zpracování, rozdílné byly jen dílčí části obsahu a rozsah zpracování včetně výběru úloh. Tyto učebnice byly používány (v mnoha vydáních) až do prvních let po 2. světové válce.

Modernizovaná koncepce výuky geometrie (po stránce terminologické i metodické) byla vytvořena a realizována v učebnicích profesora Eduarda Čecha v období čtyřicátých a padesátých let 20. stol. Z jeho koncepce středoškolské geometrie pak vycházely učebnice *Eduarda Čecha* a kol.: Matematika pro I. třídu, II. třídu a III. třídu gymnasií (1951). V modifikované podobě, s explicitním užitím pojmu **množina** a s novým metodickým zpracováním látky o míře rovinných i prostorových geometrických útvarů byla středoškolská geometrie zpracována v učebnicích *Jana Vyšína* a kol.: Geometrie pro devátý až jedenáctý postupný ročník JSŠ (1954) a *Emila Mastného* a kol.: Trigonometrie pro desátý a jedenáctý postupný ročník JSŠ (1954). Důsledné množinové a též vektorové pojetí geometrie bylo uplatněno v učebnicích *Miloslava Zedka* a kol.: Matematika pro I. ročník SVVŠ (1964), *Jiřího Kabeleho* a kol.: Matematika pro II. ročník SVVŠ a *Emila Kraemera* a kol.: Matematika pro III. ročník SVVŠ.

V tzv. období modernizace matematiky byla středoškolská geometrie zpracována v množinově-logickém pojetí v učebnicích *Jaroslava Šedivého* a kol.: Matematika pro I. ročník gymnázia – Sešit 2 (1978), *Milana Hejného* a kol.: Matematika pro gymnázia – Sešit 4/1 (1978), *Miloše Božeka a Milana Maxiana*: Matematika pro gymnázia – Sešit 4/2 (1980) a *Václava Sýkory* a kol.: Matematika pro gymnázia – Sešit 6/1 (1979). Po kritickém zhodnocení modernizačního období byla pak středoškolská geometrie pro žáky přístupněji zpracována v učebnicích *Jozefa Smidy* a kol.: Matematika pro I. ročník gymnázií (1984) a *Oldřicha Odvárka* a kol.: Matematika pro II. ročník gymnázií (1985); na středních odborných školách byly paralelně používány učebnice *Emila Caldy* a kol.: Matematika pro SOŠ – 1. část (1984) a *Oldřicha Odvárka* a *Jany Řepové*: Matematika pro SOŠ – 3. část (1985).

V novém metodickém pojetí byla středoškolská geometrie zpracována v učebnicích *Evy Pomykalové*: Matematika pro gymnázia – Planimetrie (1993), Stereometrie (1995), *Oldřicha Odvárka*: Matematika pro gymnázia – Goniometrie (1994) a *Jiřího Kadlečka*: Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy (1996). Pro střední odborné školy je nově zpracována učebnice *Josefa Molnára*: Matematika pro SOŠ – Planimetrie (2011) s hezkými ilustrativními obrázky z praxe.

11.3 Didaktické aspekty výuky planimetrie

Propedeutika geometrie

Propedeutické vyučování geometrie je převážně cílem výuky geometrie na základní škole. Žáci v něm získávají prvotní geometrické představy a poznatky, seznamují se se základy geometrické terminologie a frazeologie, učí se používat rýsovací prostředky při řešení jednoduchých konstrukčních úloh a poznávají souvislosti geometrie s aritmetikou i algebrou při řešení výpočetních geometrických úloh. Obsahem výuky planimetrie na ZŠ jsou rovinné útvary (body, přímky, úsečky, polopřímky, poloroviny, úhly, kružnice, kruhy, trojúhelníky, čtyřúhelníky, pravidelné mnohoúhelníky), shodná a podobná zobrazení, obsahem výuky stereometrie na ZŠ jsou jednoduchá tělesa (hranoly, jehlany, válce, kužele a koule).

Jak víme z historie geometrie (viz čl. 11.1), v předhelénském období, zejména v Egyptě a Babylónii měla geometrie *empirický charakter*. Obdobně geometrie na základní škole má primárně *názorný* a převážně *induktivní charakter*.

Základní planimetrické pojmy ve středoškolské geometrii

V planimetrii na střední škole se navazuje na propedeutiku geometrie ze základní školy a postupně se přistupuje k její částečné *deduktivní výstavbě*. Ani zde však nejde obvykle o úplnou axiomatickou výstavbu (založenou např. na Hilbertově soustavě axiomů) vzhledem k její přílišné náročnosti a rozsáhlosti. Vychází se zjednodušeně ze **soustavy základních (nedokazovaných) vět**, která sice nesplňuje všechny tři požadavky pro soustavu axiomů (tj. úplnost, nezávislost a bezespornost), ale je postačující pro charakterizování základních pojmů a dají se z ní deduktivně odvodit potřebné další věty. V učebnicích planimetrie se lze setkat s různě didakticky modifikovanými soustavami základních planimetrických vět. Většinou jde o vhodně upravené (zjednodušené) soustavy Hilbertových axiomů.

Velmi často ve středoškolských učebnicích planimetrie není explicitně uvedena (z rozsahových či didaktických důvodů) celá používaná soustava základních vět, ale pouze její část s tím, že ostatní základní věty jsou intuitivně zřejmé (bez explicitního uvedení). Učiteli by však mělo vždy být zřejmé, ze které soustavy základních vět se vychází. Přitom v celé výuce geometrie (od jejích počátků na ZŠ i SŠ) by učitel měl vycházet z geometrických zkušeností žáků z reálného světa, ve kterém žijeme a z vhodných geometrických modelů. Klasickým příkladem takového přístupu může být úvodní část učebnice francouzského matematika 19.–20. stol. *Jacquese Hadamarda: Elementární geometrie*. Hlavním smyslem a cílem výuky geometrie musí být rozvíjení geometrické intuice žáků, jejich geometrické představivosti (v rovině a v prostoru) a probuzení zájmu o řešení geometrických úloh.

Relativně jednoduchá a didakticky vhodná (geometrickým zkušenostem žáků blízká a přirozená) je následující **soustava základních vět planimetrie** (se základními pojmy **bod**, **přímka**, **rovina**):

I. Základní věty o incidenci bodů a přímek

I – 1 Každými dvěma různými body prochází jediná přímka. (Přímka p daná body $A \neq B$ se značí $\leftrightarrow AB$, píše se $p = \leftrightarrow AB$.)

I – 2 Pro každou přímku existují body, jež jí náležejí (leží na této přímce), a body, jež jí nenáleží (neleží na přímce).

II. Základní věty o uspořádání bodů na přímce a v rovině

11

II – 1 Ze tří různých bodů přímky leží právě jeden mezi ostatními dvěma. (Tato věta umožňuje definovat **úsečku**, má-li krajní body A, B, značí se AB; dále **polopřímku** s počátečním bodem P a vnitřním bodem A, která se značí $\mapsto PA$.)

II – 2 Každá přímka rozděluje rovinu na dvě části, zvané **opačné poloroviny**. (**Polorovina** s hraniční přímkou $p = \leftrightarrow AB$ a vnitřním bodem M se značí $\mapsto pM$ či $\mapsto ABM$.) Jestliže koncové body libovolné úsečky leží v téže polorovině, pak tato úsečka neprotíná hraniční přímku poloroviny. Jestliže koncové body úsečky leží v opačných polorovinách, pak úsečka protíná jejich společnou hraniční přímku.

II – 3 Nechť A, B, V jsou tři body roviny, které neleží v jedné přímce. Pak polopřímky VA, VB rozdělují rovinu na dvě části, zvané **úhly**. (Každá z těchto částí roviny včetně polopřímek VA, VB se nazývá **úhel** AVB s vrcholem V a rameny VA, VB. Jeden je **konvexní úhel** AVB, značí se $\sphericalangle AVB$ a rozumí se jím *průnik* polorovin AVB a BVA. Druhý je **nekonvexní úhel** AVB, značí se $\circledless AVB$ a rozumí se jím *sjednocení* polorovin opačných k polorovinám AVB a BVA. Dále opačné polopřímky VA, VB rozdělují rovinu na dvě poloroviny s hraniční přímkou AB, z nichž každá se nazývá **přímý úhel** AVB.)

Obecně definujeme: **Geometrický útvar (množina bodů) je konvexní**, právě když úsečka s krajními body v libovolných dvou bodech útvaru náleží celá tomuto útvaru. *Příklady konvexních geometrických úvarů* v rovině jsou přímka, úsečka, polopřímka, polorovina, konvexní úhel, trojúhelník a kruh.

Zdůrazněme, že **trojúhelník** a jeho vlastnosti (viz PSM str. 424–425, 432–433 a dal.), **kružnice, kruh** a jejich vlastnosti (viz PSM str. 427–428 a dal.) mají zásadní význam (jsou „klíči“) pro řešení planimetrických úloh.

III. Základní věty o délce úsečky a velikosti úhlu

III – 1 Každá úsečka AB má určitou **délku** označovanou $|AB|$.
III – 2 Jestliže bod C přímky AB leží mezi body A, B, pak délka úsečky AB je rovna součtu délek úseček AC, BC ($|AB| = |AC| + |BC|$).
III – 3 Každý úhel AVB má určitou **velikost**; ve stupňové míře od $0°$ do $180°$, v obloukové míře od 0 do 2π. (Pro konvexní úhel AVB ji značíme $|\sphericalangle AVB|$, pro nekonvexní úhel AVB ji značíme $|\otimes AVB|$.)
III – 4 Jestliže polopřímka VC leží v úhlu AVB, pak velikost úhlu AVB je rovna součtu velikostí úhlů AVC, BVC.

Poznámka. **Klasifikace úhlů podle velikosti** a druhy dvojic konvexních úhlů viz PSM str. 420–421.

Dále definujeme: Dvě úsečky AB, CD se nazývají **shodné úsečky**, jestliže existuje přemístění (shodné zobrazení), jež převede bod A do bodu C a bod B do bodu D. Píšeme pak $AB \cong CD$. Dva úhly AVB, $A'V'B'$ se nazývají **shodné úhly**, jestliže existuje přemístění (shodné zobrazení), jež převede vrchol V do vrcholu V', rameno VA do ramene $V'A'$ a rameno VB do ramene $V'B'$. Píšeme pak $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle A'V'B'$, resp. $\otimes AVB \cong \otimes A'V'B'$. Dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou **shodné trojúhelníky**, jestliže existuje přemístění (shodné zobrazení), které převede vrcholy A do A', B do B' a C do C'. Píšeme pak $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

IV. Základní věty o shodnosti úseček, úhlů a trojúhelníků

IV – 1 Je-li AB libovolná úsečka a CD polopřímka, pak na této polopřímce leží jediný bod E takový, že $AB \cong CE$.
IV – 2 Je-li dán úhel ABC a polorovina $A'B'M$, pak v této polorovině existuje jediná polopřímka $B'C'$ taková, že úhel ABC je shodný s úhlem $A'B'C'$ (tj. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$, resp. $\otimes ABC \cong \otimes A'B'C'$).
IV – 3 Jestliže pro dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ platí $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ a $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, pak oba trojúhelníky jsou shodné tak, že platí $\triangle ABC \cong$ $\cong \triangle A'B'C'$ (*věta sus*).

Z těchto základních vět se dají dokázat mnohé další věty, např.:

Věta o shodnosti vrcholových úhlů: Každé dva vrcholové úhly (tj. konvexní úhly AVB, CVD, jejichž ramena VA, VD a též ramena VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky) jsou shodné úhly.

Věty o shodnosti trojúhelníků (kritéria shodnosti trojúhelníků): Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách (*věta sss*), v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně (*věta usu*), ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich (*věta Ssu*).

V. Základní věta o rovnoběžkách

Nejprve definujeme: Dvě přímky p, q v rovině, které mají jeden společný bod (**průsečík**), se nazývají vzájemně **různoběžné přímky** či **různoběžky**. Dvě přímky p, q, které nemají žádný společný bod nebo mají všechny body společné, se nazývají **rovnoběžné přímky** či **rovnoběžky**. (Značí se $p \parallel q$.) Jsou buď **různé** ($p \neq q$) nebo **totožné**, tj. **splývající** ($p = q$).

Pro rovnoběžné přímky platí **základní věta**:

V – R Je-li dána přímka p a bod A, který na ní neleží, pak tímto bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s přímkou p.

Je možné dokázat, že z této základní věty plyne výše zmíněný 5. *Eukleidův postulát* (*věta* V – R $\Rightarrow$ 5. E. p.) a že platí též obrácená implikace (5. E. p. $\Rightarrow$ věta V – R), tj. základní věta o rovnoběžkách V – R a 5. Eukleidův postulát jsou *logicky ekvivalentní věty.*

Poznámka. Výše uvedená soustava základních vět planimetrie byla (v mírně modifikované podobě) formulována ruským matematikem *A. V. Pogorelovem*. Další ruští, němečtí, francouzští, američtí aj. matematici navrhli i alternativní soustavy základních vět eukleidovské geometrie založené na jiných základních pojmech a vztazích (na pojmech úsečky a její délky, resp. na pojmu geometrického vektoru).

Podobnost trojúhelníků

Dva shodné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ mají stejný tvar, ale též stejnou velikost příslušných stran a velikost příslušných vnitřních úhlů. Požadujeme-li, aby trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ měly pouze stejný tvar, dospíváme k pojmu podobných trojúhelníků. Definujeme: Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou **podobné trojúhelníky** (zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$), právě když existuje číslo $k > 0$ takové, že pro délky jejich stran platí

$$a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc \text{ čili } |B'C'| = k \cdot |BC|,\ |C'A'| = k \cdot |CA|,\ |A'B'| = k \cdot |AB|.$$

Číslo k se nazývá **koeficient (poměr) podobnosti trojúhelníků** ABC, $A'B'C'$. (Je-li $k > 1$, pak $\triangle A'B'C'$ je **zvětšením** $\triangle ABC$. Je-li $k < 1$, je jeho **zmenšením**. Je-li $k = 1$, jsou trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ shodné.)

Pro vnitřní úhly podobných trojúhelníků lze dokázat užitím podobných zobrazení (čl. 11.6) větu: V podobných trojúhelnících ABC, $A'B'C'$ jsou shodné všechny vnitřní úhly, a tedy platí $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$.

Poznámka. Můžeme se též setkat s tím, že v některých učebnicích planimetrie se tyto vztahy nedokazují, ale jsou součástí definice podobnosti trojúhelníků.

Důležité je žákům zdůraznit (soustavně připomínat), že v našich učebnicích planimetrie je používána *úmluva*: V zápisu podobnosti trojúhelníků $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (obdobně jako v zápisu shodnosti trojúhelníků $\triangle ABC \cong A'B'C'$) se vrcholy obou trojúhelníků zapisují v tom pořadí, ve kterém si navzájem odpovídají (tj. tak, že v příslušných vrcholech jsou shodné vnitřní úhly).

Při praktickém vyšetřování podobnosti trojúhelníků není nutné ověřovat všech šest podmínek uvedených v jejich definici a předchozí větě, ale pouze *podmínky postačující* vyjádřené následujícími větami.

11

Věty o podobnosti trojúhelníků (kritéria podobnosti trojúhelníků):

Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se
v poměrech délek všech tří odpovídajících si stran (*věta sss*),
ve dvou odpovídajících si vnitřních úhlech (*věta uu*),
v poměrech délek dvou odpovídajících si stran a v úhlu jimi sevřeném (*věta sus*),
v poměrech délek dvou odpovídajících si stran a v úhlu proti větší z nich (*věta Ssu*).

Poznámka. Věta sss plyne přímo z definice podobnosti trojúhelníků, k důkazům ostatních tří vět se užívají shodná a podobná zobrazení (viz čl. 11.6).

Mnohoúhelníky, kruh a jeho části

Definice a vlastnosti mnohoúhelníků (konvexních a nekonvexních), speciálně pravidelných mnohoúhelníků, čtyřúhelníků, druhů konvexních čtyřúhelníků, kruhu a jeho částí viz v PSM str. 448–454.

11.4 Příklady důkazů v planimetrii

Na teoreticky i didakticky zajímavých a důležitých příkladech budeme ilustrovat uplatnění deduktivní metody při dokazování vět planimetrie. Všechny uváděné příklady představují typické ukázky užití matematické logiky v logické výstavbě matematiky (kap. 2 čl. 2.4).

Důkazy vět o trojúhelníku

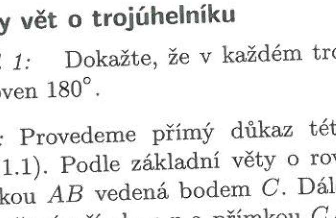
Příklad 1: Dokažte, že v každém trojúhelníku je součet velikostí všech jeho vnitřních úhlů roven 180°.

Řešení: Provedeme přímý důkaz této věty pro libovolně zvolený trojúhelník ABC (obr. 11.1). Podle základní věty o rovnoběžkách (V – R) existuje jediná rovnoběžka p s přímkou AB vedená bodem C. Dále podle věty o rovnoběžkách proťatých příčkou je úhel sevřený přímkou p a přímkou CA shodný s vnitřním úhlem $\triangle ABC$ při vrcholu A, obdobně úhel sevřený přímkou p a přímkou CB je shodný s vnitřním úhlem při vrcholu B (střídavé úhly). Úhel s vrcholem C a rameny v opačných polopřímkách přímky p je přímý úhel, a tedy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

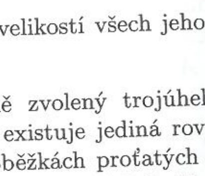
Příklad 2: Dokažte, že každý vnější úhel trojúhelníku má velikost rovnou součtu velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku při zbývajících vrcholech.

Řešení: Dokazovaná věta je důsledkem věty z příkladu 1. Z obr. 11.1 je zřejmé, že $\alpha' = 180° - \alpha$, kde $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$, a tedy $\alpha' = \beta + \gamma$. (Obdobně lze získat vzorce pro β' a γ'.)

Poznámka. Vzorce pro trojúhelník ABC není nutné formulovat (dokazovat) trojmo; z jednoho z nich stačí získat ostatní *cyklickou záměnou označení* podle obr. 11.2.



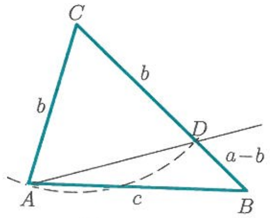
Obr. 11.1



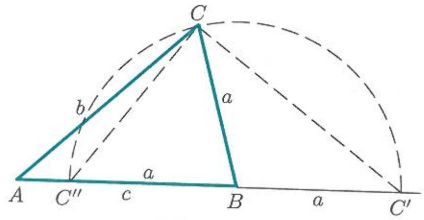
Obr. 11.2

Příklad 3: Dokažte, že v trojúhelníku leží proti shodným stranám shodné vnitřní úhly, proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel a naopak.

Řešení: Je-li v trojúhelníku ABC strana AC shodná se stranou BC, pak trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem BAC (podle věty sss), a proto jsou též úhly ABC a BAC shodné. Je-li $|BC| > |AC|$, pak na straně BC existuje takový bod D, že $|AC| = |CD|$ (obr. 11.3). Pro úhly v obrázku platí (s užitím toho, že úhel CDA je vnějším úhlem trojúhelníku ABD): $|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DBA| > |\sphericalangle CBA|$. Obrácené tvrzení lze dokázat snadno sporem: Kdyby proti většímu vnitřnímu úhlu trojúhelníku neležela větší strana, pak by tato strana ležela proti menšímu vnitřnímu úhlu, což je spor s výše dokázaným tvrzením.



Obr. 11.3



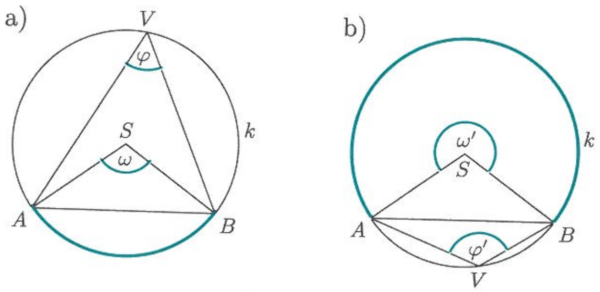
Obr. 11.4

Příklad 4: Dokažte, že v každém trojúhelníku platí trojúhelníková nerovnost, podle níž součet délek dvou stran trojúhelníku je větší než délka třetí strany a rozdíl délek dvou stran trojúhelníku je menší než délka třetí strany.

Řešení: Zvolme libovolný trojúhelník ABC a bod C' na polopřímce opačné k $\mapsto BA$ takový, že $|BC'| = |BC|$ (obr. 11.4). Trojúhelník BCC' je rovnoramenný (s rameny BC, BC'), a proto $|\sphericalangle AC'C| = |\sphericalangle BCC'| < |\sphericalangle ACC'|$. Proti většímu úhlu v trojúhelníku $AC'C$ leží větší strana, takže $|AC'| > |AC|$ čili $|AB| + |BC| > |AC|$, což jsme měli dokázat. Druhou část dokazované věty lze dokázat obdobně: Za předpokladu, že $|AB| > |BC|$, existuje vnitřní bod úsečky AB takový, že $|BC''| = |BC|$. Dále je $|\sphericalangle ACC''| < 90° < |\sphericalangle AC''C|$, a tedy $|AC| > |AC''| = |AB| - |BC|$, což jsme měli dokázat.

Důkazy vět o obvodových a středových úhlech v kružnici

Nechť je dána libovolná kružnice k a v ní tětiva AB ($A \in k$, $B \in k$), jež rozděluje kružnici na dva kružnicové oblouky AB (symbolicky označované $\widehat{AB}$), které leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB. Krajní body A, B náležejí oběma obloukům. (Situace je pro neshodné oblouky zobrazena ve dvou obrázcích obr. 11.5a, b.)



Obr. 11.5

Důležitým a didakticky náročným úkolem je zavedení a objasnění pojmů:

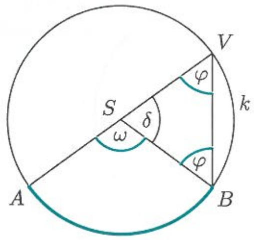
Úhel ASB, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, který leží v tomto úhlu, se nazývá **středový úhel příslušný k tomuto oblouku** AB. Každý úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k ($V \neq A$, $V \neq B$) a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, který leží v tomto úhlu, se nazývá **obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku** AB kružnice k. Pro každý kružnicový oblouk AB existuje jediný středový úhel ASB (který je konvexní pro menší oblouk AB, viz obr. 11.5a, resp. pro polokružnici, a je nekonvexní pro větší oblouk AB, viz obr. 11.5b), ale existuje nekonečně mnoho obvodových úhlů AVB, jež jsou všechny konvexní.

Příklad 5: Dokažte, že velikosti všech obvodových úhlů kružnice k příslušných k témuž oblouku AB jsou si rovny, přičemž velikost každého z nich je rovna polovině velikosti středového úhlu příslušného k témuž oblouku.

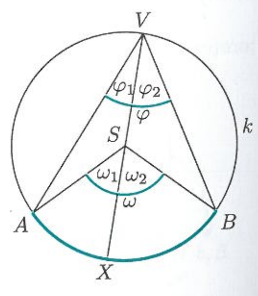
Řešení: Pro libovolně zvolenou kružnici k se středem S vezměme její libovolný oblouk $\widehat{AB}$ a zvolme libovolný bod $V \in k \setminus \widehat{AB}$. Označme velikost příslušného obvodového úhlu $\varphi = |\sphericalangle AVB|$ a velikost příslušného středového úhlu $\omega = |\sphericalangle ASB|$.

Při důkazu věty rozlišíme tři případy: 1. $0° < \omega < 180°$, 2. $\omega = 180°$, 3. $180° < \omega < 360°$.

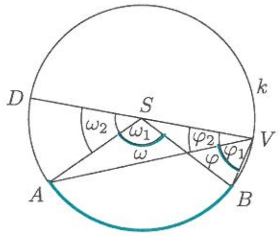
1. $\widehat{AB}$ je menší oblouk kružnice k a pro polohu jejího středu S mohou nastat tři možnosti:
   a) Střed S leží na rameni obvodového úhlu AVB, např. $S \in AV$ (obr. 11.6). Pak $\triangle VSB$ je rovnoramenný ($|SB| = |SV|$), a proto $|\sphericalangle SBV| = \varphi$ a $|\sphericalangle VSB| = \delta = 180° - 2\varphi$ (plyne ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníku). Dále $|\sphericalangle ASB| = \omega = 180° - |\sphericalangle VSB| = 2\varphi$.
   b) Střed S je vnitřním bodem obvodového úhlu AVB příslušného k menšímu oblouku AB (obr. 11.7). Označíme X průsečík kružnice k a přímky VS, $\varphi_1 = |\sphericalangle AVX|$, $\varphi_2 = |\sphericalangle XVB|$, $\omega_1 = |\sphericalangle ASX|$, $\omega_2 = |\sphericalangle XSB|$. Podle a) je $\omega_1 = 2\varphi_1$, $\omega_2 = 2\varphi_2$, a tedy $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) = 2\varphi$.
   c) Střed S je vnějším bodem obvodového úhlu AVB (obr. 11.8). Při obdobném označení jako b) dostáváme podle a), že opět $\omega_1 = 2\varphi_1$ a $\omega_2 = 2\varphi_2$ a nyní $\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\varphi_1 - 2\varphi_2 = 2(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\varphi$.
2. $\widehat{AB}$ je polokružnice k a její střed S je vnitřním bodem obvodového úhlu AVB. Pak jako v případu 1b) s použitím 1a) dostáváme: $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 180° \Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 90°$.
3. $\widehat{AB}$ je větší oblouk kružnice k a její střed S pak je vnitřním bodem obvodového úhlu AVB příslušného k většímu oblouku AB (obr. 11.9). Obdobným postupem jako v 1b) dostáváme $\omega' = 2\varphi'$.



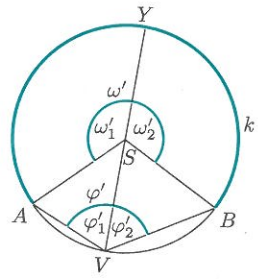
Obr. 11.6



Obr. 11.7



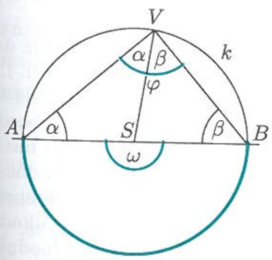
Obr. 11.8



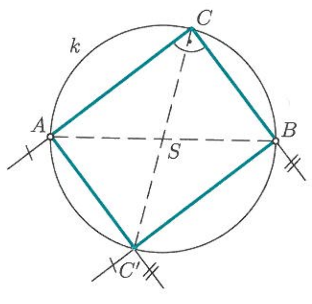
Obr. 11.9

Příklad 6: a) Dokažte, že platí **Thaletova věta**: Každý obvodový úhel nad průměrem kružnice (tj. příslušný k polokružnici) je pravý. b) Dokažte, že platí též **obrácená Thaletova věta**: Je-li bod C vrchol pravého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku ABC, pak bod C leží na kružnici nad přeponou AB (tj. na kružnici, jejíž střed je ve středu přepony AB a prochází body A, B).

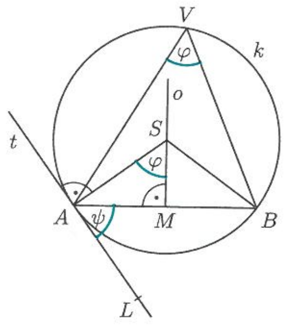
Řešení: Thaletova věta byla dokázána v bodě 2 řešení příkladu 5. Můžeme ji ovšem dokázat také přímo užitím obr. 11.10: Podle věty o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku (z příkladu 1) je v něm $2(\alpha + \beta) = 180°$, a tedy $\varphi = \alpha + \beta = 90°$. Obrácenou Thaletovu větu dokážeme neméně snadno: Nechť C je vrchol libovolného pravoúhlého trojúhelníku s přeponou AB (obr. 11.11). Bodem A veďme rovnoběžku s přímkou BC a bodem B rovnoběžku s přímkou AC. Jejich průsečík označme C'. Protože podle předpokladu dokazované věty $|\sphericalangle ABC| = 90°$, je sestrojený rovnoběžník $ACBC'$ obdélník a vzhledem k tomu, že v každém obdélníku jsou uhlopříčky shodné a půlí se, leží body C a C' na kružnici $k\left(S, \frac{1}{2}|AB|\right)$ se středem S ve středu přepony AB.



Obr. 11.10



Obr. 11.11



Obr. 11.12

Příklad 7: Je dána kružnice k se středem S a na ní dva různé body A, B. Dokažte, že úhel, který svírá tětiva AB s tečnou kružnice k v bodě A, má velikost rovnou velikostem φ obvodových úhlů příslušným k oblouku AB (obr. 11.12). Tento úhel se nazývá **úsekový úhel** příslušný k témuž oblouku AB.

Řešení: Nechť $\widehat{AB}$ je menší oblouk kružnice k. Označme hledanou velikost úsekového úhlu ψ. Z obr. 11.12 je zřejmé, že $\psi = 90° - (90° - \varphi) = \varphi$, což jsme měli dokázat.

Doplňte obrázek a důkaz pro případ, že $\widehat{AB}$ je větší oblouk kružnice k ($\psi' = 180° - \psi = 180° - \varphi = \varphi'$).

11.5 Důkazové a výpočetní planimetrické úlohy

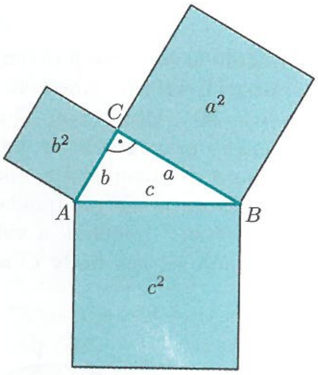
Pythagorova věta a k ní obrácená věta, jejich důkazy a užití

Pythagorova věta: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen. Označíme-li délky odvěsen a, b, délku přepony c, tedy platí

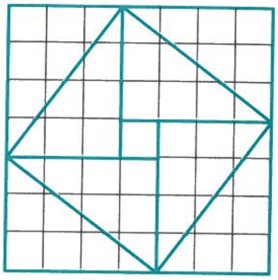
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Alternativní geometrická formulace Pythagorovy věty: Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami (obr. 11.13).

Platí též **obrácená věta k Pythagorově větě**: Jestliže pro trojúhelník ABC platí pro délky stran a, b, c, že $c^2 = a^2 + b^2$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý, přičemž c je délka jeho přepony, a, b jsou délky odvěsen.



Obr. 11.13



Obr. 11.14

Poznámka. Archeologické nálezy (hliněných klínopisných tabulek) ze *starověké Mezopotámie* dokládají znalost a užití Pythagorovy věty již v období Starobabylónské říše (2000–1600 př. n. l.). Ve *starověké Číně a Indii* se objevují poznatky o Pythagorově větě v době více než jednoho tisíce let př. n. l. Zdali *Pythagoras ze Samu* (6. stol. př. n. l.) větu po něm pojmenovanou pouze přenesl do starořecké matematiky nebo ji dokázal, příp. někdo z jeho žáků, není věrohodně historicky doloženo. *Eukleides z Alexandrie* (3. stol. př. n. l.) ve spisu *Základy* uvedl originální důkaz Pythagorovy věty (jako 47. věty I. knihy) a také poprvé formuloval i dokázal platnost obrácené Pythagorovy věty (48. věty I. knihy). Pro zajímavost se seznámíme s Eukleidovým (po dlouhá staletí často užívaným) důkazem Pythagorovy věty. Předtím však ukážeme některé její jednodušší důkazy, které lze vhodně využít ve školské praxi k **vizualizaci Pythagorovy věty**.

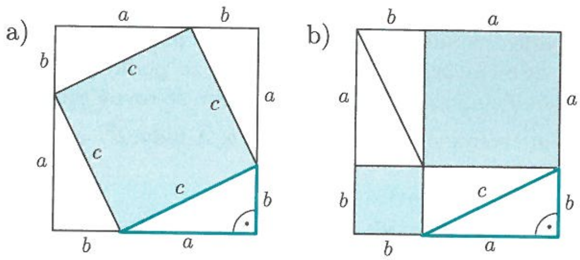
Pythagorovu větu lze dokázat mnoha různými a vesměs zajímavými způsoby. V následujících příkladech uvedeme jejich vybrané, historicky, a zejména didakticky významné ukázky.

Příklad 1 (historický motivační): Ze staročínské matematické knihy Zhou bi suan jing [český přepis: *Čou pi suan ťing*] (*Matematická klasika o gnómonu* z období dynastie Zhou [Čou]) asi z 2.–1. stol. př. n. l. pochází (s vynecháním čínských znaků pro označení stran pravoúhlého trojúhelníku) obrázek obr. 11.14. Tento obrázek znázorňuje (pro pravoúhlý trojúhelník s velikostmi stran 3, 4, 5) platnost Pythagorovy věty. Ukažte **algebraicky**, jak lze pomocí něj odvodit (pro obecný pravoúhlý trojúhelník s délkami odvěsen a, b a přepony c) Pythagorovu větu.

Řešení: Obsah vnitřního čtverce o straně délky c můžeme vyjádřit dvěma způsoby: $c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a-b)^2 + 2ab$, $c^2 = (a+b)^2 - 2ab$. Z prvního i druhého vyjádření nezávisle plyne, že $c^2 = a^2 + b^2$.

Příklad 2: Adaptací předchozího odvození Pythagorovy věty staročínského původu (obr. 11.14) vznikl velmi názorný důkaz Pythagorovy věty **vizualizací** podle dvojice obrázků na obr. 11.15. Z nich je platnost Pythagorovy věty přímo názorně „vidět". (Čínský autor tohoto jejího důkazu z 2.–1. stol. př. n. l. je neznámý. Později, zejména od středověku byl tento důkaz také používán indickými matematiky.) Ověřte důkaz Pythagorovy věty podle obr. 11.15 algebraicky.

Řešení: Podle prvního obrázku je $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$, podle druhého je $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Z těchto rovností plyne, že $c^2 = a^2 + b^2$.

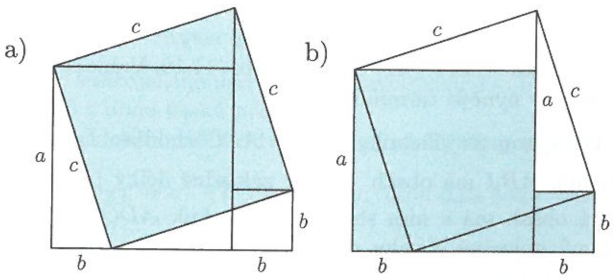


Obr. 11.15

Mnohé důkazy Pythagorovy věty jsou založeny na **metodě rozkladu a skládání obrazců**. Tato metoda spočívá v tom, že čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku a čtverce nad jeho odvěsnami se libovolným způsobem rozloží na navzájem shodné geometrické útvary v obou rozkladech. Didakticky účinně lze tuto metodu důkazu uplatňovat v geometrii na ZŠ či SŠ s použitím papírových nebo jiných modelů geometrických obrazců, pomocí kterých žáci experimentálně ověřují platnost Pythagorovy věty.

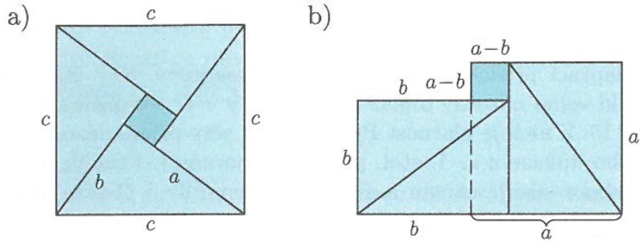
Příklad 3 (historické 4 důkazy arabského a indického původu): Některé příklady uplatnění metody rozkladu obrazců při důkazech Pythagorovy věty jsou známy ze středověku.

Arabský matematik *Thábit ibn Qurra* (9. stol.) použil k tomu rozklady obrazců podle obr. 11.16a, b.



Obr. 11.16

Indický matematik *Bháskara II.* (12. stol.) v knize *Koruna vědy* uvedl rozklady obrazců podle obr. 11.17a, b s pokynem *„Viz!“* (*„Spatři!“*, *„Dívej se!“*).



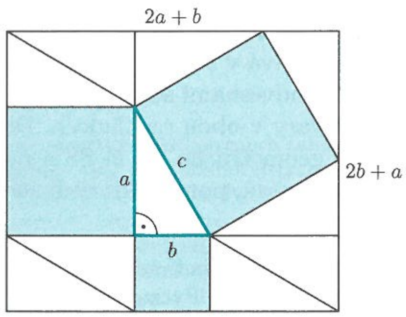
Obr. 11.17

Jak ověříme, že oba tyto postupy představují důkazy Pythagorovy věty?

Řešení: V obou případech snadno dokážeme shodnost příslušných geometrických obrazců rozkladů a), b). V druhém případě lze užít toho, že podle obr. 11.17a obsah čtverce sestrojeného nad přeponu c pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtyř těchto trojúhelníků a obsahu čtverce o straně délky $a-b$. A tedy: $c^2 = 4 \cdot \dfrac{ab}{2} + (a-b)^2$, odkud $c^2 = a^2 + b^2$.

Příklad 4: Velmi názorný důkaz Pythagorovy věty plyne z obr. 11.18. Ověřte.

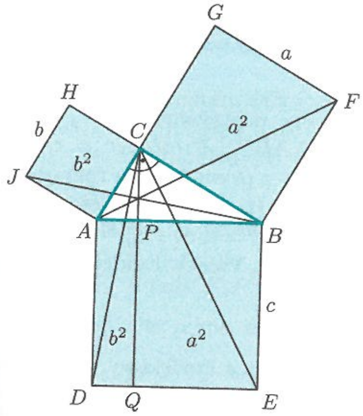
Řešení: Podle obr. 11.18 je $c^2 = (2a+b)(2b+a) - \left(a^2+b^2+5ab\right)$ a odtud $c^2 = a^2 + b^2$.



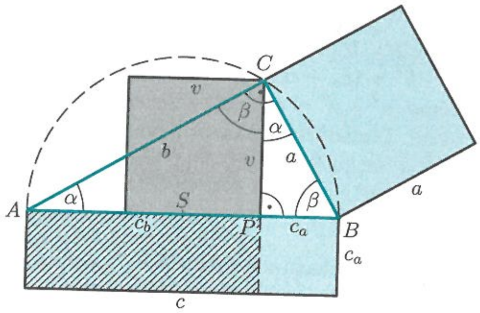
Obr. 11.18

Příklad 5 (historický Eukleidův důkaz Pythagorovy věty): Eukleidův důkaz ze 3. stol. př. n. l. v I. knize *Základů* (věta I – 47) vychází z obr. 11.19. Vzhledem k jeho historickému významu jej uvedeme v nynější terminologii.

Důkaz: Na obr. 11.19 jsou trojúhelníky ABJ a ADC shodné ($\triangle ABJ \cong \triangle ADC$) podle věty sus. Trojúhelník ABJ má obsah $\dfrac{1}{2}b^2$ (k základně délky $|AJ| = b$ příslušná výška je rovněž b) a týž obsah má s ním shodný trojúhelník ADC. Přitom obsah trojúhelníku ADC je rovný polovině obsahu obdélníku $ADQP$ (ke straně AD délky $|AD|$ je příslušná výška $|AP|$). Odtud plyne, že obsah b^2 čtverce $ACHJ$ je rovný obsahu obdélníka $ADQP$ (což vyjadřuje Eukleidovu větu o odvěsně). Obdobně trojúhelník ABF má obsah $\frac{1}{2}a^2$ a týž obsah má s ním shodný trojúhelník CBE, který je rovný polovině obsahu obdélníku $BEQP$. A tedy obsah a^2 čtverce $BCGF$ je rovný obsahu obdélníku $BEQP$. Souhrnně součet obsahů čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven obsahu čtverce $ABED$ nad jeho přeponou, tj. $a^2 + b^2 = c^2$.



Obr. 11.19



Obr. 11.20

Příklad 6 (důkazy Eukleidových vět a Pythagorovy věty pomocí *podobnosti trojúhelníků):* V libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C sestrojíme výšku CP k přeponě AB (obr. 11.20). Úsečky BP ($|BP| = c_a$), AP ($|AP| = c_b$) jsou nazývány *úseky přepony* AB přilehlé k odvěsně BC ($|BC| = a$), resp. AC ($|AC| = b$). Užitím podobnosti trojúhelníků na obr. 11.20 odvoďte Eukleidovy věty a Pythagorovu větu.

Důkazy: Podle věty uu o podobnosti trojúhelníků je $\triangle ABC \sim \triangle ACP \sim \triangle CBP$ a odtud plyne (ukažte), že $a : c_a = c : a$, $b : c_b = c : b$, $v : c_a = c_b : v$, a tedy platí věty:

Eukleidovy věty o odvěsnách: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délky přepony a přilehlého úseku přepony:

$$a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b.$$

Neboli: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a přilehlého úseku přepony.

Eukleidova věta o výšce: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony:

$$v^2 = c_a \cdot c_b.$$

Neboli: Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

Jako *důsledek* Eukleidových vět o odvěsnách plyne **Pythagorova věta**:

$$a^2 = c \cdot c_a,\ b^2 = c \cdot c_b \Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c(c_a + c_b) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Poznámka. Také tyto důkazy (z příkladu 6) uvedl v podstatě již *Eukleides* ve svých *Základech* v VI. knize (věta 31), dokonce v zobecněné podobě (pro navzájem podobné geometrické útvary, např. obdélníky sestrojené nad přeponou a odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku). Jak jsme se

b) *Trisekce úhlu:* Mějme dán libovolný úhel velikosti α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Máme sestrojit úhel o velikosti $\frac{\alpha}{3}$. Použijeme goniometrickou identitu $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$ (kterou snadno odvodíme: pro každé $\varphi \in \mathrm{R}$ je $\cos 3\varphi = \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi = \cos^3\varphi - 3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ a položíme $3\varphi = \alpha$). Označíme-li $\cos\frac{\alpha}{3} = x$, dostáváme pro x kubickou rovnici $4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$. Speciálně pro $\alpha = 60^\circ$ je $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, a tedy $8x^3 - 6x - 1 = 0$ čili (po substituci $2x = y$) $y^3 - 3y - 1 = 0$. Podle věty V_2 nemají tyto kubické rovnice racionální kořeny, takže podle věty V_1 není v tomto případě (pro $\alpha = 60^\circ$) eukleidovsky zkonstruovatelná úsečka délky $x = \cos\frac{\alpha}{3}$, a tedy ani úhel velikosti $\frac{\alpha}{3}$. Tím jsme dokázali, že *obecně* (v některých případech) není trisekce úhlu eukleidovsky proveditelná. (V některých případech, např. pro $\alpha = 90^\circ$ nebo $\alpha = 45^\circ$ proveditelná ovšem je. Ověřte!)

c) *Kvadratura kruhu*: Vezměme poloměr daného kruhu jako jednotkový. Pak úlohu o kvadratuře kruhu formulujeme takto: Je dána úsečka délky 1. Máme sestrojit úsečku délky x, která je kořenem rovnice $x^2 = \pi$. Protože však číslo π je transcendentní (viz kap. 3 čl. 3.1), není tato úloha eukleidovsky řešitelná.

Poznámka. Problém reduplikace krychle je někdy nazýván *delský problém* (či *delská úloha*); tento název má původ v starořecké legendě, podle níž při epidemii na ostrově Delos měl být k usmíření boha Apollona jeho oltář ve tvaru krychle v chrámu zvětšen v krychli o dvojnásobném objemu. Neřešitelnost problémů reduplikace krychle a trisekce úhlů pravítkem a kružítkem dokázal až r. 1837 francouzský matematik *P. L. Wantzel.* Řešení problému kvadratury kruhu bylo podstatně obtížnější. Iracionalitu čísla π dokázal v roce 1761 švýcarský matematik *Johann Heinrich Lambert* a v roce 1794 dokázal francouzský matematik *Adrien-Marie Legendre*, že také číslo π^2 je iracionální. Teprve však v roce 1882 německý matematik *Ferdinand von Lindemann* dokázal, že číslo π je transcendentní, a tedy není eukleidovsky konstruovatelné.

11.7 Didaktické aspekty výuky stereometrie

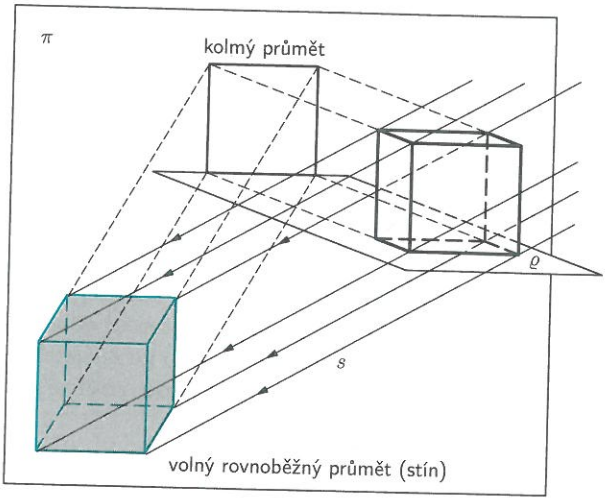
Základní stereometrické pojmy ve středoškolské geometrii

Stereometrie má značný význam ve výuce středoškolské matematiky, protože nezastupitelně přispívá k rozvoji **prostorové představivosti** žáků, tj. jejich schopností vytvářet si představy o prostorových geometrických útvarech, jejich vlastnostech a vztazích mezi nimi. **Propedeutika stereometrie** se vyučuje již na základní škole, kde se žáci seznamují s jednoduchými tělesy, jejich vlastnostmi a postupně též se vzájemnou polohou bodů, přímek a rovin, jakož i se základními vzorci pro výpočet objemů a povrchů jednoduchých těles. Na střední škole se ve výuce stereometrie vychází z těchto prvotních znalostí a představ žáků. Kromě *názorného pojetí* výuky se však přistupuje i k *abstraktnějšímu pojetí* včetně prvků *dedukce* a *logického odvozování.* Tato složka ve vyučování stereometrie představuje nezanedbatelný přínos pro rozvoj logického myšlení žáků.

Z hlediska **deduktivní výstavby geometrie** je ve výuce stereometrie nutné rozšířit soustavu **základních vět planimetrie** (uvedenou v čl. 11.3) o doplňující **základní věty stereometrie** (charakterizující vlastnosti rovin v prostoru):

S – I. Pro každou rovinu v prostoru existují body, jež jí náležejí, a body, které jí nenáležejí (neleží v této rovině).

S – II. Jestliže dvě různé přímky p, q mají jediný společný bod P (tj. jsou různoběžné a bod P je jejich průsečík), pak jimi prochází (je určena) jediná rovina ϱ.



Obr. 11.33

S – III. Jestliže dvě různé roviny ϱ, σ mají společný bod A, pak mají společnou přímku p, která tímto bodem A prochází, a kromě této přímky nemají žádný další společný bod (tj. jsou to různoběžné roviny a přímka p je jejich průsečnice).

Z těchto základních vět stereometrie lze již dokázat její další *věty*, např.

V_1: Libovolnou přímkou p a bodem B, který na ní neleží ($B \notin p$), prochází (je určena) právě jedna rovina ϱ.

V_2: Libovolnými třemi body A, B, C, které neleží v přímce, prochází (je určena) právě jedna rovina ϱ.

Důležitou následující částí výuky stereometrie je **klasifikace a vyšetřování vzájemné polohy** dvou přímek v prostoru, přímky a roviny, dvou rovin, tří rovin, kritéria rovnoběžnosti a kolmosti přímek a rovin (PSM str. 506 a dal.).

Užití modelů geometrických těles a jejich zobrazení pomocí volného rovnoběžného promítání

Již na ZŠ a i na SŠ je pro názornost výuky stereometrie velmi vhodné používat reálné (dřevěné, drátěné či jiné) trojrozměrné **modely geometrických těles**, příp. modelování geometrických situací na stěnách, stropu a podlaze místnosti. V současnosti je ovšem též aktuální a moderní užití různých **IT modelů** (počítačových, virtuálních modelů), např. z programů tzv. **dynamické geometrie**.

Kromě reálných a virtuálních modelů (příp. v souvislosti s nimi) je často vhodné a pro prostorovou představivost důležité vytvářet názorné obrázky, jimiž graficky zobrazujeme ve zvolené rovině (např. sešitu, resp. tabuli) prostorové geometrické útvary a stereometrické situace předepsaným (vhodně dohodnutým) způsobem. V učebnicích i ve výuce se zpravidla užívá tzv. rovnoběžné promítání. Jeho definici můžeme názorně vysvětlit či motivovat takto: Vezměme reálný model prostorového geometrického útvaru (tělesa) a nechme na něj dopadat sluneční (tj. rovnoběžné) paprsky, které na zvolené (např. svislé) rovině π vytvářejí jeho *stín* (viz např. obr. 11.33 pro model krychle). Na základě této *motivace* definujeme: Nechť je dána rovina π (zvaná **průmětna** či **nákresna**) a přímka s různoběžná s rovinou π. **Rov-**

11

noběžné promítání do roviny π (se **směrem promítání** určeným přímkou s) je geometrické zobrazení z prostoru do roviny π, v němž každému zvolenému bodu X prostoru je přiřazen jako jeho obraz bod $X' \in \pi$, který dostaneme jako průsečík přímky vedené bodem X a rovnoběžné s přímkou s ($XX' \parallel s$). Z definice vyplývá, že rovnoběžné promítání má tyto *základní vlastnosti*: Přímka se v něm zobrazuje jako přímka, resp. jako bod (pokud je rovnoběžná s přímkou s). Jsou-li obrazy dvou rovnoběžných přímek přímky, pak jsou též rovnoběžné. Jsou-li obrazy dvou shodných a rovnoběžných úseček úsečky, pak jsou také shodné a navzájem rovnoběžné. Jestliže bod C je vnitřním bodem úsečky AB, která se zobrazí jako úsečka $A'B'$, pak jeho obraz C' dělí úsečku $A'B'$ v témž poměru, ve kterém dělil bod C úsečku AB (tj. $|A'C'| : |C'B'| = |AC| : |CB|$). Obrazem každého geometrického útvaru, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou (tzv. **průčelné rovině**), je s ním shodný geometrický útvar.

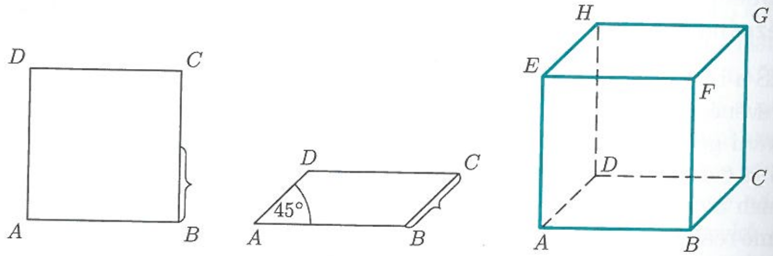
Při praktickém použití rovnoběžného promítání k nakreslení obrázků (obrazů stereometrických útvarů v rovině) se obvykle přímo nestanovuje směr promítání, takže máme jistou *volnost* pro jeho nepřímé stanovení. Proto toto rovnoběžné promítání je nazýváno **volné rovnoběžné promítání**. Jeho směr promítání je zpravidla stanoven nepřímo pomocí *doplňkového zobrazovacího pravidla*: Úsečky kolmé k průmětně zobrazujeme do úseček poloviční délky a svírajících s vodorovným směrem úhel o velikosti 45°.

Poznámka. Pro zjednodušení ve volném rovnoběžném promítání se zpravidla označují body i jejich obrazy stejně.

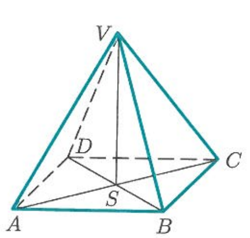
Příklad 1: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) krychli o hraně délky $a = 2$ cm,
b) pravidelný čtyřboký jehlan s podstavnou hranou délky $a = 2$ cm a výškou $v = 1{,}9$ cm,
c) pravidelný čtyřstěn o hraně délky $a = 2{,}4$ cm,
d) pravidelný šestiboký jehlan s podstavnou hranou délky $a = 1{,}2$ cm a výškou $v = 1{,}4$ cm.

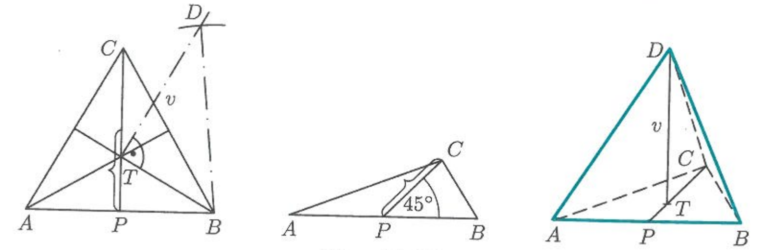
Řešení: a) obr. 11.34, b) obr. 11.35, c) obr. 11.36, d) obr. 11.37.



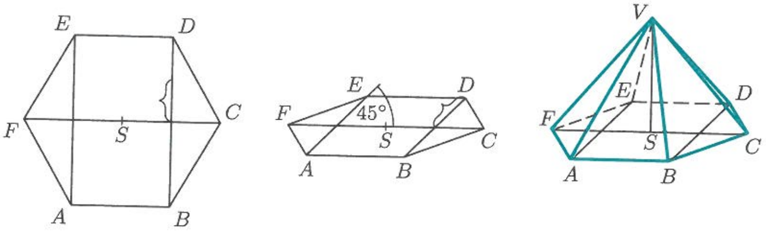
Obr. 11.34



Obr. 11.35



Obr. 11.36



Obr. 11.37

Příklad 2: Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

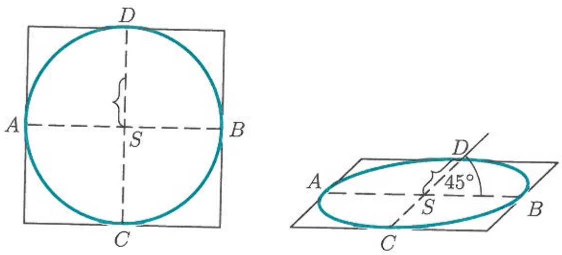
a) kružnici o poloměru $r = 1{,}2$ cm,

b) rotační válec s poloměrem podstavy $r = 1{,}2$ cm a výškou $v = 2{,}1$ cm,

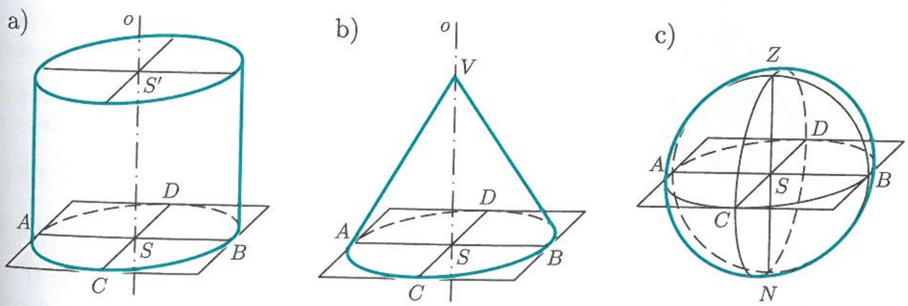
c) rotační kužel s poloměrem podstavy $r = 1{,}2$ cm a výškou $v = 2{,}1$ cm,

d) kouli o poloměru $r = 2$ cm.

Řešení: a) obr. 11.38, b), c), d) obr. 11.39.



Obr. 11.38



Obr. 11.39

11.8 Polohové stereometrické úlohy

V **polohových stereometrických úlohách** vyšetřujeme vzájemnou polohu daných bodů, přímek a rovin (určených obvykle pomocí jednoduchých těles).

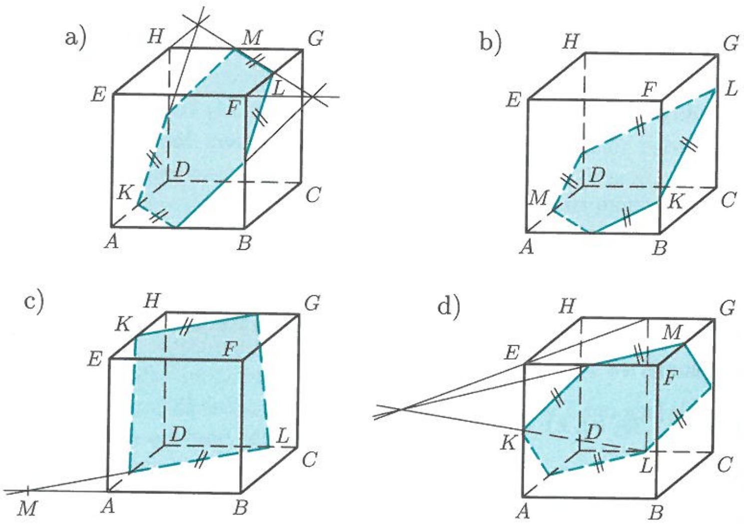
Průnik tělesa a roviny se nazývá **řez tělesa rovinou**. Je to rovinný geometrický útvar, jehož hranici tvoří průnik hranice tělesa a roviny řezu.

Příklad 1: Sestrojte ve volném rovnoběžném promítání řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, je-li

a) $K \in AD,\ L \in FG,\ M \in GH$, b) $K \in BF,\ L \in CG,\ M \in AD$,

c) $K \in EH,\ L \in CD,\ M \in \leftrightarrow AB \wedge A \in MB$, d) $K \in AE,\ L \in CD,\ M \in FG$.

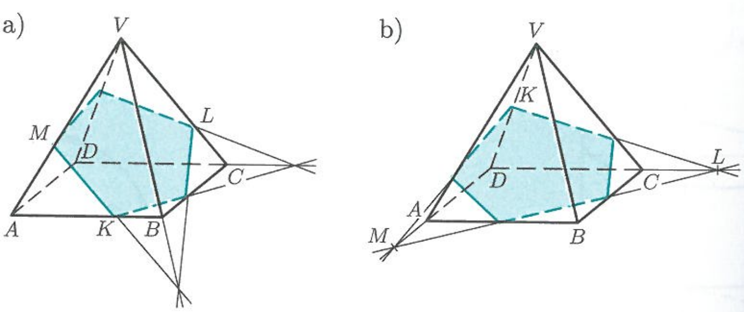
Řešení: a) obr. 11.40a, b) obr. 11.40b, c) obr. 11.40c, d) obr. 11.40d.



Obr. 11.40

Příklad 2: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM, kde a) $K \in AB,\ L \in CV,\ M \in AV$, b) $K \in DV,\ L \in CD \wedge C \in DL,\ M \in \leftrightarrow AD \wedge A \in MD$.

Řešení: a) obr. 11.41a, b) obr. 11.41b.



Obr. 11.41

Úlohy na **průnik tělesa přímkou** viz SŠMÚ II str. 324–325.

11.9 Metrické stereometrické úlohy

V **metrických stereometrických úlohách** určujeme výpočtem (příp. konstrukčně) **vzdálenost dvou bodů v prostoru, vzdálenost bodu od přímky a od roviny**, jež se definují pomocí pojmu délka úsečky, dále **odchylky přímek a rovin**, jež se definují pomocí pojmu odchylka dvou přímek v rovině.

Příklad 1: Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky $a = 4$ cm. Vypočtěte vzdálenosti daných bodů, bodu a přímky, resp. roviny (S_{XY} značí střed úsečky XY):
a) $v(A, S_{GH})$, b) $v(S_{AF}, S_{BG})$, c) $v(H, \leftrightarrow AS_{CG})$,
d) $v(A, \leftrightarrow FH)$, e) $v(E, \leftrightarrow S_{EH}S_{EF}S_{AB})$.

Řešení: Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání danou krychli a v ní úsečky, jejichž délky jsou rovny hledaným vzdálenostem v.

a) $v = |AS_{GH}| = \sqrt{|AH|^2 + |HS_{GH}|^2} = 6$ cm,

b) $v = |S_{AF}S_{BG}| = \dfrac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2}$ cm,

c) $|AS_{CG}| = \sqrt{|AC|^2 + |CS_{CG}|^2} = 6$ cm, $P \in AS_{CG}$, $|\sphericalangle APH| = 90°$, $|\sphericalangle HAP| = 45°$,
$v = |HP| = |AP| = 4$ cm,

d) $v = |AS_{FH}| = \sqrt{|AF|^2 - |FS_{FH}|^2} = 2\sqrt{6}$ cm,

e) $P \in S_{EF}S_{EH}$, $|S_{EF}P| = |PS_{EH}|$, $v = |EP| = \sqrt{|ES_{EF}|^2 - |S_{FE}S_{EH}|^2} = \sqrt{2}$ cm.

Příklad 2: Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Vypočtěte v ní odchylku φ daných geometrických útvarů:
a) přímek AE, BH, b) přímky AG a roviny BCG,
c) přímky AS_{EG} a roviny CHD, d) rovin ABC a BDG,
e) rovin ABC a $S_{BF}S_{CG}S_{EH}$.

Řešení: Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání danou krychli a v ní úhly, jejichž velikosti jsou rovny hledaným odchylkám φ.

a) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi \doteq 54°44'$, b) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi \doteq 35°16'$,

c) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \varphi \doteq 24°6'$, d) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi \doteq 54°44'$,

e) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi \doteq 26°34'$.

Příklad 3: Je dána krychle s hranou délky a. Určete odchylky φ a) dvou stěnových úhlopříček, b) dvou tělesových úhlopříček, c) stěnové úhlopříčky a tělesové úhlopříčky.

Řešení: a) $\varphi = 0°$ (rovnoběžné úhlopříčky), $\varphi = 60°$ (strany rovnostranného trojúhelníku), $\varphi = 90°$ (kolmé úhlopříčky),

b) $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi \doteq 70°32'$,

c) $\sin\varphi = a : \left(a\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi \doteq 35°16'$, $\varphi = 90°$ (mimoběžné kolmé úhlopříčky).

U studentů s hlubším zájmem o matematiku je vhodné věnovat pozornost metrickým i dalším vlastnostem **pravidelných mnohostěnů** (tzv. **platonských**

těles), tj. konvexních mnohostěnů, jejichž stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky a z jejichž každého vrcholu vychází týž počet hran. Můžeme pro ně dokázat *základní větu*: Existuje právě pět pravidelných mnohostěnů: **pravidelný čtyřstěn** (tetraedr), **pravidelný šestistěn** nebo **krychle** (hexaedr), **pravidelný osmistěn** (oktaedr), **pravidelný dvanáctistěn** (dodekaedr) a **pravidelný dvacetistěn** (ikosaedr). Neexistenci jiných pravidelných mnohostěnů lze dokázat buď přímo na základě jejich definice, anebo užitím *Eulerovy věty*: Pro všechny konvexní mnohostěny platí vzorec $v + s = h + 2$, kde v je počet vrcholů, s počet stěn a h počet hran mnohostěnu.

11.10 Výpočetní stereometrické úlohy

Ve **výpočetních stereometrických úlohách** jde zpravidla o výpočty objemů a povrchu těles, příp. o stereometrické výpočty s užitím trigonometrie.

Geometrickým tělesem (stručně **tělesem**) se nazývá prostorový geometrický útvar ohraničený uzavřenou plochou, která do něho patří (a nazývá se jeho **hranice**). Každému geometrickému tělesu se přiřazuje jako jeho míra kladné číslo nazývané **objem tělesa** a značí se V. Propedeuticky se objemy některých jednoduchých těles (hranolu, válce, jehlanu, kužele, koule) probírají již na ZŠ. Přitom se vychází z intuitivního pojetí a modelové představy, že číselné hodnoty objemů těles se získávají jejich porovnáním se zvolenou **jednotkovou krychlí**. Na SŠ se pak přistupuje k formulaci *základních (charakteristických) vlastností objemu tělesa*:

1. Shodná tělesa mají sobě rovné objemy.
2. Těleso složené z několika nepronikajících se těles má objem rovný součtu objemů těchto těles (*aditivita objemu*).

Tato vlastnost se užívá např. při určování objemů těles, která se dají složit z konečného počtu nepronikajících se jednotkových krychlí.

Další významnou vlastnost objemů těles vyjadřuje tzv. **Cavalieriho princip**: Jestliže pro dvě tělesa T_1, T_2 téže výšky existuje rovina ϱ taková, že každá rovina σ s ní rovnoběžná ($\sigma \parallel \varrho$), která protíná těleso T_1 v rovinném obrazci O_1 ($\mathsf{O}_1 = \mathsf{T}_1 \cap \sigma$), protíná také těleso T_2 v rovinném obrazci O_2 ($\mathsf{O}_2 = \mathsf{T}_2 \cap \sigma$) a oba tyto obrazce mají stejný obsah ($S(\mathsf{O}_1) = S(\mathsf{O}_2)$), pak obě tělesa T_1, T_2 mají týž objem ($V(\mathsf{T}_1) = V(\mathsf{T}_2)$).

Historická poznámka. Tuto vlastnost objemů těles objevil a formuloval (v poněkud méně přesném vyjádření) v 17. století italský matematik *Bonaventura Cavalieri*, který byl žákem Galilea Galileiho.

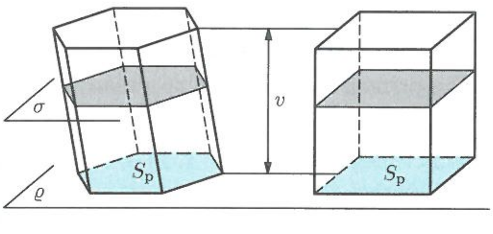
Cavalieriho princip se ve středoškolské matematice nedokazuje. (Dokázat jej lze až v integrálním počtu.) Můžeme jej názorně namodelovat např. pomocí sloupečku karet nebo mincí, který má týž objem, ať jsou položeny na sebe svisle nebo šikmo (při zachování výšky sloupečku). V současných učebnicích stereometrie se Cavalieriho princip užívá jako základní metoda k odvození vzorců pro objemy jednoduchých těles. Alternativní metody jejich odvození (nutné u složitějších těles) jsou založeny na limitách posloupností (kap. 10 čl. 10.3) a integrálním počtu (kap. 14 čl. 14.6).

Povrchem S **tělesa** T se rozumí obsah plochy, která je hranicí tělesa T. Je-li hranice tělesa složena z jednoduchých rovinných obrazců (např. mnohoúhelníků u mnohostěnů) nebo i v jiných případech ji lze „rozvinout" do rovinné sítě (např. u rotačního válce či kužele), pak povrch tělesa je roven součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se hranice (resp. síť hranice) skládá. V ostatních případech lze povrch tělesa určit přibližně touto metodou: Hranici tělesa pokryjeme tenkou vrstvou materiálu (např. alobalu nebo nátěru). Určíme hmotnost m materiálu, jeho objem $V = \dfrac{m}{\varrho}$ (kde ϱ je hustota materiálu) a odtud přibližně povrch tělesa $S \approx \dfrac{V}{d}$ (kde d je tloušťka materiálu).

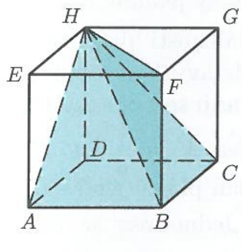
Poznámka. Uvedenou ideu vyjádření obsahu ploch pomocí objemu teoreticky zpracoval v 19. století německý matematik a fyzik *Hermann Minkowski.*

Odvození vzorců pro objem a povrch jednoduchých těles na SŠ

Vychází se ze *vzorce pro objem kvádru* o hranách délek a, b, c (odvozovaného empiricky již na ZŠ) $V = abc$; *speciálně pro objem krychle* o hraně délky a ze vzorce $V = a^3$. Pomocí vzorce pro objem kvádru užitím Cavalierova principu odvodíme vzorec pro objem hranolu: Pro libovolný hranol H s podstavou v rovině ϱ, která má obsah S_p, sestrojíme v rovině ϱ obdélník o témž obsahu S_p a doplníme jej na kvádr K o výšce v hranolu (obr. 11.42). Pro každou rovinu $\sigma \parallel \varrho$ platí $S(\sigma \cap \mathsf{H}) = S(\sigma \cap \mathsf{K})$ a odtud podle Cavalieriho principu $V(\mathsf{H}) = V(\mathsf{K})$, kde $V(\mathsf{K}) = abc = S_\mathrm{p}v$, tj. pro objem hranolu o obsahu podstavy S_p a výšce v platí vzorec $V = S_\mathrm{p}v$. *Povrch hranolu* je $S = 2S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pl}$, kde S_pl značí obsah pláště hranolu.



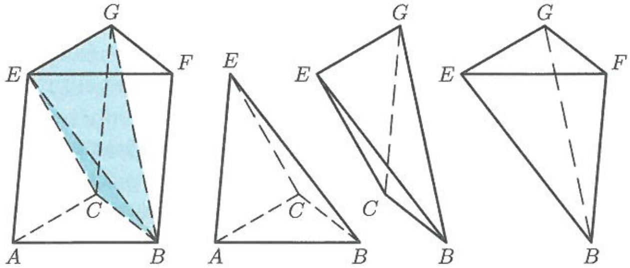
Obr. 11.42



Obr. 11.43

K empirickému odvození vzorců pro objemy dalších jednoduchých těles byly tradičně na ZŠ užívány duté modely těles (se shodnými podstavami a stejnými výškami), u nichž se porovnává objem vlévané vody. Jednoduchou motivaci vzorce pro objem jehlanu poskytuje na ZŠ a SŠ model krychle. Na obr. 11.43 krychle $ABCDEFGH$ je rozdělena rovinami ABH, BCH, BFH na tři shodné neprонikající se jehlany $ABCDH$, $BCGFH$, $ABFEH$ se čtvercovou podstavou. Podle 1. a 2. vlastnosti objemu každý z těchto jehlanů má objem V rovný třetině objemu krychle, tj. $V = \dfrac{1}{3}a^3 = \dfrac{1}{3}S_\mathrm{p}v$, kde $S_\mathrm{p} = a^2$, $v = a$.

Užitím Cavalieriho principu lze dokázat *vzorec pro objem libovolného jehlanu.* Nejprve jej dokážeme *pro trojboké jehlany.* Vyjdeme z libovolného trojbokého hra-



Obr. 11.44

nolu $ABCEFG$ (obr. 11.44). Roviny CBE a GBE rozdělují tento hranol H na tři nepronikající se jehlany $ABCE$, $EFGB$, $GCBE$, takže podle 2. vlastnosti objemu je $V(\mathsf{H}) = V(ABCE)+V(EFGB)+V(GCBE)$. Přitom platí (jako důsledek Cavalieriho principu), že $V(ABCE) = V(EFGB)$ (neboť podstavy ABC, EFG obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky a výšky jehlanů jsou si rovny) a $V(BFGE) = V(GCBE)$ (neboť podstavy BFG, GCB obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky a mají stejnou výšku). Všechny tři jehlany mají proto týž objem $V = \frac{1}{3}V(\mathsf{H}) = \frac{1}{3}S_\mathrm{p}v$, kde S_p je obsah podstavy a v výška jehlanu. Ke každému (libovolně zvolenému) jehlanu čtyřbokému či vícebokému můžeme určit (sestrojit) trojboký jehlan o témž obsahu podstavy S_p a téže výšce v tak, že pro oba jehlany platí Cavalieriho princip. (Neboť řezy rovinou $\sigma \parallel \varrho$, kde ϱ je rovina podstavy, jsou u obou jehlanů stejnolehlé s podstavou jehlanu, přičemž středy stejnolehlosti jsou hlavní vrcholy jehlanů a koeficient stejnolehlosti je u obou jehlanů $k = \frac{v'}{v}$, kde v a v' jsou vzdálenosti hlavních vrcholů jehlanů od rovin ϱ a σ. Tedy pro obsah řezu S a obsah podstavy S_p v obou jehlanech platí $S = k^2S_\mathrm{p}$. Protože se rovnají obsahy podstav, rovnají se i obsahy řezů.) Z Cavalieriho principu plyne, že oba jehlany mají stejný objem $V = \frac{1}{3}S_\mathrm{p}v$. *Povrch jehlanu* se určí podle vzorce $S = S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pl}$, kde S_pl je obsah pláště jehlanu.

Jednoduše se odvodí *vzorce pro povrch a objem pravidelného mnohostěnu (s-stěnu, $s = 4, 6, 8, 12, 20$)*: $S = sS_1$, kde $S_1 = n\left(\frac{a}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$ je obsah jedné jeho stěny (pravidelného n-úhelníku o straně délky a) a $V = \frac{1}{3}S\varrho$, kde S je povrch mnohostěnu a ϱ poloměr kulové plochy vepsané mnohostěnu. (Pravidelný s-stěn lze totiž rozložit na s pravidelných jehlanů, jejichž podstavami jsou jeho stěny, hlavní vrcholy mají ve středu kulové plochy vepsané do mnohostěnu (tj. v jeho těžišti) a výšky jehlanů jsou rovny poloměru této kulové plochy.)

Uvažujme dále kruhový válec a kužel o poloměru podstavy r a výšce v. Pro *objem kolmého (rotačního) či kosého válce* vyplývá bezprostředně z Cavalieriho principu, že je rovný objemu čtyřbokého hranolu (spec. kvádru) s týmž obsahem podstavy $S_\mathrm{p} = \pi r^2$ a se stejnou výškou v, tj. $V = \pi r^2 v$. Pro *povrch válce* platí vzorec $S = 2S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pl}$ (kde S_pl je obsah pláště válce) a speciálně *pro rotační válec* $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r(r + v)$.

Pro *objem kolmého (rotačního) či kosého kužele* plyne obdobně z Cavalieriho principu, že se rovná objemu čtyřbokého jehlanu s týmž obsahem podstavy $S_p = \pi r^2$ a se stejnou výškou v, tj. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$. Pro *povrch kužele* platí vzorec $S = S_p + S_{pl}$ (kde S_{pl} je obsah pláště kužele) a speciálně *pro rotační kužel* $S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s)$, kde s je délka strany rotačního kužele.

Užitím Cavalieriho principu lze odvodit též *vzorec pro objem koule* (o poloměru r): $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (a vzorce pro objem kulové úseče, kulové vrstvy a kulové výseče), jednodušší je odvození pomocí integrálního počtu (viz kap. 14 čl. 14.6). Jeho užitím se snadno odvodí též *vzorec pro povrch koule* (tj. obsah kulové plochy) $S = 4\pi r^2$ a *vzorec pro obsah kulového vrchlíku, resp. kulového pásu* $S = 2\pi r v$, kde r je poloměr kulové plochy a v výška jejího vrchlíku, resp. pásu. Tento nesamozřejmý vzorec se obvykle uvádí ve stereometrii bez důkazu; pro zapamatování je vhodné uvést též jeho zajímavou geometrickou interpretaci: Obsah S představuje plášť válce o poloměru podstavy r (rovném poloměru celé koule!) a výšce v (rovné výšce vrchlíku, resp. pásu).

Historické poznámky. Starověký egyptský Rhindův papyrus (z první poloviny 2. tisíciletí př. n. l.) obsahuje úlohy na výpočet objemu obilnic (obilních sýpek) tvaru kvádru (spec. krychle) a kruhového válce, *Moskevský papyrus* (z téhož období) obsahuje návod na výpočet objemu komolého jehlanu (pyramidy). Ze *starověké Mezopotámie* (z období Starobabylonské říše v 1. polovině 2. tisíciletí př. n. l.) se zachovaly hliněné tabulky, které obsahují praktické úlohy na výpočet objemů nebo rozměrů různých staveb (domů, náspů, přehrad, kanálů, opevnění apod.), avšak bez použití současné geometrické terminologie. Obdobné úlohy o výpočtech objemů těles ze stavební praxe jsou obsaženy v 5. kapitole *staročínské Matematiky v devíti kapitolách* (z 1. stol. př. n. l.). V *Eukleidových Základech* (4.–3. stol. př. n. l.) nejsou uváděny praktické návody na výpočet objemů těles, ale pouze teorie o jejich poměrech apod. Ve XIII. knize Eukleides přináší důkaz, proč neexistuje více než pět pravidelných mnohostěnů (podle filozofa *Platona* z 5.–4. stol. zvaných *Platonova tělesa* či *platonská tělesa*). *Archimedes ze Syrakus* (3. stol. př. n. l.) odvodil pravidla pro výpočet povrchu a objemu koule. (Tento svůj objev považoval za tak významný, že žádal, aby po jeho smrti na náhrobku měl vyobrazenou kouli s opsaným válcem. Když pak 100 let po Archimedově tragické smrti navštívil Cicero jako římský kvestor Syrakusy, našel podle tohoto vyobrazení neudržovaný Archimedův hrob.) Souhrnně byla pravidla pro výpočet objemů těles obsažena spolu s praktickými aplikacemi v díle *Metrica Herona z Alexandrie* (1. stol.) a v matematické sbírce *Pappa z Alexandrie* (3.–4. stol.), který vyslovil obecné pravidlo pro výpočet objemů rotačních těles. Znovu je objevil německý pražský hvězdář a matematik *Johannes Kepler* (16.–17. stol.) a použil k výpočtům objemů rotačních těles, mj. objemu sudů. Významný švýcarský matematik *Leonhard Euler* (18. stol.) studoval mnohostěny a vyslovil pro konvexní mnohostěny i některé nekonvexní mnohostěny (tzv. *Eulerovy mnohostěny*) výše citovanou větu o vztahu mezi počtem vrcholů, stěn a hran mnohostěnu.

Příklad 1: Vypočtěte, o kolik procent se zvětší objem krychle, jestliže se její hrana délky a zvětší o 15 %.

Řešení: $V - V_o = (1{,}15^3 - 1)a^3 \doteq (1{,}52 - 1)a^3 \doteq 0{,}52a^3$, tj. zvětší se přibližně o 52 %.

Příklad 2: Vypočtěte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana má délku $a = 4$ cm a odchylka jeho boční hrany od roviny podstavy je $\varphi = 60°$.

Řešení: $V = \frac{1}{3}a^2 v$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{v}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} \Rightarrow v = \frac{a}{2}\sqrt{6}$, takže $V = \frac{1}{6}a^3\sqrt{6} \doteq 26\ \text{cm}^3$,

$S = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a v_a}{2}$, kde $v_a = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}a$, takže $S = \left(1 + \sqrt{7}\right)a^2 \doteq 58\ \text{cm}^2$.

Příklad 3: Vypočtěte povrch a objem pravidelného čtyřstěnu o hraně délky a.

Řešení: Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky o obsahu $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, takže jeho povrch je $S = 4S_1 = a^2\sqrt{3}$ a objem $V = \dfrac{1}{3}S_1 v =$ $= \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3}{12}\sqrt{2}$. (Výpočet výšky v užitím Pythagorovy věty viz SŠMÚ II str. 327 a 607.)

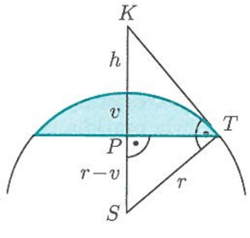
Příklad 4: Vypočtěte povrch a objem pravidelného osmistěnu o hraně délky a.

Řešení: Stěny pravidelného osmistěnu jsou opět shodné rovnostranné trojúhelníky o obsahu $S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, je jich osm, takže jeho povrch je $S = 8S_1 = 2a^2\sqrt{3}$ a jeho objem $V = 2\cdot\dfrac{1}{3}S_{\mathrm{p}}v = 2\cdot\dfrac{1}{3}a^2\cdot\dfrac{a}{2}\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{3}\sqrt{2}$. (Výška v je délka strany čtverce o úhlopříčce délky $a \Rightarrow v = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$.)

Příklad 5: Osovým řezem rotačního válce je čtverec o obsahu $a^2 = 25\ \mathrm{cm}^2$. Vypočtěte objem a povrch tohoto válce.

Řešení: $V = S_{\mathrm{p}}v = \pi\dfrac{a^2}{4}\cdot a = \dfrac{\pi}{4}a^3 = \dfrac{125}{4}\pi\ \mathrm{cm}^3 \doteq 98\ \mathrm{cm}^3$, $S = 2S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pl}} = 2\pi r(r+v) =$ $= 2\pi\cdot\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{a}{2}+a\right) = \dfrac{3}{2}\pi a^2 = \dfrac{75}{2}\pi\ \mathrm{cm}^2 \doteq 118\ \mathrm{cm}^2$.

Příklad 6: Jakou část zemského povrchu vidí kosmonaut z výšky $h = 350$ km nad povrchem Země? (Poloměr kulového modelu Země je $r \doteq 6\,370$ km.)



Obr. 11.45

Řešení (viz PSM str. 536): Kosmonaut v libovolném místě K vidí kulový povrch Země (obr. 11.45) o obsahu $S = 2\pi rv$. Podle Eukleidovy věty o odvěsně pro pravoúhlý $\triangle KTS$ $|ST|^2 = |SK|\cdot|SP|$ čili $r^2 = (r+h)(r-v)$, odkud $v = r\left(1 - \dfrac{r}{h+r}\right)$, a tedy $S =$ $= 2\pi r^2\left(1 - \dfrac{r}{r+h}\right)$. Povrch Země je přibližně $S_Z = 4\pi r^2 \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{r}{r+h}\right)S_Z \doteq$ $\doteq 0{,}026S_Z$, takže kosmonaut vidí z výšky $h = 350$ km přibližně 2,6 % zemského povrchu.

Velmi vhodným aktuálním zdrojem úloh z **matematizace reálných situací** v tematickém okruhu „Prostor a tvar“ je publikace o Mezinárodním výzkumu PISA 2012. (Obsahuje též praktické úlohy z matematických okruhů „Kvantita“, „Změna a vztahy“, „Neurčitost a data“.)