

# Vedieť matematiku pre vyučovanie:

Kto vie dostatočne dobre učiť matematiku v treťom stupni a ako sa môžeme rozhodnúť?

DEBORAH LOEWENBERG BALL, HEATHER C. HILL, AND HYMAN BASS

Re-tlač s povolením z jesenného vydania 2005 American Educator, štvrt'ročný časopis Americkej federácie učiteľ'ov, AFL-CIO

Pôvodný článok<sup>1</sup>

## Introduction

Každý učiteľ ale i študent jasne prezentuje, že je potrebné zlepšiť vyučovanie a učenie sa matematiky. Krajina (USA poznámka prekladateľ'a) je opäť znepokojená nad úrovňou matematického vzdelávania. Bohužiaľ, minulé reformné hnutia pozostávali viac z úsilia a menej sledovali účinok. Ani tentoraz pravdepodobne neuspějeme bez toho, aby sme zohľadnili neuspokojivé výsledky minulých snáh a nepreskúmali faktory, ktoré prispievajú k úspechu v iných krajinách. Zvážte, čo výskum a skúsenosti neustále odhalujú: Hoci typickými metódami zlepšovania kvality výučby v USA bolo vypracovanie učebných osnov a – najmä v poslednom desaťročí – vyjadrenie noriem pre to, čo by sa študenti mali naučiť, bez priamej pozornosti na prax je možné len malé zlepšenie vyučovania. Dôležité sú prísne štandardy a kvalitné osnovy. Žiadny učebný plán sa však sám neučí a štandardy nefungujú nezávisle od toho, ako ich odborníci používajú.. Prísne štandardy a kvalitné osnovy sú dôležité. Ale žiadne kurikulum sa neučí samo, a to robia štandardy nefungujú nezávisle od toho, ako ich používajú profesionáli. Aby bolo možné efektívne implementovať štandardy a učebné osnovy, školské systémy závisia od práce kvalifikovaných učiteľ'ov, ktorí rozumejú danej téme. To, ako dobre učelia ovládajú matematiku, je kľúčové pre ich schopnosť rozumne používať učebné materiály, hodnotiť pokrok študentov a robiť správne úsudky o prezentácii, dôraze a postupnosti.

To, že kvalita vyučovania matematiky závisí od vedomostí učiteľ'ov o obsahu, by nemalo byť prekvapením. Rovnako neprekvapivé je, že mnohým americkým učiteľ'om chýba dobré matematické porozumenie a zručnosti. Dá sa to očakávať, pretože väčšina učiteľ'ov – ako väčšina

---

<sup>1</sup>Deborah Loewenberg Ball je dekanou School of Education a kolegiálnym profesorom vzdelávania Williama H. Payna na University of Michigan. Oblasť jej špecializácie zahŕňajú štúdium úsilia o zlepšenie výučby prostredníctvom politiky, reformných iniciatív, vzdelávania učiteľ'ov a matematických vedomostí na vyučovanie.

Heather C. Hill je pridružená vedecká pracovníčka v Škola vzdelávania, University of Michigan. Jej oblasť špecializácie zahŕňa vzdelávaciu politiku, výučbu a učiteľ'ské znalosti obsahu.

Hyman Bass je Roger Lyndon Collegiate profesor matematiky a matematického vzdelávania na Department of Mathematics and the School of Education, University of Michigan. Medzi jeho oblasti špecializácie patrí algebra (geometrické metódy v teórii grúp), vzdelávanie učiteľ'ov a matematické znalosti pre vyučovanie.

ostatných dospelých v tejto krajine – sú absolventmi práve toho systému, ktorý sa snažíme zlepšiť. Ich vlastné možnosti učiť sa matematiku boli nerovnomerné a často nedostatočné, rovnako ako možnosti ich neučiacich rovesníkov. Štúdie za posledných 15 rokov neustále odhaľujú, že matematické vedomosti mnohých učiteľov sú desivo slabé.<sup>2</sup> V tomto výskume je však neviditeľná skutočnosť, že matematické znalosti väčšiny dospelých Američanov sú rovnako slabé a často slabšie. Jednoducho sa nám nedarí dosiahnuť primerané štandardy matematických znalostí u väčšiny našich študentov a títo študenti sa stávajú ďalšou generáciou dospelých, niektorí z nich sú učiteľia. Je to veľký problém a výzva pre nás zlepšovať sa.

Čo je menej zrejmé, je náprava. Jedným z často navrhovaných riešení je vyžadovať od učiteľov, aby študovali viac matematiky, a to buď požiadavkou dodatočnej práce v kurze pre učiteľov<sup>3</sup>, alebo dokonca stanovením hlavného predmetu.<sup>4</sup> Iní obhajujú prístup viac založený na praxi a pripravujú učiteľov na matematiku, ktorú budú používať na vyučovaní. prácu. Títo zástancovia často požadujú prepracovanie kurzov a profesionálneho rozvoja matematických metód tak, aby sa viac zamerali na matematiku obsiahnutú v triedach, učebné materiály a mysle študentov. Iní tvrdia, že by sme mali prilákať nových zamestnancov z vysoko selektívnych vysokých škôl, pričom stavili na to, že celková inteligencia a základné matematické kompetencie sa ukážu ako účinné pri vytváraní učenia študentov. Zástancovia tohto návrhu sa rázne vyhýbajú formálnym vzdelávacím kurzom pre týchto nových regrútov, pričom stavili na to, že o efektívnom vyučovaní matematiky sa na vzdelávacích školách málo naučí.

Predmetom týchto návrhov je rozsah a povaha matematických vedomostí potrebných na vyučovanie. Potrebujú učiteľia na úspešné vyučovanie stredoškôľakov znalosti z oblasti pokročilého počtu, lineárnej algebry, abstraktnej algebry, diferenciálnych rovníc alebo komplexných premenných? Stredoškôľáci? Žiaci základnej školy? Alebo učiteľia potrebujú poznať len témy, ktoré žiakov skutočne učia? Prípadne existujú odborné znalosti z matematiky pre vyučovanie, prispôbené práci učiteľov s učebnými osnovami, výučbou a študentmi?

---

<sup>2</sup>Napríklad kniha Liping Ma z roku 1999, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, rozšírila záujem o otázku, ako učiteľia potrebujú poznať matematiku, aby mohli učiť (Ma, 1999). Ma vo svojej štúdií porovnávala matematické znalosti čínskych a amerických učiteľov základných škôl. Vytvorením portrétu dramatických rozdielov medzi týmito dvoma skupinami Ma použila svoje údaje na vytvorenie pojmu „hlbokého porozumenia základnej matematiky“, argumentu pre akési prepojené, kurikulárne štruktúrovaných a pozdĺžne koherentné znalostí základných matematických myšlienok. (Recenziu tejto knihy nájdete vo vydaní *American Educator* z jesene 1999, [Tu](#).)

<sup>3</sup>Napríklad v správe z roku 2001 *The Mathematical Education of Theachres*, the Conference Board of the Mathematical Sciences, American Mathematical Society, and Mathematical Association of America požaduje, aby budúci učiteľia základných škôl venovali aspoň deväť semestrálnych hodín základným matematickým myšlienkam základnej školy; budúci učiteľia matematiky pre stredné ročníky absolvovať aspoň 21 semestrálnych hodín matematiky vrátane aspoň 12 semestrálnych hodín základných myšlienok školskej matematiky vhodných pre stredné ročníky; a budúci stredoškôľskí učiteľov matematiky, aby absolvovali ekvivalent vysokoškôľského štúdia matematiky, vrátane 6-hodinového základného kurzu spájajúceho ich vysokoškôľské matematické kurzy so stredoškôľskou matematikou. Správa odporúča, aby budúci učiteľia absolvovali kurzy matematiky, „ktoré rozvíjajú hlboké pochopenie matematiky, ktorú budú učiť“ a „dôkladné zvládnutie matematiky v niekoľkých ročníkoch nad rámec toho, čo očakávajú, že budú učiť“, ako aj matematiky v skorších ročníkoch. známky.“

<sup>4</sup>NCLB vyžaduje, aby všetci noví učiteľia stredných a vysokých škôl preukázali odbornú spôsobilosť 1) absolvovaním štátneho akademického testu z každého predmetu, v ktorom vyučujú; alebo 2) absolvovaním akademického odboru, postgraduálneho titulu, kurz ekvivalentný vysokoškôľskému akademickému odboru alebo pokročilá certifikácia alebo kvalifikácia v každom z predmetov, v ktorých vyučujú (Verejné právo 107-110, oddiel 9101 [23]).

Napriek rozruchu a širokému spektru navrhovaných riešení sú účinky týchto presadzovaných zmien v matematických znalostiach učiteľ'ov na výsledky študentov nepreukázané alebo v mnohých prípadoch ostro spochybnené.

**Hoci mnohé štúdie dokazujú, že matematické vedomosti učiteľ'ov pomáhajú zlepšovať výsledky študentov, skutočný charakter a rozsah týchto vedomostí – či už ide len o základné zručnosti v ročníkoch, ktoré vyučujú, alebo o komplexné a profesionálne špecifické matematické znalosti – je do značnej miery neznámy.**

Vedúce autority v tejto oblasti spochybňujú prácu v kurzoch, či už v samotnej matematike, alebo o „matematických metódach“ – kurzoch, ktoré radia študentom spôsoby výučby matematiky. Len málo štúdií bolo úspešných pri určovaní vhodného matematického „kurikula“ – či už čisto matematického, založeného na praxi alebo oboje – ktoré môže učiteľ'om poskytnúť vhodnú matematiku, ktorá pomôže študentom učiť' sa (Wilson a Berne, 1999). Podobne vieme príliš málo o efektívnosti regrútov, ktorí obchádzajú tradičné školy vzdelávania. Potrebných je viac výskumných programov, ktoré dokončia cyklus a prepoja matematickú prípravu a vedomosti učiteľ'ov s výsledkami ich študentov.

V tomto článku popisujeme jeden takýto program výskumu, ktorý sme vyvíjali už viac ako desať ročie. V roku 1997 sme na základe predchádzajúcej práce (pozri Ball and Bass, 2003) začali podrobne skúmať skutočnú prácu vyučovania matematiky na základnej škole, pričom sme si všimli všetky výzvy v tejto práci, ktoré čerpajú z matematických zdrojov, a potom sme analyzovali povahu takýchto matematických vedomostí a zručností a ako sa uchovávajú a využívajú pri vyučovaní. Z toho sme odvodili praktický portrét toho, čo nazývame „matematické znalosti pre vyučovanie“ – druh odborných vedomostí z matematiky odlišný od tých, ktoré vyžadujú iné matematicky náročné povolania, ako je strojárstvo, fyzika, účtovníctvo alebo stolárstvo. Potom sme dôsledne testovali našu hypotézu o tomto „profesionálovi racionálne“ znalosti matematiky, najprv vytvorením špeciálnych meraní odborných matematických vedomostí učiteľ'ov a potom prepojením týchto meraní s rastom matematických výsledkov študentov. Zistili sme, že učitelia, ktorí dosiahli vyššie skóre v našich meraniach matematických vedomostí pre vyučovanie, dosiahli lepšie výsledky vo výsledkoch študentov. Tento článok sleduje vývoj týchto myšlienok a popisuje tieto odborné poznatky z matematiky pre vyučovanie.

## 1 Čo to znamená Vedieť matematiku pre vyučovanie?

Každý deň v matematických triedach v tejto krajine študenti dostávajú záhadne nesprávne odpovede, získavajú správne odpovede pomocou nekonvenčných prístupov a kladú otázky:

- Prečo funguje „pridanie nuly“ pri vynásobení čísla desať'?
- Prečo teda „posúvame desiatinnú čiarku“, keď násobíme desiatinné miesta desiatimi?
- A je to iný postup alebo rôzne aspekty toho istého postupu – zmena hodnoty miesta o jednu jednotku z desiatich?
- Je nula párna alebo nepárna?
- Aký je najmenší zlomok?

Matematické postupy, ktoré sú pre dospelých automatické, nie sú študentom ani zd'aleka samozrejmé; Rozlišovanie medzi každodenným a technickým používaním pojmov – priemerný, podobný, rovnomerný, racionálny, riadok, objem – komplikuje komunikáciu. Hoci vycibrené matematické vedomosti sú elegantnou a dobre štruktúrovanou doménou, matematické vedomosti, ktoré študenti majú a vyjadrujú, sú často neúplné a ťažko pochopiteľné. Iní sa môžu vyhnúť riešeniu tejto nečakanej matematickej situácii, ale učitelia sú v jedinečnej pozícii, keď musia tieto vedomosti profesionálne skúmať, interpretovať, opravovať a rozširovať.

Vyučovali a sledovali sme mnohé hodiny matematiky a zdalo sa nám jasné, že tieto „problémy v triede“ sú tiež matematickými problémami, ale nie také matematické problémy, aké sa vyskytujú v tradičných disciplinárnych kánonoch alebo kurzoch. Aj keď sa to zdalo zrejmé, učitelia museli poznať témy a postupy, ktoré oni učia - delenie, prvočísla, ekvivalentné zlomky, funkcie, posunutia a rotácie a tak ďalej — naše skúsenosti a pozorovania neustále zdôrazňovali ďalšie rozmery vedomostí užitočné v triedach. V súlade s týmto pozorovaním sme sa rozhodli zamerať svoje úsilie na objasnenie povahy tohto dodatočného poznania a pýtať sa, čo v praxi učitelia potrebujú vedieť o matematike, aby boli úspešní u žiakov v triedach.

Aby sme postúpili v týchto otázkach, zamerali sme sa na „učiteľské dielo“ (Ball, 1993; Lampert, 2001). Čo robia učitelia vo vyučovaní matematiky a akými spôsobmi robia to, čo robia, si vyžaduje matematické uvažovanie, prehľad, porozumenie a zručnosť? Namiesto toho, aby sme začali učebnými osnovami, ktoré vyučujú, alebo štandardmi, za ktoré sú zodpovední, študujeme prácu učiteľov. Pod pojmom „vyučovanie“ rozumieme všetko, čo učitelia robia na podporu výučby svojich študentov. Zrejme máme na mysli interaktívnu prácu na vyučovacích hodinách v triedach a všetky úlohy, ktoré vznikajú v priebehu toho. Ale myslíme aj na hodiny ich plánovania, na hodnotenie práce žiakov, na písanie a známkovanie testov, vysvetľovanie triednej práce rodičom, tvorba a manažovanie domácich úloh, venovanie sa obavám o spravodlivosť, jednanie s riaditeľom, ktorý má významný vplyv na matematické kurikulum atď. Každá z týchto úloh zahŕňa znalosť matematických predstáv, zručnosť matematického myslenia a komunikácie, plynulosť s príkladmi a pojmy a premyslenosť o povahe matematickej odbornosti (Kilpatrick, Swafford a Findell, 2001).

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline \end{array}$$

Obr. 1: Písomné násobenie

Aby sme stručne ilustrovali, čo znamená poznať matematiku na vyučovanie berieme špecifickú matematickú tému — násobenie celých čísel. Jedným z aspektov tohto poznania je byť schopný použiť spoločný algoritmus na výpočet odpovede. Zvážte nasledujúci problém násobenia (Obr. 1).

Väčšina čitateľov si pamätá, ako vykonať jednotlivé kroky písomného násobenia–algoritmu, ktorý sa naučili. Pozri obr. 2.

Je jasné, že schopnosť správneho násobenia je nevyhnutná vedomosť pre výučbu násobilky pre študentov. Ale to nestačí na vyučovanie. Učitelia musia vysvetľovať, počúvať, a skúmať prácu študentov. Musia si vybrať užitočné modely alebo príklady. Robiť tieto veci si vyžaduje ďalší matematický náhľad a pochopenie.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2 \\
 35 \\
 \times 25 \\
 \hline
 175 \\
 70 \\
 \hline
 875
 \end{array}$$

Obr. 2: Algoritmus písomného násobenia

Učítelia musia byť napríklad schopní vidieť a zdôrazniť typickú nesprávnu odpoveď: Skonštatovanie, že odpoveď tohto študenta (obr. 2) je nesprávna, je len jeden krok. Efektívne vyučovanie však zahŕňa aj analýzu zdroja chyby. V tomto prípade sa študent „neprest’ ahoval nad“ 70 v druhom riadku.

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 25 \\
 \hline
 175 \\
 |70 \\
 \hline
 245
 \end{array}$$

Obr. 3: Algoritmus násobenia - chybný krok

Niekedy chyby<sup>5</sup> vyžadujú viac matematickej analýzy: čo sa tu stalo?

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2 \\
 35 \\
 \times 25 \\
 \hline
 255 \\
 80 \\
 \hline
 1055
 \end{array}$$

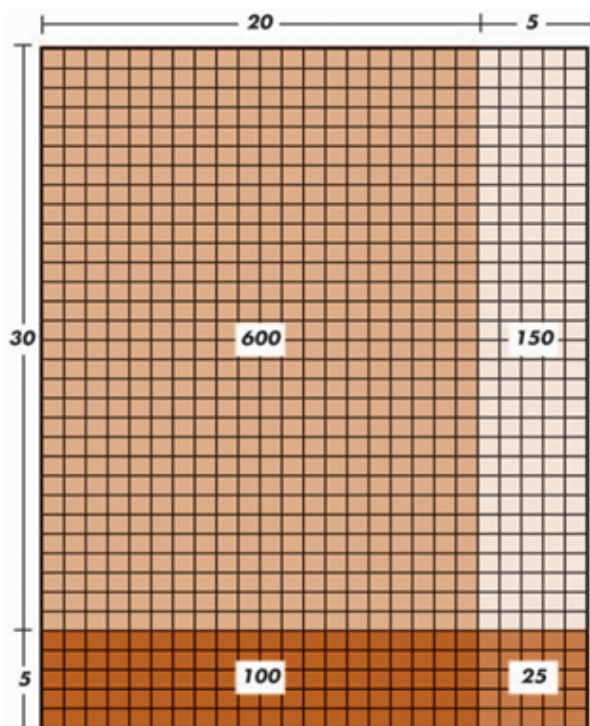
Obr. 4: Algoritmus násobenia - chybné kroky

Učítelia sa možno budú musieť dlhšie pozerat’ na matematické kroky, ktoré to spôsobili, ale väčšina z nich bude vidieť zdroj chyby. Ale analýza chýb nie je všetko, čo učítelia robia. Vyučovanie zahŕňa používanie reprezentácií. Aký je efektívny spôsob vyjadrenia významu algoritmu na násobenie celých čísel? Jedným z možných spôsobov, ako to urobiť, je použiť plošný model zobrazujúci obdĺžnik s dĺžkami strán 35 a 25 a ukázať, že vytvorená plocha je 875 štvorcových jednotiek:

Študenti nielen robia chyby, ale kladú otázky, používajú modely a vymýšľajú si vlastné neštandardné metódy riešenia problémov. Vyučovanie zahŕňa aj vysvetlenie, prečo by sa 70 malo

<sup>5</sup>Tu študent pravdepodobne vynásobil  $5 \times 5$ , aby dostal 25, ale potom, keď študent „niesol“ 2, pridal 2 ku 3 a potom to vynásobil 5 – teda opäť  $5 \times 5$ , čo dáva 25, a nie  $(3 \times 5) + 1 = 7$ . Podobne v druhom riadku pridal 1 ku 3 pred vynásobením, čím získal  $4 \times 2$  namiesto  $(3 \times 2) + 1 = 7$ .

posúvať tak, aby 0 bola pod 7 v 175 – že druhý krok v skutočnosti predstavuje  $35 \times 20$ , nie  $35 \times 2$ , ako sa zdá.



Obr. 5: Obdĺžnik s dĺžkami strán 35 a 25

Používanie geometrickej reprezentácie je nutné robiť opatrne. Vyžaduje si explicitnú pozornosť zameranú na jednotky a na rozdiel medzi lineárnymi (t. j. dĺžkami strán) a plošnými mierami (Ball, Lubienski a Mewborn, 2001).

Spojenie obrázka 5 s úplnou verziou algoritmu s čiastočným produktom (obrázok 6) je ďalším aspektom znalosti matematiky pre vyučovanie. Model na obrázku 5 zobrazuje každý z čiastkových produktov – 25, 150, 100 a 600 – a zobrazuje faktory, ktoré tieto produkty produkujú – napríklad  $5 \times 5$  (pravý dolný roh),  $20 \times 30$  (ľavý dolný roh). Vertikálne skúmanie diagramu odhaľuje dva produkty – 700 a 175 – z konvenčného algoritmu znázorneného na obrázku 7. Táto

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 25 \\
 \hline
 25 \\
 150 \\
 100 \\
 + 600 \\
 \hline
 875
 \end{array}$$

Obr. 6: Úplná verzia algoritmu

geometrická reprezentácia si vyžaduje značné zručnosti pri vytváraní týchto spojení. Zahŕňa to aj jemné matematické úvahy. Napríklad, aké strategické čísla by sa mali použiť v príklade? Čísla 35 a 25 nemusia byť ideálnou voľbou na zobrazenie základných koncepčných základov algoritmu.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Dvojciferné faktory s „prenáša“ predstavujú všetky všeobecné javy v algoritme násobenia vo výpočtovo jedno-

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 25 \\
 \hline
 175 \\
 70\phantom{0} \\
 \hline
 875
 \end{array}$$

Obr. 7: Konvenčný algoritmus

Učítelia môžu samozrejme vždy požiadať študentov, aby vysvetlili, čo urobili, ale ak má učiteľ 30 študentov a domácu úlohu študentov známkovať, pomáha mať dobrú hypotézu o tom, čo by mohlo byť príčinou chyby.

Všimnite si, že nič z toho, čo sme doteraz povedali, neznamená vedieť o študentoch. Nič ne-naznačuje konkrétny spôsob výučby násobenia alebo nápravy chýb študentov. Netvrdíme, že takéto znalosti sú nedôležité. Tvrdíme však, že pri vyučovaní je „poznať tému“ viac, ako sa na prvý pohľad zdá. Snažíme sa odhaliť, čo je to „viac“. Každý krok v príklade násobenia zahŕňal hlbšiu a explicitnejšiu znalosť násobenia jednoducho vykonaním správneho výpočtu. Každý krok poukazuje na nejaký prvok poznania témy spôsobmi, ktoré sú kľúčové pre jej vyučovanie.

Náš príklad pomáha objasniť, že znalosť matematiky na vyučovanie si vyžaduje určitý druh hĺbky a detailov, ktoré ďaleko presahujú rámec toho, čo je potrebné na spoľahlivé vykonanie algoritmu. Ďalej to naznačuje, že existujú predvídateľné a opakujúce sa úlohy, ktorým učítelia čelia a ktoré sú hlboko späté s matematikou a matematickým uvažovaním – zistiť, kde sa študent pomýlil (analýza chýb), vysvetliť základy algoritmu slovami, ktorým deti rozumejú a ukazovať, prečo to funguje (základná znalosť algoritmov a matematického uvažovania) a používať matematické reprezentácie. Dôležité je poznamenať, že každá z týchto spoločných úloh vyučovania zahŕňa matematické uvažovanie rovnako ako pedagogické myslenie.

Zámerné sme vybrali príklad zahŕňajúci pojmy čísla a operácií. Podobné príklady možno rozvinúť vo väčšine matematických tém, vrátane definície mnohouholníka (Ball and Bass, 2003), výpočtu a vysvetlenia prímeru alebo preukázania úplnosti riešenia základného matematického problému. Schopnosť realizovať a porozumieť viac krokovým problémom je ďalším miestom pre explicitný matematický pohľad na vyučovanie. Každá z nich si vyžaduje viac ako len schopnosť odpovedať na otázku sám. Učiteľ musí myslieť z perspektívy žiaka a zvážiť, čo je potrebné na pochopenie matematickej myšlienky pre niekoho, kto ju vidí prvýkrát. Dewey (1902) zachytil túto myšlienku pojmom „psychologizovanie“ učiva, vidiac štruktúry učiva tak, ako sa učí, nielen v jeho hotovej logickej forme.

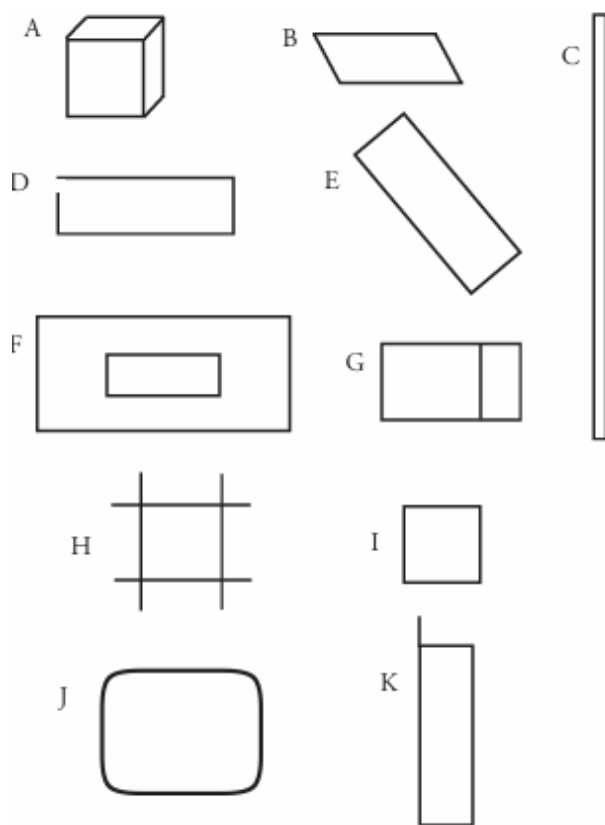
Preto by nemalo byť prekvapením, že hlavnou témou nášho výskumu je ústredný význam matematického jazyka a potreba špeciálneho druhu plynulosti s matematickými výrazmi. V našich záznamoch z rôznych tried a v našich experimentoch pri výučbe žiakov základných škôl

---

duchých prípadoch. Prítomnosť nulových číslíc v oboch faktoroch si vyžaduje osobitnú starostlivosť. Všeobecné pravidlá stále platia, ale keďže vznikajú jemnosti, tieto problémy sa neodporúčajú pre prvú prácu študentov. Napríklad v 42 370 musia študenti zvážiť, ako zaobchádzať s 0. Vo všeobecnosti je pre študentov vhodnejšie zvládnuť základný algoritmus (t. j. problémy s násobením bez preskupovania) predtým, ako prejdú k problémom, ktoré predstavujú ďalšiu zložitosť.

vidíme, že učitelia musia neustále rozhodovať o tom, ako definovať pojmy a či povoliť neformálny jazyk alebo zaviesť a používať odbornú slovnú zásobu, gramatiku a syntax. Kedy môže byť nepresný alebo nejednoznačný jazyk pedagogicky výhodnejší a kedy môže ohroziť rozvoj správneho porozumenia? Je napríklad fér povedať žiakom druhého stupňa, že „nemôžu odobrať väčšie číslo od menšieho“ alebo si záujem o matematickú integritu vyžaduje presné vyhlásenie (napríklad „s číslami, ktoré poznáme teraz, áno nemáme odpoveď, keď odčítame veľké číslo od menšieho“)? Ako by sa mal definovať obdĺžnik, aby žiaci štvrtého ročníka mohli určiť, ktoré z tvarov na obrázku 2 sa nazývajú „obdĺžniky“ a ktoré nie a prečo?

Typická koncepcia štvrtákov by ich viedla k tomu, že si nie sú istí niekoľkými z týchto tvarov, a bežne zaužívaná „definícia“ – „tvar s dvoma dlhými stranami a dvoma krátkymi stranami a pravými uhlami“ – im nepomôže. vyrovnáť svoju neistotu. Študenti, ktorí sa učia tvary iba pomocou ilustrácií a príkladov, často vytvárajú obrázky, ktoré sú úplne nesprávne. Napríklad v



Obr. 8: Kandidátske tvary: Ktoré sú obdĺžniky?

triede štvrtého ročníka, ktorú učil Ball, niekoľko študentov verilo, že „A“ na obrázku 8 je obdĺžnik, pretože to bola „škatuľka“ a vo veku počítačovej grafiky, preložili „obdĺžnik“ na „krabica“ bez mihnutia oka.

Učitelia potrebujú zručnosť s matematickými pojmi a diskurzom, ktoré umožňujú študentom starostlivú matematickú prácu a ktoré nespôsobujú mylné predstavy alebo chyby. Študenti potrebujú definície, ktoré sú použiteľné, pričom sa spoliehajú na pojmy a myšlienky, ktorým už rozumejú. To si vyžaduje, aby učitelia poznali viac ako len definície, s ktorými sa môžu stretnúť na univerzitných kurzoch. Zamyslite sa napríklad nad tým, ako môžu byť pre študentov špecifikované „párne čísla“ spôsobom, ktorý nevedie študentov k tomu, aby akceptovali  $1\frac{1}{2}$  ako párnú

(t. j. možno ju rozdeliť na dve rovnaké časti) a napriek tomu identifikovať nulu ako párnú.

Napríklad definovanie párných čísel ako „čísel, ktoré možno rozdeliť na polovicu rovnakým dielom“, umožňuje, aby sa  $\frac{1}{4}$ ,  $1\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5}$  a všetky ostatné zlomky považovali za párne. Opatrnejší by viedol k definíciám ako: „Číslo sa berie do úvahy aj vtedy a len vtedy, ak je súčtom celého čísla so sebou samým“ alebo pre študentov, ktorí ešte s celými číslami nepracujú: „Celé čísla, ktoré možno rozdeliť na páry (alebo dvojky), po ktorých nič nezostáva, sa nazývajú párne čísla.“ Hoci sú tieto definície vyjadrené jednoduchšie, sú podobné typickej definícii vyučovanej v teórii čísel: „Párne čísla majú tvar  $2k$ , kde  $k$  je celé číslo. Sú prístupné pre žiakov základných škôl bez toho, aby obetovali matematickú presnosť alebo integritu.“

V našich údajoch opakovane vidíme potrebu, aby učitelia mali špecializovanú plynulosť s matematickým jazykom, s tým, čo sa považuje za matematické vysvetlenie, a s tým, ako opatrne používať symboly. Okrem toho, že budeme pokračovať v skúmaní spôsobov, akými učitelia potrebujú porozumieť témam školského kurikula a matematickým myšlienkam, ku ktorým vedú, budeme podrobnejšie skúmať, ako sa používa matematický jazyk – jeho konštrukcia, používanie a kultivácia. v práci učiteľ'a.

## 2 Meranie matematických vedomostí pre vyučovanie

Použitím vyššie opísaných metód sme mohli pokračovať v jednoduchom skúmaní a mapovaní terénu matematických vedomostí pre vyučovanie. Keďže takáto práca je pomalá a vyžaduje si veľkú starostlivosť, preskúmali sme len zlomok možných tém, ročníkov a matematických postupov, ktoré by učitelia mohli poznať. Domnievame sa však, že iba rozvíjanie zakotvenej teórie o prvkoch a definícii matematických vedomostí pre vyučovanie nestačí. Ak sa pri vyučovaní matematiky prihovárame za odborné znalosti, je na nás, aby sme dokázali, že zlepšenie týchto vedomostí zlepšuje aj výsledky študentov. A ako dokazujú súčasné diskusie o príprave učiteľ'ov, existujú legitímne konkurenčné definície matematických vedomostí pre vyučovanie, a teda aj toho, čo znamená „kvalita učiteľ'a“ pre vyučovanie matematiky. Aby sme otestovali naše vznikajúce nápady a poskytli dôkazy nad rámec príkladov a logických argumentov, vyvinuli sme (a nad'alej zdokonaľ'ujeme) rozsiahle merania matematických vedomostí na vyučovanie založené na prieskumoch.

Naše dve hlavné otázky boli: Existuje súbor matematických vedomostí pre vyučovanie, ktoré sú špecializované na prácu, ktorú vykonávajú učitelia? A má to preukázateľ'ný vplyv na prospech žiakov? Na zodpovedanie týchto otázok sme potrebovali zostaviť súbory údajov, ktoré by nám umožnili empiricky otestovať naše tézy. To si vyžadovalo, aby sme predložili veľ'a predmetov veľ'kému počtu učiteľ'ov; Na kontrolu mnohých faktorov, ktoré tiež pravdepodobne prispievajú k učeniu študentov, a na zistenie vplyvu toho, čo sme predpokladali ako „matematické znalosti pre vyučovanie“, boli nevyhnutné veľ'ké súbory údajov. Predvídali sme, že na zodpovedanie našich otázok môžu byť potrebné vzorky tisícok alebo viacerých učiteľ'ov, rýchlo sme však zistili, že rozhovory, písomné odpovede a iné formy merania matematických vedomostí učiteľ'ov nepostačia, a rozhodli sme sa pokúsiť vyvinúť -výberové opatrenia, o ktorých realizovateľ'nosti ostatní pochybovali a my sami sme si neboli istí.

Naši spolupracovníci, ktorí majú skúsenosti s meraním vzdelávania, nás informovali, že pr-

vým krokom pri vytváraní akéhokoľvek hodnotenia je stanovenie „mapy domény“ alebo popisu tém a vedomostí, ktoré sa majú merať. Rozhodli sme sa zamerať našu počiatočnú prácu na matematické oblasti, ktoré sú obzvlášť dôležité pre elementárne vyučovanie: čísla a operácie. Sú dôležité jednak preto, že dominujú v školských osnovách, ako aj preto, že sú životne dôležité pre učenie sa študentov. Okrem toho sme si vybrali doménu vzorcov, funkcií a algebry, pretože predstavujú novší prvok učebných osnov K-6, čo umožňuje skúmať, čo učitelia o tejto téme teraz vedia, a možno aj to, ako sa vedomosti časom zvyšujú. učebné osnovy a profesionálny rozvoj sa sprístupnia a učitelia získajú skúsenosti s vyučovaním tejto oblasti. Odtedy sme pridali položky geometrie a rozšírili naše opatrenia smerom nahor prostredníctvom obsahu strednej školy.

Po zadaní domén sme pozvali rad odborníkov, aby napísali body hodnotenia – pedagógov matematiky, matematikov, profesionálnych vývojárov, projektových zamestnancov a triednych učiteľov. Požiadali sme o položky, ktoré kládli otázky súvisiace so situáciami, ktorým učitelia čelia pri svojej každodennej práci, napísané vo formáte s možnosťou výberu z viacerých odpovedí, aby sa uľahčilo bodovanie a škálovanie veľkého počtu odpovedí učiteľov. Snažili sme sa vyrábať predmety, ktoré boli ideologicky neutrálne; napríklad odmietnutie akýchkoľvek položiek, kde by „správna“ odpoveď mohla naznačovať orientáciu na „tradičné“ alebo „reformné“ vyučovanie. Nakoniec sme definovali znalosti matematického obsahu pre vyučovanie ako zložené z dvoch kľúčových prvkov: „bežné“ znalosti matematiky, ktoré by mal mať každý dobre vzdelaný dospelý, a matematické znalosti, ktoré sú „špecializované“ na prácu učiteľa a ktoré potrebujú vedieť iba učitelia. Oba tieto prvky sme sa snažili zachytiť v našom hodnotení. Aby sme zmerali bežné znalosti matematiky, vyvinuli sme otázky, ktoré, aj keď sú nastavené vo vyučovacích scenároch, stále vyžadujú len pochopenie väčšiny dospelých. Obrázok 9 predstavuje jednu takúto položku.

*Pani Dominguezová pracovala s novou učebnicou a všimla si, že číslu 0 venovala väčšiu pozornosť ako jej stará kniha. Natrafila na stránku, ktorá žiadala študentov, aby určili, či niektoľko výrokov o 0 je pravdivých alebo nepravdivých. Zaujato ich ukázala svojej sestre, ktorá je tiež učiteľkou, a spýtala sa jej, čo si myslí. Ktoré tvrdenie by mali sestry vybrať ako pravdivé?*

(Pri každej položke nižšie označte ÁNO, NIE alebo NIE SOM SI ISTÝ.)

	Yes	No	I'm not sure
a) 0 is an even number.	1	2	3
b) 0 is not really a number. It is a placeholder in writing big numbers.	1	2	3
c) The number 8 can be written as 008.	1	2	3

Obr. 9: Položka merajúca bežné znalosti obsahu

Na meranie špecializovanejších vedomostí z matematiky sme navrhli položky, ktoré od učiteľov žiadajú, aby ukázali alebo znázornili čísla alebo operácie pomocou obrázkov alebo manipulatív a poskytli vysvetlenia k bežným matematickým pravidlám (napr. prečo je akékoľvek číslo deliteľné 4, ak je číslo tvorené posledné dve číslice sú deliteľné 4).

Obrázok 10 zobrazuje položku, ktorá meria znalosti špecializovaného obsahu. V tomto scenári respondenti hodnotia tri rôzne prístupy k násobeniu 35 3 25 a určujú, či niektorý z nich je platnou všeobecnou metódou násobenia. Každý dospelý by mal vedieť, ako násobiť 35 3 25 (pozri náš predchádzajúci príklad), ale učitelia sa často stretávajú s hodnotením nekonvenčných žiackych metód, ktoré produkujú správne odpovede, ale ktorých zovšeobecňovanie alebo matematická platnosť nie sú hneď jasné. Aby boli učitelia efektívni, musia byť schopní zhodnotiť matematické problémy, ktoré sa vyskytnú v triede – často plynule a s krátkym časom.

Predstavte si, že pracujete so svojou triedou na násobení veľkých čísel. Medzi referátmi – vašich študentov si všimnete, že niektorí svoju prácu zobrazili nasledujúcimi spôsobmi:

Student A	Student B	Student C
35	35	35
× 25	× 25	× 25
-----	-----	-----
125	175	25
+ 75	+ 700	150
-----	-----	-----
875	875	100
		+ 600
		-----
		875

Which of these students is using a method that could be used to multiply any two whole numbers?

	Method would work for all whole numbers	Method would NOT work for all whole numbers	I'm not sur
a) Method A	1	2	3
b) Method B	1	2	3
c) Method C	1	2	3

Obr. 10: Položka merajúca znalosti špecializovaného obsahu

Aj keď sú v tejto položke uvedení študenti, otázka sa v skutočnosti netýka vedomostí respondentov o študentoch alebo o tom, ako učiť študentov násobilku. Namiesto toho kladie matematickú otázku o alternatívnych metódach riešenia, čo predstavuje dôležitú zručnosť pre efektívne vyučovanie.

Na základe nášho štúdia praxe, ako aj výskumnej základne v oblasti vyučovania a učenia sa matematiky, analýz učebných materiálov, príkladov študentských prác a osobných skúseností sme vyvinuli viac ako 250 položiek s viacerými možnosťami výberu, ktoré sú určené na meranie spoločných a špecializovaných matematických vedomostí učiteľov na vyučovanie. Mnoho desiatok ďalších je vo vývoji. Vytvorenie dobrej položky od začiatku (prvá fáza nápadu) až po koniec (preskúmaná, revidovaná, kritizovaná, vyleštená, pilotne testovaná a analyzovaná) trvá viac ako rok a je drahá. Považovali sme to však za nevyhnutnú investíciu – nevyhnutný kompromis za jednoduchosť, spoľahlivosť a hospodárnosť rozsiahleho hodnotenia s viacerými možnosťami výberu.

Naším cieľom je identifikovať znalosti o obsahu potrebné pre efektívnu prax a vytvoriť opatrenia na poznatky, ktoré môžu využiť iní výskumníci. Tvrdenie, že vieme merať vedomosti, ktoré súvisia s kvalitnou výučbou, si vyžaduje solídne dôkazy. Najdôležitejšie pre naše účely

je, či vysoký výkon na našich položkách súvisí s efektívnym vyučovaním. Predpovedajú skóre učiteľov v našich položkách, že učia s matematickými zručnosťami, alebo že ich študenti sa naučia viac alebo lepšie

### 3 Existujú vedomosti z matematiky pre vyučovanie?

#### Čo ukazujú naše štúdie?

Mali sme to šťastie, že sme boli zapojení do štúdie, ktorá nám umožnila odpovedať na túto otázku. The Study of Instructional Improvement, alebo SII, je longitudinálna štúdia škôl zapojených do komplexnej školskej reformy. V rámci tejto štúdie sme zhromaždili skóre študentov v matematickom časti Terra Nova (spoločný a platný štandardizovaný test) a vypočítali „skóre zisku“ – alebo koľko bodov získali v priebehu roka. Zhromaždili sme aj informácie o rodinnom zázemí týchto študentov – najmä o ich sociálno-ekonomickom statuse alebo SES – na použitie pri predpovedaní veľkosti skóre ziskov študentov. A čo je dôležité, do dotazníka pre učiteľov sme zahrnuli aj mnohé z našich prieskumných položiek – vrátane tých na obrázkoch 9 a 10. Polovica týchto položiek merala „bežné“ znalosti obsahu a polovica „špecializované“ znalosti obsahu. Učители, ktorí sa zúčastnili štúdie zodpovedaním týchto otázok, nám umožnili otestovať vzťah medzi ich znalosťami vo vyučovaní matematiky a veľkosťou zisku ich študentov na Terra Nova.

Výsledky boli jasné: V analýze 700 učiteľov prvého a tretieho ročníka (a takmer 3 000 študentov) sme zistili, že výkon učiteľov v súvislosti s našimi znalosťami pri otázkach týkajúcich sa vyučovania – vrátane bežných aj špecializovaných vedomostí o obsahu – významne predpovedal veľkosť skóre študentov, aj keď sme kontrolovali veci ako SES študentov, miera absencií študentov, poverenia učiteľa, skúsenosti učiteľa a priemerná dĺžka hodín matematiky (Hill, Rowan a Ball, 2005). Študenti učiteľov, ktorí odpovedali na viac položiek správne, získali v priebehu roka výučby viac. Pri porovnaní učiteľa, ktorý dosiahol priemerné skóre v našej miere vedomostí učiteľa, s učiteľom, ktorý bol v hornom kvartile, študenti nadpriemerných učiteľov vykazovali zisky vo svojich skóre, ktoré boli ekvivalentné dvom až trom týždňom výučby navyše.

Navyše, veľkosť vplyvu matematických vedomostí učiteľov na vyučovanie bola porovnateľná s veľkosťou vplyvu socioekonomického postavenia na skóre žiakov. Bolo to silné zistenie, pretože to naznačuje, že zlepšovanie vedomostí učiteľov môže byť jedným zo spôsobov, ako zastaviť prehlbovanie rozdielov vo výsledkoch, keď chudobné deti prechádzajú školou. Výskumná literatúra o vplyve SES na výsledky žiakov naznačuje, že pri prvom vstupe žiakov do školy je výrazný rozdiel vo výsledkoch a že mnohé znevýhodnené deti každým rokom školskej dochádzky zaostávajú ďalej a ďalej. Naše zistenia naznačujú, že aj keď matematické znalosti učiteľov by samy osebe neprekonali existujúcu medzeru vo výkone, mohli by zabrániť jej prehĺbeniu. Naš výskum teda naznačuje, že

*Dôležitým príspevkom k sociálnej spravodlivosti je zabezpečiť, aby mal každý študent učiteľa, ktorý prichádza do triedy vybavený matematickými vedomosťami potrebnými na vyučovanie.*

Tento výsledok nás prirodzene priviedol k ďalšej otázke:

- Sú matematické vedomosti učiteľov rozdelené rovnomerne medzi našou vzorkou študen-

tov a škôl, bez ohľadu na rasu a socio-ekonomický status študentov?

- Alebo vyučujú študentov z menšiny a vyššej chudoby učitelia s menšími znalosťami?

Naše údaje ukazujú len veľmi mierny vzťah medzi študentskými SES a vedomosťami učiteľa, pričom učitelia s vyššou chudobou majú študenti pravdepodobne menej matematických vedomostí. Vzťah k rase študentov bol však silnejší. Napríklad v treťom ročníku študentská menšina status a vedomosti učiteľa negatívne korelovali na 2,26. To znamená, že učitelia s vyššími znalosťami mali tendenciu vyučovať nemenšinových študentov, takže menšinovým študentom zostali menej informovaní učitelia, ktorí nie sú schopní v priebehu roka toľko prispieť k vedomostiam študentov. Tieto výsledky považujeme za hanebné. Žiaľ, sú tiež podobné tým, ktoré sa našli inde s ďalšími vzorkami škôl a učiteľov (Hilland Lubienksi, v tlači; Loeb a Reininger, 2004). Naznačujú tiež, že časť rozdielu vo výkone v národnom hodnotení pokroku vo vzdelávaní a iných štandardizovaných hodnoteniach môže vyplývať z toho, že učitelia s menšími matematickými znalosťami učia znevýhodnených študentov. Jednou stratégiou na zmenšenie tejto pripasti by teda mohla byť investícia do kvality vedomostí o obsahu matematiky medzi učiteľmi pracujúcimi v znevýhodnených školách. Tento návrh podčiarkujú porovnateľné veľkosti účinkov vedomostí učiteľov a sociálno-ekonomického postavenia študentov pri dosahovaní výsledkov.

Ďalšou oblasťou na testovanie našich nápadov je *profesionálny rast*. Ak existujú znalosti z matematiky pre vyučovanie, ako naznačujú naše štúdie, potom by malo byť možné, aby programy pomohli učiteľom získať takéto znalosti. Aby sme to zistili, skúmali sme, či sa učitelia základných škôl naučili matematické znalosti na vyučovanie v relatívne tradičnom prostredí profesionálneho rastu/rozvoja – letnej dielni kalifornských inštitútov odborného rozvoja matematiky K-6 – a ak áno, koľko a čo títo učitelia sa naučili (Hill and Ball, 2004). Skúmali sme, či by sa naše merania vedomostí učiteľov o obsahu mohli použiť na dôkladné vyhodnotenie veľkého verejného programu. Zistili sme, že učitelia sa vďaka vedeniu týchto inštitútov naučili obsahové vedomosti pre vyučovanie matematiky. Zistili sme tiež, že väčšie zisky z výkonu našich meraní súviseli s dĺžkou inštitútov a učebných osnov, ktoré sa zameriavali na *dôkaz, analýzu, prieskum, komunikáciu a reprezentáciu* (Hilland Ball, 2004). Okrem týchto konkrétnych zistení táto štúdia pripravila pôdu pre budúce analýzy podmienok, za ktorých sa učitelia učia matematický obsah pre vyučovanie najefektívnejšie.

Jednou z najpálčivejších otázok, ktoré v súčasnosti máme pred sebou, je, či špecializované znalosti pre vyučovanie matematiky existujú nezávisle od bežných obsahových znalostí – základných zručností, ktoré by mal mať matematicky gramotný dospelý. Analýzy údajov z veľkých prvých pilotných projektov našich prieskumov s učiteľmi (Hill a Ball, 2004) naznačujú, že odpoveď môže byť áno. Často sme zistili, že výsledky pre otázky reprezentujúce „špecializované“ vedomosti z matematiky (napr. obrázok 10) boli štatisticky oddeliteľné od výsledkov o „bežných“ položkách vedomostí (napr. obrázok 9). Inými slovami, správne zodpovedanie druhu otázky na obrázku 10 si zrejme vyžaduje znalosti nad rámec toho, čo znamená správne odklonenie iného druhu (napr. obrázok 9). To naznačuje, že *v odbornej príprave je na mieste sústredenie sa na odborné znalosti učiteľov*. Môže to dokonca podporiť tvrdenie profesie vlastniť určitý druh aplikovaných matematických vedomostí jedinečných pre prácu učiteľa. Ak sa toto zistenie potvrdí v ďalšom výskume, posilní to tvrdenie, že efektívne vyučovanie zahŕňa znalosť

matematiky nad rámec toho, čo sa matematicky gramotný dospelý učí na základnej škole, v programe slobodných umení alebo dokonca v kariére v inej matematicky náročnej profesii, ako je účtovníctvo alebo inžinierstvo. Na podporu týchto vedomostí by bolo potrebné nejaké odborné vzdelanie – či už pred nástupom do služby alebo v zamestnaní.

**Výkon učiteľov v súvislosti s našimi znalosťami v otázkach týkajúcich sa vyučovania – vrátane bežných aj špecializovaných vedomostí o obsahu – významne predpovedal veľkosť skóre získaných študentov.**

## 4 Závěry

Naša práca už priniesla predbežné odpovede na niektoré otázky, ktoré vedú súčasné diskusie o vzdelávacej politike a odbornej praxi. *Matematické znalosti pre vyučovanie, ako sme ich konceptualizovali a merali, pozitívne predpovedajú úspechy študentov* (Hill, Rowan a Ball, 2005). Zostáva ešte veľa práce: Prispievajú rôzne druhy matematických vedomostí na vyučovanie – napríklad špecializované vedomosti alebo bežné vedomosti, alebo vedomosti študentov a ich obsah – k úspechu študentov viac ako iné? To isté možno povedať o budovaní vedomostnej základne o efektívnom profesionálnom rozvoji. Historicky sa väčšina profesijného rozvoja zameraného na obsah hodnotila lokálne, často pomocou percepčných opatrení (napr. veria učitelia, že sa naučili matematiku?) a nie skutočných meraní učiteľa a študenta. učenie (pozri Wilson a Berne, 1999). Vypracovanie prísnych opatrení a ich používanie značným počtom profesionálnych vývojárov pomôže vybudovať zovšeobecniteľné poznatky o učení sa matematiky učiteľmi. Zdôrazňujeme, že to musí byť program výskumu v širokom sektore vedeckej komunity; je potrebných veľa štúdií, aby sme pochopili, ako môžu rozdiely v obsahu programu ovplyvniť učiteľov, vyučovanie a výsledky študentov.

Tieto výsledky predstavujú pokrok pri vytváraní vedomostí, ktoré sú dôveryhodné a použiteľné. Vzhľadom na to stoja za pozornosť negatívne reakcie, ktoré sme dostali od niektorých iných odborníkov v oblasti vzdelávania. Testovanie učiteľov, štúdium vyučovania alebo učenia učiteľov vo veľkom rozsahu pomocou štandardizovaných meraní výsledkov študentov – každý z nich vyvoláva ostrú kritiku z niektorých strán. Niektorí pohrdajú položkami s možnosťou výberu z viacerých odpovedí a tvrdia, že takýmito otázkami nemožno merať nič, čo by stálo za to merať. Iní tvrdia, že vyučovanie a učenie učiteľa sú také jemnozrné komplexné snahy, že rozsiahle štúdie nedokážu preskúmať ani odhaliť nič, čo by stálo za to merať. Ďalší tvrdia, že „dekvalifikujeme“ alebo „deprofesionalizujeme“ učiteľov tým, že ich „testujeme“. Tvrdíme, že tieto námietky sú v rozpore so samotným jadrom kritickej agendy, ktorej čelíme ako profesionálna komunita.

Kým a pokiaľ my ako pedagógovia nebudeme ochotní tvrdiť, že existujú odborné znalosti, na ktorých záleží pre kvalitu výučby a môžeme toto tvrdenie podložiť dôkazmi, nad'alej budeme iba jedným hlasom medzi mnohými, ktorí budú súť ažiť v presadzovaní toho, čo by učitelia mali vedieť, ako by sa to mohli naučiť a prečo. Naše nároky na profesionálne znalosti nebudú nič iné ako slabé tvrdenie, že sme profesionáli a zaslúžime si autoritu, pretože to hovoríme, nie preto, že môžeme ukázať, že to, čo vieme, sa líši od toho, čo by vedel len každý. Izolovať aspekty

poznania matematiky odlišné od tých, ktoré by poznal každý, kto absolvoval šiesty ročník, a presvedčivo demonštrovať, že tieto vedomosti sú dôležité pre učenie sa študentov, znamená žiadať o zručnosť vo vyučovaní, nie ich znevažovať. Uvedenie týchto argumentov je tiež súčasťou výzvy, ktorej čelíme, keď sa snažíme čeliť súčasným výzvam našej jurisdikčnej autority.

Skúsenosti našej výskumnej skupiny s prácou s problémami profesionálnej praxe, testovaním a zdokonaľovaním ich pomocou nástrojov, ktoré sprostredkujú silu nášho vlastného presvedčenia a zdravého rozumu, je jedným z príkladov práce na budovaní vedomostí, ktoré sú dôveryhodné a užitočné pre celý rad zainteresovaných strán. Existuje mnoho ďalších príkladov a môžu byť vyvinuté. V súčasnom prostredí, v ktorom sú požiadavky na kvalitu vzdelávania kladené v atmosfére nedôvery a straty dôveryhodnosti, je to nevyhnutné. Splnenie tejto výzvy je profesionálna zodpovednosť. Robiť to úspešne je nevyhnutné pre naše prežitie ako profesie.

## 5 Záverečná poznámka

Výskum uvedený v tomto dokumente bol čiastočne podporovaný grantmi Ministerstva školstva USA pre Konzorcium pre výskum politík vo vzdelávaní (CPRE) na Pensylvánskej univerzite (OERI-R308A60003) a Centrum pre štúdium výučby a politika na University of Washington (OERI-R308B70003); Národná vedecká nadácia (REC-9979863)

## Literatúra

- [1] Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, 93, 373-397.
- [2] Ball, D. L. and Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis and E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/G-DEDM.
- [3] Ball, D. L., Lubienski, S., and Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematics knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*, 4th edition (pp. 433-456). New York: Macmillan.
- [4] Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, R.I. and Washington, D.C.: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
- [5] Dewey, J. (1902/1956). The child and the curriculum. In *The child and the curriculum: The school and society* (pp. 3-31). Chicago: University of Chicago.
- [6] Hill, H.C. and Lubienski, S.T. (in press). Teachers' mathematics knowledge for teaching and school context: A study of California teachers. *Educational Policy*.

- [7] Hill, H., Rowan, B., and Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), 371-406.
- [8] Hill, H. C. and Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- [9] Kilpatrick, J., Swafford, J., and Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- [10] Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, Conn.: Yale University Press.
- [11] Loeb, S. and Reininger, M. (2004) *Public policy and teacher labor markets: What we know and why it matters*. East Lansing: Education Policy Center, Michigan State University.
- [12] Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- [13] Wilson, S. M. and Berne, J. (1999). Teacher learning and the acquisition of professional knowledge: An examination of research on contemporary professional development. In A. Iran-Nejad and P. D. Pearson (Eds.), *Review of research in education* (Vol. 24). Washington, D.C.: American Educational Research Association.