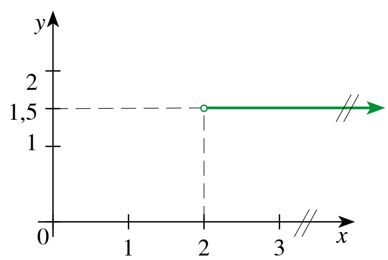
21. **a)**



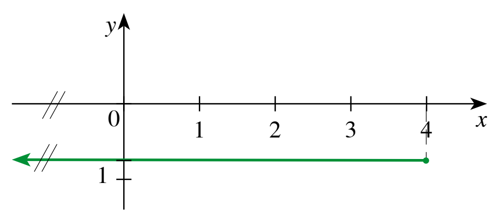
b)



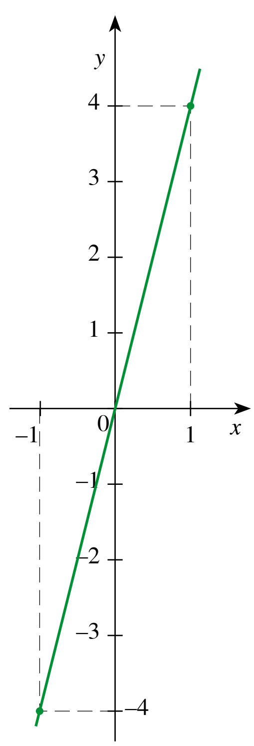
c)



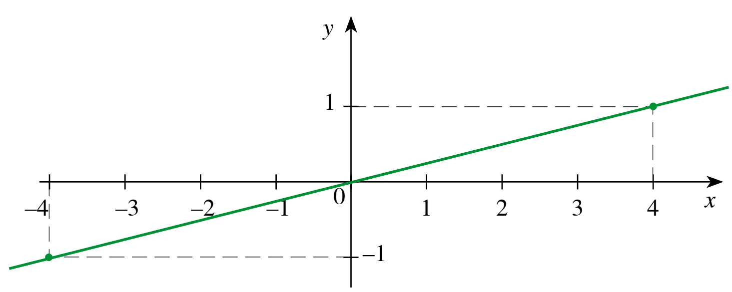
d)



24. **a)**

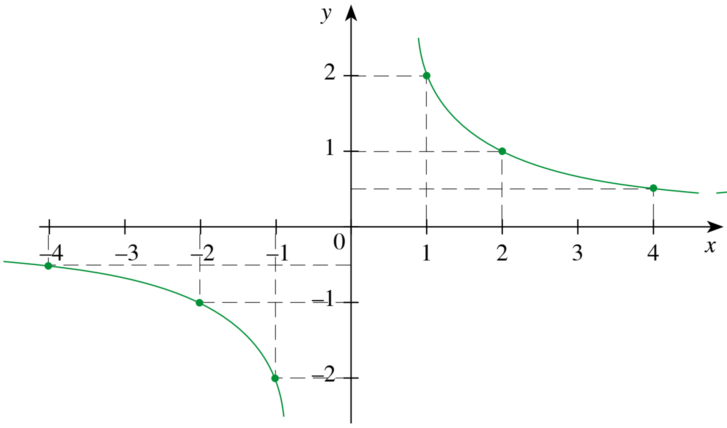


b)

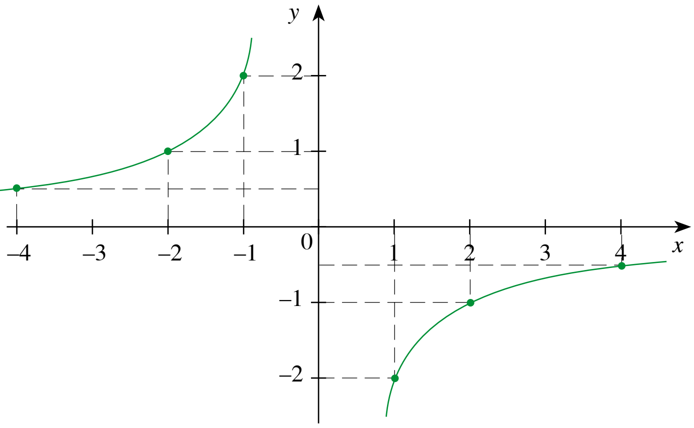


pokračovanie

c)



d)



26. **a)** Najväčší rozdiel bol 70 eur.
b) Priemerný počet eur vyzbieraných za deň bol 40,40 eur.
c) Od 6-eho dňa.
d) Druhý a tretí deň.
e) Tretí, štvrtý a piaty deň.

27. **a)** Kurz bol najnižší v júni 2012.
b) Kurz bol najvyšší v máji 2012.

Vyskúšajte sa

1C 2A 3C 4D 5A 6B 7B 8*B 9*C 10C 11D 12D 13C 14*C 15A

6 Podobnosť geometrických útvarov

6.1 Podobnosť geometrických útvarov, pomer podobnosti

9. **a)** Koeficient podobnosti $k = \frac{3}{2}$ alebo $k = \frac{2}{3}$. Sú podobné.
b) Koeficient podobnosti $k = \frac{5}{4}$ alebo $k = \frac{4}{5}$. Sú podobné.
c) Nie sú podobné.
d) Nie sú podobné.

10.* **a)** Útvary sú štvorce. Ak je zelený zmenšením červeného, tak sú podobné.
b) Útvary sú rovnostranné trojuholníky. Ak je zelený zmenšením červeného, tak sú podobné.
c) Útvary sú rovnoramenné trojuholníky. Ak je zelený zväčšením červeného, tak sú podobné.
d) Útvary sú obdĺžniky. Ak je zelený zmenšením červeného, tak sú podobné.

11.* Ak k = 0,5, tak obraz obdĺžnika má rozmery 22,5 mm a 7,5 mm.
Ak k = 2, tak obraz obdĺžnika má rozmery 90 mm a 30 mm.

Ak k = 0,5, tak obraz štvorca má stranu dĺžky 12,5 mm.
Ak k = 1,2, tak obraz štvorca má stranu dĺžky 30 mm.

Ak k = 0,1, tak obraz rovnostranného trojuholníka má stranu dĺžky 3 mm.
Ak k = 1,3, tak obraz rovnostranného trojuholníka má stranu dĺžky 39 mm.

Ak k = 0,1, tak obraz pravouhlého trojuholníka má rozmery 5 mm, 3 mm, 4 mm.
Ak k = 10, tak obraz pravouhlého trojuholníka má rozmery 500 mm, 300 mm, 400 mm.

13. **a)** 12,8 cm
b) 4,5 cm a 1,5 cm
c)* Vypočítame $t = \sqrt{29{,}25}$,

potom u' = 12 dm, $t' = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{29{,}25}$.

d)* 34 mm, 18 mm, 22 mm

6.2 Podobnosť trojuholníkov

2. **a)** Sú podobné, $k = 2$ alebo $k = \frac{1}{2}$. **b)** Sú podobné, $k = 2$ alebo $k = \frac{1}{2}$. **c)** Nie sú podobné.

3. **a)** $\triangle ABC \sim \triangle EFG$ **b)** $\triangle PRS \sim \triangle LMO$ **c)** Nie sú podobné.

6. **a)** $\triangle ABC \sim \triangle EFG$ **b)** Nie sú podobné. **c)** $\triangle XYZ \sim \triangle EDF$

8. **a)** 6 cm, 3,75 cm, 5,25 cm **b)** 35 cm, 52,5 cm, 70 cm

10. **a)** $k = 2{,}5$, chýbajúce dĺžky strán: 9 cm, 10,5 cm,
b) $k = 0{,}8$, chýbajúce dĺžky strán: 5,6 dm, 8 dm,

12.* **a)** $k = 0{,}7$, chýbajúce dĺžky strán: 8,4 cm, 9,1 cm,
b) $k = 3$, chýbajúce dĺžky strán: 510 mm, 240 mm.

Vyskúšajte sa

1A 2A 3B 4C 5A 6D 7B 8*D

6.3 Riešenie výpočtových a konštrukčných úloh pomocou podobnosti. Použitie podobnosti pri meraní výšok a vzdialeností

2. **a)** 2,12 dm **b)** 210 mm

4. **a)** 7,5 cm^2 **b)*** $S' = 0{,}4 \cdot \sqrt{264}\ cm^2$

6. 15,6 m

7.* 371 m

8.* 113, 333... m $\doteq$ 114 m

9.* 135 m

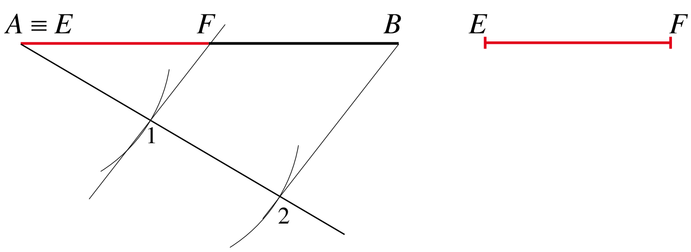
11. **a)** 247,5 km **b)** 12 cm

12. Skutočné rozmery: 112 m, 76 m, 50 m, 80 m.

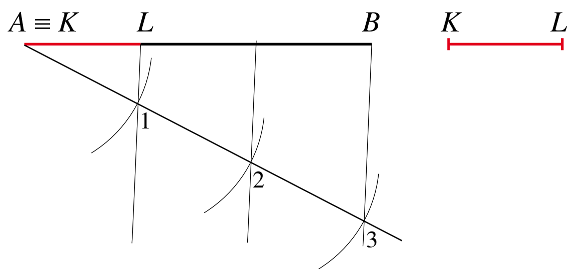
13. Na mape: 9 cm, 1,25 cm.

14. **a)** 980 m **b)** 75,6 cm

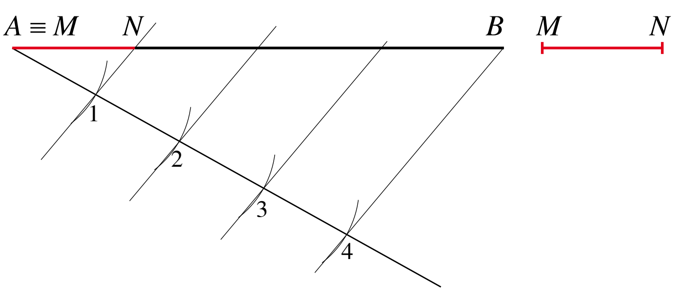
16. **a)**



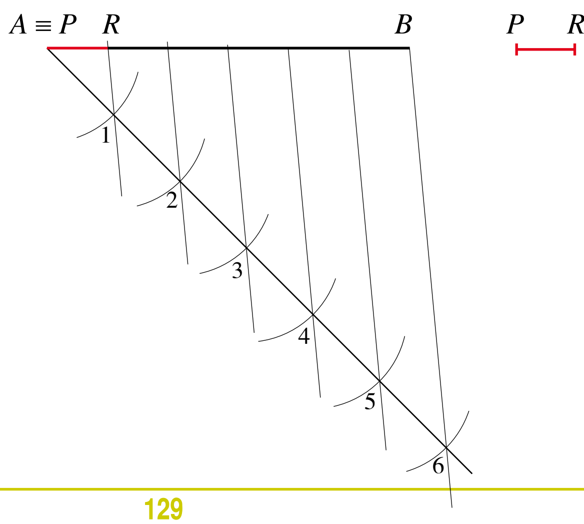
b)



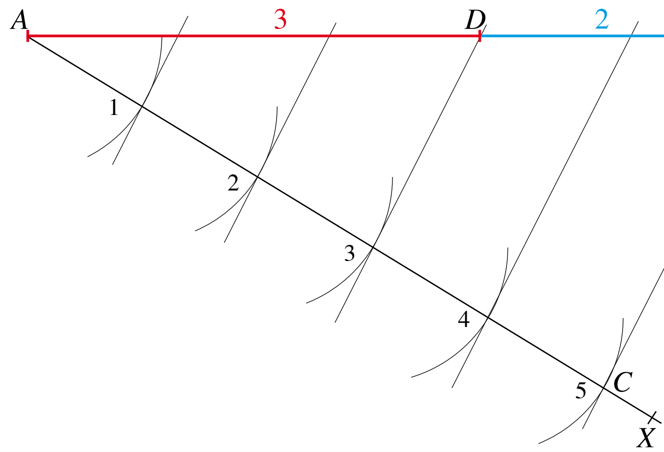
c)



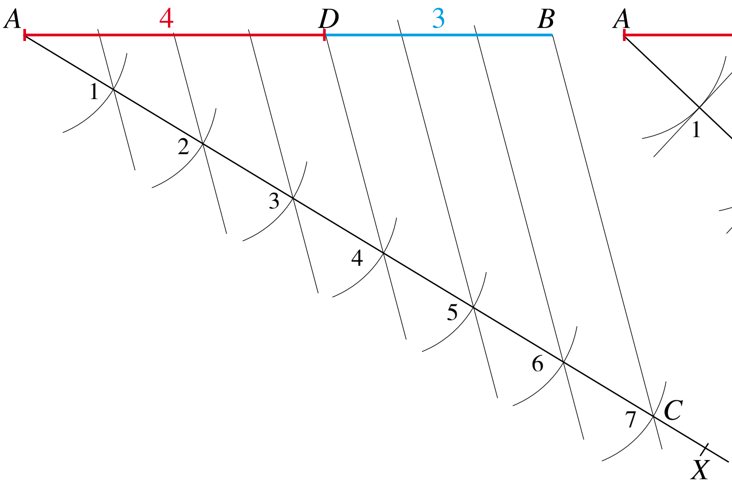
d)



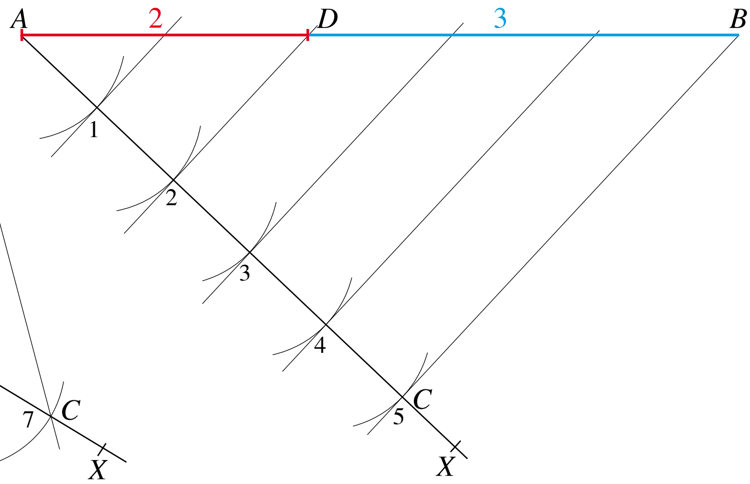
18. **a)** 6 cm a 4 cm



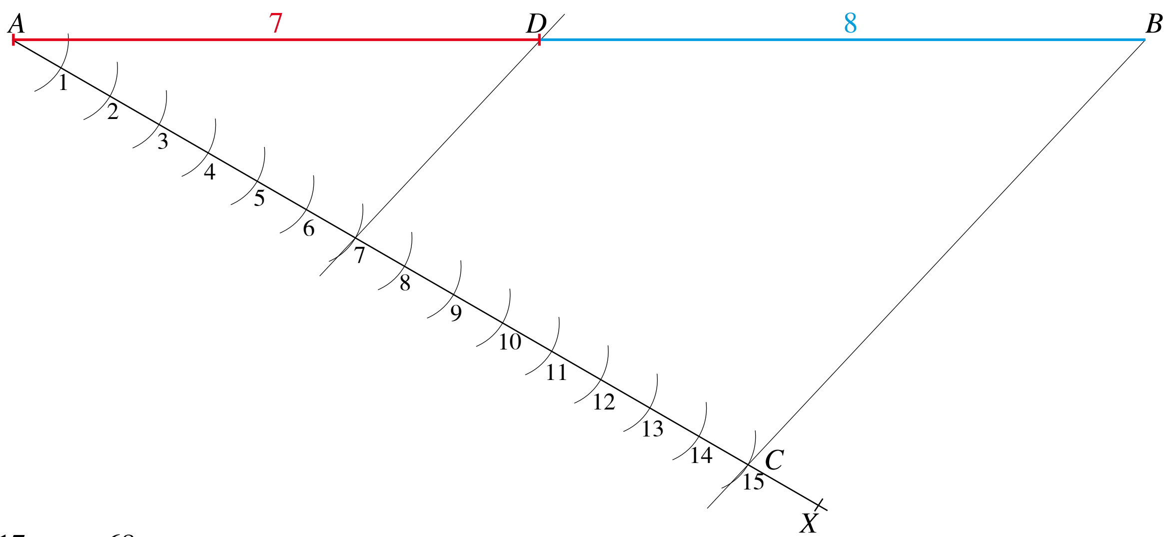
b) 4 cm a 3 cm



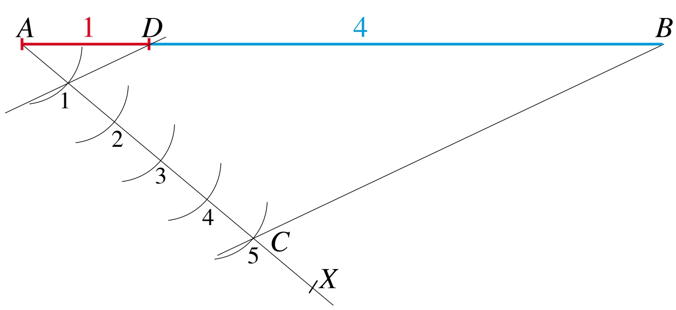
c) 3,8 cm a 5,7 cm



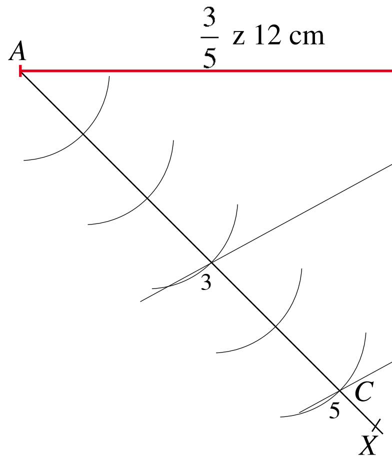
d) 0,7 dm a 0,8 dm



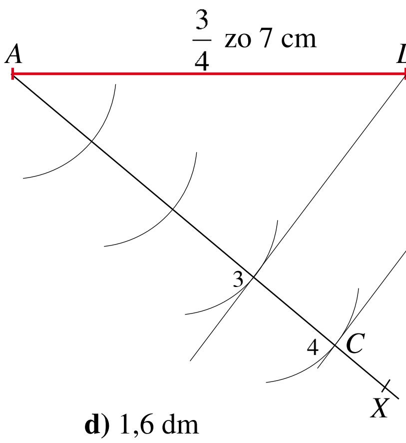
e) 17 mm a 68 mm



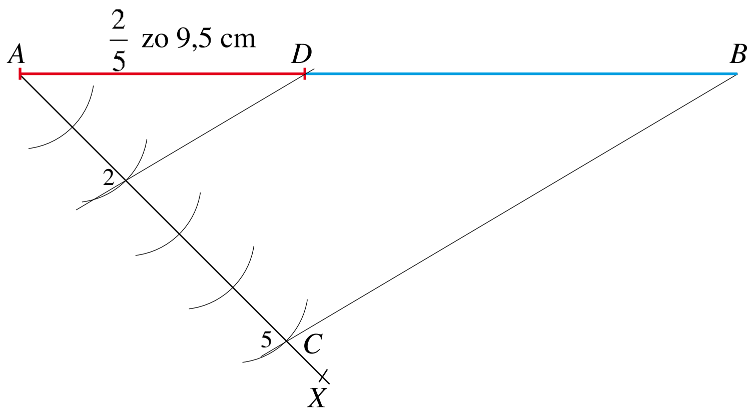
20. **a)** 7,2 cm



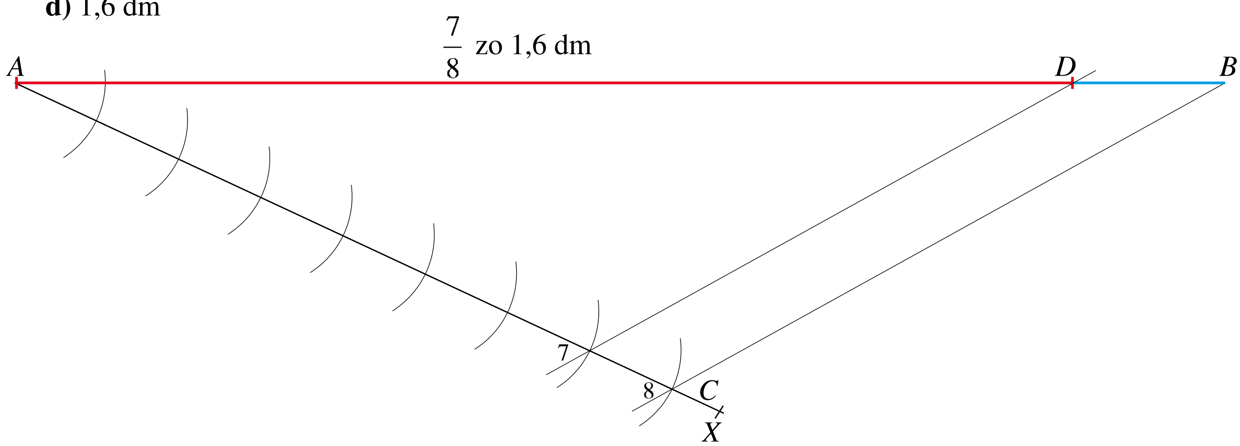
b) 5,25 cm



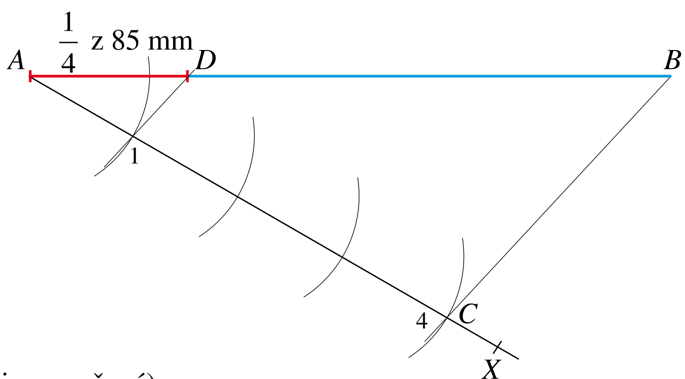
c) 3,8 cm



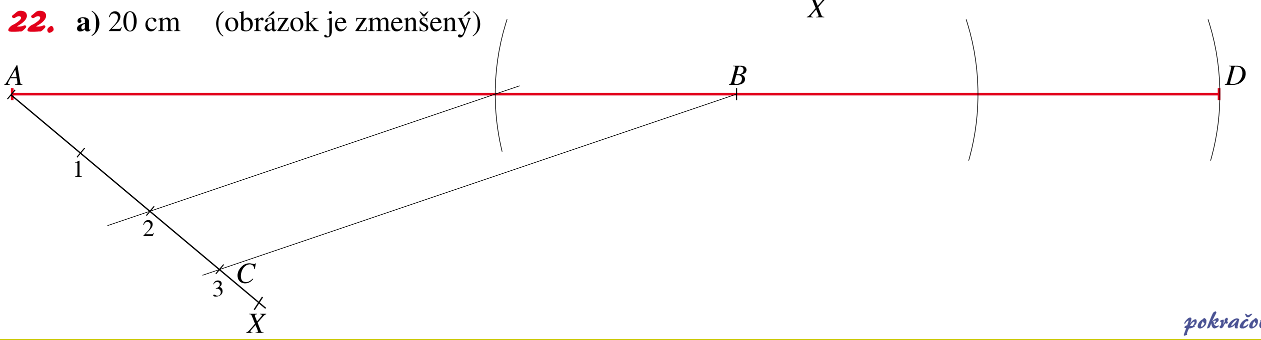
d) 1,6 dm



e) 21,25 mm

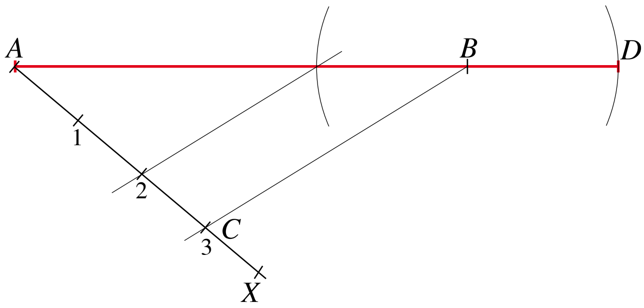


22. **a)** 20 cm (obrázok je zmenšený)

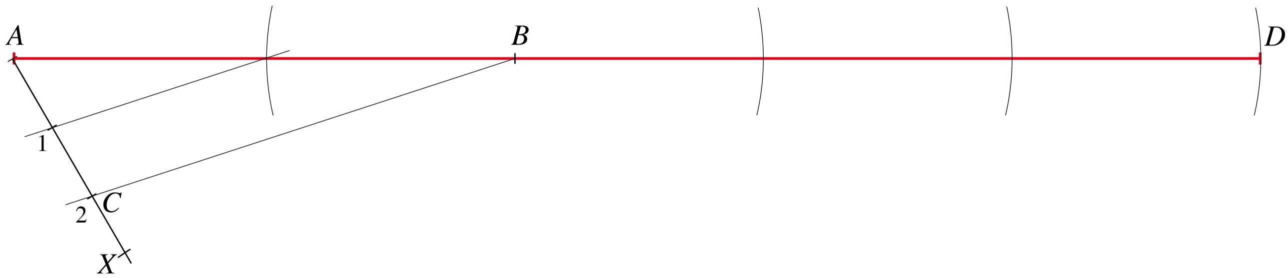


pokračovanie

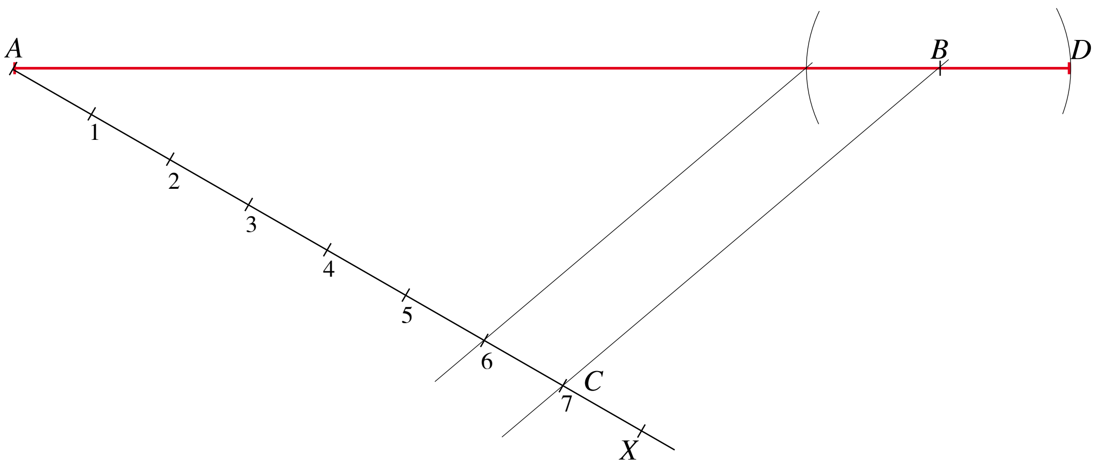
b) 8 cm



c) 23,75 cm (obrázok je zmenšený)



d) 1,6 dm



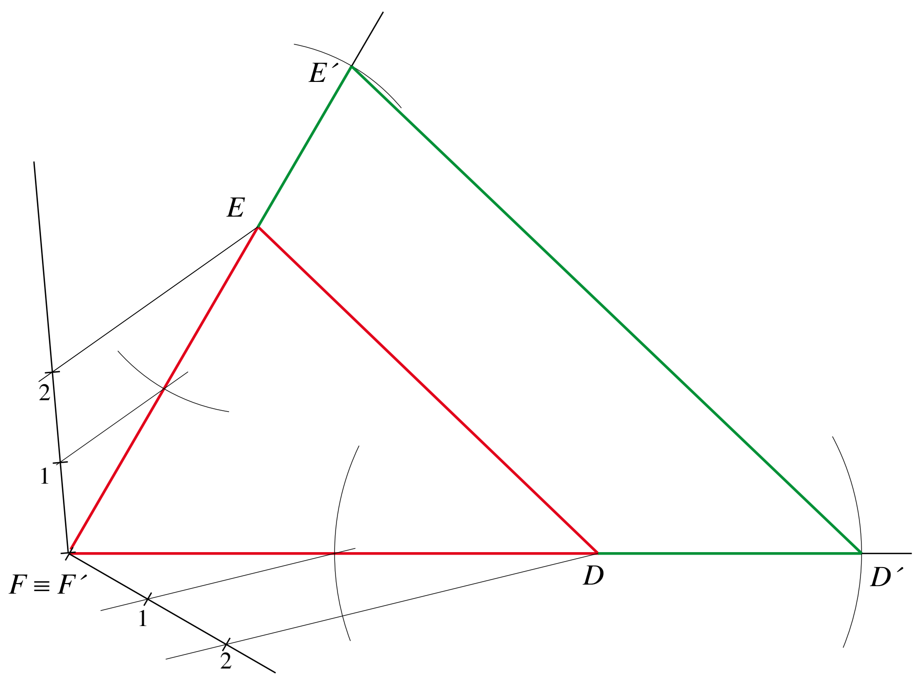
e) 340 mm (nadrozmer, neuvádzame)

24. **a)** Podobný trojuholník bude mať dĺžky strán: $a' = 8$ cm, $b' = 13$ cm, $c' = 18$ cm.

b) Podobný trojuholník bude mať dĺžky strán: $d' = 7{,}5$ cm, $e' = 10{,}5$ cm, $|\sphericalangle D'F'E'| = 60°$.

c) Podobný trojuholník bude mať dĺžku strany $n' = 15$ cm, $|\sphericalangle L'M'N'| = 30°$, $|\sphericalangle M'L'N'| = 40°$.

b)



Vyskúšajte sa

1A 2D 3D 4B 5C 6B 7A

7 Štatistika

7.1 Štatistické prieskumy, triedenie, početnosť, tabuľky

3. **a)** 45 : 10 = 9 : 2 **b)** Približne 18,18 %. **c)** Približne 81,82 %.

4. **a)** 48 : 32 = 3 : 2 **b)** 50 % **c)** Približne 33,33 %.

5. **a)** 1 : 4 **b)** 25 %

9.

	Súrodenci					spolu
	0	1	2	3	4	
počet	10	9	3	1	1	24

a) 0,91..., čo je približne 1 súrodenec na 1 žiaka v triede,
b) 8,333 ...%, čo je približne 8,33 %,
c) 41,666... %, čo je približne 41,67 %.

10. Budiš – 180 dl.

11. Celková suma objednávok je 36,78 eur.
Najviac zaplatíme za guľôčkové trojfarebné perá.
Najmenej zaplatíme za keramické perá.
Na jedného učiteľa pripadá priemerne 2,32 objednaných písacích potrieb.
Ceruzky tvorili 50 % objednávky.
Perá tvorili 50 % objednávky.

13. **b)** 129,9 cm **c)** 5 dievčat, 50 % **d)** 5 dievčat, 50 %

14. **a)** 18,75 % **b)** 11,25 %

15. **a)** 30,4 minúty **b)** 36 % **c)** 64 %

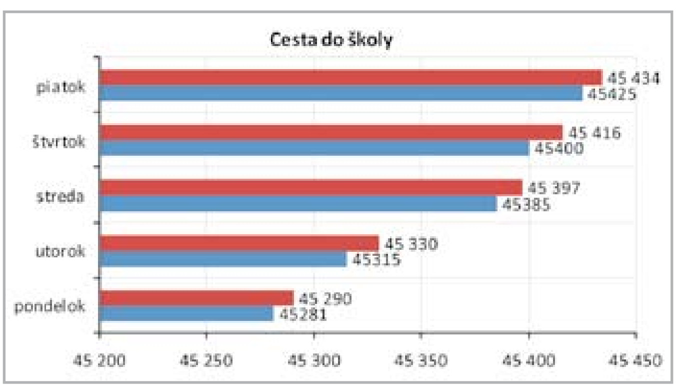
16. **a)** 2,16 knihy **b)** 64 %
c) 22 % **d)** 2,16 · 0,35 = 0,756 €

18.

počet kúpených fliaš	početnosť (absolútna početnosť)	relatívna početnosť vyjadrená	
		podielom (zlomkom)	percentami
0	2	$\frac{2}{50}$	4 %
1	28	$\frac{28}{50}$	56 %
3	10	$\frac{10}{50}$	20 %
4	3	$\frac{3}{50}$	6 %
5	7	$\frac{7}{50}$	14 %

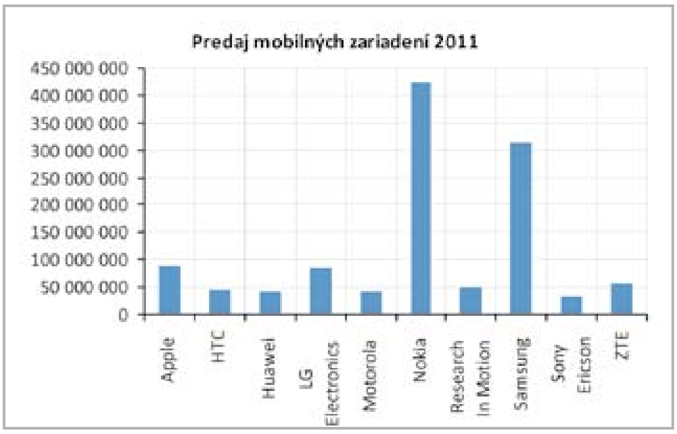
19. **a)** 1 : 1

20. **a)**



b) Počet km je 61, benzín – 3,416 l.
c) Suma za benzín je približne 5,278 eur.

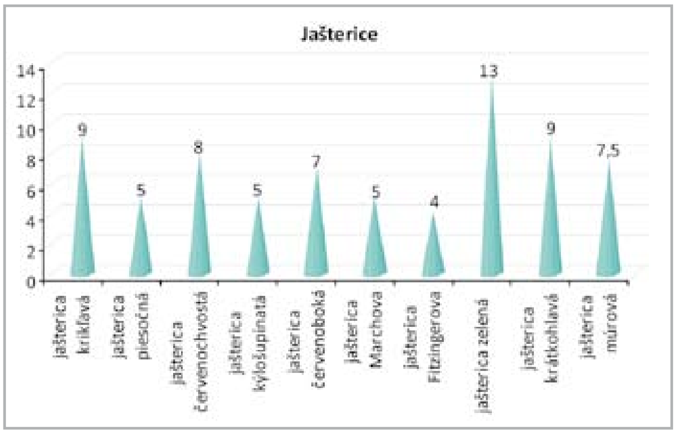
4. **a)**



b) Najviac mobilných zariadení predala Nokia, najmenej Sony Ericsson.

c) Prví traja najúspešnejší výrobcovia boli Nokia, Samsung, Apple, čo je približne 70,13 %.

5. **a)**



b) Dĺžku tela kratšiu alebo rovnajúcu sa 5 cm má 40 % jašteríc.

c) Dĺžku tela dlhšiu ako 7 cm má 50 % jašteríc.

8. Všetky sú nepravdivé.

9. Pravdivé sú **A**, **B**, **C**.

10. Pravdivé sú **A**, **C**.

11. Všetky sú nepravdivé.

12. **a)** 31 **b)** 31 : 28 **c)** 14,75 ≐ 15

Vyskúšajte sa

1Š 2T 3A 4T 5I 6S 7T 8U Akú rolu môže hrať aj „neherec?" **ŠTATISTU**

8 Niektoré ďalšie telesá, ich objem a povrch

5. **a)** $V = 64\ cm^3$, $S = 96\ cm^2$ **b)** $V = 28\ cm^3$, $S = 58\ cm^2$

c) $V \doteq 20{,}78\ cm^3$, $S \doteq 49{,}86\ cm^2$ **d)** $V = 45\ cm^3$, $S = 78\ cm^2$

7. **a)** $v =$ 25 cm **b)** $v =$ 36 cm

c) $v =$ 42 dm **d)** $v =$ 3,2 dm

8. $V = 3\,600\ cm^3$, $S = 2\,160\ cm^2$

9.* $V = 240\ cm^3$, $S = 300\ cm^2$

10.* $V = 250\ cm^3$, $S = 250\ cm^2$

11.* $V = 72\ cm^3$

12.** $v = 5$ cm, $V = 600\ cm^3$

13. **C**

14. **A**

15. **B**

16. **C**

17. **a)** $V = 100 \cdot \sqrt{75}\ cm^3$, $S = 10 \cdot \sqrt{75} + 600\ cm^2$, **b)** približne 16,67 %.

Vyskúšajte sa

1B 2A 3R 4A 5K Vznikne slovo **BARAK**.

8.1 Valec, jeho sieť, objem a povrch

2. **a)** $V \doteq 50{,}24\ \text{cm}^3$, $S \doteq 75{,}36\ \text{cm}^2$ **b)** $V \doteq 10{,}597\,5\ \text{cm}^3$, $S \doteq 28{,}26\ \text{cm}^2$
c) $V \doteq 43{,}96\ \text{cm}^3$, $S \doteq 69{,}08\ \text{cm}^2$ **d)** $V \doteq 141{,}3\ \text{cm}^3$, $S \doteq 150{,}72\ \text{cm}^2$

3.* $V \doteq 1\,017{,}36\ \text{cm}^3$, $S \doteq 565{,}2\ \text{cm}^2$, $r = 6\ \text{cm}$

4.* $V \doteq 96{,}931\,8\ \text{cm}^3$, $S \doteq 120{,}010\,8\ \text{cm}^2$

6. **a)** $r = \sqrt{2}\ \text{cm}$ **b)** $r \doteq 3{,}23\ \text{dm}$
c) $v \doteq 0{,}91\ \text{mm}$ **d)** $v \doteq 3{,}65\ \text{m}$

7. $V \doteq 10{,}99\ \text{m}^3$, dno by malo mať šírku aspoň 2,5 m.

8. $V \doteq 6{,}28\ \text{m}^3$, $S_{pl} \doteq 6{,}28\ \text{m}^2$, 25 % z V je $1{,}57\ \text{m}^3$.

8.2 Kužeľ, jeho sieť, objem a povrch

2. **a)** $V \doteq 14{,}5\ \text{cm}^3$, $S \doteq 37{,}68\ \text{cm}^2$ **b)** $V \doteq 3{,}532\,5\ \text{cm}^3$, $S \doteq 17{,}06\ \text{cm}^2$
c) $V \doteq 14{,}65\ \text{cm}^3$, $S \doteq 37{,}88\ \text{cm}^2$

3.* **a)** $V \doteq 301{,}44\ \text{cm}^3$, $S \doteq 301{,}44\ \text{cm}^2$, $r = 6\ \text{cm}$

4.* **a)** $V \doteq 9{,}043\,2\ \text{cm}^3$, $S \doteq 27{,}58\ \text{cm}^2$

6. **a)** $r = \sqrt{2}\ \text{cm}$ **b)** $v \doteq 4{,}13\ \text{m}$

7. $V \doteq 58{,}875\ \text{cm}^3$

8. Ak je $r \doteq 0{,}78$ dm a $v \doteq 1{,}56$ dm, potom treba $4{,}27\ \text{dm}^2$ plechu.

9. Približne $23{,}76\ \text{m}^2$.

10.* Približne 54,17 %.

11. **a)** Približne 2,63 cm. **b)** Približne 1,92 cm. **c)** Približne 1,22 cm.

8.3 Ihlan, jeho sieť, objem a povrch

2.* $S = 2\cdot\sqrt{12} + 6\cdot\sqrt{21}\ \text{cm}^2$, $v = \sqrt{\frac{59}{3}}\ \text{cm}$, $V = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{59}\ \text{cm}^3$

3.* $V \doteq 11{,}12\ \text{cm}^3$, $S = 33\ \text{cm}^2$

4. $V \doteq 144{,}34\ \text{cm}^3$, $S \doteq 199{,}43\ \text{cm}^2$

5. $s = \sqrt{24}\ \text{cm}$

6. $v_1 = \sqrt{32}\ \text{m}$, $v_2 = 5\ \text{m}$, opraviť treba približne $22{,}18\ \text{m}^2$ krytiny.

7. **B**

8.4 Guľa a rez guľou. Objem a povrch gule

3.* $r = \sqrt[3]{\frac{175}{4}}\ \text{cm}$

4. Približne $78{,}5\ \text{cm}^2$.

5.* Približne $255{,}45\ \text{cm}^2$, $r = \sqrt[3]{91{,}719...}$.

6.* Približne $1\,046{,}67\ \text{cm}^3$.

7.* **B**

Vyskúšajte sa

1C 2A 3D 4A 5C 6A 7B 8D 9B

Metodické poznámky pre učiteľov

Vážení učitelia!

V druhej časti učebnice **Matematika pre 9. ročník základnej školy a 4. ročník osemročného gymnázia** sa nachádza základné učivo rozpracované do štyroch hlavných kapitol. Stavba hlavných kapitol a podkapitol zodpovedá štruktúre kapitol a podkapitol v prvej časti učebnice. **Názvy kapitol** sme však koncipovali v súlade so štátnym vzdelávacím programom. Niektoré časti sme zoskupili tak, aby bola v čo najväčšej miere akceptovaná **špecifickosť výučby matematiky deviateho ročníka** – príprava na strednú školu a rôzne druhy skúšania.

Piata kapitola je Grafické znázorňovanie závislostí. Učivo v nej sme rozčlenili do podkapitol tak, aby žiaci postupne nadobúdali vedomosti o funkciách (závislosť určitého druhu – priama a nepriama úmernosť ako závislosť – lineárna funkcia ako závislosť a prepojenie s priamou úmernosťou). Oproti predchádzajúcim koncepciám, v ktorých sa **funkcia definovala ako priradenie, v tejto koncepcii, v súlade so ŠVP, sa definuje ako závislosť dvoch veličín**. Pojem funkcie a zisťovanie, čo je a čo nie je funkcia, sme nezaviedli priamym definovaním týchto pojmov. Cieľom takéhoto zostavenia učiva bola snaha, aby žiaci intuitívne pochopili pojem funkcie, naučili sa čítať grafy funkcií a využívať ich pri riešení úloh. Ako rozširujúce učivo odporúčame zadefinovať definičný obor a obor hodnôt funkcie. Vhodným podnetom na zavedenie týchto pojmov je používanie hodnôt premennej x z rôznych číselných oborov v úlohách s fyzikálnymi veličinami. Zo začiatku pracujeme s údajmi z oboru prirodzených čísel, ktorý postupne rozširujeme na obor reálnych čísel. Pri riešení fyzikálnych úloh môžeme so žiakmi diskutovať o grafoch zobrazujúcich závislosť fyzikálnych veličín. Výber jednotlivých úloh pre problematiku závislostí zohľadňuje skúsenosti žiakov s riešením bežných životných situácií primeraných ich veku a obsahu učiva iných predmetov. Úlohy sú gradované od jednoduchších po zložitejšie. Pomerne veľký priestor sme venovali problematike sústav súradníc. Obsah tejto podkapitoly bol spracovaný tak, aby bolo možné zopakovať so žiakmi vlastnosti rovinných útvarov a ich konštrukcie či už v rámci prípravy k Testovaniu 9 alebo k prijímacím skúškam na stredné školy.

Téma šiestej kapitoly je podobnosť rovinných útvarov. V úvode tejto kapitoly sme žiakom pripomenuli pojem **pomer** v situácii, v ktorej sa s ním najčastejšie stretávali – numerická úloha. Potom pripomíname činnosti, ktoré vykonávali v priebehu výučby v predchádzajúcich ročníkoch – zmenšovanie, zväčšovanie v štvorcovej sieti a pomocou pomerov zväčšovania alebo zmenšovania útvarov definujeme podobnosť rovinných útvarov. Následné poznatky, ktoré majú získať, sú spojené s **riešením konštrukčných úloh** a úloh z bežného života **zameraných na meranie veľkostí**. Výberom úloh znovu sledujeme aj vhodnú prípravu na celoštátne meranie vedomostí a zručností.

Štatistika je siedma kapitola učebnice. Koncipovaná je tak, **aby bolo možné pripraviť žiakov na celoštátne merania**, v ktorých majú riešiť úlohy zamerané na **čítanie z tabuliek, grafov a diagramov**. V riešeniach týchto úloh sa objavujú grafy vytvárané **v tabuľkovom procesore**, ako aj grafy a diagramy vytvárané bežnou technikou v pravouhlej sústave súradníc. Odporúčame podľa možností školy, aby sa tieto úlohy riešili v počítačovej učebni a aby ich žiaci riešili aj pomocou počítača.

Ôsma kapitola je Niektoré ďalšie telesá, ich objem a povrch. Ešte pred prvou podkapitolou sú zaradené **úlohy o telesách**, s ktorými sa žiaci oboznámili v predchádzajúcich ročníkoch. Zaradili sme ich pred valec, kužeľ a ihlan preto, aby sa im ľahšie pracovalo s pojmami ako sú sieť, plášť, podstava, objem a povrch.

Odporúčame, aby si žiaci ku každému telesu priniesli na vyučovaciu hodinu rôzne predmety, napr. škatule rôznych tvarov a tie analyzovali, rozstrihávali, zlepovali, merali dĺžky ich hrán a pod.

Dúfame, že vám učebnica pomôže pri plánovaní a realizácii vyučovacích hodín matematiky.

Autorka