Prof. RNDr. Jan Kopka, CSc.

Jak řešit matematické problémy

Několik strategií řešení problémů

Hrozny úloh

Řešení problémů pomocí zkoumání

Knížka je pro vás, kteří jste si oblíbili matematiku a chcete poznat, jak přistupovat k řešení matematických úloh. Máte zde možnost poznat několik základních strategií (přístupů) k řešení úloh. Tyto strategie pak můžete využít při řešení nejrůznějších dalších úloh.

Vždy, když nějakou úlohu vyřešíte, je to velký úspěch a měli byste ho využít při řešení podobných úloh.

Také poznáte, jak užitečné v matematice je experimentování. Až budete knížku číst a spolu s autorem řešit úlohy, budete si v praxi osvojovat charakteristické chování matematiků.

Obsah:

1. Úvod

Současný český matematik světové úrovně **profesor Petr Vopěnka** řekl:

„Stěží lze nalézt jinou činnost, která by svými několika tisíci lety prověřenými zkušenostmi mohla být účinnější pro rozvíjení myšlení, abstrakce, představivosti a schopnosti řešit problémy, než je pěstování matematiky.“

Výše uvedený citát je dobrou motivací pro knížku, kterou máte před sebou.

Autor knížky dodává:

„Pokud chci někomu ukázat, co je to matematika, pak s ním budu řešit matematické problémy. Musíme je ale řešit tak, jak je v matematice zvykem. Pod vlivem matematiky bychom se tak mohli stát lepšími řešiteli problémů. A proto se v této knížce budeme zabývat právě jejich řešením.“

Knížka má čtyři části.
Po tomto úvodu si ukážeme několik **strategií** (postupů), které matematikům pomáhají při řešení problémů. Pokud vyřešíme první úlohu, pak ji můžeme „obalit“ podobnými úlohami a tím vytvoříme tzv. **hrozen problémů**. V závěru ukážeme, jak pomocí **zkoumání** můžeme vyřešit nějaké problémy, popřípadě jak zkoumáním matematických situací můžeme vytvářet nové problémy, a ty vyřešit.

Začněme jednoduchým, ale zajímavým problémem, který o knížce leccos napoví.

Problém 1: Zvolte libovolné trojciferné číslo a toto číslo napište dvakrát za sebou. Vzniklé šesticiferné číslo dělte číslem 7, získaný výsledek dělte číslem 11 a tento další výsledek ještě číslem 13. Zkoumejte, co dostanete.

Řešení: Než budete pokračovat ve čtení, vyzkoušejte si několikrát to, co požaduje zadání problému. My, stejně jako vy, začneme experimentováním. Uvažujme *např.* trojciferné číslo 412. Napíšeme-li ho dvakrát za sebou, vznikne šesticiferné číslo 412 412. Požadovaným dělením dostaneme:

$$412\,412 : 7 = 58\,916, \quad 58\,916 : 11 = 5\,356, \quad 5\,356 : 13 = 412.$$

Získali jsme trojciferné číslo, které jsme na začátku zvolili. Pokud experiment několikrát zopakujeme (s různými výchozími trojcifernými čísly), vždy obdržíme trojciferné číslo, z něhož jsme vyšli. Můžeme proto vyslovit hypotézu (domněnku):

Hypotéza: Pokud s jakýmkoliv trojciferným číslem uděláme výše popsaný postup, pak vždy na závěr dostaneme trojciferné číslo, z něhož jsme vyšli.

Hypotézu můžeme **ověřit** ještě na dalších příkladech, ale my máme na to, abychom ji **dokázali**. Jedna možnost by byla, že bychom vyzkoušeli všech 900 trojciferných čísel. To by však byla i za použití kalkulačky velmi zdlouhavá práce, a proto budeme postupovat jinak.

Následující **důkaz** je vhodný pro toho, kdo se již seznámil s proměnnými pro čísla.

Nechť abc značí výchozí trojciferné číslo (a jsou stovky, b desítky a c jednotky). Napíšeme-li toto číslo dvakrát za sebou, dostaneme šesticiferné číslo $abc\,abc$. Pokud toto číslo rozepíšeme a upravíme, dostaneme:

$$abc\,abc = a\cdot 10^5 + b\cdot 10^4 + c\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = a\cdot 100\,100 + b\cdot 10\,010 + c\cdot 1\,001 = \\ = 1\,001\,(a\cdot 100 + b\cdot 10 + c)$$

Pro číslo 1 001 platí: $1\,001 = 7\cdot 11\cdot 13$, a proto je dělitelné čísly 7, 11 a 13. Po uvedeném dělení tedy číslo 1 001 „zlikvidujeme“ a dostaneme tak číslo v závorce. V závorce je v rozepsaném tvaru trojciferné číslo abc, z něhož jsme vyšli. □

Symbol □ značí konec důkazu nebo konec řešení problému.

Dokázanou hypotézu můžeme nyní přejmenovat na **matematickou větu**.

Přidejme další zajímavý problém.

Problém 2: Je dána čtvercová tabulka 8×8. Doplňte její políčka čísly 1, 0, –1 tak, aby součty čísel ve všech řádcích, sloupcích a obou úhlopříčkách byly navzájem různé.

Jedná se vlastně o jakýsi antiproblém k problému *Sestrojte magický čtverec* (viz kap. 3), v němž musí být všechny uvedené součty stejné (tam však máme k dispozici na dosazování více čísel a každé může být v tabulce jenom jednou).

Řešení: Abychom do problematiky lépe pronikli a zároveň se pokusili nalézt řešení, budeme **experimentovat**. Protože však tabulka 8×8 je příliš velká a experimentování by trvalo dlouho, vezmeme si místo ní *např.* tabulku 3×3 a pokusíme se do ní vložit čísla 1, 0, –1 tak, aby uvedené součty byly různé. Zvolili jsme **strategii zjednodušení**. Jeden z experimentů je znázorněn na obr. 1.

0	0	0
0	1	0
1	1	–1

Obr. 1

Ihned je vidět, že uvedený experiment nevyšel, protože *např.* součet čísel v prvním sloupci a v druhém řádku je 1. Než budete pokračovat ve čtení, udělejte několik experimentů vy. Po několika experimentech zřejmě zjistíte, že vám to stále nevychází. Je to naše neschopnost nebo problém řešení nemá? Budeme zřejmě muset zvolit jiný postup.

Zamysleme se, kolik různých tříčlenných součtů můžeme vytvořit z čísel 1, 0, –1. Nejmenší z těchto součtů bude –3 a největší 3. Samozřejmě můžeme vytvořit i součty –2, –1, 0, 1, 2. Těchto součtů je celkem 7. Kolik různých součtů však máme vytvořit v tabulce 3×3? Řádky jsou 3, sloupce jsou také 3 a úhlopříčky 2, to je dohromady 8 různých součtů.

Závěr: Náš zjednodušený problém je neřešitelný.

Vraťme se však k původnímu problému. Nyní můžeme zcela analogicky říci, že i problém s tabulkou 8×8 je neřešitelný. Různých možných součtů je 17, ale požadovaných součtů v tabulce je 18.

Odpověď: Problém je neřešitelný. □

Problém 2 zní velmi jednoduše, ale my jsme zjistili, že je neřešitelný. I to se občas stává, zvláště když matematickými prostředky řešíme nějaké nematematické problémy.

Problém 2 teď můžeme **zobecnit** pro libovolnou tabulku $n \times n$, kde n je přirozené číslo. Je vidět, že zadáme-li jakoukoli takovouto tabulku a doplňovaná čísla jsou stále 1, 0, –1, pak problém je neřešitelný, neboť jsme schopni z těchto čísel vytvořit $2n + 1$ různých součtů, ale problém jich vyžaduje $2n + 2$.

Čtenář nyní může vytvořit další podobné problémy. O změně velikosti tabulky jsme již hovořili. Jak jinak problém změnit? *Např.* tak, že znění problému 2 ponecháme až na to, že doplňovaná čísla budou *např.* 3, 2, 1, 0, –1. Řešení tohoto problému, případné vytvoření dalších spřízněných problémů, již přenecháme čtenáři.

Zabývejme se krátce historií. *Např.* už v antickém Řecku žáci museli řešit jeden z problémů, který patří mezi tak zvané cisternové problémy.

Problém 3: *Jsem mosazný lev a mými chrliči jsou mé dvě oči, tlama a tlapa mé pravé nohy. Moje pravé oko naplní nádrž za dva dny, moje levé oko za tři dny a moje tlama za čtyři dny. Moje tlapa je schopna naplnit ji za šest hodin. Řekni mi, za jak dlouho naplní nádrž všechny chrliče dohromady.*

Historický problém 3 řešit nebudeme, ale místo něj vyslovíme jednodušší analogický problém a ten vyřešíme.

Problém 4: Do nádrže vedou dva přítoky. První přítok naplní nádrž za 2 hodiny a druhý za 3 hodiny. Za jak dlouho naplní nádrž oba přítoky dohromady?

Pokuste se nejprve odhadnout, jak dlouho by to mohlo trvat.

Řešení: Položme si otázku, kolik vody nateče do nádrže za hodinu. První přítok naplní polovinu nádrže a druhý její třetinu.

Oba přítoky naplní za hodinu $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ nádrže.

V dalším čase se musí naplnit ještě $\frac{1}{6}$ nádrže.

Tento čas spočítáme trojčlenkou:

za 1 hodinu .... $\frac{5}{6}$ nádrže

za x hodin .... $\frac{1}{6}$ nádrže

$x = \frac{1}{5}$ (hodiny)

Protože $\frac{1}{5}$ hodiny je 12 minut, můžeme odpovědět:

Odpověď: Nádrž se oběma přítoky naplní za 1 hodinu a 12 minut.

Většina z nás asi řešila úlohu o převozníkovi nebo o ní alespoň slyšela. Jistě však budete všichni překvapeni, že se tato úloha objevila již ve středověké sbírce s názvem Propositiones ad acuendos iuvenes (Úlohy k bystření mladíků). Autorem byl anglosaský mnich Alkuin, který žil v letech 735 až 804. Úloha tehdy zněla takto:

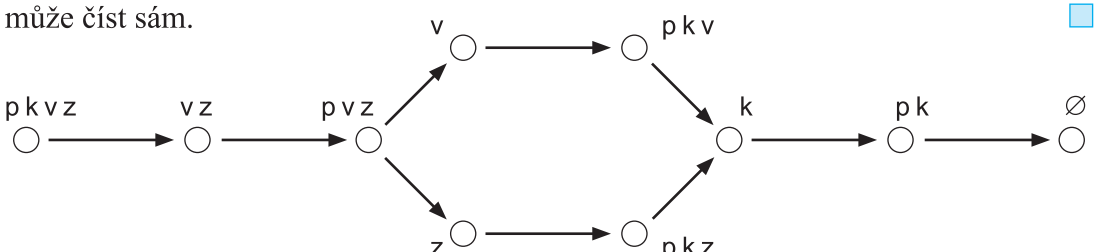
Problém 5 – Úloha o vlku a koze a hlávce zelí:
Nějaký muž měl převézt přes řeku (tam nebo zpět) vlka a kozu a hlávku zelí, a nemohl najít jinou loďku než takovou, která byla schopna uvézt jen dva z nich. Bylo mu však nařízeno, že má všechny převézt úplně nepoškozené. Řekni, jak je mohl nepoškozené převézt.

Výsledek řešení: Nebudeme se zde zabývat vlastním řešením. Čtenáři však radíme, aby se pokusil problém vyřešit **pomocí experimentování** za pomoci vlastní intuice.

My zde pouze udáme pomocí obrázku výsledek (viz obr. 2). Účastníky problému v něm označíme prvními písmeny, tj. p (převozník), k (koza), v (vlk) a z (zelí). V obrázku vypisujeme situaci na výchozím břehu.

Úloha tedy začíná situací $\{p, k, v, z\}$ a končí situací, kdy na tomto břehu už nic není. Každá šipka představuje jednu plavbu přes řeku.

Aby čtenář obrázku rozuměl, popíšeme aspoň začátek: První šipka představuje první plavbu přes řeku. Při ní převáží **p**řevozník **k**ozu a na výchozím břehu zůstal **v**lk a **z**elí (vlk zelí nežere). Pak se **p**řevozník vrátil a to znamená, že na výchozím břehu je **p**řevozník, **v**lk a **z**elí. Horní větev představuje situaci, kdy **p**řevozník převáží na druhou stranu **z**elí, a to znamená, že na výchozím břehu zůstal **v**lk. Dolní větev pak představuje situaci, kdy **p**řevozník převáží **v**lka, a to znamená, že na výchozím břehu zůstalo **z**elí. Doufáme, že teď je již čtenáři jasné, co obrázek vypovídá, a že ho dále může číst sám.



Obr. 2

Z obrázku 2 je vidět, že úloha má dvě řešení. Alkuin však ve své sbírce uvádí pouze to řešení, které odpovídá dolní větvi.

Převoznických úloh bylo ve sbírce více. Mezi úlohami, které Alkuin nazývá Úlohy zcela nematematické, je *např.* následující úloha o volovi: *Kolik kroků udělá v poslední brázdě vůl, který celý den orá?*

Alkuinova odpověď je jednoduchá: Vůl neudělá v poslední brázdě žádný krok, protože jde před pluhem (který brázdu dělá).

Toto je hezká úloha na logické uvažování.

Teď se vrátíme do současnosti a **pokusíme se vysvětlit pojem problém.**

Při vysvětlení pojmu problém se budeme opírat o tři hlavní složky, které problém má. Jsou to (viz obr. 3):

Obr. 3

1. **Výchozí situace,** v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme potřebné informace nebo údaje.
2. **Koncová situace** (cíl), kterou chce řešitel dosáhnout.
3. **Cesta** od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může (ale také nemusí) být zřejmá či dosažitelná.

Obr. 4

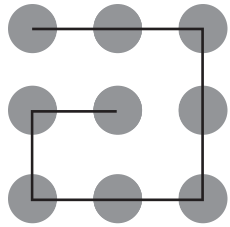
Jestliže je výchozí situace popsána, koncová situace (cíl) je zadána a cesta není známa, pak problém nazýváme **úloha** (viz obr. 4). Právě úlohy nás budou nejvíc zajímat.

Pokud bychom znali nejen výchozí a koncovou situaci, ale i cestu, pak se tento problém nazývá **cvičení**. Při řešení cvičení nemusíme moc myslet, pouze si upevňujeme to, co už víme.

Pokud chceme nějakou úlohu řešit, musíme si dobře uvědomit výchozí situaci, tedy

Od této chvíle tedy budeme místo problém říkat **úloha**.

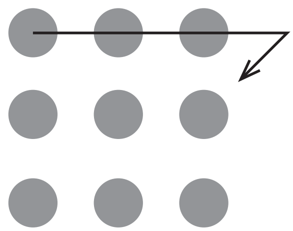
Úloha 6: Na obrázku 5 je 9 bodů (koleček), které jsou uspořádány do čtverce. Dále je zde čtyřikrát lomená čára, která prochází všemi těmito body. Pokuste se sestrojit pouze třikrát lomenou čáru, která bude také procházet všemi devíti body.



Obr. 5

Pokuste se tuto čáru sestrojit a pak teprve pokračujte ve čtení.

Řešení: Pokud čáru zkoušíte sestrojit tak, aby zlomy byly v některém z uvedených bodů, pak jste si sami přidali podmínku, která v naší úloze není uvedena. Úloha s touto přidanou podmínkou je neřešitelná. Pokud tedy tuto podmínku vypustíme, pak dostatečná pomoc při sestrojení požadované čáry je znázorněna na obr. 6. □

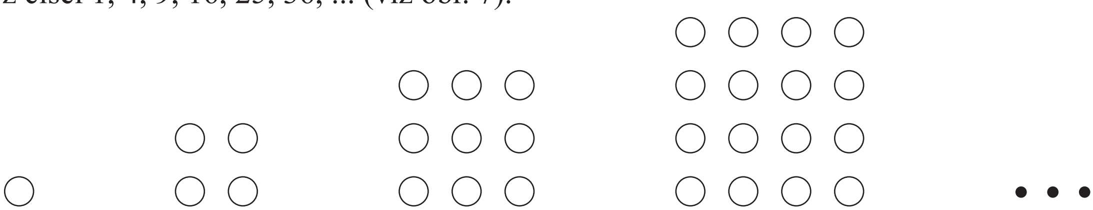


Obr. 6

Velmi často se některé úlohy dají řešit různými způsoby. Ukážeme to při řešení další úlohy. Než však budete naše řešení číst, pokuste se vyřešit úlohu sami. Pokud vaše řešení bude jiné než námi uvedená řešení, bude to jen dobře.

Úloha 7 (o farmáři): Farmář pěstuje zelí vždy na jednom čtvercovém záhonu. Tento rok obsahuje jeho čtvercový záhon o 23 hlávek zelí více než loňský rok. Kolik hlávek zelí pěstuje letos?

Počet hlávek zelí v každém roce je vyjádřen tzv. čtvercovým číslem, tj. některým z čísel 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... (viz obr. 7).



Obr. 7

Dál ukážeme různé způsoby řešení úlohy 7:

Řešení pomocí systematického experimentování:

Začneme experimentovat. Pokud by v minulém roce farmář pěstoval 1 hlávku zelí, pak by letos pěstoval $1 + 23 = 24$ hlávek zelí. Takhle to však být nemohlo, protože 24 není čtvercové číslo. Pokud by v minulém roce farmář pěstoval 4 hlávky zelí, pak by letos pěstoval $4 + 23 = 27$ hlávek zelí. Takhle to však také být nemohlo, protože 27 není čtvercové číslo. Budeme v experimentování systematicky pokračovat a výsledky vložíme do tabulky (viz tab. 1).

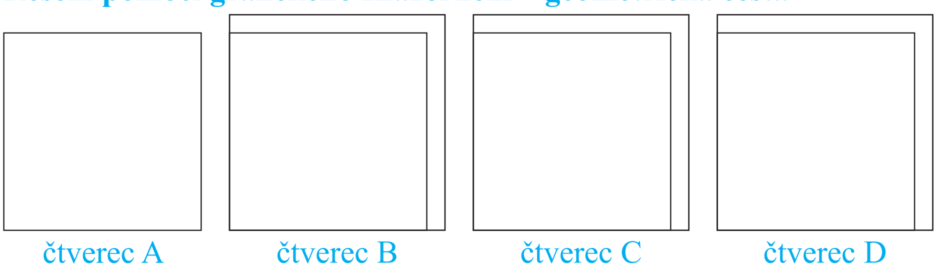
vloni	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
letos	24	27	32	39	48	59	72	87	104	123	144	167

Tabulka 1

Nyní budeme zkoumat druhý řádek tabulky. Prohlížíme-li ho zleva doprava, pak první čtvercové číslo je 144, což je 12^2. Jedno možné řešení je tedy: *vloni* 121 *hlávek zelí, letos* 144 *hlávek zelí*. Existují ještě nějaká další řešení? Další řešení však již neexistují, protože rozdíl mezi sousedními čtvercovými čísly se stále zvětšuje. Tyto rozdíly tvoří postupně posloupnost 3, 5, 7, 9, 11 atd. a tedy jednou nabude rozdíl hodnotu 23, a pak již bude tato hodnota stále větší a větší.

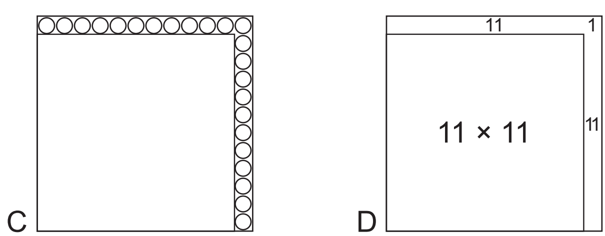
Odpověď: V letošním roce pěstuje farmář 144 hlávek zelí.

Řešení pomocí grafického znázornění – geometrická cesta



Obr. 8

Čtverec A představuje záhon v loňském roce. Protože nevíme, kolik hlávek obsahoval, nevyplníme ho. Čtverec B představuje rozšířený záhon v letošním roce. Jako znázornění cílového stavu jej také nevyplníme. Další dva čtverce můžeme nazvat pracovní. Do rozšíření čtverce C doplníme vhodným způsobem hlávky zelí, které jsou navíc. Po všech možných pokusech (experimentování – rozšíření o jednu, dvě, tři, atd. řady) zjistíme, že to lze udělat jediným způsobem: 23 = 11 + 11 + 1 (viz obr. 9). Nyní můžeme doplnit celý čtverec D a získáme tak odpověď na předloženou otázku (odpověď viz výše).



Obr. 9

Řešení pomocí rovnice – algebraická cesta:

Označíme x^2 počet hlávek zelí tento rok a y^2 počet hlávek v minulém roce. Pak můžeme sestavit rovnici:

$$x^2 - y^2 = 23$$

Tato rovnice nevypadá příliš sympaticky. Pokud však uděláme následující úpravu, bude situace vypadat trochu lépe. Levou stranu lze rozložit (jde o rozdíl čtverců) a dostaneme:

$$(x + y) \cdot (x - y) = 23$$

Čísla $(x + y)$ a $(x - y)$ jsou přirozená a číslo $(x + y)$ je větší než $(x - y)$. Číslo 23 je prvočíslo a má pouze dva dělitele: 1 a 23. Proto můžeme pomocí naší rovnice sestavit soustavu dvou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 23 \\ x - y &= \ \ 1 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme **$x = 12$** a **$y = 11$**. (Odpověď viz výše.) □

Úlohu 7 můžeme řešit i jinými způsoby, *např.* experimentováním **pokus – omyl**. (Náhodně volíme počet hlávek vloni a zjišťujeme, jestli nám letos vyjde čtvercové číslo. Toto opakujeme dokud nám nevyjde čtvercové číslo).

Vyřešení úlohy 7 by však nemělo znamenat, že se touto problematikou přestaneme zabývat. Proto hned po nějakém vyřešení úlohy bychom ji mohli začít pozměňovat.

Např.:
- Změníme počet hlávek zelí, jímž se liší loňský a letošní rok. *Např.* letos o 11 hlávek víc než vloni.
- Změníme tvar záhonů. Budeme uvažovat *např.* obdélníkové záhony, kde délky stran obdélníků jsou v poměru 1 : 2.
- Změníme počet záhonů. Zelí může být pěstováno na dvou nebo i více záhonech.

Uveďme jedno pozměnění úlohy 7.

Změníme počet hlávek zelí, jímž se liší loňský a letošní rok.

Úloha 8: Farmář pěstuje zelí vždy na jednom čtvercovém záhonu. Tento rok obsahuje jeho čtvercový záhon o 21 hlávek zelí více než loňský rok. Kolik hlávek zelí pěstuje letos?

Výsledek: Tato nová úloha má dvě řešení.

Jedno řešení je: vloni 100 hlávek, letos 121 hlávek.

Druhé řešení je: vloni 4 hlávky, letos 25 hlávek. □

Ještě ukážeme další možné přístupy při řešení následující úlohy. Tato úloha je pravděpodobně v různých obměnách známá na celém světě a u nás ji někdy umí řešit i žáci prvního stupně ZŠ.

Úloha 9: Prasata a slepice

Tentýž farmář jako v předchozí úloze jednou vyhlédl z okna na dvorek. A protože jeho dcera potřebovala procvičování v matematice, povídá jí po chvilce: Na dvorku jsou pouze prasata a slepice. Napočítal jsem tam 23 hlav a 76 nohou. Můžeš mi říci, kolik je tam prasat a kolik slepic?

Nejprve se pokuste úlohu vyřešit sami a teprve pak se podívejte na naše řešení.

Řešení pomocí strategie pokus – omyl:

Budeme zcela náhodně volit počet slepic a prasat tak, aby jich bylo dohromady 23 a budeme počítat, kolik mají dohromady nohou. Zápis může vypadat následovně:

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 4 = 40 \\ \underline{13 \cdot 2 = 26} \\ 66 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \cdot 4 = 48 \\ \underline{11 \cdot 2 = 22} \\ 70 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \cdot 4 = 72 \\ \underline{5 \cdot 2 = 10} \\ 82 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \cdot 4 = 68 \\ \underline{6 \cdot 2 = 12} \\ 80 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathbf{15} \cdot 4 = 60 \\ \underline{\mathbf{8} \cdot 2 = 16} \\ \mathbf{76} \end{array}$$

Podařilo se nám v posledním řádku získat 76 nohou, a tak jsme dostali jedno možné řešení.

Odpověď: Na dvorku je 15 prasat a 8 slepic.

Řešení pomocí strategie pokus – ověření – oprava:

Při této strategii uděláme první odhad počtu slepic a prasat (dohromady je jich 23) a spočítáme počet nohou. Druhý odhad již uděláme pomocí získaného výsledku. Zvětšíme počet prasat. Počty zvířat měníme tak, aby se počet nohou co nejrychleji dostal k číslu 76. Pokud budeme jednotlivé kroky zaznamenávat do tabulky, může tabulka vypadat následovně (viz tabulka 2):

	Počet prasat	Počet slepic	Počet všech nohou	Rozdíly
První odhad	9	14	64	
Druhý odhad	10	13	66	+2
Třetí odhad	12	11	70	+4
Čtvrtý odhad	15	8	76	+6

Tabulka 2

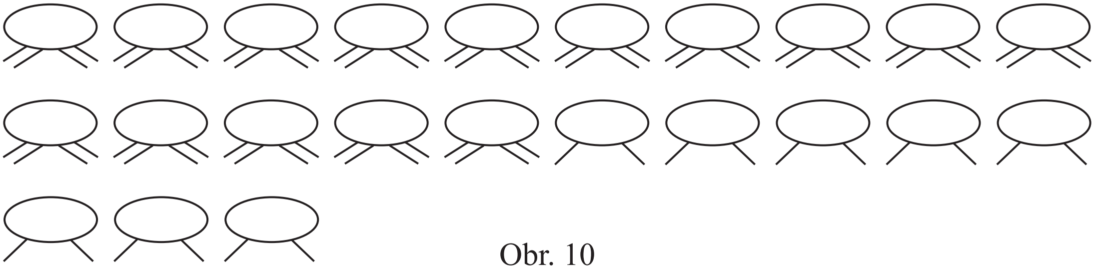
Poslední řádek představuje řešení.

Odpověď jsme vyslovili již dříve.

Řešení pomocí grafického znázornění – geometrická cesta:

Načrtnutí obrázku obvykle umožní vhled do problematiky a také pomůže nalézt řešení. Můžeme postupovat *např.* tak, že si načrtneme 23 oválků odpovídajících počtu zvířat na dvoře a u každého zakreslíme 2 nohy. Pak dokreslujeme ke zvířatům po dvou nohách (tím nahrazujeme slepice prasaty) tak dlouho, až splníme požadavek, že nohou je 76.

Získané řešení je znázorněno na obr. 10.



Obr. 10

Pokročilejší fáze tohoto přístupu by mohla vypadat následovně: Kdyby na dvoře byly jenom slepice, pak by na dvoře bylo $23 \cdot 2 = 46$ nohou. Protože je jich tam ale 76, tak 30 nohou zbývá. To je 15 dvojic. Tzn. že 15 zvířat má 4 nohy a zbylá zvířata mají nohy 2. Tak dostáváme odpověď, kterou jsme uvedli již dříve. Tady také vycházíme z obrázkového řešení, ale obrázek si jen představujeme a přitom počítáme.

Toto řešení bychom mohli označit jako **řešení úsudkem**.

Řešení pomocí rovnice – algebraická cesta:

Jestliže počet prasat označíme p a počet slepic s, pak můžeme sestavit následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} p + s &= 23 \\ 4p + 2s &= 76 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy dostaneme: $\boldsymbol{p = 15}$ a $\boldsymbol{s = 8}$.
Odpověď jsme vyslovili již dříve.

Nyní můžeme začít úlohu obměňovat. Můžeme měnit počet hlav i počet nohou, ale můžeme nahrazovat i zvířata. Tak vytvoříme hrozen úloh. Pokuste se vyřešit následující tři úlohy z tohoto hroznu.

Úloha 10: Farmář se dívá z okna a vidí prasata a slepice. Říká dceři: Napočítal jsem 90 hlav a 292 nohou. Kolik je prasat a kolik slepic?

Odpověď: Na dvoře je 56 prasat a 34 slepic.

Úloha 11: V cykloprodejně mají jízdní kola a tříkolky. Dohromady mají 37 sedel a 86 kol. Kolik je v prodejně jízdních kol a kolik tříkolek?

Odpověď: V prodejně mají 25 jízdních kol a 12 tříkolek.

Úloha 12: Marťanský farmář se dívá z okna a vidí na dvoře trojnožky a pětinožky, přičemž trojnožky mají jednu hlavu a pětinožky dvě hlavy. Povídá svému synovi: Napočítal jsem 48 hlav a 131 nohou. Kolik je trojnožek a kolik pětinožek?

Odpověď: Na dvoře je 22 trojnožek a 13 pětinožek.

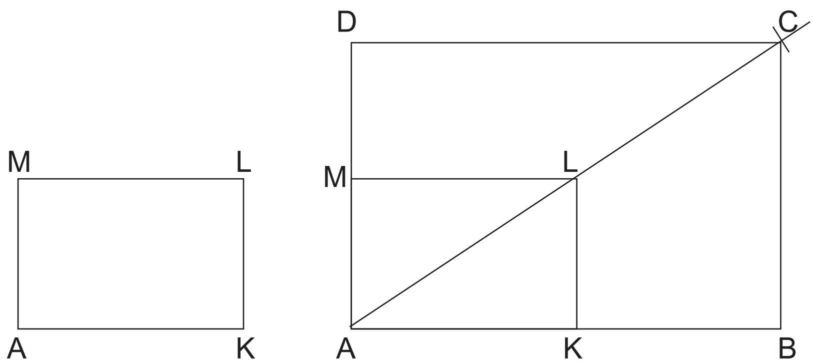
2. Několik strategií řešení problémů

Matematikové už od starověku vymýšleli **strategie (postupy)**, které by jim pomáhaly řešit problémy. Tak vznikla disciplína zvaná heuristika (česky Umění objevu). K rozvoji této disciplíny přispívali největší matematikové historie. V centru heuristiky jsou právě tyto strategie. Nyní vám jich několik při praktickém použití ukážeme.

Nejprve ukážeme, jak úlohu vyřešíme pomocí **vypuštění podmínky**.

Úloha 13: Sestrojte obdélník ABCD, jehož strany jsou v poměru 3 : 2 a jehož úhlopříčka má délku 7 cm.

Řešení: Je těžké sestrojit obdélník, který splňuje najednou obě požadované podmínky. Vypustíme-li podmínku „úhlopříčka má délku 7 cm“, dostáváme úlohu velmi jednoduchou. Sestrojíme obdélník AKLM, jehož strany budou *např.* 3 cm a 2 cm (viz obr. 11).



Obr. 11

Nyní se vrátíme k vynechané podmínce. Na polopřímce AL sestrojíme bod C tak, že úsečka AC má délku 7 cm. Pak je již jednoduché sestrojit požadovaný obdélník. Vrchol B bude ležet na polopřímce AK a dále na přímce procházející bodem C a rovnoběžné s přímkou AM. Obdobně bod D bude ležet na polopřímce AM a dále na přímce procházející bodem C a rovnoběžné s přímkou AK.

Poznámka: Úlohu jsme snadno vyřešili, když jsme nejprve vypustili jednu podmínku a sestrojili obdélník bez ní a potom jsme vypuštěnou podmínku vrátili.

Použili jsme tak strategii **vypuštění podmínky**.

Postup, pomocí kterého jsme vyřešili úlohu 13, můžete použít i při řešení následujících tří analogických úloh.

Úloha 14: Sestrojte obdélník ABCD, jehož strany jsou v poměru 1 : 2 a jehož úhlopříčka má délku 5 cm.

Pokud jste pochopili způsob řešení úlohy 14, pak se jedná o **cvičení**.

Úloha 15: Sestrojte rovnostranný trojúhelník, který má výšku 6 cm.

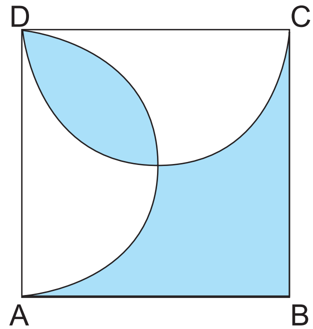
Nápověda: Vypustíme podmínku o výšce.

Úloha 16: Sestrojte pravidelný šestiúhelník ABCDEF, aby jeho úhlopříčka AC byla 6 cm dlouhá.

Nápověda: Vypustíme podmínku o délce úhlopříčky.

Nyní ukážeme, jak se může řešení úlohy zjednodušit, pokud **přidáme vhodný prvek**.

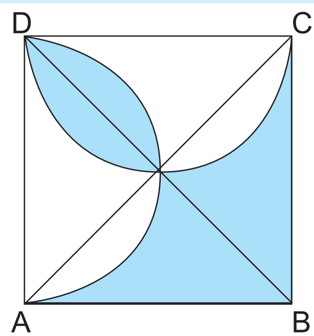
Úloha 17: Na obrázku 12 je narýsován čtverec a dvě půlkružnice s průměry AD a CD. Určete obsah vyznačeného útvaru ohraničeného těmito křivkami, když víte, že délka strany je 2 cm.



Obr. 12

Řešení: Pokuste se nejprve odhadnout, jak velký bude obsah vybarvené části, když znáte obsah čtverce. Nyní tento obsah skutečně určíme. Do čtverce narýsujeme jako pomocné prvky obě jeho úhlopříčky (viz obr. 13). Úloha se tak zjednodušila.
Pokud si obrázek 13 pozorně prohlédnete, pak zjistíte, že vybarvená část čtverce je stejně veliká jako nevybarvená část. Tyto části proto mají stejný obsah. Vybarvená část má tak poloviční obsah než čtverec. A protože čtverec má obsah 4 cm^2, má vybarvená část obsah 2 cm^2.

Odpověď: Vybarvený obrazec na obr. 12 má obsah 2 cm^2. □



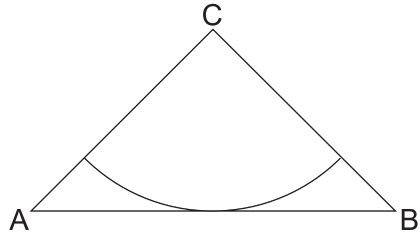
Obr. 13

Poznámka: Uvedenou úlohu jsme řešili pomocí obrázků, tedy geometrickou cestou. Obrázek 12 můžeme nazvat ilustrační a obrázek 13 řešitelský. V obrázku 13 jsou vyznačeny dva pomocné prvky. Jsou to úhlopříčky čtverce ABCD. Právě vložením těchto úhlopříček se nám podařilo úlohu 16 vyřešit.

K vyřešení úlohy 17 nám pomohla strategie **pomocných prvků.**

Úloha 18: Čtvrtkruh

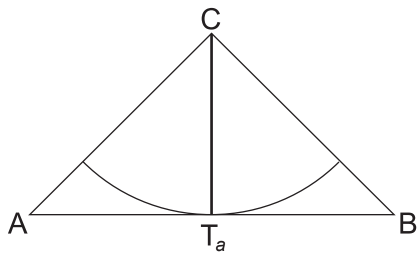
Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice, jak ukazuje obr. 14. Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníku je $|AB| = 8$ cm.



Obr. 14

V dalším textu se vyskytne číslo, které značíme π (čti pí) a které se přibližně rovná číslu 3,14.

Řešení: Pro správné vyřešení úlohy je třeba zjistit poloměr kružnice vepsané. Na obrázku 15 je tento poloměr vyznačen pomocí úsečky CT_α.



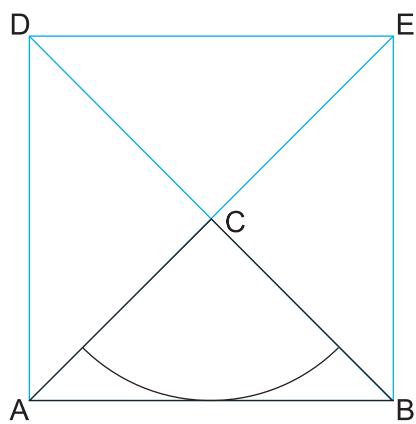
Obr. 15

Připomeneme, že obsah S kruhu o poloměru r spočítáme pomocí vzorce $S = \pi r^2$. V našem případě je $r = |CT_\alpha|$. Čtvrtkruh pak bude mít obsah:

$$S = \frac{1}{4}\pi|CT_\alpha|^2.$$

Nyní se pokusíme do obrázku 14 vložit nějaký vhodný **pomocný prvek**.

Pomocný prvek 1: Mohlo by nás napadnout, sestrojit nad úsečkou AB čtverec, viz obr. 16.



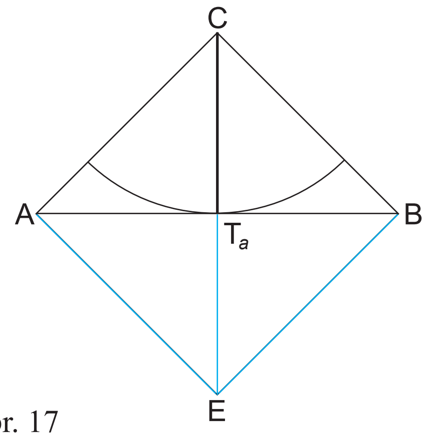
Obr. 16

Část čtverce sestrojeného nad úsečkou AB, jak ukazuje obr. 16, je tímto pomocným prvkem. Pokud si obr. 16 prohlédnete, pak zjistíte, že hledaný poloměr je polovina strany čtverce ABCD. Proto $r = 4$ cm. Obsah čtvrtkruhu je tak

$$S = \frac{1}{4}\pi|CT_{\alpha}|^2 = \frac{1}{4}\pi 16 = 4\pi.$$

Odpověď: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm². Protože π je přibližně 3,14, dostaneme, že obsah uvažovaného obrazce je přibližně 12,57 cm².

Pomocný prvek 2: Ještě by nás mohlo napadnout sestrojit v obrázku 15 čtverec, ale jinak než před tím, viz obr. 17.



Obr. 17

Část čtverce sestrojeného pod úsečkou AB je tímto pomocným prvkem. Pokud si pozorně prohlédnete obrázek 17, tak opět zjistíte, že poloměr čtvrtkruhu je 4 cm (je polovinou úhlopříčky čtverce AEBC). Odpověď na úlohu 17 jsme již vyslovili.

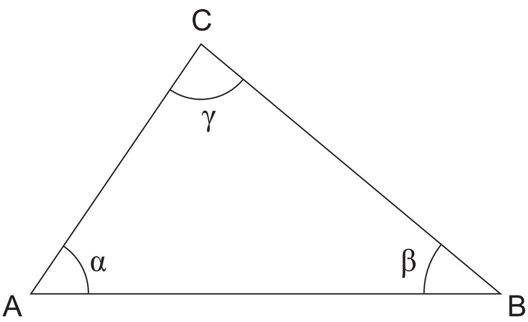
Poznámka: Úlohu 18 jsme řešili pomocí obrázků, tedy geometrickou cestou. Obrázek 14 můžeme označit jako ilustrační obrázek. Našli jsme dokonce dvě různá řešení pomocí dvou různých pomocných prvků. Obrázek 16 je řešitelský obrázek k prvnímu pomocnému prvku. Obrázek 17 je řešitelský k druhému pomocnému prvku. Vložením některého z pomocných prvků se úloha podstatně zjednodušila.

Použili jsme strategii vhodného **pomocného prvku**.

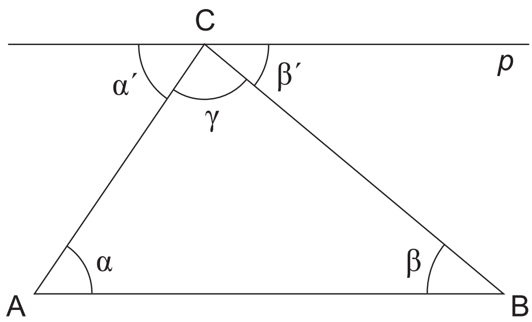
Také následující úlohu můžete řešit pomocí probírané strategie. Nejprve se ale pokuste udělat důkaz sami.

Úloha 19: Dokažte, že součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°.

Důkaz: Nechť ABC je libovolný trojúhelník (viz obr. 18a). V bodě C sestrojíme rovnoběžku p se stranou AB (viz obr. 18b) Tato přímka je vhodným **pomocným prvkem**, neboť pomocí něj velmi rychle zdůvodníme uvedené tvrzení.



Obr. 18a



Obr. 18b

U vrcholu C na obr. 18b jsou vyznačeny tři úhly. Úhel α' je střídavý s úhlem α. Jak je dobře vidět, má s ním stejnou velikost. Úhel β' je střídavý s úhlem β a má s ním proto také stejnou velikost. Součet velikostí úhlů α', γ a β' je 180°. Tento součet je ale stejný jako součet velikostí úhlů α, β a γ. Součet velikostí úhlů α, β a γ je proto 180°. □

Někdy je při řešení úlohy vhodné **postupovat odzadu**.

Úloha 20: Je dáno sedm za sebou jdoucích čísel. Každé další je o 6 větší než to předchozí. Přitom víme, že poslední z čísel je 94. Určete, které číslo je první.

Řešení: Jak je uvedeno v zadání, posledním ze sedmi čísel je číslo 94. Před ním je číslo $94 - 6 = 88$. Před číslem 88 je číslo $88 - 6 = 82$. Před číslem 82 je číslo $82 - 6 = 76$. Před číslem 76 je číslo $76 - 6 = 70$. Před ním je číslo 64. Prvním číslem je číslo 58.

Odpověď: První ze sedmi hledaných čísel je číslo 58. Dodejme pro úplnost, že uvedená čísla jsou po řadě: **<u>58</u>**, 64, 70, 76, 82, 88, 94 □

Je zřejmé, že jsme při řešení postupovali odzadu a určili vždy předchozí číslo k tomu, které již známe, až jsme se dostali k prvnímu číslu. Teď nás možná napadne, že bychom mohli postupovat rychleji. K poslednímu číslu můžeme sestrojit rovnou první číslo. Je zřejmé, že jsme postupně 6krát odčítali číslo 6. Pokud tedy od posledního čísla odečteme číslo $6 \cdot 6 = 36$, pak dostaneme první číslo, tzn. $94 - 36 = 58$.

Ukázali jsme **druhé** rychlejší řešení. Opět jsme ale postupovali odzadu.

Cvičení: Je dáno šest za sebou jdoucích čísel. Každé další je dvojnásobkem předchozího. Předposlední z čísel je 48. Určete všechna čísla i to, jak jdou za sebou:

Odpověď: Hledaná čísla jsou 3, 6, 12, 24, 48, 96.

Nyní ukážeme dvě nematematické úlohy, aby bylo vidět, že i s nimi si matematika poradí. Tyto úlohy obvykle zahrnujeme mezi úlohy rekreační matematiky.

V další úloze budeme z tenisových míčků vytvářet hromadu.

Úloha 21: Chceme vytvořit hromadu tenisových míčků a přitom dodržíme následující pravidla:

1. Dolní vrstva míčků má tvar čtverce.
2. Ve vyšších vrstvách leží každý míček na čtyřech míčcích.
3. Každá vrstva obsahuje co největší počet míčků.

Kolik je míčků v nejnižší vrstvě a v celé hromadě, když má hromada 5 vrstev a na vrcholu je 1 míček?

Řešení: Budeme postupovat po vrstvách shora dolů (tedy obráceně než udávají pravidla):

5. vrstva ...... 1 míček
4. vrstva ...... 4 míčky
3. vrstva ...... 9 míčků
2. vrstva ...... 16 míčků
1. vrstva ...... 25 míčků

celkem: 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55 (míčků)

Odpověď: V nejnižší vrstvě je 25 míčků a v celé hromadě je 55 tenisových míčků. □

Cvičení: Hromada míčků je vytvářena podle stejných pravidel jako v úloze 21. Kolik míčků je v nejnižší vrstvě a v celé hromadě, pokud má hromada 5 vrstev a v nejvyšší vrstvě jsou 4 míčky.

Odpověď: V nejnižší vrstvě je 36 tenisových míčků a v celé hromadě je 36 + 25 + 16 + 9 + 4 = 93 tenisových míčků. □

Poznámka: Opět jsme postupovali odzadu. Počty míčků ve vrstvách jsme určovali opačně, než udávají pravidla.

Využili jsme tedy strategii **cesta zpět**.

Úloha 22: Tři lidé hrají hru, při které vždy jeden prohrává, a dva zbylí vyhrávají. Ten, který prohrál, musí zdvojnásobit částky peněz, které mají v tu chvíli jeho spoluhráči. Hráči se shodli, že budou hrát tři hry. V průběhu těchto tří her každý hráč jednou prohrál a na konci měl každý z nich 8 korun. Kolik korun měli jednotliví hráči, než začali hrát?

Řešení: Označme hráče písmeny A, B, C a dohodněme se, že hráč A prohrál v první hře, hráč B ve druhé hře a hráč C ve třetí hře. Nyní můžeme *např.* pomocí tabulky postupně zapisovat finanční situaci jednotlivých hráčů od koncového stavu k počátečnímu stavu (viz tab. 2). Vzniklá tabulka hezky ukazuje postup odzadu :

	A	B	C	
konec 3. hry	8	8	8	*prohrál hráč C*
konec 2. hry	4	4	16	*prohrál hráč B*
konec 1. hry	2	14	8	*prohrál hráč A*
počáteční stav	**13**	**7**	**4**	

Tab. 2

Komentář: Na konci třetí hry měli všichni hráči po 8 Kč. V této hře prohrál hráč C, a proto musel ze svých peněz zdvojnásobit částky svých spoluhráčů. To ale znamená, že hráči A a B měli před touto hrou poloviční částky, tj. každý měl 4 Kč a hráč C musel mít o $2 \cdot 4 = 8$ Kč víc než po hře. Musel tedy mít 16 Kč. Obdobně můžeme pokračovat dál až k počátečnímu stavu.

Odpověď: Na položenou otázku dává odpověď poslední řádek tabulky, to znamená, že na začátku měl hráč A 13 Kč, hráč B 7 Kč a hráč C 4 Kč. □

Získaný počáteční stav navíc pěkně ukazuje, že „čím později hráč prohraje, tím lépe (samozřejmě pro něj)“.

Poznámka: Celou úlohu jsme vyřešili tak, že jsme postupovali odzadu.
Tuto strategii jsme již dříve nazvali **cesta zpět**.

Další hru již hráči nemohou hrát, protože ten, který by prohrál, nemůže proplatit výhry svým protihráčům. Hra totiž může vždy pokračovat jenom tak dlouho, dokud prohrává hráč, který má nejvíc peněz a navíc musí mít vždy aspoň tolik jako oba protihráči dohromady.

Další zajímavá úloha.

Úloha 23: Na hromádce je 16 zápalek. Dva hráči střídavě odebírají jednu nebo dvě zápalky. Vyhrává ten, který odebere poslední jednu nebo poslední dvě zápalky.

Úkol: Zahrajte si několikrát hru.

Úloha 23 (pokračování): Pokuste se objevit vítěznou strategii některého z hráčů.

Poznámka: Vítězná strategie pro některého z hráčů je takový postup, který zajistí tomuto hráči vítězství bez ohledu na to, jak hraje jeho protihráč.

Řešení: Označme prvního hráče A a druhého hráče B. Pokud spolu hrají, tak ke konci oba poznají, který z nich vyhraje. Určitě to je ve chvíli, kdy po tahu některého hráče jsou na hromádce 3 zápalky, pak tento hráč vyhraje. Celkový cíl je 0 zápalek na hromádce, bližší cíl jsou 3 zápalky. Obdobně, pokud po tahu tohoto hráče je na hromádce 6 zápalek, vyhraje tento hráč. 6 je tedy ještě bližší cíl pro vítězícího hráče. Pokud postupujeme dopředu, tak ještě bližšími cíly jsou následující počty zápalek: 9, 12, 15. Pro hráče, který jako první může po svém tahu dosáhnout 15 zápalek, existuje vítězná strategie. To je v našem případě hráč A.

Odpověď: Existuje vítězná strategie pro prvního hráče, tj. hráč A.
Hráč A musí hrát tak, aby po jeho tazích byly postupně
na hromádce tyto počty zápalek: 15, 12, 9, 6, 3, 0. □

Poznámka: Hru, která se v matematické literatuře nazývá NIM, jsme vyřešili opět pomocí strategie **cesta zpět**.

Nyní úlohu trochu pozměníme.

Cvičení: Na hromádce je 20 zápalek. Dva hráči střídavě odebírají nejvýše 3 zápalky. Vyhrává ten, který odebere poslední jednu, dvě nebo tři zápalky.

Odpověď: Existuje vítězná strategie pro druhého hráče, tj. hráče B. Hráč B musí hrát tak, aby po jeho tazích byly postupně na hromádce tyto počty zápalek: 16, 12, 8, 4, 0. □

Předchozí úlohu a za ní uvedené cvičení můžeme zobecnit.
Toto zobecnění **čtenář nemusí číst**.

Úloha 24: Na hromádce je n zápalek. Hru hrají dva hráči, kteří střídavě odebírají nejvýše k zápalek. Vyhrává ten, který odebere poslední zápalky. Pro kterého z hráčů existuje vítězná strategie?

Odpověď:
Pokud číslo $k + 1$ nedělí n, pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče, tj. hráče A.
Pokud číslo $k + 1$ dělí n, pak existuje vítězná strategie pro druhého hráče, tj. hráče B.

Vyslovme ještě cvičení k úloze 24, které bude numericky poměrně náročné: □

Cvičení: Na hromádce je 867 zápalek. Dva hráči střídavě odebírají nejvýše 8 zápalek. Vyhrává ten hráč, který odebere poslední zápalky. Pro kterého z hráčů existuje vítězná strategie?

Odpověď se zdůvodněním: Existuje vítězná strategie pro prvního hráče, tj. hráče A. Důvodem je to, že číslo 867 není dělitelné číslem 9. To poznáte podle toho, že jeho ciferný součet je 21 a pokud dělíme číslo 21 číslem 9 dostaneme zbytek 3. Podle odpovědi k úloze 24 tedy existuje vítězná strategie pro hráče A. Při prvním tahu musí odebrat 3 zápalky a následně odebírá zápalky tak, aby počet zápalek po jeho tahu byl vždy násobkem devíti, tzn.:

$$864,\ 855,\ 846,\ \dots\ 27,\ 18,\ 9,\ 0.$$ □

Pozměňme ještě jednou úlohu 23. Místo abychom zápalky odebírali, budeme zápalky v další úloze přidávat.

Úloha 25: Každý hráč má dostatek zápalek. Střídavě pokládají na hromádku maximálně 3 zápalky. Vyhrává ten, který doplní svými zápalkami počet na 24. Existuje vítězná strategie pro některého z hráčů?

Odpověď: Existuje vítězná strategie pro druhého hráče, tj. hráče B. Hráč B bude hrát tak, aby po jeho tazích byly postupně na hromádce tyto počty zápalek: 4, 8, 12, 16, 20, 24. □

Úlohy 23 až 25 se řeší analogicky a vytvářejí to, co nazýváme **hrozen problémů**.

Nyní ještě ukážeme, že někdy při řešení úlohy experimentujeme a přitom zjistíme, že **něco se** při tomto experimentování **nemění**. To, co se nemění, můžeme využít při řešení úlohy.

Úloha 26: Na papíře jsou napsána tři přirozená čísla. Jedno z nich škrtneme a místo něho napíšeme součet dvou zbylých zmenšený o jedničku. Tuto úpravu (operaci) opakujeme tak dlouho, až nakonec dostaneme čísla 99, 100 a 101. Mohla být na začátku čísla 2, 2, 2?

Řešení: Abychom dobře pochopili úlohu, popřípadě, aby nás napadlo možné řešení, budeme chvilku experimentovat.

Pokud by na počátku byla *např.* čísla **0**, **0**, **0**, pak bychom se uvedeným postupem dostali do oblasti záporných čísel. Volme tedy počáteční trojici tak, aby každé z čísel bylo aspoň 1.

Pokud by na počátku byla čísla **1**, **1**, **1**, pak bychom uvedeným postupem dostávali zase pouze trojice 1, 1, 1.

Určité poučení by nám mohl přinést následující experiment, který bude začínat čísly **2**, **2**, **2**. Škrtat budeme v dané trojici podtržené číslo:

$$2, 2, \underline{2} \longrightarrow \underline{2}, 2, 3 \longrightarrow 4, 2, \underline{3} \longrightarrow \underline{4}, 2, 5 \longrightarrow 6, 2, \underline{5} \longrightarrow \underline{6}, 2, 7 \ldots$$

Doporučujeme čtenáři, aby v experimentování ještě chvíli pokračoval.
Zkoumejme získávané trojice. Druhou trojicí počínaje dostáváme v každé trojici vždy jedno liché číslo a dvě čísla sudá. Musí to tak být vždy?

Pokud škrtneme liché číslo, pak ho nahradíme součtem dvou sudých čísel zmenšeným o 1, což je číslo liché. Liché číslo tedy nahradíme číslem lichým.

Pokud škrtneme sudé číslo, pak ho nahradíme součtem sudého a lichého čísla zmenšeným o 1, což je číslo sudé. Sudé číslo tedy nahradíme číslem sudým.

Počet sudých čísel se tak při našem postupu nemění. Obdobně se nemění ani počet lichých čísel.

Na základě toho, co jsme uvedli, nemůžeme z trojice 2, 2, 2 pomocí našich úprav získat trojici dvou lichých a jednoho sudého čísla.

Odpověď: Z trojice 2, 2, 2 pomocí uvedených úprav nemůžeme dostat trojici čísel 99, 100, 101. □

Poznámka: Pomocí experimentování jsme zjistili, že z trojice, kde jsou dvě čísla sudá a jedno liché, dostaneme opět trojici, kde jsou dvě čísla sudá a jedno liché. Právě toto se nemění a toho jsme využili k získání řešení. Použitou strategii bychom mohli nazvat strategií **neměnnosti** (cizím slovem strategie invariantu). Zároveň jsme využili i strategii **parity** – v získaných trojicích jsou stále dvě čísla sudá a jedno liché. (Říkáme, že dvě čísla mají stejnou paritu, jestliže jsou obě sudá nebo obě lichá.)

Úloha 27: Zázračný strom

Na zázračném stromu vypěstoval sadař **25** banánů a **30** pomerančů. Každý den utrhne dva plody a na stromě vyroste vždy jeden nový. Pokud utrhne dva stejné plody, vyroste na stromě jeden pomeranč, pokud utrhne dva různé plody, pak vyroste banán. Který plod bude na stromě poslední?

Zopakujme pravidlo při česání:

– (banán, banán) $\longrightarrow$ + pomeranč
– (pomeranč, pomeranč) $\longrightarrow$ + pomeranč
– (banán, pomeranč) $\longrightarrow$ + banán

Řešení: Problém si početně zjednodušíme a začneme experimentovat.
Výsledky budeme zapisovat do tabulky:

Banány	Pomeranče	Co jsme utrhli
5	**4**	výchozí situace
5 – 2 = **3**	4 + 1 = **5**	2 banány
3	5 – 2 + 1 = **4**	2 pomeranče
3 – 1 + 1 = **3**	4 – 1 = **3**	1 banán, 1 pomeranč
3 – 2 = **1**	3 + 1 = **4**	2 banány
1	4 – 2 + 1 = **3**	2 pomeranče
1 – 1 + 1 = **1**	3 – 1 = **2**	1 banán, 1 pomeranč
1 – 1 + 1 = **1**	2 – 1 = **1**	1 banán, 1 pomeranč
1 – 1 + 1 = **1**	1 – 1 = **0**	1 banán, 1 pomeranč

Zbývá 1 banán. Pomeranč nezbývá.

Doporučujeme čtenáři, aby v experimentování pokračoval (počet banánů volte tak, aby to bylo liché číslo).
Zkoumejme po každém česání počty zbylých plodů. Již po zadání úlohy bylo jasné (a tabulka to znovu ukazuje), že každý den klesne počet plodů na stromě o jeden. Dále je vidět, že počet banánů po každém dni zůstává stejný nebo se sníží o 2 banány. U pomerančů tomu tak není. Vraťme se k zadané úloze:
Protože počet banánů v prvním dni je **25**, což je číslo liché, je ve všech následujících dnech počet banánů vyjádřen lichým číslem. Lichost počtu banánů v každém dni se nemění. Po 53 dnech zůstanou na stromě 2 plody. Vzhledem k tomu, že počet banánů je každý den vyjádřen lichým číslem, musí být na stromě banán a pomeranč. Pokud je sadař utrhne, vyroste na stromě banán, který je posledním plodem na stromě.

Odpověď: Posledním plodem na stromě bude banán. □

Poznámka: Při řešení jsme využili skutečnost, že při česání se nemění lichost počtu banánů. Využili jsme tak strategii **neměnnosti** a také strategii **parity**.

Úloha 28: Zázračný strom II
Na zázračném stromu vypěstoval tentýž sadař jako v předchozí úloze v následujícím roce 32 banánů a 40 pomerančů. Pravidla pro trhání plodů jsou stejná jako v úloze 27. Který plod bude na stromě poslední?

Odpověď: Posledním plodem na stromě bude pomeranč.

Poznámka: Při řešení se využívá skutečnost, že sudost počtu banánů se nemění. Počty banánů jsou stále sudá čísla.

Zobecnění úloh **27** a **28**, které **čtenář nemusí číst**:

Protože pravidlo pro česání ovoce je takové, že počet banánů se buď nemění nebo klesá o 2, můžeme říci:

Pokud je počáteční počet banánů liché číslo, je posledním plodem banán.

Pokud je počáteční počet banánů sudé číslo, je posledním plodem pomeranč.

Na sudosti nebo lichosti počátečního počtu pomerančů vůbec nezáleží.

Úloha 29: V barevné krajině mají tři druhy peněz: modré, červené a zelené. Když si někdo chce něco koupit, musí zaplatit dvěma bankovkami různých barev a oni mu vrátí bankovku třetí barvy. Alice měla 4 červené, 5 modrých a 2 zelené bankovky. Kolik nejvíce nákupů může udělat? Jaké bankovky jí zůstanou, pokud udělá maximální počet nákupů?

Řešení: Začneme opět, jako v předchozí úloze, experimentováním. Výsledky experimentů vložíme do tabulky. Zvolíme určité pořadí nákupů:

Červené mince	Modré mince	Zelené mince	Čím bude placeno
4	5	2	m + z
5	4	1	č + m
4	3	2	č + z
3	4	1	č + z
2	5	0	č + m
1	4	1	z + m
2	3	0	č + m
1	2	1	č + m
0	1	2	z + m
1	0	1	č + z
0	**1**	**0**	Koncová situace

Zbyla modrá bankovka. Nákupů bylo celkem 10.

Nyní, když jsme si uvědomili, jak se nakupuje, můžeme začít náš experiment zkoumat. Součet trojice čísel v každém řádku se postupně zmenšuje o 1.
Za každý nákup vlastně zaplatí Alice jednu bankovku. Protože má 11 bankovek, tak může udělat nejvíce 10 nákupů. Pokud má totiž pouze jednu bankovku, pak nemůže nakupovat. Je překvapující, že ať nakupuje jakýmkoliv způsobem, vždy jí zůstane modrá bankovka. Vyplývá to z toho, že při každém nákupu se mění parita (sudost nebo lichost) počtu bankovek každé barvy. Tedy po 10 nákupech je počet červených a zelených bankovek sudý (tzn. 0) a počet modrých bankovek je lichý.
Zbude tedy jedna modrá bankovka.

Odpověď: Maximální počet nákupů je 10 a nakonec zbude modrá bankovka. ☐

Poznámka: Pomocí experimentu jsme získali vhled do problematiky. Dále jsme objevili, že po každém nákupu se parita všech čísel změní. Tato změna je **stále stejná**. V rámci řešení jsme použili i **strategii parity**.

Nyní můžeme vytvořit i **hrozen úloh** a **cvičení**. Vyřešenou úlohu můžeme brát jako základní.

Nejprve **zobecníme** základní úlohu. Toto zobecnění nemusí čtenář číst.

Nechť jsou v úloze počty bankovek zadány tak, že dvě čísla jsou sudá a jedno liché. Pak je součet s těchto tří čísel číslo liché. Maximální počet nákupů bude o jedničku menší, tedy číslo sudé. Po sudém počtu nákupů bude parita čísel ve výsledku stejná jako v zadání. Dvě čísla budou 0 a jedno bude 1. Zbude tedy bankovka té barvy, jakou měly bankovky, jejichž počet byl lichý.

Úloha 30: Znění je stejné jako u úlohy 29. V tomto případě však měla Alice na začátku 2 červené, 4 modré a 2 zelené bankovky. Jaké bankovky jí zůstanou, pokud udělá maximální počet nákupů?

Odpověď: Maximální počet nákupů je 7. Zůstanou vždy dvě bankovky stejné barvy, přitom to může být kterákoliv z barev. ☐

Cvičení: Znění je stejné jako u úlohy 29. V tomto případě však měla Alice na začátku 1 červenou, 5 modrých a 3 zelené bankovky. Jaké bankovky jí zůstanou, pokud udělá maximální počet nákupů?

Odpověď: Maximální počet nákupů je 7. Zůstanou vždy dvě bankovky stejné barvy, přitom to může být kterákoliv z barev. ☐

Užitečných strategií je více, ale nám to pro tuto chvíli bude stačit.
Zopakujme, že jsme vedle experimentování ukázali **použití těchto strategií**:

- vypuštění podmínky,
- cesta zpět,
- zavedení pomocného prvku
- a dále strategii neměnnosti (invariantu) a strategii parity.

3. Hrozny úloh

Už dříve jsme některé vyřešené úlohy „obalovali“ podobnými úlohami. Tak jsme vytvářeli tzv. **hrozen úloh**. Metoda **řešení** základní úlohy se pak dá použít i při řešení nových **úloh**. Někdy je však potřeba tuto metodu trochu upravit.

Nyní se vytvářením hroznů budeme zabývat trochu víc. Začneme zajímavou hrou.

Hrozen 1: Hra u kulatého stolu

Nebudeme požadovat téměř žádné předběžné matematické znalosti.

Hra: Dva hráči A a B mají dostatek mincí stejné velikosti, aby mohli hrát hru u kulatého stolu.

Hra má tato pravidla:

1. Hráči pokládají mince střídavě na stůl tak, aby se nepřekrývaly.
2. Jednou položená mince se už dále nesmí přesouvat.
3. Hráč, který jako první nemůže položit svoji minci na stůl, prohrává.

Než začneme hrát, bylo by vhodné dohodnout se (definovat), co znamená *položit minci* na stůl.

V podstatě jsou možné dvě definice:

a) celá jedna strana mince leží na ploše stolu,

b) mince na stole „drží“ (může trochu přesahovat i přes okraj stolu).

Přijměme v celé další části definici a).
Obecnější definice b) samozřejmě může vést na některých místech k jiným závěrům. Na tuto rozdílnost čtenáře upozorníme.

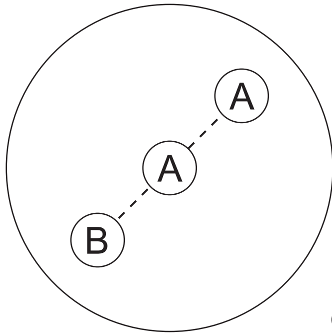
Označme prvního hráče A a druhého B. Nyní si hru zahrajte na modelu stolu, abyste získali určitou představu. Ke hraní si můžete ze čtvrtky vystřihnout kruh *např.* o poloměru 6 cm a pokládat můžete buď mince nebo stejně velká kolečka dvou barev.

Nyní je vhodná chvíle na to oznámit vám, že existuje vítězná strategie pro hráče A. Ještě než ji začnete hledat, musíme dodat, že vzhledem k přijaté definici a) může tato vítězná strategie pro prvního hráče existovat pouze tehdy, když stůl je dostatečně velký, aby se na něj vešla alespoň jedna mince. V případě definice b) by tato podmínka z pochopitelných důvodů odpadla. A nyní již přistupme k základní úloze našeho budoucího hroznu.

Základní úloha: Zahrajte si hru na modelu stolu a pokuste se objevit vítěznou strategii hráče A (prvního hráče).

Poznámka: Pokud se vám nedaří vítěznou strategii objevit, vězte, že v kruhu je nejkritičtějším místem střed.

Řešení: Hráč A položí svoji první minci do středu stolu a každou další minci vždy středově souměrně s mincí svého protihráče. Touto strategií si zajistí, že může položit minci vždy, když ji může položit protihráč B (viz obr. 18).

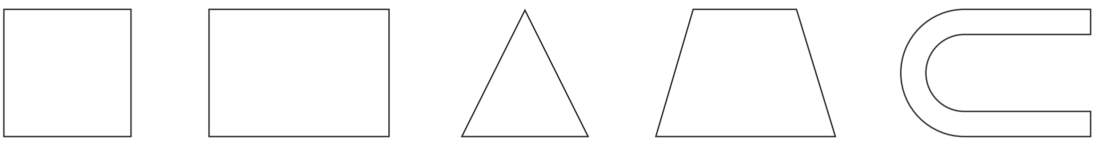


Obr. 18

Nyní začneme vytvářet hrozen. Nebudeme nové úlohy přímo vypisovat. Zaměříme se na to, abychom ukázali „směry“ vytváření těchto úloh.

První obměna základní úlohy: změna tvaru stolu

Co se stane s vítěznou strategií hráče A, pokud ke hře užijeme stůl jiného tvaru? Může to být postupně stůl čtvercový, obdélníkový, trojúhelníkový, lichoběžníkový, stůl ve tvaru podkovy atd. (viz obr. 19).


Obr. 19

Řešení: Úlohu řešíme pro každý stůl zvlášť. Strategie pro hráče A je použitelná na prvních dvou stolech, na dalších třech nikoliv. Nyní můžeme získané poznatky zobecnit. Vítězná strategie pro hráče A je zřejmě použitelná pro každý stůl, který má desku středově souměrnou.

Druhá obměna základního problému: deska stolu s otvory

Počet otvorů v desce stolu může být různý a různé může být i jejich rozmístění. Zabývejme se zde jenom nejjednodušší situací, kdy středově souměrný stůl má jeden kruhový otvor, a to právě uprostřed (*např.* zahradní stůl s otvorem pro slunečník). Co se v tomto případě stane s vítěznou strategií hráče A?

Řešení: Vítězná strategie z prvního hráče přechází tentokrát na druhého hráče. Hráč A musí položit minci někam mimo středový otvor a hráč B pokládá minci středově souměrně s mincí protihráče. Poznamenejme, že v případě výše uvedené definice b) by záleželo na velikosti uvažovaného otvoru. Pokud by byl otvor menší než mince, existovala by v případě použití definice b) vítězná strategie pro hráče A, tedy stejně jako u základní úlohy.

Třetí obměna základního problému: více stolů

Hrajte naši hru na větším počtu stejných středově souměrných (kruhových) stolů. Existuje vítězná strategie pro některého z hráčů?

Řešení: Uspořádejme pro přehlednost stoly tak, že je přirazíme k sobě a jejich středy budou na přímce. Pokud budeme uvažovat tři stoly, pak existuje vítězná strategie pro hráče A. Ten položí první minci do středu prostředního stolu a další pak vždy středově souměrně podle tohoto středu s mincí protihráče.

Obdobně to může dělat i při hře na pěti stolech a obecně při hře na jakémkoliv lichém počtu stolů.

Shrňme (viz obr. 20)**:** Při lichém počtu stolů existuje vítězná strategie pro hráče A.

Jestliže uvažujeme dva stoly, pak hráč A nemůže podle definice a) položit minci na místo, v němž se stoly dotýkají (střed vzniklého útvaru). Musí tedy položit svoji minci jinam a potom hráč B začne pokládat mince středově souměrně podle bodu dotyku stolů s mincemi hráče A. Existuje proto vítězná strategie pro hráče B. Toto se dá zobecnit pro libovolný sudý počet stolů.

Shrňme (obr. 20)**:** Při sudém počtu stolů existuje vždy vítězná strategie pro hráče B.

Je zřejmé, že pokud bychom při sudém počtu stolů uvažovali pokládání mincí podle definice b), pak by hráč A mohl položit minci na prostředek útvaru a existovala by tak vítězná strategie pro něj.

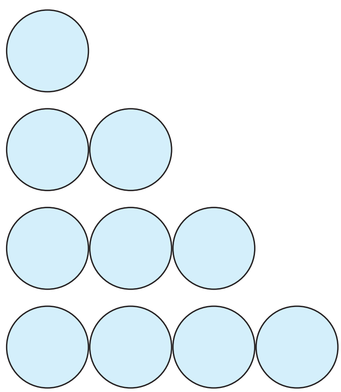
V tuto chvíli je pěkně vidět, jak moc záleží při řešení této úlohy na tom, jak můžete pokládat minci na stůl.

Vítězná strategie pro hráče A

Vítězná strategie pro hráče B

Vítězná strategie pro hráče A

Vítězná strategie pro hráče B



Obr. 20

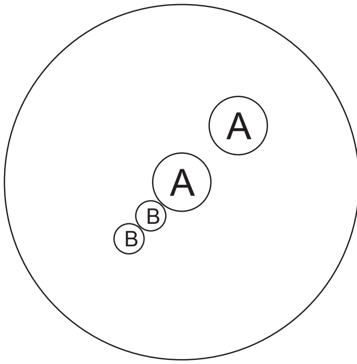
Čtvrtá obměna základního problému: mince různé velikosti

Co se stane s vítěznou strategií hráče A, jestliže hráči mají mince různé velikosti?

Nechť má: a) hráč A větší mince než hráč B,

b) hráč B větší mince než hráč A.

Řešení: V případě a) nelze použít vítěznou strategii hráče A, neboť hráč B může snadno vytvořit situaci, kdy hráč A postupující podle této strategie nemůže položit svoji minci (viz *např.* situace na obr. 21).



Obr. 21

V případě b) je vítězná strategie pro hráče A použitelná. Pokud totiž mohl hráč A pokládat svoje mince při stejné velikosti s mincemi hráče B, bude mít vždy dostatek místa na pokládání, pokud jsou jeho mince menší. □

Poznámka: Jistě jste postřehli, že při řešení uvedených úloh patřících do rekreační matematiky jsme se chovali jako skuteční matematici.

Hrozen 2: Znaky dělitelnosti

Umět rychle poznat, zda je dané víceciferné číslo dělitelné některým jednociferným číslem, popřípadě jaký dává při dělení tímto číslem zbytek, může být mnohdy užitečné, zvláště když nemáme po ruce kalkulačku.

Matematický rámec: Vzhledem k úvahám, které budeme dále dělat, je potřeba, abyste znali:

1. Jestliže je n-ciferné číslo $\boldsymbol{a}$ (v desítkové soustavě) zapsané ve tvaru $a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1a_0$, pak to znamená, že:
$$a = a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1 10^1 + a_0.$$
$$\textit{Např.:}\ 752 = 7.100 + 5.10 + 2.1 = 7.10^2 + 5.10^1 + 2.10^0$$

2. Jestliže je přirozené číslo $\boldsymbol{a}$ zapsané ve tvaru součtu $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a číslo $\boldsymbol{b}$ je dělitelné číslem $\boldsymbol{x}$, pak číslo $\boldsymbol{a}$ dává při dělení číslem $\boldsymbol{x}$ týž zbytek, jaký dává číslo $\boldsymbol{c}$ při dělení číslem $\boldsymbol{x}$.

Příklad: 9 314 = 9 300 + 14, přičemž číslo 9 300 je dělitelné číslem 3.
Budeme-li číslem 3 dělit čísla 9 314 a 14, dostaneme v obou případech zbytek 2.
Číslo 9 300 je také dělitelné *např.* číslem 5.
Budeme-li číslem 5 dělit čísla 9 314 a 14, dostaneme v obou případech zbytek 4.

Úloha 1: Jak určíte zbytek při dělení určitého trojciferného čísla $\boldsymbol{a}$ číslem 4 (aniž byste dělili zadané číslo $\boldsymbol{a}$).

Řešení: Nejprve si trojciferné číslo $\boldsymbol{a}$ zapíšeme ve tvaru $a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$, kde $a_2 \neq 0$. Nyní rozložíme číslo $\boldsymbol{a}$ na součet dvou čísel, z nichž jedno je dělitelné číslem 4. Může to být *např.* takto:

$$a = (a_2 10^2) + (a_1 10^1 + a_0)$$

Protože je číslo $10^2 = 100$ dělitelné číslem 4, je celý výraz v první závorce dělitelný číslem 4. Proto dává trojciferné číslo $\boldsymbol{a}$ při dělení číslem 4 týž zbytek, jako dává dvojciferné číslo zapsané v druhé závorce.

Odpověď: Trojciferné číslo $a_2 a_1 a_0$ dává při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo $a_1 a_0$ při dělení číslem 4. □

Příklad: Čísla 721, 321 a 921 dávají při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo 21, tzn. zbytek je 1. Uvedená čísla nejsou proto dělitelná číslem 4.

Čísla 684, 284 a 384 jsou dělitelná číslem 4, protože číslo 84 dává při dělení číslem 4 zbytek 0.

Nyní můžeme výsledek získaný při řešení úlohy 1 zobecnit pro libovolné n-ciferné číslo. Aby mělo smysl tento výsledek zobecnění v praxi používat, budeme předpokládat, že n je alespoň 3.

Úloha 2 (zobecnění úlohy 1)**:** Jak určíte zbytek při dělení určitého, alespoň trojciferného čísla $\boldsymbol{a}$ číslem 4, aniž byste prováděli dělení čísla $\boldsymbol{a}$?

Řešení: Metoda řešení je stejná jako u předchozí úlohy, pouze rozklad čísla $\boldsymbol{a}$ bude tentokrát vypadat takto (zapisujeme číslo víceciferné, $n \geq 3$):

$$a = (a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2) + (a_1 10 + a_0).$$

Protože ze součtu v první závorce lze vytknout 100, je toto číslo dělitelné číslem 4. Proto dává číslo $\boldsymbol{a}$ při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo zapsané v druhé závorce.

Odpověď: n-ciferné číslo $a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ dává při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo $a_1 a_0$ při dělení číslem 4. □

Příklad: Čísla 5 743, 2 343 a 86 943 dávají při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo 43 při dělení 4, tj. zbytek 3.

Po obou právě vyřešených problémech si čtenář jistě uvědomil, že „dělící řez“ v zápisu čísla $\boldsymbol{a}$ jsme vedli svisle. Výše uvedené pravidlo jistě podstatně urychlí určování zbytku při dělení číslem 4, a to tím více, čím delší zápis dané číslo má. Zabývejme se dále dělitelností číslem 5.

Úloha 3: Jak určíte zbytek při dělení určitého trojciferného čísla $\boldsymbol{a}$ číslem 5, aniž byste prováděli dělení čísla $\boldsymbol{a}$?

Řešení: Vzhledem k dělitelnosti číslem 5 můžeme vytvořit *např.* následující rozklad čísla $\boldsymbol{a}$:

$$a = (a_2 10^2 + a_1 10) + a_0$$

Protože z první závorky je možné vytknout číslo 10 a číslo 10 je dělitelné číslem 5, je výraz v první závorce dělitelný číslem 5. Proto dostáváme:

Odpověď: Trojciferné číslo $a_2 a_1 a_0$ dává při dělení číslem 5 týž zbytek, jaký dává jednociferné číslo a_0 při dělení číslem 5. □

Příklad: Čísla 487, 797, 547 dávají při dělení číslem 5 týž zbytek, jaký dává číslo 7 při dělení číslem 5, tj. zbytek 2.

Cvičení (zobecnění úlohy 3): Úlohu 3 můžeme zobecnit pro libovolné aspoň dvojciferné číslo. Vyslovte toto zobecnění.

Nyní přistoupíme k složitějšímu problému. Budeme se zabývat dělitelností číslem 8.

Úloha 4: Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla $\boldsymbol{a}$, kde $n > 3$, číslem 8?

Řešení: Protože číslo 8 dělí číslo 1 000, můžeme toto zjištění využít při rozkladu čísla $\boldsymbol{a}$.

$$a = (a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_3 10^3) + (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)$$

Odpověď: n-ciferné číslo $a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ dává při dělení číslem 8 týž zbytek, jaký dává trojciferné číslo $a_2 a_1 a_0$ při dělení číslem 8. □

Příklad: Čísla 32 041, 12 041 a 2 347 041 dávají při dělení 8 týž zbytek, jaký dává číslo 41 při dělení číslem 8, tj. zbytek 1.

Chceme-li zkoumat dělitelnost čísla $\boldsymbol{a}$ *např.* čísly 3 a 9, pak musíme příslušný rozklad čísla $\boldsymbol{a}$ vytvořit trochu jinak. Musíme se pokusit vhodně rozložit mocniny čísla 10.

Úloha 5: Jak určíte zbytek při dělení určitého trojciferného čísla a číslem 9?

Řešení: Jak jsme již řekli, bude třeba vymyslet rozklad čísla $\boldsymbol{a}$ trochu rafinovaněji než při řešení předchozích úloh. Protože žádná z mocnin čísla 10 není dělitelná číslem 9, budeme muset tyto mocniny vhodně rozložit. Rozklad může vypadat *např.* takto:

$$a = a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_2(99 + 1) + a_1(9 + 1) + a_0 = (a_2 99 + a_1 9) + (a_2 + a_1 + a_0)$$

Protože číslo v první závorce je dělitelné číslem 9, dává číslo $\boldsymbol{a}$ při dělení číslem 9 týž zbytek jako číslo zapsané v druhé závorce. Číslu v druhé závorce se říká **ciferný součet čísla** $\boldsymbol{a}$.

Odpověď: Trojciferné číslo $a_2 a_1 a_0$ dává při dělení číslem 9 týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet, tj. číslo $a_2 + a_1 + a_0$, při dělení číslem 9. □

Příklad: Číslo 726 má ciferný součet $7 + 2 + 6 = 15$, a proto dává toto číslo při dělení číslem 9 zbytek 6.

Úkol (zobecnění úlohy 6)**:** Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla $\boldsymbol{a}$, kde $n \geq 2$, číslem 9?

Odpověď: n-ciferné číslo a dává při dělení číslem 9 týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet při dělení číslem 9.

Příklad: Číslo 3 654 má ciferný součet 18, a proto je toto číslo dělitelné číslem 9. Číslo 11 285 má ciferný součet 17, a proto dává při dělení číslem 9 zbytek 8.

Rozklad čísla a při určování dělitelnosti číslem 3 může být stejný jako při určování dělitelnosti číslem 9, a proto úlohu vyslovíme ihned pro n-ciferné číslo. □

Úloha 6: Jak určíte zbytek při dělení určitého n-ciferného čísla $\boldsymbol{a}$, kde $n \geq 2$, číslem 3?

Odpověď: n-ciferné číslo a dává při dělení číslem 3 týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet při dělení číslem 3.

Příklad: Číslo 21 562 má ciferný součet $2 + 1 + 5 + 6 + 2 = 16$, a proto dává toto číslo při dělení číslem 3 zbytek 1.

Zatím jsme využili dva druhy rozkladů zadaného čísla. Byl to rozklad svislý a rozklad mocnin čísla 10. Nyní ukážeme, že tyto dva druhy rozkladů lze vhodně zkombinovat.

Pravidlo pro dělitelnost číslem 4 jsme nalezli již při řešení úloh 1 a 2. Ukažme, že je možné nalézt pro toto číslo ještě jiné použitelné pravidlo. To samozřejmě vyžaduje nalezení nějakého dalšího vhodného rozkladu zápisu uvažovaného čísla $\boldsymbol{a}$.

Úloha 7: Jak určíte zbytek při dělení určitého alespoň dvojciferného čísla a číslem 4?

Řešení: V problémech 1 a 2 jsme využili toho, že 4 dělí 10^2. Nyní použijeme ještě skutečnost, že $10 = 2 . 4 + 2$. Rozklad čísla a proto může vypadat takto:

$$a = (a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 8) + (2a_1 + a_0).$$

Protože číslo v první závorce je dělitelné číslem 4, můžeme vyslovit tuto odpověď:

Odpověď: Alespoň dvojciferné číslo $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2 a_1 a_0$ dává při dělení číslem 4 týž zbytek jako číslo $2a_1 + a_0$. □

Příklad: Určete zbytek při dělení čísla 3 427 číslem 4, aniž byste dělili. Protože číslo $2 . 2 + 7 = 11$, a toto číslo dává při dělení číslem 4 zbytek 3, dává i zadané číslo při dělení čtyřmi zbytek 3.

Při vytváření tohoto hroznu jsme využili trojí rozklad zápisu zadaného čísla

a) Rozkládali jsme zápis čísla svisle.
b) Rozkládali jsme mocniny čísla 10.
c) Oba předchozí rozklady jsme zkombinovali.

Pokuste se na závěr jako vhodné cvičení vyslovit pravidlo pro dělitelnost číslem 11.

Úloha 8: Jak určíte zbytek při dělení určitého pěticiferného čísla a číslem 11?

Pokuste se nejprve řešit úlohu sami. My vám poradíme, abyste použili rozklad mocnin čísla 10.

Řešení: Rozklad čísla a nyní může vypadat takto:

$$\begin{aligned} a &= a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = \\ &= a_4(9999 + 1) + a_3(990 + 10) + a_2(99 + 1) + a_1 10 + a_0 = \\ &= (a_4 9999 + a_3 990 + a_2 99) + (a_4 + a_3 10 + a_2 + a_1 10 + a_0). \end{aligned}$$

Odpověď: Pěticiferné číslo a dává při dělení číslem 11 týž zbytek, jaký dává číslo zapsané v druhé závorce (uvedeného rozkladu), tj. číslo $a_4 + 10a_3 + a_2 + 10a_1 + a_0$. □

Příklad: Číslo 21 043 dává při dělení číslem 11 týž zbytek, který dává číslo $2 + 10 + 0 + 10 . 4 + 3 = 55$ při dělení číslem 11, tj. zbytek 0. Číslo 21 043 je proto dělitelné číslem 11.

Cvičení: Zobecněte úlohu 8.

Cvičení: Pokuste se vyslovit pravidlo pro dělitelnost číslem 6.

Odpověď: Protože $6 = 2 . 3$, musí to být číslo sudé a jeho ciferný součet musí být dělitelný třemi.

Hrozen 3: Počet čtverců ve čtvercové síti

Tento hrozen nevyžaduje žádné zvláštní matematické znalosti.

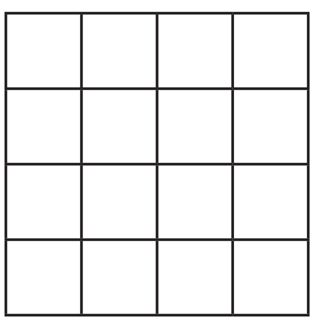
Úloha 1: Určete celkový počet čtverců ve čtvercové síti 4×4 (viz obr. 22).

Jiná formulace úlohy:

Kolik čtverců různých velikostí ohraničují úsečky ve čtvercové síti 4×4?

Úkol: Spočítejte čtverce nejprve sami.

Řešení: Nejdříve určíme počet nejmenších čtverců, tj. čtverců velikosti 1×1. Ty se vejdou 4 vedle sebe a 4 nad sebe, tzn. celkem je jich v síti $4 . 4 = 16$. Obdobně můžeme určit počet čtverců velikosti 2×2. Ty můžeme umístit 3 vedle sebe a 3 nad sebe, tzn. celkem je jich v naší síti $3 . 3 = 9$.



Obr. 22

Dále jsou ve čtvercové síti 4 čtverce velikosti 3×3 a jeden čtverec velikosti 4×4. Počty čtverců různých velikostí vidíte v následujícím zápisu:

a) počet čtverců velikosti 1×1 ..... $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$

b) počet čtverců velikosti 2×2 ..... $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$

c) počet čtverců velikosti 3×3 ..... $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$

d) počet čtverců velikosti 4×4 ..... $1 \cdot 1 = 1^2 = 1$

Celkový počet čtverců ...... $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$

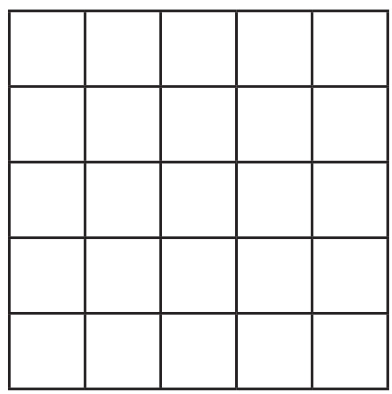
Odpověď: Celkový počet čtverců ve čtvercové síti 4×4 je $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$.

Číslo 30 je zajímavé, pokud řešíme tuto úlohu jako izolovanou úlohu. Pokud ji však bereme jako základ pro tvorbu a řešení dalších úloh, pak rozepsaná forma výsledku je mnohem užitečnější, protože ukazuje i postup, jak jsme k výsledku došli.

Úlohu 1 budeme brát jako základní. Nyní můžeme přistoupit k vytváření nových úloh. Je přirozené, když začneme měnit velikost zadané čtvercové sítě. Uvažujme *např.* čtvercovou síť velikosti 5×5.

Úloha 2: Určete celkový počet čtverců ve čtvercové síti 5×5.

Řešení: Vzhledem k tomu, že jsme při řešení úlohy 1 objevili metodu, jak čtverce spočítat, můžeme nyní rovnou vyslovit odpověď.



Obr. 23

Odpověď: Celkový počet čtverců ve čtvercové síti 5×5 je $5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 55$.

Úkol: Napište si ještě počty čtverců v rozepsané formě pro síť 3×3 a síť 6×6.

Nyní můžeme vyslovit úlohu, která všechny předchozí zahrnuje.

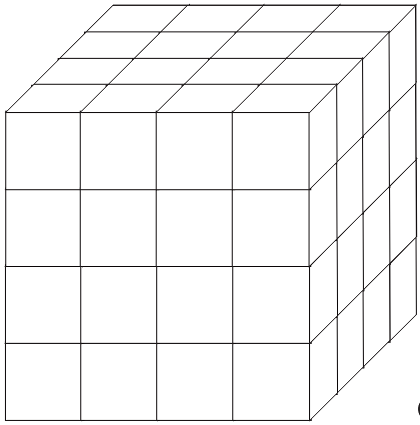
Úloha 3: (zobecnění předchozích úloh): Určete celkový počet čtverců ve čtvercové síti $n\times n$, kde n je libovolné nenulové přirozené číslo.

Odpověď: Celkový počet čtverců ve čtvercové síti $n\times n$ je $n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$.

Zdůvodnění správnosti odpovědi můžeme spatřovat v tom, jak systematicky čtverce počítáme.

Předchozí úlohy se odehrávaly v rovině, tj. ve dvojrozměrném prostoru. Jak by vypadala problematika v prostoru trojrozměrném? Právě vyslovená otázka může být zdrojem dalších úloh našeho hroznu.

Úloha 4: Určete celkový počet krychlí v krychlové síti $4\times4\times4$ (viz obr. 24).



Obr. 24

Řešení: Určíme nejprve počet těch nejmenších krychlí, tj. krychlí velikosti $1\times1\times1$. Tyto krychle se vejdou 4 vedle sebe, 4 za sebe a 4 nad sebe, celkově jich proto bude $4 . 4 . 4 = 4^3 = 64$.
Obdobným způsobem můžeme určit i počty krychlí velikosti $2\times2\times2$; $3\times3\times3$; $4\times4\times4$.
Celkový počet krychlí bude: $4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$.

Odpověď: Celkový počet krychlí v krychlové síti $4\times4\times4$ je $4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 100$.

Úkol: Napište si ještě v rozepsané formě počty čtverců pro síť $3\times3\times3$ a síť $5\times5\times5$.

Nyní můžeme vyslovit úlohu, která všechny předchozí zahrnuje.

Úloha 5 (zobecnění úlohy 4 a výsledku úkolu): Určete celkový počet krychlí v krychlové síti $n\times n\times n$, kde n je libovolné nenulové přirozené číslo.

Odpověď: Celkový počet krychlí v krychlové síti $n\times n\times n$ je $n^3 + (n-1)^3 + ... + 2^3 + 1^3$.

Zdůvodnění správnosti odpovědi můžeme spatřovat v tom, jak systematicky krychle počítáme.

Problematiku můžeme převést také na přímku, tj. do jednorozměrného prostoru.
Je to úsečka rozdělená body na stejně dlouhé části.

Úloha 6: Určete celkový počet úseček na úsečce délky 4, která je třemi body rozdělena na jednotkové úsečky.

Odpověď: Celkový počet úseček je: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Úkol: Napište si ještě počty úseček v rozepsané formě pro úsečky délky 3 a 5.

Nyní můžeme vyslovit úlohu, která všechny předchozí zahrnuje.

Úloha 7 (zobecnění úlohy 6 a výsledku úkolu)**:** Určete celkový počet úseček na úsečce délky n, která je rozdělena na jednotkové úsečky, kde n je libovolné nenulové přirozené číslo.

Odpověď: Celkový počet úseček na úsečce délky n, která je rozdělena na jednotkové úsečky je $n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$.

Zdůvodnění správnosti odpovědi můžeme spatřovat v tom, jak systematicky úsečky počítáme.

Příklad: Na úsečce délky 7, která je rozdělena na jednotkové úsečky, je celkem $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ úseček.

Pokud vypíšeme v obecné formě získané odpovědi, dostaneme pro příslušné sítě (úlohy 7, 3, 5):

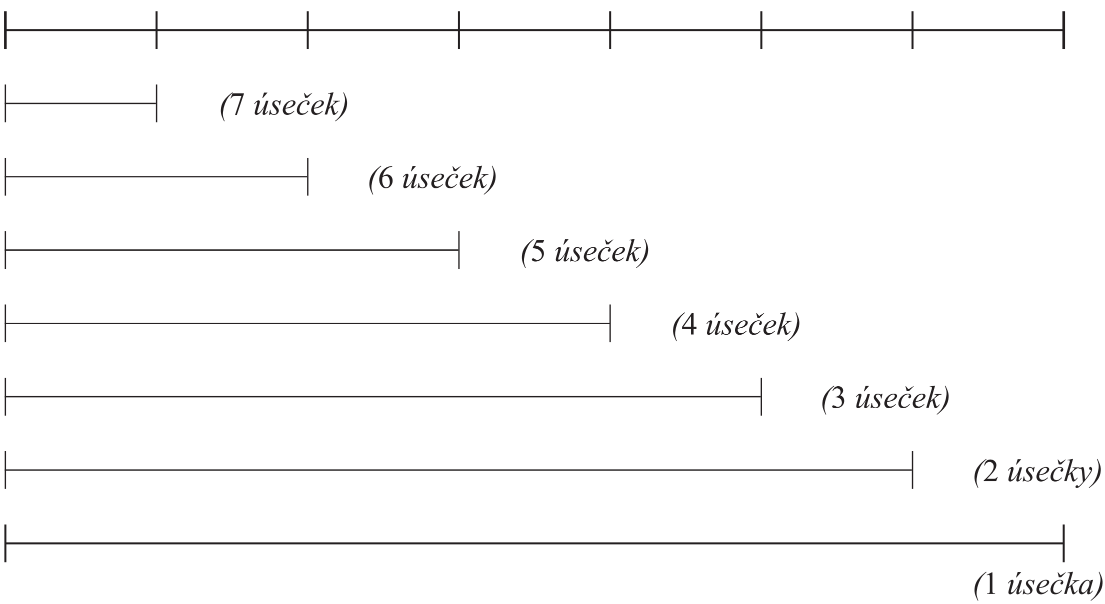
Kolik úseček? $n + (n - 1) + \ldots + 1$

Kolik čtverců? $n^2 + (n - 1)^2 + \ldots + 1^2$

Kolik krychlí? $n^3 + (n - 1)^3 + \ldots + 1^3$

Pokud čtenáře uvedený hrozen zaujal, může sám vytvořit podobné **úlohy**. Může *např.* uvažovat obdélníkové nebo trojúhelníkové sítě.

Počítejte také počet úseček na obrázku a ukazujte je:



Uvedené hrozny jistě přesvědčivě ukázaly, jak důležité jsou metody řešení úloh. Objevená metoda řešení základní úlohy se dala dobře používat i při řešení dalších úloh příslušného hroznu nebo jsme ji mohli pro řešení vhodně upravit.

4. Řešení problémů pomocí zkoumání

Málokdo ví, že experimentování objevili matematici. Experimentovali již v době antického Řecka, tedy staletí před Kristem. My jsme také v předchozí části několikrát experimentovali. Pomocí experimentování můžeme řešit některé matematické úlohy, ale pomocí experimentování můžeme také zkoumat matematické situace.

Při zkoumání je vhodné postupovat následujícím způsobem:

Matematická situace (nebo úloha) – experimentování – hypotéza (domněnka) – ověření hypotézy – důkaz hypotézy – matematická věta (nebo odpověď).

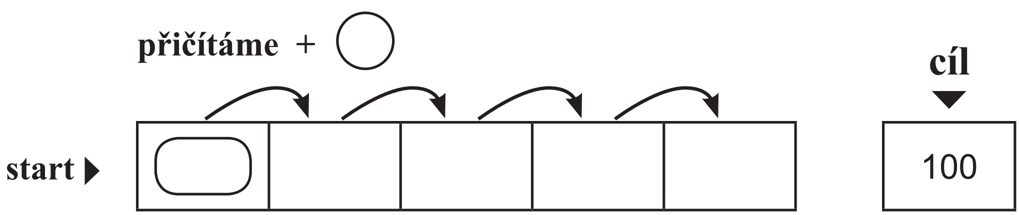
Nejdůležitější pro nás bude vyslovení hypotézy. Pokud nebudete schopni hypotézu dokázat, nevadí. Skončíte tím, že hypotézu ověříte na dalších případech. Takto někdy končí i profesionální matematici. K této situaci se ještě vrátíme na konci knížky.

Nyní tento postup ukážeme v praxi.

A. Využití tabulkového procesoru

Chtěli bychom ukázat jedno možné využití tabulkového procesoru při experimentování. Problematika se dá řešit i „ručně“. Pokud nám však nejde o procvičování numerického počítání, je vhodné využít počítač, abychom se mohli více soustředit na vlastní zkoumání.

Úloha 1: V následujícím schématu (obr. 1) můžeme libovolně volit číslo v prvním rámečku zleva (start) a číslo, které přičítáme. Čísla v dalších čtyřech rámečcích jsou vypočítávána postupným přičítáním „přičítacího“ čísla k číslu startovnímu. Čísla ve všech pěti rámečcích sečteme a dostaneme tak konečný výsledek (cíl). Která přirozená čísla mohou být přičítaným a startovním číslem, abychom získali cílové číslo 100? Kolik má úloha řešení v množině **N** všech přirozených čísel?



Obr. 1

Řešení: Prozatím nemáme žádný vhled do zkoumané problematiky.

Začneme tedy **experimentováním**.

Označme si **startovní číslo** s a **přičítané číslo** p. Pokud za s dosadíme *např.:* číslo **5** a za p číslo **4**, dostaneme cílové číslo **65** (viz obr. 2).
Dvojice **(5, 4)** tedy není řešením. Budeme proto v experimentování pokračovat.

Máme minimálně dvě možnosti: experimentovat náhodně nebo systematicky.

Budeme-li experimentovat **náhodně**, je naděje, že po určité době objevíme nějaké řešení. Je však málo pravděpodobné, že takto objevíme všechna řešení.
Budeme-li experimentovat **systematicky**, je velmi pravděpodobné, že objevíme všechna řešení. Zvolíme proto **systematické experimentování**.

Protože však při tomto experimentování je poměrně dosti počítání, využijeme k tomuto počítání **tabulkový procesor**. Experimentování pomocí počítače nám umožní zaměřit veškerou pozornost na zkoumání a nerozptylovat se počítáním (i když i toto počítání má svoji cenu). Na obr. 2 je výše uvedený experiment vyznačený v Excelu.

p = 4
s = 5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	+	4						
2		5	9	13	17	21		65
3		start						cíl

Obr. 2

Poznámka: Do políček C2, D2, E2, F2 jsme po řadě vložili vzorce:
=B2+B1, =C2+B1, =D2+B1, =E2+B1.
Do políčka H2 jsme vložili vzorec: =B2+C2+D2+E2+F2.

Chceme-li postupovat systematicky a objevit nějakou zákonitost, je vhodné, když budeme měnit pouze jedno ze dvou zadávaných čísel. Rozhodněme se pro přičítané číslo ***p***. V prvním experimentu bylo ***p*** = 4. Zvětšíme-li jej o 1, dostaneme (viz obr. 3):

p = 5
s = 5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	+	5						
2		5	10	15	20	25		75
3		start						cíl

Obr. 3

Čísla **(5, 5)** opět nejsou řešením. Zvětšíme-li číslo ***p*** opět o 1, je ***p*** = 6 a ***s*** = 5. Dostaneme (viz obr. 4):

p = 6
s = 5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	+	6						
2		5	11	17	23	29		85
3		start						cíl

Obr. 4

Čísla **(6, 5)** také nejsou řešením. Můžeme udělat ještě několik experimentů.
Prohlédneme-li si výsledky, vidíme, že pokud zvětšíme číslo ***p*** o 1, zvětší se cílové číslo o 10. To už je významný **objev – hypotéza 1**.

Pojďme zkoumat, co se stane, pokud budeme měnit startovní číslo **s**.
Vraťme se k prvnímu experimentu (viz obr. 2).

Zvětšíme-li číslo **s** o 1, tzn. **s** = 6, dostaneme (viz obr. 5):

$p = 4$
$s = 6$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	+	4						
2		6	10	14	18	22		70
3		start						cíl

Obr. 5

Dvojice (**6, 4**) není řešením. Zvětšíme-li číslo **s** opět o 1, tzn. **s** = 7, dostaneme situaci na obrázku 6. Můžeme udělat ještě několik experimentů.

Prohlédneme-li si výsledky (viz obr. 2, 5, 6), vidíme, že pokud zvětšíme číslo **s** o 1, zvětší se cílové číslo o 5. Toto je opět významný **objev – hypotéza 2**.

$p = 4$
$s = 7$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	+	4						
2		7	11	15	19	23		75
3		start						cíl

Obr. 6

Nyní již můžeme odhadnout nějaké řešení. Vezmeme-li *např.* dvojici (**s, p**) = (**6, 4**), víme, že cílové číslo bylo 70 (viz obr. 5). Zvětšíme-li tedy *např.* číslo **p** o 3, zvětší se cílové číslo o $3 \cdot 10 = 30$. Cílové číslo by tak mělo být 100.
Přezkoušíme pro (**s, p**) = (**6, 7**) (viz obr. 7):

$p = 7$
$s = 6$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	+	7						
2		6	13	20	27	34		100
3		start						cíl

Obr. 7

Čísla (**6, 7**) jsou řešením pro úlohu 1.

Pomocí získaného řešení (6, 7) a pomocí výše uvedených dvou objevů (zvětší-li se **p** o 1, zvětší se cílové číslo o 10 a zvětší-li se **s** o 1, zvětší se cílové číslo o 5), můžeme nyní vytvořit další řešení.

Budeme-li tedy zvětšovat číslo **p** o 1, musíme číslo **s** zmenšovat o 2.

Další řešení by proto měla být (**4, 8**), (**2, 9**), (**0, 10**).

U uvedených řešení ověřujte velikost cílových čísel.

Budeme-li naopak číslo $\boldsymbol{p}$ o 1 zmenšovat, musíme číslo $\boldsymbol{s}$ o 2 zvětšovat.

Dostaneme tak dvojice (**8, 6**), (**10, 5**), (**12, 4**), (**14, 3**), (**16, 2**), (**18, 1**) a (**20, 0**).

Získaná řešení můžeme pro přehlednost vložit do tabulky (viz tab. 1).
Zadaný problém tedy má celkem 11 řešení.

$\boldsymbol{s}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\boldsymbol{p}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tab. 1

Odpověď: Úloha má celkem 11 řešení. Jsou vyznačena v tabulce 1.

Náš problém můžeme vyřešit také **algebraickou cestou.** Tento text nemusí čtenář číst.

Jestliže označíme přičítané číslo $\boldsymbol{p}$ a startovní číslo $\boldsymbol{s}$, pak cílové číslo vznikne takto:

$$s + (s + p) + (s + 2p) + (s + 3p) + (s + 4p) = 5s + 10p. \tag{1}$$

A protože je cílové číslo v našem případě 100, dostáváme rovnici:

$$5s + 10p = 100$$

a po zkrácení

$$s + 2p = 20$$

Vzhledem k tomu, že hledáme řešení pouze v přirozených číslech, získáme její řešení *např.* následovně:

$$s = 20 - 2p$$

Nyní budeme za $\boldsymbol{p}$ postupně dosazovat čísla 0, 1, 2, …, 10 a vždy spočítáme číslo $\boldsymbol{s}$.
Tak získáme všechna řešení vyznačená v tabulce 1. □

Úkol: Zkoumejte obrázky (viz *např.* obr. 7 nebo obr. 6), které odpovídají řešením, i ty, které k řešením nevedou. Pokuste se vyslovit nějakou další hypotézu.

Možná **hypotéza**: Tabulky, které vedou k cílovému číslu 100, mají v prostředním políčku číslo 20. **Úkol:** Zdůvodněte.

Nyní, když jsme vyřešili základní problém, můžeme vytvořit několik příbuzných problémů a můžeme se pokusit je i řešit. Zamyslete se nad tím, co v daném problému můžeme měnit.

Zřejmě první, co bychom mohli měnit, je **cílové číslo**.

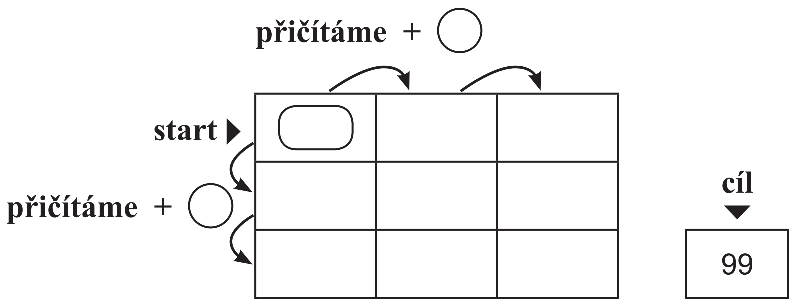
Jistě jste už přišli na to, že pokud v problému 1 zvolíte jako cílové číslo přirozený násobek čísla 5, úloha bude mít řešení. Pokud zvolíme číslo, které není násobkem pěti, úloha řešení mít nebude.

Úkol: Pokud jste na uvedené tvrzení nepřišli, pokuste se ho alespoň ověřit pomocí konkrétních příkladů. Pokud se pokusíte toto tvrzení dokázat, můžete využít *např.* výraz (1). (Je vidět, že z pravé strany můžete vytknout číslo 5.)

Vraťme se k rozvíjení našeho hroznu. Můžeme měnit počet políček, můžeme však také číslo p odčítat nebo jím můžeme násobit. Můžeme také tyto „jednorozměrné" úlohy převést na „dvojrozměrné" nebo dokonce „trojrozměrné".
V těchto případech se naplno projeví výhoda využití tabulkového procesoru.

Příkladem takové dvojrozměrné úlohy je následující úloha 2. Je ale obtížnější.

Úloha 2: Ve schématu na obr. 8 volíme dvě „přičítací" čísla (pro řádky a pro sloupce) a číslo v levém horním rámečku (start). Čísla v dalších osmi rámečcích jsou vypočítávána postupným přičítáním obou přičítacích čísel k číslu startovnímu. Čísla ve všech devíti rámečcích sečteme, abychom dostali konečný výsledek (cíl). Která přirozená čísla mohou být přičítacími čísly a číslem startovním, abychom získali cílové číslo 99?



Obr. 8

Řešení již přenecháme čtenáři.

Pomoc: Můžete experimentovat obdobně jako jsme v předchozí úloze experimentovali my. Přitom měňte vždy pouze jedno ze zadaných tří čísel. Na základě toho se vám jistě podaří vyslovit hypotézy, které využijete k řešení.

Pokud čtenář četl algebraické řešení u předchozího příkladu, bude následujícímu textu jistě rozumět. Označíme startovní číslo $\boldsymbol{s}$, přičítací číslo ve směru řádků $\boldsymbol{r}$ a přičítací číslo ve směru sloupců $\boldsymbol{t}$. Čísla dopište postupně do rámečků tabulky.

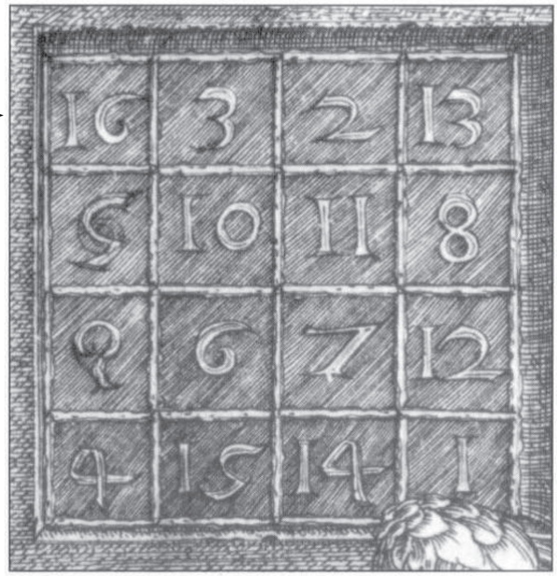
Např.: V druhém řádku tabulky budou výrazy $s + t$, $s + t + r$, $s + t + 2r$.
Pokud sečteme výrazy ve všech políčkách získáte výraz $9s + 9r + 9t$ a po úpravě dostanete $9(s + r + t)$. Získaný výraz jasně ukazuje, že úloha bude mít řešení, pokud cílové číslo bude násobkem čísla 9, tedy *např.* 99 jako je to v našem zadání. Protože $99 = 9 \cdot 11$, je řešením naší úlohy jakákoliv trojice čísel $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$, jejichž součtem je číslo 11, tedy *např.:* trojice 2, 5, 4.

Pokud budete vytvářet a řešit další „rovinné" úlohy (viz *např.:* obr. 8), můžete obdobně jako my vždy určit jaké cílové číslo zvolit, aby úloha měla řešení.

B. Tlačítka na mobilním telefonu

Magické čtverce fascinovaly matematiky ale i další lidi již ve starověku. Mezi nejznámější magické čtverce patří dnes čtverec, který je na mědirytině Melancholie od Albrechta Dürera z roku 1514. V tomto článku ukážeme jeden velmi jednoduchý případ takového čtverce.

Melancholie



Melancholie – Detail magického čtverce

Úkol: Číselná tlačítka na mobilu jsou uspořádaná do následujícího čtverce (viz obr. 1): Sečteme-li všechna čísla ve druhém sloupci nebo všechna čísla ve druhém řádku či v hlavní nebo vedlejší úhlopříčce, vždy dostaneme číslo 15. Překontrolujte.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obr. 1

Úloha 1: Přemístěte tlačítka na mobilním telefonu (viz obr. 1) tak, aby výše uvedené součty zůstaly 15, ale navíc, aby i součty čísel ve zbylých řádcích a sloupcích byly 15. Přemístěte při tom minimální počet tlačítek.

Úloha po nás vlastně požaduje sestrojení určitého magického čtverce velikosti 3×3.

Řešení: Můžeme začít náhodným experimentováním (strategie pokus – omyl) nebo experimentováním pokus – ověření – korekce, ale to nemusí vést brzy k cíli.

Možná si při experimentování uvědomíme, že žádná dvě čísla ze tří největších, tj. čísel 7, 8, 9, nemohou být ve stejném řádku ani sloupci ani úhlopříčce, protože jejich celkový součet by pak byl větší než 15. Analogicky ani žádná dvě čísla ze tří nejmenších, tj. čísel 1, 2, 3, nemohou být ve stejném řádku, sloupci ani úhlopříčce, protože jejich celkový součet by pak byl menší než 15. Toto zjištění nám při experimentování může podstatně pomoci. Pokud bychom ani při uvedených faktech nezískali správný výsledek, pak nám jistě experimentování pomohlo úlohu důkladně pochopit. Nyní se však zamyslíme nad tím, jak postupovat jinak.

Položíme si otázku, která čísla by mohla být umístěna do rohů, která mezi ně a které číslo doprostřed čtverce. Součet každých tří uvažovaných čísel musí být 15.

Postupujme ještě obráceně. Najděme všechny možné rozklady čísla 15 na součet tří čísel. V rozkladech však mohou být pouze čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pokud bude v rozkladu číslo 1, dostaneme:

$$15 = 1 + 5 + 9$$
$$15 = 1 + 6 + 8$$

Číslo 1 je tedy pouze ve dvou rozkladech, a proto musí být umístěno někde ve „středu strany“. Tam se totiž „protíná“ řádek a sloupec.

Pokud bude v rozkladu číslo 2, dostaneme:

$$15 = 2 + 4 + 9$$
$$15 = 2 + 5 + 8$$
$$15 = 2 + 6 + 7$$

Číslo 2 je ve třech rozkladech, a musí proto být umístěno někde v rohu čtverce. Tam se „protíná“ řádek, sloupec a úhlopříčka.

Pokud bude v rozkladu číslo 3, dostaneme opět rozklady pouze dva:

$$15 = 3 + 4 + 8$$
$$15 = 3 + 5 + 7$$

Číslo 3 proto musí být umístěno někde ve středu strany.

Budeme-li v tomto rozkládání čísla 15 pokračovat, zjistíme, že mimo číslo 5 jsou všechna čísla ve dvou nebo ve třech rozkladech.
Pouze číslo 5 je ve čtyřech rozkladech:

$$15 = 5 + 1 + 9$$
$$15 = 5 + 2 + 8$$
$$15 = 5 + 3 + 7$$
$$15 = 5 + 4 + 6$$

Číslo 5 proto musí být i při tomto požadovaném přeskupení stále uprostřed čtverce. Tam se totiž „protíná“ řádek, sloupec a obě úhlopříčky.

Na závěr vytváření všech možných rozkladů čísla 15 můžeme říci:

- Čísla 2, 4, 6, 8 musí být umístěna v rozích.
- Čísla 1, 3, 7, 9 musí být umístěna mezi nimi.
- Číslo 5 musí být umístěno uprostřed čtverce.

Nyní můžeme zkoušet vkládat uvedená čísla do příslušných polí a ověřovat, zda vyšel magický čtverec. Uděláme-li několik takových experimentů, jistě si uvědomíme zákonitost, jak čísla do čtverce umístit. Jedno takovéto rozmístění je znázorněno na obr. 2.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Obr. 2

Úkol: Překontrolujte na obr. 2 zda jsou opravdu všechny požadované součty 15.

Jsou ještě nějaká další řešení? Protože čtverec má celkem 8 shodností (4 osové souměrnosti a 4 otočení zahrnující i identitu), můžeme pomocí nich z našeho čtverce sestrojit ještě 7 dalších magických čtverců. Toto však již přenecháme čtenáři. □

Úkol: Nyní, když jsme problém vyřešili, můžete odpovědět na otázku: Kolik tlačítek musíte přemístit, abyste dostali „magickou" klávesnici? Odpovězte, než budete pokračovat ve čtení.

Odpověď: Musíme přemístit všechna tlačítka mimo prostřední tlačítko 5. □

Úkol: Všech osm magických čtverců 3×3 má uprostřed číslo 5. Kolik dalších čísel musíte zadat a kam, aby byl čtverec jednoznačně určen? Odpovězte, než budete pokračovat ve čtení.

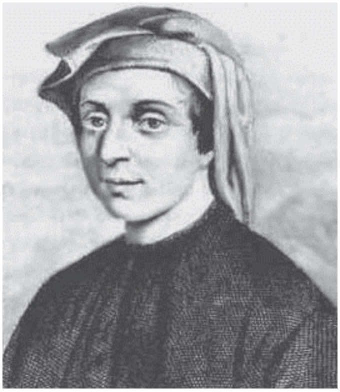
K **odpovědi** se můžeme dostat *např.* experimentováním se čtvercem na obr. 2. Zřejmě musíme zadat dvě další čísla, která však nesmí ležet ve stejné úhlopříčce, ani ve stejném řádku nebo sloupci. Navíc přitom musíme splnit výše uvedené podmínky: Pokud je číslo v rohovém čtverečku, musí být sudé a pokud je uprostřed strany, musí být liché. Ještě však musí platit, že součet těchto dvou zadaných čísel nesmí být 10. (Proč?) □

Poznámka: Bylo by jistě zajímavé mít na klávesnici svého mobilu číslice uspořádané do magického čtverce, nebylo by to však pravděpodobně příliš praktické.

Výše uvedenou úlohu nyní můžete **obměňovat**. Do čtverečků můžete *např.* vkládat čísla 2 až 10 nebo 3 až 11 nebo *např.* nějakou skupinu čísel sudých nebo prvočísla a zjišťovat, zda i pro tuto skupinu devíti čísel můžete vytvořit magický čtverec.

C. Fibonacciho posloupnost

Na závěr knížky ukážeme výzkumný přístup na netradičním, ale o to zajímavějším tématu zvaném Fibonacciho posloupnost. Při vlastním zkoumání nebudeme potřebovat žádné zvláštní matematické znalosti.



Fibonacci

Hlavní pozornost budeme věnovat objevování hypotéz.

Fibonacci byl jedním z největších matematiků středověku. Byl *např.* velkým propagátorem desítkové poziční soustavy, která vznikla v Indii a kterou do Evropy přinesli Arabové.

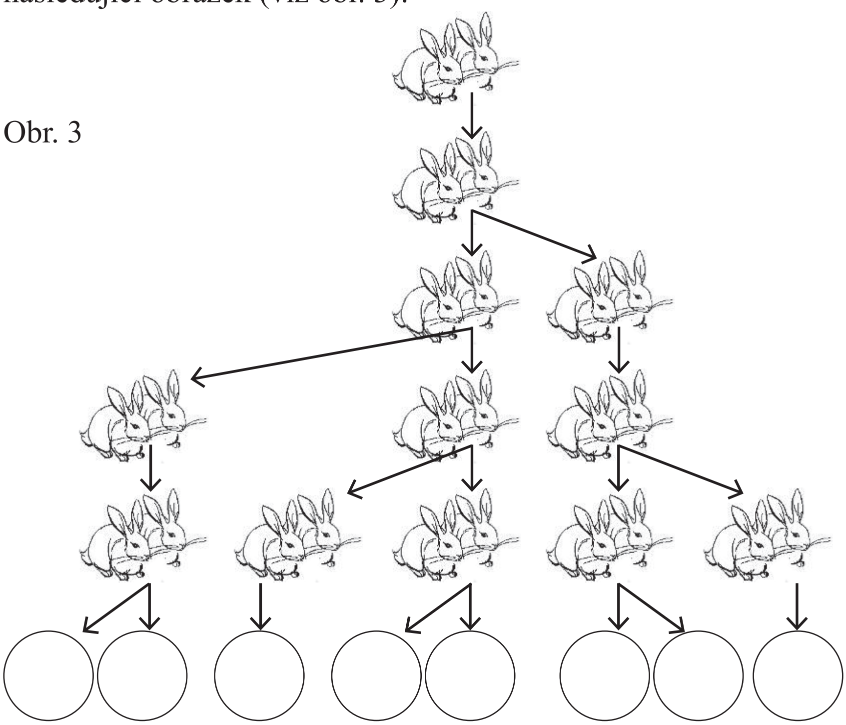
Fibonacci se narodil okolo roku 1175 ve městě Pizza se známou šikmou věží. Jeho vlastní jméno bylo Leonardo Pizánský. Protože však on sám si říkal Fibonacci, což znamená syn Bonacciho, je dnes znám spíše pod tímto jménem.

Zůstalo po něm celkem 5 matematických prací, z čehož čtyři jsou knihy. V jedné z nich vyslovil takovýto problém:

Vypustíme do přírody párek malých zajíců. Zajícům trvá měsíc, než dospějí, a pak vždy každý další měsíc mají párek zajíčků. Kolik párů zajíčků bude v přírodě za rok?

Pokud si situaci v několika prvních měsících graficky znázorníme, dostaneme následující obrázek (viz obr. 3):

Obr. 3



nyní 1 pár

za 1 měsíc 1 pár

za 2 měsíce 2 páry

za 3 měsíce 3 páry

za 4 měsíce 5 párů

za 5 měsíců ______

za 6 měsíců ______

Úkol: Pokuste se obr. 3 rozšířit ještě o dva řádky.

Získaná posloupnost dostala později název **Fibonacciho posloupnost**. Pokusme se tuto posloupnost zkoumat.

1. Členy Fibonacciho posloupnosti

Prvních deset členů Fibonacciho posloupnosti je:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Úkol: Napište dalších pět členů této posloupnosti. (89, 144, 233, 377, 610)

Abychom se mohli o **Fibonacciho číslech**, tj. členech této posloupnosti, lépe vyjadřovat, budeme používat k jejich označení písmeno F s indexem udávajícím pořadí tohoto čísla, tzn.:

$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34\ \dots$

2. Vytváření posloupnosti

Pokuste se napsat vzoreček, pomocí něhož můžeme vytvářet členy této posloupnosti.

První dva členy jsou 1, tzn. $F_1 = F_2 = 1$.

Každý další člen vytvoříme vždy sečtením dvou členů předchozích, tzn.:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1},\ \text{kde } n \geq 3. \qquad \text{pravidlo (1)}$$

Pravidlu (1) budeme říkat **Fibonacciho pravidlo**.

Fibonacciho čísla sestavená do tabulky:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	...
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**...**

Nyní již můžeme odpovědět na otázku ve Fibonacciho problému, kolik párů zajíců bude v přírodě za rok. Bude to F_{13}, což je 233 (párů zajíců). □

Nyní se pokusíme pomocí zkoumání objevit nějakou vlastnost této posloupnosti.

3. Součty Fibonacciho čísel

Úloha 1: Zkoumejte součty několika prvních za sebou jdoucích Fibonacciho čísel, *např.:* $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ (to je $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$).

Řešení: Budeme **systematicky experimentovat:**

$F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$

$F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$

Zkoumejte získané součty. Vidíte nějakou zákonitost? Můžete porovnat získané součty s Fibonacciho čísly.

Další experimentování:

Pokusíme se při něm najít vztahy mezi součty a Fibonacciho čísly.

$F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 = F_4 - 1$
$F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4 = F_5 - 1$
$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 = F_6 - 1$
$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = F_7 - 1$
$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = F_8 - 1$
Také $F_1 = 1 = F_3 - 1$.

Hypotéza: Pro všechna přirozená čísla *n* platí:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1 \tag{2}$$

Pokud bychom hypotézu nedokázali, mohli bychom ji alespoň ověřit na několika dalších případech, *např.:* pro $n = 7,\ 8,\ 9$.
Protože však důkaz není obtížný, uděláme ho pomocí výpočtu.

Důkaz hypotézy (2) výpočtem: Důkaz nemusí číst žáci, kteří doposud neprobírali počítání s proměnnými označujícími čísla.

Nechť *n* je libovolné přirozené číslo. Úpravou Fibonacciho pravidla (1) dostaneme:
např.: $F_3 = F_1 + F_2$ a odtud $F_1 = F_3 - F_2$

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2\\
F_2 &= F_4 - F_3\\
F_3 &= F_5 - F_4\\
&\;\vdots\\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n\\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}\\
\hline
F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n &= F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1
\end{aligned}$$

Napsané rovnosti jsme sečetli. Na levé straně jsme dostali hledaný součet. Na pravé straně se při sčítání výraz podstatně zjednodušil ($F_3 - F_3$, $F_4 - F_4$, …).
Proto jsme i na pravé straně rovnosti dostali požadovaný výraz.

Protože jsme naši hypotézu dokázali, přejmenujeme ji na větu:

Věta 1: Pro libovolné přirozené číslo *n* platí: $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ □

Podobným způsobem můžeme zkoumat další druhy součtů Fibonacciho posloupnosti:
- součet členů na lichých pozicích,
- součet členů na sudých pozicích,
- součet čtverců Fibonacciho čísel.

Součet členů Fibonacciho posloupnosti na lichých pozicích

Úloha 2: Zkoumejte součty několika prvních členů Fibonacciho posloupnosti na lichých pozicích.

Např.: $1 + 2 + 5 + 13 = 21.$

Řešení: Experimentování:

$1 + 2 = 3 \ (= F_4)$
$1 + 2 + 5 = 8 \ (= F_6)$
$1 + 2 + 5 + 13 = 21 \ (= F_8)$
$1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55 \ (= F_{10})$

Hypotéza: Pro všechna přirozená čísla n platí:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} \qquad (3)$$

Důkaz: Použijeme výpočet obdobně jako v důkazu věty 1.

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_3 &= F_1 + F_2 \\ F_5 &= F_3 + F_4 \\ &\;\; - - - - - - - - - - \\ F_{2n-3} &= F_{2n-5} + F_{2n-4} \\ F_{2n-1} &= F_{2n-3} + F_{2n-2} \end{aligned}$$

Sečteme-li levé a pravé strany rovností, dostaneme:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} &= 1 + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{2n-3} + F_{2n-2} = \text{(podle věty 1)} = \\ &= 1 + (F_{2n} - 1) = F_{2n}. \end{aligned}$$

Věta 2: Pro všechna přirozená čísla n platí: $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$. □

Součet členů Fibonacciho posloupnosti na sudých pozicích

Úloha 3: Zkoumejte součty několika prvních členů Fibonacciho posloupnosti na sudých pozicích.

Např.: $1 + 3 + 8 = 12.$

Při řešení postupujte analogicky jako v předchozích dvou úlohách, tzn. začněte systematickým experimentováním, pak vyslovte hypotézu a ověřte ji. Pokud se vám podaří důkaz, přejmenujte hypotézu na větu 3.

Výsledek:

Věta 3: Pro všechna přirozená čísla n platí: $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ □

Součty čtverců Fibonacciho čísel

Úloha 4: Zkoumejte součty čtverců několika prvních Fibonacciho čísel a pokuste se vyjádřit je jako součin přirozených čísel.

Např.: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \,.\, 5$

Po systematickém experimentování vyslovte hypotézu a ověřte ji na dalších příkladech. Místo důkazu, který je trochu složitější, ukážeme, po vyslovení výsledku, zajímavé grafické znázornění.

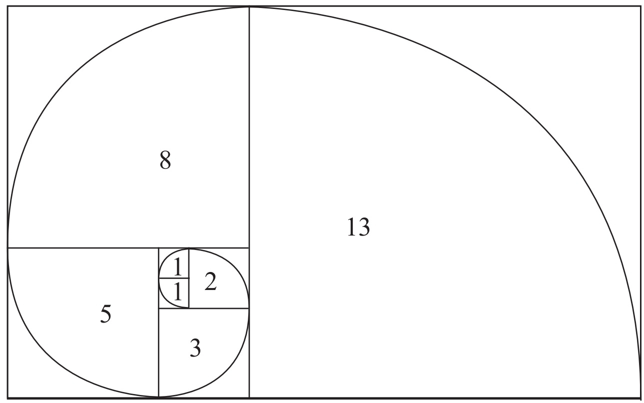
Výsledek:

Věta 4: Pro všechna přirozená čísla n platí: $F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} + F_3^{\ 2} + \ldots + F_n^{\ 2} = F_n \,.\, F_{n+1}$ $\square$

Vztah obsažený ve větě 4 můžeme objevit také tak, že vytvoříme čtverečky, jejichž strany mají délku vyjádřenou Fibonacciho čísly a pak čtverečky skládáme (viz obr. 4).

Po přidání dalšího čtverečku vždy vznikne obdélník, jehož strany mají délku vyjádřenou za sebou jdoucími Fibonacciho čísly. To právě říká věta 4.

Do tohoto narýsovaného obrazce můžeme dorýsovat zajímavou křivku, která se nazývá **Fibonacciho spirála**.



Obr. 4

Úlohy 1 až 4 tvoří hrozen, který vznikl pomocí zkoumání.
A tímto konstatováním naše zkoumání Fibonacciho čísel uzavíráme.

Právě také uzavíráme i celou knížku. Pokud jste ji prošli, pak jste se aspoň trochu naučili chovat jako matematici.

Přejeme vám, abyste v budoucnu, při řešení problémů, vhodně využívali postupy a náměty, které jste měli možnost v knížce poznat.

Také všem přejeme hodně vlastního důvtipu a radosti z řešení matematických úloh. Ať je pro vás matematika zajímavým předmětem.