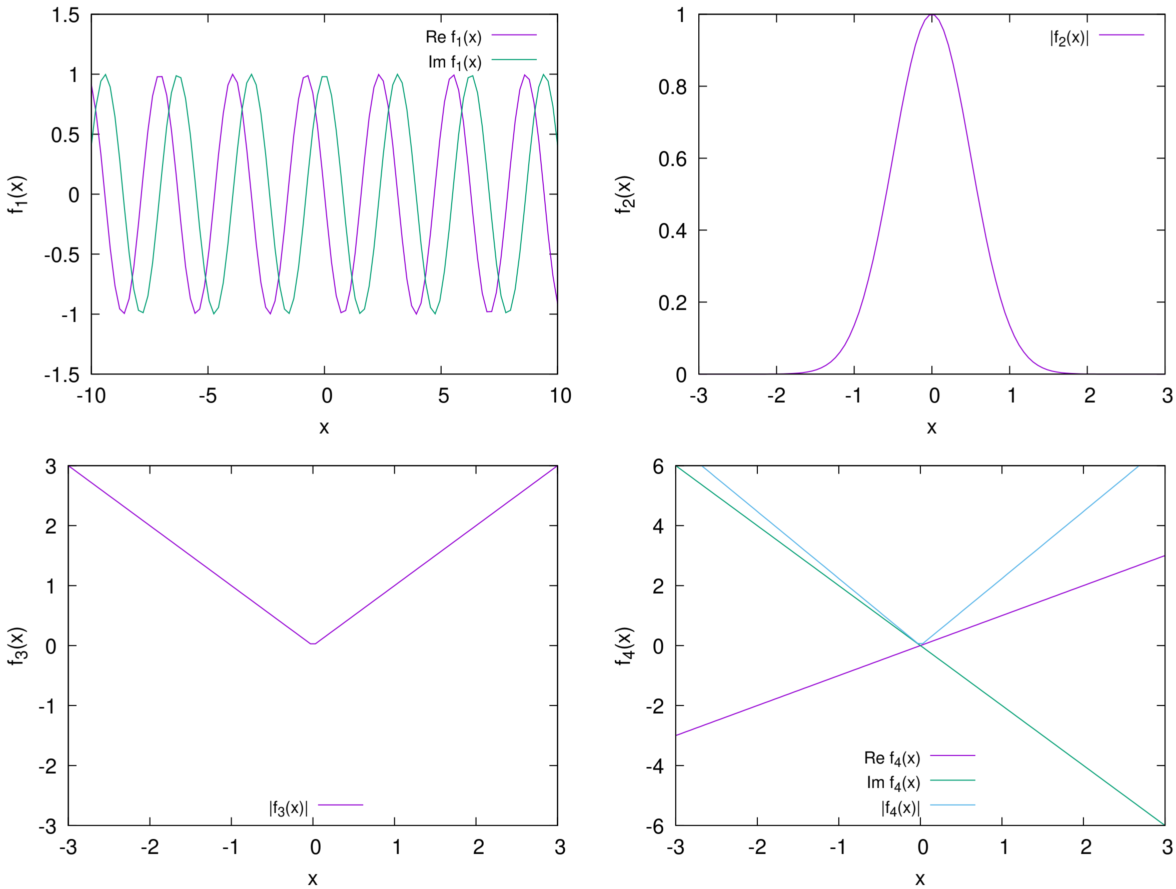
Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 2

1. Jednotlivé funkcie si najskôr upravíme
   (a) $f_1(x) = ie^{2x} = -\sin 2x + i\cos 2x$
   (b) $f_2(x) = \exp(-2x^2 - ix) = e^{-2x^2}e^{-ix}$
   (c) $f_3(x) = xe^{5ix}$
   (d) $f_4(x) = x - 2ix$

   Potom už len nakreslíme podľa zadania:



2. Bezčasová Schrodingerova rovnica má tvar

$$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{m\omega^2x^2}{2}\Psi(x) \tag{1}$$

   Spočítajme si jednotlivé derivácie zadanej vlnovej funkcie

$$\Psi(x) = (\pi x_0)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = -\frac{x}{x_0^2}(\pi x_0)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = \frac{1}{x_0^2}(\pi x_0)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right)$$

Dosadíme do Schrodingerovej rovnice a ďalej upravujeme:

$$E(\pi x_0)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{x_0^2}(\pi x_0)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\left(\frac{x^2}{x_0^2}-1\right) + \frac{m\omega^2 x^2}{2}(\pi x_0)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{x_0^2}\left(\frac{x^2}{x_0^2}-1\right) + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Keďže energia nemôže závisieť od polohy, musia sa nám časti obsahujúce x vynulovať, odkiaľ dostaneme

$$\frac{m\omega^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2mx_0^4} \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \tag{2}$$

Energia prislúchajúca vlnovej funkcii $\Psi(x)$ je potom

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{3}$$

3. Pre vlnovú funkciu musí platiť normalizačný vzťah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\Psi(x)dx = 1 \tag{4}$$

To znamená:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-ikx}e^{-x^2/4\sigma^2}\cdot Ae^{ikx}e^{-x^2/4\sigma^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-x^2/2\sigma^2}dx = A^2\sqrt{2\pi}\sigma$$

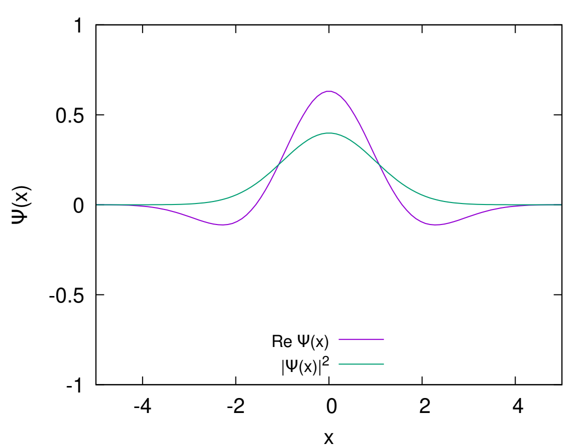
Normalizačná konštanta je teda:

$$A = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}} \tag{5}$$

Pre nakreslenie grafov si vyjadríme reálnu časť a absolútnu hodnotu vlnovej funkcie:

$$\mathrm{Re}\Psi(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}}\cos(kx)e^{-x^2/4\sigma^2}$$

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}$$



4. Operátor hybnosti je definovaný ako $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$. Potom platí:

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -i\hbar\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\pi}{L}$$

$$\hat{p}^2\Psi(x) = \hat{p}(\hat{p}\Psi(x)) = \hbar^2\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2\Psi(x)$$