

Kvantová, atómová a subatómová fyzika

RIEŠENIE DOMÁCEJ ÚLOHY 3

1. Jednotlivé funkcie si najskôr upravíme

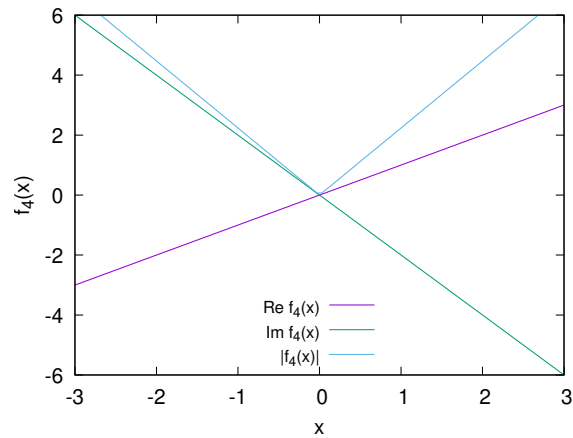
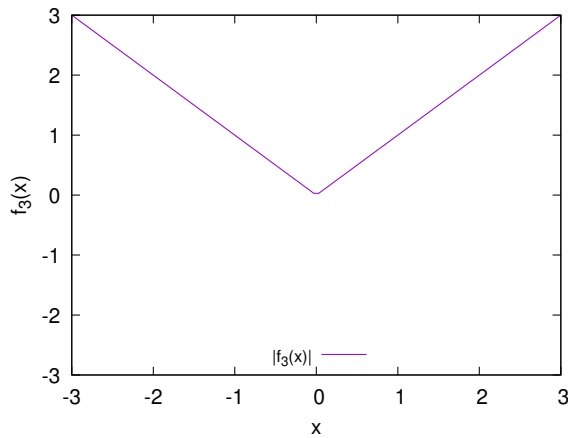
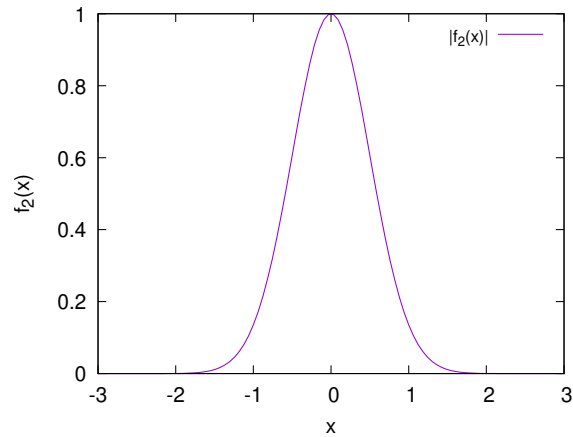
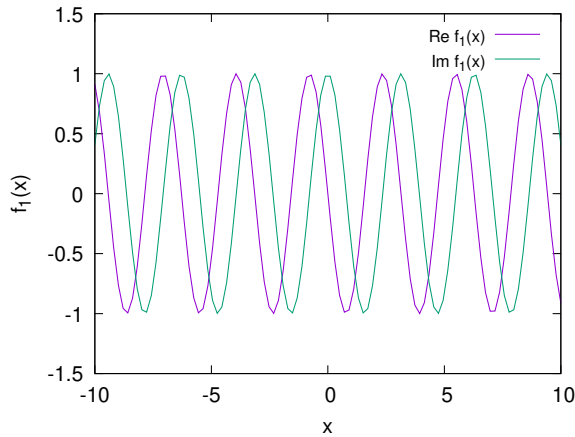
(a) $f_1(x) = ie^{2x} = -\sin 2x + i \cos 2x$

(b) $f_2(x) = \exp(-2x^2 - ix) = e^{-2x^2} e^{-ix}$

(c) $f_3(x) = xe^{5ix}$

(d) $f_4(x) = x - 2ix$

Potom už len nakreslíme podľa zadania:



2. Bezčasová Schrodingerova rovnica má tvar

$$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi(x) \quad (1)$$

Spočítajme si jednotlivé derivácie zadanej vlnovej funkcie

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (\pi x_0)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \\ \frac{d\Psi(x)}{dx} &= -\frac{x}{x_0^2} (\pi x_0)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \\ \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} &= \frac{1}{x_0^2} (\pi x_0)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Dosadíme do Schrodingerovej rovnice a ďalej upravujeme:

$$E(\pi x_0)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0^2} (\pi x_0)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) + \frac{m\omega^2 x^2}{2} (\pi x_0)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0^2} \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Keďže energia nemôže závisieť od polohy, musia sa nám časti obsahujúce x vynulovať, odkiaľ dostaneme

$$\frac{m\omega^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2mx_0^4} \Rightarrow x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \quad (2)$$

Energia prislúchajúca vlnovej funkcii $\Psi(x)$ je potom

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3)$$

3. Pre vlnovú funkciu musí platiť normalizačný vzťah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\Psi(x)dx = 1 \quad (4)$$

To znamená:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A e^{-ikx} e^{-x^2/4\sigma^2} \cdot A e^{ikx} e^{-x^2/4\sigma^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = A^2 \sqrt{2\pi}\sigma$$

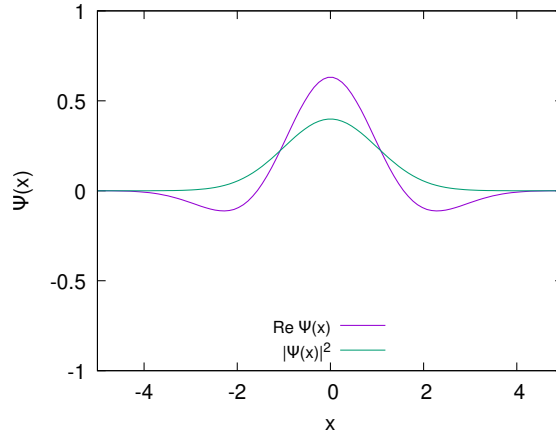
Normalizačná konštanta je teda:

$$A = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \quad (5)$$

Pre nakreslenie grafov si vyjadríme reálnu časť a absolútnu hodnotu vlnovej funkcie:

$$\text{Re}\Psi(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \cos(kx) e^{-x^2/4\sigma^2}$$

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$



4. Operátor hybnosti je definovaný ako $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$. Potom platí:

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -i\hbar \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{\pi}{L}$$

$$\hat{p}^2\Psi(x) = \hat{p}(\hat{p}\Psi(x)) = \hbar^2 \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 \Psi(x)$$