

Vektorový priestor

Úloha 1.1.11

Určte pravdivostnú hodnotu výrokov v a) a b), prípadne doplňte výrok v c) tak, aby vznikol pravdivý výrok:

Nech \mathbf{a}, \mathbf{b} sú vektory.

- Existuje také umiestnenie vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} , že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}$ sú kolineárne.
- Neexistuje také umiestnenie vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} , že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}$ sú kolineárne.
- Existuje také umiestnenie vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} , že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a}$ sú kolineárne, práve vtedy, keď...

Úloha 1.1.12

Kedy je množina vektorov $\{\mathbf{u}\}$ lineárne závislá?

Úloha 1.1.13

Daná je kocka $ABCD A' B' C' D'$. Sú vektory

- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{B'C'}$,
- $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{D'B'}$,
- $\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{AA'}$

lineárne závislé?

Úloha 1.1.14

Dokážte, že z každej množiny vektorov, do ktorej patrí aspoň jeden nenulový vektor, je možné vybrať lineárne nezávislú podmnožinu tak, že každý vektor z pôvodnej množiny vektorov je lineárnou kombináciou vybratých vektorov.

Úloha 1.1.15

Dokážte, že ľubovoľnú neprázdnu podmnožinu bázy vektorového priestoru V^n tvoria lineárne nezávislé vektory.

Úloha 1.1.16

Daný je kosodĺžnik $ABCD$. Označme $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{w}$.

- Napíšte, či sú vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} lineárne závislé alebo nezávislé a svoje tvrdenie zdôvodnite.
- Určte koľko vektorov a koľko viazaných vektorov je určených vrcholmi daného kosodĺžnika.
- Určte $\mathbf{u} + \mathbf{w}$; $\mathbf{u} + \mathbf{a} - \mathbf{v}$; $\mathbf{u} - \mathbf{a}$; $\mathbf{u} - (-\mathbf{u})$.

Úloha 1.1.17

Daný je štvorec $ABCD$. Načrtnite vektory

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,
- $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$,
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$,
- $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$,
- $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

Úloha 1.1.18

Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom T . Označme $\overrightarrow{TA} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{TB} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{TC} = \mathbf{w}$. Určte $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Úlohy

Úloha 1.1.18

Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom T . Označme $T\vec{A} = \vec{u}$, $T\vec{B} = \vec{v}$, $T\vec{C} = \vec{w}$. Určte $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Úloha 1.1.19

Sčítajte graficky sily $\vec{F}_1 = 5\text{ N}$, $\vec{F}_2 = 3\text{ N}$, ak pôsobia na teleso v tom istom bode a zvierajú uhol o veľkosti:

1. 120° ,
2. 90° ,
3. 30° .

Úloha 1.1.20

Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stredom S .

1. Napíšte vektor \vec{BF} ako lineárnu kombináciu vektorov \vec{AB} , \vec{BC} .
2. Napíšte vektor \vec{FD} ako lineárnu kombináciu vektorov \vec{BC} , \vec{CD} .
3. Napíšte vektor \vec{EA} ako lineárnu kombináciu vektorov \vec{SD} , \vec{SC} .

Úloha 1.1.21

Daný je rovnostranný trojuholník KLM . Označme S_1, S_2, S_3 stredy strán KL, LM, KM v poradí. Uvažujme body K, S_1, L, S_2, S_3 .

1. Koľko viazaných a koľko voľných vektorov je týmito bodmi určených?
2. Vyjadrite:
 - vektor $S_2\vec{S}_1$ ako lineárnu kombináciu vektorov \vec{KL} , \vec{LS}_2 ,
 - vektor \vec{KL} ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{S}_3\vec{S}_2$, $\vec{S}_3\vec{L}$,
 - vektor $\vec{S}_1\vec{L}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{K}\vec{S}_3$, $\vec{L}\vec{S}_2$,
 - vektor \vec{LK} ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{K}\vec{S}_2$, $\vec{L}\vec{S}_3$.

Úloha 1.1.22

Určte všetky hodnoty pre argument $\alpha \in (0; \pi)$, ktoré možno zvoliť, aby vektory $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{v} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ tvorili bázu vektorového priestoru V_2 .

Úloha 1.1.23

Určte $x \in \mathbb{R}$, tak aby vektory $\vec{a} = (x, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, x, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, x)$ tvorili bázu vektorového priestoru V_3 .

Úloha 1.1.24

Nájdite $x \in \mathbb{R}$, tak aby vektory $\vec{u} = (1, x, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 2, 2)$, $\vec{w} = (1, 0, 3, x)$ boli:

1. lineárne závislé,
2. lineárne nezávislé.

Afinný priestor

Úloha 1.2.1

Zistite, či usporiadaná trojica (A, V, f) je afinným priestorom. Ak áno, určte aj bázu jeho zamerania a jeho dimenziu:

- a) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| > |x_2|\}$,
 $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$,
 $f: A \times A \rightarrow V$,
 $f: f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.
- b) $A = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 1\}$,
 $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$,
 $f: A \times A \rightarrow V$,
 $f: f([x_1, x_2, x_3, 1], [y_1, y_2, y_3, 1]) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, 0)$.
- c) $A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$
 $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$
 $f: A \times A \rightarrow V$,
 $f([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = (x_1y_1, x_2y_2, 1, x_3 - y_3)$

Úloha 1.2.2

Zistite, či usporiadaná trojica (A, V, f) je afinným priestorom. Ak áno, určte aj bázu jeho zamerania a jeho dimenziu:

$$A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$$

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$\text{a) } f([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 - y_3).$$

$$\text{b) } f([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3).$$

Úloha 1.2.3

Nech A_3 je geometrický model afinného priestoru. Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich dvoch výrokov: Dané sú body A, B, C, D v A_3 . Nech $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$ tvoria bázu jeho zamerania V_3 . Označme $\alpha = \triangle ABC$, potom:

a) vektory \vec{AC}, \vec{BC} tvoria bázu vektorového priestoru V_2^α , ktorý je zameraním afinnej roviny α ,

b) vektory \vec{AC}, \vec{BC} netvoria bázu vektorového priestoru V_2^α , ktorý je zameraním afinnej roviny α .

Úloha 1.2.4.

Zistite, či $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4; f)$ je afinný priestor, ak

$$f : [x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3] \mapsto [y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, 0]$$

Úloha 1.2.5.

Zistite, či usporiadaná trojica $(A; V; f)$ je afinným priestorom, ak

$$\text{a) } A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$f : [x_1, y_2], [y_1, y_2] \mapsto [x_1 - y_1, x_2 - y_2]$$

$$\text{b) } A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$f : [x_1, y_2], [y_1, y_2] \mapsto \log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}$$

$$\text{c) } A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1}{a^2} - \frac{x_2}{b^2} = 1, x_1 < 0\}, \text{ pre pevne zvolené } a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$f : [x_1, x_2], [y_1, y_2] \mapsto x_2 - y_2$$

Úloha 1.2.6.

Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2; f)$ je afinným priestorom, ak

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f : [[x_1, y_2], [y_1, y_2]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2^k - y_2^k)$$

,

kde $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 1.2.7.

Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4; f)$ je afinným priestorom, ak

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$f : [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_2 - y_2).$$

Úloha 1.2.8.

Zistite, či usporiadaná trojica $(A; V; f)$ je afinným priestorom, ak

$$\text{a) } A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$$

$$V = \mathbb{R}$$

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$f : [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto [x_2 - y_2]$$

- b) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$
 $V = \mathbb{R}$
 $f : A \times A \rightarrow V$
 $f : [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto [x_1 - y_1]$
- c) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$
 $V = \mathbb{R}^2$
 $f : A \times A \rightarrow V$
 $f : [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto \log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2}$

Úloha 1.2.9.

Zistite, či usporiadaná trojica $(A; V; -)$ je afinným priestorom, ak áno, určte bázu jeho zamerania a jeho dimenziu.

- a) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| > |x_2|\}$, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 + 3x_2 - 1 = 0\}$
- b) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 - x_2 > 0\}$, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 = 3x_2\}$
- c) $A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{N}^2 \mid x_2 - x_1 > 0\}$, $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 - 5x_2 = 0\}$

Úloha 1.2.10.

Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}^2; -)$ je afinný priestor.

Úloha 1.2.11.

Zistite, či $(A; V; f)$ je afinný priestor, ak

$$A = \{[z, 1] \mid z \in \mathbb{C}\},$$

$$V = \{[z, 0] \mid z \in \mathbb{C}\},$$

binárna operácia f je odčítanie po zložkách, pričom na prvej zložke aplikujeme odčítanie komplexných čísel.

LINEÁRNA SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA

Úloha 1.3.1.

Daný je afinný priestor $(A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}, \quad V = \mathbb{R}$$

a zobrazenie f je definované ako

$$f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1 - y_1.$$

Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

a) $L([x_1, x_2]) = 1 + x_1$

b) $L([x_1, x_2]) = \sqrt{x_2}$

c)

$$L : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad L([x_1, x_2]) := \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} & \text{pre } x_1 \geq 0, \\ 0 & \text{pre } x_1 = 0 \end{cases}$$

Úloha 1.3.2.

Daný je afinný priestor $(A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1}{a^2} - \frac{x_2}{b^2} = 1, x_1 \geq 0\}, \quad V = \mathbb{R}$$

a zobrazenie f je definované ako

$$f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_2 - y_2.$$

Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

a) $L([x_1, x_2]) = 5 + 2x_2$

b) $L([x_1, x_2]) = x_1$

c) $L([x_1, x_2]) = \sqrt{\frac{x_1}{a^2} - 1}$

d) $L([x_1, x_2]) = x_2^3 a^2 - x_1^2 x_2 b^2 - 1$

Úloha 1.3.3.

Daný je afinný priestor $A = (A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x_1}{a^2} - \frac{x_2}{9} = 1\}, \quad \text{pričom } a \text{ je pevne zvolené nenulové reálne číslo,}$$

$V = \mathbb{R}$ a zobrazenie f je definované ako

$$f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_2 - y_2$$

Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

$$L : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad L\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}$$

Úloha 1.3.4.

Daný je afinný priestor $(A; V; f)$, kde

$$A = \mathbb{R}^2, \quad V = \mathbb{R}^2$$

a zobrazenie f je definované ako

$$f([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = (x_1 - y_1, x_2^k - y_2^k),$$

kde k je prirodzené nepárne číslo. Zistite, či zobrazenie je lineárna sústava súradníc, ak

- a) $L([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2^2, x_1 - x_2^2]$
- b) $L([x_1, x_2]) = [1 + x_1, 1 + x_1 + x_2^k]$
- c) $L([x_1, x_2]) = [x_1^k, x_2]$

Úloha 1.3.5.

Daný je afinný priestor $A_2 = (A; V; f)$, kde

$$A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$

$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ a zobrazenie f je odčítanie usporiadaných trojíc reálnych čísel po zložkách. Ukážte, že zúženie zobrazenia L na A je lineárnou sústavou súradníc v A_2 , ak

$$L : [x_1, x_2, x_3] \rightarrow [-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1]$$

nájdite jej počiatok a súradnicové vektory.

Úloha 1.3.6.

Nech A_2 je geometrický model afinnej roviny (vid' poznámku *, str. 10). V A_2 sú dané lineárne nezávislé body A, B, C a body D, E, F tak, že $BD \parallel DC$, $AE \parallel EC$, $AF \parallel EC$, $AF \parallel FB$. Nájdite súradnice bodov A, B, C v LSS určenej repérom $\{F; FE, FD\}$.

Afinné podpriestory

Úloha 1.4.1.

Dokážte, že $A' = \{(0, x, 0, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ je afinný podpriestor priestoru $A_3 = (A, V, f)$, kde

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 1\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$$

a f je odčítanie po zložkách.

Úloha 1.4.2.

Dokážte, že $A' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1, 2x - y + 3z = 2\}$ je afinný podpriestor priestoru $A_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde f je odčítanie po zložkách. Určte jeho dimenziu.

Úloha 1.4.3.

Zistite, či $A' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 1\}$ je afinný podpriestor priestoru $A_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde f je odčítanie po zložkách. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu A' .

Úloha 1.4.4.

Daný je afinný priestor $A = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde operácia f je odčítanie po zložkách. Zistite, či A je afinný podpriestor afinného priestoru A . Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu A , kde

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = -1\}.$$

Úloha 1.4.5.

Zistite, či $A' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$ je afinný podpriestor afinného priestoru $A_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, kde f je operácia odčítania po zložkách. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu A' .

Úloha 1.4.6.

Napište parametrické vyjadrenie roviny π , ktorá obsahuje body $A[1, -1, 2, -4]$, $B[3, 1, 2, 6]$ a vektor $u(-2, -1, 3, 1)$ patrí jej zameraniu V^π .

Úloha 1.4.7.

Zistite, či bod B leží na priamke $p = [A; \vec{u}]$, kde

$$A = [3, 3, -2], \quad B = [2, 1, -1], \quad \vec{u} = (1, 2, 3)$$

Poznámka. V ďalšom budeme často v zápise afinného (pod)priestoru namiesto (A, V, f) používať zápis $(A, V, -)$. V týchto prípadoch bude binárna operácia f definovaná nasledovne:

$$f(X, Y) = Y - X$$

kde $-$ je operácia odčítania po zložkách. Potom označenie $X + \vec{u} = Y$ znamená $\vec{u} = Y - X$.

Úloha 1.4.8.

- a) Zapište bodovú zložku A aj zameranie V afinného podpriestoru $(A, V, -)$ afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, ak

$$A = \{P + \vec{u} \mid \vec{u} \in V\}, \quad P = [1, 3, 1], \quad V = \{(-2, 1, 0), (3, 1, 1)\}.$$

- b) Overte, že $(A, V, -)$ je afinným podpriestorom afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$.
c) Zapište parametrické vyjadrenie tohto afinného podpriestoru.
d) Zistite, či body $A[3, 2, 1]$ a $B[-7, 0, 1]$ patria do A .

Úloha 1.4.9.

- a) Zistite, či $A = \{[1 - b - c, a - b, -a - c] \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je afinným podpriestorom afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$.
b) Určte jeho dimenziu.
c) Napíšte jeho parametrické vyjadrenie.

Úloha 1.4.10.

Určte vzájomnú polohu priamok $p = [A; \vec{u}]$ a $q = [B; \vec{v}]$ v afinnom priestore A_3 :

- a) $A = [1, 2, 3], \vec{u} = (1, -3, 2), B = [0, 5, 1], \vec{v} = (-2, 6, -4)$
b) $A = [1, -3, 4], \vec{u} = (2, 2, -1), B = [3, 0, -1], \vec{v} = (0, 1, 3)$

Riešenie: Pre určenie vzájomnej polohy priamok p a q postupujeme nasledovne:

1. Skontrolujeme lineárnu závislosť smerových vektorov \vec{u} a \vec{v} . Ak sú lineárne závislé, priamky sú rovnobežné alebo splývajú. Ak nie sú, pokračujeme ďalej.

2. Skontrolujeme existenciu spoločného bodu, teda riešenie sústavy:

$$\vec{r}_p = \vec{A} + t\vec{u}, \quad \vec{r}_q = \vec{B} + s\vec{v}, \quad \vec{r}_p = \vec{r}_q.$$

Ak riešenie existuje, priamky sa pretínajú. Ak nie, priamky sú mimobežné.

Riešenie pre a)

1. Kontrola lineárnej závislosti \vec{u} a \vec{v} : Hľadáme skalár k , pre ktorý platí:

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

Rovnosti jednotlivých súradníc vedú na podmienky:

$$1 = -2k, \quad -3 = 6k, \quad 2 = -4k.$$

Tieto podmienky nie sú splniteľné pre žiadne k , preto \vec{u} a \vec{v} nie sú lineárne závislé.

2. Hľadanie spoločného bodu: Hľadáme t, s , pre ktoré platí:

$$\vec{A} + t\vec{u} = \vec{B} + s\vec{v}.$$

Rozpis sústavy:

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot 1 &= 0 + s \cdot (-2), \\ 2 + t \cdot (-3) &= 5 + s \cdot 6, \\ 3 + t \cdot 2 &= 1 + s \cdot (-4). \end{aligned}$$

Po úprave:

$$\begin{aligned} t + 2s &= -1, \\ -3t - 6s &= 3, \\ 2t + 4s &= -2. \end{aligned}$$

Táto sústava nemá riešenie, čo znamená, že priamky nemajú spoločný bod.

Záver pre a): Priamky p a q sú **mimobežné**.

Riešenie pre b) Zadané údaje:

$$A = [1, -3, 4], \quad \vec{u} = (2, 2, -1), \quad B = [3, 0, -1], \quad \vec{v} = (0, 1, 3).$$

1. Kontrola lineárnej závislosti \vec{u} a \vec{v} : Hľadáme skalár k , pre ktorý platí:

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

Rovnosti jednotlivých súradníc:

$$2 = 0k, \quad 2 = 1k, \quad -1 = 3k.$$

Tieto podmienky sa navzájom vylučujú, preto \vec{u} a \vec{v} nie sú lineárne závislé.

2. Hľadanie spoločného bodu: Hľadáme t, s , pre ktoré platí:

$$\vec{A} + t\vec{u} = \vec{B} + s\vec{v}.$$

Rozpis sústavy:

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot 2 &= 3 + s \cdot 0, \\ -3 + t \cdot 2 &= 0 + s \cdot 1, \\ 4 + t \cdot (-1) &= -1 + s \cdot 3. \end{aligned}$$

Po úprave:

$$\begin{aligned} 2t &= 2, \\ 2t - s &= 3, \\ -t - 3s &= -5. \end{aligned}$$

Riešením je $t = 1, s = -1$, čo znamená, že priamky majú spoločný bod.

Záver pre b): Priamky p a q sa **pretínajú**.

Úloha 1.4.11.

Napíšte parametrické vyjadrenie roviny ρ , ktorá prechádza bodom $A[2, 3, -1]$ a je rovnobežná s priamkami p a q , ktorých parametrické vyjadrenia sú:

$$p : \begin{cases} x_1 = 1 - u \\ x_2 = 2 + 3u \\ x_3 = 5 + 2u \end{cases}$$

$$q : \begin{cases} x_1 = 2 + 4v \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = -3v \end{cases}$$

Riešenie:

1. Nájdenie smerových vektorov priamok p a q : Smerový vektor priamky p je:

$$\vec{v}_p = [-1, 3, 2]$$

Smerový vektor priamky q je:

$$\vec{v}_q = [4, 1, -3]$$

2. Vektorový súčin $\vec{v}_p \times \vec{v}_q$ na získanie normálového vektora roviny: Normálový vektor roviny ρ je kolmý na oba smerové vektory priamok p a q . Vypočítame:

$$\vec{n} = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1) - \mathbf{j}((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4) + \mathbf{k}((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4)$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-9 - 2) - \mathbf{j}(3 - 8) + \mathbf{k}(-1 - 12)$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-11) - \mathbf{j}(-5) + \mathbf{k}(-13)$$

$$\vec{n} = [-11, 5, -13]$$

3. Všeobecná rovnica roviny ρ :

$$-11x + 5y - 13z + d = 0,$$

Po dosadení súradníc bodu $A[2, 3, -1]$ dostaneme $d = 3$.

4. Rovnica roviny ρ : Parametrické vyjadrenie roviny ρ je:

$$\mathbf{r}(s, t) = A + s\vec{v}_p + t\vec{v}_q,$$

kde $A = [2, 3, -1]$, $\vec{v}_p = [-1, 3, 2]$ a $\vec{v}_q = [4, 1, -3]$. Parametrické vyjadrenie:

$$x_1 = 2 - s + 4t$$

$$x_2 = 3 + 3s + t$$

$$x_3 = -1 + 2s - 3t$$

kde $s, t \in \mathbb{R}$.

Úloha 1.4.12.

Určte k \mathbb{R} tak, aby priamky p, q boli:

- a) totožné,
- b) rovnobežné rôzne,
- c) mimobežné,
- d) rôznobežné;

kde

$$p : X = [1; -3; 4] + t(-2; -2; 1), \quad q : X = [-1; -5; 5] + t(-6; k; 3).$$

Úloha 1.4.13.

Určte vzájomnú polohu priamky $a = [A; \vec{u}]$ a roviny $\alpha = [B; \vec{v}, \vec{w}]$ v afinnom priestore A_3 :

- a) $A = [1; 0; 0], \vec{u} = (5; 7; 7), B = [0; 1; 3], \vec{v} = (1; 3; 1), \vec{w} = (2; 2; 3),$
- b) $A = [1; 2; 1], \vec{u} = (1; 1; 2), B = [2; 1; -2], \vec{v} = (0; 2; -1), \vec{w} = (3; 1; -2),$
- c) $A = [1; 0; 0], \vec{u} = (7; 7; 1), B = [0; 1; 3], \vec{v} = (1; 3; 1), \vec{w} = (2; -1; -1),$
- d) $A = [1; 0; 0], \vec{u} = (5; 7; 7), B = [0; 1; 3], \vec{v} = (1; 3; 1), \vec{w} = (2; -1; -1).$

Úloha 1.4.14.

Určte vzájomnú polohu rovín $\rho = [A; \vec{t}, \vec{u}]$ a $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$ priestoru A_3 :

$$A = [3; 2; 2], \vec{t} = (2; 1; 3), \vec{u} = (0; 1; 1), B = [3; 0; 6], \vec{v} = (1; -1; 3), \vec{w} = (2; -1; 4).$$

.

Úloha 1.4.15.

Určte vzájomnú polohu rovín α, β v afinnom priestore A_3 :

$$\alpha : X = [0; 2; -1] + t_1(0; 1; 2) + t_2(1; -1; -3),$$

$$\beta : X = [0; 0; 0] + t_1(1; 1; 0) + t_2(-1; 1; 2).$$

Úloha 1.4.16.

Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha = [A; \vec{a}, \vec{b}]$ a $\beta = [B; \vec{u}, \vec{v}]$ v afinnom priestore A_4 :

$$A = [4; 2; 2; 2], a = (1; 0; 0; -1), b = (1; 0; 3; 2), \\ B = [-2; -2; 2; 0], u = (-1; 0; 5; 0), v = (2; 2; 1; 0).$$

“

Úloha 1.4.17.

Určte vzájomnú polohu rovín $\rho = [A; \vec{t}, \vec{u}]$ a $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$ v afinnom priestore A_5 :

- $A = [1, 3, 0, 0, 0], \vec{t} = (1, 0, 0, 0, 0), \vec{u} = (0, 5, 0, 1, 0), B = [0, 0, 3, 0, -1], \vec{v} = (0, 0, 3, 2, 0), \vec{w} = (0, 1, 1, 1, 1)$
- $A = [0, 0, 0, 0, 0], \vec{t} = (1, 2, 0, -1, 0), \vec{u} = (0, 1, 1, 0, 0), B = [2, 1, 0, 0, 0], \vec{v} = (0, 0, -1, 0, 3), \vec{w} = (2, 3, -2, -2, 3)$
- $A = [0, 0, 1, 2, -1], \vec{t} = (1, 0, 1, -1, 0), \vec{u} = (1, 1, 1, 0, 1), B = [0, 0, 2, 3, -1], \vec{v} = (0, 1, 1, 0, 2), \vec{w} = (2, 2, 3, -1, 3)$
- $A = [1, 0, -1, 0, 0], \vec{t} = (1, 3, -1, 0, 1), \vec{u} = (0, 0, 0, 1, 0), B = [2, 0, 3, 2, -1], \vec{v} = (0, 0, 2, 1, 0), \vec{w} = (-1, 0, 0, 0, 1)$

Úloha 1.4.18.

Určte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom P a rovnobežnej s rovinou a . Nájdite aspoň tri rôzne riešenia.

Bod $P = [4; 5; 7]$ a rovina a je daná ako:

$$a : X = [3; -1; 2] + t_1(2; 1; 3) + t_2(-3; 1; 4).$$

Všeobecná rovnica nadroviny. Priechka mimobežiek.

Úloha 1.5.1

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny π , ktorá je daná parametricky:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2u - 3v, \\y &= 1 + 3u - 4v, \\z &= 3 - u + 2v,\end{aligned}$$

kde $u, v \in \mathbb{R}$.

Úloha 1.5.2

Všeobecnú rovnicu nadroviny štvorrozmerného afinného priestoru prepíšte do parametrického tvaru:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3 = 0.$$

Úloha 1.5.3

Napíšte všeobecnú rovnicu:

- priamky určenej bodmi $A[1; 2]$, $B[-3; 5]$,
- roviny určenej bodmi $A[2; 1; -2]$, $B[4; -3; 1]$, $C[-3; 2; 4]$.

Úloha 1.5.4

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny určenej bodom $A[3; 1; -2]$ a priamkou p :

$$p : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Úloha 1.5.5

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny π , ktorá obsahuje body $A[1; 0; -1]$, $B[2; 3; 1]$,

a vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ patrí jej smerovému vektoru.

Úloha 1.5.6

Vymyslite zadanie nasledovnej úlohy v trojrozmernom afinnom priestore a potom ju vyriešte.

Úloha 1.5.7

Dané sú body $X[1; 1; 2]$, $Y[0; 1; 0]$ a priamka m . Určte všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi X , Y a rovnobežnej s priamkou m :

$$m : x = 2 - 3t, \quad y = 1 + t, \quad z = 4 - t.$$

Úloha 1.5.8

V \mathbb{A}_2 napíšte všeobecnú rovnicu spojnice priesečníka priamok a , b s bodom $B[1; 2]$:

$$a : 2x + y + 1 = 0, \quad b : x - y + 2 = 0.$$

Úloha 1.5.9

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny α , ak je určená bodom $P[3; -1; 3; 2]$ a smerovými vektormi:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Úloha 1.5.10

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny β , ak:

$$x_1 = z_1 - 2u + w, \quad x_2 = 1 + 2u + w, \quad x_3 = u - w, \quad x_4 = -w.$$

Úloha 1.5.11

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny γ , ak je určená bodmi:

$$A[1; 1; 1; 2], \quad B[0; 0; 2; 0], \quad C[1; 1; 0; -2], \quad D[0; 0; -2; 0].$$

Úloha 1.5.12

Napíšte parametrické rovnice nadroviny δ v afinnom priestore \mathbb{A}_n :

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 1 &= 0, \\x_2 &= 4.\end{aligned}$$

Úloha 1.5.13

Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby σ a τ boli rovnobežné roviny:

$$\sigma : 3x - 4y + 5z - 4 = 0, \quad \tau : x + ay + bz + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.14

Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dimenzia vektorového priestoru $V_\sigma \cap V_\tau$ bola rovná dvom. Určte jeho bázu:

$$\sigma : 3x - 4y + 5z - 4 = 0, \quad \tau : x + ay + bz + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.15

Určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka p ležala v rovine ρ :

$$\text{a) } p : x = 1 + 2t, y = 4 + 3t, z = 1 + at, \quad \rho : 3x + y - 4z - 3 = 0,$$

$$\text{b) } p : x = 1 + 2t, y = 1 + 3t, z = 1 + at, \quad \rho : 3x + y - 4z - 3 = 0.$$

Úloha 1.5.16

Daná je priamka $p = \{Q; \vec{a}\}$ a rovina $\sigma = [P; \vec{x}, \vec{y}]$. Zistite, či priamka p leží v rovine σ :

$$Q(5; 2; 1), \quad P(2; 1; 0), \quad \vec{a}(3; 0; 2), \quad \vec{x}(0; -1; 1), \quad \vec{y}(2; 3; 1).$$

Úloha 1.5.17

Priesečnicu rovín α a β určte bodom a vektorom:

$$\begin{aligned}\alpha : 2x - 3y + z - 2 &= 0, \\ \beta : x + 2y + z + 5 &= 0.\end{aligned}$$

Úloha 1.5.18

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ , ktorá je rovnobežná s priamkami p , q a prechádza bodom A :

$$A(0; 0; 5), \quad p : 3x - 2y + z = 0, \\ q : 2x - 5z + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.19

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ , ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s rovinou ρ :

$$A(1; 3; 5), \quad \rho : 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

Úloha 1.5.20

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ , ktorá prechádza priamkou p a je rovnobežná s priamkou q :

$$p : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \\ q : \begin{cases} 3x + 2z - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Úloha 1.5.21

Určte prienik priamky p a roviny σ , ak:

$$\text{a) } p : \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \\ z = -1 + t, \end{cases} \quad \sigma : x + 2y - z + 4 = 0, \\ \text{b) } p : \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = -2 + t, \end{cases} \quad \sigma : 2x + 3y + z - 4 = 0.$$

Úloha 1.5.22

Určte neparametricky priamku p prechádzajúcu bodom A a rovnobežnú s priamkou q :

$$A(2; 3; -1), \quad q : \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ z = 7. \end{cases}$$

Úloha 1.5.23

Určte priechku p mimobežiek $a = \overrightarrow{AX}$, $b = \overrightarrow{BY}$ rovnobežnú so smerom daným vektorom \vec{v} :

$$\begin{array}{lll} A(0; 2; -3), & X(-1; 1; -5), & \vec{v}(1; -2; 3), \\ B(1; -2; 3), & Y(3; 4; 1), & \vec{w}(-1; 2; -3). \end{array}$$

Úloha 1.5.24

Určte priechku mimobežiek a , b rovnobežnú so smerom daným vektorom \vec{v} :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & A(1; 3; -1), & X(-1; -2; 3), & \vec{v}(3; 3; -3), \\ & B(3; 1; -5), & Y(1; 4; 1), & \vec{v}(-2; -2; 3), \\ \text{b)} & A(-1; 1; -2), & X(3; 1; 2), & \vec{v}(1; -2; 3), \\ & B(-3; 2; 3), & Y(1; 2; 3), & \vec{v}(3; 1; 4), \\ \text{c)} & A(-1; 3; 5), & X(-1; -3; -3), & \vec{v}(-1; 5; 3), \\ & B(1; -3; -3), & Y(2; -2; 3), & \vec{v}(2; -2; 3). \end{array}$$

Úloha 1.5.25

Určte priechku mimobežiek $a = [A; \vec{u}]$, $b = [B; \vec{v}]$ prechádzajúcich bodom M :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A[3; -1; 4], \vec{u} = [1; -1; 2], B[-1; 2; -2], \vec{v} = [2; 0; 1], M[1; 3; -2], \\ \text{b)} & A[0; 2; -2], \vec{u} = [1; 1; 3], B[1; 1; 7], \vec{v} = [0; 2; -1], M[-2; 5; 2]. \end{array}$$

Úloha 1.5.26

Priamkami p , q je určený zväzok priamok. Napíšte rovnicu priamky m patriacej tomuto zväzku, ktorá je rovnobežná so súradnicovou osou x :

$$p : 2x - y - 5 = 0, \quad q : x + 2y + 4 = 0.$$

Úloha 1.5.27

Priamkami p, q je určený zväzok priamok. Napíšte rovnicu priamky m patriacej tomuto zväzku, ktorá je rovnobežná s priamkou r :

$$r : 4x + 3y + 12 = 0.$$

Úloha 1.5.28

Určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka p patrila zväzku určeného priamkami k, l :

$$k : x + 2y + 3 = 0, \quad l : ax - y = 0.$$

Úloha 1.5.29

Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $P[-2; 1]$ a patrí do zväzku o rovnici:

$$\lambda_1(3x - y + 1) + \lambda_2(2x + 3y - 5) = 0.$$

Úloha 1.5.30

Napíšte rovnicu roviny rovnobežnú so súradnicovou osou z a patriacu zväzku o rovnici:

$$\lambda_1(-4x - 2y + 3z - 4) + \lambda_2(2x + 3y - 1) = 0.$$

Úloha 1.5.31

Rovinami α, β je určený zväzok rovín (zdôvodnite prečo). Napíšte rovnicu roviny ρ tohto zväzku, ktorá prechádza bodom $Y[0; 4; 0]$:

$$\alpha : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \beta : 3x + y + 4z - 4 = 0.$$

Deliaci pomer

Úloha 1.6.1

V afinnom priestore A_2 sú dané tri lineárne nezávislé body A, B, C . Označme A' stred dvojice bodov B, C , B' stred dvojice bodov A, C a T prienik priamok AA', BB' . Určte deliaci pomer $(AT\lambda A')$ a svoje tvrdenie dokážte. (Zvoľte vhodne lineárnu súradnicovú sústavu v A_2 .)

Úloha 1.6.2

Nech X, Y sú rôzne body v afinnom priestore. Označme $X'Y'$ stred dvojice bodov X, Y . Dokážte, že pre ľubovoľné body A, B, C, D, E platí $(X\lambda Y)$. (Zvoľte LSS v A_2 .)

Úloha 1.6.3

V A_2 sú dané lineárne nezávislé body A, B, C a body D, E, F , pričom $(ABD) = -1$, $(BCF) = -2$, $(EBC) = 3$. Určte súradnice bodov A, B, C v LSS danej repérom $R = F, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FD}$

Skalárny súčin vektorov

Úloha 2.1.1

Zistite, či zobrazenie f je skalárnym súčinom vo vektorovom priestore $V = \mathbb{R}^2$, ak

a) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$,

b) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10y_1y_2$,

c) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 9y_1y_2$.

Úloha 2.1.2

Daný je vektorový priestor \mathbb{R}^2 s obvyklými operáciami. Zistite, či usporiadaná dvojica (\mathbb{R}^2, \cdot) tvorí vektorový priestor so skalárnym súčinom, ak $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1$,

b) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$,

c) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Úloha 2.1.3

Skalárny súčin je definovaný ako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Určte veľkosť vektora $\vec{u} = (2; 4)$.

Úloha 2.1.4

Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{b} = 4\vec{u} - 5\vec{v}$, ak \vec{u}, \vec{v} sú kolmé a jednotkové vektory.

Úloha 2.1.5

Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$, $\|\vec{c}\| = 5$. Vypočítajte súčet $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

Úloha 2.1.6

Určte skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ak

a) $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$, $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = \frac{\pi}{3}$,

b) $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 3$, $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = 135^\circ$,

c) $\|\vec{a}\| = 1$, $\vec{b} = -3\vec{a}$.

Úloha 2.1.7

Nech pre vektory \vec{a}, \vec{b} platí $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = 30^\circ$. Určte kosínus uhla vektorov

a) $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a}$,

b) $\vec{a} + 2\vec{b}$, \vec{a} .

Riešenie úlohy 2.1.7

Nech pre vektory \vec{a}, \vec{b} platí:

$$\|\vec{a}\| = 3,$$

$$\|\vec{b}\| = 1,$$

$$\cos \theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

kde θ je uhol medzi vektormi \vec{a} a \vec{b} .

Časť a) $\cos \varphi$ pre $\vec{a} + 2\vec{b}$ a $3\vec{a}$

Vypočítame skalárny súčin:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a}) &= 3(\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= 3(\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos \theta) \\ &= 3(9 + 2(3)(1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= 3(9 + 3\sqrt{3}) \\ &= 27 + 9\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Normy vektorov:

$$\begin{aligned}\|\vec{a} + 2\vec{b}\| &= \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 4\|\vec{b}\|^2 + 4\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 4(3)(1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

$$\|3\vec{a}\| = 3\|\vec{a}\| = 9.$$

Nakoniec,

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a})}{\|\vec{a} + 2\vec{b}\|\|3\vec{a}\|} \\ &= \frac{27 + 9\sqrt{3}}{9\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

Časť b) $\cos\psi$ pre $\vec{a} + 2\vec{b}$ a \vec{a}

Vypočítame skalárny súčin:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta \\ &= 9 + 6\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 9 + 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Normy vektorov:

$$\|\vec{a}\| = 3.$$

Nakoniec,

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a}}{\|\vec{a} + 2\vec{b}\| \|\vec{a}\|} \\ &= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

Úloha 2.1.8

Vypočítajte kosínus uhla vektorov $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, ak $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $|(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{6}{5}$.

Úloha 2.1.9

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory \vec{a} , \vec{b} , ak $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ sú na seba kolmé vektory.

Úloha 2.1.10

Zistite, aký uhol zvierajú vektory \vec{u} , \vec{v} , ak $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ a $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$; $\vec{b} = 3\vec{u}$ sú na seba kolmé.

Úloha 2.1.11

Určte veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A v trojuholníku ABC , ak $A[0; 1]$, $B[\sqrt{3}; 0]$, $C[0; 3]$.

Úloha 2.1.12

Daný je trojuholník ABC . Vypočítajte skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ak

$$\vec{a} = \vec{B} - \vec{A}, \quad \vec{b} = \vec{C} - \vec{B}, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 6, \quad |AB| = 7.$$

Úloha 2.1.13

Vypočítajte veľkosť vektora $c = 3a + 2b$, ak $\|a\| = 3$, $\|b\| = 4$, $\langle (a, b) \rangle = \frac{2\pi}{3}$.

Úloha 2.1.14

Dokážte, že vektory c a \bar{x} sú na seba kolmé, ak

$$\bar{x} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}.$$

Úloha 2.1.15

Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného trojuholníka, ktorého ťažnice z vrcholov základne sú navzájom kolmé.

Riešenie úlohy 2.1.15

Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB a vrcholom C . Označme T priesečník ťažnic z vrcholov A a B . Podľa zadania sú tieto ťažnice na seba kolmé, teda platí $\angle ATB = 90^\circ$.

Použijeme skalárny súčin vektorov na určenie veľkosti uhlov. Ak označíme $\alpha = \angle ACB = \angle ABC$, potom platí:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Z toho vyplýva, že veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka sú:

$$\angle A = 2\alpha,$$

$$\angle B = \alpha,$$

$$\angle C = \alpha,$$

kde $\alpha \approx 63.43^\circ$ a teda $\angle A \approx 126.86^\circ$.

Úloha 2.1.16

Vypočítajte veľkosť vektora $3\vec{u} + 2\vec{v}$, ak $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, a $\langle(\vec{u}, \vec{v})\rangle = 30^\circ$.

Úloha 2.1.17

Vypočítajte normu vektora $2\vec{u} + 3\vec{v}$, ak $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$, a $\langle(\vec{u}, \vec{v})\rangle = \frac{\pi}{3}$.

Úloha 2.1.18

Nech \vec{a} a \vec{b} tvoria ortonormálnu bázu vektorového priestoru $V_2(\mathbb{R})$, nech $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{v} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$. Určte:

- skalárny súčin vektorov \vec{u}, \vec{v} ;
- veľkosť vektorov \vec{u}, \vec{v} ;
- kosínus uhla vektorov \vec{u}, \vec{v} ;
- zvoľte umiestnenie pre vektory \vec{a}, \vec{b} , a narysujte situáciu s vektormi \vec{u}, \vec{v} .

Úloha 2.1.19

Nech platí $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Vypočítajte

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}.$$

Úloha 2.1.20

Body $A[-3; 2]$, $B[2; 4]$ sú susedné vrcholy štvorca. Pomocou skalárneho súčinu určte jeho ďalšie dva vrcholy.

Úloha 2.1.21

Dané sú body $A[2; 1]$, $B[5; 5]$. Určte súradnice bodu C , ak vektor $\vec{C} - \vec{A}$ vznikne otočením vektora $\vec{B} - \vec{A}$ okolo bodu A o uhol veľkosti $\frac{5\pi}{6}$ pri kladnej orientácii.

Úloha 2.1.22

Pomocou skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = \vec{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak

$$|AB| = 5, \quad |BC| = 6, \quad \langle (DAB) \rangle = 60^\circ.$$

Úloha 2.1.23

Dané sú vektory $\vec{u} = (1; 0; 1)$, $\vec{v} = (-1; 2; -2)$. Nájdite vektor \vec{w} tvaru $(0; 1; 0) + k\vec{u} + r\vec{v}$, $k, r \in \mathbb{R}$, tak, aby bol ortogonálny ku \vec{u} aj \vec{v} .

Schmidtov ortogonalizačný proces

Totálna kolmosť vo V_n . Kolmosť vo V_n

Úloha 2.2.1.

Schmidtovým ortogonalizačným procesom nájdite ortonormálnu bázu vo V_4 , ak poznáte jeho bázu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$, kde $\vec{a}_1(1; 1; 1; 1)$, $\vec{a}_2(1; -1; 1; 1)$, $\vec{a}_3(2; 0; -1; 1)$, $\vec{a}_4(-1; 1; 0; 1)$.

Úloha 2.2.2.

Vo vektorovom priestore usporiadaných trojíc reálnych čísel sú dané vektory $\vec{a}_1(1; -1; 1)$, $\vec{a}_2(0; 1; 2)$, $\vec{a}_3(1; 1; 0)$. Vykonaajte Schmidtov ortogonalizačný proces.

Úloha 2.2.3.

Dané sú vektory $\vec{a}_1(1; -2; 2; -3)$, $\vec{a}_2(2; -3; 2; 4)$. Dokážte, že vektory \vec{a}_1 a \vec{a}_2 sú na seba kolmé a nájdite \vec{a}_3, \vec{a}_4 tak, aby $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ bola ortogonálna báza vo V_4 .

Úloha 2.2.4.

Určte bázu vektorového priestoru V^1 , ak $V^1 = \langle(1; 0; 1; 2; 0), (0; 0; 1; 1; 2), (-1; 0; 0; 1; 2)\rangle$.

Úloha 2.2.5.

Zistite, či vektorové priestory $V' = \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ a $V'' = \langle\vec{c}, \vec{d}\rangle$ sú na seba kolmé, ak $\vec{a}(1; 3; -1; 5)$, $\vec{b}(1; -5; -3; 1)$, $\vec{c}(14; 5; 3; -1)$, $\vec{d}(14; -3; 1; -5)$.

Úloha 2.2.6.

Dané sú vektorové priestory $V' = \langle(1; 0; -1; 1; 0), (0; 2; -2; 0; 0), (0; 0; 3; -1; 0)\rangle$ a $V'' = \langle(1; 1; 1; 0; 0), (-1; 0; 0; 1; 1), (0; 0; 0; 0; 1)\rangle$.

- Zistite, či vektorové priestory V' a V'' sú na seba kolmé.
- Určte vo V_5 ortonormálnu bázu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ tak, aby $V'' = \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle$ a zároveň $V''^\perp = \langle\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\rangle$.

Úloha 2.2.7.

Určte jednotkový vektor kolmý k nadrovine α :

$$\begin{aligned}x_1 &= u + v + w \\ \alpha : \quad x_2 &= 1 + u - v + w \\ x_3 &= u - v + w \\ x_4 &= 1 + u + v + 3w\end{aligned}$$

Vonkajší súčin vo V_n

Vektorový súčin vo V_n .

Úloha 2.3.1.

Vypočítajte tromi spôsobmi obsah trojuholníka ABC , ak

- a) $A[2; 3]$, $B[1; -1]$, $C[0; 1]$.
- b) $A[0; 3]$, $B[4; 1]$, $C[2; 5]$

Úloha 2.3.2

Vypočítajte dvoma spôsobmi obsah trojuholníka ABC , ak $A[2; 1; -3]$, $B[4; 1; 5]$, $C[0; 7; -6]$.

Úloha 2.3.3

Určte vektorový súčin vektorov $\vec{u}(3; \sqrt{3}; 0)$, $\vec{v}(3; 3\sqrt{3}; 0)$ aspoň tromi spôsobmi.

Úloha 2.3.4

Dané sú vektory $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(3; -1; -3)$. Vypočítajte:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$,
2. $((2\vec{a}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}))$,
3. overte pomocou výsledku z časti a), že $|\vec{a} \times \vec{b}| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$.

Úloha 2.3.5

Pre kolmé vektory \vec{a}, \vec{b} platí $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$. Vypočítajte $\|((\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - 5\vec{b}))\|$.

Úloha 2.3.6

Použitím zmiešaného súčinu určte vzdialenosť bodu $A[2; 3; 4]$ od roviny e :

$$e : \begin{cases} x_1 = 2 - 3t + 2u, \\ x_2 = 3 + 2t - u, \\ x_3 = 2 + t + 4u. \end{cases}$$

Riešenie: Máme dva smerové vektory roviny e :

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -1, 4).$$

Normálový vektor roviny je daný ich vektorovým súčinom:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Rozložme determinant:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Vypočítajme determinanty:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - (1 \cdot (-1)) = 8 + 1 = 9,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 4) - (1 \cdot 2) = -12 - 2 = -14,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3 \cdot (-1)) - (2 \cdot 2) = 3 - 4 = -1.$$

Dostávame normálový vektor:

$$\mathbf{n} = (9, 14, -1).$$

Teraz upravme vzdialenosť bodu $A(2, 3, 4)$ od roviny:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Vektor $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$, súradnice bodu $P[2, 3, 2]$ získame dosadením $t = u = 0$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0 \cdot 9 + 0 \cdot 14 + 2 \cdot (-1) = -2.$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{9^2 + 14^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 196 + 1} = \sqrt{278}.$$

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{278}} = \frac{2}{\sqrt{278}}.$$

Odpoveď je:

$$d = \frac{2}{\sqrt{278}}.$$

Úloha 2.3.7

Napište parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom D rovnobežne s priesečnicou rovín α, β :

$\alpha : \overline{ABC}, \beta : x + 2y - z = 0, A[1; 0; 0], B[0; -1; 0], C[1; 0; 1], D[3; 0; 0]$.
(Riešte aj využitím vektorového súčinu.)

Riešenie:

1. Rovnica roviny: Rovinu β máme explicitne zadanú ako:

$$x + 2y - z = 0.$$

Normálový vektor k tejto rovine je:

$$\mathbf{n}_\beta = (1, 2, -1).$$

2. Rovnica roviny α je určená tromi bodmi $A(1, 0, 0), B(0, -1, 0)$ a $C(1, 0, 1)$. Najprv vytvoríme dva smerové vektory roviny α :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 1, -1 - 0, 0 - 0) = (-1, -1, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (0, 0, 1).$$

Normálový vektor roviny α je vektorový súčin $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\mathbf{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vypočítame determinant:

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{i}(-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \mathbf{j}(-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}(-1 \cdot 0 - (-1 \cdot 0)).$$

$$\mathbf{n}_\alpha = (-1, 1, 0).$$

3. Smerový vektor priesečnice rovín α a β . získame vektorovým súčinom $\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta$:

$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozložme determinant:

$$\mathbf{d} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2) - \mathbf{j}(-1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) + \mathbf{k}(-1 \cdot 2 - 1 \cdot 1).$$

$$\mathbf{d} = (-1, -1, -3).$$

Záver.

Priamka p prechádza bodom $D(3, 0, 0)$ a má smerový vektor $\mathbf{d} = (-1, -1, -3)$, takže jej parametrické vyjadrenie je:

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -t, \\ z = -3t. \end{cases}$$

Metrické vlastnosti euklidovského priestoru

Úloha 2.4.1

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny v štvorrozmernom afinnom priestore, ktorá na súradnicových osiach vytína rovnako veľké úseky dĺžky 2. Koľko riešení má úloha?

Úloha 2.4.2

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny q , ktorá je určená bodmi A, B a na súradnicovej osi z vytína úsek dĺžky 4:

$$A[-1; 3; 4], B[2; -8; -1].$$

Úloha 2.4.3

K priamke idúcej bodmi $E[3; 4], F[1; -1]$ veďte priesečníkom priamok p, q :

$$p : 6x - 7y + 23 = 0,$$

$$q : 2x + y + 1 = 0.$$

Zapíšte jej všeobecnú rovnicu.

Úloha 2.4.4

Daná je priamka p a bod M . Nájdite na priamke p body, ktorých vzdialenosti od bodu $M = [4, 1, 3]$ sú 4 jednotky

$$p : x = 1 + t,$$

$$y = -2 + t,$$

$$z = 3 - 2t.$$

Úloha 2.4.5.

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží výška v_a trojuholníka ABC ; $A[2; 5], B[4; 2], C[1; -2]$.

Úloha 2.4.6.

V euklidovskom priestore E_3 je daná rovina α a bod M . Napíšte parametrizované vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom M a kolmej na α :

$$\alpha : 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0, \quad A[3; 8; -4].$$

Úloha 2.4.7.

V euklidovskom priestore E_4 je daný podpriestor α a bod A . Napíšte parametrizované vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom A a kolmej na α :

$$\alpha : X = [2; 1; 0; 5] + t_1(2; -4; 6; 1) + t_2(4; 1; -2; -3) + t_3(0; 4; 0; 2), \quad A[1; -4; 3; 1].$$

Úloha 2.4.8.

Určte vrcholy B, D štvorca $ABCD$, ak $A[2; 1], C[4; 5]$.

Úloha 2.4.9.

V E_3 napíšte všeobecnú rovnicu roviny β , ktorá prechádza priamkou p a je kolmá na rovinu α :

$$p : X = [2; 3; 0] + t(1; 0; -1), \\ \alpha : x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0.$$

Úloha 2.4.10.

Určte veľkosti výšok trojuholníka KLM , ak:

$$KL : x + y - 1 = 0, \quad KM : x - 2y - 5 = 0, \quad LM : 3x + y = 0.$$

Úloha 2.4.11.

Napíšte parametrizované vyjadrenie priamky, na ktorej leží výška v_v (prechádzajúca vrcholom V) štvorstena $ABCV$ a vypočítajte veľkosť tejto výšky:

- (a) $A[-1; 0; 3], B[4; 3; 2], C[2; 1; 1], V[-6; 1; 0]$,
- (b) $A[2; 1; 1], B[-1; 0; 3], C[4; 3; 2], V[-6; 1; 0]$,
- (c) $A[1; 1; 1], B[2; 1; 1], C[-3; 0; 2], V[3; 1; 5]$.

Úloha 2.4.12.

Určte analytické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodom $L[-4; 3]$ a od počiatku súradnicovej sústavy vzdialenej päť jednotiek.

Úloha 2.4.13.

Určte analytické vyjadrenie priamky, na ktorej leží strana trojuholníka prechádzajúca bodom $M[3; 4]$, ak ostatné dva strany trojuholníka ležia na súradnicových osiach x, y a obsah trojuholníka $\Delta = 24$.

Úloha 2.4.14.

Dané sú body $S_a[7; 8]$, $S_b[-5; -4]$, $S_c[1; -4]$. Určte vrcholy trojuholníka ABC , pre ktorý sú S_a, S_b, S_c v poradí stredy strán BC, AC, AB .

Úloha 2.4.15.

Napište všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu bodom $M[1; 2; 1]$, ktorá má od bodov $M_1[2; 3; 2]$, $M_2[4; 5; -4]$ rovnakú vzdialenosť.

Úloha 2.4.16.

V E_3 určte dvoma spôsobmi vzdialenosť euklidovských podpriestorov $E' = \{M\}$ a $E'' = \{Q; u\}$:

$$M[5; 2; 3], \quad Q[1; -3; 1], \quad u(1; 2; -1).$$

Úloha 2.4.17.

Určte vzdialenosť bodu $B[2; 3; 4]$ od roviny α :

$$\alpha : 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6 = 0.$$

Úloha 2.4.18.

Určte súradnice bodu A' , ktorý je súmerne združený s bodom $A[1; -2; 3]$ podľa nadroviny ω :

$$\omega : 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5 = 0.$$

Úloha 2.4.19.

Určte vzdialenosť bodu $A[1; 2; 1; -2]$ od priamky m :

$$x_1 = 2 - 3t,$$

$$x_2 = 1 + 2t,$$

$$x_3 = 2 + 3t,$$

$$x_4 = 5 + 4t.$$

Úloha 2.4.20.

Napíšte rovnicu roviny súmernosti bodov A, B , ak:

(a) $A[2; -2; 3], B[3; 1; -1]$,

(b) $A[2; -1; -4], B[4; -3; 2]$.

Úloha 2.4.21.

V E_5 je daná nadrovina α a bod M . Určte pravouhlý priemet bodu M do nadroviny α :

$$\alpha : x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 - 1 = 0,$$

$$M[1; 1; 1; 1; 3].$$

Úloha 2.4.22.

Vypočítajte súradnice vrcholov kosoštvorca $ABCD$, ktorého jedna strana obsahuje bod M , protiľahlá strana leží na priamke m a uhlopriečka BD leží na priamke p :

$$m : x = 3 + 4t,$$

$$y = 6 + t,$$

$$p : 9x + 5y - 45 = 0,$$

$$M[1; 2].$$

Úloha 2.4.23.

Bod S je priesečníkom uhlopriečok obdĺžnika, ktorého jedna strana leží na priamke p . Určte všeobecné rovnice priamok, na ktorých ležia zvyšné strany obdĺžnika, ak jedna z nich obsahuje bod M :

$$S[0; 3], \quad M[3; 4], \quad p : x + y = 9.$$

Úloha 2.4.24.

Dvoma spôsobmi vypočítajte vzdialenosť mimobežiek a, b (1. sp. využite priechku mimobežiek kolmú na priamku a aj b , 2. sp. využite úlohu 2.3.6):

(a) $a : x = t, y = 0, z = 0,$

(b) $b : X = [1; 1; 1] + t(0; -1; -t).$

Úloha 2.4.25.

Určte reálne čísla a, b tak, aby priamka p bola kolmá na rovinu α :

$$p : x = 1 + 2t,$$

$$y = 3 + at,$$

$$z = -1 + bt,$$

$$\alpha : x + 5y + 3z - 4 = 0.$$

Úloha 2.4.26.

Riešte úlohu 2.2.7 čo najjednoduchšie (využitím normálového vektora nadroviny).

Úloha 2.4.27.

Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na priamku p :

$$M[2; -1; 1; 1],$$

$$p : X = [7; 1; 4; -2] + t(3; 2; -2; 1).$$

Úloha 2.4.28.

Daný je štvorsten $ABCD$. Určte kosínus uhla, ktorý zvierajú roviny ABD a ABC :

$$A[3; -2; 0], B[5; 6; 0], C[-1; 2; 0], D[2; 2; 3].$$

Úloha 2.4.29.

Dourčte súradnice bodov C, D v E_3 tak, aby $ABCD$ bol pravidelným štvorstenom a aby z -ová súradnica bodu C aj x -ová súradnica bodu D boli kladné:

$$A[1; 0; 0], B[4; 4; 0], C[?; ?; ?], D[?; ?; ?].$$

Úloha 2.4.30.

Daná je jednotková kocka $ABCDAB'C'D'$. Vypočítajte vzdialenosť bodu B' od roviny $AC'E$, ak $(DD'E) = -1$.

Úloha 2.4.31.

Určte ortogonálny priemet bodu $A[5; 1; 2]$ do roviny α :

$$\alpha : x - 2y + z - 4 = 0.$$

Úloha 2.4.32.

Určte ortogonálny priemet priamky p do roviny α :

$$p : X = [3; 1; 2] + t(4; -3; 2),$$

$$\alpha : 2x - y + z - 5 = 0.$$

Úloha 2.4.33.

Napíšte všeobecné rovnice takých dvoch rovín (v E_3), aby obsahovali priamku jednej z nich ako časť druhej bola priamka.

Úloha 2.4.34.

Dané sú roviny α, β . V rovine β je daný bod B_0 . Určte v rovine α taký bod B , aby jeho ortogonálnym priemetom bol bod B_0 v rovine β (priamo pod bodom B):

$$\alpha : x + 2y - z + 2 = 0,$$

$$\beta : x + 3y + z - 2 = 0,$$

$$B_0[0; 8; -4].$$

Riešenie Úlohy 2.4.34.

Aby sme našli bod $B[x; y; z]$ v rovine α , ktorého ortogonálny priemet do roviny β je bod $B_0[0; 8; -4]$, postupujeme nasledovne:

1. ****Parametrické vyjadrenie priamej:**** Bod B musí ležať na priamke prechádzajúcej bodom $B_0[0; 8; -4]$ a smerovanej podľa normálového vektora roviny β :

$$\vec{n}_\beta = (1, 3, 1).$$

Parametrické vyjadrenie priamej je:

$$x = t, \quad y = 8 + 3t, \quad z = -4 + t,$$

kde t je parameter.

2. ****Dosadenie do rovnice roviny α :** Bod B musí zároveň ležať v rovine $\alpha : x + 2y - z + 2 = 0$. Dosadíme parametre $x = t, y = 8 + 3t, z = -4 + t$ do rovnice roviny:

$$t + 2(8 + 3t) - (-4 + t) + 2 = 0.$$

3. ****Úprava rovnice:****

$$t + 16 + 6t + 4 - t + 2 = 0,$$

$$6t + t - t + 16 + 4 + 2 = 0,$$

$$6t + 22 = 0.$$

4. ****Výpočet parametra t :**

$$t = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3}.$$

5. **Súradnice bodu B :** Dosadíme hodnotu $t = -\frac{11}{3}$ do parametrického vyjadrenia:

$$x = t = -\frac{11}{3}, \quad y = 8+3t = 8+3\left(-\frac{11}{3}\right) = 8-11 = -3, \quad z = -4+t = -4-\frac{11}{3} = -\frac{23}{3}.$$

Bod B má súradnice:

$$B\left(-\frac{11}{3}; -3; -\frac{23}{3}\right).$$

Úloha 2.4.35.

Určte vzdialenosť priamok:

$$\begin{aligned} p &= [A; \vec{u}], & A[2; 1; 4], & \vec{u}[3; 1; 1], \\ q &= [B; \vec{v}], & B[1; 2; 0], & \vec{v}[0; -2; -4]. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.36.

Nech priamky $a : X = A + t\vec{a}$, $b : X = B + r\vec{b}$ sú mimobežky. Uvážte, že ich vzdialenosť je

$$\frac{|(B - A) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}.$$

Úloha 2.4.37.

Určte vzdialenosť euklidovských podpriestorov E' a E'' , ak sú dané parametricky

$$\begin{aligned} E' : x_1 &= r - s, & E'' : x_1 &= k, \\ x_2 &= 1 + r, & x_2 &= l, \\ x_3 &= 2 + r + 2s, & x_3 &= -1, \\ x_4 &= -3s, & x_4 &= -l. \end{aligned}$$

Úloha 2.4.38.

Vypočítajte vzdialenosť euklidovských podpriestorov

(a) $E' = [M; \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2]$ a $E'' = [N; \mathbf{v}]$,
 $M[3; 0; 0; 0; 1]$, $\mathbf{u}_1(1; -1; 0; 1; 2)$, $\mathbf{u}_2(0; 0; 1; 0; 0)$;
 $N[1; 1; 0; 0; 1]$, $\mathbf{v}(1; 0; 0; 0; 1)$,

(b) $E' = [A; \mathbf{a}; \mathbf{b}]$ a $E'' = [B; \mathbf{c}; \mathbf{d}]$,
 $A[1; 1; 0; 0; 1]$, $\mathbf{a}(0; 0; 0; 1; 0)$, $\mathbf{b}(1; 0; 0; 0; 1)$

Afinné zobrazenia

Základné vlastnosti afinných zobrazení

Úloha 3.1.1.

V A_2 je daná LSS a afinné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_2$,

$$A[1; 1] \mapsto A'[3; 5],$$

$$B[5; 2] \mapsto B'[10; 10],$$

$$\vec{v}(5; 2) \mapsto \vec{v}'(8; 7).$$

Určte $f(O)$, $f(\vec{e}_1)$ a $f(\vec{e}_2)$, ak $O[0; 0]$, $\vec{e}_1(1; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1)$. Pozrite si applet Tu.

Riešenie:

Afinné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_2$ má tvar

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{t},$$

kde A je matica lineárneho zobrazenia a \vec{t} je posun (translačný vektor).

Krok 1: Nájdeme A . Zadanie dáva podmienky:

$$f(A) = A'[3; 5], \quad f(B) = B'[10; 10], \quad f(\vec{v}) = \vec{v}'(8; 7).$$

Pre body $A[1; 1]$ a $B[5; 2]$ platí:

$$f(A) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$f(B) = A \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Odčítame rovnice:

$$A \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zároveň vieme, že:

$$A \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Predstavme si A ako:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Potom dostaneme dve sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} 4a + b &= 7, \\ 4c + d &= 5, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 5a + 2b &= 8, \\ 5c + 2d &= 7. \end{aligned}$$

Krok 2: Riešenie sústavy. Zo sústavy prvej dvojice rovníc vyjadríme b a d :

$$b = 7 - 4a, \quad d = 5 - 4c.$$

Dosadíme do druhej sústavy:

$$\begin{aligned} 5a + 2(7 - 4a) &= 8, \\ 5c + 2(5 - 4c) &= 7. \end{aligned}$$

Zjednodušíme:

$$\begin{aligned} 5a + 14 - 8a &= 8, \\ 5c + 10 - 8c &= 7. \\ -3a &= -6 \implies a = 2, \\ -3c &= -3 \implies c = 1. \end{aligned}$$

Dosadíme späť:

$$b = 7 - 4(2) = -1, \quad d = 5 - 4(1) = 1.$$

Teda matica A je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Krok 3: Nájdeme \vec{t} . Použijeme rovnicu pre bod A :

$$f(A) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 \\ 1+1 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Krok 4: Určíme $f(O)$, $f(\vec{e}_1)$ a $f(\vec{e}_2)$.

$$f(O) = \vec{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$f(\vec{e}_1) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$f(\vec{e}_2) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Záver:

$$f(O) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Úloha 3.1.2.

Dané sú body $A, B \in A_2$, označme $T_{A,B,X} = A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{3}(X - A)$.
Dokážte, že $f : X \mapsto T_{A,B,X}$ je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.3.

V afinnej rovine A_2 sú dané rónobežky p, q . Pre ľubovoľný bod $X \in A_2$ označme q_X priamku prechádzajúcu bodom X a rovnobežnú s priamkou q . Dokážte, že $f : A_2 \rightarrow A_2$, kde $f(X) = X'$, $X' \in q_X \cap p$, je afinné zobrazenie. Je f surjekcia?

Úloha 3.1.4. V afinnej rovine A_2 sú dané rónobežky p, q . Pre ľubovoľný bod $X \in A_2$ označme q_X priamku prechádzajúcu bodom X a rovnobežnú s priamkou q . Dokážte, že $f : A_2 \rightarrow A_2$, kde $f(X) = X'$, pričom obraz X' leží na priamke q_X a stred úsečky XX' leží na priamke p , je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.5.

Dané sú dve mimobežky $p, q \subset A_3$ a rovina $\alpha \subset A_3$ tak, že p a q sú rovnobežné s α . Pre ľubovoľné $X \in p$ označme α_X rovinu prechádzajúcu bodom X rovnobežne s rovinou α . Dokážte, že $f : p \rightarrow q$, $f : X \mapsto \alpha_X \cap q$, je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.6.

Dokážte, že každé posunutie je afinná transformácia.

Úloha 3.1.7.

Dokážte, že každá rovnobežnosť je afinná transformácia.

Úloha 3.1.8.

Nech $f : A_2 \rightarrow A'_2$ je afinné zobrazenie. Aké prípady môžu nastať pre f , t. j. čo môže byť obrazom $f(A_2)$?

Asociovaný homomorfizmus afinného zobrazenia

Úloha 3.2.1.

Pre asociovaný homomorfizmus F afinného zobrazenia $f : A_2 \rightarrow A_4$ platí, že $f(\vec{u}) = \vec{u}'$, $f(\vec{v}) = \vec{v}'$. Určte obrazy vektorov \vec{w} a $\vec{w} - 2\vec{u}$:

$$\vec{u}(2; 1), \quad \vec{v}(0; 1), \quad \vec{u}'(1; 2; 1; 1), \quad \vec{v}'(1; 1; 0; 0), \quad \vec{w}(1; 1).$$

Úloha 3.2.2.

Afinné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_3$ je dané predpisom

$$X(x, y) \mapsto X'(x + y - 3, y - 1, x - 2y).$$

Učte obraz vektorov $\vec{u}(1; 2)$, $-\vec{u}$ a $3\vec{u}$ v asociovanom homomorfizme f .

Úloha 3.2.3

Dané je afinné zobrazenie $f : A_3 \rightarrow A_2$ tak, že $f(A) = K$, $f(B) = L$, $f(C) = M$ a $f(D) = N$. Určte obraz vektora \vec{v} v asociovanom zobrazení \vec{f} .

$$\begin{array}{cccc} A[3; 1; 3], & B[0; 0; 2], & C[1; 0; 1], & D[3, 1, -3], \\ K[-1; 2], & L[1; 1], & M[1; 2], & N[2; 4], \\ \vec{v}[2; 1; -2] \end{array}$$

Úloha 3.2.4

Daný je afinný priestor $A(A; V; -)$, body aj vektory afinného priestoru tvoria polynómy najviac tretieho stupňa nad reálnymi číslami, $-$ je operácia odčítovania dvoch polynómov. Vyjadrite afinné zobrazenie $f : A \rightarrow A$, ak viete, že $f(M) = K$, kde $M = x^3 + x^2 + x + 1$, $K = x^2 + 2$, a $\vec{f}(u) = u'$, kde u' znamená deriváciu polynómu u .

Riešenie. Hľadáme analytické vyjadrenie afinného zobrazenia $f : A \rightarrow A$, pričom platí:

$$f(M) = K, \quad \text{kde } M = x^3 + x^2 + x + 1, \quad K = x^2 + 2.$$

Ďalej je dané, že asociované lineárne zobrazenie \vec{f} je derivácia polynómu:

$$\vec{f}(u) = u'.$$

Z toho vyplýva, že f má tvar:

$$f(u) = u' + C,$$

kde C je neznámy polynóm, ktorý určíme z podmienky $f(M) = K$:

$$M' + C = K.$$

Derivujeme M :

$$M' = 3x^2 + 2x + 1.$$

Dosadíme do rovnice:

$$3x^2 + 2x + 1 + C = x^2 + 2.$$

Z toho určíme C :

$$C = x^2 + 2 - (3x^2 + 2x + 1) = -2x^2 - 2x + 1.$$

Teda afinné zobrazenie f je:

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c - 2x^2 - 2x + 1 = (3a - 2)x^2 + (2b - 2)x + c + 1.$$

Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

Úloha 3.3.1

V afinnej rovine A_2 sú dané tri lineárne nezávislé body B, C, D a repér $\mathcal{R} = \{B; C - B, D - B\}$ určujúci LSS v A_2 . Existuje práve jedno afinné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_3$, také $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ a $f(D) = D'$. Určte analytické vyjadrenie zobrazenia f :

$$B'[1; 0; 0], \quad C'[0; 1; 0], \quad D'[0; 0; 1]$$

Úloha 3.3.2

Napíšte analytické vyjadrenie affíného zobrazenia $f : A_2 \rightarrow A_1$, ak $f(A) = K$, $f(B) = L$, $f(C) = M$,

$$[(a)] \quad A [2;1], \quad B [3;2], \quad C [0;1], \quad K [2], \quad L [0], \quad M [10]$$

$$[(b)] \quad A [2;1], \quad B [3;2], \quad C [0;1], \quad K [2], \quad L [0], \quad M [8]$$

Úloha 3.3.3

Existuje affíné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_1$, pre ktoré platí, že

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'?$$

$$\begin{array}{cccccc} A[2;1], & B[3;2], & C[5;4], & A'[2], & B'[1], & B'[-1] \\ A[2;1], & B[3;2], & C[5;4], & A'[2], & B'[0], & B'[8] \end{array}$$

V prípade že affíné zobrazenie je určené jednoznačne? Zapište jeho analytické vyjadrenie.

Úloha 3.3.4

Určte analytické vyjadrenie affíného zobrazenia $f : A_4 \rightarrow A_5$, ak

$$f(K) = K', f(L) = L', f(\vec{w}) = \vec{w}', f(\vec{u}) = \vec{u}'$$

$$\begin{array}{cccccc} K[0;1;2;3], & L[2;1;1;0], & \vec{u}[1;0;0;1], & \vec{v}[0;0;1;0], & \vec{w}[0;0;0;2], \\ K'[-5;2;2;6;7], & L'[-6;3;2;9;5], & \vec{u}'[2;0;1;0;-1], & \vec{v}'[-3;0;1;0;5], & \vec{w}'[2;0;0;0;-2] \end{array}$$

Úloha 3.3.5

V A_2 a v A_3 sú zadané LSS. Zistite, či existuje affíné zobrazenie f , také že

$$f(K) = K', f(L) = L', f(M) = M'$$

Ako závisí riešenie úlohy od parametra p ?

$$\begin{array}{ccc} K[1;0], & L[0;1], & M[2;p], \\ K'[2;1;-1], & L'[3;2;0], & M'[1;0;2] \end{array}$$

Riešenie.

1. Analytické vyjadrenie affiného zobrazenia

Afiné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_3$ má tvar:

$$f(x, y) = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + P,$$

kde M je 3×2 matica a P je vektor posunutia.

Ľubovoľné body $P[x, y]$ a $P'[x', y']$ z A_2 vyjadríme ako lineárne kombinácie:

$$\begin{aligned} P &= a \cdot K + b \cdot L + c \cdot M, \\ P' &= a \cdot K' + b \cdot L' + c \cdot M', \end{aligned}$$

kde $a + b + c = 1$.

Zápis v maticovom tvare: V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že:

$$P' = M' \times M^{-1} \times P,$$

kde M je matica vzorov a M' matica obrazov:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pomocou maticovej kalkulačky určíme inverznú maticu:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p-1}{p+1} & \frac{-2}{p+1} & \frac{2}{p+1} \\ \frac{-p}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{p}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{-1}{p+1} \end{bmatrix}.$$

Roznásobením:

$$P' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{p-1}{p+1} & \frac{-2}{p+1} & \frac{2}{p+1} \\ \frac{-p}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{p}{p+1} \\ \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+1} & \frac{-1}{p+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Po vynásobení a porovnaní ľavej a pravej strany dostaneme transformačné rovnice:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 3, \\ y' &= -x + 2, \\ z' &= \frac{-p+3}{p+1}x + \frac{4}{p+1}y + \frac{-4}{p+1}. \end{aligned}$$

Zobrazenie bude affinným práve vtedy, ak $p \neq -1$. Súradnice obrazu ľubovoľného bodu $P[x, y]$ určíme dosadením súradníc x, y do transformačných rovníc. Napríklad pre $D[3, 1]$ a $p = 3$ dostaneme $D'[0, -1, 0]$.

Úloha 3.3.6

Nájdite analytické vyjadrenie affiého zobrazenia, ktoré

$$\begin{array}{cccc} A[1; 2; 3], & B[3; 2; 1], & C[1; -1; 1], & D[2; 1; 0], \\ A'[0; 9; -1] & B'[2; 11; 1], & C'[3; 4; -2], & D'[2; 7; 1] \end{array}$$

Úloha 3.3.7

Nájdite analytické vyjadrenie affiného zobrazenia, ktoré

$$\begin{array}{cccc} A[1; 2; 3], & B[1; 1; 1], & C[1; 0; 1], & D[0; 1; 3], \\ A'[5; 4] & B'[2; 1], & C'[1; 0], & D'[3; 2] \end{array}$$

Úloha 3.3.8

Nájdite analytické vyjadrenie affiného zobrazenia f , ktoré

$$\begin{array}{l} P[3; 3], \rightarrow P'[7; 0], \\ Q[2; 1], \rightarrow Q'[4; 1], \\ \vec{u}[2; 1] \rightarrow \vec{u}'[3; 1] \end{array}$$

Skladanie affiných zobrazení

Inverzné zobrazenie affiného zobrazenia

Úloha 3.4.1

Dokážte, že f je afiná transformácia A_2 a určte analytické vyjadrenie zobrazení f^{-1} a f^2 , ak

$$A[0; 2] \rightarrow A'[1; 4],$$

$$B[2; 2] \rightarrow B'[3; 4],$$

$$C[2; 0] \rightarrow C'[3; 0]$$

Úloha 3.4.2

Nájdite analytické vyjadrenie affiného zobrazenia $f \circ g$, ak

(a)

$$f : x' = x + 3,$$

$$y' = y - 1,$$

$$z' = -2x + y$$

$$g : x' = x - y + z + 1$$

$$y' = x + 2y + 2z$$

(b)

$$f : x' = -2x,$$

$$y' = x + 3,$$

$$g : x' = x$$

$$y' = x - y$$

Úloha 3.4.3

Dané je afiné zobrazenie $f : A_3 \rightarrow A_3$

$$f : x' = x + y - 2z + 1$$

$$y' = x - z$$

$$z' = x - y - 1$$

Nájdite obraz affiného podpriestoru

(a) $x = 3 + t, y = -t, z = -1$

(b) $\alpha : x = 1 + u + v, y = 2 + v, z = 3$

(c) $\gamma : x + y + z + 3 = 0$

(d) $\delta = A_3$

Riešenie

(a) Obraz parametrických rovníc:

$$x' = -(3+t) + (-t) - 2(1) + 1 = -3 - t - t - 2 + 1 = -4 - 2t,$$

$$y' = (3+t) - 1 = 2 + t,$$

$$z' = (3+t) - (-t) - 1 = 3 + t + t - 1 = 2 + 2t.$$

Teda obrazom je parametrická rovina:

$$x' = -4 - 2t,$$

$$y' = 2 + t,$$

$$z' = 2 + 2t.$$

(b) Obraz podpriestoru α :

$$x' = (1 + u + v) + (-2 + v) - 2(3) + 1 = 1 + u + v - 2 + v - 6 + 1 = -2 + u + 2v,$$

$$y' = -2 + u + v,$$

$$z' = (-2 + u).$$

Teda výsledné rovnice sú:

$$x' = -2 + u + 2v,$$

$$y' = -2 + u + v,$$

$$z' = -2 + u.$$

Všeobecný tvar je $x - 2y + z = 0$

(c) Obraz rovnice roviny γ : Vyjadríme $z = -x - y - 3$ a dosadíme:

$$x' = \dots,$$

$$y' = \dots,$$

$$z' = \dots$$

Rovnica obrazu je teda rovná obrazu roviny $\alpha: f(\gamma) = f(\alpha)$.

$$x' - 3y' + z' = 10.$$

(d) Obraz celého priestoru A_3 : Keďže affinné zobrazenie je bijektívne, obrazom celého priestoru je celý priestor A_3 .

Samodružné prvky afinného zobrazenia

Úloha 3.5.1.

Dané je afinné zobrazenie $f : A_3 \rightarrow A_3$

$$\begin{aligned} f : \quad x' &= x - y + z + 1 \\ y' &= -x + y + z + 2 \\ z' &= -x - y + 3z + 3 \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f .

Úloha 3.5.2.

Dané je afinné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_2$

$$\begin{aligned} f : \quad x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= -x + 2y + 3 \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f .

Úloha 3.5.3.

V A_2 sú dané nekolineárne body A, B, C . Nájdite samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f , ak

1. $f(A) = B, \quad f(B) = A, \quad f(C) = C;$
2. $f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = A.$

Úloha 3.5.4.

Dané je afinné zobrazenie $f : A_2 \rightarrow A_2$

$$\begin{aligned} f : \quad x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f .

Úloha 3.5.5.

Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f :

$$f : \begin{aligned} x' &= x + 2y + 3 \\ y' &= 2x - y + 1 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.6.

Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f :

$$f : \begin{aligned} x' &= -x + 4y - 2 \\ y' &= 2x - 3y + 2 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.7.

Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f :

$$f : \begin{aligned} x' &= 2x - 2 \\ y' &= -6x - y + 14 \\ z' &= 19x + 6y + z - 44 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.8.

Napíšte analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f v affinnom priestore A_3 , ak M je samodružný bod af. zobrazenia f a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú charakteristické vektory asociovaného homomorfizmu \tilde{f} , pričom \vec{u} a \vec{v} príslušných charakteristickému číslu $\lambda_1 = 2$ a vektor \vec{w} príslučá charakteristickému číslu $\lambda_2 = -1$:

$$M[1; 0; 0], \quad \vec{u}(1; 0; 1), \quad \vec{v}(1; 0; -1), \quad \vec{w}(0; 1; -2)$$

Úloha 3.5.9.

Dokážte, že všetky smery affinného priestoru A_n sú samodružné smery každého posunutia v A_n .

Úloha 3.5.10.

Dokážte, že každý smer v A_n je samodružným smerom každej rovnoľahlosti v A_n .

Homotetické transformácie

Úloha 3.6.1.

Rovnoložnosť je daná rovnicami

$$\begin{aligned}x' &= 3x - 4 \\y' &= 3y + 1\end{aligned}$$

Nájdite jej stred S a charakteristiku h .

Úloha 3.6.2.

Rovnoľahlosť κ je daná charakteristikou $h = \frac{2}{3}$ a dvojicou odpovedajúcich si bodov $A[3; 1]$, $A'[2; 4]$. Určte súradnice stredu S rovnoľahlosti κ .

Úloha 3.6.3.

V rovine je daný bod $S(1; -3)$ a priamky p, p' :

$$\begin{aligned}p : \quad & 3x + 5y - 15 = 0, \\p' : \quad & ax + 7y - 1 = 0.\end{aligned}$$

Určte hodnotu a , pre ktorú priamky p v rovnoľahlosti so stredom S bola priamka p' a určte jej charakteristiku.

Úloha 3.6.4.

Určte stred a charakteristiku rovnoľahlosti κ a reálne čísla r, s , tak, aby $H[1; ?]$ bol jej samodružný bod, bod $M'[3; 1]$ bol obrazom bodu $M[2; 4]$ a priamka a' obrazom priamky a v rovnoľahlosti κ :

$$\begin{aligned}a : \quad & y = 0, \\a' : \quad & rx + 4y + s = 9.\end{aligned}$$

Úloha 3.6.5.

Určte stred rovnoľahlosti κ , ktorej charakteristika $h = 3$, ak viete, že priamka m sa v nej zobrazí do priamky m' a že priesečník priamky m s osou x sa

zobrazí do bodu, ktorého y -ová súradnica je rovná $\frac{1}{3}$:

$$m : 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$m' : x + ty + 1 = 0.$$

Úloha 3.6.6.

Určte p tak, aby existovala rovnoľahlosť so stredom $S[3; 2]$, ktorá bod $A[1; 4]$ zobrazí do bodu $B[2; p]$. Napíšte rovnice tejto rovnoľahlosti.

Úloha 3.6.7

Napíšte analytické vyjadrenie rovnoľahlosti v A_3 , ak charakteristické číslo $\lambda = -2$ a obrazom bodu $B[2; 0; -1]$ je bod $C[0; 1; 3]$. Určte stred tejto rovnoľahlosti.

Úloha 3.6.8

Napíšte analytické vyjadrenie homotetickej transformácie f , pre ktorú $f(K) = K' \wedge f(L) = L'$. Určte samodružné body zobrazenia f .

$$K[3; 2], L[1; -1], K'[2; 1], L'[0; ?]$$

Úloha 3.6.9

Dané je afinne zobrazenie

$$f : \begin{cases} x' = 4x + 3 \\ y' = 4y \\ z' = 4z - 6 \end{cases}$$

Zistite, či je f homotétia. Ak áno, určte presnejšie o akú homotétiu ide.

Úloha 3.6.10

V afinnom priestore A_3 sú dané rovnoľahlosti f so stredom $S[1; -2; 3]$ a koeficientom $\lambda = \frac{3}{4}$ a posunutie g , vektorom posunutia je $\vec{u}[0; 1; -1]$.

(a) Určte, aká transformácia vznikne zložením $f \circ g$,

- (b) Určte, aká transformácia vznikne zložením $g \circ f$,
- (c) Overte, že rovnoľahlosť, ktorú ste dostali v (a), má stred $H = S + \frac{1}{1-\lambda}\vec{u}$,
- (d) Overte, že rovnoľahlosť, ktorú ste dostali v (b), má stred $U = S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{u}$.

Základné afinné zobrazenia

Úloha 3.7.1

Napíšte rovnicu osovej afinity, ktorej osou je súradnicová os x a zobrazuje bod $[0; 1]$ na bod $[3; 5]$.

Úloha 3.7.2

Napíšte rovnicu základnej afinity v priestore A_3 , ktorej množinou samodružných bodov je rovina $\rho : x + 2y - z + 1 = 0$ a počiatok LSS P sa zobrazí do bodu $Q[0; 0; 2]$.

Úloha 3.7.3

Napíšte analytické vyjadrenie afinity f , ktorá zobrazuje body $A[1; 2; 3]$, $B[0; 1; 0]$, $C[-1; 0; 1]$ sú samodružné a bod $D[2; 0; 1]$ sa zobrazí do počiatku LSS. Môžeme využívať, že f je základná afinita, Prečo?

Úloha 3.7.4

Napíšte rovnicu osovej afinity, ktorej osou je priamka $x - y + 1 = 0$ a počiatok LSS sa zobrazí na bod $[4; ?]$.

Základné vlastnosti zhodných zobrazení

Úloha 4.1.1

Zistite, či existuje zhodné zobrazenie z \mathbb{E}_2 do \mathbb{E}_3 , pričom $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A[1; 2]$, $B[2; -3]$, $A'[4; 1; 0]$, $B'[6; 5; 0]$.

Úloha 4.1.2

a) Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovalo zhodné zobrazenie z \mathbb{E}_2 do \mathbb{E}_2 , pričom $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

$A[0; 0]$, $B[2; 1]$, $C[4; a]$, $A'[1; 2]$, $B'[3; 1]$, $C'[5; b]$.

b) Je zobrazenie f určené a v jedinečnosti? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 4.1.3

Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovalo zhodné zobrazenie $f : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$, pre ktoré $[0; 0] \rightarrow [1; 2]$, $[2; 1] \rightarrow [3; 1]$, $[4; a] \rightarrow [6; b]$.

Je takto určené zobrazenie f dané jednoznačne?

Úloha 4.1.4

V zhodnom zobrazení $f : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ sú body $K[0; 0; 0]$, $L[1; 1; 1]$ samodružné a bod $A[1; -1; 0]$ sa zobrazí do roviny $x = 0$. Určte súradnice bodu $f(A)$.

Úloha 4.1.5

V \mathbb{E}_2 je daný štvorec $ABCD$. Koľko zhodných zobrazení euklidovskej roviny \mathbb{E}_2 do seba reprodukuje štvorec $ABCD$ existuje? Vypíšte ich.

Úloha 4.1.6

Koľko zhodných zobrazení f v \mathbb{E}_3 existuje, ak

$$[1; 2; 1] \rightarrow [1; -2; -1], [0; 0; 3] \rightarrow [0; 0; r] \quad r \in R,$$

$$[0; 3; 0] \rightarrow [0; -3; 0], [1; 1; s] \rightarrow [-1; -1; t], \quad r, s \in R.?$$

Úloha 4.1.7

Určte $s, r \in \mathbb{R}$ tak, aby $f : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ bolo zhodné zobrazenie, pre ktoré

$$\vec{f}(\vec{u}) = -\vec{u}, \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}, f(A) = P, f(P) = A,$$

$$\vec{u} = (1; -2; 0), \vec{v} = (s; 1; r), A[3; 2; 1], P \text{ je počiatok KSS.}$$

Úloha 4.1.8

Určte $r, p, q, r \in \mathbb{R}$ tak, aby $f : \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ bolo zhodné zobrazenie, v ktorom body A, B, C sú samodružné a bod D sa zobrazí do bodu D' :

$$A[0; 0; 0], B[0; 0; 1], C[1; 1; 1], D[0; 1; 0], D'[r; p; q].$$

Analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia

Úloha 4.2.1

Dané je analytické vyjadrenie zobrazenia

$$f : \begin{cases} x' = x + by - 2, \\ y' = \frac{1}{2}y + 1, \\ z' = ax + cy - 3. \end{cases}$$

Doručte $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie.

Úloha 4.2.2

Dané je zobrazenie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

kde

$$A[3; 0] \rightarrow A'[1; 5; 1], \quad B[0; 3] \rightarrow B'[-3; 4; p], \quad C[3; 3] \rightarrow C'[-1; 6; 3].$$

- Určte $p \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie.
- Napíšte rovnice zobrazenia f .
- Určte obraz počiatku $P[0; 0]$ v zobrazení f .

Úloha 4.2.3

Napíšte analytické vyjadrenie všetkých zhodných zobrazeníreprodukujúcich štvorec. Zvoľte vhodné KSS.

Úloha 4.2.4

V zhodnom zobrazení f sú body $A[0; 0; 0]$, $B[1; 1; 1]$ samodružné a bod $C[1; -1; 0]$ sa zobrazí do roviny $\gamma : y+1 = 0$. Určte obraz bodu C . Koľko riešení má úloha?

Úloha 4.2.5

a) Určte parameter s tak, aby existovala zhodnosť f v \mathbb{R}^2 taká, že

$$f(A) = B, \quad f(C) = D, \quad A[0; 0], \quad B[5; 0], \quad C[3; 4], \quad D[9; s].$$

b) Napíšte analytické vyjadrenie zhodnosti f .

c) Určte obraz bodu B v zhodnosti f .

Samodružné prvky zhodného zobrazenia

Úloha 4.3.1

Dané je zobrazenie

$$f : \begin{cases} [3; 0] \rightarrow [1; 4], \\ [1; 2] \rightarrow [p; 2], \\ [-1; -1] \rightarrow [2; q]. \end{cases}$$

Určte $p, q \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie a určte jeho samodružné body a smery.