UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

STEREOMETRIA

Umenie vidieť a predstavovať si priestor

Ondrej Šedivý
Gabriela Pavlovičová
Lucia Rumanová
Dušan Vallo

Vydané v septembri 2007
Fakultou prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre
s finančnou podporou projektu

Nové postupy vo vyučovaní stereometrie na základných a stredných školách s akcentom na rozvoj priestorovej predstavivosti KEGA 3/3221/04 .

Nitra 2007

Názov: **STEREOMETRIA- umenie vidieť a predstavovať si priestor**

Autori: **Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.**
PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Recenzenti: **Prof. RNDr. Zoltán Zalabai, CSc.**
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.

Technická spolupráca: **PaedDr. Katarína Zverková**
PaedDr. Janka Melušová

Edícia: **Prírodovedec č. 271**

Schválené: **Vedením Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre dňa 2. októbra 2007**

Rukopis **neprešiel** jazykovou úpravou.

ISBN: 978-80-8094-180-2

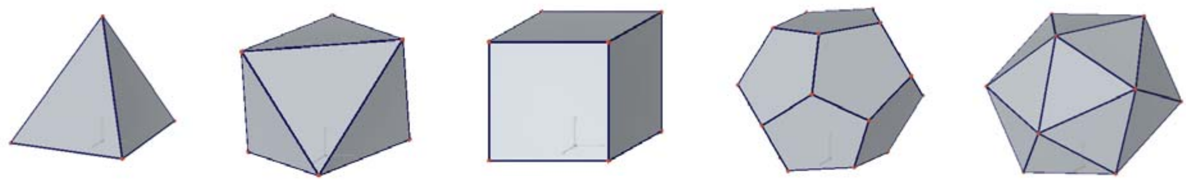
OBSAH

ÚVOD

V našej publikácii sa venujeme stereometrii. Stereometria je časť geometrie, ktorá sa zaoberá priestorovými problémami (stereometria, grécky *stereos* značí pevný, tuhý – *metrein* merať). Platón urobil náuku o pravidelných telesách meraním.

Prvé stereometrické úvahy, podobne ako prvé planimetrické úvahy vznikli z praktických potrieb. Stavby obydlí a lodí priniesli prvé poznatky stereometrického rázu. Pozorovanie hviezdnej oblohy prispelo ku vzniku geometrických poznatkov o guli, najmä keď človek spoznal, že sa poloha hviezd na oblohe mení s časom, a keď sa tento poznatok začal používať na orientáciu pri dlhých plavbách na mori.

Významným popudom pre štúdium stereometrie bola aj stavba vhodných dekorácií pre divadelné hry v starom Grécku. Jednou z významných úloh starogréckej stereometrie bolo štúdium pravidelných telies. Platón urobil náuku o pravidelných telesách súčasťou idealistického názoru. Podľa neho deň sa skladal zo štvorstenov, voda z dvadsaťstenov a zem z kociek; obrys sveta potom tvoril dvanásťsten. Pravidelné telesá nazývame ešte aj dnes platónovskými telesami.



Euklid sa taktiež zapodieval stereometriou a poznal takmer všetky vety, ktoré sú v našej školskej stereometrii. Priestorové vzťahy medzi priamkami a medzi priamkami a rovinami úspešne študovali francúzski matematici **Adrien Márie Legendre** (1752-1833) a **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857). Vzťahy medzi počtom vrcholov, hrán a stien pri mnohostenoch skúmali už v staroveku. Matematik **Leonard Euler** (1707-1783) študoval mnohosteny, vyhovujúce tzv. **Eulerovej vete,** ktorá hovorí, že počet vrcholov mnohostena zväčšený o počet stien sa rovná počtu hrán zväčšenému o dve.

$$\boxed{v+s=h+2}$$

Rôzne úvahy, ktoré súvisia s predstavou objemov telies, objavujú sa už u primitívnych národov. Odhadovať objem nádob, priestornosti sýpok, odhadovať materiál potrebný na výstavbu obydlí a pod. boli prvé úvahy tohto druhu. Prvé objemové miery svedčia o tom, že ich odvodili z praktických potrieb chovateľov dobytka a roľníkov.

Podľa doteraz rozriešených nápisov babylonského klinového písma usudzujeme, že Babylončania vedeli počítať objemy pevnostných násypov s lichobežníkovým prierezom.

Rovnako sa v Egypte vyvinul určitý druh náuky o objemoch z potrieb poľnohospodárov, najmä pre zisťovanie objemov sýpok, ktoré mali obyčajne tvar kvádra.

Grécky filozof **Demokritos** (V. stor. pred n.l.) prvý zistil, že objem ihlana sa rovná jednej tretine objemu hranola so zhodnou podstavou a zhodnou výškou.

Povrch a objem gule vypočítal **Archimedes** (287 – 212 pred n.l.). Archimedes sa zapodieval aj skúmaním objemov ďalších rotačných telies.

Leonardo da Vinci (1452-1519), prenikavý renesančný duch harmonicky rozvinutého citu a rozumu. Okom maliara presne zachytil a zakreslil let vtáka a rozumom vedca začal tento jav analyzovať. Každý dnes pozná nesmrteľnú Monu Lízu, ale iba málo odborníkov vie, že Leonardo riešil aj viacero úloh geometrie a mechaniky.

Albert Dürer (1471 – 1528), podobne ako Leonardo da Vinci, nebol iba maliar, ale aj mysliteľ. Hľadal pravidlá kresby, t.j. zákonitosti, podľa ktorých sa priestorové tvary zobrazujú do roviny. Uskutočnil a opísal viacero experimentov, ktoré ho doviedli k základným znalostiam perspektívy.

Problémom objemov rotačných telies sa venoval aj pražský hvezdár a matematik **Johann Kepler** (1751-1630). Významnú metódu na stanovenie objemov rôznych telies vytvoril **Bonaventura Cavalieri** (1598 – 1647).

Gaspard Monge (1746-1818) objaviteľ tzv. deskriptívnej geometrie. Pred Mongeom sa všetky zložitejšie stavby vyhotovovali v modeloch, z ktorých sa pri stavbe odpichovadlom merali jednotlivé rozmery. Metóda presného zobrazenia priestoru do dvoch či troch priemetní znamenala kvalitatívnu zmenu v syntetickej geometrii i v staviteľstve.

Stereometria napomáha pri rozvoji stereometrických (geometrických) predstáv. Ako keby existovali isté časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj schopnosti priestorového videnia. Ukazuje sa, že prvé také obdobie je vo veku 5 až 6 rokov. Druhým takýmto obdobím je vek 11 až 12 rokov.

Propedeutické obdobie spadá do predškolského a raného školského veku. Dieťa sa hrá s kockami, stavia veže, garáže pre autíčka, mrakodrapy, atď. Dôverne spoznáva tvar kocky i schopnosť spájania kociek do väčších celkov. Nadobúda prvé geometrické a fyzikálne skúsenosti.

V ďalšom období stavajú deti podľa symbolov. Napr. treba postaviť stavbu podľa predpisu

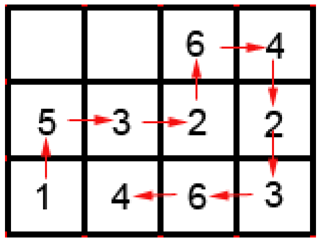
1	1,2	1

Číslo v rámčeku označuje podlažie, v ktorom sa kocka nachádza.

Deti vo veku 10 – 14 rokov rady zhotovujú siete rôznych telies a potom z nich skladajú modely. Je to príťažlivá práca najmä na striedanie myšlienkovej a manuálnej činnosti.

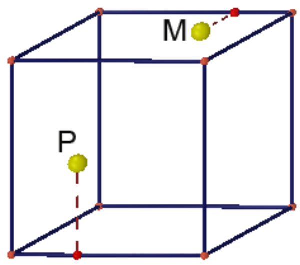
Pri tvorení siete pracuje viac rozum a predstava, rozkladá videné teleso do stien a tieto rozvíja do roviny. Keď je sieť hotová, ruky zhotovia zo siete model telesa, a tým preveria správnosť predchádzajúcich úvah.

Ďalšou zaujímavou aktivitou je odvaľovanie kocky. Steny kocky očíslujeme takto : 1 – dolná, 2 – predná, 3 – pravá, 4 – ľavá, 5 zadná, 6 – horná. Súčet čísel protiľahlých stien je 7. Kocku položíme na rovinu stenou napr. 1. Potom kocku odvaľujeme a na rovine sa otláčajú jednotlivé steny kocky. Napr .

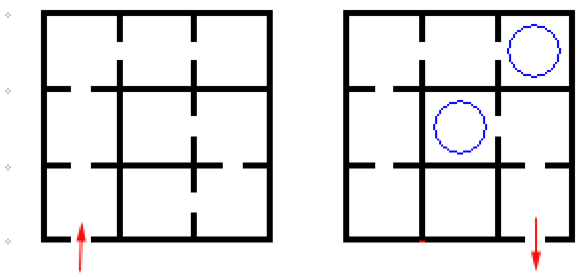


Miesto čísel môžeme použiť farby a pre jednotlivé steny, potom vyfarbovať polohu steny v štvorcovej sieti. Môžeme odvaľovaním vytvoriť mnoho pekných a neľahkých úloh. Odvaľovanie môžeme robiť aj s inými telesami.

Iným príťažlivým typom úloh je hľadanie najkratšej cesty medzi dvoma bodmi po povrchu telesa. Motiváciou môže byť naháňanie pavúka a muchy po telese, napr. po kocke. Nakresliť najkratšiu cestu na povrchu kocky z bodu P do bodu M.



Priestorové bludiská môžu pomôcť pri rozvoji priestorovej predstavivosti. Obe podlažia sú rozkreslené osobitne. Koliesko v miestnosti horného podlažia znamená, že tu vedie rebrík do dolného podlažia. Treba nájsť cestu cez bludisko.



Ďalšie významné aktivity pre rozvoj priestorovej predstavivosti sú rezy telies a skladanie a rozkladanie telies.

Aktivity so stereometrickým zameraním možno robiť „*videním*“ alebo „*rozvažovaním*“. „Videním“ rozumieme taký postup, v ktorom jednotlivec situáciu vidí a rysovaním iba uskutočňuje videné. „Rozvažovaním“ rozumieme taký postup, v ktorom jednotlivec priestorovo nevidí, ale celú konštrukciu vie logicky vyvodiť. Je samozrejmé, že schopnosť vidieť celú situáciu dopredu je veľkou výhodou pre riešiteľa. Nie vždy nám totiž schopnosť vidieť postačí. Existujú také priestorové situácie, v ktorých treba použiť cestu úvahy.

Autorský kolektív predkladá čitateľovi publikáciu, ktorú nazval : ***Stereometria – umenie vidieť a predstavovať si priestor.*** V nej sa čitateľ zoznámi s úlohami, ktoré učia zobrazovaniu telies vo voľnom rovnobežnom premietaní, pomáhajú rozvíjať priestorovú predstavivosť, systematicky zoznamujú s polohovými vlastnosťami v priestore, učia riešiť konštrukčné úlohy, zoznamujú s metrickými vlastnosťami útvarov v priestore a ukážkami učia čitateľa vypočítať a zostrojiť veľkosti, vzdialenosti a veľkosti uhlov. V ďalšej časti sa čitateľ zoznámi s mierou útvarov v priestore. Šiesta časť knižky je venovaná geometrickým zobrazeniam v priestore a posledná časť prevedie čitateľa cez niektoré geometrické miesta bodov v priestore.

Prečo v názve publikácie je uvedené „*umenie vidieť a predstavovať si priestor*“?

Názov súvisí s budovaním matematických predstáv, pričom matematickými predstavami rozumieme najmä utváranie si základných predstáv o veľkosti, tvare, množstve predmetov a javov, o ich umiestnení v priestore a čase a o ich vzájomnej polohe. Mnohé z nich patria medzi geometrické predstavy o priestore.

Snahou autorov pri písaní predloženej publikácie je prispieť k rozvoju práve geometrických predstáv, treba sa učiť vidieť (vnímať) priestor, predstavovať si v ňom určité skutočnosti, vedieť ho zobrazovať a na základe obrázkov zasa spätne si predstavovať priestor.

Autori želajú čitateľom mnoho úspechov pri štúdiu priestoru, aby si osvojili metódy spoznávania priestoru a tieto, aby im pomohli riešiť mnohé problémy správneho videnia a správnych aplikácií.

Autori

1 VOĽNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE

Pri práci v priestore majú významnú úlohu obrázky a náčrtky, a preto treba vedieť s nimi aj pracovať. Ako znázorniť trojrozmerné teleso v rovine?

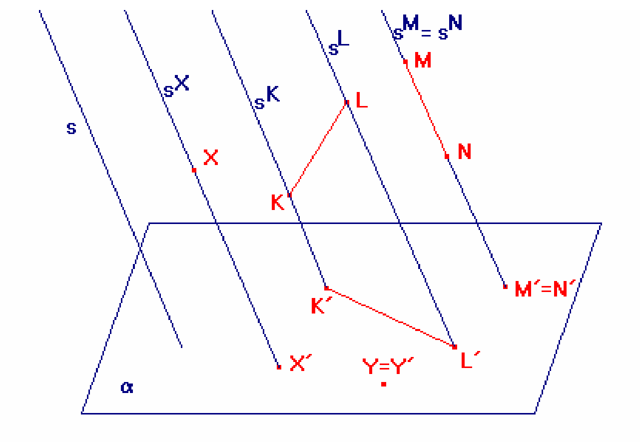
Základné telesá možno ilustrovať pomocou metódy **voľného rovnobežného premietania**. Obrazom geometrického útvaru vo voľnom rovnobežnom premietaní je geometrický útvar, ktorý pozostáva z rovnobežných priemetov významných bodov útvaru.

Základom zobrazovania geometrických útvarov vo voľnom voľnobežnom premietaní je **rovnobežné premietanie** útvaru z trojrozmerného priestoru do jednej roviny. Rovnobežné premietanie je jedna z najjednoduchších zobrazovacích metód a pritom je dostatočne názorná.

Najčastejšie sa vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazujú telesá ako kocka, kváder, kužeľ, valec, guľa a rôzne skupiny telies z nich kombinované.

1.1 ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE

Daná je ľubovoľná priamka s a ľubovoľná rovina α (s je rôznobežná s rovinou). Zobrazenie f z priestoru do roviny α, priraďujúce ľubovoľnému bodu X bod X', ktorý vznikne prienikom premietacej priamky s^X bodu X a roviny α, sa nazýva rovnobežné premietanie s daným smerom premietania s a priemetňou α.



Obr. 1.1.1

V prípade, že je priamka s kolmá na priemetňu α, tak premietanie nazývame **kolmým (pravouhlým) premietaním**.

Všetky body priemetne α sa zobrazia sami do seba (obr. 1.1.1).

Z vlastností rovnobežného premietania je zrejmé, že priemetom bodu je bod. Ak bod leží na priamke, tak aj jeho obraz bude potom ležať na obraze priamky.

V ďalšej časti uvedieme niektoré základné vlastnosti rovnobežného premietania.

1. *Rovnobežným priemetom priamky, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je bod.*
2. *Rovnobežným priemetom priamky, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je priamka.*
3. *Rovnobežným priemetom roviny, ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je priamka.*
4. *Rovnobežným priemetom roviny, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je celá priemetňa.*
5. *Rovnobežné a zhodné úsečky, ktoré nie sú rovnobežné so smerom premietania, sa v rovnobežnom premietaní zobrazia do rovnobežných a zhodných úsečiek.*
6. *Stred úsečky sa v rovnobežnom premietaní zobrazí do stredu úsečky.*
7. *Rovinný útvar, ktorý leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, sa v rovnobežnom premietaní zobrazí v skutočnom tvare a v skutočnej veľkosti.*

Poznámka. Rovina rovnobežná s priemetňou sa nazýva priečelná rovina. Ak má teleso niektorú stenu rovnobežnú s priemetňou, tak je teleso v priečelnej polohe.

1.2 TELESÁ VO VOĽNOM ROVNOBEŽNOM PREMIETANÍ

Zobrazovanie telies z priestoru do roviny by malo spĺňať zásady správnosti, názornosti, ale aj jednoduchosti. Niekedy aj správny obrázok telesa nemusí byť dostatočne názorný (nevieme zistiť vzťahy medzi jednotlivými hranami, stenami telesa alebo iné dôležité vlastnosti telesa).
V tejto časti si ukážeme zobrazenia základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní tak, aby spĺňali všetky spomenuté zásady.

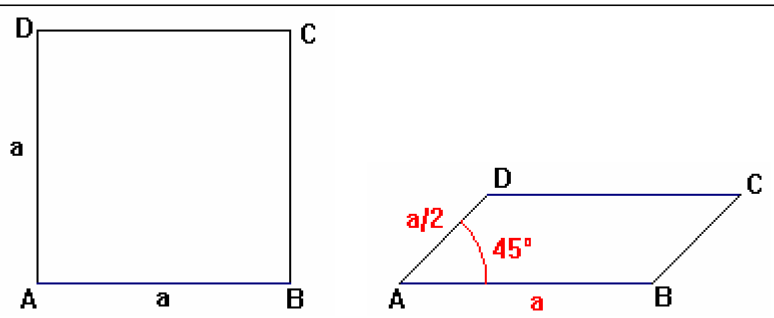
Poznámka. V školskej praxi sa najčastejšie používa také voľné rovnobežné premietanie, v ktorom sa úsečka kolmá na priemetňu zobrazí do úsečky, ktorá zviera uhol 45° s obrazom úsečky rovnobežnej s priemetňou. Dĺžka zobrazenej úsečky sa zmenší na polovicu.

Príklad 1.2.1

Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte kocku ABCDEFGH s podstavou vo vodorovnej rovine.

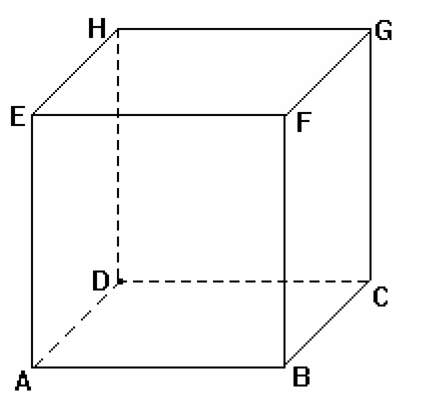
Riešenie.

Nech stena kocky *ABEF* leží v rovine rovnobežnej s priemetňou. Stena sa potom zobrazí v skutočnej veľkosti a v skutočnom tvare, to znamená ako štvorec *ABEF* so stranou dĺžky a. Obraz štvorca *ABCD* vo voľnom rovnobežnom premietaní s dĺžkou strany a je kosodĺžnik *ABCD*. Strany štvorca, ktoré nie sú rovnobežné s priemetňou, sa v premietaní zmenšia v kosodĺžniku na *a/2* a uhol *∠DAB* je 45° (obr. 1.2.1).



Obr. 1.2.1

Z uvedeného postupu je zrejmá aj konštrukcia kocky *ABCDEFGH* vo voľnom rovnobežnom premietaní s hranou dĺžky *a*. Obrazy úsečiek *AD, BC, EH* a *FG* sú rovnobežné a rovnako dlhé úsečky.

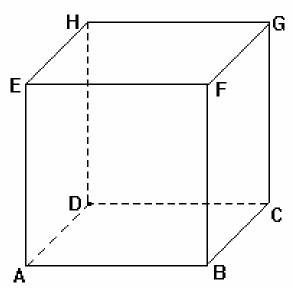


Obr. 1.2.2

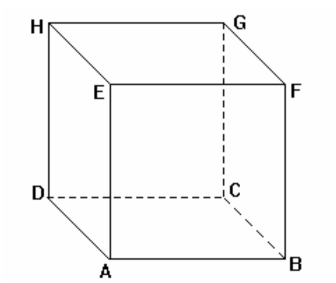
Príklad 1.2.2

Zobrazte kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní v štyroch základných pohľadoch: pravý nadhľad, ľavý nadhľad, pravý podhľad, ľavý podhľad.

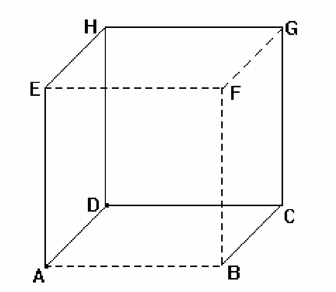
Riešenie.



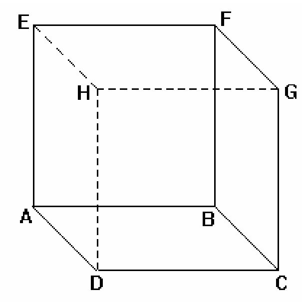
a) *pravý nadhľad kocky*



b) *ľavý nadhľad kocky*



c) *pravý podhľad kocky*



d) *ľavý podhľad kocky*

Obr. 1.2.3

Pohľady na teleso delíme podľa toho, ako sa na teleso pozeráme:

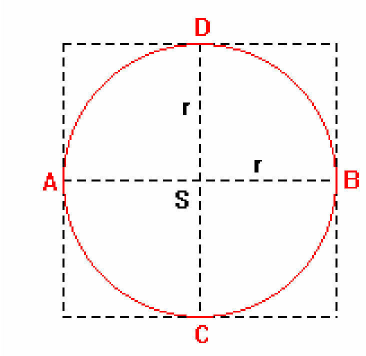
- pohľad na teleso zdola – *podhľad*
- pohľad na teleso zhora – *nadhľad*
- pohľad *zľava*
- pohľad *sprava.*

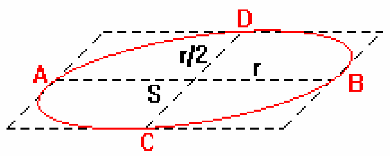
Napríklad na obr. 1.2.3 a) je pravý nadhľad kocky, ktorý predstavuje pohľad na kocku zhora a sprava.

Príklad 1.2.3

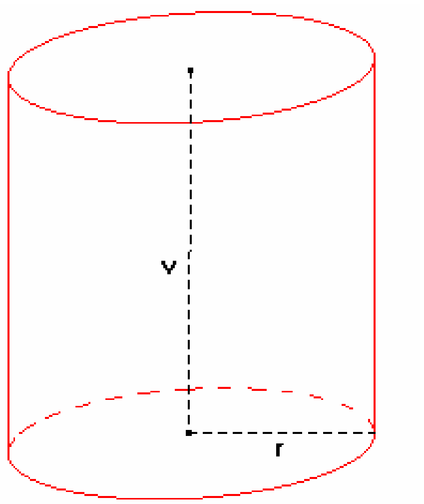
Daný je rotačný valec s podstavou v rovine kolmej na priemetňu a výškou v. Zobrazte valec vo voľnom rovnobežnom premietaní.

Riešenie.





Obr. 1.2.4



Obr. 1.2.5

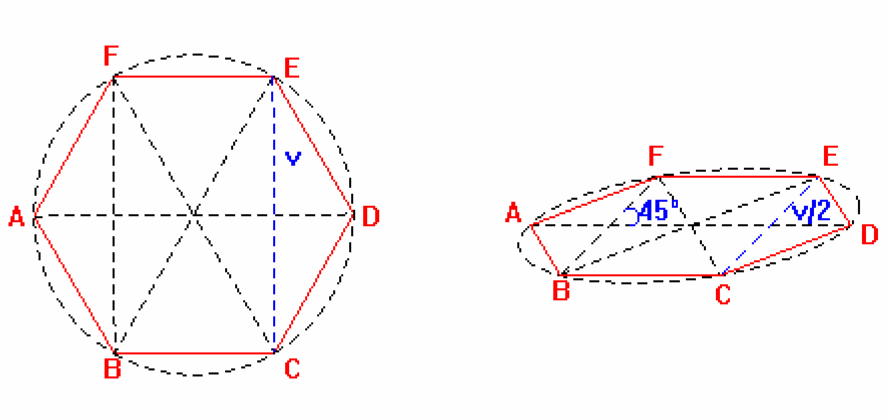
Obrazom kružnice v rovine kolmej k priemetni je vo voľnom rovnobežnom premietaní *elipsa*. Pri premietaní podstavy sme na konštrukciu elipsy využili úsečku, ktorá je kolmá na priemetňu. Úsečku zobrazíme pod uhlom 45° a príslušne skrátenú (obr. 1.2.4).

Na obrázku 1.2.5 je potom obraz valca vo voľnom rovnobežnom premietaní s danou výšku *v*.

Príklad 1.2.4

Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte pravidelný šesťboký ihlan, ktorého podstava leží vo vodorovnej rovine.

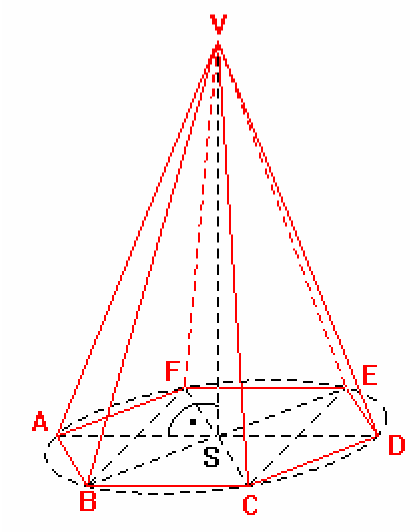
Riešenie.



Obr. 1.2.6

Pri konštrukcii obrazu pravidelného šesťuholníka *ABCDEF* sme podobne ako v príkladoch 1.2.1 alebo 1.2.3 využili vlastnosť zobrazenia vhodnej úsečky podstavy. Konštrukcia daného obrazu podstavy je zrejmá z obr. 1.2.6.

Obraz pravidelného šesťbokého ihlana *ABCDEV* vo voľnom rovnobežnom premietaní je na obr. 1.2.7.

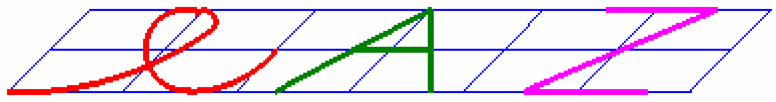


Obr. 1.2.7

Príklad 1.2.5

Zobrazte vo voľnom rovnobežnom premietaní jednotkovú štvorcovú sieť a vpíšte do nej písmená e, A, Z.

Riešenie.



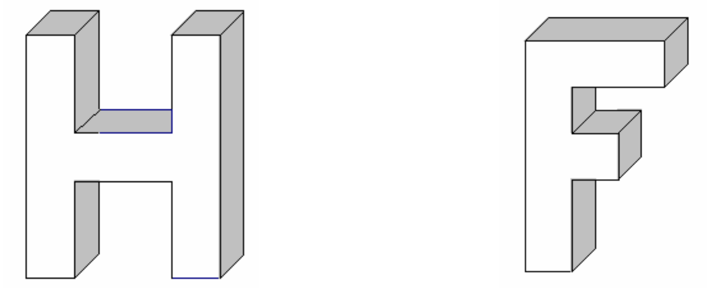
Obr. 1.2.8

Vo voľnom rovnobežnom premietaní už vieme zobraziť základné telesá. Teraz si uvedeme príklad, ako zobraziť rôzne telesá z nich skombinované.

Príklad 1.2.6

Zobrazte písmená v tvare L a F vo voľnom rovnobežnom premietaní.

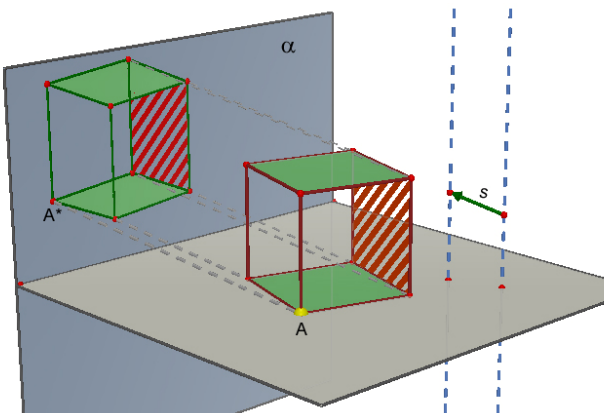
Riešenie.



Obr. 1.2.9

1.3 POHLKEHO VETA V ŠKOLSKEJ PRAXI

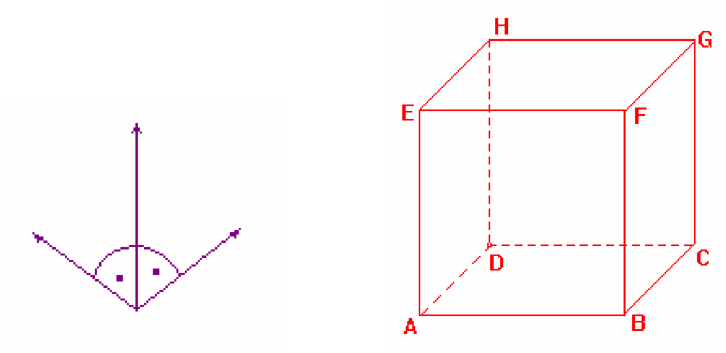
V závislosti od polohy telesa vzhľadom k priemetni a smeru premietania môžu vo voľnom rovnobežnom premietaní telesá vyzerať „nepresvedčivo“, ako je naznačené na obr. 1.3.1.



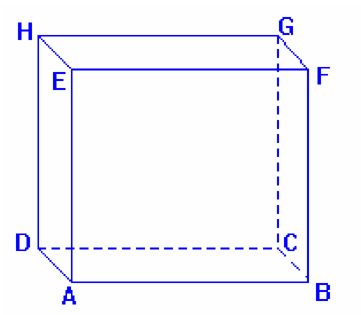
Obr. 1.3.1

Vo všeobecnosti však platí tzv. *Pohlkeho* veta, ktorá nie je v školskej praxi často používaná :

Ľubovoľné tri úsečky so spoločným bodom možno považovať za rovnobežný priemet troch rovnako dlhých navzájom kolmých úsečiek.



Obr. 1.3.1



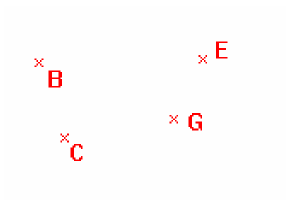
Obr. 1.3.2

Po oboznámení sa s Pohlkeho vetou je možno neprimeraná zásada narysovať „správny“ rovnobežný priemet napríklad kocky. Niektoré zobrazenia kocky sú pre študentov vyhovujúce (názorné obrázky) a niektoré nie, pričom z odborného hľadiska sú korektné. Na obr. 1.3.1 a 1.3.2 sú načrtnuté rôzne rovnobežné priemety kocky.

Obidva sú jednoduché a správne, ale len prvý obrázok spĺňa aj spomínanú zásadu názornosti. V praxi sa aj najčastejšie používa práve tento obraz kocky.

Cvičenie

1. *Narysujte rôzne obrazy kocky ABCDEFGH vo voľnom rovnobežnom premietaní, ak poznáte obrazy jej vrcholov B, C, E a G.*



2. *Miško sa rozhodol, že poskladá rôzne telesá, ktoré sú zložené zo štyroch rovnako veľkých kociek. Pri stavaní telies dodržal však zásadu, že ak sa dve kocky dotýkajú*

plochou, dotýkajú sa celou stenou. Znázornite všetky Miškove telesá vo voľnom rovnobežnom premietaní.

3. *Vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazte*
   a) *pravidelný 3 – boký hranol s podstavou v priečelnej rovine a s jednou stenou vo vodorovnej rovine*
   b) *pravidelný 5 – boký hranol s podstavou vo vodorovnej rovine*
4. *Zobrazte vo voľnom rovnobežnom premietaní rotačný kužeľ s postavou v rovine kolmej na priemetňu.*
5. *Vpíšte do jednotkovej štvorcovej sieti, ktorá je zobrazená vo voľnom rovnobežnom premietaní, obraz svojho mena.*

2 PRIESTOROVÁ PREDSTAVIVOSŤ

Priestorovou predstavivosťou rozumieme schopnosť predstavovať si vlastnosti geometrických trojrozmerných predmetov, ich tvar (podoba telies), polohu, veľkosť a umiestnenie v priestore.

Najnižšou formou priestorovej predstavivosti je *priestorová predstavivosť všeobecná* alebo *intuitívna priestorová predstavivosť*. Rozumie sa tým schopnosť predstavovať si:

- skôr videné (vnímané) objekty v trojrozmernom priestore a vybaviť si ich vlastnosti, polohu a priestorové vzťahy,
- skôr alebo v danom momente videné (vnímané) objekty v inej vzájomnej polohe, než v akej boli v skutočnosti vnímané,
- objekty v priestore na základe ich rovinného obrazu,
- neexistujúci reálny objekt v trojrozmernom priestore na základe jeho slovného opisu.

Vyššia forma je *geometrická predstavivosť*, teda schopnosť:

- abstrahovať z reálnej skutočnosti (z konkrétnych objektov) ich geometrické vlastnosti a vidieť v nich modely geometrických útvarov,
- predstavovať si geometrické útvary a vzťahy medzi nimi na základe ich jednoduchých modelov. Predstavovať si geometrické útvary v najrôznejších vzájomných vzťahoch, a to aj v takých, v ktorých nemôžu byť predvedené pomocou hmotných modelov geometrických útvarov (napr. prienik dvoch telies),
- mať zásobu predstáv geometrických útvarov a schopnosť vybavovať si ich najrôznejšie podoby a polohy.

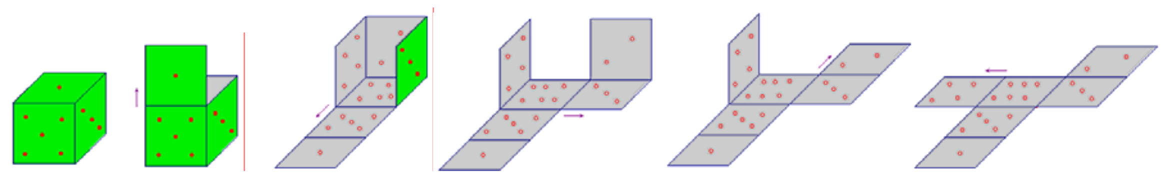
Najvyššou formou priestorovej predstavivosti je *priestorové a geometrické (priestorové schematické) myslenie*. Priestorové myslenie je schopnosť na základe priestorových a geometrických predstáv:

- vyvodiť závery, prípadne vytvoriť si nové predstavy, vedieť takéto nové predstavy vyjadriť alebo ich aj realizovať,
- myšlienkovo konštruovať priestorové obrazy (geometrické útvary), robiť s nimi operácie a vedieť také operácie vyjadriť, prípadne ich realizovať,

- vyjadriť graficky, diagramom, grafom alebo iným spôsobom (nejakou geometrickou schémou) v realite existujúce vzťahy a závislosti, vlastnosti rôznych matematických objektov, pojmov a javov a vzťahy závislosti medzi nimi, prípadne vedieť vyjadriť prebiehajúci dej,
- vedieť si predstaviť rôzne vzťahy, javy a závislosti existujúce v realite i v matematike, ak sú vyjadrené geometrickou schémou,
- využívať grafické metódy na riešenie praktických úloh a matematických problémov.

2.1 ÚLOHY NA SIETI KOCKY

Sieť kocky vznikne rozložením stien kocky (jej plášťa) do roviny tak, aby po ich opätovnom zložení vznikla kocka. Steny kocky (zhodné štvorce) majú v sieti kocky spoločné niektoré celé strany.

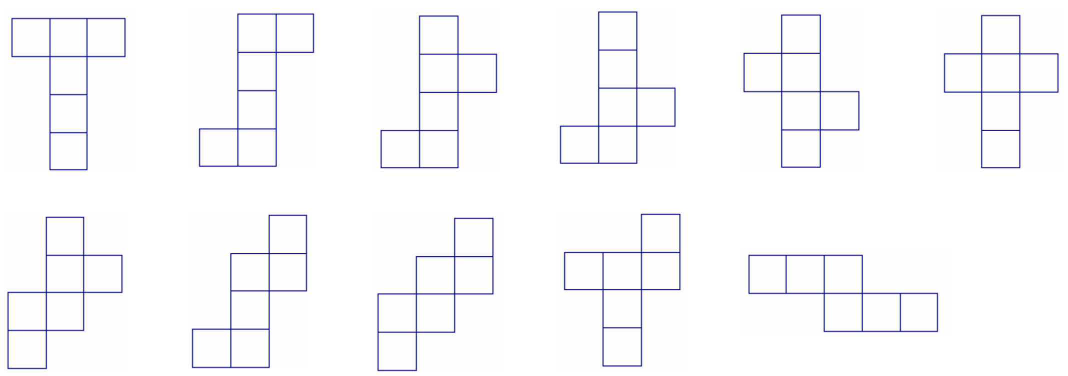


Obr. 2.1.1

Príklad 2.1.1

Nájdite všetky siete kocky.

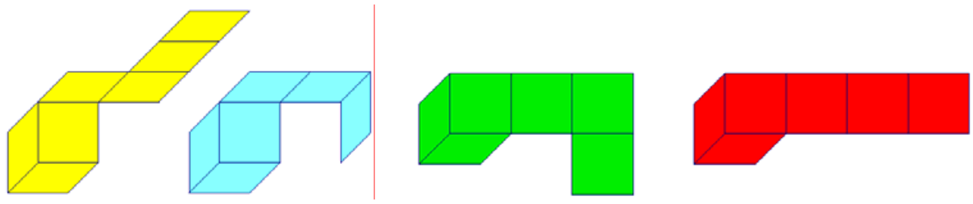
Riešenie. Existuje jedenásť rôznych sietí kocky.



Obr. 2.1.2

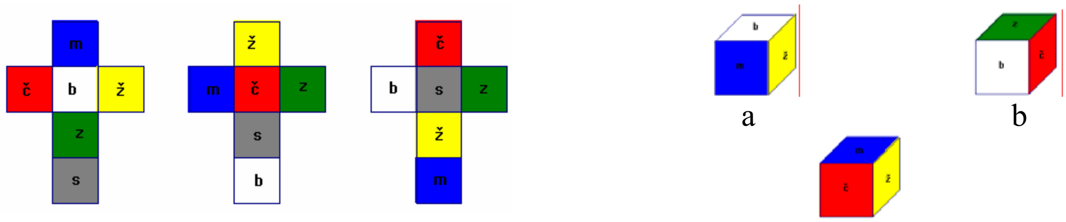
2.1 Cvičenie

1. *Z ktorej z týchto postupne sa skladajúcich sietí sa dá zložiť kocka?*



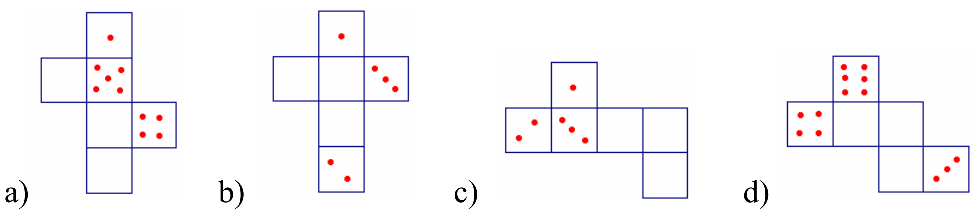
a) b) c) d)

2. *Priraďte k daným kockám ich siete.*

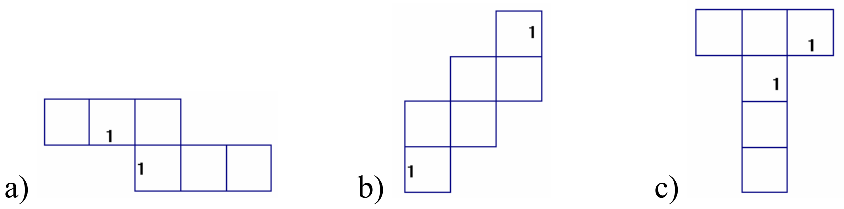


A B C c

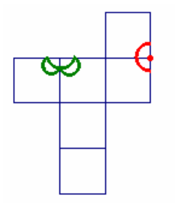
3. *Doplňte bodky na stenách hracej kocky tak, aby po jej zložení bol súčet bodiek na protiľahlých stenách kocky 7.*

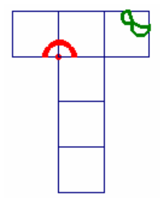


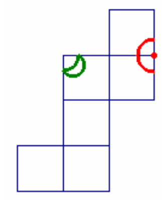
4. *V danej sieti kocky označte rovnakým číslom tie strany štvorcov, ktoré po zložení kocky tvoria tú istú hranu.*



5. *Na sieti kocky sú znázornené časti kvetov. Doplňte zvyšné časti kvetov tak, aby sa po zložení kocky objavili celé kvetiny v jej vrcholoch.*

a) 

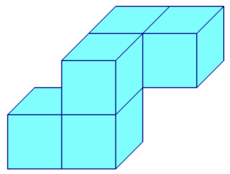
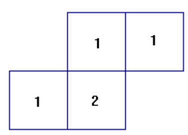
b) 

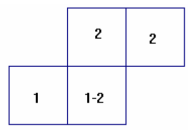
c) 

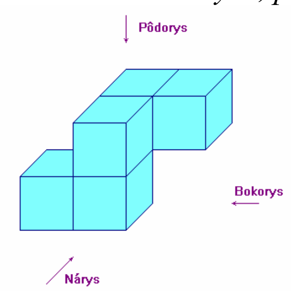
2.2 KOCKOVÉ TELESÁ

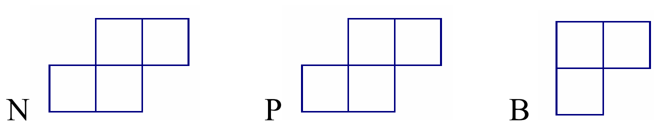
Kockové teleso je zložené z konečného počtu zhodných kociek tak, že každá kocka je spojená s aspoň jednou ďalšou kockou celou stenou.

Kockové teleso môžeme zaznamenať rôznymi spôsobmi:

<table>
<tr>
<td>a) Portrétom (zobrazením vo voľnom rovnobežnom premietaní)

Obr. 2.2.1</td>
<td>b) Šifrou: znakovým zápisom
□→□≡ □↑ □ →□</td>
</tr>
<tr>
<td>c) Plánom obyčajným: čísla vo štvorčeku označujú počet kociek v danom stĺpci postavených na seba


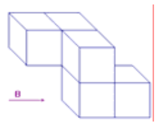
Obr. 2.2.2</td>
<td>d) Plánom úplným: čísla vo štvorčeku označujú „na ktorom poschodí“ je postavená kocka


Obr. 2.2.3</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">e) Znázornením nárysu, pôdorysu a bokorysu


Obr. 2.2.4


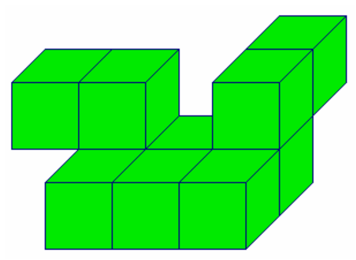
Obr. 2.2.5</td>
</tr>
</table>

Poznámka: Ak by bolo teleso znázornené zľava, má zmysel hovoriť o bokoryse sprava alebo zľava. My budeme pod bokorysom rozumieť bokorys sprava.



Príklad 2.2.1

Je dané kockové teleso a jeho znakový zápis. Skúste rozlúštiť jednotlivé znaky šifry.



Obr.2.2.1.1

Znakový zápis:

□→□→□↑□≡□↑□#←↓□←□≡□←□

Riešenie.

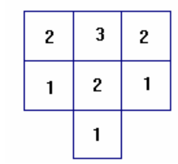
Rozlúštenie znakov „šifry“:

□ .... polož kocku
→ ……… choď doprava (alternatívne – na východ)
← ……… choď doľava (alternatívne – na západ)
↑ ……… choď dozadu (alternatívne – na sever, od seba)
↓ ……… choď dopredu (alternatívne – na juh, k sebe)
≡ ……… choď hore (o „poschodie“ vyššie, polož kocku na kocku)
\# ………. choď dole (o „poschodie“ nižšie)

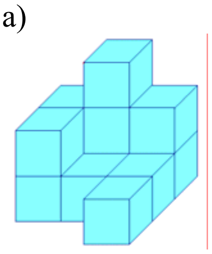
2.2 Cvičenie

1. *Ktoré kockové teleso patrí k danému plánu?*

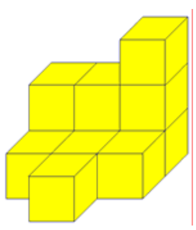
Plán



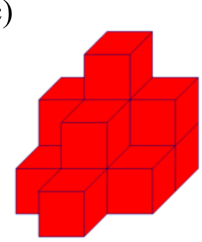
a)



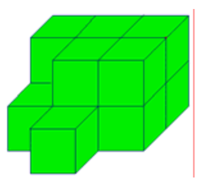
b)



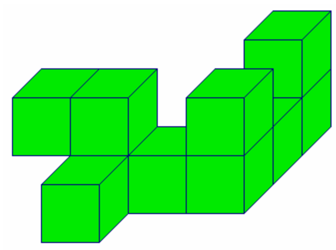
c)

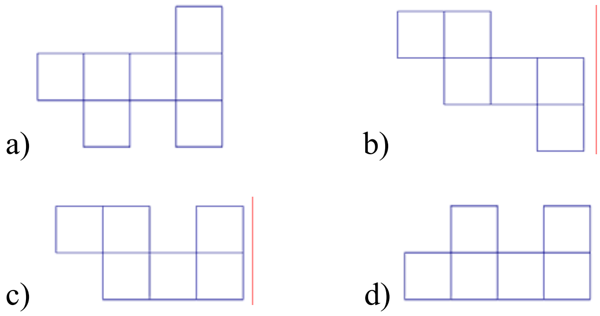


d)

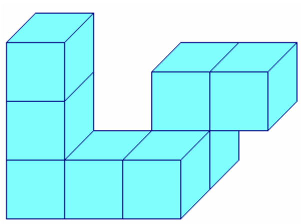


2. *Priraďte k danému telesu jeho nárys, pôdorys a bokorys.*





3. *K danému kockovému telesu priraďte jeho znakový zápis:*



a) □→□→□↑□≡□↑□#←↓□←□≡□

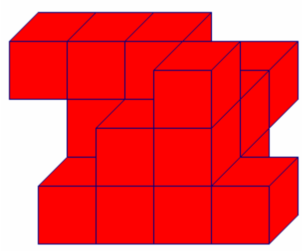
b) □≡□≡□##→□→□↑□≡□→□

c) □→□→□↑□≡□→□←↓←←□≡□

4. *Postavte a znázornite vo voľnom rovnobežnom premietaní kockové teleso dané znakovým zápisom. Načrtnite jeho nárys, pôdorys a bokorys.*

a) □→□→□≡□#↓□
b) □→□≡□#→□≡□#↑□←□≡□≡□#→□↑ #□
c) □→□→□←↑□↓↓□≡□↑→□

5. *K danému kockovému telesu zostavte:*

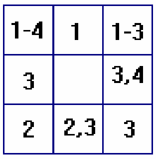


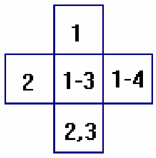
a) úplný plán

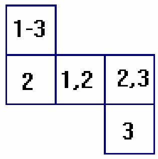
b) znakový zápis

c) nárys, pôdorys a bokorys

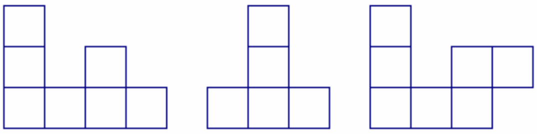
6. *Nakreslite nárys, pôdorys a bokorys kockových telies daných úplným plánom. Napíšte k týmto telesám ich znakové zápisy.*

a) 

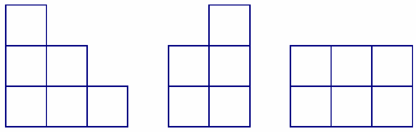
b) 

c) 

7. *Dané sú nárys, pôdorys a bokorys kockového telesa. Znázornite toto teleso vo voľnom rovnobežnom premietaní a zostavte jeho úplný plán.*

a) 

N B P

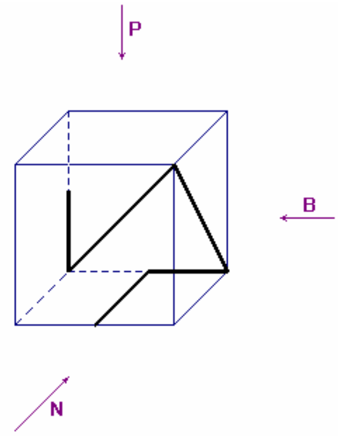
b) 

N B P

2.3 RÔZNE INÉ ÚLOHY

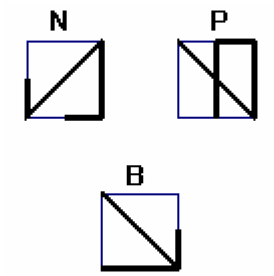
Príklad 2.3.1

Na kocke je znázornená súvislá lomená čiara. Znázornite, ako vidíme túto čiaru v náryse, pôdoryse a bokoryse.



Obr. 2.3.1.1

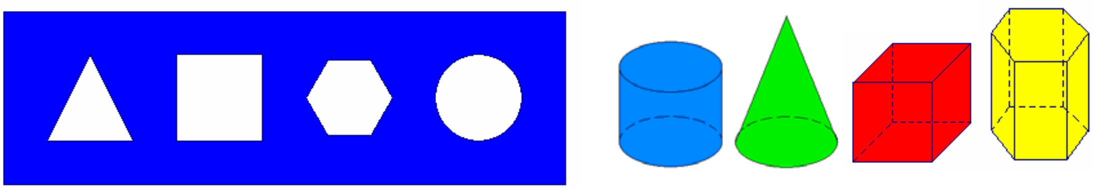
Riešenie.



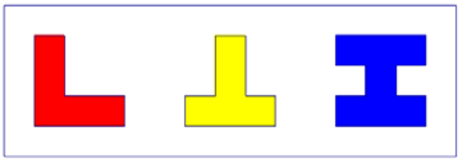
Obr. 2.3.1.2

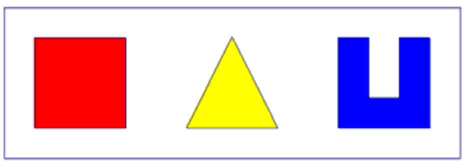
2.3 Cvičenie

1. *Ku každému znázornenému telesu priraďte všetky otvory, ktorými je možné pretiahnuť teleso „tesne bez medzier“ na druhú stranu.*

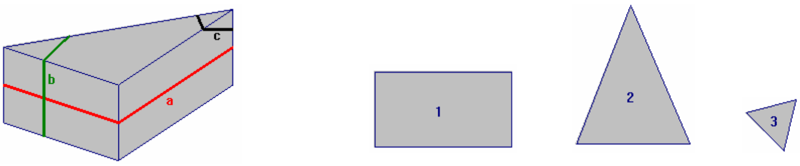


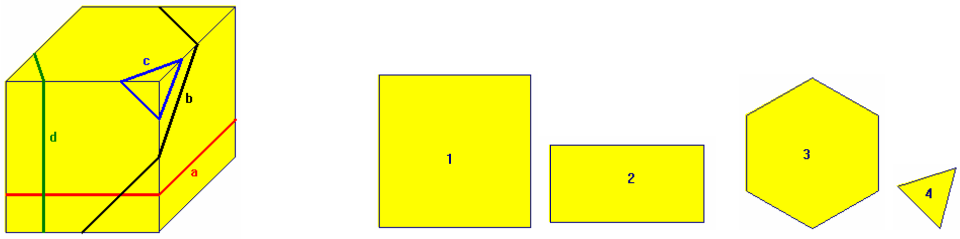
2. *Zobrazte vo voľnom rovnobežnom premietaní teleso, ktoré je možné pretiahnuť „tesne bez medzier“ všetkými vyznačenými otvormi.*

a) 

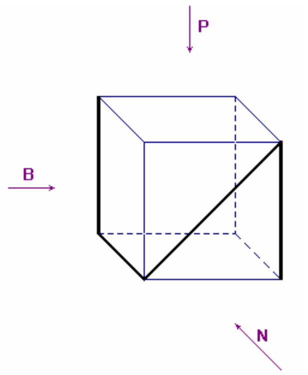
b) 

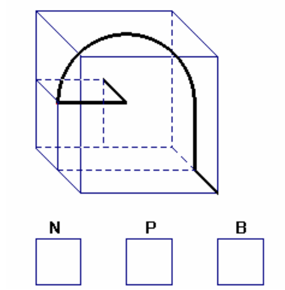
3. *Priraďte rovinné útvary k rezom na krabiciach daných tvarov.*

a) 

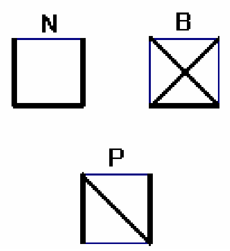
b) 

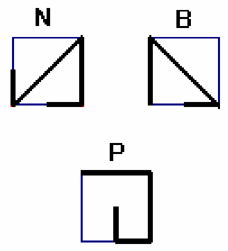
4. *Znázornite, ako vidíme súvislý drôt znázornený na kocke pri pohľade spredu, zhora a zľava.*

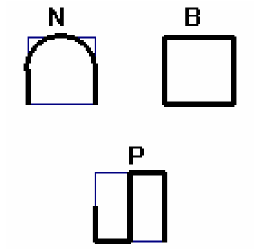
a) 

b) 

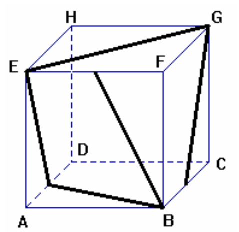
5. *Znázornite vo voľnom rovnobežnom premietaní obraz drôtu navinutého na kocke, ak je daný jeho nárys, pôdorys a bokorys zľava.*

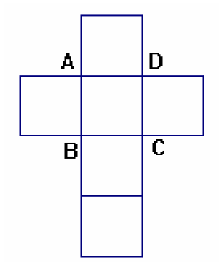
a) 

b) 

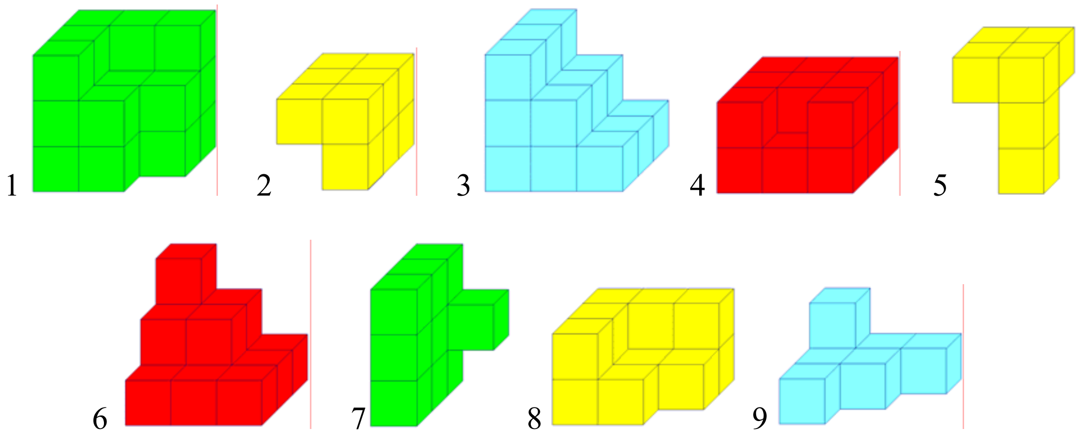
c) 

6. *Na povrchu kocky je znázornená súvislá lomená čiara, ktorá prechádza buď vrcholmi kocky alebo stredmi jej hrán. Zakreslite čiaru do uvedenej siete kocky.*





7. *Ktoré dvojice kockových telies po ich zložení tvoria kocku?*



3 POLOHOVÉ VLASTNOSTI ÚTVAROV V PRIESTORE

Útvarmi budeme rozumieť priamky, roviny a telesá.

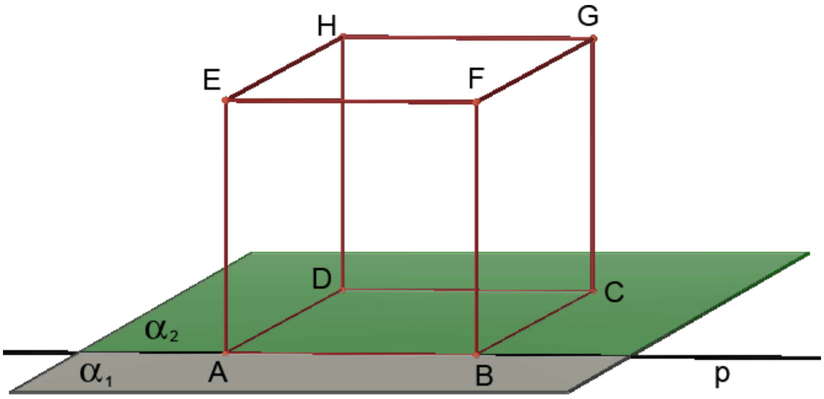
Každá priamka je jednoznačne určená svojimi dvoma bodmi, ktoré môžu byť zadané resp. vyznačené priamo alebo ako priesečníky iných dvoch priamok; prípadne priamky a roviny. Priamku určenú bodmi A, B označujeme $\overleftrightarrow{AB}$. Niekedy hovoríme o priamke p určenej bodmi A, B, potom zapisujeme $p = \overleftrightarrow{AB}$. Ak bod A leží na priamke p, zapisujeme $A \in p$.

Rovina je jednoznačne určená

- troma nekolineárnymi bodmi
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží
- dvoma rôznobežnými priamkami
- dvoma rovnobežnými, navzájom rôznymi priamkami.

Ak je rovina určená bodmi A, B, C zapisujeme $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ (roviny označujeme aj malými písanými gréckymi písmenami), resp. $\alpha = \overleftrightarrow{pC}$. Iné zápisy nepoužívame.

Ak priamka $p = \overleftrightarrow{AB}$ leží v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$, zapisujeme $p \subset \overleftrightarrow{ABC}$.



Obr. 3.1

Ak priamka p leží v rovine α, rozdelí rovinu na dve *polroviny* α_1, α_2. Priamka p sa nazýva *hraničná priamka*.

Rovina α rozdelí priestor na dva *polpriestory*.

Rovina α sa nazýva *hraničná rovina*. Na obr. 3.1 je obraz kocky $ABCDEFGH$ s vyznačenou priamkou $p = \overleftrightarrow{AB}$ a rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$. Polroviny α_1, α_2 sú na obr. 3.1 vyznačené ako rovnobežníky. Rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$ rozdelí priestor na dva polpriestory.

3.1 VZÁJOMNÉ POLOHY ÚTVAROV V PRIESTORE

Zistiť vzájomnú polohu dvoch útvarov znamená skúmať, či útvary majú spoločné body. Ak je prienik útvarov neprázdny, potom je potrebné tieto spoločné body vyznačiť alebo konštrukčne zostrojiť.

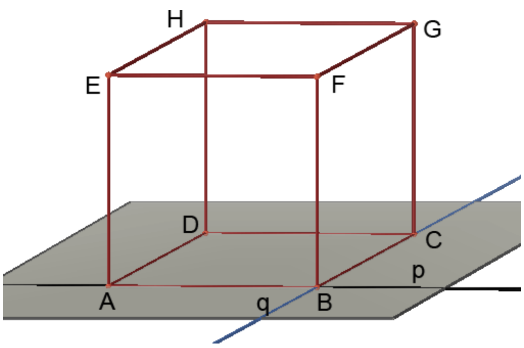
Klasifikácia vzájomných polôh dvoch priamok p,q

$$p,q$$

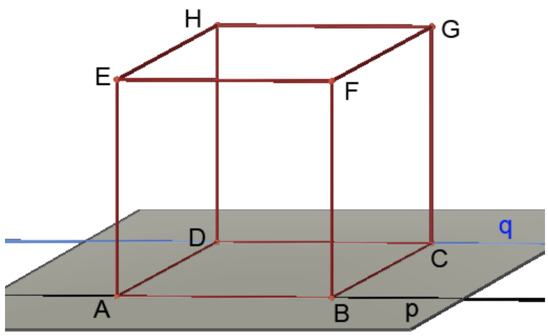
$\swarrow \qquad \searrow$

ležia v jednej rovine	***neležia v jednej rovine***
1. majú spoločný práve jeden bod $p \cap q = \{P\}$ ***priamky sú rôznobežné*** ***bod P je ich priesečník***	***priamky sú mimobežné*** $p \cap q = \{\varnothing\}$
2. nemajú spoločný bod $p \cap q = \{\varnothing\}$ ***priamky p,q sú rovnobežné $p \parallel q$***	
3. majú spoločných nekonečne veľa bodov	

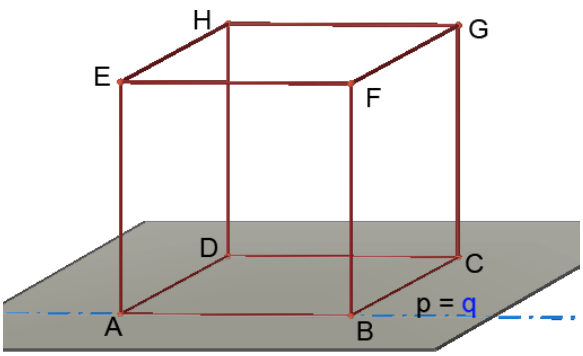
Na obr. obr. 3.1.1a – d sú znázornené všetky štyri prípady.



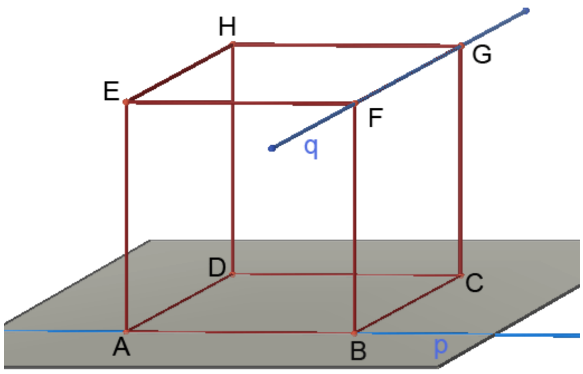
Obr. 3.1.1a



Obr. 3.1.1b



Obr. 3.1.1c



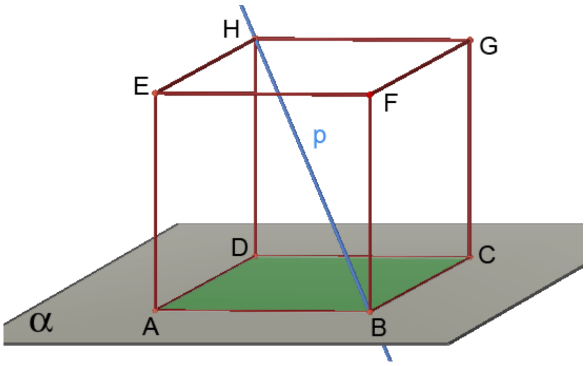
Obr. 3.1.1d

Klasifikácia vzájomných polôh priamky p a roviny α

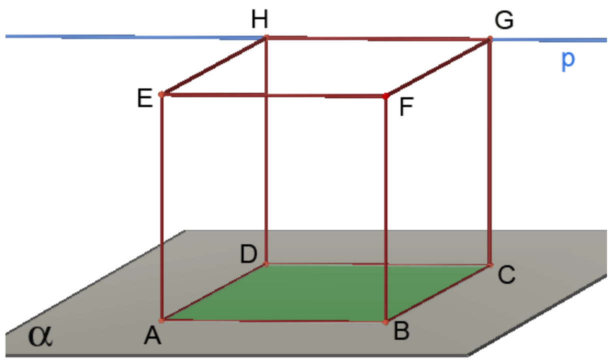
$$p,\alpha$$
$$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$$

majú spoločný práve jeden bod $p \cap \alpha = \{P\}$ ***priamka a rovina sú rôznobežné,*** ***bod P je ich priesečník***	**majú spoločných nekonečne veľa bodov** $p \subset \overleftrightarrow{ABC}$ ***priamka leží v rovine***	***nemajú spoločný bod*** $p \cap \alpha = \{\varnothing\}$ ***priamka a rovina sú rovnobežné*** $p \parallel \alpha$

Na obr. 3.1.2 a – b sú znázornené všetky prípady.



Obr. 3.1.2a



Obr. 3.1.2b

Rozhodnúť o vzájomnej polohe priamky a roviny môžeme na základe ***kritéria rovnobežnosti priamky s rovinou***

Ak je priamka p rovnobežná s niektorou priamkou q roviny α, potom je priamka p s rovinou α rovnobežná.

$$Ak\ (p \parallel q)\ a\ súčasne\ (q \subset \alpha),\ potom\ (p \parallel \alpha).$$

Na obr. 3.1.2b by priamkou q mohla byť priamka $\overleftrightarrow{CD}$, prípadne aj $\overleftrightarrow{AB}$.

V úlohách ide najmä o to, aby sme našli <u>aspoň jednu</u> priamku q ležiacu v rovine α a vedeli zdôvodniť jej rovnobežnosť s p. Napr. dokázať, že $p \parallel q$, je jednoduché - $CDHG$ je štvorec, resp. $ABGH$ obdĺžnik.

Poznámka. Mnohé zdôvodnenia sa zakladajú na vlastnostiach rovinných útvarov. V našom prípade sme využili vlastnosti rovnobežníkov.

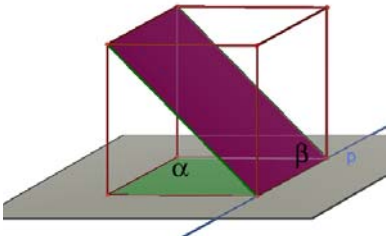
Klasifikácia vzájomných polôh dvoch rovín

α, β

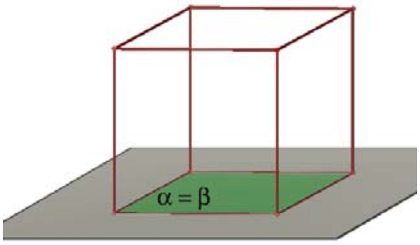
$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$

majú spoločnú práve jednu priamku $\alpha \cap \beta = p$ ***priamka a rovina sú rôznobežné*** ***priamka*** p ***je priesečnica***	***majú spoločné všetky body*** $\alpha \equiv \beta$ **roviny sú totožné**	***nemajú spoločný bod*** $\alpha \cap \beta = \{\emptyset\}$ ***roviny sú rovnobežné*** $\alpha \parallel \beta$

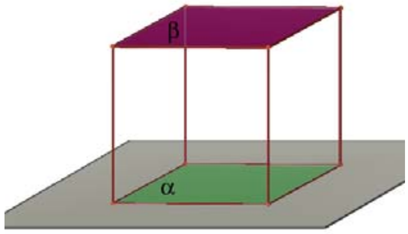
Na obr. 3.1.3 a – c sú znázornené všetky prípady.



Obr. 3.1.3a



Obr. 3.1.3b



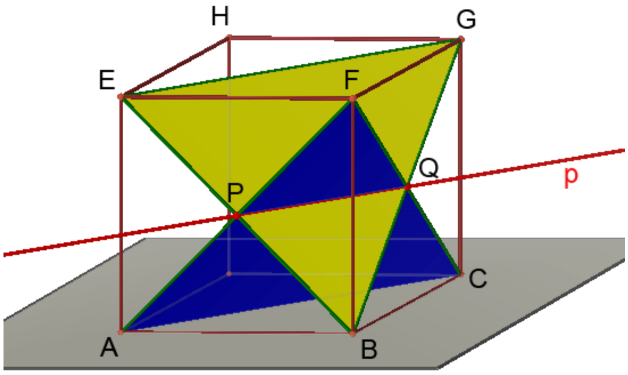
Obr. 3.1.3c

Poznámka. Ak majú dve roviny spoločný aspoň jeden bod, potom majú spoločnú celú priamku, ktorá je ich priesečnicou. Určiť priesečnicu dvoch rovín znamená nájsť aspoň dva rôzne body spoločné obom rovinám.

Príklad 3.1.1

Je daná kocka $ABCDEFGH$. *Zostrojte priesečnicu rovín* $\overleftrightarrow{ACF}, \overleftrightarrow{BEG}$.

Riešenie. Vyznačíme obe roviny ako trojuholníky, ktorých strany ležia na uhlopriečkach stien kocky (obr. 3.1.4). V rovine prednej steny $\overleftrightarrow{ABF}$ sa pretínajú priamky $\overleftrightarrow{AF}, \overleftrightarrow{BE}$ v spoločnom bode P. Druhý bod Q priesečnice p je priesečníkom priamok $\overleftrightarrow{CF}$ a $\overleftrightarrow{BG}$ v rovine bočnej steny $\overleftrightarrow{BCF}$. Priesečnica p je jednoznačne určená bodmi P, Q.



Obr. 3.1.4

Rozhodnúť o rovnobežnosti rovín α, β môžeme na základe ***kritéria rovnobežnosti dvoch rovín.***

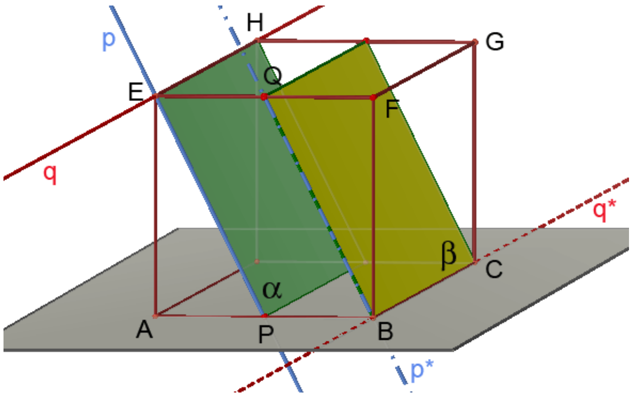
Ak rovina α obsahuje dve rôznobežné priamky p, q, z ktorých každá je rovnobežná s druhou rovinou β, potom sú roviny α, β rovnobežné.

Ak $(p, q \subset \alpha)$ *také, že* $p \cap q = \{P\}$ *a* $(p \parallel \beta)$ *súčasne* $(q \parallel \beta)$, *potom* $(\alpha \parallel \beta)$.

Príklad 3.1.2

Na kocke $ABCDEFGH$ sú vyznačené postupne stredy P, Q hrán AB, EF. Rozhodnite o rovnobežnosti rovín $\overleftrightarrow{BCQ}, \overleftrightarrow{EHP}$.

Riešenie. Označíme $\alpha = \overleftrightarrow{EHP}, \beta = \overleftrightarrow{BCQ}$ $p = \overleftrightarrow{EP}$, $q = \overleftrightarrow{EH}$. Priamky $p = \overleftrightarrow{EP}, q = \overleftrightarrow{EH}$ sú rôznobežky so spoločným bodom E a v zmysle kritéria im budeme hľadať rovnobežky v rovine β. Vo štvorci $ABFE$ sú úsečky EP, BQ rovnobežné (P, Q sú stredy hrán AB, EF) a teda $\overleftrightarrow{EP} \parallel \overleftrightarrow{BQ}$. Taktiež platí $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, pretože sú to hrany kocky. Podľa kritéria sme dvom rôznobežkám z jednej roviny $\alpha = \overleftrightarrow{EHP}$ našli odpovedajúce rovnobežky p', q' z druhej roviny $\beta = \overleftrightarrow{BCQ}$, kde $p' = \overleftrightarrow{BQ}$, $q' = \overleftrightarrow{EP}$, a teda platí $\overleftrightarrow{BCQ} \parallel \overleftrightarrow{EHP}$.



Obr. 3.1.5

O vzájomnej polohe priamok a rovín platia tieto tvrdenia

1. Ak priamka p je rovnobežná s priamkou q, priamka q je rovnobežná s priamkou r, potom priamka p je rovnobežná aj s priamkou r.

$$Ak\ (p \parallel q)\ a\ súčasne\ (q \parallel r),\ potom\ (p \parallel r).$$

2. Ak je rovina α rovnobežná s rovinou β, rovina β rovnobežná s rovinou γ, potom je aj rovina α rovnobežná s rovinou γ.

$$Ak\ (\alpha \parallel \beta)\ a\ súčasne\ (\beta \parallel \gamma),\ potom\ (\alpha \parallel \gamma).$$

3. Ak je priamka p rovnobežná s priamkou q, priamka q rovnobežná s rovinou α, potom je priamka p rovnobežná s rovinou α.

$$Ak\ (p \parallel q)\ a\ súčasne\ (q \parallel \alpha),\ potom\ (p \parallel \alpha).$$

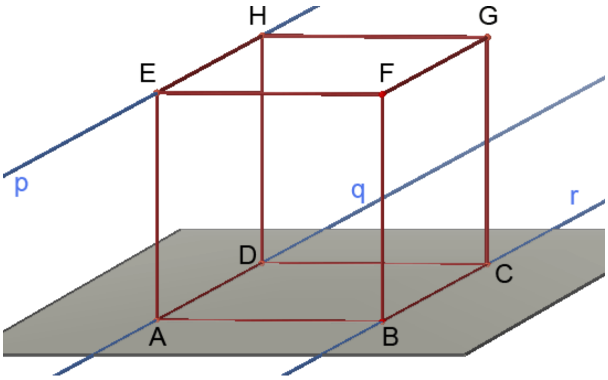
4. Ak je priamka p rovnobežná s rovinou α, rovina α rovnobežná s rovinou β, potom je priamka p rovnobežná s rovinou β.

$$Ak\ (p \parallel \alpha)\ a\ súčasne\ (\alpha \parallel \beta),\ potom\ (p \parallel \beta).$$

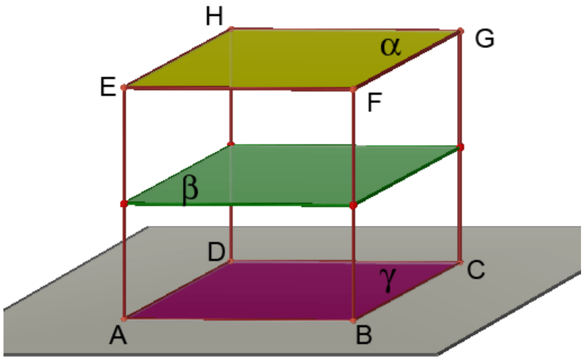
5. Ak je priamka p rovnobežná s dvomi navzájom rôznobežnými rovinami α, β, potom je priamka p rovnobežná aj s ich priesečnicou q.

$$Ak\ (p \parallel \alpha)\ a\ súčasne\ (p \parallel \beta),\ pričom\ \alpha \cap \beta = \{q\},\ potom\ (p \parallel q).$$

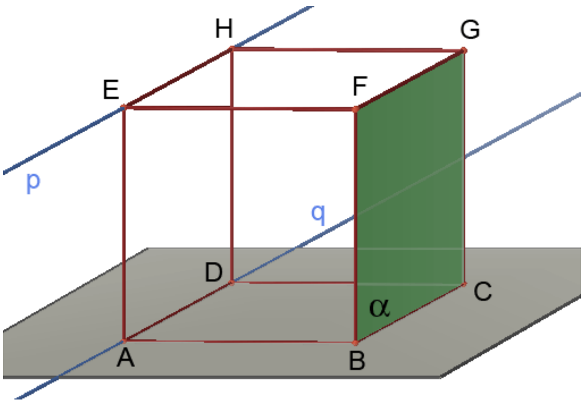
Vety názorne ilustrujeme pomocou drôteného modelu kocky na obr. 3.1.6a – e.



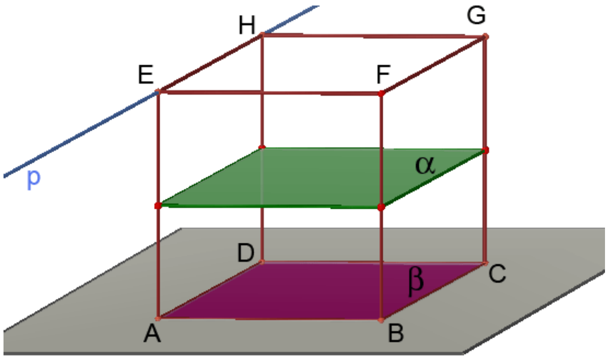
Obr. 3.1.6a



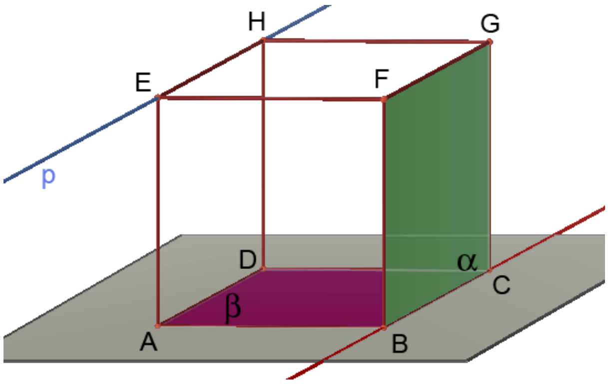
Obr. 3.1.6b



Obr. 3.1.6c



Obr. 3.1.6d



Obr. 3.1.6e

Mnohé z uvedených viet a taktiež vety o vzájomnej polohe troch rovín majú svoje použitie v polohových konštrukčných úlohách, kde zostrojujeme rez telesa rovinou alebo prienik priamky s rovinou. Týmto úlohám sa budeme venovať v ďalšej kapitole.

Poznámka. V prípade viet 1, 2 hovoríme o tranzitívnosti relácie rovnobežnosti.

Klasifikácia vzájomných polôh troch rovín

$$\alpha, \beta, \gamma$$

1. ***tri roviny sú navzájom rovnobežné rôzne***

   roviny nemajú spoločný bod

2. ***dve roviny sú navzájom rovnobežné rôzne a tretia rovina je s nimi rôznobežná***

   dve priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky

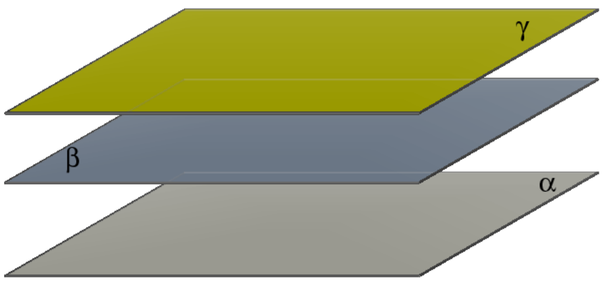
3. ***každé dve roviny sú rôznobežné***

   vzájomné priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky

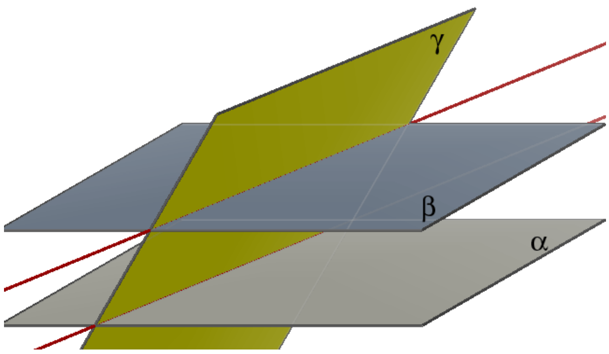
4. ***každé dve roviny sú rôznobežné a majú jedinú spoločnú priesečnicu***

5. ***tri roviny majú spoločný jediný bod***

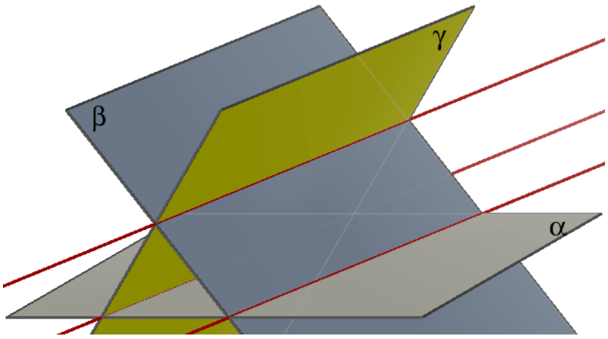
Tvrdenia o vzájomnej polohe troch rovín názorne ilustrujeme na obr. 3.1.7a – f.



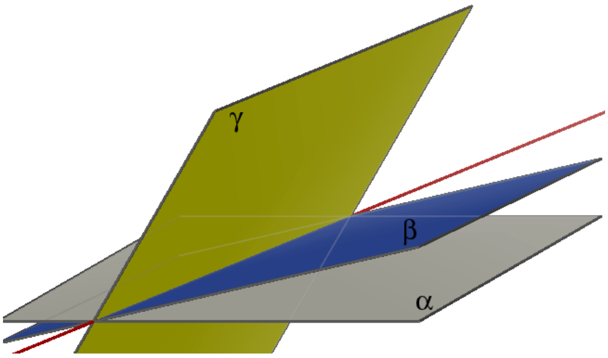
Obr. 3.1.7a



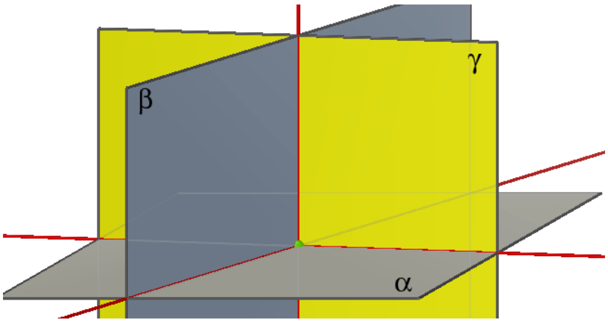
Obr. 3.1.7b



Obr. 3.1.7c



Obr. 3.1.7d



Obr. 3.1.7e

Poznámka.

1. *Obr. 3.1.7c sa niekedy slovne interpretuje ako „stan"; obr. 3.1.7d ako „kniha" a obr. 3.1.7e ako „roh miestnosti".*
2. *Pri rezoch telies sa najčastejšie budú aplikovať vety, ktorých geometrický význam je znázornený na obr. 3.1.7b a obr. 3.1.7e.*

3.2 POLOHOVÉ KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY

Polohové konštrukčné úlohy možno rozdeliť na štyri základné typy

a) rez telesa

b) prienik priamky s rovinou

c) prienik priamky s telesom

d) zostrojiť priečku, resp. os, dvoch mimobežiek

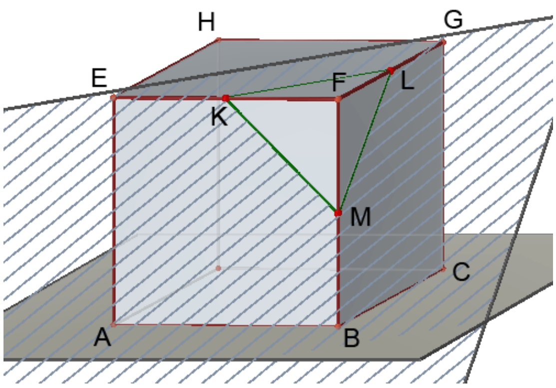
A) REZOM TELESA T (kocky, hranola, kvádra, ihlanu, …) **ROVINOU** ρ rozumieme prienik roviny ρ a telesa T. Rezom je rovinný konvexný útvar - mnohouholník, ktorého strany sú priesečnice rezovej roviny ρ so stenami telesa T**.** Z toho dôvodu sa rez vyznačuje len na povrchu telesa aj s patričnou viditeľnosťou.

Dôležité ! Rovina ρ je zvyčajne určená tromi nekolineárnymi bodmi (najčastejší prípad), ktoré budeme označovať číslami **1, 2, 3**. V istých príkladoch môže byť rovina ρ daná priamkou $\boldsymbol{p}$ a bodom **1**, neležiacim na priamke $\boldsymbol{p}$. Body priamky $\boldsymbol{p}$ budeme označovať veľkými rímskymi číslicami **I, II, III, …** . Uvedená nezvyčajná notácia bude užitočná pri rekonštrukcii rezu telesa a zápise jeho postupu.

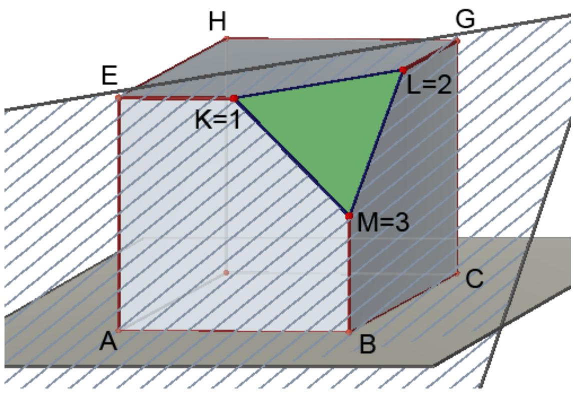
Príklad 3.2.1

Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, kde body K, L, M sú postupne stredy hrán EF, FG, BF.

Riešenie. Obr. 3.2.1a,b sú situačné a ukazujú zámer, ktorý sledujeme – odrezať z kocky „roh“ s vrcholom F.

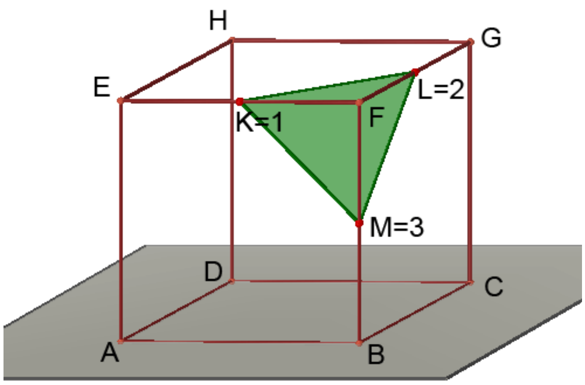


Obr. 3.2.1a



Obr. 3.2.1b

Na obr. 3.2.1c je drôtený model kocky $ABCDEFGH$, v ktorom označíme $1 = K, 2 = L, 3 = M$. Úsečka 12 leží v hornej podstave $EFGH$, a preto ju zostrojíme. Úsečka 23 leží v rovine bočnej steny $BCGF$, zostrojíme ju a rovnako v prednej stene leží úsečka 31. Rezom je trojuholník 123, resp. KLM.



Obr. 3.2.1c

Postup

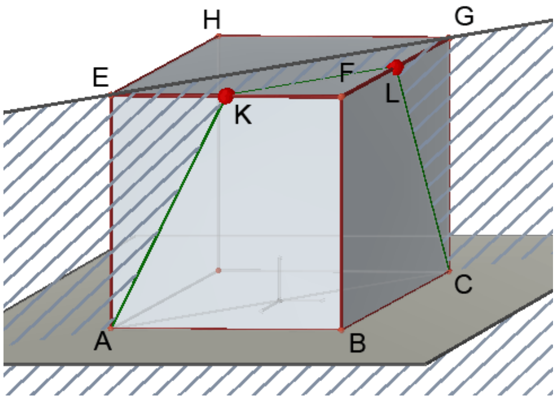
a) úsečka 12
b) úsečka 23
c) úsečka 31
d) trojuholník 123

V ďalšom príklade použijeme na konštrukciu rezu situáciu z obr. 3.1.7c.

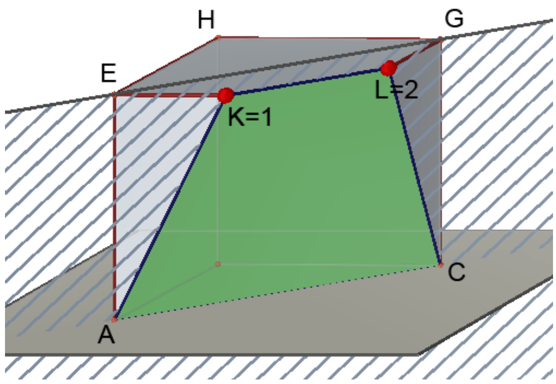
Príklad 3.2.2

Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\overleftrightarrow{KLC}$, kde body K, L sú postupne stredy hrán EF, FG.

Riešenie. Obr. 3.2.2a,b sú opäť situačné.



Obr. 3.2.2a



Obr. 3.2.2b

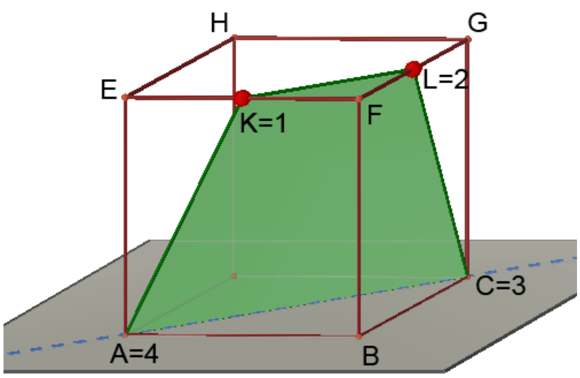
Na obr. 3.2.2c je drôtený model kocky $ABCDEFGH$, v ktorom označíme $1 = K, 2 = L, 3 = C$. Úsečka 12 leží v hornej podstave $EFGH$, a preto ju zostrojíme. Úsečka 23 leží v bočnej stene $BCGF$, tiež ju zostrojíme.

Rovina rezu ρ pretne roviny hornej a dolnej podstavy kocky. Tieto roviny sú rovnobežné, preto ich musí preťať v navzájom rovnobežných priesečniciach.

V hornej podstave je priesečnicou priamka 12, priesečnica v dolnej podstave musí byť rovnobežná s 12 a prechádza cez bod 3.

Zostrojíme teda bodom 3 rovnobežku p s úsečkou 12. Prienik priamky p s hranami dolnej podstavy označíme 4, v našom prípade $A = 4$. Úsečka 41 leží v rovine prednej steny $ABFE$, zostrojíme ju.

Rezom je štvoruholník – lichobežník 1234.



Obr. 3.2.2c

Postup

a) úsečka 12
b) úsečka 23
c) rovnobežka p;

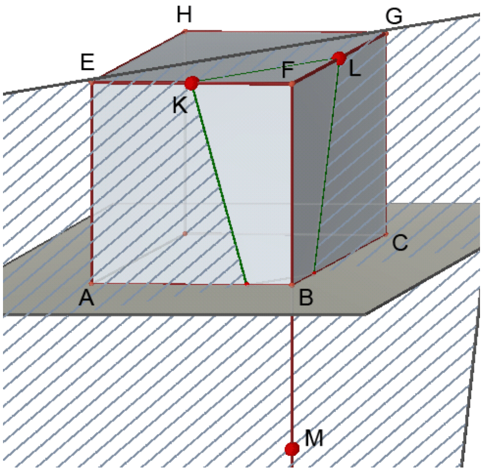
   $p \parallel 12$, $3 \in p$
d) $p \cap AC = \{4\}$
e) úsečka 41
f) lichobežník 1234

Vyššie uvedenú konštrukciu s rovnobežkou používame vždy, ak rovina rezu ρ pretína dve rovnobežné roviny telesa T (kocka, kváder, hranol, rovnobežnosten), pričom poznáme priesečnicu v jednej rovine a bod z druhej roviny. Ukážeme na príklade 3.2.3.

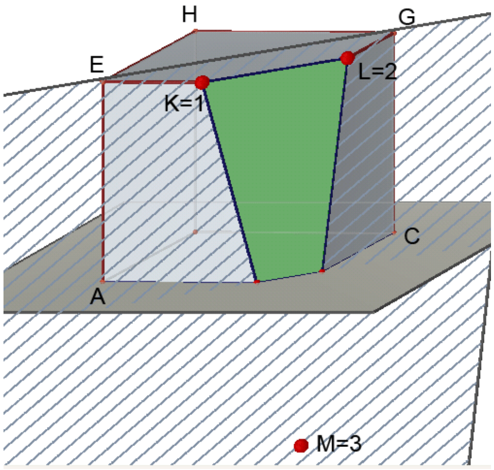
Príklad 3.2.3

Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, kde body K, L sú postupne stredy hrán EF, FG a bod M leží na polpriamke $\overrightarrow{FB}$ za bodom B.

Riešenie. Obr. 3.2.3a,b sú opäť situačné.

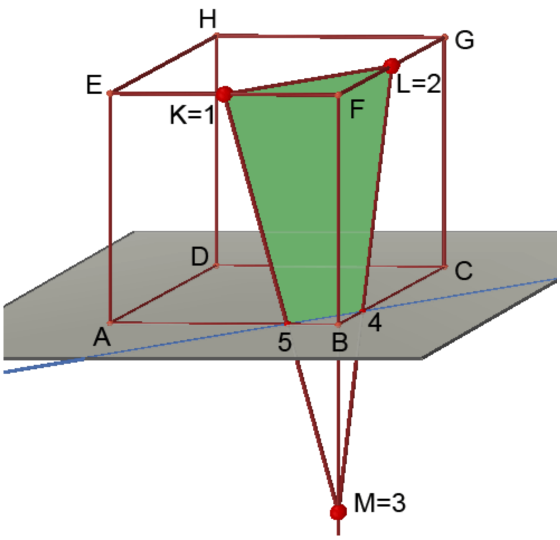


Obr. 3.2.3a



Obr. 3.2.3b

Na obr. 3.2.3c je drôtený model kocky $ABCDEFGH$, v ktorom označíme $1 = K, 2 = L, 3 = M$. Úsečka 12 leží v hornej podstave $EFGH$, a preto ju zostrojíme. Úsečka 23 leží v bočnej stene $BCGF$, tiež ju zostrojíme. Úsečka 23 pretne dolnú podstavu $ABCD$ v bode 4, ktorý leží na hrane BC. Bodom 4 zostrojíme rovnobežku p s úsečkou 12, ktorá pretne hranu AB v bode 5. Úsečka 51 leží v prednej stene $ABFE$, zostrojíme ju. Rezom je štvoruholník – lichobežník 1245.



Obr. 3.2.3c

Postup

a) úsečka 12
b) úsečka 23
c) bod 4; $BC \cap 23 = 4$
d) rovnobežka p; $p \parallel 12$, $4 \in p$
e) bod 5; $AB \cap p = \{5\}$
f) úsečka 51
g) lichobežník 1245

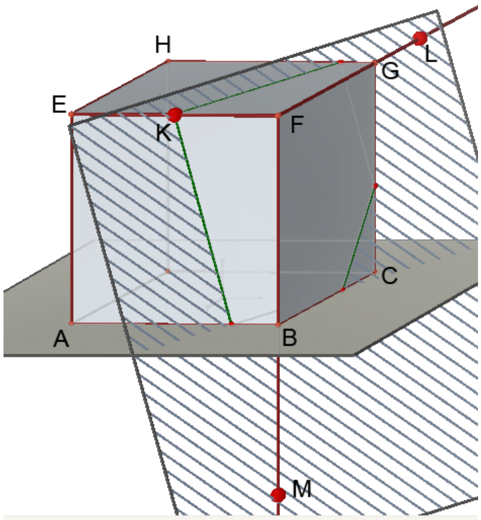
Nemá zmysel vyznačiť trojuholník 345, pretože nepatrí kocke - pri reze nás zaujíma iba prienik roviny s povrchom telesa.

Ak by sme zostrojili úsečku 13, zistíme, že bod 5 leží na tejto úsečke. Dôvod je jednoduchý – tri roviny : rovina $\overleftrightarrow{ABF}$, rovina $\overleftrightarrow{BCG}$ a rovina rezu $\overleftrightarrow{123}$ sa pretínajú v jednom bode – v bode 3. Ide o konkrétne použitie situácie z obr. 3.1.7e.

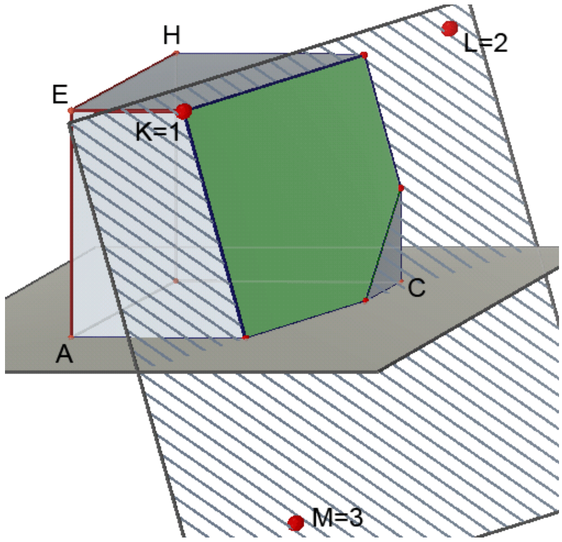
Príklad 3.2.4

Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, kde body K je stred hrany EF, bod L leží na polpriamke $\overset{\mapsto}{FG}$ za bodom G a bod M leží na polpriamke $\overset{\mapsto}{FB}$ za bodom B.

Riešenie. Obr. 3.2.4a,b sú situačné.

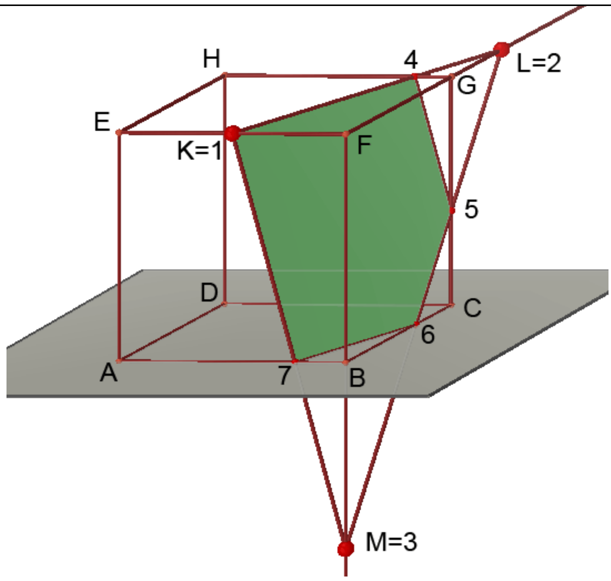


Obr. 3.2.4a



Obr. 3.2.4b

Na obr. 3.2.4c je drôtený model kocky $ABCDEFGH$, v ktorom označíme $1=K, 2=L, 3=M$. Úsečka 12 leží v hornej podstave $EFGH$, a preto ju zostrojíme. Úsečka 12 pretne hranu HG v bode 4. Úsečka 23 leží v rovine $\overleftrightarrow{BCG}$, zostrojíme ju a vidíme, že pretína postupne hrany CG, BC v bodoch 5 a 6. Zostrojíme úsečky 45 a 56. Úsečka 13 leží v prednej stene $ABFE$, preto ju môžeme zostrojiť, pričom pretne hranu AB v bode 7. Úsečka 67 leží v dolnej podstave, zostrojíme ju. Rezom je päťuholník 14567.



Obr. 3.2.4c

Postup

a) úsečka 12

b) bod 4; $GH \cap 12 = \{4\}$

c) úsečka 23

d) body 5,6;

$CG \cap 23 = \{5\}, BC \cap 23 = \{6\}$

e) úsečka 45

f) úsečka 56

g) úsečka 13

h) bod 7; $AB \cap 13 = \{7\}$

i) úsečka 67

j) úsečka 71

k) päťuholník 14567

Ako by ste riešili úlohu v prípade, že prienik úsečky 23 s hranami kocky by bol prázdny?

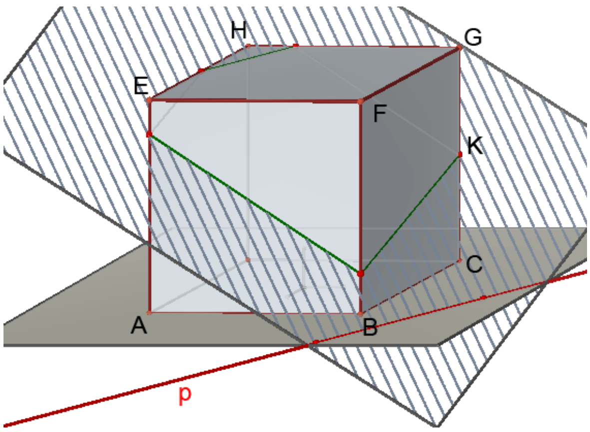
Návod: Zostrojte body 4, 7 a konštruujte rovnobežky.

Ukážeme riešenie úloh, v ktorých je rovina ρ určená bodom a priamkou.

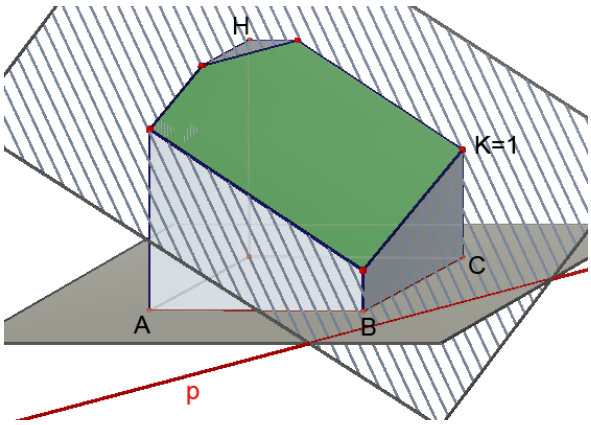
Príklad 3.2.5

V rovine dolnej podstavy kocky $ABCDEFGH$ leží priamka p, ktorá nemá spoločný bod so štvorcom $ABCD$. V strede hrany CG leží bod K. Zostrojte rez rovinou ρ, ktorá je určená priamkou p a bodom K.

Riešenie. Obr. 3.2.5a,b sú situačné.



Obr. 3.2.5a



Obr. 3.2.5b

Na obr. 3.2.5c je drôtený model kocky $ABCDEFGH$, v ktorom označíme $1 = K$. Priamka p leží v rovine podstavy, preto je spoločnou priesečnicou dvoch rovín – roviny ρ a $\overleftrightarrow{ABC}$.

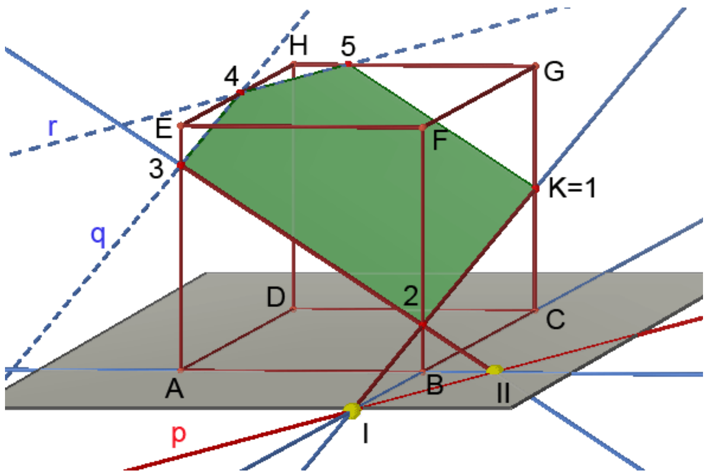
Ak uvažujeme o tretej rovine $\overleftrightarrow{BCG}$ (túto rovinu sme si vybrali zámerne, pretože v nej leží daný bod 1), pretnú sa všetky tri roviny v jednom bode I (rímska číslica pre jednotku). Zostrojíme bod I ako prienik priamky $\overleftrightarrow{BC}$ a priamky p (musíme si uvedomiť, že bod I leží aj na priesečnici bočnej roviny $\overleftrightarrow{BCG}$ a roviny podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$ - na priamke $\overleftrightarrow{BC}$). Bod I je ďalším bodom, ktorým môžeme konštruovať rez. Nachádza sa spolu s bodom 1 v rovine $\overleftrightarrow{BCG}$, zostrojíme teda úsečku 1I, pretínajúcu hranu BF v bode 2.

Zopakujeme predchádzajúci postup s bodom 2. Zostrojíme bod II, ktorý bude spoločným bodom troch rovín – roviny $\overleftrightarrow{ABC}$, roviny $\overleftrightarrow{ABF}$ a roviny rezu ρ. Bod II je prienikom priamky $\overleftrightarrow{AB}$ s priamkou p. Priamka 2II pretína hranu AE v bode 3.

Bodom 3 zostrojíme rovnobežku q s úsečkou 12, ktorá pretne hranu EH v bode 4.

Bodom 4 položíme rovnobežku r s priamkou p, pretínajúcu hranu HG v bode 5.

Úsečkou 51 uzavrieme hranicu päťuholníka 12345.



Obr. 3.2.5c

Postup

a) bod I; $p \cap \overleftrightarrow{BC} = \{\mathrm{I}\}$ I
b) bod 2; $1I \cap BF = \{2\}$
c) bod II; $p \cap \overleftrightarrow{AB} = \{\mathrm{II}\}$ II
d) bod 3; $\overleftrightarrow{2\mathrm{II}} \cap AE = \{3\}$
e) priamka q; $q \parallel 12,\ 3 \in p$
f) bod 4; $q \cap EH = \{4\}$
g) priamka r; $r \parallel p,\ 4 \in r$
h) bod 5; $r \cap GH = \{5\}$
i) úsečka 51
j) päťuholník 14567

Viete zdôvodniť, prečo bod 1 leží na priamke 5III, kde $p \cap \overleftrightarrow{CD} = \{\mathrm{III}\}$ III ?

Ako by ste riešili úlohu v prípade, že $p \parallel \overleftrightarrow{AB}$?

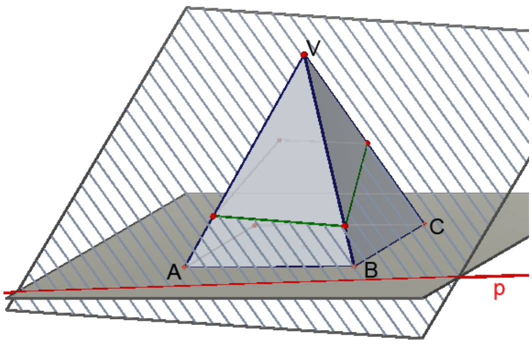
Návod: Zostrojte bod 2 a konštruujte rovnobežky na základe situácie z obr. 3.1.7c.

Poznámka: V ďalších príkladoch už neuvádzame symbolický postup konštrukcie rezu.

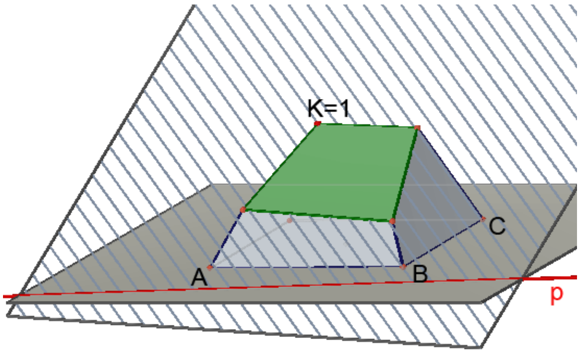
Príklad 3.2.6

V rovine podstavy pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ leží priamka p, ktorá nemá spoločný bod so štvorcom $ABCD$. V strede hrany DV leží bod K. Zostrojte rez rovinou určenou priamkou p a bodom K.

Riešenie. Obr. 3.2.6a,b sú situačné.

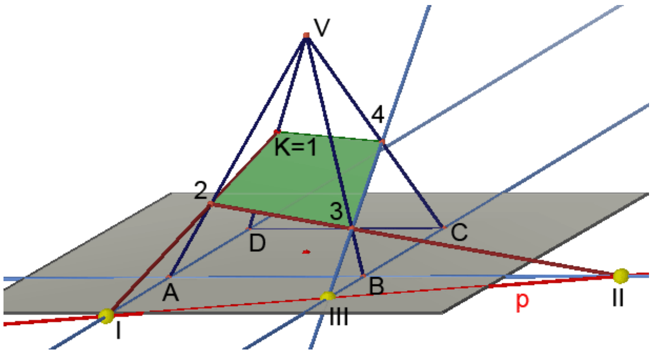


Obr. 3.2.6a



Obr. 3.2.6b

Na obr. 3.2.6c je drôtený model ihlana $ABCDV$, v ktorom označíme $1 = K$. Priamka p leží v rovine podstavy, preto je priesečnicou dvoch rovín - roviny ρ a roviny $\overleftrightarrow{ABC}$. Tretia pomocná rovina $\overleftrightarrow{ADV}$ pretne priamku p v bode I. Bod I sa nachádza spolu s bodom 1 v rovine $\overleftrightarrow{ADV}$, zostrojíme úsečku 1I, pretínajúcu hranu AV v bode 2. Zostrojíme bod II, ktorý bude spoločným bodom troch rovín – roviny $\overleftrightarrow{ABC}$, roviny $\overleftrightarrow{ABV}$ a roviny rezu ρ. Bod II je prienikom priamky $\overleftrightarrow{AB}$ s priamkou *p*. Priamka 2II pretína hranu BV v bode 3. Bod III je prienikom roviny $\overleftrightarrow{ABC}$, roviny $\overleftrightarrow{BCV}$ a roviny rezu ρ. Priamka 3III pretína hranu CV v bode 4. Úsečky 12, 23, 34, 41 ohraničujú rez – štvoruholník 1234.



Obr. 3.2.6c

Postup

a) bod I; $p \cap \overleftrightarrow{AD} = \{\mathrm{I}\}$

b) bod 2; $\overrightarrow{1\mathrm{I}} \cap AV = \{2\}$

c) bod II; $p \cap \overleftrightarrow{AB} = \{\mathrm{II}\}$

d) bod 3; $\overrightarrow{2\mathrm{II}} \cap BV = \{3\}$

e) bod III; $p \cap \overleftrightarrow{BC} = \{\mathrm{III}\}$

f) bod 4; $\overrightarrow{3\mathrm{III}} \cap CV = \{4\}$

g) štvoruholník 1234

Viete zdôvodniť, prečo bod 4 leží na priamke 1IV, kde $p \cap \overleftrightarrow{CD} = \{\mathrm{IV}\}$ IV ?

Ako by ste riešili úlohu v prípade, že $p \parallel \overleftrightarrow{AB}$?

Návod: Zostrojte bod 2 a konštruujte rovnobežky na základe situácie z obr. 3.1.7c.

Poznámka. K obrázkom ešte jedna pripomienka. Ak by sme použili obrazy telies vo VRP, museli by sme znázorňovať iste úsečky prerušovanou čiarou kvôli viditeľnosti. Používali sme však drôtený – kostrový model, kde je viditeľnosť hrán iná.

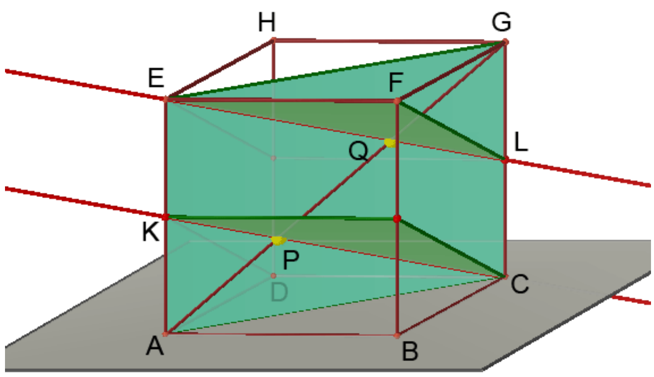
B) PRIENIK PRIAMKY p (rôznobežnej) **S ROVINOU** ρ sa konštrukčne rieši týmto spôsobom

1. položíme priamkou p pomocnú rovinu σ, ktorá je s rovinou ρ rôznobežná
2. určíme priesečnicu q rovín ρ, σ
3. priesečník P priamok p, q je hľadaným bodom

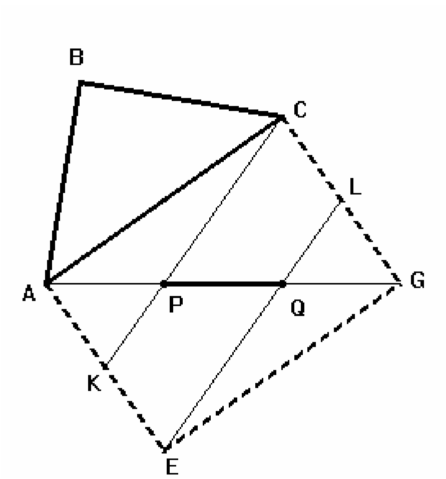
Príklad 3.2.7

Zostrojte priesečníky P,Q telesovej uhlopriečky AG kocky $ABCDEFGH$ s rovinami $\overleftrightarrow{CDK}$ a $\overleftrightarrow{EFL}$, kde body K,L sú postupne stredy hrán AE, CG. Zostrojte úsečku PQ v skutočnej dĺžke, ak $|AB| = 1$.

Riešenie. Na obr. 3.2.7a zostrojíme rezy kocky rovinami $\overleftrightarrow{CDK}$, $\overleftrightarrow{EFL}$. Priamku $\overleftrightarrow{AG}$ umiestnime do vhodnej pomocnej roviny σ, ktorú ľahko vieme zostrojiť a budeme schopní jednoducho nájsť jej priesečnice s rovinami rezov. Vhodnou rovinou je rovina $\overleftrightarrow{ACG}$. Platí $\overleftrightarrow{ACG} \cap \overleftrightarrow{CDK} = \overleftrightarrow{CK}$ a $\overleftrightarrow{ACG} \cap \overleftrightarrow{EFL} = \overleftrightarrow{EL}$. Obe priesečnice $\overleftrightarrow{CK}, \overleftrightarrow{EL}$ ležia v jednej rovine s danou priamkou p a sú rôznobežné, preto existujú ich spoločné priesečníky P,Q.



Obr. 3.2.7a



Obr. 3.2.7b

Za účelom zostrojenia úsečky PQ v skutočnej dĺžke, musíme zostrojiť obdĺžnik $ACGE$ v skutočných rozmeroch. Vidíme, že strana AC je preponou v pravouhlom trojuholníku ACB s pravým uhlom pri vrchole B a jednotkovými odvesnami AB, BC. Zostrojíme tento trojuholník ACB ako prvý útvar.

Druhá strana AE obdĺžnika $ACGE$ má jednotkovú dĺžku, lebo ide o hranu kocky. Doplníme teda zvyšné strany obdĺžnika a dôsledne dbáme na správne označenie vrcholov a stredov K, L strán AE, CG. Zostrojíme úsečky AG, CK, EL. Vyznačíme priesečníky $P = AG \cap CK$ a $Q = AG \cap EL$. Úsečka PQ je zostrojená v skutočnej dĺžke (obr. 3.2.7b).

Necháme na čitateľa, aby doplnil postup konštrukcie a sám sa presvedčil, že $|PQ| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Návod: Zostrojte stred obdĺžnika a uvažujte o ťažniciach trojuholníka ECA.

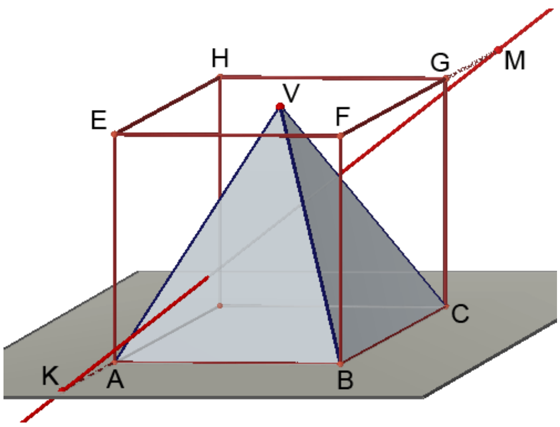
Musíme zdôrazniť:

1. Pomocnú rovinu σ zvolíme obyčajne tak, že je rovnobežná s niektorou hranou kocky, resp. rovnobežnostena. Naproti tomu pri ihlanoch položíme pomocnú rovinu σ tak, aby bola vrcholovou rovinou.
2. Dôsledne označujeme jednotlivé vrcholy pri konštrukcii úsečky, ... v skutočnej dĺžke, aby sme sa v obrázku ľahšie orientovali

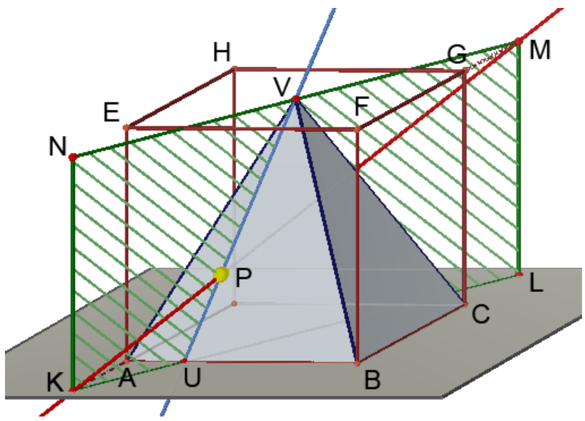
C) PRIENIK PRIAMKY p **S TELESOM** T zostrojíme podobne, ako prienik priamky s rovinou. Položíme danou priamkou p vhodnú pomocnú rovinu σ, urobíme rez telesa T touto rovinou a prienik rezu – mnohouholníka s priamkou p je hľadaný prienik priamky s telesom.

Príklad 3.2.8

Do kocky $ABCDEFGH$ je vložený štvorboký ihlan $ABCDV$, kde bod V je stred hornej podstavy . Na polpriamke $\overset{\mapsto}{DA}$ za bodom A leží bod K tak, že $2|AK| = |AD|$; na polpriamke $\overset{\mapsto}{FG}$ za bodom G leží bod M, tak že platí $2|MG| = |FG|$. Zostrojte prienik (úsečku PQ) priamky $\overleftrightarrow{KM}$ s ihlanom $ABCDV$ v skutočnej dĺžke, ak $|AB| = 1$.



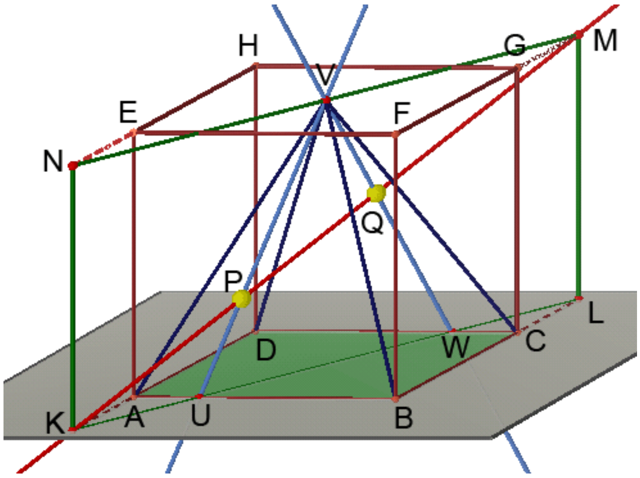
Obr. 3.2.8a



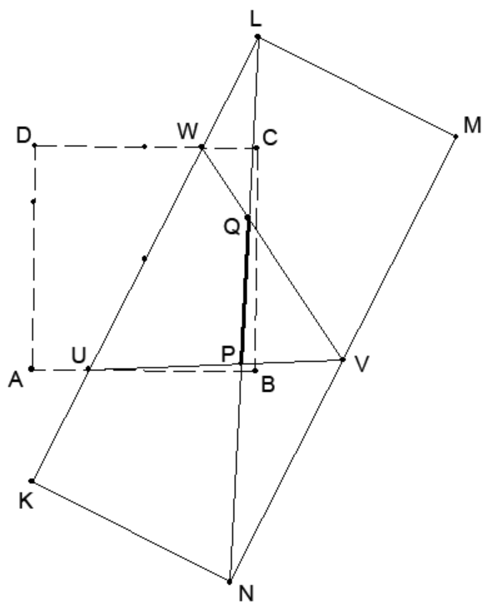
Obr. 3.2.8b

Riešenie. Na situačných obrázkoch obr. 3.2.8a,b vidíme umiestnenie priamky $\overleftrightarrow{KM}$ do pomocnej roviny $\sigma \equiv \overleftrightarrow{KLM}$, kde $KLMN$ je v skutočnosti obdĺžnik ležiaci v rovine kolmej na rovinu podstavy kocky. Rezom ihlana $ABCDV$ rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$ je trojuholník UWV, kde $\{U\} = \overleftrightarrow{KL} \cap AB$ a $\{W\} = \overleftrightarrow{KL} \cap CD$. Prienik priamky $\overleftrightarrow{KL}$ so stranami UV, VW sú hľadané body P, Q (obr. 3.2.8c). Ku konštrukcii skutočnej dĺžky PQ musíme zostrojiť obdĺžnik $KLMN$ s odpovedajúcimi rozmermi.

Zostrojíme štvorec $ABCD$ a na príslušných polpriamkach určíme body K, L. Doplníme strany LM, MN a NK; bod V, ktorý je stredom MN a body U, W ako priesečníky KL so stranami AB, CD. Zostrojíme body P, Q ako priesečníky úsečky KM s úsečkami UV, VW (obr. 3.2.8d). Úsečka PQ je zostrojená v skutočnej dĺžke.



Obr. 3.2.8c



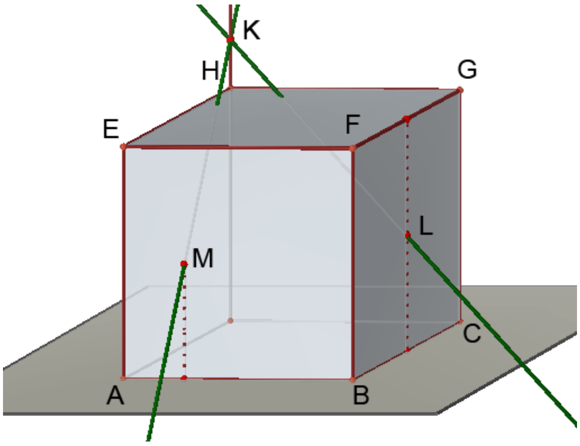
Obr. 3.2.8d

Prieniky priamky s rovinou, resp. telesom, sa využívajú aj pri rezoch telies. Zvlášť v prípadoch, keď použitie „rovnobežiek a spoločného bodu troch rovín“ zlyháva, pretože odpovedajúce priamky neležia na povrchu telesa. Uvedieme príklad.

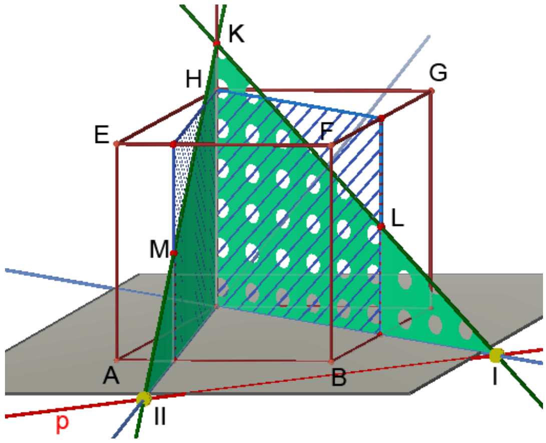
Príklad 3.2.9

Na polpriamke $\overrightarrow{DH}$ kocky $ABCDEFGH$ za bodom H leží bod K. Bod L je stredom úsečky BG a bod M leží v rovine $\overleftrightarrow{ABF}$. Zostrojte rez rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$.

Riešenie. Na situačných obr. 3.2.9a,b vidíme, že priamky $\overleftrightarrow{KL}, \overleftrightarrow{KM}$ prechádzajú kockou. Určíme prieniky týchto priamok s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$. Priamku $\overleftrightarrow{KL}$ umiestnime do pomocnej roviny $\overleftrightarrow{KLD}$, kolmej na rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ a zostrojíme prienik priesečnice (roviny $\overleftrightarrow{KLD}$ s rovinou podstavy) a priamky $\overleftrightarrow{KL}$ - bod I. Analogicky, priamku $\overleftrightarrow{KM}$ umiestnime do pomocnej roviny $\overleftrightarrow{KMD}$, tiež kolmej na rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ a zostrojíme prienik priesečnice (roviny $\overleftrightarrow{KMD}$ s rovinou podstavy) a priamky $\overleftrightarrow{KM}$ - bod II. Priamka p určená bodmi I a II je priamkou, ktorá leží v rovine podstavy a patrí rezovej rovine.

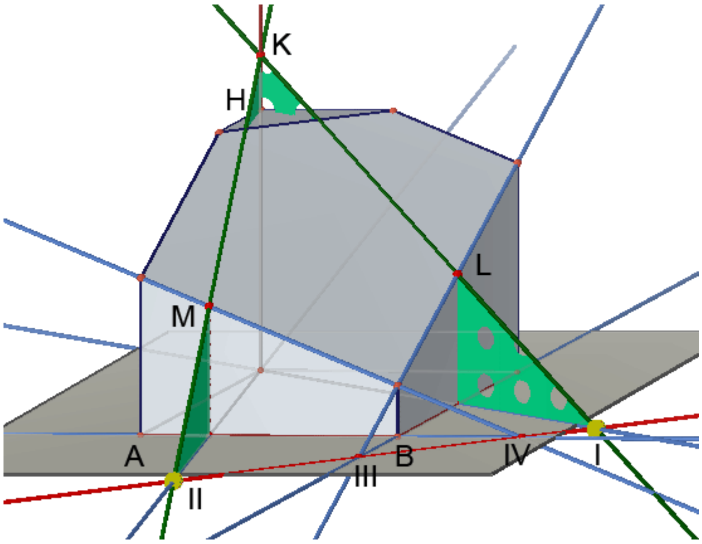


Obr. 3.2.9a



Obr. 3.2.9b

Ďalej pokračujme v konštrukcii rezu obdobne ako v príklade 3.2.5. Postup už neuvádzame, zobrazujeme len výsledný rez danou rovinou.



Obr. 3.2.9c

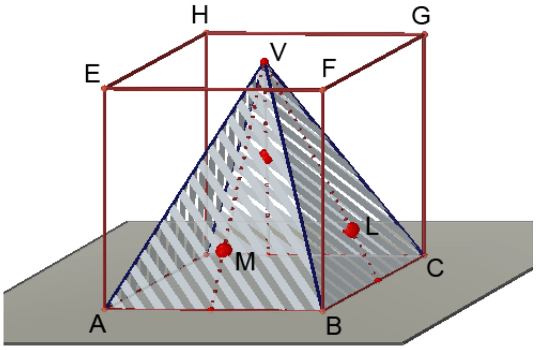
Poznámka.

1. *Príklady, v ktorých sa body rezu nachádzajú v stene telesa, je výhodné riešiť vyššie uvedeným spôsobom - pomocou konštrukcie priesečnice rezovej roviny a roviny podstavy. Zvlášť v prípadoch, ak ide o ihlany.*
2. *Môžeme postupovať i tak, že zostrojíme prieniky priamok s rovinami stien telesa a tým získame ďalšie body určujúce rez.*

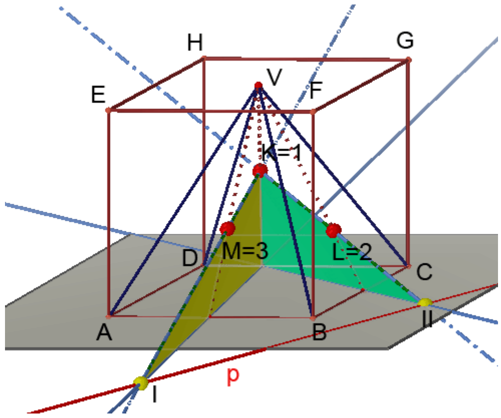
Príklad 3.2.10

Do kocky ABCDEFGH je vložený štvorboký ihlan ABCDV, kde bod V je stred hornej podstavy EFGH. V stenách ihlana DCV, BCV a ABV ležia postupne body K, L a M.

Zostrojte rez rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$.

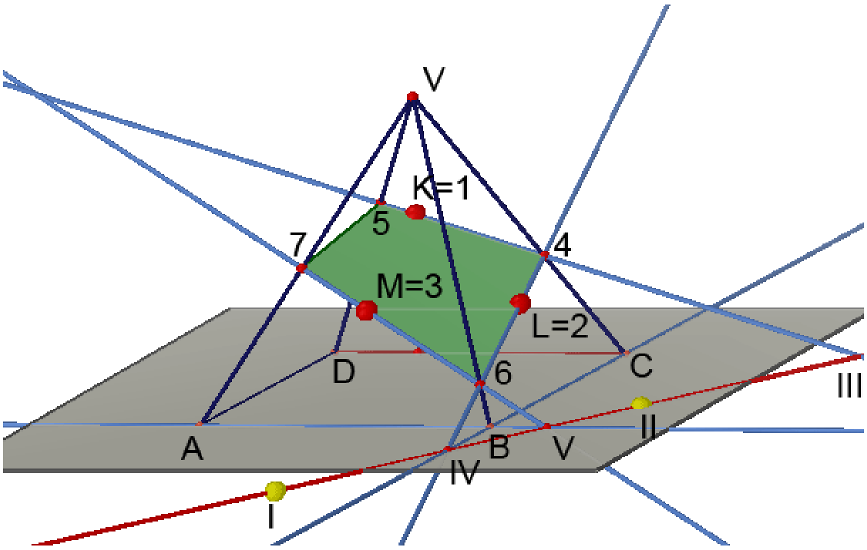


Obr. 3.2.10a



Obr. 3.2.10b

Riešenie. (obr. 3.2.10a, b) Priesečnice vrcholových rovín $\overleftrightarrow{KMV}$, $\overleftrightarrow{KLV}$ s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$ pretínajú priamky $\overleftrightarrow{KM}$, $\overleftrightarrow{KL}$ v bodoch I, II . Priamka p (priesečnica roviny rezu a podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$) je určená bodmi I, II. Ďalšie body rezu doplníme už známym spôsobom. Postup neuvádzame, konštrukcia je na obr. 3.2.10c.

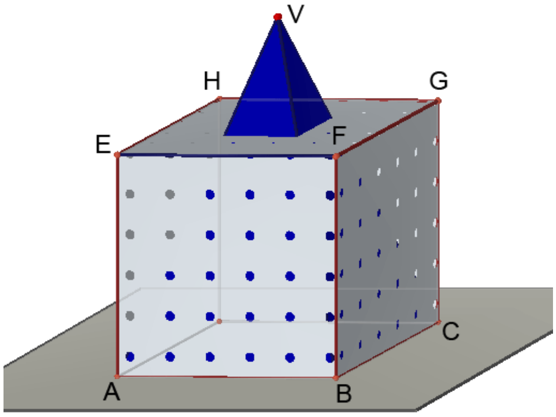


Obr. 3.2.10c

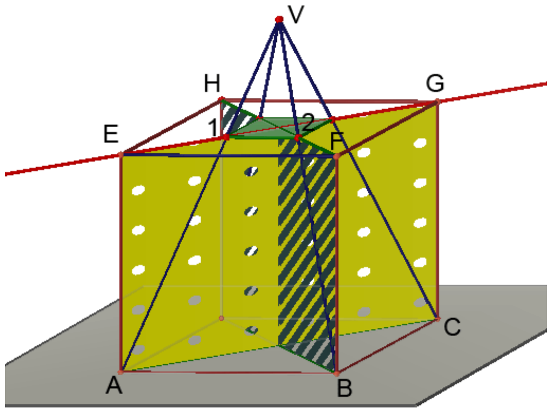
Prienik priamky s telesom je jedna z dôležitých konštrukcií pri hľadaní prieniku, resp. viditeľného zjednotenia, dvoch telies.

Príklad 3.2.11

Je daná kocka ABCDEFGH s hranou dĺžky a pravidelný štvorboký ihlan ABCDV tak, že jeho výška $v = \frac{3}{2}a$. Určte teleso, ktoré vznikne zjednotením kocky a ihlana.



Obr. 3.2.11a



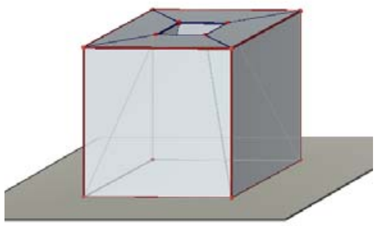
Obr. 3.2.11b

Riešenie. Na situačnom obr. 3.2.11a vidíme, že musíme určiť prienik ihlana $ABCDV$ s hornou podstavou $EFGH$ danej kocky. Zostrojíme prienik hrany AV s rovinou $\overleftrightarrow{EFG}$. Priamku $\overleftrightarrow{AV}$ umiestnime do pomocnej roviny $\overleftrightarrow{ACG}$. Priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{EFG}$, $\overleftrightarrow{ACG}$ je priamka $\overleftrightarrow{EG}$, ktorá má s úsečkou AV spoločný bod 1.

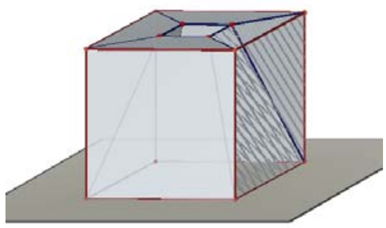
Postup zopakujeme pre priamku $\overleftrightarrow{BV}$ a pomocnú rovinu $\overleftrightarrow{BDF}$, zostrojíme bod 2. Úsečka 12 je stranou štvorca, ktorý je prienikom hornej podstavy $EFGH$ s ihlanom. Stredom tohto štvorca je stred steny $EFGH$. Necháme na čitateľa, aby doplnil zvyšok konštrukcie (obr. 3.2.11b).

Na obr. 3.2.11a je znázornené zjednotenie kocky a ihlana. Aký útvar bude ich prienikom? Ak označíme kocku T_1, ihlan T_2, aké teleso bude určené množinovým zápisom $T_1 - T_2$?

Návod: Obr. 3.2.11c,d, kde na obr. 3.2.11d je odkrytá jedna časť telesa



Obr. 3.2.11c



Obr. 3.2.11d

D) ZOSTROJIŤ PRIEČKU u **DVOCH MIMOBEŽIEK** p,q znamená zostrojiť priamku u, ktorá pretína obe dané priamky p,q. Niekedy sa priečkou rozumie úsečka s krajnými bodmi ležiacimi na priamkach p,q. Je zrejmé, že dve mimobežky majú nekonečne veľa priečok. Existuje však iba jedna priečka, ktorá je súčasne kolmá na obe priamky p,q. Hovoríme jej **os mimobežiek** p,q.

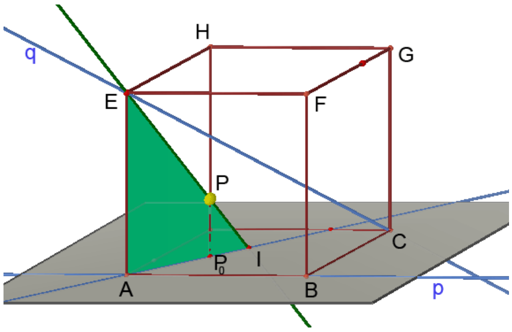
Rozlišujeme tieto základné typy úloh

1. zostrojiť priečku dvoch mimobežiek p, q prechádzajúcu daným bodom P
2. zostrojiť priečku dvoch mimobežiek p, q rovnobežnú s danou priamkou r
3. zostrojiť os dvoch mimobežiek p, q

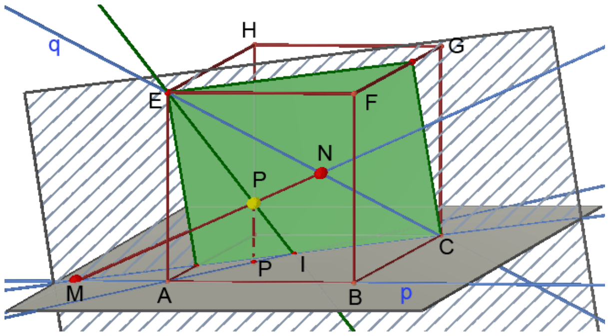
Postupy riešenia úloh typu 1, 2 sú podobné. Riešenie úlohy typu 3 vyžaduje znalosti metrických vlastností lineárnych útvarov, ktorým sa budeme venovať v ďalšej kapitole.

Príklad 3.2.12

Vo vnútri kocky $ABCDEFGH$ je zvolený bod P. Zostrojte priečku MN priamok $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EC}$ prechádzajúcu bodom P.



Obr. 3.2.12a



Obr. 3.2.12b

Riešenie. Nech P_0 je kolmý priemet bodu P do roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ (bod P_0 je potrebný na určenie pozície bodu P). Priamka $\overleftrightarrow{EP}$ pretne rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ v bode I (konštrukcia prieniku priamky s rovinou – na obr. 3.2.12a je naznačená pomocná rovina ako trojuholník). Zostrojíme rovinu rezu bodmi E, C, I a určíme priesečnicu rovín $\overleftrightarrow{ABC}$, $\overleftrightarrow{ECI}$, pretínajúcu priamku $p = \overleftrightarrow{AB}$ v bode M. Priamka $\overleftrightarrow{MP}$ pretne priamku $\overleftrightarrow{EC}$ v bode N. Úsečka MN je hľadanou priečkou prechádzajúcou bodom P.

Poznámka.

1. Myšlienka riešenia je založená na tom, že daným bodom P a priamkou q položíme rovinu, ktorá pretne druhú danú priamku p v bode M, ktorý je bodom hľadanej priečky.

2. V prípade, že je daná priamka r (úloha typu 2), zostrojíme pomocnú rovinu prechádzajúcu jednou z daných priamok, napr. q, ktorá bude rovnobežná s priamkou r. Pomocná rovina pretne druhú danú priamku p v bode M hľadanej priečky. To je návod na riešenie úlohy typu 2.

3. Nie vždy existuje priečka dvoch mimobežiek, prechádzajúca daným bodom P, resp. rovnobežná s priamkou r.

3.2 Cvičenie

1. *V kocke ABCDEFHG sú body K, L, M, N postupne stredmi hrán AB, CG, BC, HE. Zistite vzájomnú polohu priamok $\overleftrightarrow{KL}, \overleftrightarrow{MN}$.*

2. *V kocke ABCDEFHG sú body K, L postupne stredmi hrán CG, AE. Zistite vzájomnú polohu priamok* $\overleftrightarrow{BK}, \overleftrightarrow{HL}$.

3. *Zostrojte rez kocky ABCDEFGH rovinou* $\overleftrightarrow{KLM}$ *, ak*

a) *bod K je stred hrany FG, bod L je stred hrany AE, bod M je stred hrany CH*

b) *bod K je stred hrany AB, bod L je stred hrany BC, bod M je stred hrany FH*

c) *bod K je stred hrany HG, bod L je stred hrany EH, bod M je stred hrany BF*

4. *Zostrojte prienik priamky* $\overleftrightarrow{PQ}$ *s kockou ABCDEFHG, ak P leží na polpriamke opačnej k GH, q leží na polpriamke opačnej k AD. Riešte aj prípady, keď body P, Q nebudú ležať na hranách kocky.*

5. *Zostrojte rez pravidelného šesťbokého hranola ABCDEFA′B′C′D′E′F′ rovinou* $\overleftrightarrow{KLM}$ *, ak body K, L M sú postupne vnútorné body hrán AA′, EE′ a DD′.*

6. *Zobrazte rez štvorstena ABCD rovinou* $\overleftrightarrow{KLM}$ *, ak bod M leží na hrane AD, bod L na priamke* $\overleftrightarrow{CD}$*, bod M na priamke* $\overleftrightarrow{BC}$*. Riešte osobitne prípady, ak*
   a) *body L, M sú bodmi hrán štvorstena*
   b) *len bod M je na hrane BC*
   c) *body L, M nie sú na hranách*

7. *Je daný pravidelný štvorboký ihlan ABCDV. Stredom jeho výšky veďte priamku p rovnobežnú s rovinami* $\overleftrightarrow{ADV}$ *,* $\overleftrightarrow{BCV}$ *a zostrojte jej priesečníky s ihlanom.*

8. *Je daný pravidelný štvorboký ihlan ABCDV, bod M je stred hrany CV. Bodom M veďte rovinu rovnobežnú s rovinou* $\overleftrightarrow{ADV}$ *a určte jej rez s ihlanom.*

9. *Do kocky ABCDEFGH je vložený ihlan ABCDG. Na polpriamke GC za bodom C leží bod K tak, že platí* $2|CK| = |CG|$*. Zostrojte prienik priamky* $\overleftrightarrow{EK}$ *s ihlanom.*

4 METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVAROV V PRIESTORE

V úlohách a príkladoch, v ktorých sa riešia problémy vzťahujúce sa k vzdialenosti alebo veľkosti uhla dvoch lineárnych útvarov, hovoríme o metrických vlastnostiach.

4.1 UHOL DVOCH LINEÁRNYCH ÚTVAROV

Uhol lineárnych útvarov sa uvažuje ako uhol priamok a rovín, ktorý zavádzame pomocou uhla dvoch rôznobežiek. Dve rôznobežky určujú dva výplnkové uhly - uhlom rôznobežiek rozumieme menší z nich.

A) ***Uhol dvoch priamok*** *p, q*

Veľkosť uhla dvoch priamok p, q je veľkosť uhla dvoch rôznobežiek p^*, q^**, pre ktoré platí* $p \parallel p^*$ *a* $q \parallel q^*$.

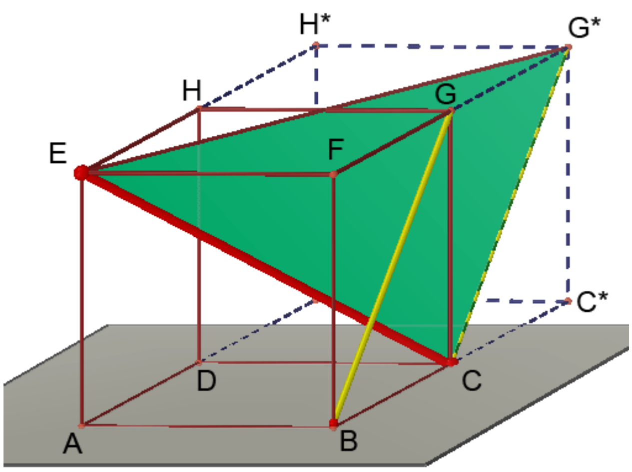
Do úvahy prichádza aj možnosť, že niektoré rovnobežky sú totožnými priamkami. Netriviálne použitie priamok p^*, q^* je v prípade, že p, q sú mimobežky.

Príklad 4.1.1

Je daná kocka ABCDEFGH. Určte uhol priamok $\overleftrightarrow{EC}$, $\overleftrightarrow{BG}$, *ak* $|AB| = 1$.

Riešenie. Zostrojíme úsečky *EC, BG.* Vidíme, že ide o mimobežky. Bodom *C* zostrojíme úsečku *CG** rovnobežnú s úsečkou *CG.* Kvôli názornosti doplníme druhú kocku *DCC*D*HGG*H*.* Hľadaný uhol mimobežiek je uhlom priamok *EC, CG*.* Pomocou Pytagorovej vety vypočítame dĺžky strán trojuholníka *ECG*.* Pre telesovú uhlopriečku *EC* platí $|EC| = \sqrt{|AE|^2 + |AC|^2} = \sqrt{3}$, keďže $|AC| = \sqrt{2}$ (uhlopriečka štvorca s dĺžkou strany 1).

Z rovnakých dôvodov $|BG| = |CG^*| = \sqrt{2}$.



Obr. 4.1.1

Strana EG^* trojuholníka ECG^* je preponou trojuholníka EFG^* s odvesnami dĺžok 1 a 2, preto $|EG^*| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Podľa kosínusovej vety platí $|EG^*|^2 = |EC|^2 + |CG^*|^2 - 2.|EC|.|CG^*|.\cos\varphi$

(φ je uhol priamok $\overleftrightarrow{EC}$, $\overleftrightarrow{CG^*}$).

Číselne: $\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2.\sqrt{3}.\sqrt{2}.\cos\varphi$. Potom $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$.

Poznámka.

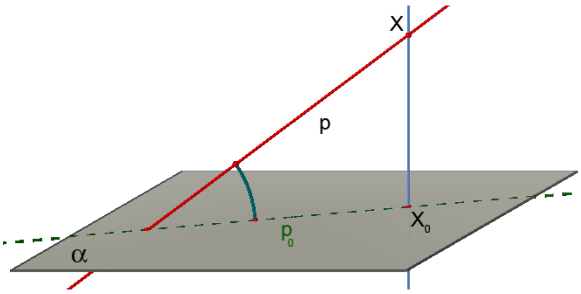
1. Použitie kosínusovej vety v príklade predstavuje univerzálny prístup. Trojuholník nemusí byť pravouhlý.

2. V riešení sme doplnili – doplnili ďalšiu kocku, a tým sme riešili príklad názornejším spôsobom. Necháme na čitateľa, aby sa pokúsil vyriešiť príklad tak, že zostrojí stredom kocky rovnobežku s priamkou $\overleftrightarrow{BG}$.

3. Ak sú priamky p, q rovnobežné, zapisujeme $p \parallel q$, *a potom platí* $\left|\angle(p,q)\right| = 0^\circ$.

B) ***Uhol priamky*** p ***a roviny*** α

Ak priamka p nie je kolmá na rovinu α, *veľkosť uhla priamky p a roviny* α *je veľkosť uhla priamky p a jej pravouhlého priemetu* p_0 *do roviny* α.



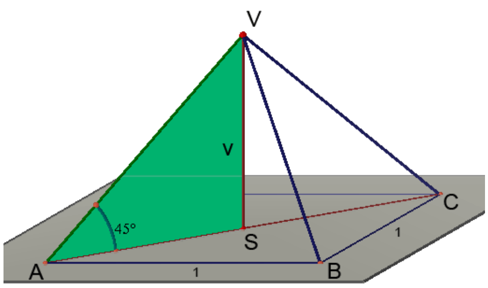
Obr. 4.1.2

Na obr. 4.1.2 je bod X ľubovoľným bodom priamky p a bod X_0 je jeho kolmým priemetom do roviny α. Týmto spôsobom sa priamka p premietne do priamky p_0, ktorá je kolmým priemetom priamky p.

Príklad 4.1.2

V pravidelnom štvorbokom ihlane ABCDV vypočítajte uhol hrany AV a roviny podstavy $\overleftrightarrow{ABC}$, *ak jeho výška* $v = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ $|AB| = 1$.

Riešenie. Pravouhlý priemet priamky $\overleftrightarrow{AV}$ do roviny postavy je priamka $\overleftrightarrow{AC}$, pričom vrchol V sa premietne do stredu S štvorca $ABCD$. Trojuholník ASV je pravouhlý. Vypočítame veľkosť uhla $\varphi = \angle SAV$. Platí



Obr. 4.1.3

$$tg\varphi = \frac{|SV|}{|AS|}.$$ Z Pytagorovej vety vyplýva $|AS| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Potom $tg\varphi = 1$ a $\varphi = 45^\circ$.

Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na každú priamku tejto roviny.

Ak je priamka p kolmá na rovinu α, veľkosť uhla priamky s rovinou je 90°. Zapisujeme $p \perp \alpha$, resp. $\left|\angle(p,\alpha)\right| = 90^\circ$.

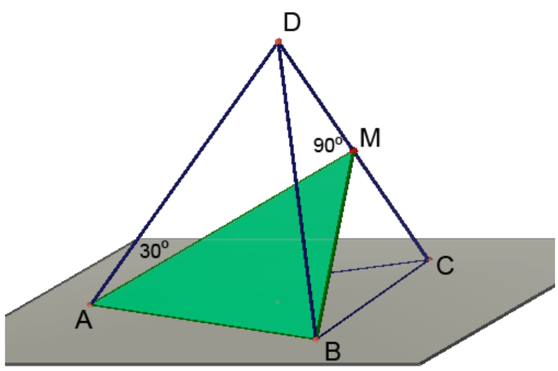
Rozhodnúť o kolmosti priamky na rovinu môžeme jednoduchšie na základe ***kritéria kolmosti priamky a roviny***.

Ak je priamka p kolmá na dve rôznobežky a, b roviny α, potom je priamka p kolmá na rovinu α.

Príklad 4.1.3

Bod M je stredom hrany CD pravidelného štvorstena ABCD. Dokážte, že priamka $\overleftrightarrow{CD}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ABM}$.

Riešenie. Steny pravidelného štvorstena *ABCD* sú rovnostranné trojuholníky. V stene *ACD* je úsečka *AM* výškou, kolmou na stranu *CD.* Analogicky je *BM* výškou v trojuholníku *BCD.* Podľa kritéria kolmosti priamky a roviny, je priamka $\overleftrightarrow{CD}$ kolmá na dve rôznobežky *AM, BM* roviny $\overleftrightarrow{ABM}$, teda je na túto rovinu kolmá.



Obr. 4.1.4

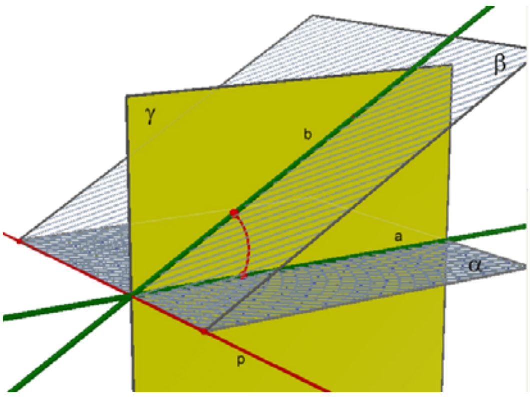
Poznámka. Ukázali sme, že priamka $\overleftrightarrow{CD}$ je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ABM}$. Podľa definície musí byť $\overleftrightarrow{CD}$ kolmá na každú priamku roviny, teda aj na $\overleftrightarrow{AB}$.

C) *Uhol dvoch rovín* α, β

Uhol dvoch rôznobežných rovín α, β zavádzame nasledovne.

Veľkosť uhla dvoch rôznobežných rovín α, β je veľkosť uhla ich priesečníc a, b s rovinou γ, ktorá je kolmá na obe roviny α, β.

Zapisujeme $|\angle(\alpha, \beta)| = |\angle(a, b)|$, kde $a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma$ a platí $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$.



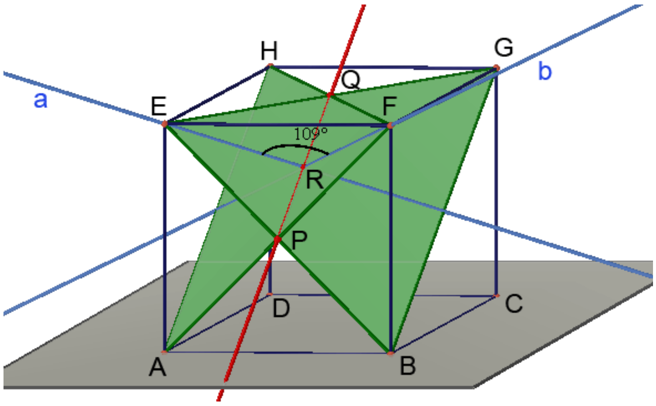
Obr. 4.1.5

Spoločná priesečnica rovín α, β - priamka p je kolmá na priamky *a, b* (obr. 4.1.5) a teda $p \perp \gamma$. Pozorný čitateľ si iste všimol, že rovina γ je jednoznačne určená priamkami *a, b.*

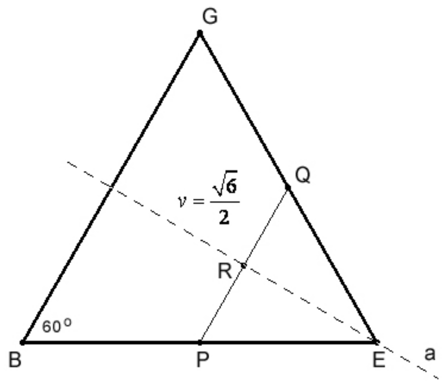
Príklad 4.1.4

Vypočítajte uhol rovín $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BEG}$ určených vrcholmi kocky $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany 1.

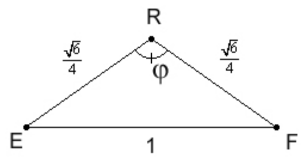
Riešenie. Spoločná priesečnica p rovín $\overleftrightarrow{AFH}$, $\overleftrightarrow{BEG}$ je určená stredmi P, Q stien $ABFE$, $EFGH$. Trojuholníky BEG, AFH sú rovnostranné a zhodné, pretože ich strany sú stenové uhlopriečky kocky a teda majú dĺžku $\sqrt{2}$. Úsečka PQ je v oboch prípadoch strednou priečkou trojuholníkov. Kolmá rovina γ má preťať rovinu $\overleftrightarrow{BEG}$ v priamke a, ktorá musí byť kolmá na priamku PQ. V rovine trojuholníka BEG bude priamka a výškou prechádzajúcou bodom E. Z podobných dôvodov, priesečnica b roviny γ a roviny $\overleftrightarrow{AFH}$ bude výškou v trojuholníku AFH prechádzajúca bodom F. Prienik priamok a, $\overleftrightarrow{PQ}$ a b označíme R. Uhol rovín $\overleftrightarrow{AFH}$ a $\overleftrightarrow{BEG}$ je uhol $\angle ERF$. Vypočítame veľkosť.



Obr. 4.1.6a



Obr. 4.1.6b



Obr. 4.1.6c

Výška v rovnostrannom trojuholníku s dĺžkou strany $\sqrt{2}$ je $v = \sqrt{2}.\sin 60^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (obr. 4.1.6b). Stredná priečka PQ rozdelí výšku na polovicu, preto $|ER| = |FR| = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Trojuholník EFR je rovnoramenný so základňou EF. Poznáme dĺžky všetkých troch strán (obr. 4.1.6c) a podľa kosínusovej vety platí

$|EF|^2 = |ER|^2 + |FR|^2 - 2.|ER|.|FR|.\cos\varphi$. Číselne $1^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 2.\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2.\cos\varphi$

a dostaneme $\cos\varphi = \left(-\frac{1}{3}\right)$. Veľkosť uhla $\varphi \doteq 109^\circ$.

Kritérium kolmosti dvoch rovín umožňuje rozhodnúť o kolmosti rovín veľmi jednoducho.

Ak rovina α obsahuje priamku p kolmú na rovinu β, potom sú roviny α, β na seba kolmé.

Na obr. 4.1.4 je rovina $\overleftrightarrow{ABM}$ kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACD}$ (resp. $\overleftrightarrow{BCD}$), pretože rovina $\overleftrightarrow{ACD}$ obsahuje priamku $\overleftrightarrow{CD}$ kolmú na $\overleftrightarrow{ABM}$.

Pre vzťah kolmosti priamok a rovín platí

1. *Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú navzájom rovnobežné*
2. *Všetky roviny kolmé na tú istú priamku sú navzájom rovnobežné.*
3. *Ak je priamka p rovnobežná s priamkou q, priamka q kolmá na rovinu α, potom aj priamka p je kolmá na rovinu α.*

4.2 VZDIALENOSŤ DVOCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Pod geometrickým útvarom budeme rozumieť niektorý z objektov – bod, priamka, rovina.

Vzdialenosťou dvoch geometrických útvarov *U, V* ***v priestore je číslo, ktoré je minimom množiny dĺžok úsečiek XY, kde X je ľubovoľný bod útvaru*** *U* ***a Y je ľubovoľný bod útvaru*** *V.*

Zapisujeme $$|U,V| = \min\{|XY|; X \in U, Y \in V\}$$

Ak dva útvary *U, V* majú spoločný aspoň jeden bod *P*, potom ich vzdialenosť je 0, pretože stačí položiť $P = X = Y$.

Úlohy možno rozdeliť na tieto základné typy

a) vzdialenosť bodu od priamky,

b) vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,

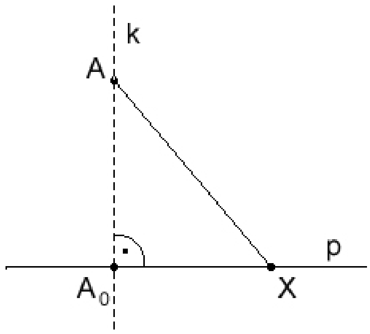
c) vzdialenosť dvoch mimobežných priamok,

d) vzdialenosť bodu od roviny,

e) vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín,

f) vzdialenosť priamky od roviny .

A) Vzdialenosťou bodu *A* **od priamky** *p* rozumieme dĺžku úsečky AA_0, kde A_0 je päta



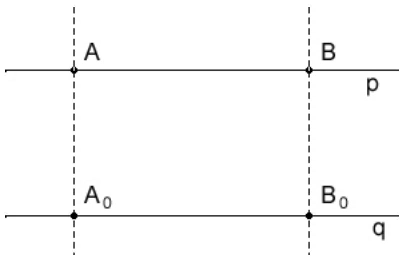
Obr. 4.2.1

kolmice k zostrojenej z bodu A na priamku p.

Bod A_0 zostrojíme tak, že bodom A položíme rovinu kolmú na priamku p. Prienikom tejto roviny a priamky p je bod A_0.

V rovine určenej bodom A a priamkou p leží pravouhlý trojuholník AA_0X s preponou AX. Z toho vyplýva, že vzdialenosť AA_0 je najkratšia vzdialenosť medzi bodom A a priamkou p.

B) Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok *p, q* je vzdialenosťou ľubovoľného bodu



Obr. 4.2.2

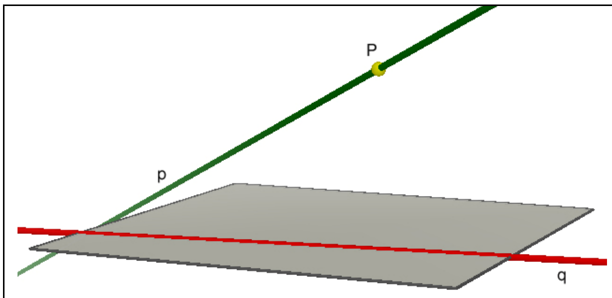
$A \in p$ od priamky q. Ak by sme označili A_0 pätu kolmice zostrojenej z bodu A na priamku q, na priamke p zvolili bod $B \neq A$, určili B_0 ako pätu kolmice z B na p, potom ABB_0A_0 je obdĺžnik a platí $|AA_0| = |BB_0|$.

C) Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok *p, q* patrí medzi zložitejšie priestorové pojmy. Ako sme spomenuli v kapitole 3.2, musíme zostrojiť os *o* dvoch mimobežiek *p, q*. Postup je nasledovný (na obr. 4.2.3a – h je šedá rovina vyznačená len pre názornosť):

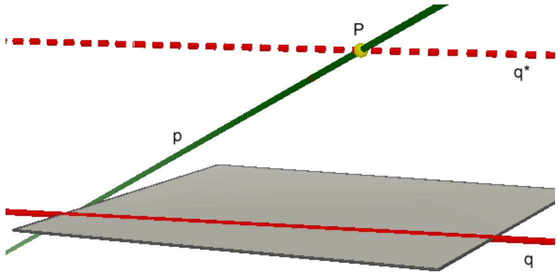
1. Zvolíme na priamke p ľubovoľný bod P.
2. Bodom P zostrojíme rovnobežku q^* s priamkou q
3. Položíme rovinu α, jednoznačne určenú priamkami p, q^*
4. Zostrojíme kolmicu k na rovinu α, nie nutne prechádzajúcu bodom P
5. Priamky k, p jednoznačne určujú pomocnú rovinu β.
6. Pomocná rovina β pretne priamku q v bode B.
7. Bodom B zostrojíme rovnobežku o s priamkou k, ktorá pretne priamku p v bode A.
8. Osou o je priamka $\overleftrightarrow{AB}$; vzdialenosť mimobežiek je $|p,q| = |AB|$.

Poznámka: Úsečka AB je

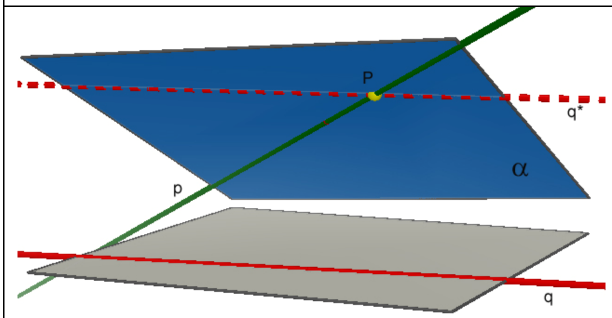
- *najkratšou priečkou daných mimobežiek,*
- *jediná (dve mimobežky nemajú dve alebo viac navzájom rôznych osí),*
- *kolmá na obe priamky p, q.*



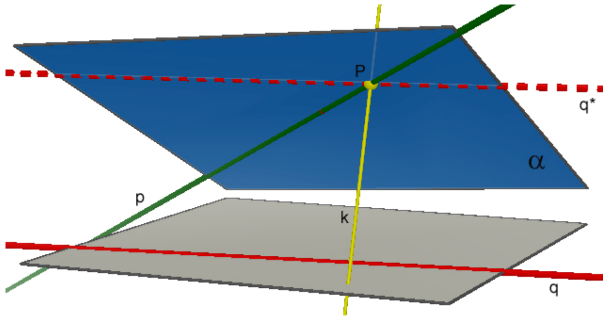
Obr. 4.2.3a



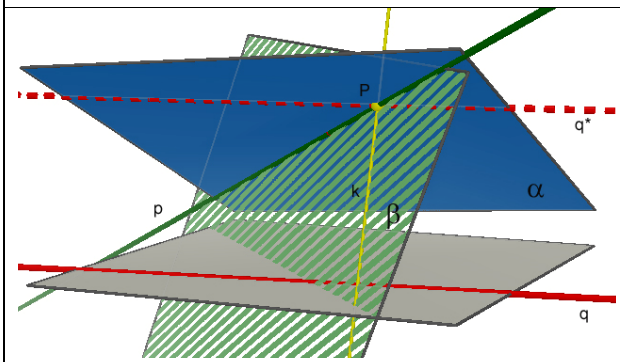
Obr. 4.2.3b



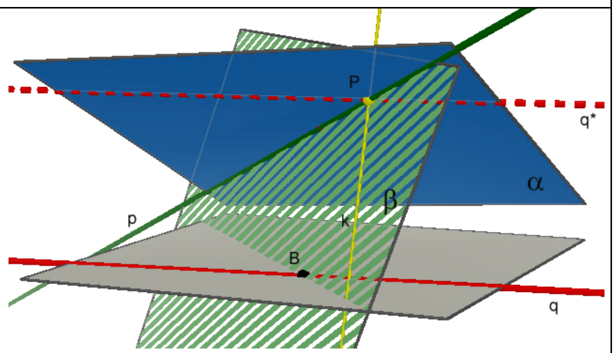
Obr. 4.2.3c



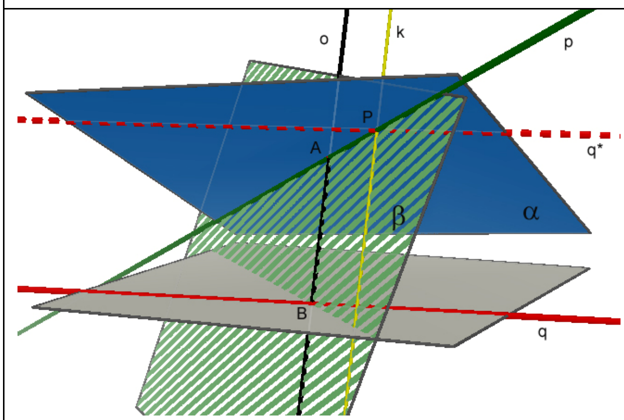
Obr. 4.2.3d



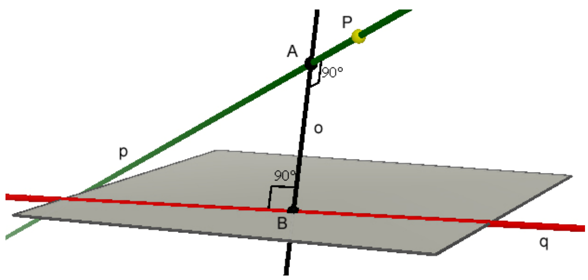
Obr. 4.2.3e



Obr. 4.2.3f



Obr. 4.2.3g



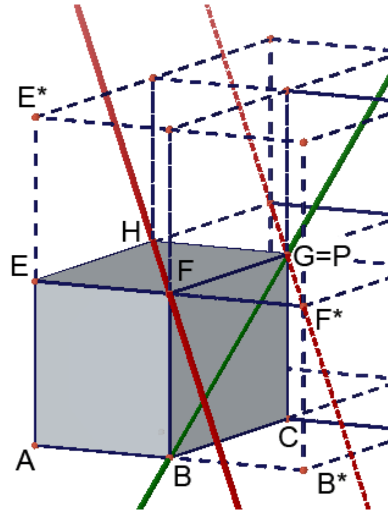
Obr. 4.2.3h

Ak sú mimobežky určené vrcholmi telesa, odpovedajúci obrázok je prehľadnejší.

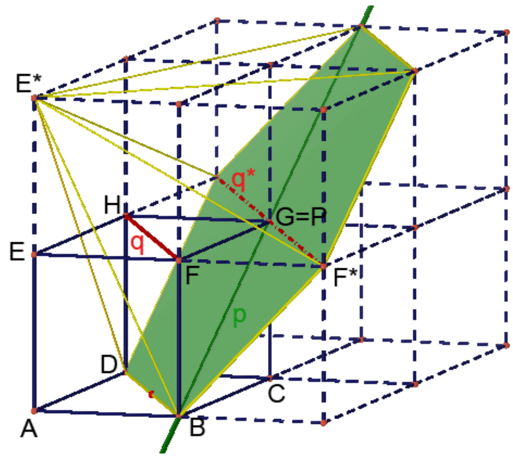
Príklad 4.2.1

Vypočítajte vzdialenosť priamok $\overleftrightarrow{HF}$, $\overleftrightarrow{BG}$ v kocke ABCDEFGH s dĺžkou hrany 1.

Riešenie. Označíme $\overleftrightarrow{HF} = q$, $\overleftrightarrow{BG} = p$. Nech bod $P = G$. Priamka $q*$ je rovnobežná s $\overleftrightarrow{HF} = q$ a prechádzajúca bodom *G*, nepretína kocku *ABCDEFGH* v inom bode. Doplníme teda priestor ďalšími 7 kockami (obr. 4.2.4a, b) na jednu „veľkú“ kocku a zostrojíme rez rovinou α určenou priamkami *p*, $q*$. Rezom je pravidelný šesťuholník, ktorý môžeme považovať na podstavu pravidelného šesťbokého ihlana s vrcholom v bode *E** (dĺžka každej hrany vychádzajúcej z vrcholu *E** je uhlopriečkou obdĺžnika s rozmermi 1x2).

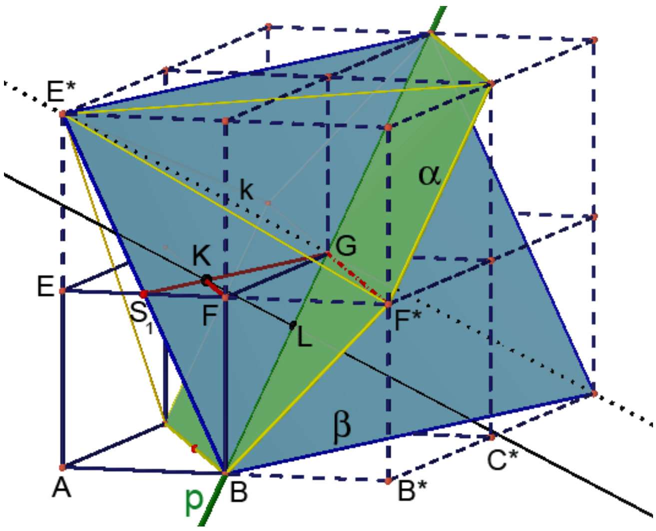


Obr. 4.2.4a

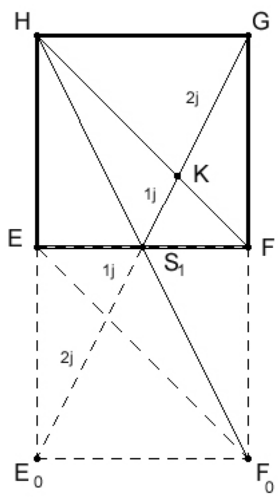


Obr. 4.2.4b

Kolmým priemetom vrcholu ihlana *E** do roviny podstavy šesťuholníka je bod *P,* ktorý je jej stredom. Z toho vyplýva, že hľadaná kolmica *k,* prechádzajúca bodom *P,* je telesovou uhlopriečkou „veľkej“ kocky s dĺžkou hrany 2 a musí byť kolmá na priamky *p* a $q*$.



Obr. 4.2.4c



Obr. 4.2.4d

Rovina β, určená priamkami *k, p,* pretne úsečku *EF* v strede S_1. Prienik priamok *q,* $\overleftrightarrow{GS_1}$ je jeden z hľadaných bodov osi – bod K. Bodom K zostrojená rovnobežka s priamkou k pretína priamku p v druhom bode L osi o.

Vypočítame dĺžku KL.

V prvom rade si uvedomíme, že bod K je ťažiskom trojuholníka BGE^* (na obr. 4.2.4c sme doplnili zhodný štvorec E_0F_0FE a uhlopriečku HF_0 obdĺžnika HGF_0E_0. Ťažnice GS_1, HF trojuholníka EFG sa pretínajú ťažisku, tým je úsečka GS_1 rozdelená bodom K v pomere $1:2$ a súčasne je ťažnicou v trojuholníku BGE^*) .

V trojuholníku BGE^* je úsečka KL kolmá na BG, teda rovnobežná s GE^* a musí mať tretinovú dĺžku z $|GE^*|$, t.j. $|KL| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$.

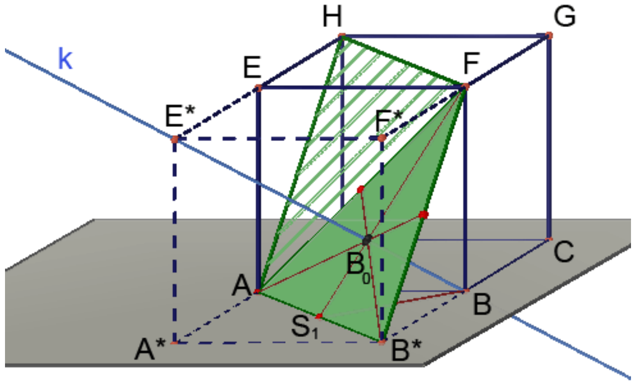
Poznámka. Niekedy je výhodné určovať vzdialenosť dvoch mimobežiek p,q pomocou vzdialenosti dvoch rovnobežných rovín α, β, kde $p \subset \alpha$ a $q \subset \beta$.

D) Vzdialenosť bodu P od roviny α je dĺžka úsečky PP_0, kde bod P_0 je päta kolmice k zostrojenej z bodu P na rovinu α.

Príklad 4.2.2

Vypočítajte vzdialenosť bodu B od roviny $\overleftrightarrow{AHF}$ v kocke ABCDEFGH s dĺžkou hrany 1.

Riešenie. Kolmica k z bodu B na rovinu $\overleftrightarrow{AHF}$ nepretína kocku $ABCDEFGH$, preto doplníme ešte jednu jednotkovú kocku tak, ako je na obr. 4.2.5 (kváder $A^*B^*CDE^*F^*GH$).



Obr. 4.2.5

Zostrojíme rez touto rovinou. V doplnenej kocke je rezom rovnostranný trojuholník AB^*F , ktorý môžeme zvoliť za podstavu pravidelného trojbokého ihlanu AB^*FB s vrcholom B. Kolmica k z bodu B na rovinu $\overleftrightarrow{AHF}$ je výška ihlana AB^*FB a päta kolmice – bod B_0 je ťažiskom trojuholníka AB^*F. Vypočítame výšku ihlana. Nech S_1 je stred štvorca ABB^*A^*. V pravouhlom trojuholníku S_1FB majú odvesny dĺžky $|BF| = 1$, $|BS_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Prepona podľa Pytagorovej vety je $|FS_1| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Pre obsah S trojuholníka FS_1B platí $2.S = |FS_1|.|BB_0| = |BS_1|.|FB|$.

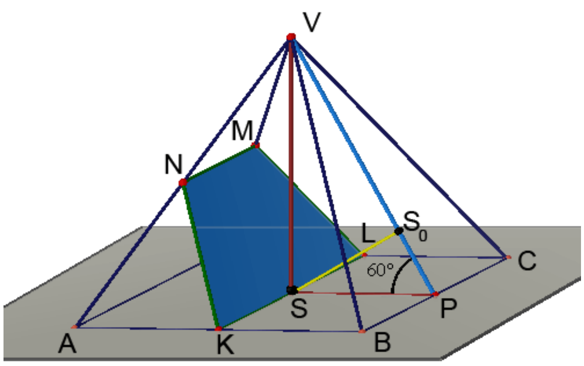
Číselne $\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot|BB_0| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$. Odtiaľ $|BB_0| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

E) Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín α, β je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej roviny od druhej roviny.

Príklad 4.2.3

V pravidelnom štvorbokom ihlane ABCDV s $|AB| = 1$ *a výškou* $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *vypočítajte vzdialenosť rovín* $\overleftrightarrow{BCV}$, $\overleftrightarrow{KLM}$, *kde K, L, M sú postupne stredy hrán AB, CD, DV.*

Riešenie. Rezom ihlana rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$ je lichobežník *KLMN*, kde N je stred AV. Rovina $\overleftrightarrow{KLM}$ je rovnobežná s rovinou $\overleftrightarrow{BCV}$, pretože $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (úsečka KL má koncové body stredy protiľahlých strán štvorca *ABCD*) a $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{CV}$ (úsečka LM je stredná priečka trojuholníka *CDV*). Rovina $\overleftrightarrow{KLM}$ teda obsahuje dve rôznobežky, z ktorých každá je rovnobežná s rovinou $\overleftrightarrow{BCV}$. Určíme vzdialenosť bodu *S*, ktorý je stredom štvorca *ABCD* (leží na *KL*) od roviny $\overleftrightarrow{BCV}$. Označíme P stred úsečky *BC*. Vzdialenosťou bodu S od roviny $\overleftrightarrow{BCV}$ určuje výška trojuholníka SPV zostrojená z bodu S. Vypočítame



Obr. 4.2.6

veľkosť uhla $\varphi = \angle SPV$. Platí $tg\varphi = \frac{|SV|}{|SP|} = \sqrt{3}$. Potom $\varphi = 60^\circ$. Ak S_0 je päta výšky, potom z pravouhlého trojuholníka SPS_0 vypočítame $|SP| \cdot \sin\varphi = |SS_0|$. Číselne $|SS_0| = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Nech Q je stred *AD*. Viete zdôvodniť, prečo je trojuholník PQV rovnostranný?

Návod: Trojuholník *PQV* je rovnoramenný a uhol pri základni má veľkosť 60°.

F) Vzdialenosť priamky p **od roviny** α (za predpokladu $p \parallel \alpha$) je vzdialenosť ľubovoľného bodu X priamky p od roviny α a príklady tohto typu sa riešia ako v prípade a).

4.3 * UHOL PRIAMKY A ROVINY - Dodatok

Odvodíme jednoduchý vzorec, ktorý nám umožní vypočítať uhol priamky a roviny.

Dané sú dve roviny τ a ρ so spoločnou priesečnicou p, ktoré zvierajú uhol α. Nech je v rovine τ daná priamka q taká, že s priamkou p zviera uhol β. Uhol priamky q s rovinou ρ označíme γ (obr. 4.3.1). Platí

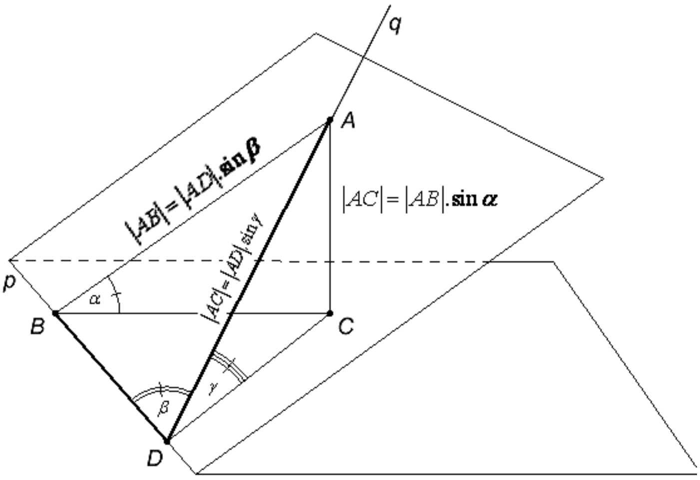
$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Na obr. 4.3.1 je priamka $q = \overleftrightarrow{AD}$, kde $D \in p$; bod C je kolmým priemetom bodu A do roviny ρ; bod B je kolmým priemetom bodu A na priamku p. Z pravouhlých trojuholníkov ABC, ADB, ADC vypočítame

$$|AC| = |AB|.\sin\alpha\,,$$
$$|AB| = |AD|.\sin\beta$$
$$|AC| = |AD|.\sin\gamma\,.$$

Odtiaľ dostávame

$$|AC| = |AD|.\sin\alpha.\sin\beta = |AD|.\sin\gamma$$



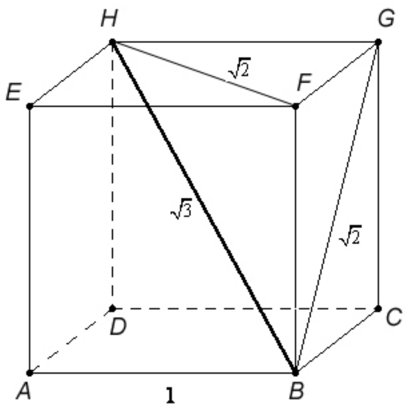
Obr. 4.3.1

Príklad** **4.3.1

Vypočítajte uhol telesovej uhlopriečky BH kocky $ABCDEFGH$ s rovinou $\overleftrightarrow{BCG}$.

Riešenie. Priamka $q = \overleftrightarrow{HB}$ leží v rovine $\tau = \overleftrightarrow{BFH}$ a rovina $\rho = \overleftrightarrow{BCG}$. Ak $|AB| = 1$, potom podľa Pytagorovej vety $|BH| = \sqrt{3}$, $|HF| = \sqrt{2}$, uhol rovín $\alpha = 45^\circ$ a pre uhol priesečnice $p = \overleftrightarrow{BF}$ s priamkou $q = \overleftrightarrow{HB}$ platí $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Hľadaný uhol γ vypočítame

$$\sin\gamma = \sin 45^\circ \cdot \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ a teda $\gamma \doteq 35,26^\circ$.



Obr. 4.3.2

Výsledok môžeme overiť aj iným výpočtom. Kolmým priemetom uhlopriečky BH do roviny bočnej steny $\overleftrightarrow{BCG}$ je stenová uhlopriečka BG.

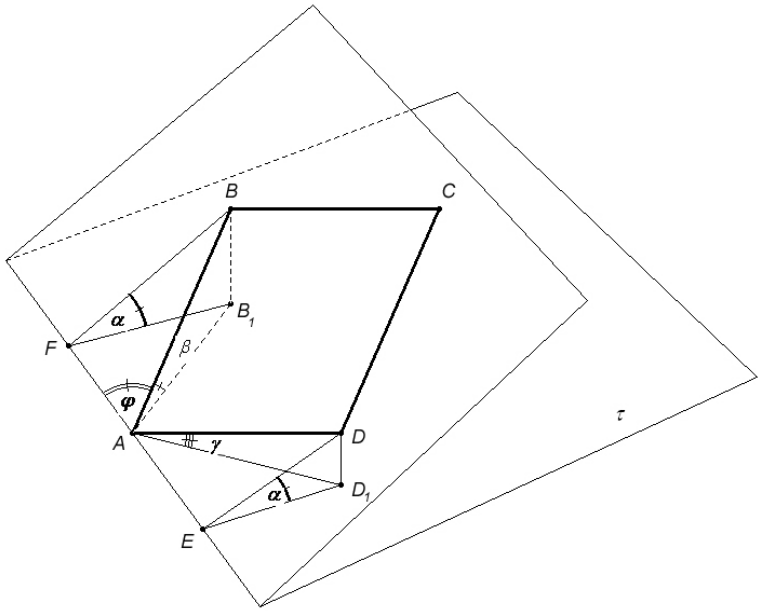
Z pravouhlého trojuholníka BHG vypočítame

$$\sin\left[\angle\left(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BG}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Príklad 4.3.2

Uhol medzi rovinou štvorca $ABCD$ a rovinou τ je α. Strana AB zviera s rovinou τ uhol β. Aký uhol zviera s rovinou τ strana AD? Riešte úlohu číselne, ak $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$.

Riešenie. Nech body B_1, D_1 budú postupne kolmé priemety vrcholov B, D do roviny τ a nech spoločná priesečnica p rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a τ bude prechádzať vrcholom A štvorca $ABCD$. Ak označíme F, E kolmé priemety bodov B, D na priesečnicu p a $\angle BAF = \varphi$, potom



Obr. 4.3.3

$\alpha = \angle BFB_1 = \angle DED_1$,

$\beta = \angle BAB_1$ a hľadáme

$\gamma = \angle DAD_1$. Podľa dokázaného tvrdenia o sínusoch platí

$\sin\beta = \sin\varphi . \sin\alpha$.

Keďže $\angle BAD = 90^\circ$, tak

$|\angle DAE| = 90^\circ - \varphi$

a vypočítame

$\sin\gamma = \sin\alpha . \sin\left(90^\circ - \varphi\right) =$
$= \sin\alpha . \cos\varphi$

Z prvej rovnosti odvodíme $\sin\varphi = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ a budeme počítať

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{\sin\left(\alpha + \beta\right) . \sin\left(\alpha - \beta\right)}$$

Dostávame $\sin\gamma = \sqrt{\sin\left(\alpha + \beta\right) . \sin\left(\alpha - \beta\right)}$.

Ak $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$, potom

$$\sin\gamma = \sqrt{\sin\left(60^\circ + 30^\circ\right) . \sin\left(60^\circ - 30^\circ\right)} = \sqrt{\sin 30^\circ} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{a} \quad \gamma = 45^\circ.$$

4.4 Cvičenie

1. *Je daná kocka ABCDEFGH. Bod K je stred hrany AE. Vypočítajte veľkosť uhla priamok* $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{BK}$.
2. *Je daná kocka ABCDEFGH. Bod K je stredom hrany DH. Vypočítajte veľkosť uhla priamky* $\overleftrightarrow{DF}$ *a roviny* $\overleftrightarrow{ACK}$.
3. *Je daný pravidelný trojboký hranol ABCDEF. Vypočítajte veľkosť uhla priamok* $\overleftrightarrow{BF}$ *a* $\overleftrightarrow{BM}$, *kde M je stred AC. Počítajte s rozmermi* $|AB| = 1, |AD| = 2$.
4. *Je daný pravidelný trojboký hranol* $ABCA_1B_1C_1$ *s dĺžkou hrany* $|AB| = a$, *ktorého výška je* $v = a$. *Vypočítajte veľkosť uhla priamky* $\overleftrightarrow{AB_1}$ *a roviny* $\overleftrightarrow{ACC_1}$.
5. *Je daný pravidelný štvorboký ihlan ABCDV s rozmermi* $a = 1, v = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú výšky dvoch susedných stien.*
6. *Je daný pravidelný šesťboký ihlan ABCDEFV, kde hrana podstavy má dĺžku 6 a výška ihlana je 10. Vypočítajte veľkosť uhla rovín* $\overleftrightarrow{BCV}, \overleftrightarrow{ABC}$.
7. *Je daná kocka ABCDEFGH, kde S je stred hornej podstavy EFGH, bod M je stred hrany CG. Vypočítajte vzdialenosť bodu S od roviny* $\overleftrightarrow{BDM}$.
8. *V kocke ABCDEFGH s hranou* $a = 1$ *určte vzdialenosť bodu Q od roviny* $\overleftrightarrow{ACG}$, *kde Q leží na hrane AB a platí* $|AQ| = \frac{2}{3} \cdot |AB|$.
9. *V kocke ABCDEFGH s hranou* $a = 1$ *je umiestnený štvorsten ACFH. Vypočítajte*
   a) *veľkosť uhla priamok* $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{FH}$,
   b) *veľkosť uhla rovín susedných stien,*
   c) *vzdialenosť protiľahlých hrán* AC, FH,
   d) *objem štvorstena ACFH.*
10. **Odvesna rovnoramenného pravouhlého trojuholníka zviera s rovinou* ρ, *ktorá prechádza preponou trojuholníka, uhol veľkosti* 30°. *Dokážte, že uhol roviny trojuholníka s rovinou* ρ *má veľkosť* 45°.

11. *Roviny τ a ρ zvierajú ostrý uhol veľkosti φ. Na ich spoločnej priesečnici p leží vrchol A rovnostranného trojuholníka ABC, vrchol B leží v rovine τ, vrchol C v rovine ρ. Ak strana AB zviera s priesečnicou p uhol α, aký uhol zviera rovina trojuholníka ABC s rovinou ρ?

12. *Priamka $\overleftrightarrow{AB}$ je rovnobežná s rovinou τ. Priamka $\overleftrightarrow{CD}$ pretína priamku $\overleftrightarrow{AB}$ pod uhlom α a zviera s rovinou τ uhol φ. Aký uhol je medzi rovinou τ a rovinou určenou priamkami $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$.

13. *Osou pravého uhla pravouhlého trojuholníka prechádza rovina, ktorá zviera s rovinou trojuholníka uhol α. Aké uhly zvierajú odvesny trojuholníka s touto rovinou?

14. *Strana AB kosoštvorca $ABCD$ s tupým uhlom 120° leží v rovine τ, ktorá zviera s rovinou tohto kosoštvorca uhol 45°. Obsah kosoštvorca $ABCD$ je $\left(72-\sqrt{3}\right)cm^2$. Vypočítajte vzdialenosť strany CD od roviny τ a uhol, ktorý zviera dlhšia uhlopriečka kosoštvorca s rovinou τ.

15. *Vypočítajte objem pravidelného štvorstena s hranou dĺžky a, ak uhol podstavnej hrany a bočnej steny označíme α.

5 OBJEMY A POVRCHY TELIES

Podobne ako rovinným útvarom priraďujeme kladné čísla nazývané obsah a obvod útvaru, priraďujeme priestorovým útvarom (telesám) kladné čísla nazývané objem a povrch telesa.

<u>Objem</u> V telesa T je kladné číslo priradené ľubovoľnému telesu tak, že platí:

1. ***zhodné telesá majú rovnaký objem,***
2. ***keď sa teleso T skladá z niekoľkých navzájom neprenikajúcich sa telies, jeho objem sa rovná súčtu objemov týchto telies.***

Dá sa dokázať, že každému telesu môžeme priradiť práve jedno číslo ako jeho objem, ak si vopred zvolíme **jednotkové teleso** s objemom 1 jednotka. Zvyčajne si zvolíme kocku s hranou dĺžky 1 jednotka (cm, m, mm, dm a pod.) a nazveme ju **jednotková kocka** s objemom 1m^3 (1cm^3, 1dm^3 a pod.).
Objem rotačných telies (valec, kužeľ, guľa) môžeme vypočítať využitím *Cavalieriho princípu* alebo *integrálneho počtu*.

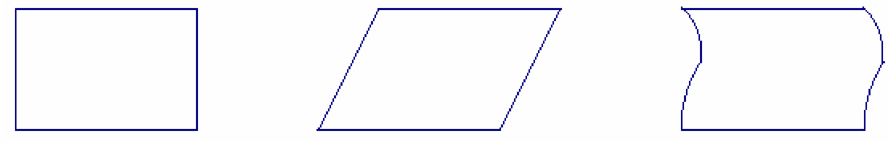
Objemy a povrchy telies počítame využitím vzorcov. Pri odvodzovaní vzorcov na výpočet objemov postupujeme spravidla tak, že na základe definície objemu telesa odvodíme vzorec pre objem kvádra a jeho využitím vzorec pre objem hranola. Pri odvodzovaní vzorca na výpočet objemu ihlana môžeme využiť *Cavalieriho princíp*, alebo metódu opísaného a vpísaného hranolového telesa.

<u>Povrch P</u> telesa T je obsah plochy , ktorá ohraničuje teleso T.

- ***Povrch mnohostenov je súčet obsahov všetkých jeho stien, pričom zjednotenie bočných stien sa nazýva plášť telesa Q.***
- ***Povrch rotačných telies určíme využitím integrálneho počtu.***

5.1 CAVALIERIHO PRINCÍP

Ak vezmeme balíček kariet, môžeme karty po sebe rôzne posúvať a tak tvarovať tento balíček rôznym spôsobom. Pretože sa počet a tvar jednotlivých kariet nemení, je jasné, že objem balíčka sa pri rôznych jeho tvaroch tiež nezmení. Tento jav môžeme pozorovať napríklad aj pri stĺpci mincí, ak na seba položíme určité množstvo rovnakých mincí. Vytvoríme tak z mincí valec, ktorý posúvaním mincí mení svoj tvar, ale keďže sa opäť nemení tvar ani počet mincí, zachováva sa objem tohto stĺpca mincí.



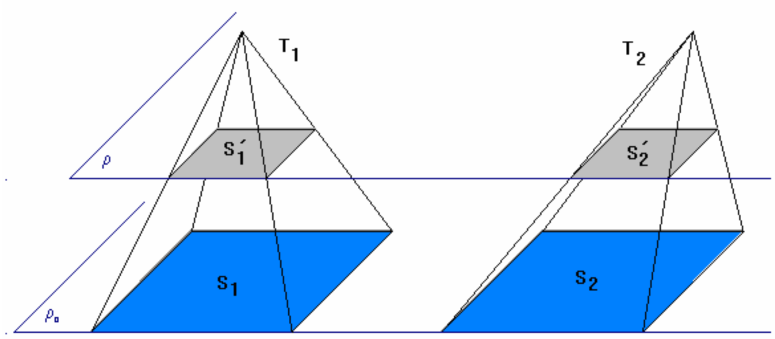
Obr. 5.1.1

Tento jav sa nazýva *Cavalieriho princíp* a môžeme ho formulovať všeobecnejšie.

Cavalieriho princíp

Majme telesá T_1 a T_2, ktoré majú rovnakú výšku a ich podstavy majú rovnaký obsah a sú umiestnené v spoločnej rovine ρ_0. Ak pre telesá T_1 a T_2 a pre rovinu ρ_0 platí, že ich rezy každou rovinou ρ rovnobežnou s rovinou ρ_0 majú rovnaké obsahy, potom majú telesá T_1 a T_2 rovnaké objemy.

$$S_1 = S_2 \quad \wedge \quad S_1' = S_2' \quad \wedge \quad \rho \parallel \rho_o$$
$$V(T_1) = V(T_2)$$

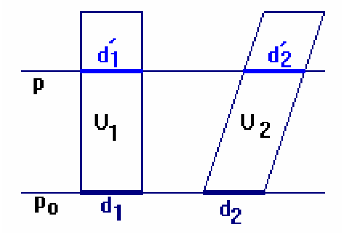


Obr. 5.1.2

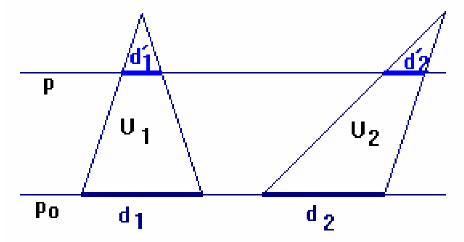
Poznámka. ***Bonaventura Cavalieri*** *(1598-1647) – taliansky matematik, narodený v Miláne, jezuita, žiak G.Galileiho. Jeden zo zakladateľov ideí modernej matematickej analýzy. V roku 1635 publikoval prácu, v ktorej vyvinul novú metódu určovania plôch a objemov a v ktorej naznačil základné myšlienky infinitezimálneho počtu. Na jeho prácu nadviazali v 17. storočí I. Newton a W.G.Leibnitz.*

<u>Cavalieriho princíp v rovine</u>: Ak pre dva útvary U_1, U_2 a pre priamku p_0 ležiace v jednej rovine platí, že každá priamka p rovnobežná s priamkou p_0 pretína útvary U_1 a U_2 v rovnako dlhých úsečkách, tak útvary U_1 a U_2 majú rovnaké obsahy.

$$d_1 = d_2 \quad \wedge \quad d_1' = d_2'$$
$$S(U_1) = S(U_2)$$



Obr. 5.1.3

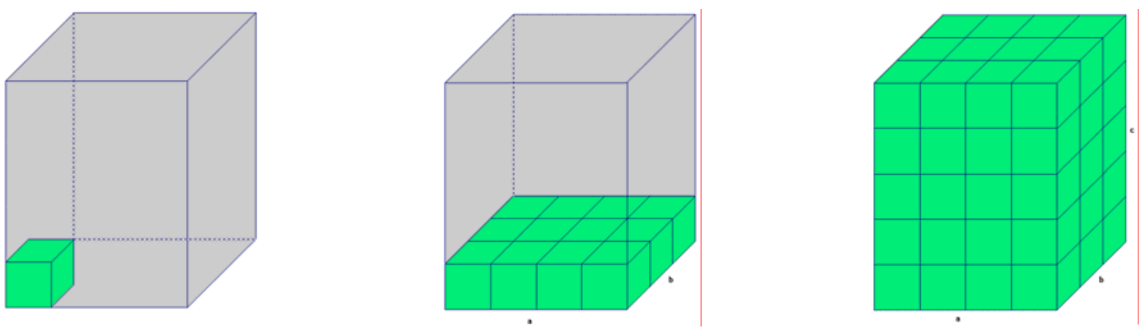


Obr. 5.1.4

Niektoré postupy pri odvodzovaní vzorcov na výpočet objemov a povrchov telies uvádzame v ďalších kapitolách.

5.2 OBJEM KVÁDRA

- Zvolíme si jednotku objemu - jednotkovú kocku s hranou dĺžky 1.
- Podstavu kvádra tvorí obdĺžnik s rozmermi *a, b* a jeho výška je *c* (kde $a, b, c \in N$).
- Vyplníme takýmito jednotkovými kockami podstavu kvádra (jednu vrstvu). Ich počet bude *a.b*, čo je zároveň obsah podstavy kvádra, teda $S_p = ab$.



$S_p = ab$ $\qquad$ $V = abc = S_p.v$

Obr. 5.2.1

- Vyplníme jednotkovými kockami celý kváder, teda *c* vrstiev. Objem kvádra tvorí *c*- krát obsah podstavy, teda: $\boxed{V = abc = S_p.v}$

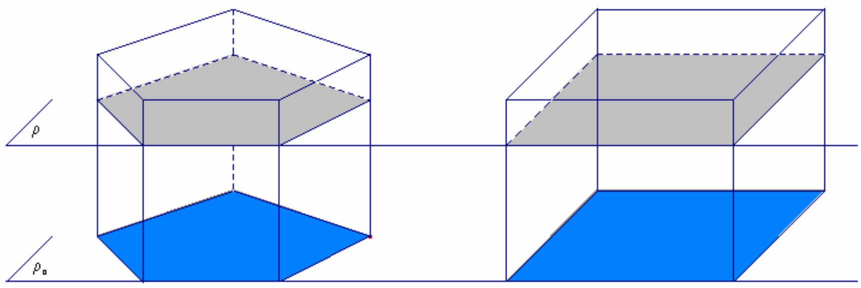
Keďže kocka je vlastne kváder s rozmermi *a, a, a*, jej objem vypočítame podľa vzorca:

$$\boxed{V = a^3}$$

5.3 OBJEM HRANOLA

- Majme daný n- boký kolmý hranol $H : A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ s podstavou v rovine ρ_0.
- Zostrojíme kváder K s rovnakou výškou ako má hranol H a podstavou v rovine ρ_0 tak, že obsah podstavy kvádra je rovnaký ako obsah podstavy hranola: $S_{pK} = S_{pH}$ a $v_K = v_H$.
- Nech ľubovoľná rovina ρ rovnobežná s rovinou ρ_0 pretína hranol H práve vtedy, keď pretína kváder K. Rez hranola rovinou ρ je mnohouholník zhodný s podstavou hranola a rez kvádra je obdĺžnik zhodný s obdĺžnikom v podstave kvádra: $S(\rho \cap H) = S_{pH} \wedge S(\rho \cap K) = S_{pK}$, teda obsah rovín rezov je tiež rovnaký .

Hranol H *Kváder K*



Obr. 5.3.1

- Podľa *Cavalieriho princípu* sa objem hranola rovná objemu kvádra, teda platí: $\boxed{V(H) = V(K) = S_p.v}$

Poznámka. Podobne by sme využitím Cavalieriho princípu ukázali, že ten istý vzorec platí pre výpočet objemu šikmého hranola.

Príklad 5.3.1

Kváder má jednu hranu a=12cm, telesovú uhlopriečku u=13cm a objem V=144cm³. Určte dĺžku ostatných hrán kvádra.

Riešenie.

Je dané: $a=12cm$, $u=13cm$, $V=144cm^3$

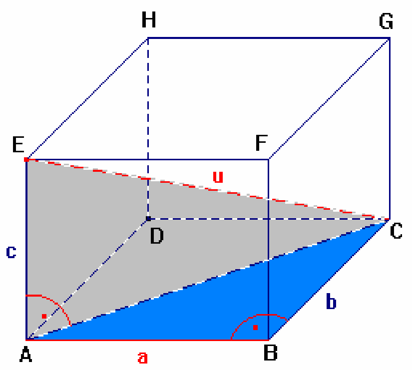
Platí:

$$V = abc$$

$$144 = 12bc \Rightarrow \boxed{b = \frac{12}{c}}$$

$$\left.\begin{array}{l} V \,\triangle ABC \text{ platí} : a^2 + b^2 = |AC|^2 \\ V \,\triangle ACE \text{ platí} : c^2 + |AC|^2 = u^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = u^2, \text{ teda}$$

$$12^2 + b^2 + c^2 = 13^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = 25 - c^2}$$



Obr. 5.3.2

Riešením sústavy uvedených rovníc dostaneme bikvadratickú rovnicu:

$$c^4 - 25c^2 + 144 = 0$$

$$\textit{použijeme substitúciu} : c^2 = t$$

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$t_1 = 16,\ t_2 = 9$$

$$\textit{vrátime sa do substitúcie}:$$

$$\underline{c_1 = 3cm,\ c_2 = 4cm}$$

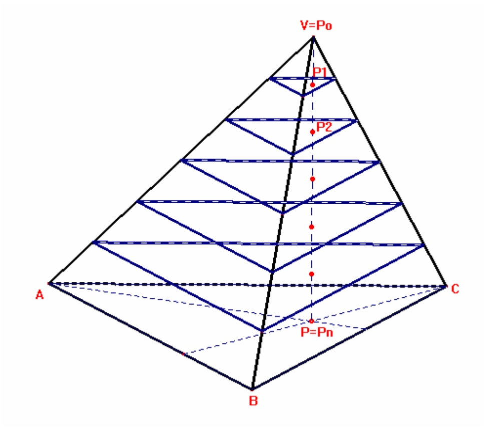
Potom $\underline{b_1 = \dfrac{12}{c} = 3cm,\ b_2 = 4cm}$

Ďalšie hrany kvádra majú rozmery 3cm a 4cm.

5.4 OBJEM IHLANA

- Podobne ako pri hranole, aj pri určovaní objemu ihlana môžeme využiť *Cavalieriho princíp*. Ukážeme si ale iný spôsob, ako určiť tento objem. Ihlanu opíšeme a vpíšeme hranolové teleso, ktorým ho ohraničíme a tým ohraničíme i jeho objem.
- Majme daný n- boký ihlan $I : A_1A_2...A_nV$. Označme jeho výšku *v*, pätu výšky *P* a obsah podstavy S_p.
- Deliacimi bodmi $P_0 \equiv V, P_1, P_2, ..., P_n \equiv P$ rozdelíme výšku ihlana na *n*- zhodných častí.
- Deliacimi bodmi zostrojíme roviny rovnobežné s rovinou podstavy ihlana, pričom ich rezmi s ihlanom budú mnohouholníky podobné s mnohouholníkom v podstave ihlana.
- Týmito rezmi a vrcholom ihlana *I* dostaneme ihlany $I_1, I_2, ..., I_n$, pre ktorých výšky platí:

ak $VP_i = v_i$ $(\ i = 1, 2, ..., n\ )$, potom $v_1 = \dfrac{v}{n},\ v_2 = 2\dfrac{v}{n}, \ldots\ v_n = n\dfrac{v}{n}$ (1)



Obr. 5.4.1

- Pre obsahy podstáv jednotlivých ihlanov platí: $\frac{S_p}{S_{p_i}} = k^2$, kde k je koeficient podobnosti, pre ktorý platí: $k = \frac{v_i}{v}, (i = 1, 2, ..., n)$

- Platí teda:

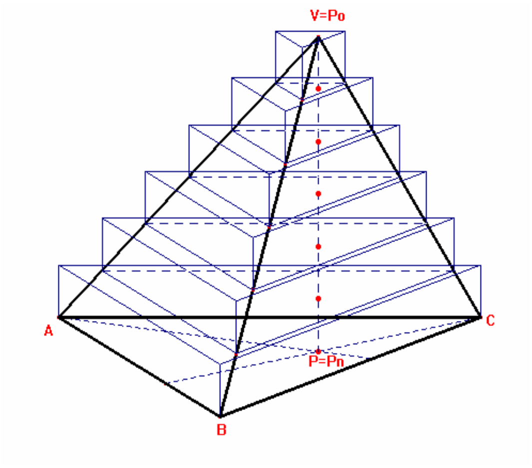
$$\frac{S_{p_1}}{S_p} = \frac{v_1^{\ 2}}{v^2}, \frac{S_{p_2}}{S_p} = \frac{v_2^{\ 2}}{v^2}, ..., \frac{S_{p_n}}{S_p} = \frac{v_n^{\ 2}}{v^2} \qquad (2)$$

- Dosadením vzťahu (1) do vzťahu (2) dostávame:

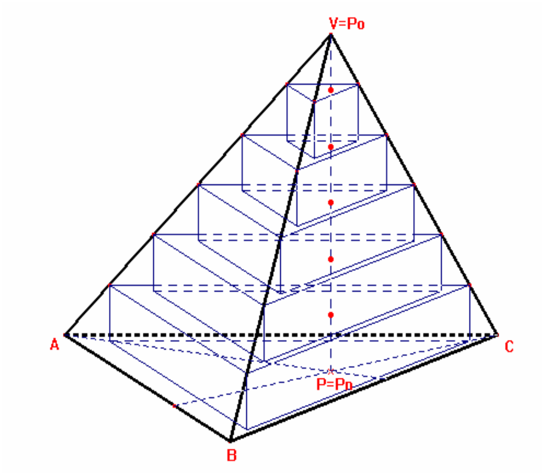
$$S_{p_1} = S_p \frac{1^2}{n^2},\ \ S_{p_2} = S_p \frac{2^2}{n^2}, ..., S_{p_n} = S_p \frac{n^2}{n^2} \qquad (3)$$

- Nad každým rezom (v polpriestore určenom rovinou rezu a vrcholom V) zostrojíme kolmý hranol s výškou $\frac{v}{n}$. Vznikne tak n hranolov, ktoré spolu tvoria hranolové teleso stupňovitého tvaru **T₁**.
- V opačnom polpriestore zostrojíme nad danými rezmi (okrem podstavy $A_1A_2...A_n$) kolmé hranoly, čím nám vznikne *(n-1)* hranolov, ktoré spolu tvoria teleso stupňovitého tvaru **T₂**.

T_1 ***T_2***



Obr. 5.4.2



Obr. 5.4.3

- Pre ihlan **I** a pre telesá $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$ platí:
  - ihlan **I** je časťou telesa $\mathbf{T_1}$, pričom vždy existujú body telesa $\mathbf{T_1}$**,** ktoré nepatria ihlanu,
  - teleso $\mathbf{T_2}$ je časťou ihlana **I**, pričom stále existujú body ihlana, ktoré nepatria telesu $\mathbf{T_2}$.

Pre ihlan a telesá a pre ich objemy teda platí: $T_1 \supset I \supset T_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V(T_1) > V(I) > V(T_2)}$ (4)

- Objemy telies $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$ vypočítame ako súčty objemov jednotlivých hranolov, z ktorých sa tieto telesá skladajú. Platí teda: $V(T_1) = \frac{v}{n}\left(S_{p_1} + S_{p_2} + \ldots + S_{p_n}\right)$

  Po dosadí vyjadrenia zo vzťahu (3) platí:

$$V(T_1) = \left(\frac{S_p}{n^2}1^2 + \frac{S_p}{n^2}2^2 + \ldots + \frac{S_p}{n^2}n^2\right) = \frac{S_p v}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

  Pre $\mathbf{T_2}$ podobne platí: $V(T_2) = \frac{v}{n}\left(S_{p_1} + S_{p_2} + \ldots + S_{p_{n-1}}\right) = \frac{S_p v}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)$

- Súčet druhých mocnín prirodzených čísel môžeme vyjadriť:

$$s = \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

- Po úprave dostávame: $V(T_1) = \frac{S_p v}{6n^3}n(n+1)(2n+1) = \frac{S_p v}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

$$V(T_2) = \frac{S_p v}{6n^3}n(n-1)(2n-1) = \frac{S_p v}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

- Dosadením týchto vyjadrení objemov telies $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$ do nerovnosti (4) získame ohraničenie objemu ihlana **I** , ktoré platí pre každé delenie výšky ihlana na *n* zhodných častí (n>1):

$$\frac{S_p v}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) > \mathrm{V(I)} > \frac{S_p v}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) \qquad (6)$$

- S narastajúcim *n (n=1, 2, 3, ...)* tvoria objemy *V(T₁)* klesajúcu postupnosť a objemy *V(T₂)* zasa rastúcu postupnosť , pričom ich limity sa rovnajú :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_p v}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{S_p v}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{S_p v}{3}$$

- Pretože platí nerovnosť (6), objem ihlana vypočítame podľa vzťahu:

$$\boxed{V(I) = \frac{S_p v}{3}}$$

Príklad 5.4.1

Koľko litrov vzduchu je pod strechou hradnej veže, ktorá má tvar pravidelného 6-bokého ihlana s hranou podstavy a=3,6m a výškou v=2,5m, keď počítame, že podporné stĺpy zaberajú asi 7% objemu priestoru pod strechou.

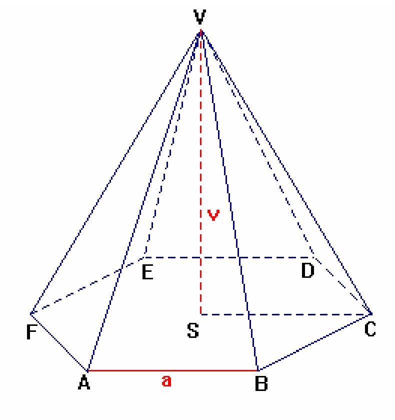
Riešenie.

Keďže potrebujeme vypočítať objem v litroch, premeníme si hneď centimetre na decimetre

Je dané: *a=3,6m=36dm, v=2,5m=25dm,* treba odpočítať *7% z V* na stĺpy

Podstavou ihlana je pravidelný 6-uholník, ktorý môžeme rozdeliť na 6 rovnostranných 6-uholníkov.

Pri riešení príkladu použijeme tieto vzťahy: $V = \frac{S_p v}{3}$, $S_p = 6.S_\vartriangle$, $S_\vartriangle = \frac{a.v_a}{2}$



Obr. 5.4.4

Dosadením jednotlivých vzťahov do vzorca pre objem ihlana dostaneme:

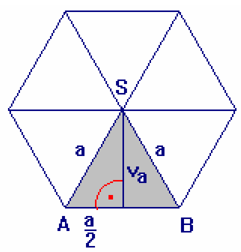
$$V = \frac{6.\frac{a.v_a}{2}.v}{3} = a.v_a.v$$

V $\vartriangle ABS$ platí Pytagorova veta:

$$v_a{}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v_a = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3.36^2}{4}}$$

$$\underline{v_a \doteq 31{,}176dm}$$



Obr. 5.4.5

Objem vypočítame: $V = 36.31{,}176.25 = \underline{28\ 058{,}4dm^3}$

Odpočítame 7% z 28 058,4dm^3, čo je 1 964,088 dm^3

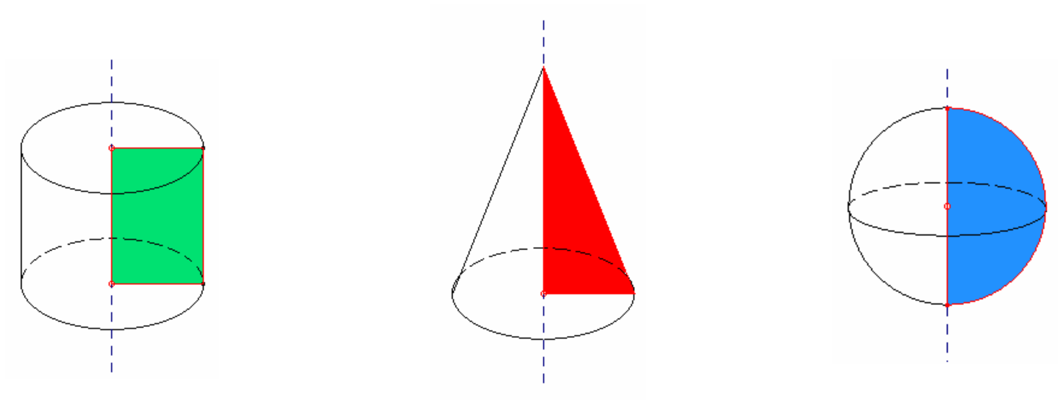
Výsledný objem vzduchu v litroch je:

$28058{,}4 - 1\ 964{,}088 = 26\ 094{,}312dm^3 \doteq \underline{26\ 094l}$

Pod strechou hradnej veže je asi 26 094 litrov vzduchu.

5.5 OBJEM ROTAČNÝCH TELIES

Medzi rotačné telesá patria **valec, kužeľ a guľa**. Všetky tri telesá vzniknú rotáciou určitého rovinného útvaru okolo jednej jeho strany. *Valec* vznikne rotáciou obdĺžnika okolo jednej jeho strany, *kužeľ* rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny a *guľa* rotáciou polkruhu okolo jeho priemeru.



Obr. 5.5.1

Využitím *Cavalieriho princípu* ľahko ukážeme, že valec má rovnaký objem ako hranol s rovnakou výškou a rovnakým obsahom podstavy a kužeľ ako ihlan s rovnakou výškou a rovnakým obsahom podstavy. Keďže podstavou valca a kužeľa je kruh, vzorce na výpočet ich objemov sú: $\boxed{V(valca) = S_p.v = \pi r^2 v}$ a $\boxed{V(kužeľa) = \frac{S_p.v}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}}$

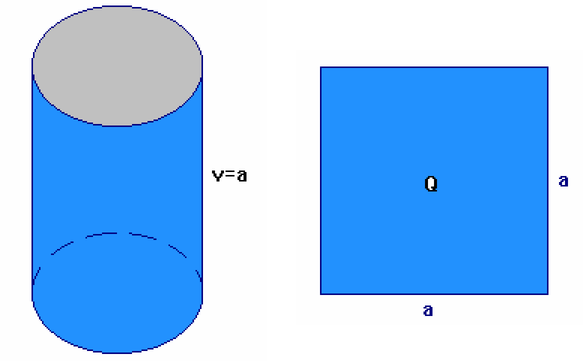
Príklad 5.5.1

Plášť rotačného valca rozvinutý do roviny predstavuje štvorec s obsahom $Q=0,81m^2$. Vypočítajte objem valca.

Riešenie.

Je dané: $Q=0,81m^2$, *tvar štvorca*

Musíme si uvedomiť, že ak je plášť valca štvorec, potom výška aj obvod podstavy valca majú dĺžku rovnú dĺžke strany štvorca a.



Obr. 5.5.2

Platí:

$V = \pi r^2 v$, $v = a$, $o_{podstavy} = a = 2\pi r$

$V = \pi r^2 a$

$Q = a^2$, teda $a = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9m$

Dosadením dostávame:

$2\pi r = 0{,}9 \Rightarrow r = \dfrac{0{,}9}{2\pi}$

$V = \pi \left(\dfrac{0{,}9}{2\pi}\right)^2 .0{,}9 = \dfrac{0{,}9^3}{4\pi} = \underline{0{,}058 m^3}$

Objem valca je 0,058 m^3.

Príklad 5.5.2

Zrezaný rotačný kužeľ má polomery podstáv a výšku v pomere 3:11:15, povrch P=92πcm^2. Vypočítajte jeho objem.

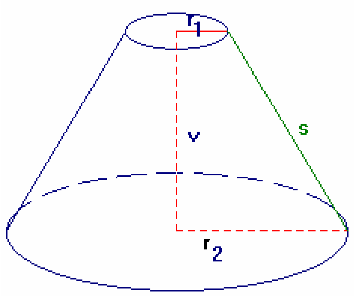
Riešenie.

Je dané: $r_1 : r_2 : v = 3:11:15$, $P = 92\pi cm^2$

Ak označíme jednotkovú dĺžku v pomere x, potom: $r_1 = 3x$, $r_2 = 11x$, $v = 15x$ a úloha sa zúži na výpočet x.

Objem zrezaného kužeľa vypočítame podľa vzorca:

$V = \dfrac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$



Obr. 5.5.3

Pre stranu s zrezaného kužeľa platí:

$s = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + v^2} = \sqrt{(8x)^2 + (15x)^2} = 17x$

Povrch vypočítame podľa vzorca:

$P = S_{p1} + S_{p2} + Q = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$

$92\pi = 9x^2\pi + 121x^2\pi + 14x^2\pi.17$

$92 = 368x^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Potom: $r_1 = \dfrac{3}{2}$, $r_2 = \dfrac{11}{2}$, $v = \dfrac{15}{2}$

Dosadením do vzorca pre výpočet objemu dostaneme:

$V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{15}{2}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{2}.\dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{11}{2}\right)^2\right) \doteq \underline{320 cm^3}$

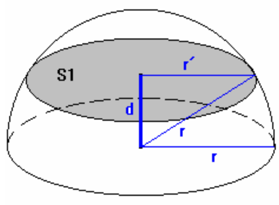
Objem kužela je 320 cm^3.

Objem gule môžeme určiť využitím integrálneho počtu alebo *Cavalieriho princípu* na vhodných telesách. Ukážeme si ten druhý spôsob. Využijeme pritom zovšeobecnenie *Cavalieriho princípu*:

Ak existuje rovina k dvom telesám taká, že všetky rezy rovnobežné s touto rovinou majú stály pomer obsahov, potom objemy oboch telies sú v rovnakom pomere.

$$\left(\frac{S_1}{S_2}=k \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=k, k>0\right)$$

- Vezmime si polguľu a zostrojme jej rez rovinou rovnobežnou s podstavou. Budeme hľadať také teleso, ktoré má rovnakú výšku, obsah podstavy a ktorého rovinné rezy majú rovnaký obsah ako rezy guľou.
- Ukážeme, že takéto teleso získame z valca (v ktorom polomer podstavy je rovnaký ako strana valca) tak, že z neho odstránime kužeľ, ktorý má podstavu v jednej podstave valca a vrchol v strede druhej podstavy valca. Označme toto teleso *T*.
- Vypočítame obsahy rovinných rezov polgule a telesa *T*:

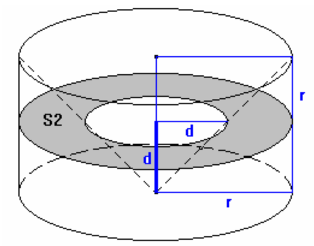


Obr. 5.5.4

Obsah kruhu S_1:

$$S_1 = \pi r'^2 \wedge d^2 + r'^2 = r^2$$

$$S_1 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$



Obr. 5.5.5

Obsah medzikružia S_2 :

$$S_2 = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

$$S_1 = S_2 \quad ak \quad d \in (0, r)$$

- Podľa *Cavalieriho princípu* sa rovnajú aj objemy polgule a telesa *T*. Platí teda:

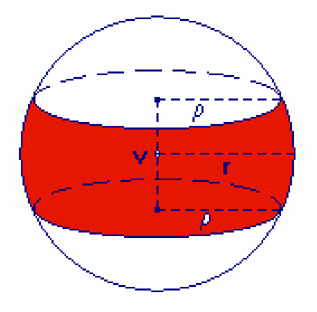
$$V(\text{polgule}) = V(T) = V(valca) - V(kužeľa) = \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V(gule) = 2.\frac{2}{3}\pi r^3 = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

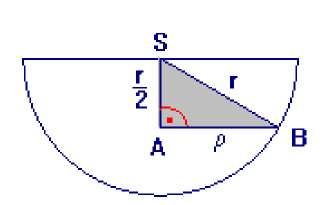
Príklad 5.5.3

Guľová vrstva súmerná podľa stredu gule má obsah pásu rovný polovici povrchu gule. Koľko percent z objemu gule tvorí objem guľovej vrstvy?

Riešenie.



Obr. 5.5.6



Obr. 5.5.7

Je dané: $S_{pásu} = \frac{1}{2} P_{gule}$, teda $2\pi r v = \frac{1}{2} 4\pi r^2 \Rightarrow \underline{v = r}$

Vyjadríme objem gule: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Vyjadríme objem guľovej vrstvy:

$$V_2 = \frac{\pi v}{6}\left(3\rho_1^{\,2} + 3\rho_2^{\,2} + v^2\right) = \frac{\pi v}{6}\left(6\rho^2 + v^2\right) = \frac{\pi v}{6}\left(6\rho^2 + r^2\right)$$

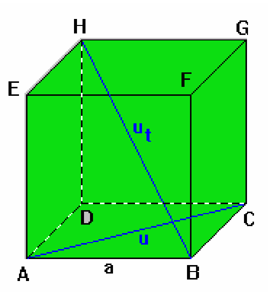
V $\triangle SAB$ platí Pytagorova veta: $\rho^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} r^2$

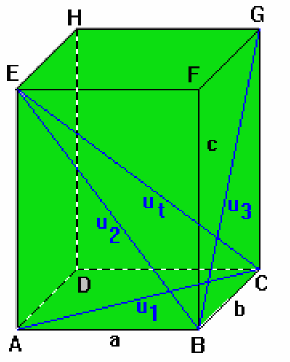
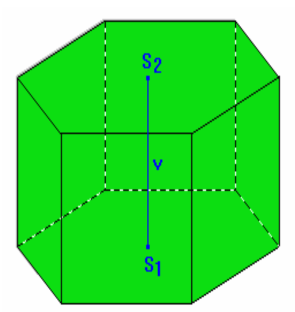
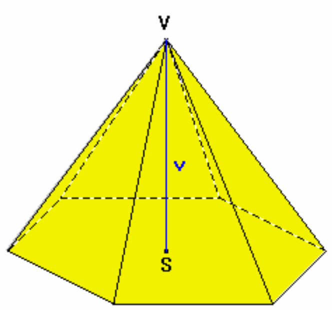
Z uvedených vzťahov vyplýva:

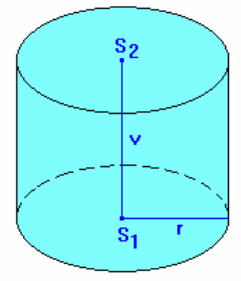
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\pi r}{6}\left(\frac{9}{2} r^2 + r^2\right)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\frac{11}{12} r^3}{\frac{4}{3} r^3} = \frac{11}{16} \quad \text{a to je} \quad \underline{68{,}75\%}$$

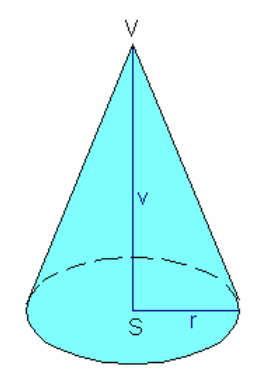
Objem guľovej vrstvy tvorí 68,75% z objemu gule.

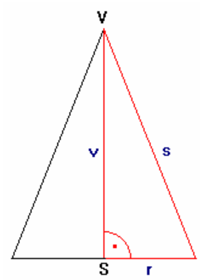
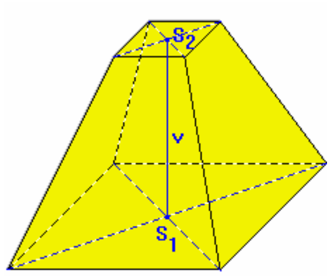
5.6 PREHĽAD ZÁKLADNÝCH VZORCOV NA VÝPOČET OBJEMOV A POVRCHOV TELIES

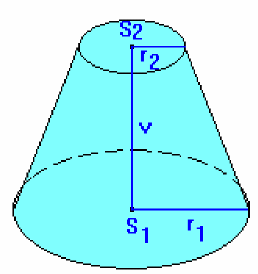
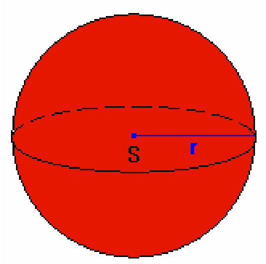
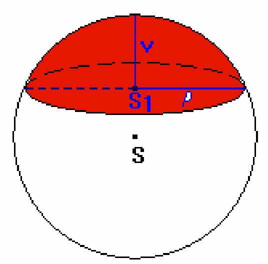
Telesá	Vlastnosti telies	
KOCKA  	- 8 vrcholov - 12 hrán (rovnako dlhých) - 6 stien (zhodné štvorce) - 12 stenových uhlopriečok (rovnako dlhých)- u - 4 telesové uhlopriečky (rovnako dlhé)- u_t	$a = \lvert AB \rvert$ - dĺžka hrany kocky $u = a\sqrt{2} = \lvert AC \rvert$ $u_t = a\sqrt{3} = \lvert BH \rvert$ $V = a^3$ $P = 6a^2$
KVÁDER	- 8 vrcholov - 12 hrán (tri štvorice	$a = \lvert AB \rvert,\ b = \lvert BC \rvert,\ c = \lvert BF \rvert$ - dĺžky rozdielnych hrán kvádra

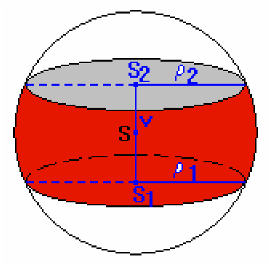
	rovnako dlhých) - 6 stien (tri dvojice zhodných obdĺžnikov) - 12 stenových uhlopriečok (tri štvorice rovnako dlhých)– u_1, u_2, u_3 - 4 telesové uhlopriečky (rovnako dlhé)- u_t	$u_1 = \sqrt{a^2+b^2} = \|AC\|$ $u_2 = \sqrt{a^2+c^2} = \|BE\|$ $u_3 = \sqrt{b^2+c^2} = \|BG\|$ $u_t = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|EC\|$ $V = abc$ $P = 2(ab+ac+bc)$
HRANOL  *Pravidelný hranol* –kolmý hranol s podstavou pravidelného n-uholníka .	- Podstavou je mnohouholník $A_1A_2...A_n$ - $2n$ vrcholov - $2n$ podstavných hrán - n bočných hrán - 2 podstavy, n bočných stien (štvoruholníkov) - S_1, S_2 sú stredy podstáv *Kolmý hranol*- ak úsečka S_1S_2 je kolmá na podstavu. *Šikmý hranol*- ak úsečka S_1S_2 nie je kolmá na podstavu.	S_p - obsah podstavy hranola Q- obsah plášťa (súčet obsahov všetkých bočných stien) v – výška hranola (vzdialenosť rovín podstáv) $V = S_p.v$ $P = 2S_p + Q$
IHLAN  *Pravidelný ihlan* – kolmý ihlan s podstavou	- podstavou je mnohouholník $A_1A_2...A_n$. - n vrcholov - n podstavných hrán - n bočných hrán - n bočných stien (trojuholníkov) - V- vrchol ihlana - S – stred podstavy ihlana *Kolmý ihlan*- ak úsečka VS je	S_p – obsah podstavy ihlana Q – obsah plášťa ihlana (súčet obsahov všetkých bočných stien) v – výška hranola (vzdialenosť vrcholu V od roviny podstavy ihlana) $V = \frac{1}{3} S_p.v$

<table>
<tr><td>pravidelného n-uholníka</td><td>kolmá na podstavu.
Šikmý ihlan- ak úsečka *VS* nie je kolmá na podstavu.</td><td>$P = S_p + Q$</td></tr>
<tr><td>*ROTAČNÝ VALEC*


Rovnostranný valec – osovým rezom valca je štvorec, teda $v = 2r$</td><td>- vznikne otáčaním obdĺžnika okolo jednej jeho strany
- 2 kruhové podstavy
- plášť tvaru obdĺžnika
- S_1, S_2 sú stredy podstáv</td><td>S_p – obsah podstavy valca
Q – obsah plášťa
v – výška valca (vzdialenosť rovín podstáv)
r – polomer podstavy valca
$V = S_p.v = \pi r^2 v$
$P = 2S_p + Q = 2\pi r^2 + 2\pi rv$</td></tr>
<tr><td>*ROTAČNÝ KUŽEĽ*


Rovnostranný kužeľ – osovým rezom valca je štvorec, teda $v = 2r$</td><td>- vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny
- podstava je kruh

</td><td>S_p – obsah podstavy kužeľa
Q – obsah plášťa
v – výška kužeľa (vzdialenosť vrcholu od roviny podstavy)
r – polomer podstavy valca
s – dĺžka strany kužeľa
$s = \sqrt{r^2 + v^2}$
$V = \frac{1}{3} S_p.v = \frac{1}{3} \pi r^2 v$
$P = S_p + Q = \pi r^2 + \pi rs$</td></tr>
<tr><td>*ZREZANÝ IHLAN*

</td><td>Rovina rovnobežná s rovinou podstavy, ktorá pretína výšku ihlana, rozdelí ihlan na dve časti: menší ihlan a zrezaný ihlan.
- 2 podstavy (*n*- uholníky)
- Bočné steny tvaru</td><td>v – výška zrezaného ihlana (vzdialenosť rovín podstáv)
s- dĺžka strany
S_{p1}, S_{p2} - obsah dolnej a hornej podstavy
Q- obsah plášťa</td></tr>
</table>

	lichobežníka	$V=\frac{v}{3}\left(Q+\sqrt{S_{p1}S_{p2}}+S_{p2}\right)$ $P=S_{p1}+S_{p2}+Q$
ZREZANÝ KUŽEĽ  	Rovina rovnobežná s rovinou podstavy, ktorá pretína výšku kužeľa, rozdelí kužeľ na dve časti: menší kužeľ a zrezaný kužeľ. - 2 kruhové podstavy	v – výška zrezaného kužeľa (vzdialenosť rovín podstáv) s – dĺžka strany S_{p1}, S_{p2} - obsah dolnej a hornej podstavy Q- obsah plášťa $V=\frac{\pi v}{3}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$ $P=S_{p1}+S_{p2}+Q=$ $=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi\left(r_1+r_2\right)s$
GUĽA  	Vznikne otáčaním polkruhu okolo jeho priemeru	r – polomer gule S – stred gule $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $P=4\pi r^2$
GUĽOVÝ ODSEK  	Rovina prechádzajúca vnútorným bodom priemeru gule rozdelí guľu na dva guľové odseky. - kruhová podstava S_1 – stred podstavy odseku ρ - polomer podstavy odseku	r – polomer gule S – stred gule v – výška odseku S_p - obsah podstavy odseku Q- obsah guľového vrchlíka $Q=2\pi rv$ $V=\frac{\pi v}{6}\left(3\rho^2+v^2\right)$ $P=S_p+Q=\pi\rho^2+2\pi rv$

GUĽOVÁ VRSTVA  	Guľová vrstva je prienik gule a vrstvy ohraničenej dvoma rovnobežnými rovinami pretínajúcimi priemer gule. - 2 kruhové podstavy S_1, S_2 – stred dolnej a hornej podstavy vrstvy ρ_1, ρ_2 - polomer dolnej a hornej podstavy vrstvy	r – polomer gule S – stred gule v – výška guľovej vrstvy S_{p1}, S_{p2} - obsah dolnej a hornej podstavy vrstvy Q – obsah guľového pásu $Q = 2\pi r v$ $V = \frac{\pi v}{6}\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right)$ $P = S_{p1} + S_{p2} + Q =$ $= \pi\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right) + 2\pi r v$

5.1 Cvičenie

1. *Rozmery strán kvádra sú v pomere a:b:c=3:4:5 a jeho povrch je 376cm^2. Vypočítajte objem kvádra. [V=480cm^3]*
2. *Vypočítajte povrch kocky, ak jej telesová uhlopriečka má dĺžku u=21cm. [P=882cm^2]*
3. *Bazén tvaru kolmého hranola s dnom tvaru rovnoramenného lichobežníka s rozmermi základní lichobežníka a=10m a c=18m a ramenami b=7m je hlboký 2m.Pri renovácii treba vybieliť dno a steny bazéna. Koľko m^2 treba vybieliť? [163,8m^2]*
4. *Hrana podstavy pravidelného 4-bokého ihlana je 10dm. Aký polomer má rovnako vysoký kužeľ s rovnakým objemom? [5,64dm]*
5. *Na hornej podstave pravidelného 4-bokého hranola s hranou podstavy 10cm a výškou 2,5cm je postavený ihlan s tou istou podstavou. Vypočítajte výšku tohto ihlana, ak jeho objem sa rovná 30% objemu hranola. [v=2,25cm]*
6. *Stan tvaru 4-bokého ihlana má mať podstavu štvorca so stranou 195cm a výšku 210cm. Koľko m^2 plátna treba na zhotovenie stanu (bez podstavy)? [9,04m^2]*
7. *Koľko litrov vzduchu je pod strechou hradnej veže, ktorá má tvar pravidelného šesťbokého ihlana s hranou podstavy a=3,6m a výškou v=2,5m, keď počítame, že podporné stĺpy zaberajú asi 7% objemu priestoru pod strechou. [25 947 l]*
8. *Plášť rotačného valca rozvinutý do roviny predstavuje štvorec s obsahom 0,81m^2 . Vypočítajte objem valca. [V=0,058m^3]*

9. *Plášť kužeľa tvorí polkruh s polomerom* $R=\sqrt{3}$. *Určte objem kužeľa. [V=*$\frac{3\pi}{8}$*]*

10. *Rotačný kužeľ má objem* $V=4\pi\mathrm{dm}^3$ *a obsah osového rezu* $P=6\mathrm{dm}^2$. *Určte jeho rozmery, teda polomer a výšku. [r=2dm, v=3dm]*

11. *Osovým rezom valca je obdĺžnik s uhlopriečkou dĺžky u=20cm. Výška valca je dvakrát väčšia než priemer podstavy. Vypočítajte objem valca v litroch. [* $V=160\pi\sqrt{5}\mathrm{cm}^3 \doteq 1{,}1l$ *]*

12. *Vypočítajte polomer a výšku rovnostranného valca vpísaného do gule s polomerom R=6cm. Vypočítajte koľko percent objemu gule tvorí objem valca. [* $r=3\sqrt{2},\ v=6\sqrt{2}, 53\%$ *]*

13. *Nádržka má tvar rovnostranného kužeľa. Vypočítajte obsah plochy zmáčanej vodou, ak do nádržky nalejeme 3l vody. [* $S=6\sqrt[3]{\pi}\mathrm{dm}^2$ *]*

14. *Z troch gúľ s polomermi* $r_1=3cm, r_2=4cm, r_3=5cm$ *sme zliali jednu guľu. Vypočítajte jej polomer a povrch. [r=6cm, P=452,16cm*^{2}*]*

15. *Zrezaný rotačný kužeľ má objem* $V=1596\sqrt{3}\pi\mathrm{cm}^3$, *jeho strana s dĺžkou s=24cm zviera s rovinou podstavy uhol* $\alpha=60°$. *Vypočítajte polomery obidvoch podstáv. [*r_1*=17cm,* r_2*=5cm]*

6 GEOMETRICKÉ ZOBRAZENIA V PRIESTORE

Pod zobrazením v priestore rozumieme také zobrazenie, ktoré každému bodu X v priestore (vzor) priradí práve jeden bod X´ v priestore (obraz).

Podobne ako v rovine poznáme niektoré zobrazenia aj v priestore. V nasledujúcej časti sa oboznámime s niektorými *zhodnými* a *podobnými* zobrazeniami v priestore.

6.1 ZHODNÉ ZOBRAZENIA V PRIESTORE

Zhodné zobrazenie v priestore je také zobrazenie v priestore, ktoré dvom rôznym bodom X, Y priradí body X´, Y´ tak, že sa zachová ich vzdialenosť, t. j. |XY| = |X´Y´|.

Z daného tvrdenia sa dá vysloviť podstatná vlastnosť zhodného zobrazenia v priestore a to, že sa zachovávajú vzdialenosti ľubovoľných dvoch bodov.

Pre zobrazenie základných geometrických útvarov v priestore platia nasledujúce vlastnosti:

1. *Obrazom úsečky AB v zhodnom zobrazení v priestore je úsečka A´B´ s ňou zhodná.*
2. *Obrazom polpriamky AB v zhodnom zobrazení v priestore je polpriamka A´B´.*
3. *Obrazom priamky AB v zhodnom zobrazení v priestore je priamka A´B´.*
4. *Obrazom polroviny pA v zhodnom zobrazení v priestore je polrovina p´A´.*
5. *Obrazom uhla ∠AVB v zhodnom zobrazení v priestore je ∠A´V´B´ s ním zhodný.*
6. *Obrazom rovnobežných priamok AB, CD v zhodnom zobrazení v priestore sú rovnobežné priamky A´B´, C´D´.*
7. *Obrazom priestoru v zhodnom zobrazení v priestore je priestor.*
8. *Obrazom polpriestoru ρA v zhodnom zobrazení v priestore je polpriestor ρ´A´.*
9. *Dva útvary sú v priestore zhodné práve vtedy, keď sa body jedného útvaru zobrazia do bodov druhého útvaru tak, že úsečky, ktoré si v zobrazení zodpovedajú, sú zhodné.*
10. *Obrazom mnohostena v zhodnom zobrazení je mnohosten, ktorého vrcholy, hrany a steny sú obrazom vrcholov, hrán a stien zobrazovaného mnohostena.*

Poznámka. Z uvedených vlastností zhodného zobrazenia vyplýva, že obrazom hranola je hranol a obrazom ihlana je ihlan.

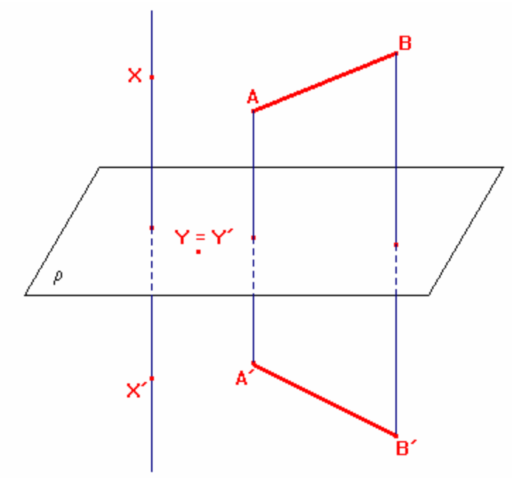
Popíšeme si niektoré typy zhodných zobrazení v priestore. Konkrétne sa budeme zaoberať najdôležitejšími zobrazeniami:

- Rovinová súmernosť
- Stredová súmernosť v priestore
- Osová súmernosť v priestore
- Posunutie v priestore
- Otočenie okolo priamky

6.1.1 ROVINOVÁ SÚMERNOSŤ

Pod rovinovou súmernosťou rozumieme súmernosť podľa nejakej roviny.

Daná je rovina ρ. Rovinová súmernosť je zobrazenie, ktorá každému bodu X priradí bod X′ taký, že body X, X′ ležia na kolmici na rovinu ρ a stred úsečky XX′ leží v rovine ρ.



Obr. 6.1.1.1

V rovinovej súmernosti môžeme rozlišovať dva prípady zobrazenia bodu podľa roviny ρ (obr. 6.1.1.1):

- ak bod X nepatrí rovine ρ, tak pre bod X' platí: priamka $\overleftrightarrow{XX'}$ je kolmá na rovinu ρ a stred úsečky XX' patrí rovine ρ

- ak bod Y patrí rovine ρ, tak sa zobrazí sám do seba, (t. j. $Y = Y'$). Bod Y sa nazýva *samodružný bod*.

Samodružné priamky sú všetky priamky roviny ρ a aj priamky kolmé na rovinu ρ. *Samodružné roviny* sú všetky roviny kolmé na rovinu ρ a tiež rovina ρ.

Rovina ρ sa nazýva rovinou súmernosti ľubovoľného útvaru U, ak sa daný útvar U zobrazí sám do seba v súmernosti podľa roviny ρ.

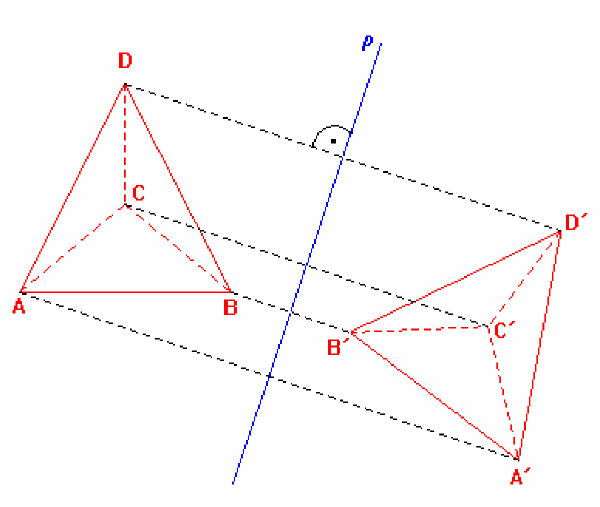
Poznámka. Ak má útvar U aspoň jednu rovinu súmernosti, tak hovoríme, že je útvar rovinovo súmerný.

Rovinová súmernosť môže byť určená rovinou ρ alebo dvojicou zodpovedajúcich si bodov (vzor – obraz).

Príklad 6.1.1.1

Zobrazte v rovinovej súmernosti podľa roviny ρ štvorsten ABCD.

Riešenie.



Obr. 6.1.1.2

Štvorsten *ABCD* zobrazíme v rovinovej súmernosti podľa roviny ρ tak, že zobrazíme v danej súmernosti jednotlivé vrcholy *A, B, C, D*.

Princíp zobrazenia bodu v rovinovej súmernosti sme si už vysvetlili, z čoho teda vyplýva, že obrazom štvorstena *ABCD* je štvorsten *A´B´C´D´* (obr. 6.1.1.2).

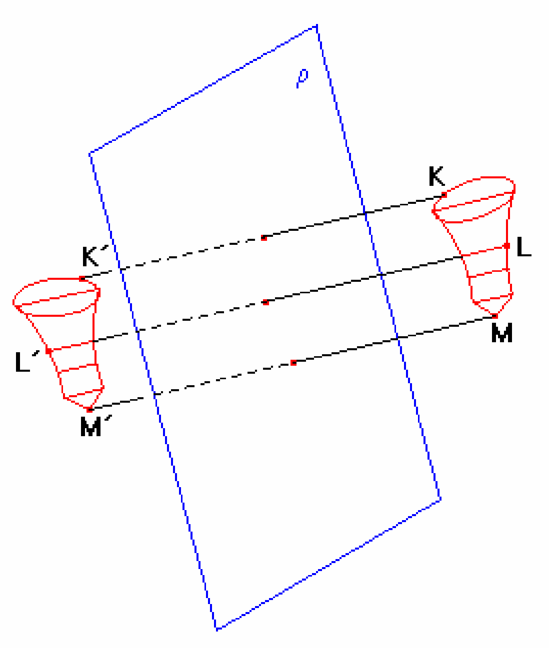
Daný štvorsten *ABCD* je zobrazený vo voľnom rovnobežnom premietaní.

Rovinu súmernosti ρ sme si v tomto príklade zvolili tak, aby jej priemetom bola priamka *p*.

Príklad 6.1.1.2

Dané je teleso v tvare skrutky. Zobrazte teleso v rovinovej súmernosti podľa roviny ρ.

Riešenie.



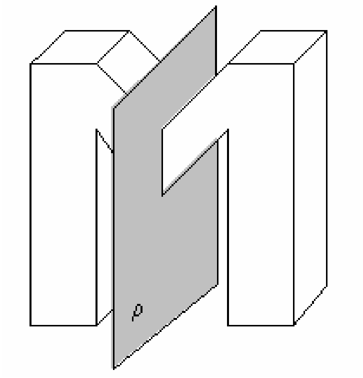
Obr. 6.1.1.3

Na zobrazenie telesa v rovinovej súmernosti sme využili niekoľko významných bodov telesa (napr. body *K, L, M*). Dané body sme postupne zobrazili v súmernosti podľa roviny ρ. Obrazy bodov *K´, L´, M´* nám pomôžu na vykreslenie obrazu telesa.

Keď si zvolíme čo najviac bodov telesa, ktoré zobrazujeme, tak potom vieme obraz telesa presnejšie zostrojiť (obr. 6.1.1.3).

ROVINY SÚMERNOSTI TELIES

Ak má útvar *U* aspoň jednu rovinu súmernosti, tak hovoríme, že je útvar rovinovo súmerný.



Obr. 6.1.1.4

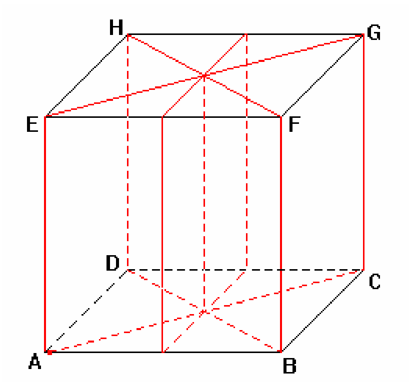
Na obr. 6.1.1.4 je písmeno M, ktoré je súmerné podľa roviny ρ. Určite nájdeme tiež telesá, útvary, ktoré majú nekonečne veľa rovín súmernosti. Spomenieme napríklad guľu, ktorá je súmerná podľa každej roviny prechádzajúcej jej stredom alebo rotačný ihlan, ktorý je rovinovo súmerný podľa každej roviny obsahujúcej jeho výšku a podobne.

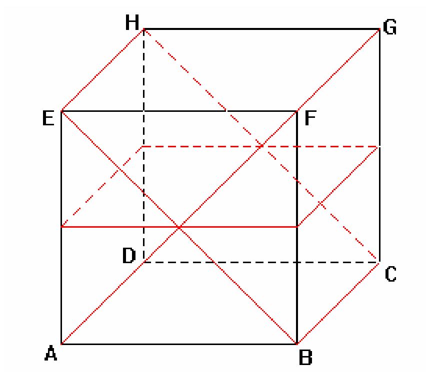
V nasledujúcich príkladoch budeme hľadať roviny súmernosti niektorých jednoduchých telies.

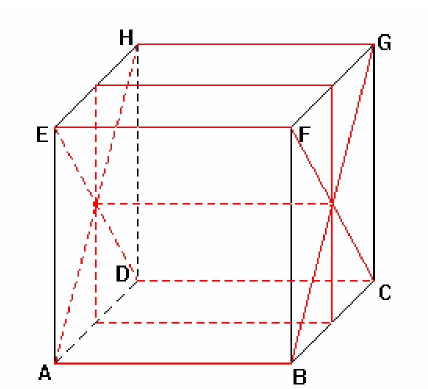
Príklad 6.1.1.3

Nájdite všetky roviny súmernosti kocky ABCDEFGH.

Riešenie.







Kocka *ABCDEFGH* má 9 rovín súmerností. Každá rovina súmernosti prechádza stredmi dvoch protiľahlých stien danej kocky.

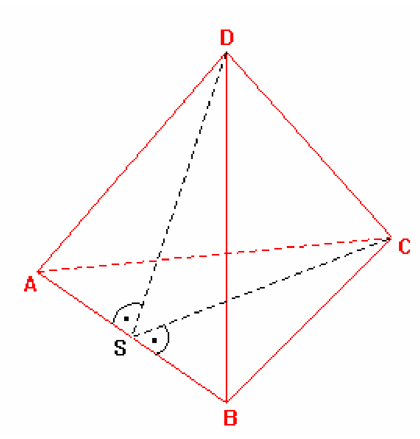
Jednotlivé roviny súmernosti sú postupne znázornené na obr. 6.1.1.5.

Obr. 6.1.1.5

Príklad 6.1.1.4

Koľko rovín súmernosti má pravidelný štvorsten?

Riešenie.



Obr. 6.1.1.6

Rovina $\overleftrightarrow{CSD}$ je jedna z rovín súmernosti pravidelného štvorstena. Ukážeme si prečo.

Body C a V sú samodružnými bodmi rovinovej súmernosti, lebo ležia v danej rovine. Keďže trojuholníky ABC a ABD sú rovnostranné, tak $AB \perp CS$ a $AB \perp DS$.

Potom $AB \perp \overleftrightarrow{CSD}$ a bod S je stredom úsečky AB.

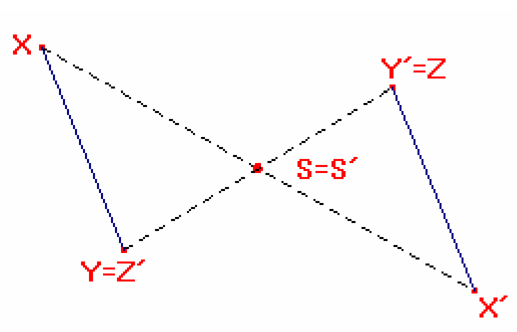
To znamená, že obrazom bodu A v súmernosti podľa roviny $\overleftrightarrow{CSD}$ je bod B a obrazom bodu B je bod A. Obrazom pravidelného štvorstena $ABCD$ je štvorsten $BACD$. To znamená, že rovina $\overleftrightarrow{CSD}$ je rovinou súmernosti daného štvorstena.

Koľko má teda rovín súmernosti pravidelný štvorsten? Podobným spôsobom vieme ukázať, že je ich šesť.

6.1.2 SÚMERNOSŤ PODĽA BODU V PRIESTORE

Ďalším zhodným zobrazením v priestore je súmernosť podľa bodu S, ktoré tiež nazývame stredovou súmernosťou podľa bodu S.

Daný je bod S. Súmernosťou podľa bodu S v priestore rozumieme zobrazenie, ktoré každému bodu X priradí bod X′ taký, že body X, X′, S ležia na priamke a zároveň bod S je stredom úsečky XX′.



Obr. 6.1.2.1

Bod S nazývame stred súmernosti a zároveň je to jediný *samodružný bod* zobrazenia (obr. 6.1.2.1). Priamky (roviny) prechádzajúce bodom S sú *samodružnými priamkami (rovinami)* stredovej súmernosti. Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti alebo dvojicou rôznych bodov X, X'

(vzor – obraz) v tejto súmernosti.

Okrem vlastnosti, ktoré sme uviedli pri definovaní si zhodných zobrazení v priestore, je potrebné si pri stredovej súmernosti v priestore všimnúť, že obrazom každej úsečky XY je úsečka $X'Y'$ rovnobežná a rovnako dlhá ako úsečka XY, ale úsečky XY a $X'Y'$ majú opačnú orientáciu (obr. 6.1.2.1). Z toho teda vyplýva, že stredová súmernosť v priestore mení orientáciu.

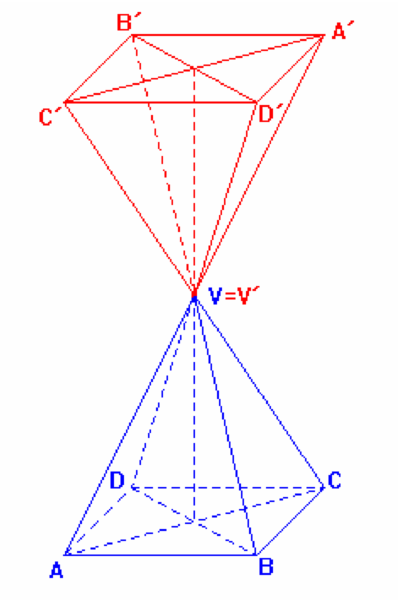
Bod S sa nazýva stredom súmernosti ľubovoľného útvaru U, ak sa daný útvar U zobrazí sám do seba v súmernosti podľa bodu S.

Poznámka. Ak má útvar U aspoň jeden stred súmernosti, tak hovoríme, že je útvar U stredovo súmerný.

Príklad 6.1.2.1

Vo voľnom rovnobežnom premietaní zostrojte obraz pravidelného štvorbokého ihlana ABCDV v súmernosti podľa bodu V.

Riešenie.



Obr. 6.1.2.2

Na zostrojenie obrazu pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ v stredovej súmernosti podľa bodu V (je jeden z vrcholov ihlana) využijeme významné body ihlana $ABCDV$, a tie zobrazíme v danej stredovej súmernosti.

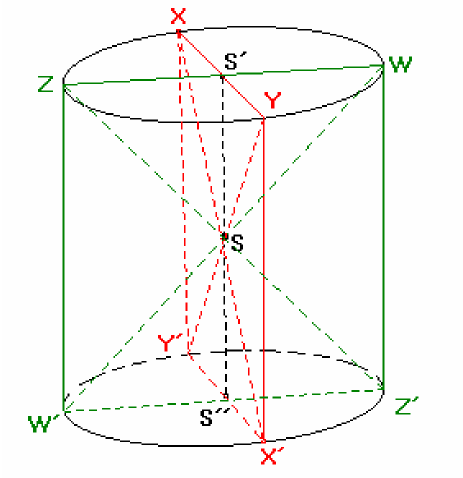
Na obr. 6.1.2.2 je zostrojení obraz pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ vo voľnom rovnobežnom premietaní, pričom v stredovej súmernosti podľa bodu V sú zobrazené jednotlivé vrcholy ihlana. Vrchol $V = V'$ je samodružným bodom zobrazenia.

Príklad 6.1.2.2

Nájdite stred súmernosti rotačného valca.

Riešenie.

Rotačný valec má jediný stred súmernosti, a to bod S, ktorý je stredom úsečky $S'S''$ určenej stredmi podstáv.



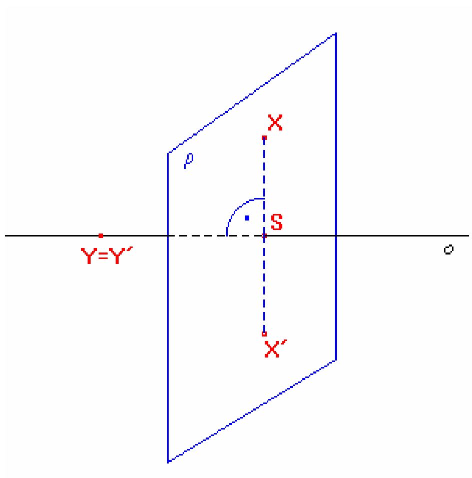
Obr. 6.1.2.3

Všetky rezové roviny valca, ktoré obsahujú úsečku $S'S''$, sú rovnobežníkmi. Napr. v rovnobežníku $XYX'Y'$ platí, že stred úsečky XX' je zároveň stredom úsečky YY', z čoho vyplýva, že body X, Y sa postupne zobrazia v stredovej súmernosti podľa bodu S do bodov X', Y'. Daná vlastnosť platí aj pre ostatné body rovnobežníka $XYX'Y'$ (obr. 6.1.2.3). Podobne môžeme ukázať, že bod S je stred súmernosti napr. rezovej roviny ZWZ' daného valca, a preto je aj jeho stredom súmernosti.

6.1.3 SÚMERNOSŤ PODĽA PRIAMKY V PRIESTORE

Súmernosť podľa priamky v priestore alebo tiež osová súmernosť v priestore je ďalším zhodným zobrazením v priestore, ktoré si uvedieme.

Daná je priamka o. Osovou súmernosťou podľa priamky o v priestore rozumieme zobrazenie, ktoré každému bodu X priradí taký bod X′, že úsečka XX′ je kolmá na priamku o a zároveň stred úsečky XX′ patrí priamke o.



Obr. 6.1.3.1

Priamka o sa nazýva os súmernosti, ktorá je zároveň aj *samodružnou priamkou* daného zhodného zobrazenia. Je teda zrejmé, že každý bod priamky o je *samodružným bodom* (obr. 6.1.3.1).

Osová súmernosť má aj iné *samodružné priamky*. Sú to priamky kolmé na os súmernosti o.

Samodružnými rovinami sú roviny kolmé na os súmernosti o.

Pre osovú súmernosť v priestore platia vlastnosti zhodného zobrazenia v priestore (str. 76). Osová súmernosť v priestore je jednoznačne určená osou súmernosti o.

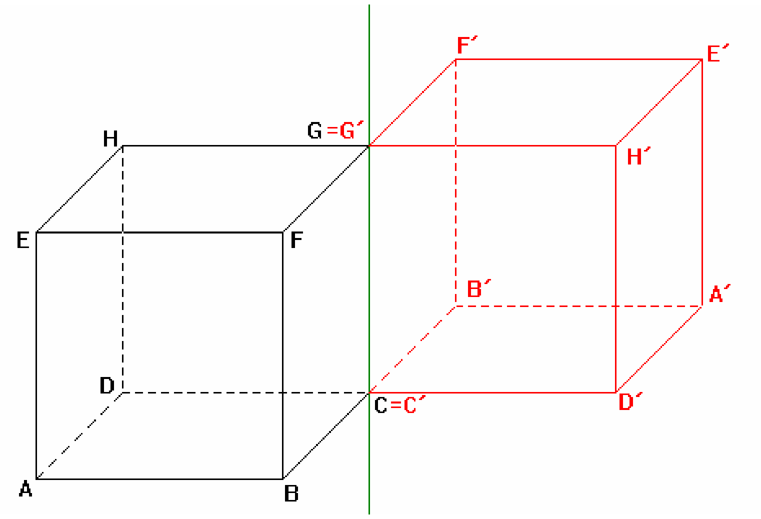
Priamka *o* sa nazýva os súmernosti ľubovoľného útvaru *U*, ak sa daný útvar *U* zobrazí sám do seba v osovej súmernosti podľa danej priamky *o*.

Poznámka. Ak má útvar U aspoň jednu os súmernosti, tak hovoríme, že útvar U je osovo súmerný.

Príklad 6.1.3.1

Zostrojte obraz kocky ABCDEFGH vo voľnom rovnobežnom premietaní v súmernosti podľa priamky $\overleftrightarrow{CG}$.

Riešenie.



Obr. 6.1.3.2

Obrazom kocky *ABCDEFGH* v osovej súmernosti s osou $\overleftrightarrow{CG}$ je kocka $A'B'C'D'E'F'G'H'$ (obr. 6.1.3.2).

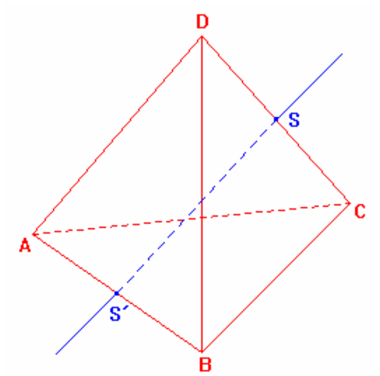
Keďže priamka $\overleftrightarrow{CG}$ je samodružnou priamkou daného zobrazenia, tak platí $C = C'$ a $G = G'$. Obrazy zvyšných vrcholov kocky zostrojíme postupne podľa vlastností osovej súmernosti v priestore. Keďže roviny kocky $\overleftrightarrow{ABD}$ a $\overleftrightarrow{EFH}$ sú kolmé na os súmernosti $\overleftrightarrow{CG}$, tak sú zároveň samodružnými rovinami, čo môžeme využiť aj pri samotnej konštrukcii obrazov jednotlivých vrcholov kocky *ABCDEFGH*.

Príklad 6.1.3.2

Nájdite všetky priamky, podľa ktorých je súmerný pravidelný štvorsten ABCD.

Riešenie.

Pravidelný štvorsten ABCD je súmerný podľa priamok prechádzajúcich stredmi protiľahlých hrán.



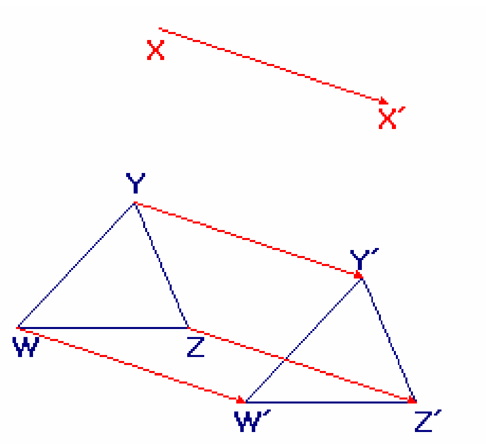
Obr. 6.1.3.3

Napríklad priamka $\overleftrightarrow{SS'}$ (S je stred hrany DC a S' je stred hrany AB) je osou súmernosti daného štvorstena a priamka $\overleftrightarrow{SS'}$ leží v rovine súmernosti štvorstena (viď príklad 6.1.1.2).

6.1.4 POSUNUTIE V PRIESTORE

Daná je orientovaná úsečka XX'. Každému bodu Y priestoru priradíme bod Y' priestoru tak, aby $|YY'|=|XX'|$ a úsečka YY' bola súhlasne orientovaná s úsečkou XX'. Potom zobrazenie $Y \to Y'$ nazývame posunutím (transláciou) v priestore.

Poznámka. Bod X sa nazýva vzor a bod X' sa nazýva obraz.



Obr. 6.1.4.1

Daný je trojuholník YZW v priestore a orientovaná úsečka XX´. Na obr. 6.1.4.1 je zobrazený tento trojuholník v posunutí v smere orientovanej úsečky XX'.

Dĺžka orientovanej úsečky $|XX'|$ sa nazýva *dĺžka posunutia* a smer úsečky XX' sa nazýva *smer posunutia*.

Posunutie v priestore nemá žiadne *samodružné body*.

Priamky (roviny) v priestore rovnobežné so smerom posunutia sú samodružnými priamkami (rovinami) v danom posunutí.

Pre posunutie v priestore platia uvedené vlastnosti zhodného zobrazenia v priestore.

Posunutie v priestore je jednoznačne určené:

a) danou orientovanou úsečkou (*smer posunutia*, *dĺžka posunutia*)

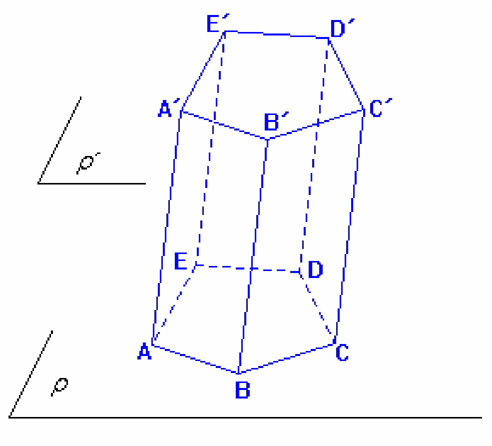
b) dvojicou rôznych bodov X, X' (vzor – obraz)

Príklad 6.1.4.1

Zostrojte 5-boký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ s využitím posunutia v priestore.

Riešenie.

Nech je daný konvexný 5–uholník $ABCDE$, ktorý leží v rovine ρ a bod A', ktorý neleží v rovine ρ. Existuje práve jedno posunutie, pri ktorom sa bod A zobrazí do bodu A' (vysvetlite). Pri tom posunutí sa rovina ρ zobrazí do roviny ρ', ktorá je s rovinou ρ rovnobežná, 5–uholník $ABCDE$ sa zobrazí do 5–uholníka $A'B'C'D'E'$ ležiaceho v rovine ρ' (obr. 6.1.4.2).



Obr. 6.1.4.2

Ak ľubovoľný bod X patrí 5–uholníku $ABCDE$, potom bod X′ patrí 5–uholníku $A'B'C'D'E'$ a potom všetky body úsečky XX' vytvoria teleso, ktoré sa nazýva *hranol*.

Ak bod X patrí len obvodu 5–uholníka $ABCDE$, úsečky XX' tvoria *plášť hranola*, ktorý sa skladá z piatich rovnobežníkov – *bočné steny hranola*.

5–uholníky $ABCDE$ a $A'B'C'D'E'$ sú podstavy daného hranola. Úsečky AA', BB', CC', DD', EE' a strany 5–uholníkov $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ sa nazývajú hrany hranola. V našom prípade hovoríme o 5–bokom hranole.

Rôzne prípady môžu nastať vtedy, ak smer posunutia je kolmý na rovinu mnohouholníka, vtedy hovoríme o *kolmom hranole*, inak o *kosom hranole*. Kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravidelné mnohouholníky, sa nazýva *pravidelný hranol*. Hranol, ktorého podstavy sú rovnobežníky, sa nazýva rovnobežnosten (napr. kocka, kváder, ...).

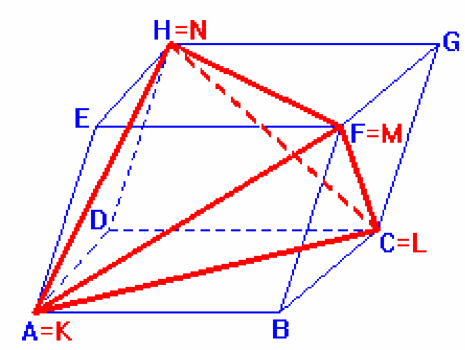
Poznámka. Podľa hodnoty n $(n \geq 3)$ rozlišujeme hranol 3-boký, 4-boký atď. Podobne vieme popísať vlastnosti ľubovoľného n-bokého hranola.

Príklad 6.1.4.2

Daný je rovnobežnosten ABCDEFGH. Zostrojte štvorsten KLMN tak, aby každá jeho hrana bola uhlopriečkou niektorej steny rovnobežnostena ABCDEFGH.

Riešenie.

Zvoľme jeden vrchol štvorstena $K=A$. Z vrcholu A rovnobežnostena vychádzajú tri stenové



Obr. 6.1.4.3

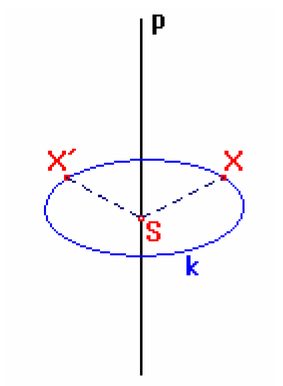
uhlopriečky AC, AF a AH. Zo spomenutej vlastnosti teda vyplýva, že môžeme napríklad zvoliť $L=C$, $M=F$ a $N=H$ (obr. 6.1.4.3).

Každé dve protiľahlé hrany štvorstena sú uhlopriečkami dvoch rovnobežných stien rovnobežnostena (nie sú však rovnobežné).

Keby sme si zvolili bod K v bode B, dostali by sme tiež štvorsten s danými vlastnosťami (pokúste sa ho načrtnúť). Vyplýva teda, že vieme zostrojiť práve dva požadované štvorsteny (odhliadnuc od označenia). Ide o tzv. štvorsteny vpísané rovnobežnostenu; potom hovoríme, že rovnobežnosten je opísaný štvorstenu.

6.1.5 OTOČENIE OKOLO PRIAMKY

Daná je priamka p a orientovaný uhol φ. Ľubovoľnému bodu X priestoru (vzor), ktorý nepatrí priamke p, priradíme bod X′ v priestore (obraz) otočením okolo priamky p o uhol φ tak, že bod X′ leží na kružnici prechádzajúcej bodom X, ktorá leží v rovine kolmej na priamku p a stred S kružnici patrí priamke p. Orientovaný uhol XSX′ je zhodný s uhlom φ.



Obr. 6.1.5.1

Definícia je prezentovaná na obr. 6.1.5.1. Priamka p je *osou otočenia* a uhol φ sa nazýva *uhol otočenia*.

Obraz bodu X pri rôznych uhloch otočenia okolo priamky p vyplnia celú kružnicu k.

Poznámka. Otočením okolo osi p o uhol otočenia φ v priestore je v každej rovine ρ, ktorá je kolmá na priamku p, určené otočenie so stredom $S = p \cap \rho$ v rovine (s tým istým uhlom otočenia φ). Načrtnite.

Pre otáčanie okolo priamky v priestore platia vlastnosti pre zhodné zobrazenia spomenuté v úvode tejto kapitoly.

Otočenie okolo priamky je jednoznačné určené:

a) osou otočenia p a veľkosťou orientovaného uhla φ

b) osou p a dvojicou rôznych bodov X, X' (vzor-obraz), pričom $|X'p| = |Xp|$ a body X, X' ležia v jednej rovine kolmej na os otočenia p (päty kolmíc zostrojených z bodov X, X' sa pretínajú na osi p)

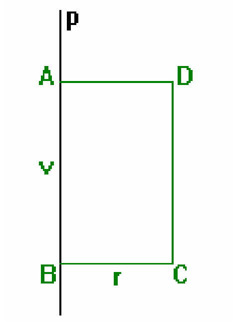
Poznámka. O telese T v priestore hovoríme, že priamka p je jeho osou rotácie a teleso T je rotačným telesom, ak sa zobrazí samo do seba pri každom otočení okolo priamky p.

Príklad 6.1.5.1

Popíšte konštrukciu rotačného valca, gule a anuloidu pomocou otočenia okolo priamky.

Riešenie.

Majme rotačné teleso T s osou rotácie p. Zvoľme si ľubovoľnú polrovinu τ s hraničnou priamkou p a označme U prienik telesa T a polroviny τ. Každý bod telesa T dostaneme ako obraz niektorého bodu množiny U pri niektorom otočení okolo priamky p.

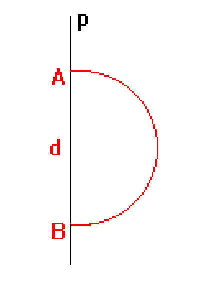


Obr. 6.1.5.2

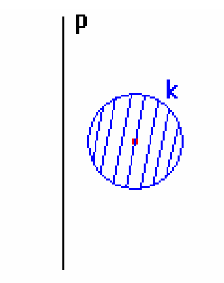
Ak za množinu U si zvolíme pravouholník $ABCD$ (obr. 6.1.5.2), pričom jeho dva vrcholy A, B patria priamke p, dostaneme *rotačný valec*. Rotačný valec má výšku $v = |AB|$ a polomer podstavy $r = |BC|$.

Ak množina U je polkruh nad priemerom AB (obr. 6.1.5.3), kde body A, B ležia opäť na priamke p, telesom T je *guľa* s priemerom $d = |AB|$.

Hranicou gule je *guľová plocha* alebo *sféra*.



Obr. 6.1.5.3



Obr. 6.1.5.4

Ak množina U je kruh, ktorý nemá nijaký spoločný bod s priamkou p (obr. 6.1.5.4). Dostaneme teleso T, ktoré sa nazýva *anuloid* alebo aj *torus*.

6.1. Cvičenie

1. *Nájdite všetky roviny súmernosti a) dvoch rôznobežných priamok,*

   b) dvoch mimobežných priamok.

2. *Koľko rovín súmernosti má a) rotačný valec,*

   b) rotačný kužeľ?

3. *Daný je pravidelný štvorboký ihlan ABCDV. Nájdite všetky roviny, podľa ktorých je tento ihlan súmerný.*
4. *Poskladajte z desiatich jednotkových kociek čo najviac stavieb rovinovo súmerných.*
5. *Dokážte, že kváder ABCDEFGH má jediný stred súmernosti.*
6. *Nájdite stred súmernosti pravidelného n – bokého hranola.*
7. *Koľko stredov súmernosti má a) guľa, b) rotačný kužeľ?*
8. *Môže byť súmernosť podľa osi v priestore určená jednoznačne aj dvojicou rôznych bodov X, X′ ?*
9. *Na povrchu kocky ABCDEFGH nájdite body rovnako vzdialené od bodov A, B, G.*
10. *Daný je pravidelný štvorboký ihlan ABCDV. Je daný ihlan osovo súmerný? Ak áno, nájdite všetky osi súmernosti.*
11. *Určte všetky priamky, podľa ktorých je kocka súmerná.*
12. *Koľko stredov, osí a rovín súmernosti má pravidelný štvorboký hranol?*
13. *Je daný štvorsten ABCD, kde trojuholník ABC je rovnostranný a bod E tak, že AD ≅ AE, BD ≅ BE, CD ≅ CE. Dokážte, že rovina ABC je rovinou súmernosti úsečky DE.*
14. *Vyslovte definíciu rotačného kužeľa pomocou otočenia okolo priamky.*
15. *Nájdite obraz kocky ABCDEFGH v otočení okolo osi* $p = \overleftrightarrow{AE}$ *, ktoré otočí bod B do bodu D.*

6.2 PODOBNÉ ZOBRAZENIA V PRIESTORE

Podobné zobrazenie v priestore je zobrazenie v priestore, pre ktoré existuje také kladné číslo k, že platí pre ľubovoľné dva body X, Y z priestoru vlastnosť $|X'Y'|=k.|XY|$. Číslo k sa nazýva koeficient podobnosti.

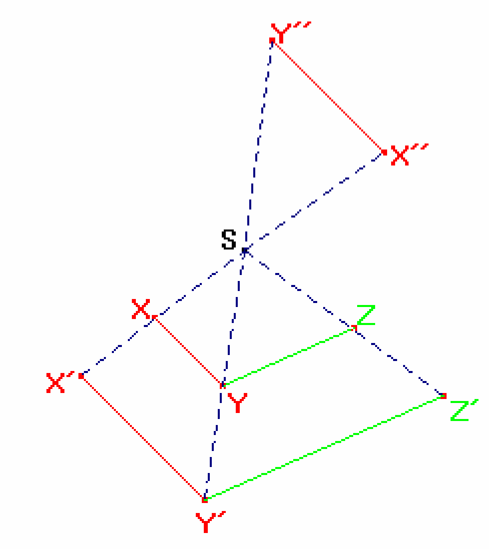
Aj vlastnosti podobného zobrazenia v priestore môžeme rovnako definovať ako vlastnosti podobného zobrazenia v rovine. Sformulujte ich. Taktiež definujte, kedy sú dva geometrické útvary podobné.

Poznámka. Každá zhodnosť je podobnosť s koeficientom podobnosti k=1.

V nasledujúcej časti sa budeme venovať jednému konkrétnemu podobnému zobrazeniu v priestore, a to rovnoľahlosti.

6.2.1 ROVNOĽAHLOSŤ V PRIESTORE

Daný je bod S v priestore a nenulové číslo λ. Každému bodu X v priestore priradíme bod X′ taký, že platí $|SX'|=|\lambda|.|SX|$ a pre bod X≠S sú polpriamky SX, SX′ totožné, keď λ je kladné a polpriamky SX, SX′ sú opačné, keď λ je záporné číslo. Takto definované zobrazenie priestoru na seba sa nazýva rovnoľahlosť.



Obr. 6.2.1.1

Bod S je stred rovnoľahlosti, číslo λ sa nazýva koeficient rovnoľahlosti.

Rovnoľahlosť má jediný *samodružný bod* – stred rovnoľahlosti S. Priamky prechádzajúce stredom rovnoľahlosti S sú *samodružnými priamkami* zobrazenia.

Pre ľubovoľné dva body X, Y priestoru platí: $X'Y' \parallel XY$ a $|X'Y'|=|\lambda|.|XY|$

Čím je rovnoľahlosť jednoznačne určená?

a) stredom S a koeficientom λ $(\lambda \neq 0)$

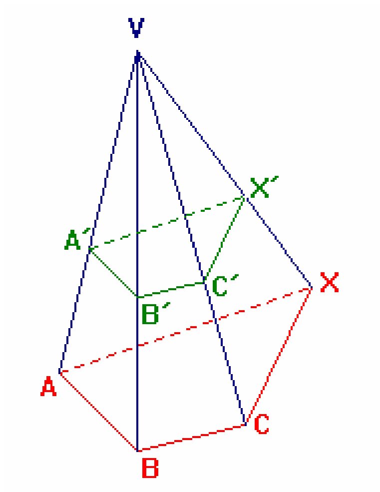
b) trojicou rôznych bodov S, X, X' ležiacich na jednej priamke, pričom bod X' je obraz bodu X

Poznámka. Každá rovnoľahlosť s koeficientom rovnoľahlosti λ je podobným zobrazením s koeficientom podobnosti $|k|$.

Príklad 6.2.1.1

Daný je ihlan s hlavným vrcholom V a postavou ABC... ležiaci v rovine ρ. Zvoľte si číslo k>0 a hľadajte obraz daného ihlana v rovnoľahlosti so stredom V a koeficientom k.

Riešenie.



Obr. 6.2.1.2

Obrazy bodov *A, B, C, ...* sú body A',B', C'... . Potom pre tieto body platí $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, ... a bod V je samodružný bod. Obraz ihlana $ABC \dots V$ je ihlan $A'B'C' \dots V$ (obr. 6.2.1.2).

Ak $k > 1$, je pôvodný ihlan súčasťou svojho obrazu.

Ak $0 < k < 1$, tak obsahuje pôvodne daný ihlan svoj obraz.

V obidvoch prípadoch sa teleso ohraničené dvoma rovnoľahlými mnohouholníkmi ABC ..., $A'B'C'$... a lichobežníkmi, ktoré tvoria bočné steny telesa, nazýva *zrezaný ihlan*. Spomenuté lichobežníky tvoria *plášť zrezaného ihlana* a mnohouholníky ABC ..., $A'B'C'$... sú *podstavami zrezaného ihlana*.

Ak $k < 0$ má pôvodný ihlan a jeho obraz spoločný len bod V.

Zrezaný ihlan dostaneme aj taktiež z ihlana s hlavným vrcholom V tak, že rozdelíme tento ihlan rovinou rovnobežnou s podstavou pôvodného ihlana. Treba si však uvedomiť, že zrezanému ihlanu patrí aj časť ležiaca v rovnobežnej rovine.

Poznámka. Zrezaný ihlan, ktorý dostaneme z pravidelného ihlana, nazývame pravidelný zrezaný ihlan.

6.2. Cvičenie

1. *V podobnosti s pomerom podobnosti k sú body A', B', C', D' obrazmi bodov A, B, C, D neležiacich v jednej rovine. Určte pomer: a) obsahov trojuholníkov $A'B'C'$ a ABC, b) objemov štvorstenov $A'B'C'D'$ a ABCD.*

2. *Definujte, kedy môžeme nazvať útvary U a U´ rovnoľahlými.*

3. *Definujte zrezaný kužeľ pomocou rovnoľahlosti v priestore.*

6.3 SKLADANIE ZOBRAZENÍ

Zložením *dvoch stredových súmerností*, ktoré majú rôzne stredy súmernosti, vznikne *posunutie*.

Zložením *dvoch rovinových súmerností***,** ktoré majú rôzne roviny súmernosti, v priestore môže vzniknúť:

a) *posunutie* v priestore, pričom roviny súmerností sú rovnobežné,

b) *otočenie okolo priamky*, pričom roviny súmerností sú rôznobežné,

c) *osová súmernosť v priestore*, pričom roviny súmerností sú rôznobežné a kolmé.

Zložením troch rovinových súmerností dostaneme stredovú súmernosť v priestore, ak roviny sú po dvoch navzájom kolmé.

V priestore platí, že každé zhodné zobrazenie sa dá zložiť z jedného, dvoch, troch alebo štyroch rovinových súmerností.

Poznámka. Pripomenieme, že v rovine sa každé zhodné zobrazenie dá zložiť z jednej, dvoch alebo troch osových súmerností.

Čitateľovi odporúčame, aby si spomenuté jednotlivé skladania zobrazení precvičil samostatne na konkrétnych príkladoch.

7 GEOMETRICKÉ MIESTA BODOV V PRIESTORE

Analogicky ako o geometrických miestach bodov v rovine môžeme uvažovať o geometrických miestach bodov v priestore. Sú náročnejšie na predstavivosť a pri ich vyšetrovaní sa musia dodržať isté povinné kroky

1. každý bod P, ktorý má danú vlastnosť **V**, musí patriť útvaru U (o útvare U dokazujeme, že je hľadaným miestom bodov)

$$\boxed{\text{bod } P \text{ má vlastnosť } V \Rightarrow \quad P \in U}$$

2. každý bod P útvaru U má vlastnosť **V**

$$\boxed{P \in U \Rightarrow \text{bod } P \text{ má vlastnosť } V}$$

Poznámka.

1. Nutnosť tohto postupu je odôvodniteľná, pretože skúmame rovnosť dvoch množín. Napr. v rovine ρ je daná úsečka AB s jej osou o_{AB}, na ktorej je vyznačená úsečka CD. Každý bod X úsečky CD je rovnako vzdialený od bodov A, B (splnená implikácia 2). Avšak, existuje nekonečne veľa bodov $Y \in o_{AB}$, ktoré nepatria úsečke CD a tiež majú tú vlastnosť, že sú rovnako vzdialené od bodov A, B (nesplnená implikácia 1).

2. V niektorej literatúre sa používa na miesto geometrické miesta bodov aj názov množina bodov danej vlastnosti.

7.1 NIEKTORÉ GEOMETRICKÉ MIESTA BODOV

V tejto podkapitole uvedieme len niekoľko vybraných geometrických miest bodov v priestore.

Geometrickým miestom bodov, ktoré majú od daného ***bodu*** *S danú vzdialenosť r, je guľová plocha so stredom S a polomerom r.*

Geometrickým miestom bodov, ktoré majú od danej ***priamky*** *p danú vzdialenosť r, je rotačná valcová plocha s polomerom r, pričom osou tejto plochy je priamka p.*

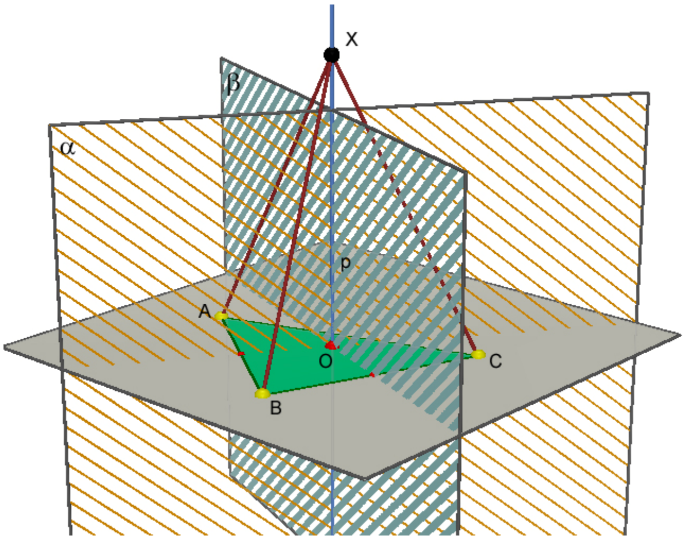
Geometrickým miestom bodov, ktoré majú od danej ***roviny*** *α danú vzdialenosť r, sú dve roviny rovnobežné s rovinou α vo vzdialenosti r.*

Geometrickým miestom bodov rovnako vzdialených od dvoch daných bodov A,B je rovina súmernosti týchto bodov.

Príklad 7.1.1

Určte geometrické miesto bodov v priestore, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od troch daných nekolineárnych bodov A, B, C.

Riešenie. V rovine $\overleftrightarrow{ABC}$ bod O, ktorý je stredom opísanej kružnice k trojuholníku ABC, je jedným z bodov rovnako vzdialených od bodov A, B, C.



Obr. 7.1.1

Geometrickým miestom bodov rovnako vzdialených od dvoch daných bodov A, B je rovina α prechádzajúca stredom úsečky AB a kolmo na úsečku AB. Z analogických dôvodov geometrickým miestom bodov rovnako vzdialených od bodov B, C je rovina β, prechádzajúca stredom úsečky BC a kolmo na úsečku BC. Vzhľadom k tomu, že body A, B, C neležia na jednej priamke, body spoločnej priesečnice p rovín α, β majú rovnakú vzdialenosť od všetkých troch bodov A, B, C. Keďže priamka $\overleftrightarrow{AB}$ je kolmá na rovinu α, musí byť kolmá na každú priamku tejto roviny, preto $\overleftrightarrow{AB} \perp p$; z analogických dôvodov platí $\overleftrightarrow{BC} \perp p$. Podľa kritéria kolmosti priamky a roviny (priamka p je kolmá na dve rôznobežky $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$), priamka p je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ a musí obsahovať aj bod O.

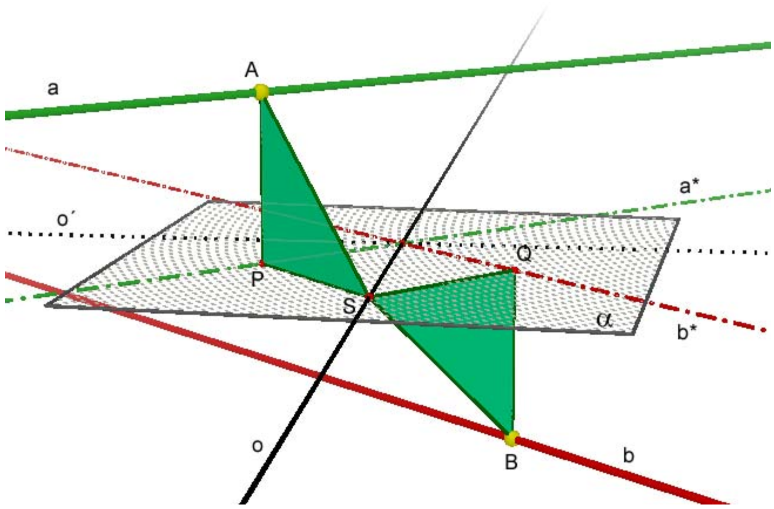
Opačne. Ak bod X je ľubovoľným bodom priamky p prechádzajúcej bodom O, platí podľa obrátenej Pytagorovej vety $|AX| = |BX| = |CX|$, pretože $|AO| = |BO| = |CO|$.

Tým sme dokázali, že geometrickým miestom bodov v priestore, ktoré sú rovnako vzdialené od troch daných nekolineárnych bodov A, B, C, je priamka kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$, prechádzajúca stredom opísanej kružnice trojuholníku ABC.

Príklad 7.1.2

Je daná rovina α a dve navzájom mimobežné priamky a, b, obe v rovnakej vzdialenosti r od roviny α. Určte geometrické miesto stredov guľových plôch dotýkajúcich sa daných priamok a, b.

Riešenie. V prvom rade si uvedomíme, že priamky *a, b* musia ležať v opačných polpriestoroch určených rovinou α (inak by boli rôznobežky).



Obr. 7.1.2

Nech S je stred takej guľovej plochy, ktorá vyhovuje požiadavkám úlohy a dotýka sa priamky *a* v bode *A;* priamky *b* v bode *B*, pričom $\overleftrightarrow{SA} \perp a$ a $\overleftrightarrow{SB} \perp b$ (vyplýva to z vlastnosti dotyčnice) a platí $|SA| = |SB|$. Nech a', b' sú pravouhlé priemety priamok *a, b* do roviny α a označme P, Q päty kolmíc zostrojených z bodov *A, B* na priamky a', b'. Podľa predpokladu platí $|a, a'| = |AP| = r = |BQ| = |b, b'|$. Trojuholníky SAP, SBQ sú pravouhlé s pravými uhlami pri vrcholoch *P, Q;* majú zhodné prepony $|SA| = |SB|$ a zhodujú sa aj v odvesnách *AP, BQ*, sú teda zhodné a platí $|SP| = |SQ|$. Bod *S* má rovnakú vzdialenosť od priamok a', b', leží teda na osi *o* týchto priamok.

Opačne. Ak na osi *o* priamok a', b' zvolíme bod S, z pravouhlých trojuholníkov SAP, SBQ ľahko dokážeme zostrojiť guľovú plochu požadovanej vlastnosti.

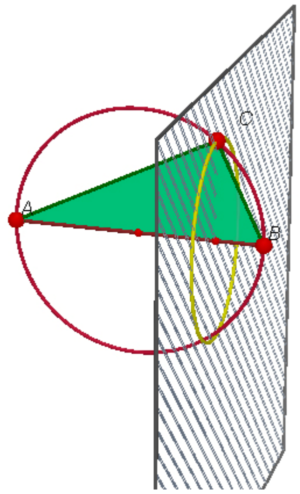
Geometrickým miestom bodov stredov hľadaných guľových plôch je os uhla kolmých priemetov daných priamok do danej roviny.

Treba si uvedomiť, že priamky a', b' určujú dva uhly a teda existujú dve osi uhla, vyhovujúce podmienkam úlohy. Dôkaz pre druhú os je prakticky identický.

Príklad 7.1.3

Dokážte, že množinou bodov v priestore, z ktorých vidno danú úsečku AB pod pravým uhlom, je guľová plocha s priemerom AB, s výnimkou bodov A, B.

Riešenie. Nech bod C je taký, že platí $|\angle ACB| = 90^\circ$. Tri nekolineárne body A, B, C určujú



Obr. 7.1.3

jednoznačne rovinu, v ktorej bod C leží na Tálesovej kružnici s priemerom AB. Pri rotácii tejto kružnice okolo priamky AB o uhol φ, $\left(0^\circ \le \varphi \le 360^\circ\right)$ vznikne guľová plocha (obr. 7.1.3).

Opačne. Ak bod C leží na guľovej ploche s priemerom AB, rezom rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$ vznikne kružnica so stredom v strede guľovej plochy. Priemerom kružnice je teda úsečka AB. Kružnica je potom Tálesovou kružnicou a triviálne platí $|\angle ACB| = 90^\circ$.

7.1 Cvičenie

1. *Ukážte, že geometrickým miestom bodov rovnako vzdialených od dvoch rovnobežných priamok, je ich rovina súmernosti.*
2. *Určte geometrické miesto bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch daných rovín. Vyšetrite všetky prípady vzájomnej polohy dvoch rovín.*
3. *Určte geometrické miesta stredov guľových plôch vpísaných do štvorstena.*
4. *Sú dané dve rovnobežné roviny α, β. Určte geometrické miesto bodov stredov úsečiek AB, ak bod A má ležať v rovine α, bod B v rovine β.*
5. *Sú dané dve mimobežky a, b. Určte geometrické miesto bodov stredov všetkých úsečiek AB, ak bod A má ležať na priamke a, bod B na priamke b.*
6. *Dokážte, že geometrickým miestom bodov, ktoré majú od daných dvoch navzájom rôznych bodov A, B daný pomer vzdialeností $\lambda \neq 1$, je guľová plocha s priemerom CD na priamke AB, pričom platí $|AC|:|BC| = |AD|:|BD| = \lambda$.*

LITERATÚRA

1. **BENDA, P. a kol.:** *Sbírka maturitných příkladů z matematiky*. SPN Praha, 1968, s. 188.
2. **BOČEK, L. , KADLEČEK, J.:** *Základy stereometrie*. SPN Bratislava, 1987, s. 112.
3. **BOŽEK, M.:** *Matematika pre 2. ročník gymnázia – Základy geometrie v priestore*. SPN Bratislava, 1990, s. 104. ISBN 80-08-00941-1.
4. **BURJAN, V., HRDINA, Ľ., MAXIAN, M.:** *Prehľad matematiky, 1. časť*. SPN Bratislava, 1997, s. 228. ISBN 80-08-00277-8.
5. **COLERUS, E.:** *Od bodu k čtvrtému rozměru*. Vydavateľstvo Družstevní práce, 1939, s. 417.
6. **COXETER, G. S. M.:** *Introduction to geometry* (ruský preklad). Nauka Moskva, 1966.s. 648
7. **COXETER, H. S. M., GREITZER, S. L.:** *Geometry revisited*. The mathematical association of America 7. vyd., Washington, 2001.s. 206. ISBN 0-88385-600-x.
8. **ČERMÁK, P., ČERVINKOVÁ, P.:** *Odmaturuj z matematiky*. Didaktis Brno, 2003, s. 208. ISBN 80-86285-97-9.
9. **FÜRST, T., MOLNÁR, J., POHANĚL, K.:** *Průvodce trojrozměrným prostorem*, *1. vydanie*. Univerzita Palackého v Olomouci, 2004.s. 198. ISBN 80-244-0817-1.
10. **GABOVIČ, I. G.:** *Teorema o trech sinusach* (rusky). Kvant 1989/9, s. 71-73. ISSN 0130-2221.
11. **GELLERT, W. und Gem.:** *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1974, s. 739.
12. **H´ADAMAR, G.:** *Elementárna geometria 1. časť - Planimetria*. Ruský preklad 11.-teho vydania Gosudatstvennoe učebno - pedagogičeskoe izdateľstvo Moskva, 1957, s. 607.
13. **KLENKOVÁ, P.:** *Stereometria – elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru*. Diplomová práca, KAGDM FMFI UK Bratislava, 2006, s. 120.
14. **KOVÁČIK, J. a kol.:** *Riešenie príkladov z matematiky*. IURA EDITION Bratislava, 2001, s. 704. ISBN 80-88715-95-4.
15. **KRIŽALKOVIČ, K., CUNINKA, A., ŠEDIVÝ, O.:** *500 riešených úloh z geometrie.* ALFA Bratislava, 1970, s. 550. ISBN 63-082-70.
16. **KUŘINA, F.:** *10 pohledů na geometrii*. Albra Praha, 1996, s. 282. ISBN 80-85823-21-7.
17. **MOLNÁR, J.:** *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*, *1. vydanie*. Univerzita Palackého v Olomouci, 2004. s. 105. ISBN 80-244-0927-5.

18. **PEDOE, D.:** *Geometry. A Comprehensive course*. Dover publications, INC, New York, 1988, s. 444. ISBN 0-486-65812-0.

19. **POLÁK, J.:** *Přehled středoškolské matematiky*. SPN Praha, 1972, s. 628.

20. **SVITEK, V.:** *Úvod do stereometrie*. Scriptum, SPN Bratislava, 1954, s. 313.

21. **ŠEDIVÝ, O.:** *Geometria II.*. Vysokoškolské učebné texty, Pedagogická fakulta Nitra, 1984, s. 232.

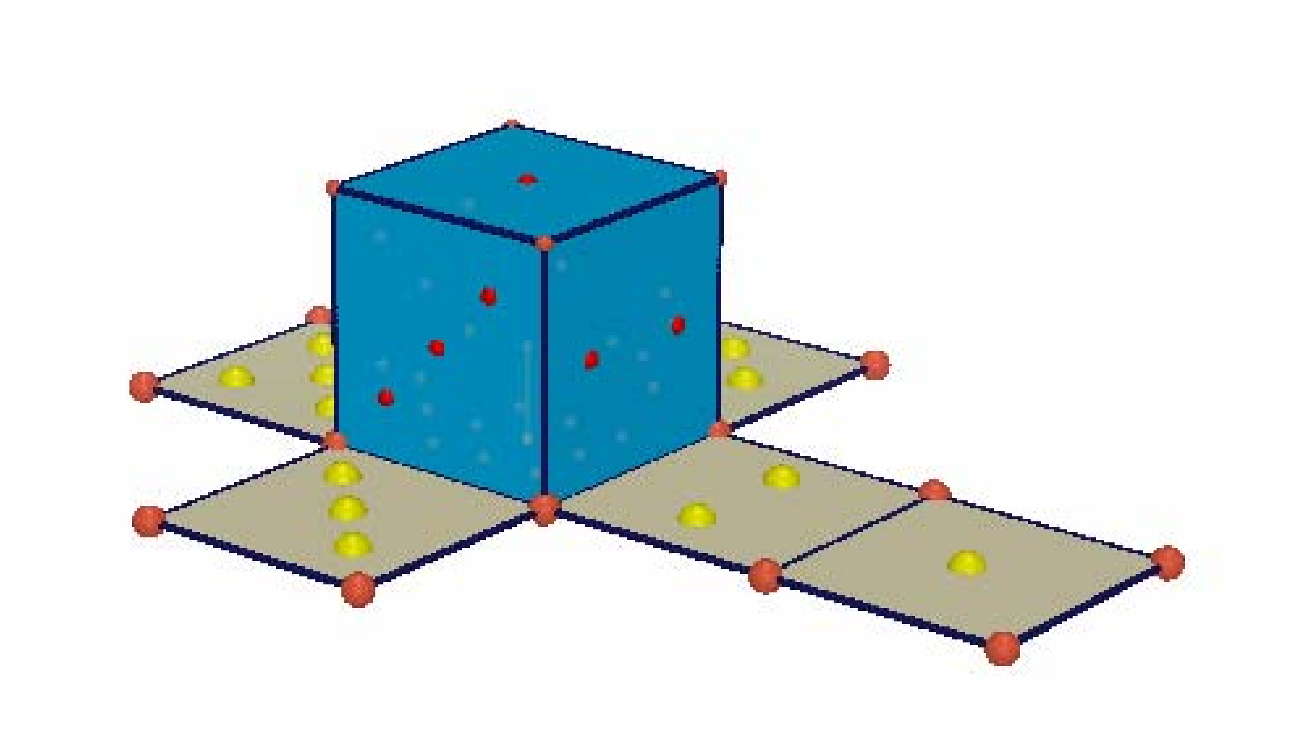
22. **ŠEDIVÝ, O., RUMANOVSKÁ, H.:** *Niekoľko metodických poznámok k rozvoju priestorovej predstavivosti*. In: Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre č. 4, Nitra: Pedagogická fakulta, 1988, s. 219 – 228.

23. **VEJSADA, F., TALAFOUS, F.:** *Zbierka úloh z matematiky pre stredné všeobecnovzdelávacie školy.* SPN Bratislava, 1972, s. 760.

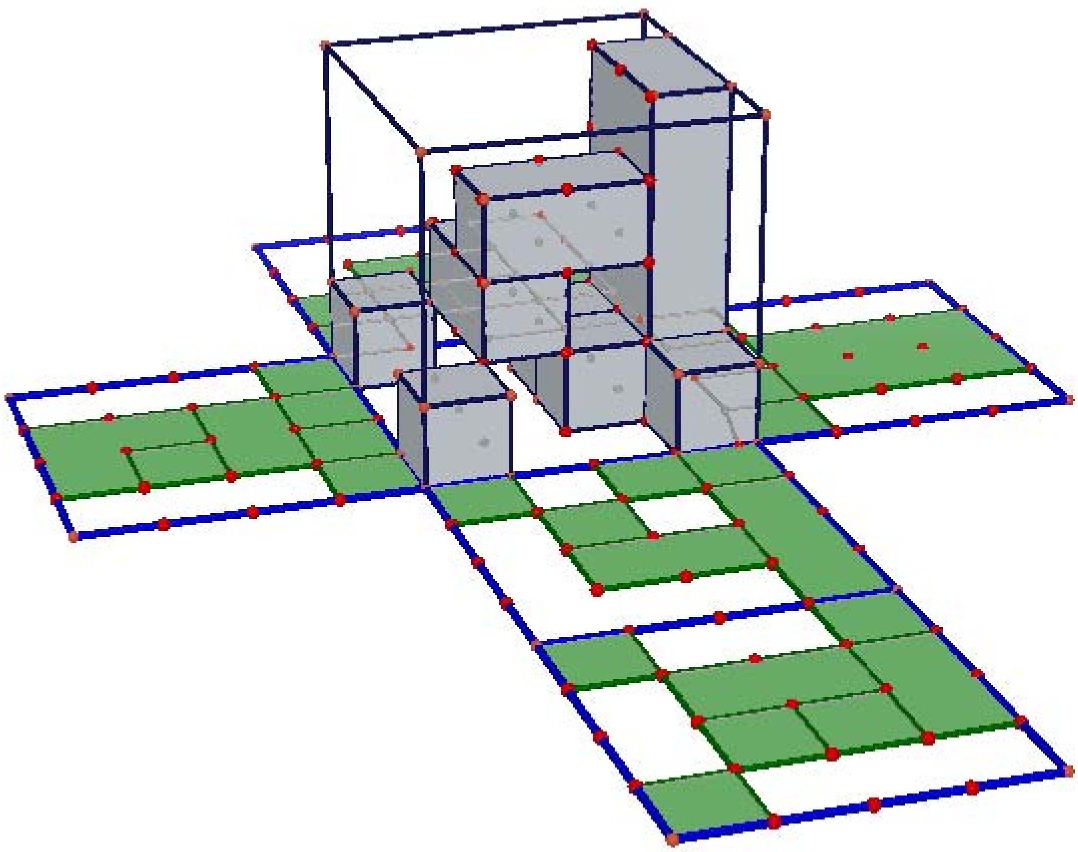
24. **VYŠÍN, J. a kol.:** *Geometrie pro pedagogické fakulty*, *I. díl.* SPN Praha, 1965, s. 383.

25. **VYŠÍN, J. a kol.:** *Geometria pre 9. – 11. postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl*. SPN Bratislava, 1955, s. 368.

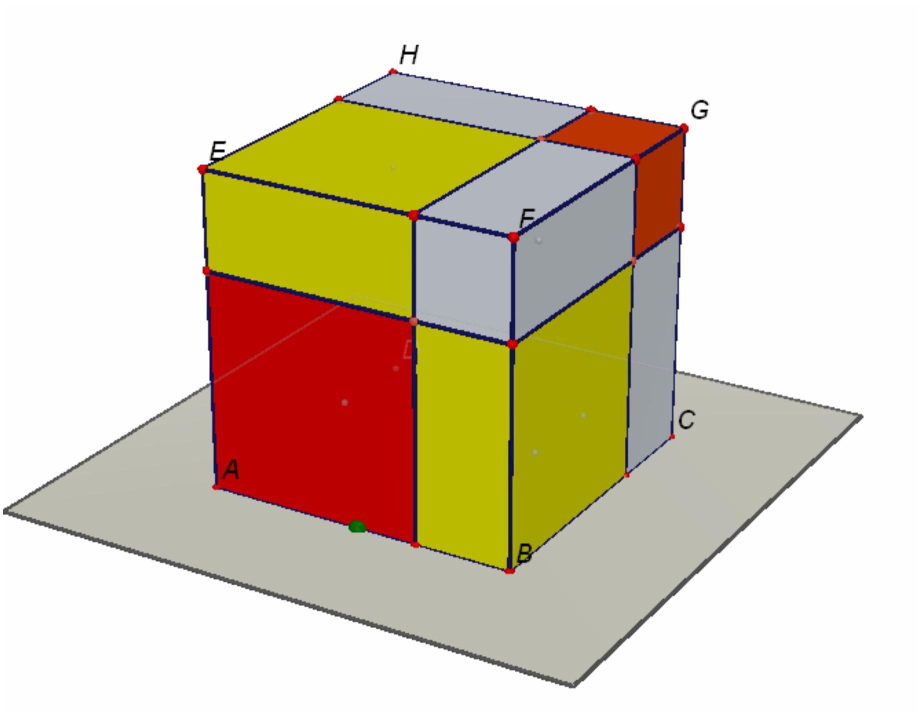
REGISTER



Hracia kocka a jej sieť.

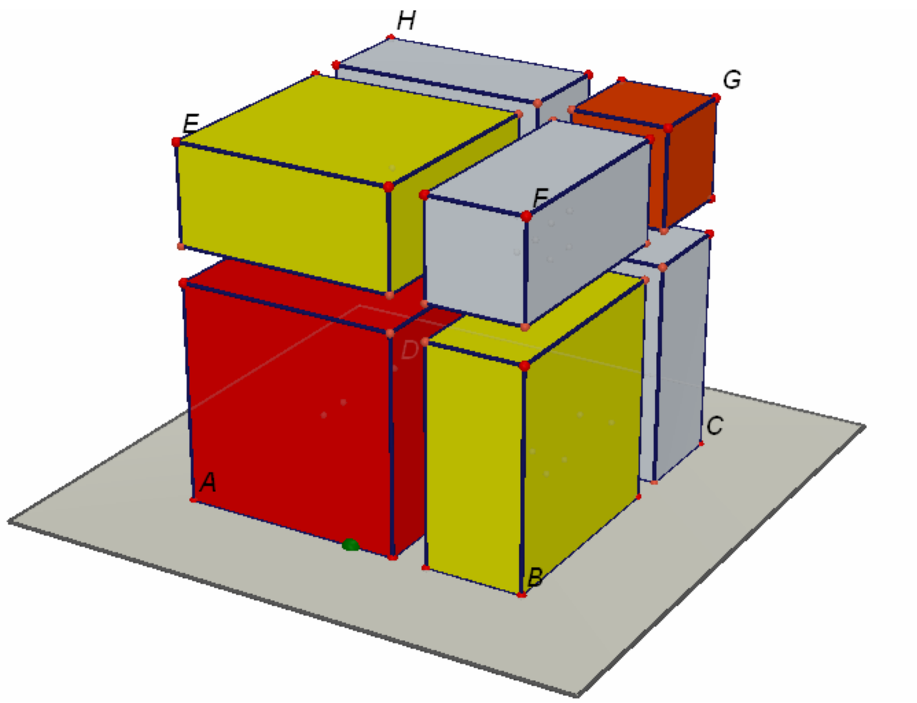


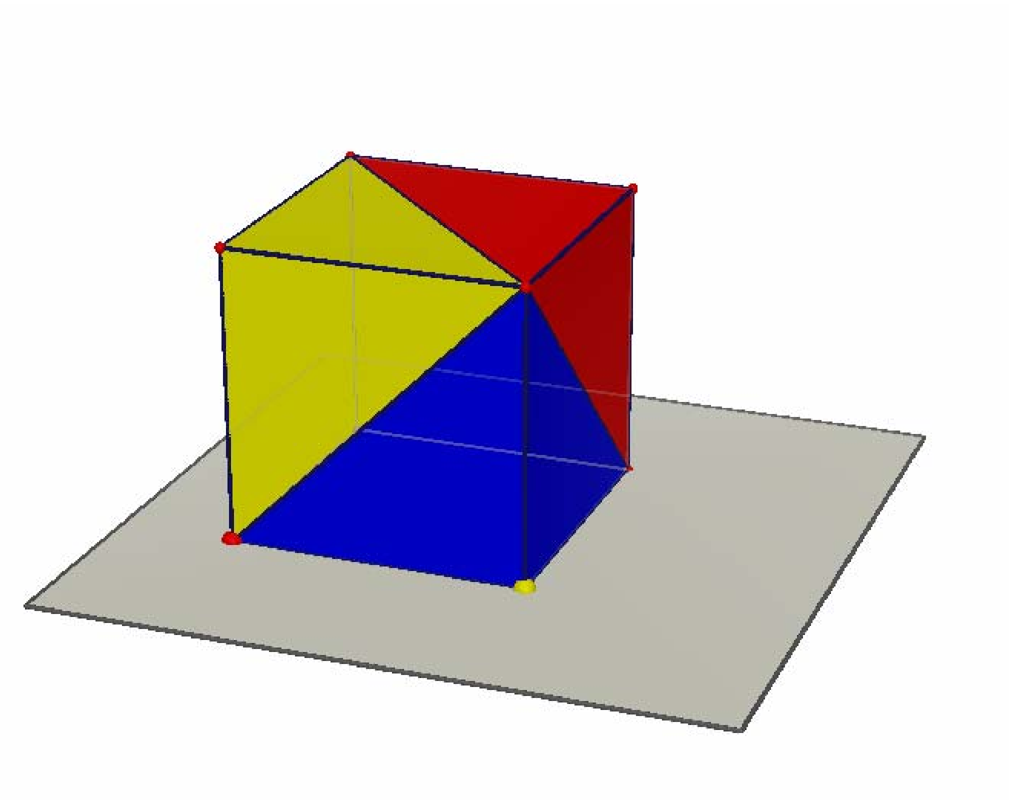
Kolmý priemet telesa do stien kocky a jeho následné zobrazenie v sieti kocky.



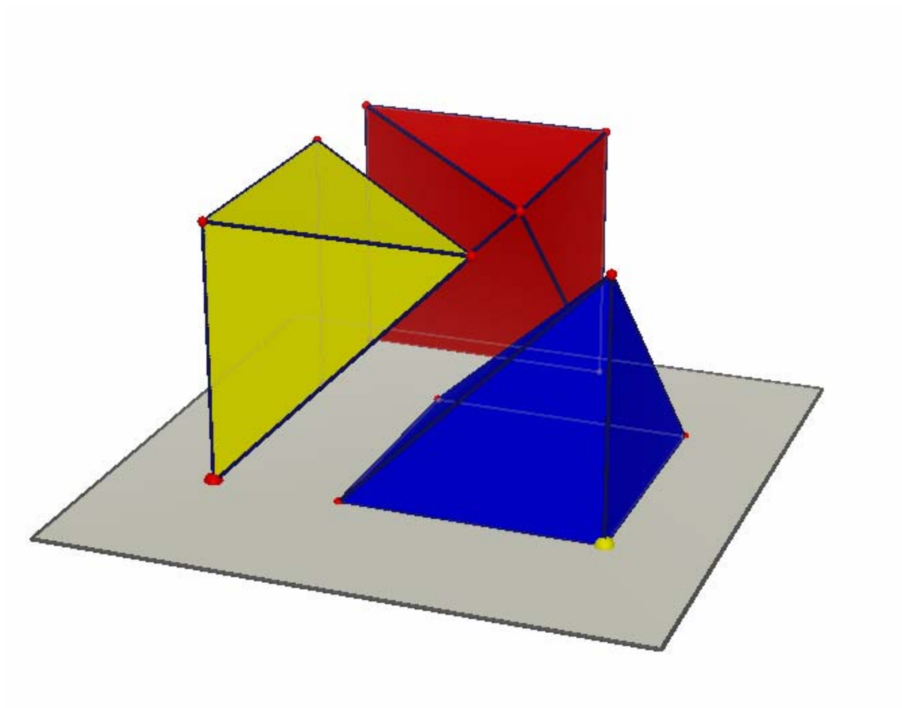
Kocka s hranou dĺžky $(a+b)$ a geometrická interpretácia vzorca

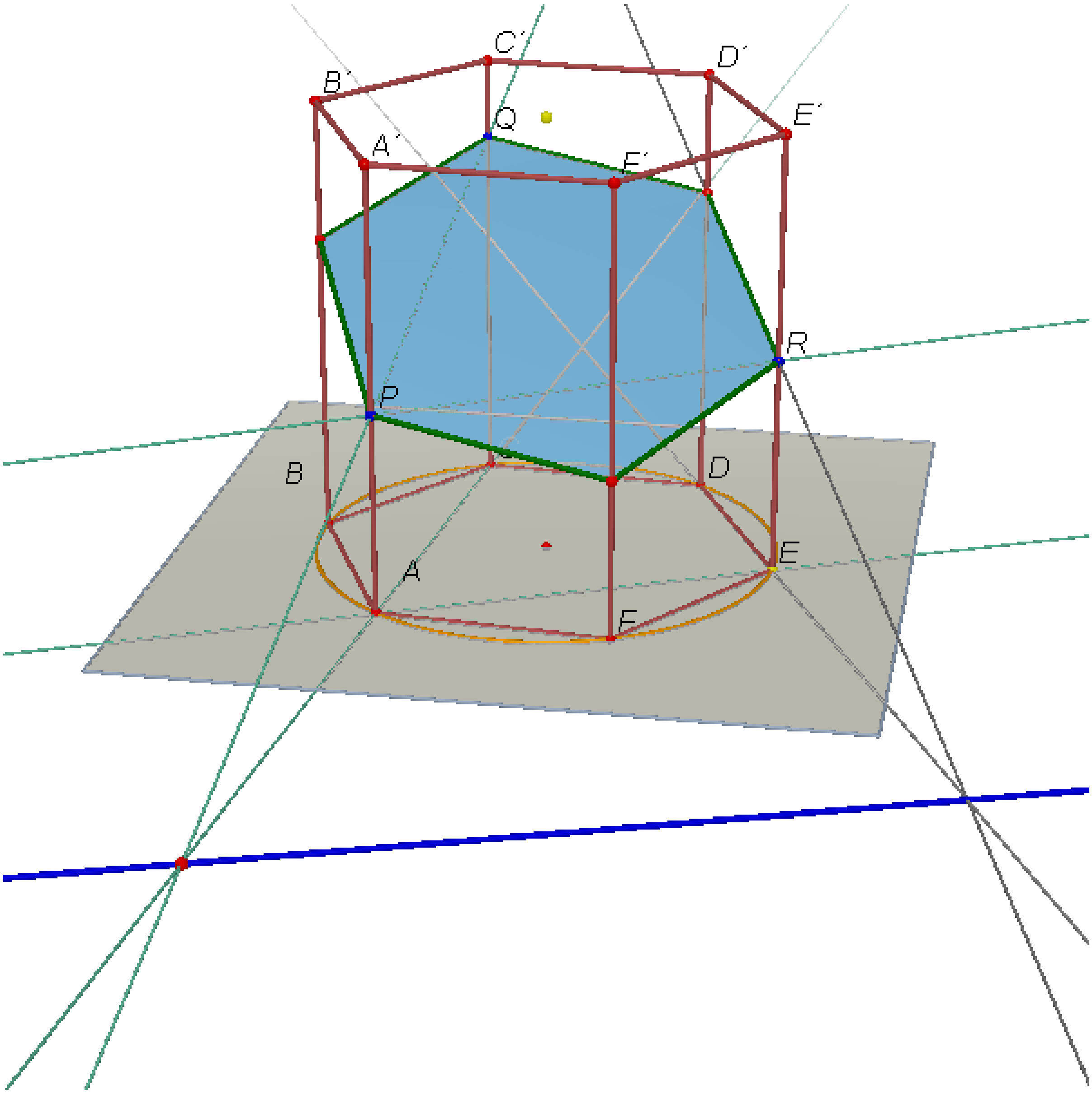
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



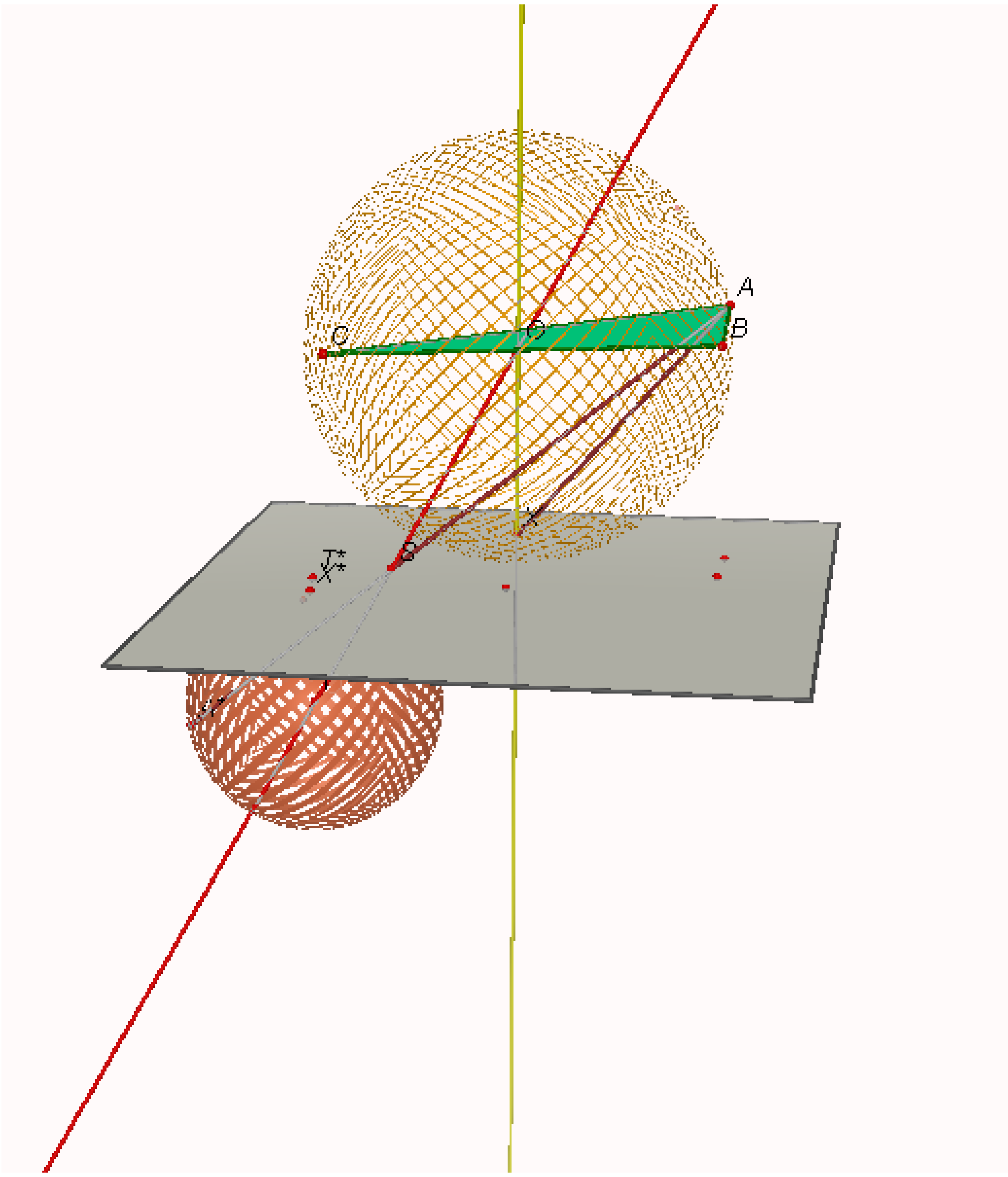


Kocka rozdelená na tri zhodné ihlany.



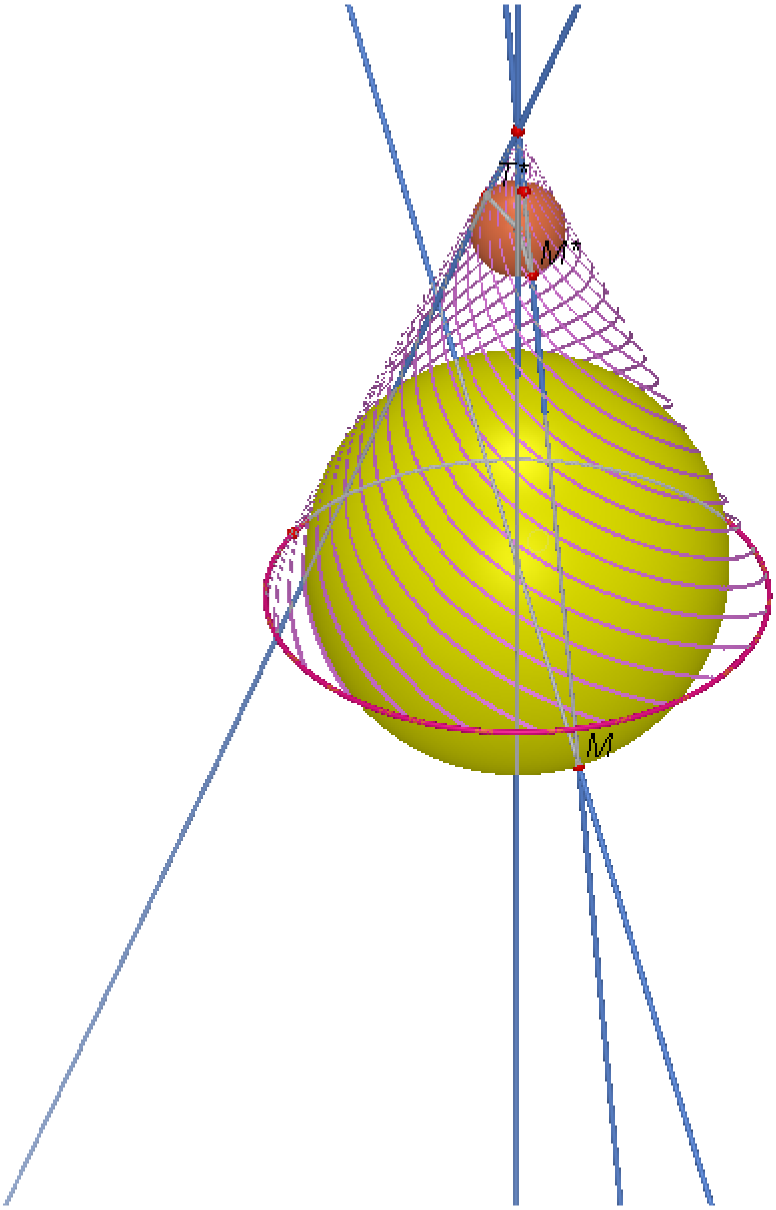


Rez pravidelného šesťbokého hranola rovinou.



Úloha: Zostrojte guľovú plochu dotýkajúcu sa danej roviny a prechádzajúcu bodmi *A, B, C* ležiacimi v jednom polpriestore.

Úloha bola riešená metódou rovnoľahlosti.



Úloha: Zostrojte guľovú plochu, vpísanú do danej kužeľovej plochy tak, aby prechádzala daným bodom *M*.

Úloha bola riešená metódou rovnoľahlosti.

Autori:	Ondrej Šedivý
	Gabriela Pavlovičová, Lucia Rumanová, Dušan Vallo
Názov:	STEREOMETRIA - umenie vidieť a predstavovať si priestor
Vydavateľ:	Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Technický redaktor:	Katarína Zverková
	Janka Melušová
Rok vydania:	2007
Poradie vydania:	prvé
Počet strán:	106
Počet výtlačkov:	100
Tlač:	Michal Vaško,
	Námestie Kráľovnej pokoja 3,
	080 01 Prešov

ISBN: 978-80-8094-180-2

9 788080 941802