

Martin Billich, Marián Trenkler



Zbierka úloh z analytickej geometrie

Skriptá - učebné texty

Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku
Ružomberok 2006

Analytic Geometry Exercise Book
by Martin Billich - Marián Trenkler

© Copyright by the Pedagogical Faculty of Catholic University in
Ružomberok, 2006

Autori

RNDr. Martin Billich
Doc. RNDr. Marián Trenkler, CSc.

recenzent

Doc. RNDr. Jaroslav Ivančo, CSc.

Sadzba

RNDr. Martin Billich
Ing. Miloslav Korba
Mgr. Milan Pudiš

ISBN 80-8084-113-6

Za jazykovú úpravu zodpovedajú autori

Edičné stredisko Pedagogickej fakulty,
Námestie Andreja Hlinku 56/1, 034 01 Ružomberok
tel/fax 00421-44-4320960; <http://fedu.ku.sk>

Obsah

Úvod	5
1 Analytická geometria lineárnych útvarov	7
1.1 Bod, priamka, rovina	7
1.1.1 Afinný priestor	7
1.1.2 Euklidovský priestor	21
1.1.3 Vzdialenosti a odchýlky euklidovských podpriestorov	28
1.2 Úsečky, polpriamky, polroviny	35
1.3 Konvexné útvary	38
2 Analytická geometria kvadratických útvarov	43
2.1 Kružnica a zväzky kružníc	43
2.2 Kužeľosečky	52
2.2.1 Elipsa	52
2.2.2 Hyperbola	58
2.2.3 Parabola	63
2.3 Kvadratické plochy	68
2.3.1 Guľová plocha	68
2.3.2 Kvadriky v \mathbb{E}_3	73
3 Zobrazenia v rovine a priestore	81
3.1 Afinné zobrazenia	81
3.2 Zhodné zobrazenia	90
3.3 Podobné zobrazenia	97
Literatúra	101

Úvod

Geometria je časťou matematiky, s ktorou sa stretávajú žiaci už na základnej škole. Geometria je veľmi názorná a preto ju mnohí žiaci majú radi. Myslíme si, že geometriu možno práve pre jej názornosť využiť na budovanie kladného vzťahu žiakov k matematike. Žiaľ na Slovensku už mnoho rokov nebola vydaná zbierka úloh z geometrie pre študentov vysokých škôl. Tento deficit sa snaží vyriešiť predkladaná zbierka úloh z analytickej geometrie. Aj keď je určená budúcim učiteľom matematiky, veríme, že vhodné úlohy si v nej nájdu aj žiaci stredných škôl, študenti technických vysokých škôl a ich učitelia.

Zbierka úloh je rozdelená do troch kapitol: *Analytická geometria lineárnych útvarov*, *Analytická geometria kvadratických útvarov*, *Zobrazenia v rovine a priestore*. V úvode každej časti kapitoly uvádzame stručný prehľad základných pojmov a vzťahov, ktoré sa ďalej využívajú pri riešení úloh. Pri zoradovaní úloh sme zvolili prístup, ktorý je najčastejšie používaný na vysokých školách pripravujúcich učiteľov matematiky.

Aby zbierka splnila svoj účel (vyplnila jednu z medzier v našej učebnicovej literatúre) a v krátkom čase sa dostala k študentom, rozhodli sme sa ju vydať čo najskôr. V časti venovanej úlohám v afinnom priestore sú aj úlohy, ktoré tam nepatria, lebo sa v nich objavujú pojmy nedefinovateľné v afinnom priestore (napr. výška, vzialenosť). K tejto nekorektnosti nás viedli dlhoročné skúsenosti z vyučovania geometrie. Sme si vedomí, že práve z časového dôvodu mohli v zbierke ostať viaceré chyby. Budeme vdáční za všetky pripomienky a námety, ktoré nám pomôžu v budúcnosti vylepšiť predkladanú zbierku úloh z analytickej geometrie.

Autori

Kapitola 1

Analytická geometria lineárnych útvarov

1.1 Bod, priamka, rovina

1.1.1 Afinný priestor

Majme danú neprázdnu množinu \mathbf{A} , n -rozmerný vektorový priestor \mathbf{V}_n nad poľom reálnych čísel a zobrazenie f množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ do priestoru \mathbf{V}_n . Trojicu $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ nazývame *n -rozmerný afinný priestor*, ak platí:

1. Pre každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.
2. Pre každé $X \in \mathbf{A}$ a ľubovoľné $\vec{u} \in \mathbf{V}_n$ existuje jediné $Y \in \mathbf{A}$ pre ktoré je $f(X, Y) = \vec{u}$.

Množinu \mathbf{A} nazývame *nosič* a vektorový priestor \mathbf{V}_n *zameraním* afinného priestoru. Afinný n -rozmerný priestor $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ označujeme \mathbb{A}_n a $f(X, Y)$ zapisujeme $(Y - X)$.

Zvoľme v priestore \mathbb{A}_n bod $P \in \mathbf{A}$ a vo \mathbf{V}_n n lineárne nezávislých vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ (bázu \mathbf{V}_n). Geometrický objekt zložený z bodu P a vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ nazývame *afinný súradnicový repér* a označujeme ho $[P, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n]$, alebo skrátene $[P, \vec{u}_i]$.

Každý vektor $\vec{a} \in \mathbf{V}_n$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov bázy. Vektor $(X - P)$ sa dá vyjadriť v tvare

$$(X - P) = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n \quad (\text{LS})$$

Každému bodu X je vzťahom (LS) jednoznačne priradená n -tica reálnych čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) . Potom zobrazenie z \mathbf{A} do \mathbb{R}^n definované vzťahom (LS) sa nazýva *lineárna sústava súradníc*.

Nech $\mathbb{A}_n(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ je afinný n -rozmerný priestor, A ľubovoľný bod množiny \mathbf{A} a \mathbf{V}'_k ($k \leq n$) ľubovoľný vektorový podpriestor zamerania \mathbf{V}_n . Potom množinu bodov

$$\mathbb{A}'_k \equiv \{X \in \mathbb{A}_n : X = A + \vec{v}, \vec{v} \in \mathbf{V}'_k\}$$

nazývame *podpriestorom* afinného priestoru \mathbb{A}_n a zapisujeme $\mathbb{A}'_k = A + \mathbf{V}'_k$, resp. $\mathbb{A}'_k \equiv \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$, kde $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ tvoria bázu vektorového priestoru \mathbf{V}'_k . Podpriestor \mathbb{A}'_k pre $k = 1$, resp. $k = 2$ nazývame *priamka*, resp. *rovina*.

Parametrické rovnice priamky v afinnom priestore \mathbb{A}_n , ktorá je určená bodom $A = [a_1, \dots, a_n]$ a vektorom $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ sú

$$x_i = a_i + tu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Všeobecná rovnica priamky $\mathbf{p} \equiv \{A; \vec{u}\}$ v rovine \mathbb{A}_2 je

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 0$$

resp. po úprave

$$ax + by + c = 0, \quad \text{kde } (a, b) \neq (0, 0).$$

Parametrické rovnice priamky v priestore \mathbb{A}_3 , ktorá prechádza bodmi $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ sú

$$x = a_1 + (b_1 - a_1)t, \quad y = a_2 + (b_2 - a_2)t, \quad z = a_3 + (b_3 - a_3)t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Rovina ϱ prechádzajúca tromi nekolineárnymi bodmi A, B, C má *parametrickú rovnicu*

$$\varrho : X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A) = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad \text{kde } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Všeobecná rovnica roviny $\varrho \equiv \{A; \vec{u}, \vec{v}\}$ v priestore \mathbb{A}_3 má tvar

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

resp. po úprave

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{kde } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Všeobecná rovnica roviny určenej tromi bodmi $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, ktoré neležia na jednej priamke, má tvar

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nech $\mathbf{p} \equiv \{A = [a_1, a_2, a_3]; \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)\}$ je priamka v priestore \mathbb{A}_3 . Zvoľme dva vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tak, aby spolu s vektorom \vec{u} tvorili lineárne nezávislú trojicu vektorov. Bodom A , vektorom \vec{u} a zvolenými vektormi sú určené dve roviny $\alpha \equiv \{A; \vec{u}, \vec{v}\}$ a $\beta \equiv \{A; \vec{u}, \vec{w}\}$, ktorých prienikom je priamka \mathbf{p} . Rovnice

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

sú všeobecným vyjadrením danej priamky.

Kanonické rovnice priamky $\mathbf{p} \equiv \{A; \vec{u}\}$ majú tvar

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}.$$

Množinu všetkých priamok v \mathbb{A}_2 , ktoré majú spoločný bod S , nazývame *zväzok priamok* v rovine, bod S je stred zväzku. Rovnice zväzku priamok, ktorý je určený dvoma rôznymi priamkami s rovnicami $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ je

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

kde λ_1, λ_2 sú ľubovoľné čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Množinu všetkých rovín v \mathbb{A}_3 , ktoré majú spoločnú priamku \mathbf{o} , nazývame *zväzok rovín* v priestore, priamka \mathbf{o} je os zväzku. Rovnica zväzku rovín určeného dvoma rôznymi rovinami, ktorých rovnice sú $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ je

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

kde λ_1, λ_2 sú ľubovoľné čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Množinu všetkých rovín v \mathbb{A}_3 , ktoré majú spoločný práve jeden bod, nazývame *trs rovín*. Spoločný bod nazývame stred trsu. Rovnica trsu rovín určeného rovinami, ktorých rovnice sú $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), je

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \lambda_3(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) = 0,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sú ľubovoľné čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Úloha 1.1. Napíšte parametrické a všeobecné rovnice priamky prechádzajúcej bodmi $A = [2, -1]$, $B = [4, 5]$.

Riešenie: $x = 2 + t$, $y = -1 + 3t$; $3x - y - 7 = 0$.

Úloha 1.2. Určte parameter p tak, aby bod C ležal na priamke AB :

- a) $A = [-4, 5]$, $B = [-1, 0]$, $C = [p, p - 5]$;
 b) $A = [-3, -4]$, $B = [1, -5]$, $C = [2p, 9p]$.

Riešenie: a) $p = -10$, $C = [-10, -15]$; b) $p = -\frac{1}{2}$, $C = [-1, -\frac{9}{2}]$.

Úloha 1.3. Určte vzájomnú polohu priamok \mathbf{p} , \mathbf{q} , ak

- a) $\mathbf{p} : x = 3 - 2t$, $y = 4 + 3t$,
 $\mathbf{q} : x = 6 + 3s$, $y = -0,5 - 4,5s$;
 b) $\mathbf{p} : x = 1 + 4t$, $y = -t$,
 $\mathbf{q} : x = 3 - 12s$, $y = -2 + 3s$;
 c) $\mathbf{p} : x = -1 + t$, $y = 5 - 3t$,
 $\mathbf{q} : x = 5 - 3s$, $y = -1 + s$.

Riešenie: a) Totožné priamky; b) rovnobežné rôzne; c) rôznobežné.

Úloha 1.4. Určte reálne číslo a tak, aby priamka s parametrickými rovnicami $x = 5 - 6t$, $y = a + 2t$, prechádzala priesečníkom priamok \mathbf{p} , \mathbf{q} , ak

- a) $\mathbf{p} : x = 2 - s$, $y = 1 + 2s$,
 $\mathbf{q} : x = -1 + 3r$, $y = -1 - 2r$;
 b) $\mathbf{p} : x = 3 + 2s$, $y = -4 - 3s$,
 $\mathbf{q} : x = 11 + 4r$, $y = -13 - 5r$.

Riešenie: a) $a = -5$; b) $a = 0$.

Úloha 1.5. Určte reálne čísla a, b tak, aby priamky \mathbf{p} , \mathbf{q} boli totožné:

- a) $\mathbf{p} : x = -7 + at$, $y = 5 - 4t$,
 $\mathbf{q} : x = 2 - 9s$, $y = b + 6s$;

b) $\mathbf{p} : x = -7 + 2,5t, y = a - t,$
 $\mathbf{q} : x = 3 + bs, y = -7 + 0,2s.$

Riešenie: a) $a = 6, b = -1$; b) $a = -3, b = -\frac{1}{2}$.

Úloha 1.6. Určte vzájomnú polohu priamok \mathbf{p}, \mathbf{q} . Pre rôznobežné priamky určte tiež ich priesečník P :

a) $\mathbf{p} : 2x - 3y + 5 = 0, \mathbf{q} : 3x - 2y + 5 = 0;$
 b) $\mathbf{p} : 5x + 3y - 7 = 0, \mathbf{q} : 10x + 6y - 14 = 0;$
 c) $\mathbf{p} : 6x - 9y + 15 = 0, \mathbf{q} : 2x - 3y - 5 = 0;$
 d) $\mathbf{p} : 5x - 4y - 5 = 0, \mathbf{q} : 2x - 3y + 5 = 0.$

Riešenie: a) Rôznobežné, $P = [-1, 1]$; b) totožné; c) rovnobežné rôzne;
 d) rôznobežné, $P = [5, 5]$.

Úloha 1.7. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M = [3, 4]$ a je rovnobežná s priamkou $\mathbf{p} : x - y + 3 = 0$.

Riešenie: $x - y + 1 = 0$.

Úloha 1.8. Určte vzájomnú polohu priamok $a^2x - 9y + 18 = 0, x - 4y + \frac{16}{3}a = 0$. Urobte diskusiu vzhľadom na parameter a .

Riešenie: Pre $a = \frac{3}{2}$ totožné, pre $a = -\frac{3}{2}$ rovnobežné rôzne, pre $|a| \neq \frac{3}{2}$ rôznobežné.

Úloha 1.9. V rovnici priamky $ax - 3y - 8 = 0$ určte parameter a tak, aby táto priamka prechádzala priesečníkom priamok $\mathbf{p} : 2x + 5y + 17 = 0, \mathbf{q} : x = 4 + 3t, y = -9 - 2t$.

Riešenie: $a = -1$.

Úloha 1.10. Ťažisko trojuholníka ABC leží na osi \mathbf{o}_x , kde $A = [3, -4], B = [-6, 2]$ a tretí vrchol je na osi \mathbf{o}_y . Vypočítajte súradnice vrcholu C a ťažiska T trojuholníka.

Riešenie: $C = [0, 2], T = [-1, 0]$.

Úloha 1.11. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = [6, 5]$ a súčet veľkostí úsekov, ktoré na súradnicových osiach určujú spoločné body je 22.

Riešenie: $x + y - 11 = 0, 10x + 12y - 120 = 0$.

Úloha 1.12. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M = [-2, 1]$ a jej priesečníky s priamkami $x + 2y + 14 = 0$, $x - y + 1 = 0$ určujú úsečku so stredom v bode M .

Riešenie: $2x - 3y + 7 = 0$.

Úloha 1.13. Dané sú rovnice priamok $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ na ktorých ležia dve strany rovnobežníka. Vypočítajte súradnice vrcholov tohto rovnobežníka, ak jedna z jeho uhlopriečok leží na priamke $3x + 2y + 3 = 0$.

Riešenie: $[1, -3]$, $[-2, 5]$, $[5, -9]$, $[8, -17]$.

Úloha 1.14. Rovnobežník $ABCD$ má vrcholy $A = [4, 2]$, $C = [1, 2]$, uhlopriečku BD so smerovým vektorom $(7, 6)$ a stranu BC so smerovým vektorom $(5, 3)$. Určte vrcholy B, D uvažovaného rovnobežníka.

Riešenie: $B = [6, 5]$, $D = [-1, -1]$.

Úloha 1.15. Napíšte rovnicu priamky, na ktorej leží strana **a** trojuholníka ABC , ak

- a) $A = [-3, -3]$, $S_a = [1, 4]$, bod $D = [-2, 1]$ leží na strane **c** a bod $E = [2, 2]$ leží na strane **b**;
 b) $A = [3, 3]$, $S_a = [-2, 1]$, $\mathbf{v}_c : x + y - 4 = 0$.

Riešenie: a) Strana **a** trojuholníka ABC je určená bodmi B a C ktoré ležia postupne na priamkach $\overleftrightarrow{AD} : x = -3 + t, y = -3 + 4t$ a $\overleftrightarrow{AE} : x = -3 + s, y = -3 + s$. Bod S_a je stredom úsečky BC , t.j. $S_a = \frac{1}{2}(B + C)$. Riešením sústavy rovníc $t + s = 8$, $4t + s = 14$ je dvojica $t = 2$ a $s = 6$. Potom $B = [-1, 5]$, $C = [3, 3]$ a priamka, na ktorej leží strana **a** trojuholníka, má všeobecnú rovnicu $x + 2y - 9 = 0$;

b) $4x - y + 9 = 0$.

Úloha 1.16. Napíšte rovnice priamok na ktorých ležia strany trojuholníka ABC , ak poznáme jeden jeho vrchol $B = [2, -7]$ a rovnice priamok na ktorých ležia výška a ťažnica (vedené rôznymi vrcholmi trojuholníka) sú postupne $3x + y + 11 = 0$ a $x + 2y + 7 = 0$ v danom poradí.

Riešenie: $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$.

Úloha 1.17. Určte súradnice vrcholu C trojuholníka ABC , ak poznáme jeho vrcholy $A = [-4, 3]$, $B = [4, -1]$ a priesečník výšok je $V = [3, 3]$.

Riešenie: $C = [4, 5]$.

Úloha 1.18. Určte vrcholy B a C trojuholníka ABC , ak $A = [4, 3]$, $\mathbf{t}_c : 2x - 7y = 3$, $\mathbf{t}_b : 2x + 5y = 7$.

Riešenie: $B = [6, -1]$, $C = [-2, -1]$.

Úloha 1.19. Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej bodom $D = [1, 3]$ a vrcholom A trojuholníka ABC , ak poznáme:

- a) $B = [-4, 2]$, $C = [4, 3]$, $T = [2, 1]$;
 b) $S_a = [0, 3]$, $S_b = [5, 1]$, $S_c = [1, 0]$.

Riešenie: a) Pre ťažisko T a vrcholy A, B, C daného trojuholníka platí vzťah $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$, odkiaľ dostávame súradnice bodu $A = [6, -2]$. Hľadaná priamka \overleftrightarrow{AD} je určená rovnicou $x + y - 4 = 0$.

b) $x + y - 4 = 0$.

Úloha 1.20. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza cez body $M = [2, -1, 3]$, $N = [3, 1, 2]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{v} = (3, -1, 4)$.

Riešenie: $x - y - z = 0$.

Úloha 1.21. Priamku s parametrickým vyjadrením $x = 3 - 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = -5 + 3t$ vyjadrite ako priesečnicu dvoch rovín, z ktorých každá je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou.

Riešenie: Napr. $x + y - 5 = 0$, $3y - 2z - 16 = 0$.

Úloha 1.22. Určte, pre aké hodnoty parametrov a, b budú nasledujúce rovnice určovať rovnobežné roviny:

- a) $2x + ay + 3z - 5 = 0$, $bx - 6y - 6z + 2 = 0$;
 b) $bx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - az = 0$.

Riešenie: a) $a = 3, b = -4$; b) $a = -\frac{10}{3}, b = -\frac{6}{5}$.

Úloha 1.23. Určte, pre aké hodnoty parametrov a, b roviny $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$

- a) majú práve jeden spoločný bod;
 b) majú spoločné body, ktoré vytvárajú priamku;
 c) pretínajú sa v troch navzájom rôznych rovnobežných priamkach.

Riešenie: a) $a \neq 7$; b) $a = 7, b = 3$; c) $a = 7, b \neq 3$.

Úloha 1.24. Napíšte rovnicu roviny, ktorá obsahuje bod M a je rovnobežná s rovinou ϱ , ak

- a) $M = [2, -3, 3]$, $\varrho = R_{xy}$; b) $M = [1, -2, 4]$, $\varrho = R_{xz}$;
 c) $M = [-5, 2, -1]$, $\varrho = R_{yz}$.

Riešenie: a) $z - 3 = 0$; b) $y + 2 = 0$; c) $x + 5 = 0$.

Úloha 1.25. Napíšte rovnicu roviny, ktorá obsahuje bod N a priamku \mathbf{p} , ak

- a) $N = [4, -1, 2]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_x$ b) $N = [1, 4, -3]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_y$;
 c) $N = [3, -4, 7]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_z$.

Riešenie: a) $2y + z = 0$; b) $3x + z = 0$; c) $4x + 3y = 0$.

Úloha 1.26. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi M, N a je rovnobežná s priamkou \mathbf{p} , ak

- a) $M = [7, 2, -3]$, $N = [5, 6, -4]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_x$;
 b) $M = [2, -1, 1]$, $N = [3, 1, 2]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_y$;
 c) $M = [3, -2, 5]$, $N = [2, 3, 1]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_z$.

Riešenie: a) $y + 4z + 10 = 0$; b) $x - z - 1 = 0$; c) $5x + y - 13 = 0$.

Úloha 1.27. Ktorý z bodov $M = [5, 7, 1]$, $N = [0, \frac{1}{2}, 0]$ leží na priamke $\mathbf{p} \equiv \{A = [1, 2, 3]; \vec{u} = (2, 3, 6)\}$?

Riešenie: $M \notin \mathbf{p}$, $N \in \mathbf{p}$.

Úloha 1.28. Zistite, či priamka daná parametrickým vyjadrením $x = 6 + 2t$, $y = -11 - 5t$, $z = 9 + 3t$ pretína niektorú zo súradnicových osí.

Riešenie: Priamka pretína iba os \mathbf{o}_x v bode $[0, 4, 0]$.

Úloha 1.29. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = [2, -3, -4]$ a na súradnicových osiach vytína nenulové úseky rovnakej dĺžky.

Riešenie: Úseková rovnica roviny má tvar $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$. V našom prípade platí $p = q = r$. Po dosadení súradníc bodu A do tejto rovnice dostaneme hodnotu $p = -5$ a rovnica roviny bude $x + y + z + 5 = 0$.

Úloha 1.30. Nájdite číslo a tak, aby sa roviny $x - 3y + z - 2 = 0$, $x - y - z = 0$, $x - 4y + 2z + a = 0$ pretínali v priamke.

Riešenie: $a = -3$.

Úloha 1.31. Napíšte rovnice priamok, v ktorých rovina $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ pretína súradnicové roviny.

Riešenie: $5x - 7y - 3 = 0, z = 0$; $5x + 2z - 3 = 0, y = 0$; $7y - 2z + 3 = 0, x = 0$.

Úloha 1.32. Napíšte parametrické rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $M = [4, -5, 7]$ rovnobežne

- a) s vektorom $\vec{u} = (2, 7, 9)$;
 b) s priamkou $x + 3y + 10z - 2 = 0, 2x - y + z - 4 = 0$;
 c) s osou \mathbf{o}_x .

Riešenie: a) $x = 4 + 2t, y = -5 + 7t, z = 7 + 9t$;

b) $x = 4 + 13s, y = -5 - 19s, z = 7 + 7s$;

c) $x = 4 + r, y = -5, z = 7$.

Úloha 1.33. Trojuholník má vrcholy $A = [5, 7, 2], B = [-7, -11, 6], C = [-5, 3, 2]$. Napíšte všeobecné rovnice priamok na ktorých ležia strana AB , výška na stranu AC a ťažnica na stranu BC .

Riešenie: $\mathbf{c} : 3x - 2y - 1 = 0, x + 3z - 11 = 0, \mathbf{v}_b : 5x + 2y + 57 = 0, 29x - 33z + 401 = 0,$

$\mathbf{t}_a : x - y + 2 = 0, x + y + 11z - 34 = 0.$

Úloha 1.34. Určte vzájomnú polohu priamok \mathbf{p}, \mathbf{q} , ak

- a) $\mathbf{p} : 5x - y - 2z + 11 = 0, 3x + y - 2z + 8 = 0,$
 $\mathbf{q} : x + y - z - 4 = 0, 3x - y - z - 12 = 0$;
 b) $\mathbf{p} : x = -1 + t, y = 18 + 9t, z = 10 + 5t,$
 $\mathbf{q} : x + y - z - 4 = 0, 3x - y - z - 12 = 0$;
 c) $\mathbf{p} : x = 4, y = 5 + t, z = 1 + 2t,$
 $\mathbf{q} : x - y - z - 4 = 0, x + y - 3z = 0$;
 d) $\mathbf{p} : x + 5y - 6z + 34 = 0, 6x - 2y - z - 9 = 0,$
 $\mathbf{q} : 2x + y - z = 0, x - 3y + 2z - 14 = 0.$

Riešenie: a) Rovnobežky; b) totožné priamky; c) mimobežky; d) rôznobežky.

Úloha 1.35. Určte vzájomnú polohu priamky \mathbf{p} a roviny ϱ , ak

- a) $\mathbf{p} : x + 4y + 4z + 9 = 0, 2x - 4y - z + 3 = 0,$
 $\varrho : 6x - 4y + 3z - 12 = 0$;
 b) $\mathbf{p} : x = 3 + 2t, y = -2 - 2t, z = 1 - 3t,$
 $\varrho : 2x - y - 2z - 6 = 0$;
 c) $\mathbf{p} : x + y + z - 7 = 0, 3x - y + z - 1 = 0,$
 $\varrho : 2x + y - 4z + 2 = 0$;
 d) $\mathbf{p} : x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = t,$
 $\varrho : x = 2 + t, y = 4 - 2t + 10s, z = 1 + s.$

Riešenie: a) $\mathbf{p} \parallel \varrho$; b) $\mathbf{p} \subset \varrho$; c) $\mathbf{p} \cap \varrho = \{[1, 4, 2]\}$; d) $\mathbf{p} \cap \varrho = \{[5, 8, 2]\}$.

Úloha 1.36. Napíšte všeobecné rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $M = [2, -4, -1]$ a stredom úsečky vyŕatej na priamke $3x + 4y + 5z - 26 = 0$, $3x - 3y - 2z - 5 = 0$ rovinami $5x + 3y - 4z + 11 = 0$, $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

Riešenie: $x - y + z - 5 = 0$, $5x + y - 5z - 11 = 0$.

Úloha 1.37. Napíšte rovnicu roviny určenej dvoma rovnobežkami \mathbf{p} , \mathbf{q} , ak

- a) $\mathbf{p} : 4x + 6y + 7z + 4 = 0$, $8x - 2y + 5z = 0$,
 $\mathbf{q} : 3x + y + 3z + 7 = 0$, $5x - 3y + 2z + 5 = 0$;
 b) $\mathbf{p} : x = 2 + 4t$, $y = -5 + t$, $z = 5 + t$,
 $\mathbf{q} : x - 3y - z - 5 = 0$, $y - z + 3 = 0$.

Riešenie: a) $2x - 4y - z - 2 = 0$; b) $x - 2y - 2z - 2 = 0$.

Úloha 1.38. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $M = [5, 3, 2]$ a priamkou $x - 3y - 4z - 4 = 0$, $x + 2y + 6z - 7 = 0$.

Riešenie: $2x - y + 2z - 11 = 0$.

Úloha 1.39. Napíšte rovnicu roviny, v ktorej ležia priamky $3x + 2y - z + 1 = 0$, $x + y - 3z + 3 = 0$ a $5x + y + 4z - 3 = 0$, $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Riešenie: $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Úloha 1.40. Napíšte rovnicu pričky mimobežiek \mathbf{p} , \mathbf{q} , ktorá má smerový vektor \vec{w} , ak

- a) $\mathbf{p} : x = 2 + 3t$, $y = -5 - 2t$, $z = 3 - t$,
 $\mathbf{q} : x = 5 + 2s$, $y = -3 + 3s$, $z = 2 - 5s$, $\vec{w} = (3, 2, -1)$;
 b) $\mathbf{p} : x = 4 + t$, $y = 6 + 2t$, $z = -1 - 2t$,
 $\mathbf{q} : x = 3 + 2s$, $y = 5 + 2s$, $z = -1 + s$, $\vec{w} = (2, 3, -1)$;
 c) $\mathbf{p} : x = 7 + 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + t$,
 $\mathbf{q} : x = 3 + s$, $y = 6 + 2s$, $z = 8 - 3s$, $\vec{w} = (5, -7, 1)$;
 d) $\mathbf{p} : x - y - 1 = 0$, $x + y - z + 1 = 0$,
 $\mathbf{q} : x = 3 + 3s$, $y = 3$, $z = 2 + s$, $\vec{w} = (3, -4, 0)$;
 e) $\mathbf{p} : z - 1 = 0$, $x - 2y + z - 2 = 0$,
 $\mathbf{q} : y - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 3 = 0$, $\vec{w} = (1, 0, 2)$.

Riešenie: a) Nech prička požadovaných vlastností je určená bodmi $P \in \mathbf{p}$ a $Q \in \mathbf{q}$, ktorých súradnice sú $P = [2 + 3t, -5 - 2t, 3 - t]$, $Q = [5 + 2s, -3 + 3s, 2 - 5s]$. Pre pričku rovnobežnú s vektorom \vec{w} platí: $(Q - P) = k \cdot \vec{w}$. Riešením tejto vektorovej rovnice dostaneme $t = s = 0$, t.j. prička je určená bodmi $P = [2, -5, 3]$, $Q = [5, -3, 2]$ a jej rovnice sú $x = 2 + 3t$, $y = -5 + 2t$, $z = 3 - t$;

b) Priechka požadovaných vlastností neexistuje, nakoľko priamky \mathbf{p} , \mathbf{q} a vektor \vec{w} sú rovnobežné s jednou rovinou;

c) $x = 5 + 5t$, $y = 10 - 7t$, $z = 2 + t$;

d) $x = 3t$, $y = -1 - 4t$, $z = 0$;

e) $y - 2 = 0$, $2x - y - z - 7 = 0$.

Úloha 1.41. Napíšte rovnicu priechky mimobežiek \mathbf{p} , \mathbf{q} , ktorá prechádza bodom M , ak

a) $\mathbf{p} : x = -1 + 3t$, $y = -3 - 2t$, $z = 4 - t$,
 $\mathbf{q} : x = 3 + 2t$, $y = -6 + 3t$, $z = -3 - 5t$, $M = [2, -5, 3]$;

b) $\mathbf{p} : x = 3 + t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1 - 2t$,
 $\mathbf{q} : x = 1 + 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = -2 + t$, $M = [1, 1, 2]$;

c) $\mathbf{p} : x + 3z - 5 = 0$, $x + y + z + 2 = 0$,
 $\mathbf{q} : x = 2 + 2t$, $y = -1 + 3t$, $z = 1 - 5t$, $M = [-4, -5, 3]$;

d) $\mathbf{p} : x = 2 + 3t$, $y = -5 - 2t$, $z = 3 - t$,
 $\mathbf{q} : x = 5 + 2t$, $y = -3 + 3t$, $z = 2 - 5t$, $M = [-1, -7, 4]$;

e) $\mathbf{p} : z - 1 = 0$, $x - 2y + z - 2 = 0$,
 $\mathbf{q} : y - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 3 = 0$, $M = [2, 2, 1]$.

Riešenie: a) Bod M leží na priamke \mathbf{p} . Potom hľadaná priechka je určená týmto bodom a ľubovoľným bodom na priamke \mathbf{q} . Rovnice priechok budú v tvare: $x = 2 + (1 + 2a)t$, $y = -5 + (-1 + 3a)t$, $z = 3 + (-6 - 5a)t$, kde $a \in \mathbf{R}$;

b) $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 2 - t$;

c) $x = -4 + 3t$, $y = -5 + 2t$, $z = 3 - t$;

d) Ak priechka \mathbf{r} požadovaných vlastností existuje, tak platí: $M \in \mathbf{r}$ a pretína priamku \mathbf{p} , t.j. leží v rovine určenej priamkou \mathbf{p} a bodom M . Analogicky dostaneme, že priechka \mathbf{r} leží v rovine, ktorá je určená priamkou \mathbf{q} a bodom M . Potom hľadaná priechka je priesečnicou týchto rovín. Všeobecné rovnice priechky sú: $x + 3z - 11 = 0$, $7x - 13y - 5z - 64 = 0$;

e) $y - 2 = 0$, $z - 1 = 0$.

Úloha 1.42. Napíšte rovnicu priechky priamok $\mathbf{p} \equiv \{[3, 1, 2]; (1, 1, 1)\}$, $\mathbf{q} \equiv \{[-1, 2, 3]; (-3, 2, 1)\}$, ležiacu v rovine $\varrho \equiv \{[-6, 4, 3]; (4, 0, 2), (1, -1, -1)\}$.

Riešenie: $X = [2, 0, 1] + t(-6, 4, 3)$.

Úloha 1.43. Napíšte všeobecné rovnice priamok, ktoré sú rovnobežné s rovinou $x + y + z - 1 = 0$ a pretínajú priamky $x + y - z + 2 = 0$, $x - 2y - z + 5 = 0$ a $x - y - z - 12 = 0$, $x + y - z = 0$.

Riešenie: $y - 1 = 0$, $x + y + z - (1 + \alpha) = 0$, kde α je ľubovoľné číslo.

Úloha 1.44. Napíšte rovnice priamok, ktoré pretínajú tri priamky: $x = 0$, $z = 0$; $y = 2$, $z = 1$ a $x = -1$, $y = 1$.

Riešenie: $\alpha(y - 2) + z - 1 = 0$, $(\alpha + 1)x + z = 0$, kde α je ľubovoľné číslo.

Úloha 1.45. Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej priesečníkom priamok $4x + 7y - 15 = 0$, $9x - 14y - 4 = 0$ a

a) bodom $M = [2, -1]$;

b) rovnobežnú s priamkou $\mathbf{p} : 2x - 3y - 9 = 0$.

Riešenie: a) Hľadaná priamka bude mať rovnicu

$$\alpha(4x + 7y - 15) + \beta(9x - 14y - 4) = 0.$$

Keď dosadíme súradnice bodu M do tejto rovnice dostaneme $\alpha - 2\beta = 0$. Ak položíme $\beta = 1$, potom $\alpha = 2$ a hľadaná priamka má rovnicu $x - 2 = 0$.

b) Hľadaná priamka bude mať rovnicu

$$(4\alpha + 9\beta)x + (7\alpha - 14\beta)y - 15\alpha - 4\beta = 0$$

Ak táto priamka má byť rovnobežná s priamkou \mathbf{p} , tak ich normálové vektory sú lineárne závislé, t.j. platí $4\alpha + 9\beta = 2k$, $7\alpha - 14\beta = -3k$. Odtiaľ pre hodnoty α a β dostávame rovnicu $26\alpha - \beta = 0$. Ak položíme $\alpha = 1$, potom $\beta = 26$ a hľadaná priamka má rovnicu $2x - 3y + 1 = 0$.

Úloha 1.46. Sú dané rovnice priamok $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$, na ktorých ležia strany trojuholníka ABC . Napíšte rovnice priamok, na ktorých ležia výšky tohto trojuholníka (bez určenia súradníc jeho vrcholov).

Riešenie: $4x - 5y + 22 = 0$, $4x + y - 18 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

Úloha 1.47. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza spoločným bodom priamok $x + 2y + 3 = 0$, $5x - 3y - 11 = 0$ a na súradnicových osiach vytína úseky rovnakej dĺžky.

Riešenie: Rovnica hľadanej priamky má tvar $\alpha(x + 2y + 3) + \beta(5x - 3y - 11) = 0$, po úprave

$$(\alpha + 5\beta)x + (2\alpha - 3\beta)y + 3\alpha - 11\beta = 0.$$

Ak hľadaná priamka má vytínať na súradnicových osiach rovnako veľké úseky, tak z hľadiska jej polohy rozlíšime nasledujúce tri prípady:

(i) Normálový vektor priamky má smer $(1, 1)$. Potom platí $\alpha + 5\beta = 2\alpha - 3\beta$, t.j. $\alpha = 8\beta$. Ak položíme $\beta = 1$, potom $\alpha = 8$ a hľadaná priamka má rovnicu $x + y + 1 = 0$.

(ii) Normálový vektor je $(1, -1)$. Potom platí $\alpha + 5\beta = -(2\alpha - 3\beta)$, t.j. $3\alpha + 2\beta = 0$. Ak položíme $\alpha = 2$, potom $\beta = -3$ a rovnica hľadanej priamky je $x - y - 3 = 0$.

(iii) Hľadaná priamka prechádza priesečníkom súradnicových osí. Potom absolútny člen v rovnici priamky je rovný nule, t.j. $3\alpha - 11\beta = 0$. Ak položíme $\alpha = 11$, potom $\beta = 3$ a rovnica priamky je $2x + y = 0$.

Úloha 1.48. Rovnica zväzku priamok je $\alpha(x - 4y - 6) + \beta(8x - 19y + 4) = 0$. Napíšte rovnicu priamky patriacej danému zväzku, ktorá

- vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky;
- má od bodu $M = [6, 9]$ vzdialenosť $d = 5$.

Riešenie: a) $x + y + 14 = 0$, $x - y + 6 = 0$, $2x - 3y = 0$; b) $4x - 3y + 28 = 0$.

Úloha 1.49. Napíšte rovnicu roviny, ktorá obsahuje bod $M = [1, 2, 3]$ a prechádza priesečnicou rovín $3x + y - z = 0$, $2x + y + z - 1 = 0$.

Riešenie: Hľadaná rovina patrí zväzku rovín, ktorý je určený danými rovinami, preto má rovnicu $\lambda_1(3x + y - z) + \lambda_2(2x + y + z - 1) = 0$. Bod M leží v jednej z rovín zväzku, preto dosadením súradníc bodu do rovnice zväzku dostaneme $\lambda_1(3+2-3) + \lambda_2(2+2+3-1) = 0$, t.j. $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$. Ak si zvolíme $\lambda_1 = 3$, tak $\lambda_2 = -1$ a dosadením do rovnice zväzku dostaneme rovinu $7x + 2y - 4z + 1 = 0$.

Úloha 1.50. Určte, pre ktoré hodnoty čísel a, b rovina $5x + ay + 4z + b = 0$ patrí zväzku rovín určeného rovinami $3x - 7y + z - 3 = 0$, $x - 9y - 2z + 5 = 0$.

Riešenie: $a = -5$, $b = -11$.

Úloha 1.51. Vo zväzku rovín s osou $2x - 3y + z - 5 = 0$, $4x + 6y - z + 8 = 0$ určte rovinu

- kolmú na rovinu $x + 2y - 3z + 7 = 0$;
- kolmú na priamku $x - 2y + 3z = 0$, $-4x + y + z + 5 = 0$;
- rovnobežnú s rovinou $2x + 9y - 2z + 5 = 0$;
- rovnobežnú s priamkou $x - 2y + 3z = 0$, $-4x + y + z + 5 = 0$.

Riešenie: a) $22x - 5y + 4z - 13 = 0$; b) vo zväzku rovín neexistuje rovina kolmá na danú priamku; c) $2x + 9y - 2z + 13 = 0$; d) $270x - 141y + 69z - 279 = 0$.

Úloha 1.52. Vo zväzku rovín určeného rovinami $3x + y - z - 4 = 0$, $x - 2y + 4z - 2 = 0$ určte dve navzájom kolmé roviny, z ktorých jedna prechádza bodom $M = [2, -3, 4]$.

Riešenie: $71x + 12y - 2z - 98 = 0$, $-110x + 493y - 947z + 298 = 0$.

Úloha 1.53. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priesečnicou dvoch rovín $4x + y + z - 2 = 0$, $x + 3z - 4 = 0$ a vytína na súradnicových osiach \mathbf{o}_x a \mathbf{o}_y úseky rovnakej dĺžky .

Riešenie: $x + y - 8z + 10 = 0$.

Úloha 1.54. Vo zväzku rovín $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ určte rovinu, ktorá prechádza bodom $M = [1, -2, 3]$.

Riešenie: $2x + 15y + 7z + 7 = 0$.

Úloha 1.55. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priesečnicou rovín $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$ a je rovnobežná s osou \mathbf{o}_x (resp. \mathbf{o}_y , \mathbf{o}_z).

Riešenie: $y + z - 18 = 0$ (resp. $x + z - 3 = 0$, $x - y + 15 = 0$).

Úloha 1.56. Zistite, či dané tri roviny priestoru tvoria zväzok alebo trs rovín:

- $3x - y + z + 1 = 0$, $y - z + 6 = 0$, $x - 3y + 5z = 0$;
- $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$;
- $x - y + 6z + 3 = 0$, $2x - 3y - z + 1 = 0$, $-3x + 2y - 31z - 14 = 0$;
- $x - 2y + z = 0$, $2x + y + 3z - 1 = 0$, $5x + 3z - 4 = 0$.

Riešenie: a), d) trs rovín - roviny prechádzajúce jedným bodom;

b) trs rovín - roviny sú rovnobežné s jedným smerom;

c) zväzok rovín.

Úloha 1.57. Napíšte rovnicu roviny, ktorá patrí trsu rovín určeného rovinami $2x - y + z + 1 = 0$, $x + y = 0$, $y + 2z = 0$ a prechádza bodmi $M = [1, 1, 1]$, $N = [0, 0, 1]$.

Riešenie: Rovnica trsu rovín je $\lambda_1(2x - y + z + 1) + \lambda_2(x + y) + \lambda_3(y + 2z) = 0$. Hľadaná rovina trsu má prechádzať bodmi M, N , teda platí $3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Ak zvolíme $\lambda_1 = 1$, potom $\lambda_3 = -1$ a $\lambda_2 = 0$. Dosadením do rovnice trsu dostaneme rovinu $2x - 2y - z + 1 = 0$.

Úloha 1.58. Napíšte rovnicu roviny, ktorá patrí trsu rovín určeného rovinami $x - 2y + z = 0$, $2x + y + 3z - 1 = 0$, $5x + 3z - 4 = 0$ a prechádza priamkou $x = 2t - 1$, $y = t$, $z = 1 + 3t$.

Riešenie: $8x - 31y + 5z + 3 = 0$.

Úloha 1.59. Napíšte rovnicu roviny, ktorá patrí trsu rovín určeného rovinami $x + y - z - 3 = 0$, $-2x + 3y - 7z - 10 = 0$, $6x - 5y - 4z = 0$ a je

- rovnobežná s rovinou $x - y + 3z - 4 = 0$;
- kolmá na priamku $x - 2z + 5 = 0$, $x + 4y + 5z - 8 = 0$.

Riešenie: a) $x - y + 3z + \frac{337}{89} = 0$ b) $13x - 2y - z - \frac{489}{89}$.

Úloha 1.60. Určte, pre aké hodnoty parametrov b, c rovina $x + by + cz + 1 = 0$ patrí do trsu rovín určeného rovinami $3x + y - z + 4 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$, $3x + y + z + 3 = 0$ a je rôzna od každej z týchto rovín.

Riešenie: $b = c$.

Úloha 1.61. Určte súradnice c_1, c_3 bodu $C = [c_1, 0, c_3]$, ktorý leží v rovine obsahujúcej body $A = [0, 0, 0]$, $B = [5, 0, 3]$, ak táto rovina patrí do trsu rovín určeného rovinami $x + y = 0$, $x + z = 1$, $y + z = 3$.

Riešenie: $3c_1 - 5c_3 = 0$.

Úloha 1.62. Napíšte rovnicu roviny, ktorá patrí do trsu rovín $x - y = 0$, $x + y - 2z + 1 = 0$, $2x + z - 4 = 0$ a prechádza súradnicovou osou \mathbf{o}_y .

Riešenie: $10x - 7z = 0$.

1.1.2 Euklidovský priestor

Pod n -rozmerným euklidovským priestorom \mathbb{E}_n rozumieme n -rozmerný afinný priestor, v ktorého vektorovom zameraní \mathbf{V}_n je definovaný skalárny súčin (ako zobrazenie $\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$, pričom $[x, y] \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y}$).

Veľkosť (norma) vektoru \vec{x} je definovaná vzťahom

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

Dva nenulové vektory sú *ortogonálne* (kolmé) práve vtedy, keď ich skalárny súčin je rovný nule. *Ortogonálnym priemetom* vektoru \vec{x} do vektora \vec{u} rozumieme vektor \vec{x}_0 , pre ktorý platí

(i) \vec{x}_0, \vec{u} sú lineárne závislé;

(ii) $(\vec{x} - \vec{x}_0) \perp \vec{u}$.

Odchýlku (veľkosť uhla) nenulových vektorov \vec{x} a \vec{y} určíme pomocou vzťahu

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \quad \text{resp.} \quad \varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}, \quad \text{kde } 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Pre skalárny súčin dvoch vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v pravouhlom súradnicovom systéme platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v}$ dvoch vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v pravouhlom pravotočivom súradnicovom systéme je vektor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Vonkajší súčin $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ v pravouhlom pravotočivom súradnicovom systéme je daný vzťahom

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Pod vzdialenosťou dvoch bodov $A = [a_i]$, $B = [b_i]$ euklidovského priestoru \mathbb{E}_n , resp. dĺžkou úsečky AB , rozumieme dĺžku vektora $\vec{AB} = B - A$:

$$d(A, B) = |AB| = \|B - A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

Úloha 1.63. Pre vektory \vec{a} , \vec{b} platí $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$ a ich odchýlka je $\frac{2}{3}\pi$. Vypočítajte

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad \text{b) } \vec{a}^2, \vec{b}^2; \quad \text{c) } (\vec{a} - \vec{b})^2; \quad \text{d) } (3\vec{a} + 2\vec{b})^2.$$

Riešenie: . a) -6; b) 9, 16; c) 37; d) 73.

Úloha 1.64. Vypočítajte skalárny súčin, veľkosti a odchýlku vektorov \vec{a} , \vec{b} , ak viete, že

$$\text{a) } \vec{a} = (8, 4, 1), \vec{b} = (2, -2, 1); \quad \text{b) } \vec{a} = (2, 5, 1), \vec{b} = (3, -2, 4).$$

Riešenie: a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{85}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{9}$, $\varphi = 83^\circ 55'$;

$$\text{b) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{30}, \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{29}, \quad \varphi = 90^\circ.$$

Úloha 1.65. Určte, pre akú hodnotu parametra α sú vektory $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ ortogonálne, ak $\|a\| = 3$, $\|b\| = 5$.

Riešenie: $\alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Úloha 1.66. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka s vrcholmi $A = [6, -4, 6]$, $B = [-1, -4, 5]$, $C = [2, -4, 9]$.

Riešenie: $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

Úloha 1.67. Zistite, či štvoruholník s vrcholmi $K = [5, 2, 6]$, $L = [6, 4, 4]$, $M = [4, 3, 2]$, $N = [3, 1, 4]$ je štvorec.

Riešenie: Štvoruholník je štvorec.

Úloha 1.68. Vektor \vec{x} je kolmý na vektory $\vec{a} = (3, 2, 2)$, $\vec{b} = (18, -22, -5)$ a s osou \mathbf{o}_y zvierá tupý uhol. Vypočítajte jeho súradnice, ak $\|\vec{x}\| = 14$.

Riešenie: $\vec{x} = (-4, -6, 12)$.

Úloha 1.69. Dané sú vektory $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (2, 4, -2)$. Vypočítajte

- jednotkový vektor \vec{c} kolmý na vektory \vec{a} , \vec{b} ;
- sínus veľkosti uhla vektorov \vec{a} , \vec{b} .

Riešenie: a) Vektor kolmý na vektory \vec{a} , \vec{b} je ich vektorovým súčinom. Jednotkový vektor \vec{c} dostaneme ak výsledný súčin delíme veľkosťou vektora, t.j. platí

$$\vec{c} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \pm \frac{(0, 8, 6)}{\sqrt{320}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$$

b) Platí $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$. Odtiaľ $\sin \varphi = \sqrt{20/21}$.

Úloha 1.70. Dokážte, že ak pre vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} platí $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, tak $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

Úloha 1.71. Vektor \vec{c} je kolmý na vektory \vec{a} , \vec{b} , ktorých odchýlka je 30° . Vypočítajte absolútnu hodnotu vonkajšieho súčinu $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ týchto vektorov, ak $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 3$.

Riešenie: $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = 27$.

Úloha 1.72. Zistite, či vektory \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sú komplanárne, ak

- $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (1, 9, -11)$;
- $\vec{u} = (3, -2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2)$, $\vec{w} = (3, -1, -2)$.

Riešenie: Nutná a postačujúca podmienka, aby tri vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ boli komplanárne, je $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

a) Komplanárne vektory, b) nekomplanárne vektory.

Úloha 1.73. Zistite, či vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú smerové vektory jednej roviny:

a) $\vec{a} = (3, 5, -2), \vec{b} = (2, -2, -1), \vec{c} = (-4, 4, 2);$

b) $\vec{a} = (5, 10, 5), \vec{b} = (-1, -2, -1), \vec{c} = (3, -7, 2).$

Riešenie: a) áno; b) áno.

Úloha 1.74. Na osi \mathbf{o}_x určte taký bod M , aby vektory $(M - A)$ a $(M - B)$ boli navzájom kolmé, ak

a) $A = [0, 1], B = [5, 6];$

b) $A = [0, 1, 3], B = [-5, 3, -3].$

Riešenie: a) $M = [2, 0], M' = [3, 0];$ b) $M = [-6, 0, 0], M' = [1, 0, 0].$

Úloha 1.75. Použitím skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $(L - A)$, ak L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, $\|(B - A)\| = 5$, $\|(C - B)\| = 6$ a odchýlka vektorov $(D - A), (B - A)$ je $\frac{\pi}{3}$.

Riešenie: $\sqrt{19}$.

Úloha 1.76. Vypočítajte súradnice bodu M súmerného k bodu $N = [8, -3]$ vzhľadom na priamku, ktorá prechádza bodmi $A = [8, -5]$ a $B = [6, -7]$.

Riešenie: $M = [10, -5].$

Úloha 1.77. Na osi \mathbf{o}_x určte taký bod P , ktorého súčet vzdialeností od bodov $M = [1, 2]$ a $N = [3, 4]$ je najmenší.

Riešenie: $P = [\frac{5}{3}, 0].$

Úloha 1.78. Na priamke $3x - y - 1 = 0$ určte taký bod Q , pre ktorý je rozdiel vzdialeností od bodov $A = [4, 1]$ a $B = [0, 4]$ najväčší.

Riešenie: $Q = [2, 5].$

Úloha 1.79. Svetelný lúč sa šíri po priamke $\mathbf{p} : x + 3y + 1 = 0$. Pri dopade na priamku $\mathbf{q} : 3x + 4y + 5 = 0$ sa lúč odráža. Napíšte rovnicu priamky, po ktorej sa šíri odrazený lúč.

Riešenie: $13x + 9y + 25 = 0.$

Úloha 1.80. Jedna strana pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC leží na priamke s parametrickým vyjadrením $x = -6 + 4t$, $y = -7 + 3t$. Druhá strana trojuholníka leží na priamke $x = -7 - 3s$, $y = 11 + 4s$. Vrchol B má súradnice $[6, 2]$. Určte súradnice zostávajúcich vrcholov uvažovaného trojuholníka.

Riešenie: $A = [2, -1]$, $C_1 = [-1, 3]$, $C_2 = [5, -5]$, pravý uhol je pri vrchole A .

Úloha 1.81. Vypočítajte súradnice stredu S a polomer r kružnice vpísanej do trojuholníka ABC , ak $A = [-8, -5]$, $B = [6, -5]$, $C = [-3, 7]$.

Riešenie: $S = [-2, -1]$, $r = 4$.

Úloha 1.82. Sú dané body $A = [-2, 2]$, $B = [6, 8]$. Bodom A veďte priamku \mathbf{p} a bodom B priamku \mathbf{q} tak, aby priamky \mathbf{p} , \mathbf{q} boli navzájom kolmé a aby ich priesečník ležal na osi \mathbf{o}_x .

Riešenie: $\mathbf{p}: x + 2y - 2 = 0$, $\mathbf{q}: 2x - y - 4 = 0$.

Úloha 1.83. Napíšte rovnice priamok, na ktorých ležia strany a uhlopriečky štvorca $ABCD$, ak

- $D = [1, 1]$ a jedna jeho uhlopriečka leží na priamke $7x - y - 31 = 0$;
- $B = [1, 4]$ a $D = [8, 3]$;
- bod $S = [3, 2]$ je stredom štvorca a jeho jedna strana leží na priamke $x - 2y + 16 = 0$.

Riešenie: a) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$, $3x - 4y - 24 = 0$, $4x + 3y + 32 = 0$,
 $7x - y - 31 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$;

b) $3x - 4y + 13 = 0$, $4x + 3y - 16 = 0$, $3x - 4y - 12 = 0$, $4x + 3y - 41 = 0$,
 $7x - y - 28 = 0$, $x + 7y - 29 = 0$;

c) $2x + y + 7 = 0$, $x - 2y - 14 = 0$, $2x + y - 23 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$,
 $3x - y - 7 = 0$.

Úloha 1.84. Na priamke $4x - y - 6 = 0$ určte bod M , ktorý je rovnako vzdialený od bodov $A = [0, 10]$, $B = [7, 9]$.

Riešenie: Geometrické miesto bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov A a B je os úsečky AB , ktorej rovnica je $7x - y - 15 = 0$. Prienikom tejto osi s danou priamkou je hľadaný bod M , ktorého súradnice sú $[3, 6]$.

Úloha 1.85. Napíšte rovnice osí uhlov, ktorých ramená sú na priamkach

- $x - 3y + 3 = 0$, $3x - y + 10 = 0$;
- $x = 3 - 4t$, $y = 10 + 5t$, $4x - 5y + 10 = 0$.

Riešenie: a) $4x - 4y + 13 = 0$, $2x + 2y + 7 = 0$;

b) $9x - y - 45 = 0$, $x + 9y - 65 = 0$.

Úloha 1.86. Určte parametre a, b tak, aby rovina $ax + by + 3z - 5 = 0$ bola kolmá na priamku $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$.

Riešenie: $a = -3$, $b = \frac{9}{2}$.

Úloha 1.87. Určte, pre aké hodnoty parametra c sú roviny navzájom kolmé:

a) $3x - 5y + cz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

b) $7x - 2y - z = 0$, $cx + y - 3z - 1 = 0$.

Riešenie: a) $c = 6$; b) $c = -\frac{1}{7}$.

Úloha 1.88. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy a je kolmá na roviny $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

Riešenie: $7x - y - 5z = 0$.

Úloha 1.89. Napíšte rovnicu roviny, ktorá vytína na osi \mathbf{o}_y úsek $q = 2$ a

a) je kolmá na vektor $\vec{n} = (3, -4, -1)$;

b) je kolmá na rovinu $2x - y - z - 10 = 0$ a úsek na osi \mathbf{o}_x je $p = 3$.

Riešenie: a) $3x - 4y - z + 8 = 0$; b) $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Úloha 1.90. Dokážte, že existuje kocka $ABCDEFGH$ s vrcholmi $A = [1, -1, 3]$, $B = [3, 0, 5]$, $D = [-1, 1, 4]$ a určte súradnice jej ostatných vrcholov.

Riešenie: $C = [1, 2, 6]$, $E = [0, -3, 5]$, $F = [2, -2, 7]$, $G = [0, 0, 8]$, $H = [-2, -1, 6]$, alebo

$C' = [1, 2, 6]$, $E' = [2, 1, 1]$, $F' = [4, 2, 3]$, $G' = [2, 4, 4]$, $H' = [0, 3, 2]$.

Úloha 1.91. Napíšte súradnice bodu Q súmerného s bodom P vzhľadom na priamku \mathbf{p} , ak

a) $P = [4, 1, 6]$, $\mathbf{p} : x - y - 4z + 12 = 0, 2x + y - 2z + 3 = 0$;

b) $P = [2, -5, 7]$, \mathbf{p} prechádza bodmi $A = [5, 4, 6]$, $B = [-2, -17, -8]$.

Riešenie: a) $Q = [2, -3, 2]$, b) $Q = [4, 1, -3]$.

Úloha 1.92. Napíšte súradnice kolmého priemetu bodu $P = [5, 2, -1]$ do roviny $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Riešenie: $P_0 = [1, 4, -7]$.

Úloha 1.93. Napíšte súradnice kolmého priemetu bodu $A = [11, 17, -9]$ do roviny

a) $\varrho : 5x + 8y - 6z + 5 = 0;$

b) $\sigma : X = [3, 1, 0] + t(-2, 1, 3) + s(0, -2, -1).$

Riešenie: a) $A_0 = [1, 1, 3],$ b) $A_0 = [\frac{127}{9}, \frac{709}{45}, -\frac{293}{45}].$

Úloha 1.94. Určte súradnice bodu Q súmerného s bodom $P = [1, 3, -4]$ vzhľadom na rovinu $3x + y - 2z = 0.$

Riešenie: $Q = [-5, 1, 0].$

Úloha 1.95. V súradnicovej rovine R_{xy} nájdite taký bod P , pre ktorý súčet jeho vzdialeností od bodov $A = [-1, 2, 5], B = [11, -16, 10]$ je najmenší.

Riešenie: Pretože body A, B ležia v jednom polpriestore s hraničnou rovinou R_{xy} , stačí určiť bod súmerný s jedným z týchto bodov podľa súradnicovej roviny (napr. bod B' súmerný s bodom B). Hľadaný bod bude priesečníkom roviny R_{xy} s priamkou prechádzajúcou bodmi A, B' . Výsledok: $P = [3, -4, 0].$

Úloha 1.96. Svetelný lúč vychádzajúci z bodového zdroja P sa odráža od rovinného rozhrania a po odraze dopadá do bodu M . Určte súradnice bodu odrazu N , ak vo zvolenej sústave súradníc v priestore má bod P súradnice $[0, 0, 0]$, bod M súradnice $[1, -2, 2]$ a rovinné rozhranie je určené rovnicou $x - y - 4z - 13 = 0.$

Riešenie: $N = [\frac{39}{31}, -\frac{52}{31}, -\frac{78}{31}].$

Úloha 1.97. Napíšte rovnicu kolmého priemetu priamky \mathbf{p} do roviny ϱ , ak

a) $\mathbf{p} : x = 3 - 5s, y = 4 + 6s, z = 6 + 8s, \varrho = R_{xy};$

b) $\mathbf{p} : 2x + 2y - 3z = 0, x - 3y - 2z + 5 = 0, \varrho : 3x + y + 2z + 3 = 0;$

c) $\mathbf{p} : x = 2 + 7t, y = -1 - 4t, z = 1 - 6t, \varrho : x - 2y - z + 8 = 0.$

Riešenie: a) $x = 3 - 5r, y = 4 + 6r, z = 0;$

b) $x = -1 - 5t, y = -17t, z = t;$

c) $x - 2y - z + 8 = 0, 8x - y + 10z - 18 = 0.$

Úloha 1.98. Priamka \mathbf{q} je daná ako priesečnica dvoch rovín $x - 3y + 2z + 4 = 0, 2x + y - 3z - 6 = 0.$ Napíšte rovnice kolmých priemetov priamky \mathbf{q} do súradnicových rovín R_{xz} a $R_{yz}.$

Riešenie: $x = s, y = 0, z = -2 + s; x = 0, x + y - z - 2 = 0.$

Úloha 1.99. Napíšte všeobecné rovnice priamky, ktorá je kolmá na dvojicu priamok $x = 0$, $y + 2z + 1 = 0$ a $y + 4z - 4 = 0$, $4x - y - 4 = 0$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.

Riešenie: $x + z = 0$, $x - 2y - 2z = 0$.

Úloha 1.100. Určte vrcholy trojuholníka $A'B'C'$, ktorý je súmerne združený s trojuholníkom ABC podľa roviny $3x + 2y - 6 = 0$, pričom $A = [3, 0, 5]$, $B = [-1, 3, 0]$, $C = [0, 4, 0]$.

Riešenie: $A' = [\frac{21}{13}, -\frac{12}{13}, 5]$, $B' = [\frac{5}{13}, \frac{51}{13}, 0]$, $C' = [-\frac{12}{13}, \frac{44}{13}, 0]$.

Úloha 1.101. Napíšte súradnice kolmého priemetu bodu

a) $P = [22, 3, -4]$ do priamky určenej bodom $A = [8, 0, -3]$ a vektorom $\vec{u} = (2, 5, -4)$;

b) $Q = [8, -3, 10]$ do priamky $2x - 5y - z - 21 = 0$, $4x + 3y - 6z + 37 = 0$.

Úloha 1.102. Bodom $A = [2, 3, 1]$ veďte priamku, ktorá je kolmá na priamku $\mathbf{p} \equiv \{A = [-1, 0, 2]; \vec{u} = (2, -1, 3)\}$ a má s ňou spoločný práve jeden bod.

Úloha 1.103. Napíšte rovnice osi dvoch mimobežných priamok \mathbf{p} , \mathbf{q} , ak

a) $\mathbf{p} : x - 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $\mathbf{q} : x = 0$, $z - 1 = 0$;

b) $\mathbf{p} : x - y - 11 = 0$, $2y + 3z + 2 = 0$, $\mathbf{q} : x + y + 11 = 0$, $2x + z + 32 = 0$.

Riešenie: a) Os dvojice mimobežných priamok je ich priečka kolmá na obe priamky, t.j. jej smer je kolmý na smerové vektory priamok \mathbf{p} , \mathbf{q} (kde $\vec{u}_p = (0, 0, 1)$, $\vec{u}_q = (1, 0, 0)$). Smer osi je $\vec{v} = \vec{u}_p \times \vec{u}_q = (1, 0, 0)$. Bod osi dostaneme ako priesečník jednej z priamok (napr. \mathbf{q}) s rovinou ρ určenou druhou priamkou (napr. \mathbf{p}) a smerom \vec{v} . Rovina ρ má rovnicu $y - 1 = 0$ a jej priesečník s priamkou \mathbf{q} je $[0, 1, 1]$. Hľadaná os je $x = t, y = 1, z = 1$;

b) $x = -12 + 4t$, $y = 1 - 2t$, $z = -8 + 3t$.

1.1.3 Vzdialenosti a odchýlky euklidovských podpriestorov

Pod *vzdialenosťou* dvoch geometrických útvarov $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathbb{E}_n$, ($\mathcal{F}, \mathcal{G} \neq \emptyset$) rozumíme infimum množiny všetkých čísel $d(X, Y) = |XY|$, kde $X \in \mathcal{F}$ a $Y \in \mathcal{G}$.

Nech \mathbf{E}_r , \mathbf{E}_s sú dva navzájom disjunktné podpriestory euklidovského priestoru \mathbb{E}_n . Potom existujú body $A \in \mathbf{E}_r$ a $B \in \mathbf{E}_s$ tak, že priamka AB je kolmá na oba podpriestory. *Vzdialenosť podpriestorov* \mathbf{E}_r , \mathbf{E}_s je rovná veľkosti úsečky AB . V prípade mimobežných podpriestorov, priečku kolmú na oba

podpriestory nazývame *osou mimobežných podpriestorov*. Vzdialenosť mimo-bežných podpriestorov potom určíme ako veľkosť úsečky, ktorej krajné body sú priesečníkmi podpriestorov s ich osou.

Ak v pravouhlom súradnicovom systéme roviny \mathbb{E}_2 je daná priamka \mathbf{p} rovnicou $ax + by + c = 0$ a bod M má súradnice $[m_1, m_2]$, tak platí

$$d(M, \mathbf{p}) = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vzdialenosť bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\varrho : ax + by + cz + d = 0$ v euklidovskom priestore \mathbb{E}_3 je daná vzťahom

$$d(M, \varrho) = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Nech $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s$ sú podpriestory euklidovského priestoru \mathbb{E}_n , ktorých zamerania sú vektorové priestory $\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_s$. *Odchýlkou (veľkosťou uhla)* podpriestorov $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s$ rozumieme odchýlku ich zameraní $\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_s$.

Odchýlkou jednorozmerných vektorových podpriestorov $\langle \vec{u} \rangle$ a $\langle \vec{v} \rangle$ nazývame číslo $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pre ktoré

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Teda *odchýlkou dvoch priamok* rozumieme menší z dvoch uhlov $\varphi, \pi - \varphi$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory zo zameraní oboch priamok (t.j. uhol ich smerových vektorov).

Pre uhol φ dvoch priamok priestoru \mathbb{E}_2 , ktoré majú smerové vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, platí

$$\cos \varphi = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Pre uhol φ priamky $\mathbf{p} = \{A = [a_1, a_2, a_3]; \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)\}$ s rovinou ϱ určenou všeobecnou rovnicou $ax + by + cz + d = 0$, platí

$$\sin \varphi = \frac{|au_1 + bu_2 + cu_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Pre uhol φ dvoch rovín, ktoré majú všeobecné rovnice $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ platí

$$\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Úloha 1.104. Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka ABC , ak poznáme súradnice jeho vrcholov $A = [3, 2, -1]$, $B = [4, 5, 7]$, $C = [-1, 1, 3]$.

Riešenie: $|AB| = \sqrt{74}$, $|BC| = \sqrt{57}$, $|AC| = \sqrt{33}$.

Úloha 1.105. Vypočítajte vzdialenosť bodu M od roviny ρ , ak

a) $M = [1, 2, -3]$, $\rho : 2x + 3y - 4z + 5 = 0$;

b) $M = [7, -1, 2]$, $\rho = ABC$, $A = [-5, 0, 0]$, $B = [0, -\frac{5}{2}, 0]$, $C = [0, 0, \frac{5}{2}]$.

Riešenie: a) $\frac{25}{\sqrt{29}}$ b) 2.

Úloha 1.106. Vypočítajte vzdialenosť priamky $\mathbf{p} : x = 2 + 4t$, $y = 4 + 3t$ od priamky s ňou rovnobežnej, ktorá pretína os \mathbf{o}_x v bode $M = [\frac{5}{2}, 0]$.

Riešenie: $d = 3\frac{1}{2}$.

Úloha 1.107. V rovine sú dané body $A = [2, 3]$, $B = [0, -1]$. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A a má od bodu B vzdialenosť $d = 4$.

Riešenie: $y - 3 = 0$, $4x + 2y - 4z - 57 = 0$.

Úloha 1.108. Na priamke $\mathbf{p} : x + y + z - 1 = 0$, $4y - 3z - 2 = 0$ určte body, ktorých vzdialenosť od bodu $M = [1, -1, 2]$ je $d = 5$.

Riešenie: $A = [-3, 2, 2]$, $B = [4, -1, -2]$.

Úloha 1.109. Vypočítajte veľkosť uhla priamok \mathbf{p} , \mathbf{q} , ak ich rovnice sú:

a) $\mathbf{p} : x + 2y - 7 = 0$, $\mathbf{q} : 2x - y + 11 = 0$;

b) $\mathbf{p} : x = 2 - 3t, y = 1 + 4t$, $\mathbf{q} : x = 3 - 4s, y = 8 - s$.

Riešenie: a) $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, b) $\cos \varphi = \frac{8}{5}\sqrt{17}$.

Úloha 1.110. Bod $M = [4, 0]$ leží na priamke, ktorá obsahuje základňu rovno-ramenného trojuholníka ABC . Ramená tohto trojuholníka ležia na priamkach $x - y + 8 = 0$, $x - 2y - 12 = 0$. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží základňa trojuholníka ABC .

Riešenie: $3x - (1 \pm \sqrt{10})y - 12 = 0$.

Úloha 1.111. Dané sú vrcholy trojuholníka $A = [1, -1, 2]$, $B = [5, -6, 2]$, $C = [1, 3, -1]$. Vypočítajte dĺžku jeho výšky na stranu AC .

Riešenie: $v = 5$.

Úloha 1.119. Určte množinu všetkých bodov priestoru, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch navzájom rovnobežných rovín

a) $4x - y - 2z - 3 = 0$, $4x - y - 2z - 5 = 0$;

b) $5x - 3y + z + 3 = 0$, $10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

Riešenie: $4x - y - 2z - 4 = 0$, $20x - 12y + 4z + 13 = 0$.

Úloha 1.120. V súradnicovej rovine R_{xz} nájdite taký bod P , pre ktorý rozdiel jeho vzdialeností od bodov $M = [3, 2, -5]$, $N = [8, -4, -13]$ je najväčší.

Riešenie: $P = [-2, 0, 3]$.

Úloha 1.121. Vypočítajte odchýlku φ priamky $x + y + 3z - 3 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$ s rovinou $x - y + z = 0$.

Riešenie: $\varphi = 0^\circ$.

Úloha 1.122. Vypočítajte odchýlku dvoch protilahlých hrán pravidelného štvorstena.

Riešenie: $\frac{\pi}{2}$.

Úloha 1.123. Vypočítajte súradnice vrcholov štvorstena $ABCD$, ak hrana AC leží na priamke $x = 3 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = -5 - 2t$, hrana BD na priamke $x = 4$, $y = s$, $z = -2 + s$, priamka \mathbf{p} prechádza bodmi C , D a bodom $M = [-8, 12, -18]$, vzdialenosť bodov A , B je $\sqrt{50}$ a odchýlka priamky \mathbf{p} a priamky q obsahujúcej hranu AB je $\frac{\pi}{3}$.

Riešenie: $A = [-3, 2, 1]$, $B = [4, 3, 1]$, $C = [1, 0, -3]$, $D = [0, 0, 8]$, alebo

$$A' = \left[\frac{129}{17}, -\frac{56}{17}, -\frac{163}{17}\right], B' = \left[4, -\frac{29}{17}, -\frac{63}{17}\right], C' = [1, 0, -3], D' = [4, 4, 2].$$

Úloha 1.124. Svetelný lúč vychádza z bodu $M = [5, 4]$, dopadá na os \mathbf{o}_x pod uhlom $\frac{\pi}{3}$, odráža sa od nej a potom dopadá na os \mathbf{o}_y , od nej sa tiež odráža. Určte rovnice priamok, po ktorých prechádza svetelný lúč a súradnice bodov, v ktorých sa lúč odráža od jednotlivých osí.

Riešenie: $\sqrt{3}x - 3y + 12 - 5\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x + y - 12 + 5\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - 3y + 36 - 15\sqrt{3} = 0$;

$$X = [-4\sqrt{3} + 5, 0], Y = [0, 12 - 5\sqrt{3}].$$

Úloha 1.125. V ktorom bode a pod akým uhlom sa odráža svetelný lúč vychádzajúci z bodu $M = [3, -1, 1]$, ak po odraze od roviny $2x - 2y + z = 0$ prechádza bodom $N = [8, 3, 8]$?

Riešenie: Bod odrazu je $[2, 3, 2]$; uhol odrazu: $\frac{1}{4}\pi$.

Úloha 1.126. Vypočítajte odchýlky roviny $\varrho : 2x - 2y + z - 6 = 0$ a súradnicových osí \mathbf{o}_x , \mathbf{o}_y , \mathbf{o}_z .

Riešenie: $\sin \varphi(\varrho, \mathbf{o}_x) = \sin \varphi(\varrho, \mathbf{o}_y) = \frac{2}{3}$; $\sin \varphi(\varrho, \mathbf{o}_z) = \frac{1}{3}$.

Úloha 1.127. Vypočítajte najväčšiu možnú odchýlku hrany a steny štvorstena $ABCD$, ak $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$. (Odchýlkou hrany a steny sa rozumie odchýlka priamky v ktorej leží hrana a roviny v ktorej leží stena daného štvorstena).

Riešenie: $\frac{\pi}{2}$.

Úloha 1.128. Vypočítajte odchýlku dvoch susedných stien ABE a BCE pravidelného osemstenu $ABCDEF$.

Riešenie: $\varphi = 70^\circ 32'$.

Úloha 1.129. Vypočítajte vzdialenosť bodu $M = [-2, 4, 3]$ od priamky $x - 2y - z + 8 = 0$, $x + y - z + 2 = 0$.

Riešenie: $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Úloha 1.130. Napíšte rovnicu roviny obsahujúcu súradnicovú os \mathbf{o}_y , ktorá s priamkou AB zvierá uhol veľkosti $\frac{1}{4}\pi$, kde $A = [3, 0, 0]$, $B = [5, \sqrt{3}, 1]$.

Riešenie: $x = 0$; $3x + 4z = 0$.

Úloha 1.131. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $[1, -1, -1]$ a pretína priamku $\mathbf{p} \equiv \{[0, 1, 0]; (1, 1, 2)\}$ pod uhlom veľkosti $\frac{1}{3}\pi$.

Riešenie: $X = [1, -1, -1] + t(1, -2, -1)$; $X = [1, -1, -1] + s(2, -1, 1)$.

Úloha 1.132. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priesečnicou rovín $3x - 4y + z + 6 = 0$, $2x - 3y + z + 2 = 0$ a má rovnakú vzdialenosť od bodov $A = [3, -4, -6]$, $B = [1, 2, 2]$.

Riešenie: $x - 5y + 4z - 20 = 0$; $x - 2y + z - 2 = 0$.

Úloha 1.133. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = [1, 1, -2]$ a má od priamky $\mathbf{p} : X = [-2, -2, 4] + t(0, -2, -1)$ vzdialenosť $d = 3$.

Riešenie: $x - 1 = 0$; $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Úloha 1.134. Napíšte rovnicu roviny α , ktorá je kolmá na priamku $\mathbf{p} : 2x - y + z = 0$, $6x - y + z - 4 = 0$, ak vzdialenosť začiatku súradnicovej sústavy a roviny α je $\sqrt{29}$.

Riešenie: $y + z \pm \sqrt{58} = 0$.

Úloha 1.135. Na osi \mathbf{o}_z určte bod M , ktorého vzdialenosť od rovín $x + 4y - 3z - 2 = 0$ a $5x + z + 8 = 0$ je rovnaká.

Riešenie: $M = [0, 0, 3]$, $M' = [0, 0, -\frac{5}{2}]$.

Úloha 1.136. Vypočítajte vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok, ktorých rovnice sú $x = 2t - 2, y = t + 2, z = t + 1$ a $x = 2s - 2, y = s + 3, z = s + 2$.

Riešenie: $d = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Úloha 1.137. Daná je kocka $ABCDEFGH$ so stranou veľkosti a . Vypočítajte vzdialenosť rovín ACH a BGE .

Riešenie: $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Úloha 1.138. Vypočítajte vzdialenosť dvoch mimobežiek \mathbf{p} , \mathbf{q} , ak

- a) $\mathbf{p} : x + z - 1 = 0, y - 1 = 0,$
 $\mathbf{q} : z - 1 = 0, x - 1 = 0;$
- b) $\mathbf{p} : x + y = 0, x - y + z + 4 = 0,$
 $\mathbf{q} : x = 1 - 3t, y = t, z = 2 - t.$

Riešenie: a) Vzdialenosť dvojice mimobežiek vypočítame ako vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej z priamok od roviny s ňou rovnobežnej, ktorá prechádza druhou priamkou. Rovina ϱ obsahujúca priamku \mathbf{p} a rovnobežná s \mathbf{q} má rovnicu $x + z - 1 = 0$. Potom $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d(\varrho, \mathbf{q}) = d(\varrho, Q)$, kde Q je ľubovoľný bod na priamke \mathbf{q} . Pomocou známeho vzťahu pre vzdialenosť bodu od roviny dostaneme $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\text{b) } d = \frac{9}{\sqrt{62}}.$$

Úloha 1.139. Vypočítajte najväčšiu možnú vzdialenosť dvoch mimobežných hrán štvorstena $ABCD$, ak $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$. (Vzdialenosťou dvoch mimobežných hrán štvorstena rozumíme vzdialenosť dvoch priamok obsahujúcich tieto hrany).

Riešenie: $\frac{2\sqrt{901}}{53}$.

Úloha 1.140. Daná je kocka $ABCDEFGH$ so stranou veľkosti a . Vypočítajte vzdialenosť priamky obsahujúcej hranu AF a roviny BDG .

Riešenie: $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Úloha 1.141. Daná je kocka $ABCDEFGH$ so stranou veľkosti a . Vypočítajte vzdialenosť telesovej uhlopriečky od

- hrany s ňou mimobežnej;
- stenovej uhlopriečky s ňou mimobežnej.

Riešenie: a) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

1.2 Úsečky, polpriamky, polroviny

Nech sú dané body $O, P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{A}_n$ a čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, resp. $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, tak nazývame *bod*

$$O + \lambda_1(P_1 - O) + \lambda_2(P_2 - O) + \dots + \lambda_k(P_k - O),$$

resp. *vektor*

$$\lambda_1(P_1 - O) + \lambda_2(P_2 - O) + \dots + \lambda_k(P_k - O),$$

lineárnou kombináciou bodov P_1, \dots, P_k s koeficientami $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a zapisujeme

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k.$$

Ak sú dané tri kolineárne body A, B, C ($A \neq B \neq C \neq A$), tak reálne číslo λ , pre ktoré platí

$$C - A = \lambda(C - B), \quad \text{resp.} \quad C = \frac{1}{1 - \lambda}A + \frac{-\lambda}{1 - \lambda}B$$

nazývame *deliaci pomer* bodu C vzhľadom na body A, B (v tomto poradí) a označujeme (ABC) .

Úsečka AB je množina všetkých bodov X priamky AB , ktoré ležia medzi bodmi A, B (t.j. $(ABX) < 0$), zjednotenú s dvojprvkovou množinou $\{A, B\}$. Úsečku AB môžeme popísať rovnicou $X = A + t(B - A)$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Polpriamka AB je množina všetkých bodov X , pre ktoré platí $X = x_1 A + x_2 B$, kde $x_1 + x_2 = 1$ a $x_2 \geq 0$. Potom rovnica $X = A + t(B - A)$ vyjadruje polpriamku AB pre $t \geq 0$, resp. polpriamku opačnú k polpriamke AB pre $t \leq 0$.

Rovnica polroviny ABC s hraničnou priamkou AB má tvar

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A), \quad \text{kde } t_2 \geq 0.$$

Pre $t_2 \leq 0$ predchádzajúca rovnica vyjadruje polrovinu opačnú k polrovine ABC .

Úloha 1.142. Napíšte súradnice bodu $Q = [2, ?, ?]$, ktorý leží na priamke p prechádzajúcej bodmi $A = [-4, 7, 2]$, $B = [-1, 3, 6]$ a vypočítajte deliaci pomer (ABQ) .

Riešenie: $Q = [2, -1, 10]$, $(ABQ) = 2$.

Úloha 1.143. Na priamke KL , kde $K = [1, -3, 0]$, $L = [2, 1, -1]$ určte body X a X' , ktorých deliaci pomer vzhľadom na body K , L je $\pm \frac{2}{3}$.

Riešenie: $X = [-1, -11, 2]$, $X' = [\frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}]$.

Úloha 1.144. Nech λ je deliaci pomer (ABC) bodu C vzhľadom na body A , B . Dokážte, že platí: $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(CAB) = \frac{1}{1-\lambda}$, $(BCA) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

Úloha 1.145. Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$. Roviny AFH a GDB pretínajú uhlopriečku EC postupne v bodoch U , V (v danom poradí). Vypočítajte deliace pomery (ECU) a (ECV) .

Riešenie: $(ECU) = -\frac{1}{2}$, $(ECV) = -2$, t.j. uhlopriečka EC je bodmi U a V rozdelená na tri rovnaké časti.

Úloha 1.146. Daný je trojuholník ABC . Pomocou deliaceho pomeru vypočítajte súradnice ťažiska T daného trojuholníka.

Riešenie: $T = \frac{A+B+C}{3}$.

Úloha 1.147. Daný je štvorsten $ABCD$. Pomocou deliaceho pomeru vypočítajte súradnice ťažiska T daného štvorstenu. Dokážte, že ťažisko je stredom spojnice stredov protiľahlých hrán.

Riešenie: $T = \frac{A+B+C+D}{4}$.

Úloha 1.148. Napíšte rovnicu polpriamky určenej bodmi $A = [3, 2, -1]$, $B = [4, 3, 2]$ so začiatkom v bode A .

Úloha 1.149. Rozhodnite, ktorý z bodov K, L, M leží na polpriamke $X = A + t\vec{u}$, $t \geq 0$, ak $A = [3, 2, -1]$, $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $K = [1, 6, 5]$, $L = [4, 0, -4]$, $M = [2, 4, -2]$.

Riešenie: Len bod K .

Úloha 1.150. Rozhodnite, či body $A = [2, 2, 4]$, $B = [-1, 8, -2]$ ležia na úsečke CD , ak $C = [3, 0, 6]$, $D = [1, 4, 2]$.

Riešenie: Bod A leží a bod B neleží na úsečke CD .

Úloha 1.151. Zistite, či polpriamka $x = 3 - 2s$, $y = 1 + s$, $s \geq 0$ pretína polpriamku BC , kde $B = [-1, 0]$, $C = [1, 4]$.

Riešenie: Polpriamky sa pretínajú v bode $P = [\frac{1}{5}, \frac{12}{5}]$.

Úloha 1.152. Zistite, či polpriamka $x = 3 + t$, $y = 1 - t$, $t \geq 0$ pretína úsečku AB , kde $A = [-2, 0]$, $B = [2, 8]$.

Riešenie: Nie.

Úloha 1.153. Zistite, či úsečka MN pretína rovinu $\rho \equiv \{R = [0, 2, 0]; \vec{u} = (1, 0, 2), \vec{v} = (0, 4, -5)\}$, ak

- a) $M = [1, 0, 3]$, $N = [-1, 5, 2]$; b) $M = [3, 1, -1]$, $N = [1, 2, 1]$.

Riešenie: a) Áno; b) nie.

Úloha 1.154. Určte vzájomnú polohu polroviny $\rho^+ : X = [3, 2, 5] + t(4, 5, 0) + s(1, -1, 1)$, $s \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ a priamky $\mathbf{p} \equiv \{A; \vec{u}\}$, ak

- a) $A = [-1, -3, 5]$, $\vec{u} = (4, 5, 0)$; b) $A = [2, 3, 4]$, $\vec{u} = (2, 1, 0)$.

Riešenie: a) $\mathbf{p} \subset \rho^+$; b) žiaden spoločný bod.

Úloha 1.155. Má polrovina $\rho^+ : X = [1, 1, 1] + t_1(2, 1, 2) + t_2(0, 5, 4)$, $t_2 \geq 0$ s rovinou $\sigma : X = [1, 11, 9] + s_1(1, 3, 3) + s_2(3, -2, -2)$ nejaký spoločný bod?

Riešenie: Áno, polpriamku $X = [1, 11, 9] + u(2, 6, 6)$, $u \geq -2$.

Úloha 1.156. Určte polohu priamky $3x + 2y - 6 = 0$ vzhľadom na trojuholník ABC , ak $A = [-7, 0]$, $B = [0, 0]$, $C = [4, 9]$.

Riešenie: Priamka pretína strany AC a BC daného trojuholníka.

Úloha 1.157. Určte polohu bodu $M = [-4, 2]$ vzhľadom na trojuholník ABC , ktorého strany ležia postupne na priamkach $\mathbf{p}_1 : 3x + 2y - 1 = 0$, $\mathbf{p}_2 : x + y - 4 = 0$ a $\mathbf{p}_3 : 2x - y + 11 = 0$.

Riešenie: Bod M je vonkajším bodom trojuholníka, pričom patrí do vrcholového uhlu k vnútornému uhlu trojuholníka pri vrchole $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_3$.

Úloha 1.158. Určte vzájomnú polohu roviny $2x + y - z - 3 = 0$ a štvorstenu $ABCD$, kde $A = [0, 1, 7]$, $B = [5, 0, -3]$, $C = [3, 2, 1]$ a $D = [-2, 9, 1]$.

Riešenie: Rovina pretína hrany AB , AC a AD štvorstenu.

Úloha 1.159. Daný je štvorsten $ABCD$ a bod $P = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4]$. Určte, či ťažisko štvorstenu leží v polpriestore (ϱ, C) alebo (ϱ, D) , kde $\varrho = \overleftarrow{ABP}$ a $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 0, 0]$, $C = [2, 3, 5]$, $D = [-1, -2, 3]$.

1.3 Konvexné útvary

Množina \mathcal{M} bodov afinného priestoru \mathbb{A}_n sa nazýva *konvexná*, ak s každými jej dvomi bodmi A, B obsahuje všetky body úsečky s krajnými bodmi A a B . Prázdna množina, každá jednobodová množina ako aj množina všetkých bodov priestoru \mathbb{A}_n sú konvexné.

Prienik všetkých konvexných množín obsahujúcich množinu $\mathcal{M} \subset \mathbb{A}_n$ nazývame *konvexný obal* množiny \mathcal{M} a označujeme $K(\mathcal{M})$. Bod $X \in K(\mathcal{M})$ práve vtedy, keď existujú body $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}$ a reálne čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, pričom platí $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ a $\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_k B_k \in \mathcal{M}$.

Neprázdna konvexná množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{A}_n$ sa nazýva *konvexný mnohosten* v priestore \mathbb{A}_n , ak existuje taká konečná množina $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathbb{A}_n$, že $\mathcal{M} = K(\overline{\mathcal{M}})$. Konvexný obal $n + 1$ lineárne nezávislých bodov priestoru \mathbb{A}_n sa nazýva *simplex*. Simplex na priamke je *úsečka*, simplex v rovine je *trojuholník* a v trojrozmernom priestore je simplexom *štvorsten*.

Každý bod *trojuholníka* ABC sa dá vyjadriť v tvare

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A), \quad \text{kde } t_1, t_2 \geq 0 \text{ a } t_1 + t_2 \leq 1.$$

Parametrické rovnice *štvorstenu* $ABCD$ majú tvar

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A) + t_3(D - A), \quad \text{kde } t_1, t_2, t_3 \geq 0 \text{ a } t_1 + t_2 + t_3 \leq 1.$$

Pod *objemom simplexu*, ktorý je určený bodmi $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{E}_n$ rozumieme číslo

$$V(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left| [A_1 - A_{n+1}, \dots, A_n - A_{n+1}] \right|.$$

Ak v pravouhlom súradnicovom systéme \mathbb{E}_n majú body A_1, A_2, \dots, A_{n+1} súradnice $A_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$), tak pre objem simplexu platí

$$V(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = \frac{1}{n!} \left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & 1 \end{array} \right|$$

Obsah trojuholníka s vrcholmi $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ je určený

$$\mathcal{P}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc|c} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{array} \right|$$

Úloha 1.160. Body $A = [5, 1]$, $B = [-2, 2]$ sú dva vrcholy trojuholníka, ktorého obsah je 10. Napíšte súradnice tretieho vrchola, ktorý leží na osi \mathbf{o}_x .

Riešenie: $C = [-8, 0]$, $C' = [32, 0]$.

Úloha 1.161. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy a spolu s priamkami $x - y + 12 = 0$, $2x + y + 9 = 0$ vytvára trojuholník s obsahom $\mathcal{P} = 1, 5$.

Riešenie: $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$.

Úloha 1.162. Vypočítajte súradnice vrcholov C , D rovnobežníka $ABCD$, ak poznáte jeho obsah \mathcal{P} , súradnice vrcholov A , B a viete, že priesečník jeho uhlopriečok leží na priamke \mathbf{p} .

- $\mathcal{P} = 12$, $A = [2, 5]$, $B = [1, 6]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_x$;
- $\mathcal{P} = 17$, $A = [-2, 4]$, $B = [1, 0]$, $\mathbf{p} = \mathbf{o}_y$.

Riešenie: a) Priesečník uhlopriečok S má súradnice $[s, 0]$. Zrejme obsah trojuholníka $\mathcal{P}(ABS) = 3$ a preto platí

$$\frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 1 & \\ s & 0 & 1 & \end{array} \right| = 3.$$

Odtiaľ určíme dve hodnoty $s = 4$, $s' = 10$. Z toho, že $a_2 = -c_2$ a $b_2 = -d_2$ dostaneme dve riešenia úlohy $C = [6, -5]$, $D = [7, -6]$ a $C' = [18, -5]$, $D' = [19, -6]$.

- $C = [2, -7]$, $D = [-1, -3]$ a $C' = [2, 4\frac{1}{3}]$, $D' = [-1, 8\frac{1}{3}]$.

Úloha 1.163. Vypočítajte obsah rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB , ak $A = [1, 1]$, $B = [3, 2]$ a bod C leží na priamke $3x + 4y - 2 = 0$.

Riešenie: $\mathcal{P} = \frac{3\sqrt{10}}{8}$.

Úloha 1.164. Určte analytické vyjadrenie priamky, na ktorej leží strana trojuholníka prechádzajúca bodom M , ak ostatné dve strany trojuholníka ležia na súradnicových osiach a obsah trojuholníka je \mathcal{P} :

a) $M = [12, 6]$, $\mathcal{P} = 150$; b) $M = [3, 4]$, $\mathcal{P} = 150$.

Riešenie: a) $x + 3y - 30 = 0$, $3x + 4y - 60 = 0$, $3x - y - 30 = 0$, $x - 12y + 60 = 0$;
b) $4x + 3y - 24 = 0$.

Úloha 1.165. Vypočítajte obsah trojuholníka KLM , ak $K = [1, 2, 0]$, $L = [3, 0, -3]$, $M = [5, 2, 6]$.

Riešenie: $\mathcal{P} = 14$.

Úloha 1.166. Vypočítajte obsah pravidelného päťuholníka, ak veľkosť jeho uhlopriečky je u .

Riešenie: $\mathcal{P} = \frac{5u^2}{8 \sin \frac{2\pi}{5}}$.

Úloha 1.167. Vypočítajte obsah pravidelného desaťuholníka, ak veľkosť polomeru jemu opísanej kružnice je $r = 26$.

Riešenie: $\mathcal{P} = 260 \sin \frac{\pi}{5}$.

Úloha 1.168. Vypočítajte objem štvorstena, ktorého vrcholy sú $A = [2, -1, 1]$, $B = [5, 5, 4]$, $C = [3, 2, -1]$, $D = [4, 1, 3]$.

Riešenie: $\mathcal{V} = 3$.

Úloha 1.169. Objem štvorstena je $\mathcal{V} = 5$, tri vrcholy sú $A = [2, 1, -1]$, $B = [3, 0, 1]$, $C = [2, -1, 3]$. Vypočítajte súradnice štvrtého vrchola D štvorstena, ak viete, že leží na osi \mathbf{o}_y .

Riešenie: $D = [0, 8, 0]$, $D' = [0, -7, 0]$.

Úloha 1.170. Štvorsten $ABCD$ má objem $\mathcal{V} = 2$ a jeho tri vrcholy sú $A = [2, 1, 3]$, $B = [3, 3, 2]$, $C = [1, 2, 4]$. Vypočítajte súradnice vrchola D , ktorý leží na osi \mathbf{o}_z .

Riešenie: $D = [0, 0, 9]$, $D' = [0, 0, 1]$.

Úloha 1.171. Dve steny kocky ležia v rovinách $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Vypočítajte objem tejto kocky.

Riešenie: $\mathcal{V} = 8$.

Úloha 1.172. Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, -1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$, $D \in \mathbf{p}$, pričom $\mathbf{p} : x = 1 + (\sqrt{3} - 2)t$, $y = t$, $z = 1$ a odchýlka priamky obsahujúcej hranu AD a roviny ABC je $\frac{\pi}{6}$.

Riešenie: $\mathcal{V} = \frac{5}{132}(5 - \sqrt{3})$.

Úloha 1.173. Pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ má vrchol $V = [3, -1, 6]$, hrana CD leží na priesečnici rovín $3x + 3y + z = 0$, $x + y + z - 2 = 0$. Objem ihlana je 18, odchýlka priamky obsahujúcej hranu AV a priamky obsahujúcej hranu VC je $\frac{\pi}{2}$. Vypočítajte súradnice ostatných vrcholov daného ihlana.

Riešenie: $A = [3, 2, 3]$, $B = [6, -1, 3]$, $C = [3, -4, 3]$, $D = [0, -1, 3]$.

Kapitola 2

Analytická geometria kvadratických útvarov

2.1 Kružnica a zväzky kružníc

Kružnica $k(S, r)$ je množina všetkých bodov $X = [x, y]$ v rovine, ktoré majú od bodu $S = [s_1, s_2]$ vzdialenosť $r > 0$, t.j. $|XS| = \sqrt{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2} = r$. Rovnica kružnice $k(S, r)$ je

$$(X - S)^2 = r^2, \quad \text{resp.} \quad (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2. \quad (2.1)$$

Daná je kružnica $k(S, r)$ rovnicou $(X - S)^2 - r^2 = 0$ a ľubovoľný bod M roviny. Reálne číslo

$$\mu_k(M) = |SM|^2 - r^2$$

nazývame *mocnosť bodu* M vzhľadom na kružnicu k .

Zrejme platí:

- $\mu_k(M) > 0 \Leftrightarrow |SM| > r \Leftrightarrow M$ je vonkajším bodom kružnice k ;
- $\mu_k(M) = 0 \Leftrightarrow |SM| = r \Leftrightarrow$ bod M leží na kružnici k ;
- $\mu_k(M) < 0 \Leftrightarrow |SM| < r \Leftrightarrow M$ je vnútorným bodom kružnice k .

Množina všetkých bodov $X = [x, y]$ v rovine, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu tvaru $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ je kružnicou, bodom alebo prázdnu množinou, podľa toho či $a^2 + b^2 - c$ je kladné, nula alebo záporné číslo.

Dotyčnica kružnice (2.1) v bode $T = [t_1, t_2]$ má rovnicu

$$(X - S)(T - S) = r^2, \quad \text{resp.} \quad (x - s_1)(t_1 - s_1) + (y - s_2)(t_2 - s_2) = r^2.$$

Ak si do rovnice dotyčnice kružnice dosadíme namiesto súradníc dotykového bodu súradnice bodu $Z = [z_1, z_2]$, ktorý neleží na kružnici a je rôzny od stredu kružnice, tak dostaneme rovnicu *poláry* bodu Z . Ak polára bodu Z má s kružnicou spoločné body, tak tieto sú dotykovými bodmi dotyčníc vedených z bodu Z k danej kružnici.

Sú dané dve kružnice $k_1 : (X - S_1)^2 - r_1^2 = 0$, $k_2 : (X - S_2)^2 - r_2^2 = 0$, ktoré sa pretínajú práve v dvoch bodoch. *Zväzkom kružníc* rozumieme množinu všetkých kružníc, ktorých rovnice sa dajú vyjadriť v tvare

$$\lambda_1 [(X - S_1)^2 - r_1^2] + \lambda_2 [(X - S_2)^2 - r_2^2] = 0, \quad (2.2)$$

kde λ_1, λ_2 sú ľubovoľné reálne čísla, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly.

Pre $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ je rovnicou (2.2) určená *chordála* daného zväzku kružníc, t.j. všetky body tejto priamky majú rovnakú mocnosť vzhľadom na kružnice k_1, k_2 , pretože platí

$$[(X - S_1)^2 - r_1^2] - [(X - S_2)^2 - r_2^2] = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{k_1}(X) = \mu_{k_2}(X).$$

Kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$ nazývame *ortogonálne* ($k_1 \perp k_2$) práve vtedy, keď ich dotyčnice zostrojené v spoločnom bode sú navzájom kolmé. Platí

$$k_1 \perp k_2 \quad \Leftrightarrow \quad (S_1 - S_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = 0.$$

Úloha 2.1. Vypočítajte súradnice stredu S a polomer r kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

Riešenie: Úpravou na úplné štvorce dostávame rovnicu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ a z nej určíme stred $S = [2, 3]$ a polomer $r = 5$.

Úloha 2.2. Napíšte rovnicu kružnice, ak

- jej stred je $S = [3, -4]$ a polomer $r = 3$;
- $S = [2, 3]$ a kružnica prechádza bodom $A = [5, -1]$;
- prechádza bodmi $A = [1, 5]$, $B = [4, 4]$ a $C = [5, -3]$;
- prechádza bodmi $A = [0, 8]$, $B = [7, 7]$ a $C = [-2, 4]$;
- prechádza bodmi $A = [1, 2]$, $B = [0, 4]$ a $C = [3, -2]$.

Riešenie: a) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$; b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$;

c) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$; d) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$;

e) body ležia na jednej priamke.

Úloha 2.3. Napíšte rovnicu kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB , ak

a) $A = [0, -3]$, $B = [4, 3]$; b) $A = [-3, 0]$, $B = [3, 6]$.

Riešenie: a) $(x - 2)^2 + y^2 = 13$; b) $x^2 + (y - 3)^2 = 18$.

Úloha 2.4. Určte, pre ktoré hodnoty parametra p sú dané rovnice rovnicami kružnice. Určte súradnice stredu kružnice a jej polomer.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + p = 0$; b) $x^2 + y^2 - x - 2y + p = 0$.

Riešenie: a) $p < 26$, $S = [1, -5]$, $r = \sqrt{26 - p}$; b) $p < \frac{5}{4}$, $S = [\frac{1}{2}, 1]$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4p}$.

Úloha 2.5. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá

a) prechádza bodmi $A = [0, 3]$, $B = [0, -3]$ a dotýka sa kružnice $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$;

b) prechádza bodom $C = [5, 2]$, dotýka sa priamky $y = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$.

Riešenie: a) $x^2 + y^2 = 9$, $(x - 4)^2 + y^2 = 25$;

b) Jedným zo štyroch riešení je kružnica $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Úloha 2.6. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá

a) sa dotýka osi \mathbf{o}_y v počiatku a pretína os \mathbf{o}_x v bode $A = [-8, 0]$;

b) sa dotýka osi \mathbf{o}_x v počiatku a pretína os \mathbf{o}_y v bode $A = [0, 6]$;

c) sa dotýka obidvoch súradnicových osí a prechádza bodom $A = [2, 4]$;

d) prechádza bodmi $A = [2, 5]$ a $B = [3, 2]$ a jej stred leží na osi \mathbf{o}_y .

Riešenie:

a) Stred kružnice je na osi \mathbf{o}_x a preto jej stred je $S = [-4, 0]$ a polomer $r = 4$;

b) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$;

c) rovnica hľadanej kružnice má rovnicu $(x - s)^2 + (y - s)^2 = s^2$. Dosadením súradníc bodu A do tejto rovnice a výpočtom dostávame dve hodnoty $s = 2$ a $s = 10$;

d) stred hľadanej kružnice $S = [0, s_2]$ je rovnako vzdialený od bodov A a B . Z rovnice $|SA| = |SB|$ dostávame, že $s_2 = \frac{8}{3}$.

Úloha 2.7. Napíšte rovnice kružníc, ktoré sa dotýkajú priamok $x - 1 = 0$, $3x + 4y - 35 = 0$ a $3x - 4y - 35 = 0$.

Riešenie: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, $(x + 15)^2 + y^2 = 256$, $(x - \frac{35}{3})^2 + (y \pm \frac{40}{3})^2 = \frac{1024}{9}$.

Úloha 2.8. Určte, čo je množinou všetkých bodov $X = [x, y]$ roviny, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - \frac{69}{4} = 0$.

Riešenie: Úpravou na úplný štvorec dostávame kružnicu $(x - 1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{121}{16}$.

Úloha 2.9. Daný je rovnoramenný trojuholník $\triangle ABC$. Určte geometrické miesto všetkých bodov roviny, ktorých štvorec vzdialenosti od priamky AB na ktorej leží základňa sa rovná súčinu vzdialeností od priamok, na ktorých ležia jeho ramená.

Riešenie: Zvoľme súradnicový systém tak, aby $A = [-a, 0]$, $B = [a, 0]$ a $C = [0, c]$. Strany trojuholníka ležia na priamkach $cx - ay - ac = 0$. Ak $X = [x, y]$ je bod, ktorý spĺňa podmienky úlohy, tak platí

$$\frac{|-cx + ay - ac|}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \frac{|cx + ay - ac|}{\sqrt{c^2 + a^2}} = |y| \implies x^2 + \left(y + \frac{a^2}{c}\right)^2 = \frac{a^2(c^2 + a^2)}{c^2}$$

Úloha 2.10. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza začiatkom súradnicového systému a na súradnicových osiach vytína rovnako veľké úseky dĺžky d ?

Riešenie: $(x \pm \frac{d}{2})^2 + (y \pm \frac{d}{2})^2 = \frac{d^2}{2}$

Úloha 2.11. Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0$, ktoré sú kolmé na priamku $4x - 3y + 12 = 0$.

Riešenie: Hľadáme takú hodnotu c , aby priamka $3x + 4y + c = 0$ mala s kružnicou práve jeden spoločný bod. Riešením sú priamky $3x + 4y - 39 = 0$, $3x + 4y + 61 = 0$.

Úloha 2.12. Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, ktoré sú kolmé na priamku $x - 2y + 9 = 0$.

Riešenie: Dotyčnica kružnice $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ v bode $[t_1, t_2]$ má tvar $(x - 1)(t_1 - 1) + (y + 2)(t_2 + 2) = 5$. Úpravou dostaneme rovnicu

$$y = -\frac{(t_1 - 1)}{(t_2 + 2)}x + \frac{(t_1 - 2t_2)}{t_2 + 2}.$$

Pretože smernica danej priamky je $\frac{1}{2}$, bude smernica dotyčnice (kolmej na danú priamku) -2 . Z rovnice $-\frac{t_1 - 1}{t_2 + 2} = -2$ dostaneme vzťah $t_1 = 2(t_2 + 5)$. Dosadením do rovnice $(2t_2 - 1)^2 + (t_2 + 2)^2 = 5$ a výpočtom dostaneme druhé súradnice dotykových bodov $t_2 = -3$ a $t_2 = -1$. Hľadané dotyčnice majú rovnice $2x + y \pm 5 = 0$.

Úloha 2.13. Vypočítajte veľkosť tetivy kružnice

- $x^2 + y^2 = 25$, ktorej stred je v bode $S = [1, -2]$;
- $5x^2 + 5y^2 - 9y - 38 = 0$, ktorej stred je v bode $S = [1, \frac{1}{2}]$.

Riešenie: a) $4\sqrt{5}$, b) $\sqrt{29}$

Úloha 2.14. Určte geometrické miesto všetký bodov, ktorých vzdialenosti

- od bodov $A = [0, 0]$, $B = [0, 6]$ sú v pomere $5 : 4$;

b) od bodov $A = [5, 7]$, $B = [-4, -5]$ sú v pomere 3 : 2.

Riešenie: a) $3(x^2 + y^2) - 100x + 300 = 0$.

b) $5(x^2 + y^2) + 112x + 146y + 73 = 0$.

Úloha 2.15. Určte vzájomnú polohu kružnice k a priamky AB , ak

a) $k : x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0$, $A = [1, 0]$, $B = [-3, -4]$;

b) $k : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $A = [5, -1]$, $B = [-3, -7]$.

Riešenie: a) Rovnica kružnice je $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 25$ a priamky $x - y - 1 = 0$. Vzdialenosť bodu $[-3, -3]$ od priamky je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a táto je menšia ako polomer a preto je to sečnica.

b) Spoločné body sú $[5, 6]$, $[-\frac{26}{29}, -7\frac{22}{29}]$.

Úloha 2.16. Určte všetky reálne čísla a , pre ktoré má kružnica $x^2 + y^2 = 4$ a priamka

a) $2x - y + a = 0$,

b) $ax - 4y - 16 = 0$

práve jeden spoločný bod.

Riešenie: a) $a = \pm 2\sqrt{5}$; b) $a = \pm 4\sqrt{3}$.

Úloha 2.17. Napíšte rovnicu kružnice súmerne združenej s kružnicou, ktorá má rovnicu $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ podľa priamky $x - y - 3 = 0$.

Riešenie: a) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Úloha 2.18. Napíšte rovnicu dotyčnice kružnice $x^2 + y^2 = 65$, ktorá je rovnobežná s priamkou $2x + 3y - 9 = 0$.

Riešenie: $2x + 3y \pm 13\sqrt{5} = 0$

Úloha 2.19. Určte všetky reálne čísla m , pre ktoré je priamka \mathbf{p} dotyčnicou kružnice k , ak

a) $\mathbf{p} : 3x + 4y + m = 0$, $k : x^2 + y^2 = 25$;

b) $\mathbf{p} : x = -7 + mt$, $y = -17 + t$, $k : x^2 + y^2 = 169$.

Riešenie: a) $m = \pm 25$; b) $m \in \{-\frac{5}{12}, \frac{12}{5}\}$.

Úloha 2.20. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A = [3, 0]$, $B = [-1, 2]$ a má stred na priamke $x - y + 2 = 0$.

Riešenie: Súradnice $[s_1, s_2]$ stredu a polomer r sú riešením sústavy rovníc $(3 - s_1)^2 + s_2^2 = r^2$, $(-1 - s_1)^2 + (2 - s_2)^2 = r^2$, $s_1 - s_2 + 2 = 0$. Hľadaná rovnica je $(x - 8)^2 + y^2 = 4$.

Úloha 2.21. Napíšte rovnicu kružnice, ktorej stred leží na priamke $x - y + 3 = 0$ a dotýka sa priamky $3x + 4y - 23 = 0$ v bode $A[1, 5]$.

Riešenie: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Úloha 2.22. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $M = [2, 1]$, dotýka sa kružnice $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ a má polomer $r = 1$.

Riešenie: Stred hľadanej kružnice je priesečník kružníc $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$ (lebo sa dotýka danej kružnice s $r = 1$) a $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (lebo prechádza bodom $[2, 1]$.) Riešením sú kružnice $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ a $(x - 2, 8)^2 + (y - 0, 4)^2 = 1$.

Úloha 2.23. Napíšte rovnicu kružnice vpísanej do trojuholníka, ktorého strany ležia na priamkach $3x - 4y - 5 = 0$, $8x + 6y - 19 = 0$, $5x + 12y - 27 = 0$.

Riešenie: a) $(x - 2, 2)^2 + (y - 0, 9)^2 = 0, 16$.

Úloha 2.24. Napíšte rovnice dotyčníc kružnice $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$, ktoré prechádzajú začiatkom súradnicovej sústavy.

Návod: Do rovnice dotyčnice kružnice $(x - 5)(t_1 - 5) + (y - 2)(t_2 - 2) = 4$ dosadíme súradnice začiatku $[0, 0]$ a dostaneme rovnicu $5(t_1 - 5) + 2(t_2 - 2) + 4 = 0$. Pretože platí $(t_1 - 5)^2 + (t_2 - 2)^2 = 4$, riešením týchto dvoch rovníc dostaneme súradnice dotykových bodov.

Úloha 2.25. Vypočítajte odchýlku dotyčníc vedených z bodu $A = [-2, 5]$ ku kružnici $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$.

Riešenie: $53^\circ 08'$.

Úloha 2.26. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá sa dotýka dvoch rovnobežných priamok $x + y - 7 = 0$, $x + y - 3 = 0$ a jej stred je na priamke $2x - y - 1 = 0$

Riešenie: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Úloha 2.27. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $A = [6, 1]$, stred má na priamke $9x + 4y - 47 = 0$ a dotýka sa kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$.

Riešenie: $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 26$.

Úloha 2.28. Napíšte rovnice dotyčníc ku kružnici $x^2 + y^2 = 5$ prechádzajúce bodom $A = [\frac{5}{3}, \frac{-5}{3}]$.

Riešenie: $x - 2y - 5 = 0$, $2x - y - 5 = 0$.

Úloha 2.29. Napíšte rovnice spoločných dotyčníc kružníc $x^2 + y^2 - 16 = 0$ a $x^2 + y^2 - 16x + 60 = 0$.

Riešenie: Hľadáme dotyčnicu prvej kružnice, ktorá má od stredu druhej kružnice $x^2 + (y-8)^2 = 4$ vzdialenosť 2. Ak $T = [t_1, t_2]$ je bod dotyku, tak platí $t_1x + t_2y - 16 = 0$, pričom platí $t_1^2 + t_2^2 = 16$. Zo vzorca pre výpočet vzdialenosti bodu od priamky dostávame $\frac{|8x+0y-16|}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} = 2$. Rozlíšime dva prípady, $8t_1 - 16 = 8$ a $-(8t_1 - 16) = 8$. Súradnice štyroch dotykových bodov sú $[3, \pm\sqrt{7}]$ a $[1, \pm\sqrt{17}]$. Hľadané dotyčnice sú $3x \pm \sqrt{7} - 16 = 0$ a $x \pm \sqrt{17} - 16 = 0$.

Úloha 2.30. Napíšte rovnice spoločných dotyčníc kružníc

- a) $x^2 + y^2 = 25$, $(x - 6)^2 + y^2 = 16$;
 b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$;
 c) $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$, $x^2 + y^2 = 9$;
 d) $x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$.

Riešenie: a) $x + \sqrt{35}y - 30 = 0$, $x - \sqrt{35}y - 30 = 0$;
 b) $4x - 3y - 10 = 0$, $y - 2 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$, $x - 1 = 0$;
 c) $x - 3 = 0$, $4x - 3y + 15 = 0$;
 d) $x - 2y - 2 + 3\sqrt{5} = 0$, $x - 2y - 2 - 3\sqrt{5} = 0$.

Úloha 2.31. Dané sú body $A = [1, 1]$, $B = [5, -2]$. Napíšte rovnice všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú osi \mathbf{o}_x a priamky AB v bode A .

Riešenie: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$, $(x - \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{5}{9})^2 = \frac{25}{81}$.

Úloha 2.32. Vypočítajte dĺžku dotykovej úsečky dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$, ktorá prechádza bodom $A = [1, -2]$.

Riešenie: Štvorec veľkosti dotykovej úsečky je rovný rozdielu štvorcov vzdialeností bodu A od stredu kružnice $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{2}$ a jej polomeru. Veľkosť danej úsečky je 3.

Úloha 2.33. V závislosti od parametra p určte počet spoločných bodov kružníc $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + p = 0$.

Riešenie: Pre $p \geq 1$ druhou rovnicou nie je určená kružnica, pre $p \in (-80, 0)$ dva spoločné body, pre $p \in \{-80, 0\}$ jeden spoločný bod, pre $p \in (-\infty, -80) \cup (0, 1)$ žiaden spoločný bod.

Úloha 2.34. Určte podmienky, za ktorých sa kružnice $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r_1^2$ a $(x - t_1)^2 + (y - t_2)^2 = r_2^2$ pretínajú pod pravým uhlom.

Riešenie: $(s_1 - t_1)^2 + (s_2 - t_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Úloha 2.35. Vypočítajte, pod akým uhlom sa pretínajú kružnice $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ a $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

Riešenie: 90° .

Úloha 2.36. Dokážte, že kružnice $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny - m^2 + n^2 = 0$ a $x^2 + y^2 - 2nx - 2my + m^2 - n^2 = 0$ sa pretínajú pod pravým uhlom.

Úloha 2.37. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 9 = 0$ a $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$.

Riešenie: Odpočítaním druhej rovnice od prvej dostávame rovnicu hľadanej priamky $4x + 8y - 1 = 0$.

Úloha 2.38. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $M = [1, -1]$ a spoločnými bodmi kružníc $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 9 = 0$ a $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$.

Riešenie: Hľadaná kružnica bude mať rovnicu tvaru $\alpha[(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 9] + \beta[(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 16] = 0$, úpravou $(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)y^2 + (-2\alpha - 6\beta)x + 4(\alpha - \beta)y - 4\alpha - 3\beta = 0$. Keď do tejto rovnice dosadíme súradnice bodu M postupne dostaneme $8\alpha + 3\beta = 0$. Ak položíme $\alpha = -3$, tak $\beta = 8$ a hľadaná kružnica má rovnicu $(x - \frac{21}{5})^2 + (y - \frac{16}{5})^2 = \frac{757}{25}$.

Úloha 2.39. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$ a $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0$ a dotýka sa priamky $x = 0$.

Riešenie: Ak do rovnice $(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)y^2 - (2\alpha + 6\beta)x - 4\beta y = 0$ dosadíme $x = 0$ a ak platí $\alpha + \beta \neq 0$, dostávame kvadratickú rovnicu $(\alpha + \beta)y^2 - 4\beta y + 9\beta = 0$ riešením ktorej sú y -ové súradnice spoločných bodov hľadanej kružnice a danej priamky. Pretože chceme, aby priamka $x = 0$ bola dotyčnicou hľadanej kružnice, položíme jej diskriminant $D = (-4\beta)^2 - 4(\alpha + \beta)(9\beta) = 0$. Úpravou dostaneme $\beta(9\alpha + 5\beta) = 0$. Ak si zvolíme $\alpha = 1$, $\beta = 0$, resp. $\alpha = -5$, $\beta = 9$, tak hľadané kružnice majú rovnice $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $(x - \frac{11}{2})^2 + (y - \frac{9}{2})^2 = \frac{121}{4}$.

Úloha 2.40. Napíšte rovnicu kružnice so stredom v bode $S = [-4, -3]$, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0$, $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 4 = 0$.

Riešenie: $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Úloha 2.41. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 - 50 = 0$, $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 10 = 0$ a jej stred je na priamke $x + y = 0$.

Riešenie: $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

Úloha 2.42. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 - 16 = 0$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 - 9 = 0$ a ktorej stred leží na kružnici $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 - 5 = 0$.

Riešenie: $(x - 2)^2 + y^2 = 25$, $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 81$.

Úloha 2.43. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 - 24 = 0$, $(x + 2)^2 + y^2 - 49 = 0$ a ktorej polomer je $r = 3$.

Riešenie: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$, $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

Úloha 2.44. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá na priamke $y - 1 = 0$ vytína úsečku dĺžky 4 a prechádza spoločnými bodmi kružníc $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 41$, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 36$.

Riešenie: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$, $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 20$.

Úloha 2.45. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A = [1, -1]$, $B = [-3, 3]$ a dotýka sa kružnice $(x + 3)^2 + (y + 6)^2 - 1 = 0$.

Riešenie: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$, $(x + \frac{317}{79})^2 + (y + \frac{159}{79})^2 = (\frac{404}{79})^2$.

Úloha 2.46. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá je ortogonálna s kružnicami $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0$, $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 - 46 = 0$ a prechádza bodom $M = [2, 5]$.

Riešenie: $(x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{81}{4}$.

Úloha 2.47. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá je ortogonálna s kružnicami $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 - 32 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 - 64 = 0$ a dotýka sa osi \mathbf{o}_x .

Riešenie: $(x + 7)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Úloha 2.48. Vypočítajte vzdialenosť dotykových bodov spoločnej dotyčnice kružníc $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 - 50 = 0$ a $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 - 50 = 0$.

Riešenie: Pretože kružnice majú rovnaké polomery, hľadaná vzdialenosť je 10.

Úloha 2.49. Vypočítajte vzdialenosť dotykových bodov spoločnej dotyčnice kružníc $x^2 + y^2 - 1 = 0$ a $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 4 = 0$.

Riešenie: Hľadaná vzdialenosť sa rovná veľkosti odvesny pravouhlého trojuholníka s preponou, ktorej dĺžka je rovná vzdialenosti stredov daných kružníc a veľkosť druhej odvesny je rovná rozdielu, resp. súčtu ich polomerov. Výsledok: $\sqrt{24}$ a 4.

Úloha 2.50. Napíšte analytické vyjadrenie všetkých stredov tetív kružnice $x^2 + y^2 = 36$, ktoré prechádzajú vnútorným bodom $M = [3, 0]$ kružnice.

Riešenie: $x^2 + y^2 - 3x = 0$.

Úloha 2.51. Určte geometrické miesto všetkých bodov, z ktorých "vidíme" dve úsečky AB a BC jednej priamky pod rovnakým uhlom, ak $|AB| = 5$, $|BC| = 3$.

Riešenie: Kružnica $x^2 + y^2 - 15x = 0$.

Úloha 2.52. Bod $M = [x, y]$ sa pohybuje tak, že súčet štvorcov jeho vzdialeností od priesečníka súradnicových osí a od bodu $A = [-a, 0]$ je stále rovná a^2 . Určte jeho dráhu.

Riešenie: Bod M sa pohybuje po kružnici so stredom $S = [-\frac{a}{2}, 0]$ a polomerom $r = \frac{a}{2}$.

Úloha 2.53. Daná je kružnica $x^2 + y^2 = r^2$. Z bodu $A = [r, 0]$ tejto kružnice sú vedené všetky jej možné tetivy. Určte geometrické miesto stredov týchto tetív.

Riešenie: Ľubovoľný bod B danej kružnice má súradnice $[x, y]$, ktoré spĺňajú rovnicu $x^2 + y^2 = r^2$. Pre súradnice $[X, Y]$ stredu úsečky AB súčasne platí: $X = \frac{1}{2}(x + r)$, $Y = \frac{1}{2}(y + 0)$. Po dosadení dostávame rovnicu kružnice v tvare $(X - \frac{r}{2})^2 + Y^2 = (\frac{r}{2})^2$.

Úloha 2.54. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodom $A = [5, 2]$, dotýka sa priamky $y = 0$ a zvonka kružnice $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$.

Riešenie: Úloha má dve riešenia: $S_1 = [\frac{69}{7}, \frac{338}{49}]$, $r_1 = \frac{338}{49}$ a $S_2 = [3, 2]$, $r_2 = 2$.

Úloha 2.55. Napíšte rovnicu priamky patriacej zväzku priamok s rovnicou $\alpha(x - 8y + 30) + \beta(x + 5y - 22) = 0$, ktorá na kružnici $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ vytína tetivu dĺžky $2\sqrt{3}$.

Riešenie: $2x - 3y + 8 = 0$, $3x + 2y - 14 = 0$.

2.2 Kužeľosečky

2.2.1 Elipsa

Elipsa je množina všetkých bodov $X = [x, y]$ v rovine, ktoré majú od bodov F_1 a F_2 konštantný súčet vzdialeností $2a$, ktorý je väčší ako $|F_1F_2|$. Body F_1, F_2 sa nazývajú *ohniská* elipsy a číslo a je veľkosť *hlavnej poloosi* elipsy. Stred S úsečky F_1F_2 je *stred* elipsy. Vzdialenosť e ohnisk od stredu elipsy nazývame *excentricita* (lineárna výstrednosť) elipsy. Symbolom b označujeme číslo $\sqrt{a^2 - e^2}$, ktoré predstavuje veľkosť *vedľajšej poloosi* elipsy.

Rovnica elipsy so stredom v bode $S = [s_1, s_2]$, ktorej osi sú rovnobežné so súradnicovými osami je

$$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} = 1. \quad (2.3)$$

Ak $s_1 = s_2 = 0$, tak (2.3) je osovou rovnicou elipsy.

Dotyčnica elipsy (2.3) v bode $T = [t_1, t_2]$ má rovnicu

$$\frac{(x - s_1)(t_1 - s_1)}{a^2} + \frac{(y - s_2)(t_2 - s_2)}{b^2} = 1.$$

Ak do rovnice dotyčnice elipsy dosadíme namiesto súradníc dotykového bodu súradnice bodu $Z = [z_1, z_2]$, ktorý neleží na elipse a je rôzny od jej stredu, tak dostaneme rovnicu *poláry* bodu Z . Ak polára bodu Z má s elipsou spoločné body, tak tieto sú dotykovými bodmi dotyčníc vedených z bodu Z k danej elipse.

Úloha 2.56. Napíšte rovnicu elipsy, ktorá prechádza danými bodmi a jej osi sú totožné so súradnicovými osami, keď

- a) $A = [2, 3]$ a $B = [-1, -4]$;
- b) $A = [-6, -4]$ a $B = [5, \frac{5\sqrt{3}}{2}]$;
- c) $A = [3, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ a $B = [-4, \sqrt{5}]$.

Riešenie: Osová rovnica elipsy má tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dosadením súradníc daných bodov do tejto rovnice a riešením sústavy dvoch rovníc dostávame hľadané rovnice:

$$\text{a) } 7x^2 + 3y^2 = 55, \quad \text{b) } x^2 + 4y^2 = 100, \quad \text{c) } x^2 + 4y^2 = 36.$$

Úloha 2.57. Koľkými bodmi je jednoznačne určená elipsa so stredom v začiatku súradnicového systému a osami totožnými so súradnicovými osami?

Úloha 2.58. Koľkými bodmi je jednoznačne určená elipsa s osami rovnobežnými so súradnicovými osami?

Úloha 2.59. Vypočítajte súradnice bodov elipsy $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, ktorých vzdialenosť od jedného ohniska je štyrikrát väčšia, ako od druhého ohniska.

Riešenie: $[\frac{15}{2}, \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}]$ alebo $[-\frac{15}{2}, \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}]$.

Úloha 2.60. Napíšte osovú rovnicu elipsy, ktorá sa dotýka priamok $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$.

Riešenie: Rovnica hľadanej elipsy je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hľadáme parametre a^2 a b^2 tak, aby priamka $x = 5 - y$ mala s ňou práve jeden spoločný bod, t.j. aby rovnica $b^2(5 - y)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mala jediné riešenie. Úpravou dostávame $(a^2 + b^2)y^2 - 10b^2y + (25b^2 - a^2b^2) = 0$. Diskriminant tejto rovnice je $[100b^4 - 4(a^2 + b^2)(25b^2 - a^2b^2)] = 4a^2b^2[a^2b^2 - 25]$. Prvá priamka je dotyčnicou, ak platí $a^2b^2 - 25 = 0$. Podobne dostaneme (ak zopakujeme uvedený postup pre druhú priamku) druhú rovnicu $a^2 + 16b^2 - 100 = 0$. Riešením dostaneme rovnicu hľadanej elipsy $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Úloha 2.61. Napíšte osovú rovnicu elipsy, ktorá sa dotýka priamok

- a) $x + 2y - 27 = 0$, $7x + 4y - 81 = 0$;
 b) $x + y - 5 = 0$, $x - 4y - 10 = 0$;
 c) $3x - 2y - 20 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$.

Riešenie: a) $2x^2 + y^2 = 162$, b) $x^2 + 4y^2 = 20$, c) $x^2 + 4y^2 = 40$.

Úloha 2.62. Napíšte rovnice dotyčníc elipsy $3x^2 + 8y^2 = 45$, ktorých vzdialenosť od jej stredu je 3.

Riešenie: $3x + 4y \pm 15 = 0$, $3x - 4y \pm 15 = 0$.

Úloha 2.63. Napíšte rovnice dotyčníc elipsy $x^2 + 2y^2 = 17$, ktorých vzdialenosť od jej stredu je 3,4.

Riešenie: $3x \pm 4y \pm 17 = 0$.

Úloha 2.64. Napíšte rovnicu dotyčnice elipsy $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$, ktorá je kolmá na priamku $13x + 12y - 115 = 0$.

Riešenie: $12x - 13y \pm 169 = 0$.

Úloha 2.65. Napíšte osovú rovnicu elipsy, ktorej dotyčnica v bode $T = [5, -3]$ je priamka $3x - 4y - 27 = 0$.

Riešenie: $9x^2 + 20y^2 = 405$.

Úloha 2.66. Vypočítajte súradnice bodov elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$, ktoré majú od priamky $2x + 4y - 15 = 0$ najmenšiu a najväčšiu vzdialenosť.

Riešenie: Hľadané body sú bodmi dotyku dotyčníc elipsy, ktoré sú rovnobežné s danou priamkou. Najmenšiu vzdialenosť $\frac{\sqrt{5}}{2}$ má bod $[\frac{9}{5}, \frac{8}{5}]$ a najväčšiu $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ má bod $[-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}]$.

Úloha 2.67. Napíšte súradnice spoločných bodov elíps určených rovnicami: $x^2 + 13x + 24y^2 - 144y + 72 = 0$, $29x^2 - 127x + 120y^2 - 720y + 720 = 0$.

Riešenie: $[3, 1]$, $[3, 5]$, $[\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$, $[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}]$.

Úloha 2.68. Ak sa dve elipsy, ktorých osi sú navzájom rovnobežné pretínajú v štyroch bodoch, tak spoločné body ležia na jednej kružnici. Dokážte.

Úloha 2.69. Napíšte rovnicu elipsy, ktorej osi sú rovnobežné so súradnicovými osami a dotýka sa oboch súradnicových osí, ak

a) jej stred je bod $S = [6, -4]$;

b) osi \mathbf{o}_x sa dotýka v bode $A = [4, 0]$ a osi \mathbf{o}_y sa dotýka v bode $B = [0, 5]$.

Riešenie: a) $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$, b) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$.

Úloha 2.70. Napíšte rovnice dotyčníc elipsy $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$, ktoré prechádzajú bodom $M = [-2, 3]$.

Riešenie: Dotyčnice danej elipsy v bode $T = [t_1, t_2]$ majú rovnicu $xt_1 + 4yt_2 - 8 = 0$. Do tejto rovnice dosadíme súradnice bodu M a dostaneme $-2t_1 + 12t_2 - 8 = 0$. Pretože bod T leží na elipse, tak platí $t_1^2 + 4t_2^2 - 8 = 0$. Vyriešením tejto sústavy rovníc dostaneme súradnice dotykových bodov a po ich dosadení do rovnice dotyčnice dostaneme rovnice hľadaných priamok $x + 2y - 4 = 0$, $7x - 2y + 20 = 0$.

Úloha 2.71. Napíšte rovnice dotyčníc elipsy \mathbf{E} , ktoré prechádzajú daným bodom Z , ak

a) \mathbf{E} : $5x^2 + 9y^2 = 45$ a $Z = [0, -3]$;

b) \mathbf{E} : $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$ a $Z = [-4, 7]$.

Riešenie: a) $2x - 3y - 9 = 0$, $2x + 3y + 9 = 0$, b) $x + 4 = 0$, $4x + 5y - 19 = 0$.

Úloha 2.72. Vypočítajte obsah trojuholníka, ktorý je určený priamkou $4x + 3y - 12 = 0$ a dotyčnicami elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$, v priesečníkoch s danou priamkou.

Riešenie: $\mathcal{P} = 0,6$.

Úloha 2.73. Napíšte rovnice dotyčníc elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, ktoré vytínajú na kladných osiach rovnako veľké úseky.

Riešenie: Smernica dotyčnice elipsy je $-\frac{b^2t_1}{a^2t_2} = -1$. Potom dotykový bod má súradnice

$$\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \text{ a dotyčnica má rovnicu } x + y = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Úloha 2.74. Aký uhol zvierajú dotyčnice k elipse $3x^2 + 6y^2 = 18$, ktoré prechádzajú bodom $A[4, -1]$.

Riešenie: $\alpha = 56^\circ 19'$.

Úloha 2.75. Určte, čo je množinou všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu

a) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 444 = 0$;

b) $9x^2 + 4y^2 + 40x - 36y + 152 = 0$;

c) $x^2 + 16y^2 - 16x - 32y + 64 = 0$;

d) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 23 = 0$.

Riešenie: a), c), d) elipsy; b) prázdna množina.

Úloha 2.76. V rovnici elipsy $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ určte parameter b tak, aby priamka $2x + 3y - 12 = 0$ bola jej dotyčnicou.

Riešenie: $b = \frac{\sqrt{44}}{3}$.

Úloha 2.77. Určte všetky hodnoty parametra q , pre ktoré má priamka $y = x + q$ s elipsou $9x^2 + 16y^2 = 144$ aspoň jeden spoločný bod.

Riešenie: $q \in \langle -5, 5 \rangle$.

Úloha 2.78. Určte množinu všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu $A = [-6, 0]$ je dvakrát menšia ako od priamky $x + 1 = 0$.

Riešenie: $3x^2 + 4y^2 + 50x + 143 = 0$.

Úloha 2.79. Do elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je vpísaný štvorec (t.j. všetky vrcholy štvorca sú bodmi elipsy). Vyjadrite obsah štvorca pomocou dĺžok hlavnej a vedľajšej poloosi.

Riešenie: $\mathcal{P} = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Úloha 2.80. Do elipsy $x^2 + 9y^2 = 9$ je vpísaný rovnostranný trojuholník ABC , ktorý je súmerný podľa jej hlavnej osi. Vypočítajte súradnice jeho vrcholov.

Riešenie: $A = [3, 0]$, $B = [\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $C = [\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$; $A' = [-3, 0]$, $B' = [-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $C' = [-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Úloha 2.81. Daná je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a bod $S = [0, 0]$. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá má s elipsou jeden spoločný bod M ,

a) má maximálny polomer a jej stred leží na úsečke SM , kde $M = [a, 0]$;

b) má minimálny polomer a jej stred leží na polpriamke SM , kde $M = [0, -b]$.

Návod: V rovniciach pre súradnice spoločných bodov kružnice a elipsy vyjadrite podmienku pre dvojnásobný koreň.

Úloha 2.82. Elipsa má rovnicu $9x^2 + 4y^2 = 36$. Napíšte rovnicu priamky, na ktorej leží tetiva so stredom v bode $S = [1, -2]$.

Riešenie: Rovnica hľadanej priamky je $x = 1 + tu$, $y = -2 + tv$. Dosadením do rovnice elipsy dostaneme rovnicu $(9u^2 - 8v^2)t^2 + 2(9u - 8v)t - 11 = 0$. Ak $9u - 8v = 0$, tak rovnica má riešenie $\pm t$ (parametre spoločných bodov priamky a kuželosečky.) Hľadaná priamka je určená bodom S a vektorom $\vec{u}(8, 9)$.

Úloha 2.83. Napíšte rovnicu priamky, na ktorej leží tetiva elipsy $25x^2 + 64y^2 = 1600$ so stredom v bode $S = [4, 3]$.

Riešenie: $25x + 48y - 244 = 0$.

Úloha 2.84. Daná je elipsa $12x^2 + 16y^2 = 192$ a priamka $3x + 10y - 24 = 0$, ktorá je polárou bodu P vzhľadom na elipsu. Určte súradnice bodu P .

Riešenie: $P = [2, 5]$.

Úloha 2.85. Vypočítajte veľkosť strany rovnostranného trojuholníka vpísaného do elipsy s poloosami a , b , ktorého jedna strana je rovnobežná s hlavnou osou elipsy.

Riešenie: Bez ujmy na všeobecnosti (stačí vhodne voliť súradnicovú sústavu) môžeme predpokladať, že elipsa má rovnicu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a bod C má súradnice $[0, b]$. Vrchol A je prienikom elipsy s priamkou $y = \sqrt{3}x + b$, ktorá prechádza bodom C a zvierá s hlavnou osou uhol 60° . Dosadením rovnice priamky do rovnice elipsy dostávame rovnicu $b^2x^2 + a^2(3x^2 + 2bx\sqrt{3} + b^2) = a^2b^2$, ktorej riešením sú súradnice spoločných bodov priamky a elipsy. Spoločné body majú súradnice $[0, b]$ a $[-\frac{2a^2b\sqrt{3}}{3a^2+b^2}, -\frac{6a^2b}{3a^2+b^2} + b]$. Pretože body A a B sú súmerné podľa vedľajšej osi, dĺžka strany trojuholníka je $\frac{4a^2b\sqrt{3}}{3a^2+b^2}$.

Úloha 2.86. Vypočítajte veľkosť strany štvorca, ktorý je vpísaný do elipsy s poloosami a , b tak, že jeho strany sú rovnobežné s osami elipsy.

Riešenie: $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Úloha 2.87. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú kružníc $x^2 + y^2 = r^2$ a $x^2 + y^2 - rx = 0$.

Riešenie: Dané kružnice majú rovnice $k_1(S_1, r_1) : x^2 + y^2 = r^2$ a $k_2(S_2, r_2) : (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = (\frac{r}{2})^2$. Nech $k(X, x)$ je kružnica, ktorá sa dotýka kružnice k_1 z vnútra v bode T_1 a k_2 v bode T_2 z vonku. Platí $|S_1X| = |S_1T_1| - x = r - x$ a $|S_2X| = \frac{r}{2} + x$. Sčítaním týchto rovníc dostávame $|S_1X| + |S_2X| = r + \frac{r}{2}$. Na pravej strane je výraz, ktorý nezávisí od bodu X , t.j. je to elipsa. Stredy kružníc, ktoré sa dotýkajú súčasne k_1 a k_2 z vonku alebo z vnútra ležia na osi \mathbf{o}_x . Množina stredov je zjednotením elipsy a priamky.

Úloha 2.88. Daná je kružnica k a vo vnútri bod A . Nájdite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodom A a dotýkajú sa danej kružnice.

Riešenie: Množina stredov je elipsa, ktorej ohniskami sú bod A a stred danej kružnice.

Úloha 2.89. Dané sú vrcholy A, B trojuholníka $\triangle ABC$ a jeho obvod. Určte množinu všetkých možných vrcholov C .

2.2.2 Hyperbola

Hyperbola je množina všetkých bodov $X = [x, y]$ v rovine, ktoré majú od bodov F_1 a F_2 konštantný v absolútnej hodnote rozdiel vzdialeností $2a$, ktorý je menší ako $|F_1F_2|$. Body F_1 a F_2 sa nazývajú *ohniská* hyperboly a číslo a je veľkosť *hlavnej poloosi* hyperboly. Stred S úsečky F_1F_2 je *stred* hyperboly. Vzdialenosť e ohnísk od stredu elipsy nazývame *excentricita* (lineárna výstrednosť) elipsy. Symbolom b označujeme číslo $\sqrt{e^2 - a^2}$, ktoré predstavuje veľkosť *vedľajšej poloosi* hyperboly.

Rovnica hyperboly so stredom $S = [s_1, s_2]$, ktorej osi sú rovnobežné so súradnicovými osami je

$$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} - \frac{(y - s_2)^2}{b^2} = 1. \quad (2.4)$$

Dotyčnica hyperboly (2.4) v bode $T = [t_1, t_2]$ má rovnicu

$$\frac{(x - s_1)(t_1 - s_1)}{a^2} - \frac{(y - s_2)(t_2 - s_2)}{b^2} = 1$$

Ak si do rovnice dotyčnice hyperboly dosadíme namiesto súradníc dotykového bodu súradnice bodu $Z = [z_1, z_2]$, ktorý neleží na hyperbole a je rôzny od jej stredu, tak dostaneme rovnicu *poláry* bodu Z . Ak polára bodu Z má s hyperbolou spoločné body, tak tieto sú dotykovými bodmi dotyčníc vedených z bodu Z k danej hyperbole.

Asymptoty $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ hyperboly (2.4) majú rovnice

$$\mathbf{a}_{1,2} : (y - s_2) = \pm \frac{b}{a}(x - s_1).$$

Asymptoty hyperboly zvierajú s hlavnou osou uhol α , pre veľkosť ktorého platí $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ a osi uhlov určených asymptotami sú osi hyperboly (tj. asymptoty hyperboly $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ dostaneme ako priamky incidentné s uhlopriečkami obdĺžnika,

ktorého stred je totožný so stredom hyperboly a jeho strany s dĺžkami $2a$ a $2b$ sú rovnobežné s hlavnou a vedľajšou osou hyperboly). Asymptoty *rovnoosej hyperboly* sú na seba kolmé.

Úloha 2.90. Určte súradnice stredu, vrcholov a ohnisk hyperboly

$$\text{a) } x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0; \quad \text{b) } 25x^2 - 16y^2 - 150x + 224y - 959 = 0.$$

Riešenie: a) $S = [-2, 0]$, $V_1 = [-5, 0]$, $V_2 = [1, 0]$, $F_1 = [-2 - \sqrt{10}, 0]$, $F_2 = [-2 + \sqrt{10}, 0]$;

$$\text{b) } S = [3, 7], V_1 = [-1, 7], V_2 = [7, 7], F_1 = [3 - \sqrt{41}, 7], F_2 = [3 + \sqrt{41}, 7].$$

Úloha 2.91. Napíšte osovú rovnicu hyperboly $4x^2 - 9y^2 + 16x - 18y - 29 = 0$.

Riešenie: Úpravou na úplný štvorec dostaneme $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

Úloha 2.92. Určte množinu všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu

$$\text{a) } y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}; \quad \text{b) } y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13};$$

$$\text{c) } x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}; \quad \text{d) } x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}.$$

Riešenie: a) Časť hyperboly $4(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 36$;

b) Vetva hyperboly $-9(x - 3)^2 + 4(y - 7)^2 = 36$;

c) Vetva hyperboly $4(x - 9)^2 - 16(y + 2)^2 = 64$;

d) Časť hyperboly $-16(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 144$.

Úloha 2.93. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má ohniská vo vrcholoch elipsy a vrcholy v ohniskách elipsy

$$\text{a) } 9x^2 + 25y^2 = 225; \quad \text{b) } 9x^2 + 16(y - 3)^2 = 144;$$

$$\text{c) } 5(x - 2)^2 + 8(y + 6)^2 = 40; \quad \text{d) } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Riešenie: a) $9x^2 - 16y^2 = 144$; b) $9x^2 - 7(y - 3)^2 = 63$;

$$\text{c) } 5(x - 2)^2 - 3(y + 6)^2 = 15; \quad \text{d) } b^2x^2 - (a^2 - b^2)y^2 = b^2(a^2 - b^2).$$

Úloha 2.94. Koľkými bodmi je jednoznačne určená hyperbola, ktorej osi sú rovnobežné so súradnicovými osami?

Riešenie: V osovej rovnici hyperboly sú štyri parametre a preto na jej určenie potrebujeme štyri rôzne body.

Úloha 2.95. Vypočítajte súradnice dotykového bodu dotyčnice $2x - y - 8 = 0$ hyperboly $8x^2 - 18y^2 - 144 = 0$.

Úloha 2.103. Vypočítajte súradnice bodu P hyperboly $9x^2 - 4y^2 = 324$, ktorého vzdialenosť od priamky $15x - 4y - 60 = 0$ je minimálna.

Riešenie: $P = \left[\frac{10\sqrt{21}}{7}, \frac{-6\sqrt{21}}{7} \right]$.

Úloha 2.104. Vypočítajte obsah trojuholníka, ktorý je ohraničený asymptotami hyperboly $16x^2 - 25y^2 = 400$ a jej dotyčnicou v bode $T = [10, ?]$.

Riešenie: Asymptoty hyperboly majú rovnice $4x \pm 5y = 0$ a zvierajú uhol veľkosti $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-\frac{4}{5} - \frac{4}{5}}{1 - \frac{16}{25}} \right| = \frac{40}{9}$. Ďalej vypočítame súradnice dotykového bodu a napíšeme rovnicu dotyčnice $16x - 10\sqrt{3}y = 40$. Vrcholy trojuholníka sú $A = [5(2 - \sqrt{3}), -4(2 - \sqrt{3})]$, $B = [5(2 + \sqrt{3}), 4(2 + \sqrt{3})]$ a $C = [0, 0]$. Potom obsah trojuholníka je 20.

Úloha 2.105. Napíšte rovnicu dotyčnice hyperboly $9x^2 - 16y^2 = 144$, ktorá zvierá s priamkou $y = 5x - 2$ uhol veľkosti 45° .

Riešenie: $3x + 2y \pm 6\sqrt{3} = 0$ a $3x - y \pm \sqrt{69} = 0$.

Úloha 2.106. Napíšte osovú rovnicu hyperboly, ktorá sa dotýka priamok $5x - 6y - 16 = 0$ a $13x - 10y - 48 = 0$.

Riešenie: $x^2 - 4y^2 = 16$.

Úloha 2.107. Napíšte rovnicu hyperboly s asymptotami $\mathbf{a}_{1,2}$, ktorá prechádza bodom M , ak

a) $\mathbf{a}_{1,2} : y - 3 = \pm 2(x + 1), M = [4, 9];$

b) $\mathbf{a}_{1,2} : 3x \pm 2y = 0, M = [3, \frac{3}{2}\sqrt{5}].$

Riešenie: a) $4(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 64;$ b) $9x^2 - 4y^2 = 36.$

Úloha 2.108. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má asymptoty $2y = \pm x$ a dotýka sa priamky $5x - 6y - 8 = 0$.

Riešenie: $x^2 - 4y^2 = 4.$

Úloha 2.109. Určte bod hyperboly $16x^2 - 49y^2 = 784$, ktorého vzdialenosť od jednej asymptoty je trikrát väčšia ako od druhej.

Riešenie: $\left[\frac{14}{\sqrt{3}}, \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \right]$ a $\left[\frac{-14}{\sqrt{3}}, \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \right]$.

Úloha 2.110. Daná je hyperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Určte hodnotu parametra m tak, aby priamka $y = \frac{5}{2} + m$ bola jej sečnicou (dotyčnicou).

Riešenie: Pre $|m| > \frac{9}{2}$ je sečnicou a pre $m = \pm \frac{9}{2}$ dotyčnicou.

Úloha 2.111. Napíšte rovnicu dotyčnice a asymptoty hyperboly $xy - 1 = 0$, ktoré prechádzajú bodom $M = [1, 3]$.

Riešenie: Do rovnice kužeľosečky dosadíme parametrické rovnice priamky $x = 1 + tu$, $y = 3 + tv$ a dostaneme rovnicu $uvt^2 + (3u + v)t + 2 = 0$. Jej diskriminant $9u^2 - 2uv + v^2$ sa nerovná nule pre žiaden nenulový vektor (u, v) . To znamená, že bodom $M = [1, 3]$ neprechádza žiadna dotyčnica ani asymptota (bod je vnútorným bodom hyperboly).

Úloha 2.112. Napíšte rovnicu geometrického miesta všetkých bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od kružnice $x^2 + y^2 + 4x = 0$ a bodu $M = [2, 0]$.

Riešenie: Platí $|MX| = |SX| + 2$. Z toho $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + 2$. Úpravou dostávame časti hyperboly $3x^2 - y^2 = 3$.

Úloha 2.113. Určte množinu všetkých bodov roviny, ktoré majú od bodu $[-6, 0]$ dvakrát väčšiu vzdialenosť ako od priamky $x + 1 = 0$.

Riešenie: $9(x - \frac{2}{3})^2 - 3y^2 = 100$.

Úloha 2.114. Dokážte, že súčin vzdialenosti ľubovoľného bodu hyperboly $x^2 - y^2 = 1$ od jej asymptot je konštantný.

Riešenie: Rovnice asymptot hyperboly sú $y = x$, $y = -x$ a ľubovoľný bod hyperboly má súradnice $[x, \sqrt{x^2 - 1}]$. Pre súčin vzdialeností tohto bodu od asymptot danej hyperboly platí:

$$\frac{|1 \cdot x + 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot \frac{|1 \cdot x - 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Úloha 2.115. Napíšte ohniskovú rovnicu hyperboly $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$.

Riešenie: $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x - 1\right)^2$.

Úloha 2.116. Určte asymptoty a dotyčnice kužeľosečky danej všeobecnou rovnicou $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$, ktoré prechádzajú bodom $Z = [-2, 1]$.

Riešenie: Parametrické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodom Z je $x = -2 + ut$, $y = 1 + vt$. Dosadením do rovnice kužeľosečky, dostávame $(u^2 - 2uv)t^2 + 2(4v - 2u)t + 3 = 0$. Pretože kužeľosečka má mať s priamkou najviac jeden spoločný bod, musí byť jej diskriminant rovný 0, t.j. $[2(4v - 2u)]^2 - 4(u^2 - 2uv)3 = 0$. Z toho $u^2 - 10uv + 16v^2 = 0$. Tejto rovnici vyhovujú riešenia $(8, 1)$ a $(2, 1)$. Asymptotické smery sú riešením rovnice $u^2 - 2uv = 0$. Túto rovnicu spĺňajú súradnice vektora $(2, 1)$ a nespĺňajú súradnice vektora $(8, 1)$.

Bodom $[-2, 1]$ a vektorom $(8, 1)$ je určená dotyčnica $x - 8y + 10 = 0$.

Bodom $[-2, 1]$ a vektorom $(2, 1)$ je určená asymptota $x - 2y + 4 = 0$.

Úloha 2.117. Dokážte, že ak elipsa a hyperbola majú totožné ohniská, tak sa pretínajú pod pravým uhlom (dotyčnice v spoločných bodoch sú navzájom kolmé).

Úloha 2.118. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa zvonku dotýkajú dvoch daných kružníc.

2.2.3 Parabola

Parabola je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daného bodu F a danej priamky \mathbf{d} . Bod F nazývame *ohnisko* a priamku \mathbf{d} nazývame *direkčná (riadiaca) priamka* paraboly. Na rozdiel od elipsy a hyperboly, parabola nemá stred a má len jednu os. Priesečník V osi s parabolou je *vrchol* paraboly. Vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky označujeme p a nazývame *parametrom* paraboly.

Rovnica paraboly s parametrom p , ktorej osou je priamka rovnobežná s osou \mathbf{o}_x , resp. \mathbf{o}_y a vrcholom $V = [m, n]$ je

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m), \quad \text{resp.} \quad (x - m)^2 = \pm 2p(y - n).$$

Dotyčnica paraboly $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ v bode $T = [t_1, t_2]$ má rovnicu

$$(y - n)(t_2 - n) = p[(x - m) + (t_1 - m)].$$

Úloha 2.119. Napíšte rovnicu množiny všetkých bodov roviny, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodu $A = [-3, 0]$ a priamky $\mathbf{p} : x + 6 = 0$.

Riešenie: Vzdialenosť bodu $X = [x, y]$ od bodu A je $|AX| = \sqrt{(x + 3)^2 + y^2}$ a od danej priamky \mathbf{p} je $|X\mathbf{p}| = |x + 6|$. Porovnaním $\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = |x + 6|$ a úpravou dostávame rovnicu paraboly $y^2 = 6x + 27$.

Úloha 2.120. Určte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa zvonku dotýkajú danej kružnice $k(S, r)$ a priamky prechádzajúcej jej stredom.

Riešenie: Zvoľme súradnicovú sústavu tak, aby kružnica mala rovnicu $x^2 + y^2 = r^2$ a priamka $y = 0$. Nech $X = [x, y]$ je stred kružnice, ktorá sa dotýka danej kružnice aj priamky. Vzdialenosť $|SX| = \sqrt{x^2 + y^2} - r$ a vzdialenosť bodu X od priamky $y = 0$ je $|y|$. Platí $\sqrt{x^2 + y^2} = r + |y|$ a odtiaľ dostávame rovnicu paraboly.

Úloha 2.121. Napíšte rovnicu paraboly s vrcholom v začiatku súradnicového systému, ktorá je súmerná podľa osi \mathbf{o}_x a na priamke $y = x$ vytína tetivu dĺžky $4\sqrt{2}$.

Riešenie: $y^2 = 4x, y^2 = -4x$.

Úloha 2.122. Napíšte rovnicu paraboly určenej ohniskom F a direkčnou priamkou \mathbf{d} , ak

a) $F = [3, -7], \mathbf{d} : x - 5 = 0;$

b) $F = [-3, -8], \mathbf{d} : y + 4 = 0;$

c) $F = [-6, 4], \mathbf{d} : y - 6 = 0;$

d) $F = [2, -1], \mathbf{d} : x - y - 1 = 0.$

Riešenie: a) $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$; b) $-8(y + 6) = (x + 3)^2$;
 c) $-4(y - 5) = (x + 6)^2$; d) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

Úloha 2.123. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá má vrchol v počiatku, osou je os \mathbf{o}_x a dotýka sa priamky $3x - 2y + 8 = 0$.

Riešenie: $y^2 = 24x$.

Úloha 2.124. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá má vrchol

a) $V = [3, -7]$ a prechádza bodom $M = [4, -5]$;

b) $V = [5, 4]$ a prechádza bodom $M = [0, \frac{13}{2}]$,

a jej os je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou.

Riešenie: a) $(y + 7)^2 = 4(x - 3)$, $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 7)$;
 b) $(x - 5)^2 = 10(y - 4)$, $(y - 4)^2 = -\frac{5}{4}(x - 5)$.

Úloha 2.125. Parabola má os rovnobežnú s osou \mathbf{o}_x a obsahuje body A , B , C . Napíšte jej rovnicu, ak

a) $A = [2, 4]$, $B = [-1, 7]$, $C = [1, 3]$; b) $A = [3, 3]$, $B = [0, 12]$, $C = [4, 6]$;

c) $A = [0, 0]$, $B = [\frac{9}{2}, 9]$, $C = [12, -6]$.

Riešenie: a) $-2(x - \frac{17}{8}) = (y - \frac{9}{2})^2$; b) $-9(x - 4) = (y - 6)^2$;
 c) $(y - 3)^2 = 6(x + \frac{3}{2})$.

Úloha 2.126. Parabola má os rovnobežnú s osou \mathbf{o}_y a obsahuje body A , B , C . Napíšte jej rovnicu, ak

a) $A = [-5, 3]$, $B = [1, 9]$, $C = [-\frac{7}{2}, 6]$; b) $A = [3, 3]$, $B = [0, 12]$, $C = [4, 6]$;

c) $A = [0, 6]$, $B = [3, 3]$ a $C = [5, 4]$.

Riešenie: a) $-\frac{9}{2}(y - \frac{73}{8}) = (x - \frac{1}{4})^2$; b) $-\frac{2}{3}(y - \frac{21}{8}) = (x - \frac{5}{2})^2$;
 c) $3x^2 - 19x - 10y + 60 = 0$.

Úloha 2.127. Vypočítajte súradnice spoločných bodov priamky $x + y - 3 = 0$ a paraboly $x^2 = 4y$.

Riešenie: $[2, 1]$, $[-6, 9]$.

Úloha 2.128. Napíšte rovnicu dotýčnice paraboly

a) $y^2 = 7x$ v bode $T = [\frac{7}{4}, t_2]$, $t_2 > 0$;

b) $y^2 = 3x$ v bode $T = [t_1, 6]$.

Riešenie: a) $4x - 4y + 7 = 0$, b) $x - 4y + 12 = 0$.

Úloha 2.129. Vypočítajte súradnice spoločných bodov parabol $y = x^2 - 2x + 1$ a $x = y^2 - 6y + 7$.

Riešenie: $[2, 1], [-1, 4], \left[\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right], \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right]$.

Úloha 2.130. Pre akú hodnotu parametra k priamka $y = kx + 2$ pretína parabolu $y^2 = 4x$.

Riešenie: $k < \frac{1}{2}$.

Úloha 2.131. Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 = 8x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $2x + 2y - 3 = 0$.

Riešenie: Porovnaním koeficientov priamky $y = -x + 3$ a dotyčnice $y = \frac{4}{t_2}x + \frac{4t_1}{t_2}$ dostaneme vzťah $\frac{4}{t_2} = -1$ a teda $t_2 = -4$. Zo vzťahu $t_2^2 = 8t_1$ dostaneme $t_1 = -4$ a rovnica dotyčnice je $x + y + 2 = 0$.

Úloha 2.132. Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 = 4x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $2x - 4y + 7 = 0$.

Riešenie: $x - 2y + 4 = 0$.

Úloha 2.133. Napíšte rovnice dotyčníc paraboly $y^2 = 36x$, ktoré prechádzajú bodom $Z = [2, 9]$.

Riešenie: Rovnica poláry je $z_2y = 18(z_1 + x)$ a pre bod $Z = [2, 9]$ je $y = 2(2 + x)$. Dosadením do rovnice paraboly dostaneme rovnicu $(4 + 2x)^2 = 36x$. Pre x -ové súradnice dotykových bodov dostávame $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$. Pre $x_1 = 4$ je $y_1 = 12$ a dotyčnica má rovnicu $3x - y + 3 = 0$ a pre $x_2 = 1$ je $y_2 = 6$ a dotyčnica $3x - 2y + 12 = 0$.

Úloha 2.134. Na parabole $y^2 = 32x$ nájdite bod, ktorého vzdialenosť od priamky $4x + 3y + 10 = 0$ je rovná 2.

Riešenie: $A = [0, 0]$ a $B = [18, -24]$.

Úloha 2.135. Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 = 12x$, ktorá zvierá s priamkou $3x - y - 4 = 0$ uhol 45° .

Riešenie: $4x + 2y + 3 = 0; x - 2y + 12 = 0$.

Úloha 2.136. Na parabole $y^2 = 64x$ určte bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $4x + 3y - 14 = 0$. Vypočítajte túto vzdialenosť.

Riešenie: Hľadaným bodom je bod dotyku dotyčnice paraboly rovnobežnej z danou priamkou. Rovnica dotyčnice v bode $T = [t_1, t_2]$ je $y = \frac{32}{t_2}x + \frac{32}{t_2}t_1$ a rovnica danej priamky $y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$. Porovnaním koeficientov pri x dostávame $\frac{32}{t_2} = -\frac{4}{3}$ a z toho $t_2 = -24$. Z rovnice $(-24)^2 = 64t_1$ dostávame $t_1 = 9$. Riešením je bod $T = [9, -24]$. Vzdialenosť bodu T od danej priamky je $d = 10$.

Úloha 2.144. Napíšte rovnicu priamky, na ktorej leží tetiva paraboly $y^2 = 4x$ so stredom v bode $S = [2, 1]$.

Riešenie: $2x - y - 3 = 0$.

Úloha 2.145. Do paraboly $y^2 = 11x$ je vpísaný rovnostranný trojuholník, ktorý má jeden vrchol vo vrchole paraboly. Vypočítajte veľkosť jeho strany.

Návod: Zistite súradnice priesečníkov priamky $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ s danou parabolou. Rozdiel ich x -ových súradníc je veľkosť výšky vpísaného trojuholníka.

Úloha 2.146. Ak sa dve paraboly, ktorých osi sú navzájom kolmé pretínajú v štyroch bodoch, tak spoločné body ležia na jednej kružnici. Dokážte.

Riešenie: Ak si zvolíme ich osi za súradnicové osi, tak paraboly majú rovnice $y^2 = 2p(x - m)$ a $x^2 = 2q(y - n)$. Ich sčítaním dostaneme rovnicu typu $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Toto je rovnica kružnice, lebo existujú aspoň dva body, ktorých súradnice jej vyhovujú.

Úloha 2.147. Napíšte rovnicu kuželosečky, ktorá prechádza bodom $A[5, 1]$ a prechádza spoločnými bodmi elipsy $32(x - 2)^2 + 9(y - 7)^2 = 648$ a paraboly $x^2 - 4x - 3y - 3 = 0$.

Riešenie: Hyperbola $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$.

Úloha 2.148. Dokážte, že spoločné body paraboly $x^2 - 2x - y - 1 = 0$ a elipsy $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ ležia na jednej kružnici.

Riešenie: Rovnica danej kružnice je $(x - \frac{8}{9})^2 + (y - \frac{4}{9})^2 = \frac{233}{81}$.

Úloha 2.149. Ak platí $ac = b^2$, tak množina bodov $X = [x, y]$ roviny, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ je rovnicou paraboly, priamky, dvoch rovnobežných priamok alebo prázdnej množiny. Dokážte.

Poznámka: V tomto prípade môžeme rovnicu danej množiny bodov $X = [x, y]$ roviny písať v tvare $(\alpha x + \beta y)^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

2.3 Kvadratické plochy

2.3.1 Guľová plocha

Guľovou plochou $\mathbf{g}(S, r)$ nazývame množinu všetkých bodov $X = [x, y, z]$ priestoru \mathbb{E}_3 , ktoré majú od bodu $S = [s_1, s_2, s_3]$ vzdialenosť $r > 0$. Pevný bod S nazývame *stred* a číslo r *polomer* guľovej plochy. Rovnica guľovej plochy $\mathbf{g}(S, r)$ vo zvolenej pravouhlej sústave súradníc je

$$(X - S)^2 = r^2, \quad \text{resp.} \quad (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 + (z - s_3)^2 = r^2. \quad (2.5)$$

Dotyková rovina guľovej plochy (2.5) v bode $T = [t_1, t_2, t_3]$ má rovnicu

$$(X - S)(T - S) = r^2, \quad \text{resp.} \\ (x - s_1)(t_1 - s_1) + (y - s_2)(t_2 - s_2) + (z - s_3)(t_3 - s_3) = r^2.$$

Ak si do rovnice dotykovej roviny dosadíme namiesto súradníc dotykového bodu súradnice ľubovoľného bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$, tak analogicky ako v prípade kružnice, dostaneme rovnicu tzv. *polárnej roviny* guľovej plochy \mathbf{g} vzhľadom na *pól* M , v ktorej ležia dotykové body všetkých dotykových rovín vedených z bodu M k danej guľovej ploche.

Uvažujme v priestore \mathbb{E}_3 dve nesústredné guľové plochy $\mathbf{g}_1 : (X - S)^2 - r_1^2 = 0$, $\mathbf{g}_2 : (X - T)^2 - r_2^2 = 0$. Pod *zväzkom guľových plôch* rozumieme množinu všetkých guľových plôch, ktorých rovnice sa dajú vyjadriť v tvare

$$\alpha[(X - S_1)^2 - r_1^2] + \beta[(X - S_2)^2 - r_2^2] = 0,$$

alebo po úprave

$$(\alpha + \beta)(x^2 + y^2 + z^2) - 2[(\alpha s_1 + \beta t_1)x + (\alpha s_2 + \beta t_2)y + (\alpha s_3 + \beta t_3)z] + \\ + \alpha s_1^2 + \beta t_1^2 + \alpha s_2^2 + \beta t_2^2 + \alpha s_3^2 + \beta t_3^2 - \alpha r_1^2 - \beta r_2^2 = 0. \quad (2.6)$$

Ak $\alpha + \beta = 0$, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme položiť $\alpha = 1$, $\beta = -1$ a (2.6) je rovnicou roviny ϱ v tvare

$$\varrho : 2(t_1 - s_1)x + 2(t_2 - s_2)y + 2(t_3 - s_3)z + (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - r_1^2) - \\ - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - r_2^2) = 0,$$

ktorá je kolmá na spojnicu stredov guľových plôch a nazýva sa *chordálová rovina* daných guľových plôch. Navyše, ak \mathbf{g}_1 a \mathbf{g}_2 majú neprázdny prienik, súradnice všetkých spoločných bodov splňajú rovnicu (2.6).

Ak $\alpha + \beta \neq 0$, tak rovnicu (2.6) upravíme na tvar

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 + (z - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - D, \quad (2.7)$$

kde

$$A = \frac{\alpha s_1 + \beta t_1}{\alpha + \beta}, \quad B = \frac{\alpha s_2 + \beta t_2}{\alpha + \beta}, \quad C = \frac{\alpha s_3 + \beta t_3}{\alpha + \beta},$$

$$D = \frac{\alpha(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \beta(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)}{\alpha + \beta}$$

Počet spoločných bodov guľových plôch závisí od výrazu na pravej strane rovnice (2.7). Označme $R = A^2 + B^2 + C^2 - D$.

- (i) Ak $R < 0$, tak rovnici (2.7) nevyhovuje žiaden bod;
- (ii) Ak $R = 0$, tak rovnici (2.7) vyhovuje jediný bod $[A, B, C]$;
- (iii) Ak $R > 0$, tak rovnicou (2.7) je určená guľová plocha so stredom $[A, B, C]$ a polomerom \sqrt{R} .

Úloha 2.150. Nájdite stred a polomer guľovej plochy, ak jej rovnica je

- a) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$;
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 5 = 0$;
- c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 11 = 0$;
- d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 4z - 15 = 0$.

Riešenie: a) $S = [-4, 0, 0], r = 4$; b) $S = [-1, 2, 0], r = 3$; c) $S = [3, -1, 2], r = 5$;
d) $S = [-1, -4, -2], r = 6$.

Úloha 2.151. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ak

- a) jej stred je $S = [-1, 2, -5]$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy;
- b) jej stred je $S = [5, -6, 3]$ a prechádza bodom $A = [7, -3, 9]$;
- c) koncové body jedného jej priemeru sú $A = [3, -5, 2], B = [9, 7, 6]$;
- d) jej stred je $S = [-1, 3, 4]$ a dotyková rovina je $3x + 6y + 2z + 12 = 0$;
- e) prechádza bodmi $A = [4, -1, 0], B = [-1, 2, 4], C = [-4, -2, 3]$ a jej stred leží v rovine $2x + y - z + 6 = 0$;

f) prechádza bodmi $A = [2, -4, 2]$, $B = [-4, 8, 2]$, $C = [5, -1, 14]$ a $D = [-7, -4, 5]$;

g) jej stred je $S = [-7, 3, 4]$ a dotýka sa osi \mathbf{o}_y .

Riešenie: a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 30$; b) $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 + (z - 3)^2 = 49$;

c) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 49$; d) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 25$;

e) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 6)^2 = 49$; f) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 8)^2 = 81$;

g) $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 49$.

Úloha 2.152. Daná je priamka $\mathbf{p} : x = 4, y = 1 - 6t, z = 4 - 6t$ a bod $A = [-6, 6, 5]$. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred v bode A a s priamkou \mathbf{p} má práve jeden spoločný bod.

Riešenie: $(x + 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 5)^2 = 108$.

Úloha 2.153. Medzi guľovými plochami $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 + d = 0$, kde $d \in \mathbb{R}$, určte tie, ktoré majú s priamkou $x = 7 + 5t, y = 3 + 2t, z = 6 + t$ práve jeden spoločný bod.

Riešenie: $d = -26$.

Úloha 2.154. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza

a) kružnicou $x^2 + y^2 + z^2 = 16, 3x - 2y + 6z - 8 = 0$ a začiatkom súradnicovej sústavy;

b) kružnicou $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25, x - y - z - 1 = 0$ a bodom $A = [2, 2, -2]$;

c) kružnicami $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 113, z = 7$.

Riešenie: a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12z = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z - 26 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 22z + 41 = 0$

Úloha 2.155. Napíšte rovnicu guľovej plochy opísanej štvorstenu s vrcholmi $O = [0, 0, 0]$, $A = [3, 0, 0]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [0, 0, 3]$ a nájdite jej stred a polomer.

Riešenie: $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 + (z - \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{2} = 0$.

Úloha 2.156. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá

a) má polomer $r = 5$ a dotýka sa roviny $3x - 6y + 2z - 12 = 0$ v bode $M = [2, 1, 6]$;

b) dotýka sa rovín $2x + 2y + z - 12 = 0, 2x + 2y + z + 18 = 0$, pričom bod dotyku je $M = [2, -2, 12]$;

- c) dotýka sa rovín $2x - y - 2z + 2 = 0$, $2x - y - 2z - 4 = 0$ a jej stred leží na priamke $x + 4y + 5z - 14 = 0$, $x - 2y - 4z + 7 = 0$.

Riešenie: a) $(x - \frac{29}{7})^2 + (y + \frac{33}{7})^2 + (z - \frac{52}{7})^2 = 25$; $(x + \frac{1}{7})^2 + (y - \frac{37}{7})^2 + (z - \frac{32}{7})^2 = 25$;

b) $(x + \frac{4}{3})^2 + (y + \frac{16}{3})^2 + (z - \frac{31}{3})^2 = 25$;

c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

Úloha 2.157. Napíšte rovnice všetkých guľových plôch, ktoré sa dotýkajú rovín $2x - 2y - z - 9 = 0$, $2x - 2y - z + 9 = 0$ a prechádzajú bodmi $M = [0, 1, 2]$, $N = [3, 0, 2]$.

Riešenie: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$.

Úloha 2.158. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred $S = [4, -2, 3]$ a na priamke $x + y - 11 = 0$, $2x - y - 2z = 0$ vytína tetivu dĺžky 12.

Riešenie: Vypočítame vzdialenosť stredu S od priamky a použijeme Pythagorovu vetu. Hľadaná rovnica je $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 85$.

Úloha 2.159. Dané sú dve guľové plochy rovnicami $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$ a $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$. Napíšte rovnicu

- roviny, ktorá obsahuje ich spoločné body;
- guľovej plochy, ktorá prechádza ich spoločnými bodmi a začiatkom súradnicovej sústavy.

Riešenie: a) Odpočítaním druhej rovnice od prvej dostaneme rovnicu roviny $2x + 2y - 4z - 5 = 0$, ktorá obsahuje ich spoločné body;

b) Každá guľová plocha obsahujúca všetky ich spoločné body má tvar $\alpha[x^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 16] + \beta[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 9] = 0$, kde α a β sú reálne parametre. Dosadením súradníc začiatku súradnicového systému dostaneme $\alpha[(-2)^2 - 16] + \beta[(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 - 9] = 0 \implies -12\alpha - 7\beta = 0$. Ak do vyššie uvedenej rovnice dosadíme hodnoty parametrov $\alpha = 7$ a $\beta = -12$ dostaneme rovnicu hľadanej plochy $(x - \frac{12}{5})^2 + (y - \frac{12}{5})^2 + (z + \frac{14}{5})^2 = (\frac{22}{5})^2$.

Úloha 2.160. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá je určená

- kružnicou $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$, $x + y - 2z + 1 = 0$ a bodom $M = [1, 2, 3]$;
- kružnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0$, $5x + 2y - z - 3 = 0$ a bodom $M = [2, -1, 1]$.

Riešenie: a) Hľadaná guľová plocha má tvar $[x^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 4] + \alpha[x + y - 2z + 1] = 0$. Dosadením súradníc bodu M do tejto rovnice dostávame $[1^2 + 2^2 + (3 - 2)^2 - 4] + \alpha(1 + 2 - 2 \cdot 3 + 1) = 0$ a odtiaľ $\alpha = 1$. Rovnica guľovej plochy je $x^2 + y^2 + z^2 + x + y - 6z + 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 13x + 9y - 9z - 14 = 0$.

Úloha 2.161. Určte vzájomnú polohu priamky a guľovej plochy, ak ich rovnice sú:

a) $\frac{x+5}{7} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-8}{-3}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 4z + 16 = 0$;

b) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-2}{1}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 34 = 0$;

c) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-4}$, $x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 22y + 24z - 164 = 0$.

Riešenie: a) Priamka pretína guľovú plochu v bodoch $M = [2, 1, 5]$, $N = [9, 5, 2]$;

b) Priamka nepretína guľovú plochu;

c) Priamka sa dotýka guľovej plochy v bode $M = [1, -1, 4]$.

Úloha 2.162. Určte vzájomnú polohu guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ a roviny

a) $2x + 3y - z + 6 = 0$; b) $x + y - z - 30 = 0$; c) $2x + 2y + z - 36 = 0$.

Riešenie: a) Polomer danej guľovej plochy je $r = 12$ a vzdialenosť roviny od jej stredu je $d = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$. Pretože $d < r$, rovina pretína guľovú plochu v kružnici, ktorá

leží v danej rovine, má stred $S = [-\frac{6}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7}]$ a polomer $r = \frac{3\sqrt{110}}{7}$;

b) Rovina nemá s guľovou plochou spoločný bod;

c) Rovina sa dotýka guľovej plochy v bode $M = [8, 8, 4]$.

Úloha 2.163. Určte stred a polomer kružnice, ktorá je rezom guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 14y + 2z + 30 = 0$ s rovinou $3x + y - z - 4 = 0$.

Riešenie: $S = [1, 6, 0]$, $r = 5$.

Úloha 2.164. Určte, pre ktoré hodnoty parametra d je prienikom guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y + 8z + 28 = 0$ a roviny $2x - y + 3z + d = 0$ kružnica.

Riešenie: $d \in (1, 29)$.

Úloha 2.165. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 36$

a) v bode $M = [3, 1, 2]$;

b) v priesečníkoch guľovej plochy s priamkou $x - 4y - 1 = 0$, $y + z - 1 = 0$.

Riešenie: a) $x + 2y + 2z - 9 = 0$;

b) $2x + 2y + z - 12 = 0$, $2x - y - 2z + 4 = 0$.

Úloha 2.166. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 4)^2 = 49$, ktoré sú rovnobežné

a) s rovinou $2x - 6y + 3z - 5 = 0$;

b) s priamkami $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z - 3}{4}$, $\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 1}{6}$.

Riešenie: a) $2x - 6y + 3z + 11 = 0$, $2x - 6y + 3z + 109 = 0$;

b) $6x - 2y - 3z + 69 = 0$, $6x - 2y - 3z - 29 = 0$.

Úloha 2.167. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza kružnicami $x^2 + z^2 = 25, y = 2$; $x^2 + z^2 = 16, y = 3$.

Riešenie: $x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 41$.

Úloha 2.168. Napíšte rovnice dotykových rovín ku guľovej ploche $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$, ktoré sú rovnobežné s priamkami $x = 5 + 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = -13 + 2t$; $x = -7 + 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = 8$.

Riešenie: $4x + 6y + 5z - 103 = 0$, $4x + 6y + 5z + 205 = 0$.

Úloha 2.169. Dokážte, že priamkou $8x - 11y + 8z = 30$, $x - y - 2z = 0$ môžeme viesť jedinou dotykovú rovinu ku guľovej ploche $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z - 15 = 0$ a napíšte jej rovnicu.

Úloha 2.170. Dokážte, že cez priamku $8x - 11y + 8z - 30 = 0$, $x - 2z = 0$ možno viesť dve roviny dotýkajúce sa guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$. Napíšte ich rovnice.

Riešenie: $2x - 3y + 4z - 10 = 0$, $3x - 4y + 2z - 10 = 0$.

2.3.2 Kvadriky v \mathbb{E}_3

V priestore majme danú rovinu κ , v nej kužeľosečku \mathbf{K} a bod V mimo nej. Množina bodov všetkých priamok VX , kde $X \in \mathbf{K}$, sa nazýva *kvadratická kužeľová plocha*. Voľme súradnicový systém tak, aby $V = [0, 0, 0]$ a $\kappa : z = c$, kde $c \neq 0$. Potom rovnice kvadratických kužeľových plôch budú:

$$\frac{(x - \frac{m}{c}z)^2}{a^2} + \frac{(y - \frac{n}{c}z)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \dots \textit{ eliptická kužeľová plocha,}$$

$$\frac{(x - \frac{m}{c}z)^2}{a^2} - \frac{(y - \frac{n}{c}z)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \dots \textit{ hyperbolická kužeľová plocha,}$$

$$c\left(y - \frac{n}{c}z\right)^2 - 2p\left(x - \frac{m}{c}z\right)z = 0 \quad \dots \textit{ parabolická kuželová plocha.}$$

V priestore majme danú rovinu κ , v nej kuželosečku \mathbf{K} a priamku \mathbf{p} rôznobežnú s rovinou κ mimo nej. Množina bodov všetkých priamok, ktoré sú rovnobežné s \mathbf{p} a pretínajú \mathbf{K} sa nazýva *kvadratická valcová plocha*. Voľme súradnicový systém tak, aby $\mathbf{p} \equiv \{P; \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\}$. Potom rovnice kvadratických valcových plôch budú:

$$\frac{\left(x - \frac{v_1}{v_3}z\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{v_2}{v_3}z\right)^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textit{ eliptická valcová plocha,}$$

$$\frac{\left(x - \frac{v_1}{v_3}z\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{v_2}{v_3}z\right)^2}{b^2} = 1 \quad \dots \textit{ hyperbolická valcová plocha,}$$

$$\left(y - \frac{v_2}{v_3}z\right)^2 - 2p\left(x - \frac{v_1}{v_3}z\right) = 0 \quad \dots \textit{ parabolická valcová plocha.}$$

Elipsoid je stredová kvadrika s tromi rovinami súmernosti, ktoré pretínajú plochu v elipsách. Kanonické rovnice elipsoidu sú

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ak $a = b$, tak daný elipsoid je *rotačný*. V prípade $a = b = c$ je daný elipsoid guľovou plochou.

Kanonické rovnice *hyperboloidu* sú

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \dots \textit{ jednodielny hyperboloid,}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \dots \textit{ dvojdielny hyperboloid.}$$

Jednodielny resp. dvojdielny hyperboloid sú stredové kvadriky s tromi rovinami súmernosti, pričom roviny $x = 0$ a $y = 0$ pretínajú plochu v hyperbolách a rovina $z = 0$ v elipse resp. nemá s plochou žiaden spoločný bod. Hyperboloidy, pre ktoré platí $a = b$, sú *rotačné hyperboloidy*.

Paraboloid je nestredová kvadrika s dvomi rovinami súmernosti, ktoré pretínajú plochu v parabolách. Kanonické rovnice paraboloidu sú

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \dots \textit{ eliptický paraboloid,}$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \dots \text{hyperbolický paraboloid,}$$

kde p, q sú kladné čísla.

Dotyková rovina kvadratickej plochy $a(x - s_1)^2 + b(y - s_2)^2 + c(z - s_3)^2 + d = 0$ v dotykovom bode $M = [m_1, m_2, m_3]$ má rovnicu

$$a(m_1 - s_1)(x - s_1) + b(m_2 - s_2)(y - s_2) + c(m_3 - s_3)(z - s_3) + d = 0.$$

Dotyková rovina ku kvadratickej ploche $a(x - s_1)^2 + b(y - s_2)^2 - 2c(z - s_3) = 0$ v dotykovom bode $M = [m_1, m_2, m_3]$ má rovnicu

$$a(m_1 - s_1)(x - s_1) + b(m_2 - s_2)(y - s_2) + c(z + m_3 - 2s_3) = 0.$$

Úloha 2.171. Zistite, aká plocha priestoru \mathbb{E}_3 je daná rovnicou:

- a) $x^2 + y^2 = 16$; b) $9x^2 - 16z^2 = 144$; c) $y^2 = 6x$;
 d) $x^2 - y^2 = 0$; e) $x^2 + y^2 + 8 = 0$; f) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$.

Riešenie: a) Rotačná valcová plocha s osou \mathbf{o}_z a určujúcou kružnicou $z = 0, x^2 + y^2 = 16$; b) Hyperbolická valcová plocha s osou \mathbf{o}_y a určujúcou hyperbolou $y = 0, x^2/16 - y^2/9 = 1$. c) parabolická valcová plocha, ktorá má povrchové priamky rovnobežné s osou o_z a určujúcu krivku parabolou $y^2 = 6x$; d) dve roviny $x \pm y = 0$; e) prázdna množina; f) dve roviny $x - y + 2 = 0, x + y = 0$.

Úloha 2.172. Zistite, aká množina bodov je daná rovnicou:

- a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = a$; b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = a$;
 c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = a$; d) $x^2 + y^2 + 4az = 0$;
 e) $16x^2 + 16y^2 - 8az - a^2 = 0$; f) $3x^2 - 3y^2 + a^2z = 0$.

Riešenie: a) Rotačný elipsoid s osou rotácie o_z a stredom $S = [0, 0, 0]$;
 b) jednodielny hyperboloid; c) dvojdielny hyperboloid;
 d), e) rotačný paraboloid; f) hyperbolický paraboloid.

Úloha 2.173. Určte priesečník danej kvadratickej plochy a priamky, ak ich rovnice sú:

- a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad \frac{x}{3} = \frac{y - 8}{-4} = \frac{z - 4}{-2}$;
 b) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1, \quad \frac{x - 27}{9} = \frac{y + 3}{-9} = \frac{z + 15}{-20}$;

$$\text{c) } \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = z, \quad \frac{x}{4} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+14}{11}.$$

Riešenie: a) $[6, 0, 0]$, $[3, 4, 2]$; b) $[18, 5, 6]$, $[9, 15, 25]$; c) $[4, 5, -3]$, $[8, 0, 8]$.

Úloha 2.174. Určte kužeľosečku, v ktorej daná rovina pretína kvadratickú plochu.

$$\begin{aligned} \text{a) } & x + z - 1 = 0, \quad 4x^2 - 3y^2 = 24z; \\ \text{b) } & 4x - 3y - z = 0, \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1; \\ \text{c) } & x - 3y + z - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Riešenie: a) Hyperbola $\frac{(x+3)^2}{15} - \frac{y^2}{20} = 1$, $x + y - 1 = 0$; b) hyperbola; c) elipsa.

Úloha 2.175. Napíšte rovnicu rezu elipsoidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ rovinou

$$\text{a) } R_{xy}; \quad \text{b) } R_{yz}; \quad \text{c) } x - 5 = 0; \quad \text{d) } x + y = 0; \quad \text{e) } x + y + z = 0.$$

Riešenie: a) Elipsa $z = 0$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; b) Elipsa $x = 0$, $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$;
c) Bod $M = [5, 0, 0]$.

Úloha 2.176. Trojosovému elipsoidu je opísaný kváder tak, že dotykovými bodmi sú vrcholy elipsoidu. Vypočítajte dĺžku tej čast telesovej uhlopriečky kvádra, ktorá leží vo vnútri elipsoidu.

Riešenie: $\frac{6}{10}$.

Úloha 2.177. Napíšte rovnicu dotykovej roviny elipsoidu $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{36} = 1$, pričom

$$\begin{aligned} \text{a) } & \text{bod dotyku je } M = [6, \frac{5}{3}, 4]; \\ \text{b) } & \text{dotyková rovina je rovnobežná s rovinou } 25x + 18y + 105z = 0. \end{aligned}$$

Riešenie: a) $10x + 9y + 15z - 135 = 0$; b) $25x + 18y \pm 675 = 0$.

Úloha 2.178. Napíšte rovnicu tetivy elipsoidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, ktorá leží v rovine $x = 2$ a jej stred je v bode $S = [2, 1, -1]$.

Riešenie: $x = 2$, $y = 1 + 16t$, $z = -1 - 9t$.

Úloha 2.179. Napíšte rovnicu rezu hyperboloidu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ rovinou

- a) $x = 3$; b) $x = -5$; c) $y = -5$; d) $y = 4$; e) $z = 3$.

Riešenie: a) Hyperbola $\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = \frac{16}{25}$, $x = 3$;

b) Dve priamky $x = -5$, $y = 4t$, $z = 3t$; $x + 5 = 0$, $3y + 4z = 0$;

c) Hyperbola $\frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{25} = \frac{9}{16}$, $y = -5$;

d) Dve priamky $x = \frac{100}{9}$, $y = 4$, $z = s$; $9x + 100 = 0$, $y - 4 = 0$;

e) Elipsa $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$, $z = 3$.

Úloha 2.180. Určte povrchové priamky hyperboloidu $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1$, ktoré prechádzajú bodom $M = [-6, 2, 4]$.

Riešenie: $\mathbf{p}_1 : 2x + 3y + z + 2 = 0$, $2x - 3y + 9z - 18 = 0$;

$\mathbf{p}_2 : 2x + 3y + 3z - 6 = 0$, $2x - 3y + 3z + 6 = 0$.

Úloha 2.181. Napíšte rovnicu množiny bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom $V = [0, 0, 0]$ a niektorým bodom kužeľosečky

- a) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$; b) $x^2 - z^2 = -1$, $y = 1$.

Riešenie: a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 = z^2$.

Úloha 2.182. Napíšte rovnicu rotačnej kužeľovej plochy, ak

- a) jej os je \mathbf{o}_z , prechádza bodom $M = [6, 8, -3]$ a vytvárajúce priamky zvierajú s jej osou uhol $\frac{\pi}{4}$;
- b) jej os je \mathbf{o}_x a vytvárajúce priamky prechádzajú začiatkom súradnicového systému a zvierajú s touto osou uhol $\frac{\pi}{4}$;
- c) súradnicové osi \mathbf{o}_x , \mathbf{o}_y , \mathbf{o}_z sú jej povrchové priamky.

Riešenie: a) Pretože vzdialenosť bodu M od osi \mathbf{o}_z je $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, vrcholom plochy je bod $[0, 0, -13]$ alebo $[0, 0, 7]$. Riadiaca krivka má potom rovnicu $x = z + 13$, $y = 0$ alebo $x = z - 7$, $y = 0$. Jej otáčaním okolo osi \mathbf{o}_z dostávame rovnice plochy $x^2 + y^2 = (z + 13)^2$ alebo $x^2 + y^2 = (z - 7)^2$;

b) Plocha vznikne otáčaním krivky $z = x$, $y = 0$ okolo osi \mathbf{o}_x a preto jej rovnica je $y^2 + z^2 = x^2$;

c) Os hľadanej plochy je určená bodom $O = [0, 0, 0]$ a jedným z vektorov $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ alebo $(1, 1, -1)$. V prvom prípade je kužeľová plocha množinou všetkých bodov $X = [x, y, z]$ takých, že odchýlka vektorov $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ a $(1, 1, 1)$ je rovnaká ako odchýlka vektorov $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$. Platí $\frac{|(x,y,z) \cdot (1,1,1)|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{3}} = \frac{|(1,0,0) \cdot (1,1,1)|}{\sqrt{1}\sqrt{3}}$.

Úpravou dostaneme rovnicu hľadanej plochy $xy + xz + yz = 0$. V ostatných prípadoch sú riešením rotačné kužeľové plochy určené rovnicami $-xy + xz + yz = 0$, $xy - xz + yz = 0$, $xy + xz - yz = 0$.

Úloha 2.183. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorej vrchol je v začiatku súradnicového systému, ak určujúca krivka má rovnice

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + y^2 = 16, z = 3; & \text{b) } y^2 = 2x - 1, x - z - 1 = 0; \\ \text{c) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, z = 1; & \text{d) } \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{8} = 1, x = -1. \end{array}$$

Riešenie: a) $9x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 0$; b) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$;
c) $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$; d) $16x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$.

Úloha 2.184. Napíšte rovnicu kužeľovej plochy, ktorá má vrchol V a dotýka sa guľovej plochy g , ak

$$\begin{array}{l} \text{a) } V = [0, 5, 0], \quad g : x^2 + y^2 + z^2 = 16; \\ \text{b) } V = [0, 0, 0], \quad g : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 4. \end{array}$$

Riešenie: a) Otáčaním krivky $x = 4(y - 5), z = 0$ okolo osi \mathbf{o}_y dostaneme kužeľovú plochu $9x^2 + 9z^2 = 16(y - 5)^2$;

b) Plocha je množina všetkých bodov $X = [x, y, z]$ priestoru takých, že kosínus odchýlky vektorov $\overrightarrow{VX} = (x, y, z)$ a $\overrightarrow{VS} = (2, -2, -1)$ je $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Z rovnosti $\frac{|(x,y,z) \cdot (2,-2,-1)|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ dostávame rovnicu hľadanej kužeľovej plochy $x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xy + 4xz + 4yz = 0$.

Úloha 2.185. Napíšte rovnice kužeľových plôch opísaných guľovým plochám $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 1$.

Riešenie: $51x^2 + 51y^2 - 49(z - \frac{60}{7})^2 = 0$, $3x^2 + 3y^2 - (z - 12)^2 = 0$.

Úloha 2.186. Napíšte rovnicu dotykovej roviny k paraboloidu $3x^2 + y^2 = 12z$, ktorá je rovnobežná s rovinou $x - y + 2z + 2 = 0$.

Riešenie: $x - y + 2z + 2 = 0$.

Úloha 2.187. Určte kužeľosečku, v ktorej daná rovina pretína hyperbolický paraboloid $3x^2 - 4y^2 = 144z$, ak rovnica roviny je

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x + 4 = 0; & \text{b) } y - 1 = 0; & \text{c) } z = 0; \\ \text{d) } x - y = 0; & \text{e) } z - 1 = 0; & \text{f) } z + 1 = 0. \end{array}$$

Riešenie: a) Dosadením $x = -4$ do rovnice paraboloidu dostaneme rovnicu paraboly $y^2 = -36(z - \frac{1}{3})$, ktorá leží v danej rovine $x + 4 = 0$, jej vrchol je $V = [-4, 0, \frac{1}{3}]$, parameter $p = 18$ a os je rovnobežná s osou \mathbf{o}_z ;

b) Parabola $x^2 = 48(z + \frac{1}{36})$, $y = 1$, jej vrchol je $V = [0, 1, -\frac{1}{36}]$, parameter $p = 24$ a os je rovnobežná s osou \mathbf{o}_z ;

c) Rôznobežky $\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z}{0}$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{-\sqrt{3}} = \frac{z}{0}$;

d) Parabola $z = -\frac{x^2}{144}$, $x = y$, jej vrchol je $V = [0, 0, 0]$, parameter $p = \frac{1}{288}$ a os je rovnobežná s osou \mathbf{o}_z ;

e) Hyperbola $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{36} = 1$, $z = 1$, jej stred je $S = [0, 0, 1]$ a osi sú rovnobežné so súradnicovými osami $\mathbf{o}_x, \mathbf{o}_y$;

f) Hyperbola $-\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$, $z = -1$, jej stred je $S = [0, 0, -1]$ a osi sú rovnobežné so súradnicovými osami $\mathbf{o}_x, \mathbf{o}_y$.

Úloha 2.188. Dokážte, že rovina $2x + y - 3 = 0$ pretína hyperbolický paraboloid $4x^2 - y^2 + z = 0$ v priamke.

Riešenie: Dosadením rovnice $y = 3 - 2x$ do rovnice paraboloidu a úpravou dostaneme $4x^2 - (9 - 12x + 4x^2) + z = 0$. Toto je rovnica roviny, ktorá s rovinou $2x + y - 3 = 0$ určujú priamku.

Úloha 2.189. Dokážte, že rovina $5x + 2y - z - 10 = 0$ pretína hyperbolický paraboloid $z = xy$ v dvoch priamkach.

Úloha 2.190. Napíšte rovnicu rotačnej valcovej plochy, ktorá prechádza bodom $M = [2, -1, 1]$ a jej osou je priamka $x = 1 + 3t, y = -2 - 2t, z = 2 + t$.

Riešenie: $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2yz + 4xz - 24 = 0$.

Úloha 2.191. Napíšte rovnicu rotačnej valcovej plochy opísanej guľovým plochám $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Riešenie: $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 96 = 0$.

Úloha 2.192. Napíšte rovnicu rotačnej valcovej plochy, ak

- prechádza bodom $A = [4, 1, 8]$ a jej os je určená priamkou $y = 1, x - z = 2$;
- jej povrchové priamky sú kolmé na rovinu $2x - y - z + 11 = 0$ a dotýkajú sa guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Riešenie: a) Hľadaná množina pozostáva zo všetkých bodov $X = [x, y, z]$, ktoré majú od priamky $\mathbf{p} \equiv \{P = [1, 1, -1], \vec{u}(1, 0, 1)\}$ rovnakú vzdialenosť ako bod A od \mathbf{p} . Zo vzťahu $|X, \mathbf{p}| = |A, \mathbf{p}|$ a úpravou dostaneme rovnicu hľadanej valcovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 4x - 4y + 4z - 30 = 0$;

b) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2yz + 4xz - 24 = 0$.

Úloha 2.193. Určte typ kvadratickej plochy a jej základné parametre.

- $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 6x + 2y - 2z = 0$;
- $x^2 - y^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 7z - 9 = 0$;
- $x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 6z = 0$;
- $7x^2 - 24xz - 38x + 24z + 175 = 0$;
- $x^2 - 4xz + 4z^2 - 6x + 12z + 9 = 0$.

Kapitola 3

Zobrazenia v rovine a priestore

3.1 Afinné zobrazenia

Nech \mathbb{A}_n a \mathbb{A}_m sú dva afinné priestory. Zobrazenie $\mathcal{F} : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_m$ sa nazýva *afinné zobrazenie*, ak pre každé tri rôzne kolineárne body $X, Y, Z \in \mathbb{A}_n$ a ich obrazy $X', Y', Z' \in \mathbb{A}_m$ platí:

(A-1) X', Y', Z' buď splynú, alebo sú tri rôzne kolineárne body;

(A-2) v prípade, že X', Y', Z' sú tri rôzne kolineárne body, potom $(XYZ) = (X'Y'Z')$.

Afinné zobrazenia sú zobrazenia afinného priestoru, ktorých základné invarianty sú: *kolineárnosť*, *rovnobežnosť* a *deliaci pomer*.

Afinné zobrazenie $\mathcal{F} : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_m$, $X \rightarrow X'$ jednoznačne indukuje zobrazenie vektorov (tzv. *asociované zobrazenie*) $\overline{\mathcal{F}}$ medzi zameraniami daných afinných priestorov, ktoré je dané predpisom

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m, \quad \overrightarrow{O'X'} = \overline{\mathcal{F}}(\overrightarrow{OX}),$$

kde $O' = \mathcal{F}(O)$, $X' = \mathcal{F}(X)$.

Nech je v priestore \mathbb{A}_n daná afinná sústava súradníc $\langle O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \rangle$ a v priestore \mathbb{A}_m afinná sústava súradníc $\langle P; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m \rangle$. Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia $\mathcal{F} : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_m$ v maticovom tvare je

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (\text{AZ})$$

kde $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^\top$ sú súradnice obrazu pôvodného začiatku $\mathcal{F}(O)$ v afinnej sústave súradníc $\langle P; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m \rangle$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica (zobrazenia), ktorej stĺpcové vektory sú súradnicové vektory obrazov pôvodných bázičných vektorov $\overline{\mathcal{F}}(\vec{e}_1), \overline{\mathcal{F}}(\vec{e}_2), \dots, \overline{\mathcal{F}}(\vec{e}_n)$ v báze $\langle \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m \rangle$.

Afinné zobrazenie $\mathcal{F} : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_m$ s analytickým vyjadrením (AZ) je jednoznačne určené obrazmi $n + 1$ lineárne nezávislých bodov priestoru \mathbb{A}_n .

Bijektívne afinné zobrazenie \mathcal{F} ($n = m$) nazývame *regulárne afinné zobrazenie*, resp. *afinita*. Platí, že obrazom priamky v afinite je priamka a obrazom k -tice lineárne nezávislých bodov ($k \leq n$) je k -tica lineárne nezávislých bodov. Navyše, inverzné zobrazenie k afinite je opäť afinita.

Rovnice afinného zobrazenia v afinnej rovine \mathbb{A}_2 majú tvar

$$x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}, \quad y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}.$$

Rovnice príslušného asociovaného zobrazenia $\overline{\mathcal{F}}$ sú

$$u' = a_{11}u + a_{21}v, \quad v' = a_{12}u + a_{22}v.$$

Matica zobrazenia v \mathbb{A}_2 je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Nenulový vektor \vec{v} je vlastný vektor asociovaného zobrazenia $\overline{\mathcal{F}}$, ak existuje taký skalár λ , že $\overline{\mathcal{F}}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Charakteristická rovnica lineárneho zobrazenia $\overline{\mathcal{F}}$ v afinnej rovine \mathbb{A}_2 je

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Úloha 3.1. Určte parametre p, q tak, aby existovala afinná transformácia roviny \mathbb{A}_2 , ktorá zobrazuje body $[2, 1], [-2, 3], [4, 0]$ postupne do bodov $[p, 3], [0, q], [1, 1]$

Riešenie: $p = \frac{2}{3}, q = 7$.

Úloha 3.2. Napíšte rovnice afinnej transformácie, ktorá zobrazuje body A, B, C postupne do bodov A', B', C' , ak

$$\text{a) } A = [1, 2], B = [3, 0], C = [1, 1]; A' = [2, 0], B' = [3, -1], C' = [5, 1];$$

- b) $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$, $C = [1, 1]$; $A' = [2, 2]$, $B' = [3, -1]$, $C' = [4, 1]$;
 c) $A = [1, 2]$, $B = [3, 0]$, $C = [1, 1]$; $A' = [1, 2]$, $B' = [3, 0]$, $C' = [3, 3]$.

Riešenie: a) Dosadením súradníc dvojíc bodov (vzor, obraz) do rovníc afinného zobrazenia dostávame sústavu šiestich rovníc. Jej riešením získame rovnice zobrazenia v tvare:
 $x' = -\frac{5}{2}x - 3y + \frac{21}{2}$, $y' = -\frac{3}{2}x - y + \frac{7}{2}$;

- b) V rovniciach afinného zobrazenia je
 $(a_{11}, a_{12}) = \overline{\mathcal{F}}(\vec{e}_1) = \overline{\mathcal{F}}(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'C'} = (1, 2)$
 $(a_{21}, a_{22}) = \overline{\mathcal{F}}(\vec{e}_2) = \overline{\mathcal{F}}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} = (2, -1)$
 $(a_{31}, a_{32}) = \mathcal{F}(O) = \mathcal{F}(A) - \overline{\mathcal{F}}(\overrightarrow{BC}) = A' - (C' - B') = (1, 0)$
 Rovnice afinného zobrazenia sú $x' = x + 2y + 1$, $y' = 2x - y$;
 c) $x' = -x - 2y + 6$, $y' = -2x - y + 6$.

Úloha 3.3. Dané sú afinity f a g rovnicami $f : x' = 2x - y + 1$, $y' = x + y + 3$ a $g : x' = x + 4y - 1$, $y' = x + 2y$. Napíšte rovnice afinít $g \circ f$, $f \circ g$, f^{-1} .

Riešenie: $g \circ f : x' = 6x + 3y + 12$, $y' = 4x + y + 7$;
 $f \circ g : x' = x + 6y - 1$, $y' = 2x + 6y + 2$;
 $f^{-1} : x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}$, $y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}$.

Úloha 3.4. V afinnej rovine \mathbb{A}_2 je daný rovnobežník $ABCD$. Napíšte rovnice afinného zobrazenia roviny \mathbb{A}_2 na seba, ktoré zobrazuje bod A na seba, bod B do bodu C a bod C do bodu D .

Riešenie: $x' = x - y$, $y' = x$.

Úloha 3.5. Určte, ako sa v afinnom zobrazení z predchádzajúcej úlohy zobrazí stred úsečky AC .

Úloha 3.6. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- a) Kompozícia afinných transformácií je afinná transformácia.
 b) Inverzné zobrazenie k afinnej bijekcii je afinná bijekcia.

Úloha 3.7. Dokážte, že afinity (prosté afinné transformácie) vytvárajú grupu.

Úloha 3.8. Dokážte, že ku každej elipse v euklidovskej rovine existuje afinita, ktorá zobrazí danú elipsu na kružnicu.

Úloha 3.9. Napíšte rovnice afinného zobrazenia afinnej roviny \mathbb{A}_2 na afinnú priamku \mathbb{A}_1 , v ktorom sa body $A = [2, 1]$, $B = [3, 2]$, $C = [0, 1]$ zobrazujú do bodov so súradnicami $A' = [2]$, $B' = [0]$, $C' = [10]$.

Riešenie: $x' = -4x + 2y + 8$

Úloha 3.10. Napíšte rovnice afinného zobrazenia \mathcal{F} , ktoré je dané maticou asociovaného zobrazenia $\overline{\mathcal{F}}$ a dvojicou affínne združených bodov M a M' .

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ a $M = [1, 0]$, $M' = [3, 8]$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $M = [0, 0]$, $M' = [-5, 0]$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ a $M = [5, 1]$, $M' = [19, 9]$.

Riešenie: a) $x' = 2x - y + 1$, $y' = 3x + 5y + 5$; b) $x' = y - 5$, $y' = x$;
c) $x' = 3x + 5y - 1$, $y' = x + 4y$.

Úloha 3.11. Afinné zobrazenie je dané rovnicami $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + y$.

- Určte obraz a vzor bodu $M = [1, 3]$;
- Určte samodružné body zobrazenia;
- Určte obraz priamky $x + y - 2 = 0$;
- Určte vzor priamky $x + y + 1 = 0$;
- Určte vzor a obraz priamky $ax + by + c = 0$;
- Určte samodružné priamky zobrazenia;
- Určte obraz kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Riešenie: a) $\mathcal{F}(M) = [0, 4]$, $\mathcal{F}^{-1}(M) = [1, 2]$;
b) Podmienke $\mathcal{F}(X) = X$ vyhovuje jediný bod $[0, 1]$;
c) Z rovníc daného afinného zobrazenia vyjadríme x , y a dosadíme do rovnice priamky $x + y - 2 = 0$. Dostaneme priamku $y - 2 = 0$;
d) Rovnice afinného zobrazenia dosadíme do rovnice priamky $x + y + 1 = 0$ a dostaneme jej vzor $3x + 2 = 0$;
e) $(2a + b)x + (b - a)y + a + c = 0$, $(a - b)x + (a + 2b)y - a + b + 3c = 0$;
f) Zobrazenie nemá samodružné priamky;
g) Elipsa $2x^2 + 5y^2 - 2xy - 4x + 2y - 79 = 0$.

Úloha 3.12. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky \mathbf{p}' , ktorá je obrazom priamky $\mathbf{p} : x - y + 3 = 0$ v afinite $x' = x - y + 2$, $y' = -2x + 3y - 1$.

Riešenie: $\mathbf{p}' : x + 1 = 0$.

Úloha 3.13. Určte samodružné priamky zobrazenia určeného vzťahmi

a) $x' = y$, $y' = x$;

b) $x' = y + 1, y' = -y;$

c) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y).$

Riešenie: a) Nech obraz samodružnej priamky je určený rovnicou $ax + by + c = 0$. Jej vzor je priamka $bx + ay + c = 0$. Nakoľko obidve rovnice sú vyjadrením tej istej priamky, môžeme rozlíšiť dva prípady. Pre $c \neq 0$ bude $a = b$ a rovnice samodružných priamok majú vyjadrenie $x + y + d = 0, d \in \mathbb{R}$. Pre $c = 0$ bude $a = \pm b$ a samodružná priamka má rovnicu $x - y = 0$.

b) $x + y - 1 = 0;$

c) Zobrazenie (otáčanie o 45°) nemá samodružné priamky.

Úloha 3.14. Určte samodružné smery asociovaného zobrazenia k zobrazeniu, ktoré je dané rovnicami $x' = x + 4y, y' = 2x + 3y$.

Riešenie: Smer určený vektorom \vec{u} je samodružný, ak $\mathcal{F}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, pričom λ je vlastná (charakteristická) hodnota prislúchajúca vektoru \vec{u} . Najskôr vypočítame korene charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dvomi hodnotám $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 5$ zodpovedajú dva samodružné smery asociovaného zobrazenia $\vec{u}_1 = (-2, 1)$ a $\vec{u}_2 = (1, 1)$.

Úloha 3.15. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, v ktorom sa bod $M = [0, 1]$ zobrazí do bodu $M' = [-3, 3]$ a vektory $\vec{u} = (1, 2)$ a $\vec{v} = (1, 0)$ sa zobrazia postupne na vektory $\vec{u}' = (-7, -2), \vec{v}' = (1, -2)$.

Riešenie: $x' = x - 4y + 1, y' = -2x + 3$.

Úloha 3.16. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, v ktorom je bod $A = [2, 2]$ samodružný a vektory $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (2, -1)$ sú vlastné vektory príslušného asociovaného zobrazenia.

Riešenie: $x' = \alpha x + 2(\alpha - \beta)y + 2 - 6\alpha + 4\beta, y' = \beta y + 2 - 2\beta$, kde α a β sú vlastné čísla prislúchajúce vlastným vektorom \vec{u} a \vec{v} .

Úloha 3.17. Napíšte rovnice afinity, v ktorej je os \mathbf{o}_x priamkou samodružných bodov a bod $A = [0, 1]$ sa zobrazuje do bodu $A' = [4, 2]$.

Riešenie: $x' = x + 4y, y' = 2y$.

Úloha 3.18. Napíšte rovnice afinného zobrazenia v \mathbb{A}_2 , v ktorom všetky body priamky $x + y - 2 = 0$ sú samodružné a bod $A = [0, 1]$ sa zobrazí do bodu $A' = [4, 2]$.

Riešenie: $x' = -3x - 4y + 8, y' = -x + 2$.

Úloha 3.19. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, v ktorom je priamka $x + y - 2 = 0$ samodružná a body $A = [0, 1]$, $B = [2, 0]$ sa zobrazia postupne do bodov $A' = [4, 2]$, $B' = [0, 2]$.

Riešenie: $x' = -2x + 4$, $y' = -2x - 4y + 6$.

Úloha 3.20. Napíšte rovnice afinného zobrazenia v \mathbb{A}_2 , ktoré zobrazuje priamky $\mathbf{p} : x + 2y - 3 = 0$, $\mathbf{q} : x - y = 0$, $\mathbf{r} : 2x + y - 6 = 0$ postupne do priamok $\mathbf{p}' : 5x - y - 4 = 0$, $\mathbf{q}' : x - 2y + 1 = 0$, $\mathbf{r}' : 4x + y - 14 = 0$.

Riešenie: $x' = x + y - 1$, $y' = 2x - y$.

Úloha 3.21. V rovine \mathbb{A}_2 je daný rovnobežník $ABCD$. Existuje afinné zobrazenie, v ktorom bod A je samodružný, bod B sa zobrazí do bodu C a bod C do bodu D ? Ak áno, ktorý bod je obrazom stredu S rovnobežníka $ABCD$? Napíšte rovnice tohto zobrazenia vo vhodnej súradnicovej sústave.

Riešenie: Afinné zobrazenie požadovaných vlastností existuje, pričom stred S rovnobežníka $ABCD$ (ktorý je stredom uhlopriečky AC) sa zobrazí na stred strany AD (základný číselný invariant afinného zobrazenia je deliaci pomer trojice kolineárnych bodov).

Úloha 3.22. Afinná transformácia má rovnice $x' = -3x + 4y + 6$, $y' = 4x + 3y + 2$. Na priamke $3x - y - 3 = 0$ určte taký bod M , aby jeho obraz M' ležal na tej istej priamke.

Riešenie: Nech bod M danej priamky má súradnice $[m, 3m - 3]$ a jeho obraz M' súradnice $[m', 3m' - 3]$. Dosadením do rovníc zobrazenia dostaneme sústavu dvoch rovníc, ktorej riešením sú hodnoty $m = 1$ a $m' = 3$. Potom zadaniu úlohy vyhovuje bod $M = [1, 0]$.

Úloha 3.23. Daná je afinná transformácia rovnicami $x' = x + y - 3$, $y' = 2x + y + 2$ a bod $A = [3, 3]$. Napíšte rovnicu priamky obsahujúcej bod A , ktorej obraz prechádza bodom A .

Riešenie: $x + y - 6 = 0$.

Úloha 3.24. Napíšte rovnice afinného zobrazenia v \mathbb{A}_2 , v ktorom každý bod osi \mathbf{o}_x je samodružný a bod $A = [2, 6]$ zobrazí do bodu $A' = [-1, -4]$.

Riešenie: $x' = x - \frac{1}{2}y$, $y' = -\frac{2}{3}y$.

Úloha 3.25. Napíšte všeobecné rovnice afinnej transformácie v \mathbb{A}_2 , v ktorej každý bod osi \mathbf{o}_x je samodružný.

Riešenie: $x' = x + \alpha y$, $y' = \beta y$.

Úloha 3.26. Napíšte všeobecné rovnice afinného zobrazenia v \mathbb{A}_2 , v ktorom os \mathbf{o}_x je samodružná priamka a každý bod osi \mathbf{o}_y je samodružný bod.

Riešenie: $x' = \alpha x$, $y' = y$.

Úloha 3.27. Napíšte rovnice afinnej transformácie v \mathbb{A}_2 , v ktorej každý bod priamky $ax + by + c = 0$ je samodružný.

Úloha 3.28. Dokážte, že v afinnej rovine \mathbb{A}_2 neexistuje afinita bez samodružných bodov a smerov.

Úloha 3.29. Napíšte rovnice afinnej transformácie v \mathbb{A}_2 , v ktorom sú osi \mathbf{o}_x a \mathbf{o}_y samodružné a body $A = [2, 0]$, $B = [0, 4]$ zobrazuje do bodov $A' = [-6, 0]$, $B' = [0, 8]$.

Riešenie: Nakoľko obidve súradnicové osi sú samodružné, potom ich priesečník (bod O) je samodružným bodom afinnej transformácie. Zobrazenie je teda jednoznačne určené tromi nekolineárnymi bodmi a ich obrazmi. Výsledok: $x' = -3x$, $y' = 2y$.

Úloha 3.30. Daná je afinná transformácia rovnicami $x' = 2x + y - 2$, $y' = x - y - 1$ a bod $A = [1, 1]$. Napíšte rovnicu takej priamky \mathbf{p} , že bod A leží na \mathbf{p} a aj na jej obraze \mathbf{p}' .

Riešenie: $2x + y - 3 = 0$.

Úloha 3.31. Napíšte rovnice afinnej transformácie v \mathbb{A}_2 , v ktorej sa priamky $\mathbf{p} : 5x - 6y - 7 = 0$, $\mathbf{q} : 3x - 4y = 0$ zobrazia do priamok $\mathbf{p}' : 2x + y - 4 = 0$, $\mathbf{q}' : x - y + 1 = 0$ a bod $A = [6, 4]$ sa zobrazí do bodu $A' = [2, 1]$.

Riešenie: $x' = \frac{1}{3}(-22x + 26y + 34)$, $y' = \frac{1}{3}(-31x + 38y + 37)$.

Úloha 3.32. Napíšte rovnice samodružných priamok afinnej transformácie v \mathbb{A}_2 danej rovnicami $x' = 7x - y + 1$, $y' = 4x + 2 + 4$.

Riešenie: $4x - y = 0$, $2x - 2y - 3 = 0$.

Úloha 3.33. V rovine je daný trojuholník ABC s ťažiskom T . Afinné zobrazenie \mathcal{F} zobrazuje bod C na bod T a body A , B sú samodružné. Napíšte analytické vyjadrenie tohto zobrazenia vo vhodnej súradnicovej sústave.

Riešenie: Ak zvolíme súradnicovú sústavu $\langle A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$, vrcholy $\triangle ABC$ majú súradnice $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [0, c]$ a ťažisko $T = [\frac{b}{3}, \frac{c}{3}]$. Nakoľko priamka \overleftrightarrow{AB} je bodovo samodružná, hľadané afinné zobrazenie je určené rovnicami $x' = x + \alpha y$, $y' = \beta y$. Dosadením súradníc bodov C a T do týchto rovníc dostaneme $\alpha = \frac{b}{3c}$, $\beta = \frac{1}{3}$ a rovnice zobrazenia majú tvar $x' = x + \frac{b}{3c}y$, $y' = \frac{1}{3}y$.

Úloha 3.34. Napíšte rovnice afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje elipsu $4x^2 + y^2 = 4$ na elipsu $8x^2 + y^2 = 8$.

Riešenie: $x' = x$, $y' = \sqrt{2}y$.

Úloha 3.35. Napíšte rovnice involutórnej osovej afinity, ktorej osou je priamka $x - y + 1 = 0$ a bod $A = [0, 0]$ sa zobrazuje do bodu $A' = [4, ?]$.

Riešenie: $x' = 5x - 4y + 4$, $y' = 6x - 5y + 6$.

Úloha 3.36. Afinné zobrazenie je dané rovnicami $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Určte všetky body, ktorých obraz je totožný s ich vzorom.

Riešenie: Všetky body priamky $(1 + \sqrt{2})x - y = 0$.

Úloha 3.37. Afinné zobrazenie $\mathcal{F} : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ je dané rovnicami $x' = x - y$, $y' = x + y + 3$, $z' = y - 2$. Určte obraz začiatku súradnicového systému v \mathbb{A}_2 a vzor začiatku v \mathbb{A}_3 .

Riešenie: $[0, 0] \longrightarrow [0, 3, -2]$; neexistuje vzor k obrazu $[0, 0, 0]$.

Úloha 3.38. V rovine je daný trojuholník ABC . Zvoľme súradnicovú sústavu $\langle A; B - A, C - A \rangle$. Existuje jediné afinné zobrazenie afinnej roviny \mathbb{A}_2 do afinného priestoru \mathbb{A}_3 , ktoré zobrazí bod A do bodu $A' = [1, 0, 0]$, bod B do bodu $B' = [0, 1, 0]$ a bod C do bodu $C' = [0, 0, 1]$? Napíšte rovnice tohto zobrazenia.

Riešenie: $x' = -x - y + 1$, $y' = x$, $z' = y$.

Úloha 3.39. Pre ktoré hodnoty parametrov p, q, r existuje afinné zobrazenie afinnej roviny do trojrozmerného afinného priestoru tak, aby sa body $A = [1, 2]$, $B = [2, 0]$, $C = [4, -4]$ zobrazili postupne do bodov $A' = [7, 1, -3]$, $B' = [2, 4, 5]$, $C' = [p, q, r]$. Napíšte rovnice všetkých takých zobrazení.

Riešenie: $p = -8, q = 10, r = 21$; $x' = (2b - 5)x + by + 12 - 4b$, $y' = (2d + 3)x + dy - 4d - 2$, $z' = (2f + 8)x + fy - 4f - 11$.

Úloha 3.40. Napíšte analytické vyjadrenie afinného zobrazenia, ktoré zobrazuje

- body $A = [1, 2, 3]$, $B = [3, 2, 1]$, $C = [1, -1, 1]$, $D = [2, 1, 0]$ postupne do bodov $A' = [0, 9, -1]$, $B' = [2, 11, 1]$, $C' = [3, 4, -2]$, $D' = [2, 7, 1]$;
- body $K = [1, 2, 3]$, $L = [1, 1, 1]$, $M = [1, 0, 1]$, $N = [0, 1, 3]$ postupne do bodov $K' = [5, 4]$, $L' = [2, 1]$, $M' = [1, 0]$, $N' = [3, 2]$.

Riešenie: a) $x' = x - y + 1$, $y' = 2x + y + z + 2$, $z' = y - z$;

b) $x' = x + y + z - 1$, $y' = x + y + z - 2$.

Úloha 3.41. Napíšte rovnice afinity \mathcal{F} priestoru \mathbb{A}_3 , v ktorej je bod $M = [1, 0, 2]$ samodružný, vektory $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ sú vlastné vektory príslušného asociovaného zobrazenia $\overline{\mathcal{F}}$ (obidva odpovedajú vlastnému číslu 2) a vektor $(0, 1, 2)$ sa zobrazí na vektor opačný.

Riešenie: $x' = 2x - 1$, $y' = 2y - \frac{3}{2}z + 3$, $z' = -z + 4$.

Úloha 3.42. Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia, ktoré je dané transformačnými vzťahmi

a) $x' = -2x - 2y + 2z + 1$, $y' = 2x + 3y - 3z$, $z' = -y - z + 4$;

b) $x' = x - y + z + 1$, $y' = -x + y + z + 2$, $z' = -x - y + 3z + 3$.

Riešenie: a) samodružný bod $[-\frac{1}{9}, \frac{16}{9}, \frac{10}{9}]$, samodružné smery: $(-2, 2 + \sqrt{3}, -1)$, $(-2, 2 - \sqrt{3}, -1)$, $(1, -1, -1)$;

b) samodružné body sú všetky body priamky $\mathbf{p} : x = 2 + t, y = 1 + t, z = t$; samodružné smery: $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.

Úloha 3.43. Napíšte rovnice afinity priestoru \mathbb{A}_3 , v ktorej rovina $x + y - z = 0$ je rovinou samodružných bodov a bod $M = [1, 0, 2]$ zobrazí na bod $M' = [2, 0, 1]$.

Riešenie: $x' = -y + z$, $y' = y$, $z' = x + y$.

Úloha 3.44. Určte všetky body $X = [x, y, z]$, ktoré sa v afinnom zobrazení $\mathcal{F} : \mathbb{A}_3 \rightarrow \mathbb{A}_2$ s analytickým vyjadrením $x' = 2x - z + 1$, $y' = x + y$ zobrazia do bodu $M = [4, 3]$.

Riešenie: $X = [t, 3 - t, -3 + 2t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Úloha 3.45. V afinnom zobrazení $\mathcal{F} : \mathbb{A}_3 \rightarrow \mathbb{A}_3$ s analytickým vyjadrením $x' = x + y - 2z + 1$, $y' = x - z$, $z' = x - y - 1$ nájdite obraz

a) priamky $\mathbf{p} : x = 3 + t$, $y = -t$, $z = -1$;

b) priamky $\mathbf{q} : x = 1 + t$, $y = t$, $z = 2 + t$;

c) roviny $\alpha : x = 1 + u + v$, $y = 2 + v$, $z = 3$;

d) roviny $\beta : x = 1 + u + v$, $y = 1 + u + v$, $z = 1 - u + 2v$;

e) roviny $\gamma : x + y + z + 3 = 0$.

Riešenie: a) $\mathbf{p}' : x = 6, y = 4 + t, z = 2 + 2t$; b) $Q' = [-2, -1, 0]$;

c) $\alpha' : x = -2 + u + 2v, y = -2 + u + v, z = -2 + u$;

d) $\beta' : x = 1 + 2s, y = s, z = -1$; e) $\gamma' : x - 2y + z = 0$.

Úloha 3.46. Napíšte všetky samodružné priamky afinného zobrazenia s analytickým vyjadrením

a) $x' = 2x - 2, y' = -6x - y + 14, z' = 19x + 6y + z - 44;$

b) $x' = 2x + y - z + 1, y' = -x + z - 1, z' = 2x + 2y + z + 2.$

Riešenie: a) $\mathbf{p} : x = 2, y = 1, z = t; \quad \mathbf{q}_a : x = 2, y = 1 - t, z = a - 3t, a \in \mathbb{R};$
 $\mathbf{r}_b : x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = b + 7t, b \in \mathbb{R};$

b) $\mathbf{p}_k : x + y + 1 = 0, z - k = 0, k \in \mathbb{R}.$

3.2 Zhodné zobrazenia

Nech \mathbb{E}_n a \mathbb{E}'_n sú dva euklidovské priestory. Afinné zobrazenie $\mathcal{Z} : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}'_n$ sa nazýva *zhodné zobrazenie* (resp. *zhodnosť*), ak pre každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a ich obrazy $X', Y' \in \mathbb{E}'_n$ platí

$$(Z-1) |X'Y'| = |XY|.$$

Zhodnosť je afinným zobrazením. Navyše z definície zhodnosti vyplýva:

(Z-2) Zhodné zobrazenia zachovávajú veľkosti uhlov;

(Z-3) Zhodné zobrazenia zachovávajú obsahy a objemy.

Afinné zobrazenie s analytickým vyjadrením (AZ) popisuje zhodnosť priestoru \mathbb{E}_n práve vtedy, keď matica zobrazenia \mathbf{A} je ortonormálna, t.j. platí $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Zhodná transformácia euklidovského priestoru \mathbb{E}_n je súhlasná [nesúhlasná] práve vtedy, keď $|\mathbf{A}| = 1$ [$|\mathbf{A}| = -1$].

Rovnice zhodného zobrazenia v euklidovskej rovine \mathbb{E}_2 majú tvar

$$x' = x \cos \alpha \mp y \sin \alpha + a, \quad y' = x \sin \alpha \pm y \cos \alpha + b$$

V nasledujúcej tabuľke je uvedená klasifikácia zhodných transformácií v rovine \mathbb{E}_2 :

$hod(\mathbf{A} - \mathbf{E})$	2	1	0
súhlasné zhodnosti $ \mathbf{A} = +1$	otáčanie; pre $\mathbf{A} = -\mathbf{E}$ stredová súmernosť	—	<hr/> identita <hr/> posunutie
nesúhlasné zhodnosti $ \mathbf{A} = -1$	—	<hr/> osová súmernosť (priamka samo- družných bodov) <hr/> posunutá súmernosť (žiadne samo- družné body)	—

Podobne ako pre zhodnosti v rovine, môžeme všetky typy zhodných transformácií priestoru \mathbb{E}_3 zhrnúť do nasledujúcej tabuľky:

$hod(\mathbf{A} - \mathbf{E})$	3	2	1	0
súhlasné zhodnosti $ \mathbf{A} = +1$	—	<hr/> skrutkový pohyb (žiadne samo- družné b.) <hr/> otáčanie okolo osi (priamky samo- družných b.) resp. osová súmernosť	—	<hr/> identita <hr/> posunutie
nesúhlasné zhodnosti $ \mathbf{A} = -1$	otočená súmernosť; pre $\mathbf{A} = -\mathbf{E}$ stredová súmernosť	—	<hr/> rovinová súmernosť (rovina samo- družných b.) <hr/> posunutá súmernosť (žiadne samo- družné b.)	—

Úloha 3.47. Určte koeficienty p, q tak, aby existovala zhodnosť euklidovskej roviny \mathbb{E}_2 , pri ktorej sa body $K = [3, 0]$, $L = [1, 2]$, $M = [-1, -1]$ zobrazia postupne do bodov $K' = [1, 4]$, $L' = [p, 2]$, $M' = [2, q]$ v danom poradí.

Riešenie: $p = -1$, $q = 0$.

Úloha 3.48. Určte koeficienty a, b tak, aby rovnice $x' = \frac{1}{2}x + ay + 2$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + by$ vyjadrovali zhodnosť v \mathbb{E}_2 .

Riešenie: $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$; resp. $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

Úloha 3.49. Určte koeficienty a, b, c tak, aby rovnice $x' = \frac{3}{5}x + ay + 1$, $y' = bx + cy$ vyjadrovali zhodnosť v \mathbb{E}_2 .

Riešenie: $a = \frac{4}{5}$, $b = \mp \frac{4}{5}$, $c = \pm \frac{3}{5}$

Úloha 3.50. Určte samodružné smery a vlastné čísla asociovaného zobrazenia k zhodnosti v \mathbb{E}_2

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2$;

b) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2$.

Riešenie: a), b) $\lambda = \pm 1$; $\vec{u}_1 = (2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2)$.

Úloha 3.51. Napíšte rovnice všetkých zhodností v \mathbb{E}_2 , v ktorých je bod $M = [4, 0]$ samodružný a vektory $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1)$ (resp. $(1, 1)$, $(1, 2)$) určujú samodružné smery.

Riešenie: Pretože pre vektory \vec{u} , \vec{v} platí: $\bar{\mathcal{Z}}(\vec{u}) = \pm \vec{u}$ a $\bar{\mathcal{Z}}(\vec{v}) = \pm \vec{v}$, existujú práve štyri zhodné zobrazenia s príslušnými maticami zobrazenia. Pomocou samodružného bodu M nájdeme zostávajúce koeficienty a, b zobrazenia. Rovnice hľadaných zobrazení sú: $x' = x$, $y' = y$ (identita); $x' = y + 4$, $y' = x - 4$; $x' = -y + 4$, $y' = -x + 4$ (osové súmernosti); $x' = -x + 8$, $y' = -y$ (stredová súmernosť).

Úloha 3.52. Napíšte rovnice všetkých nesúhlasných zhodností v rovine \mathbb{E}_2 , v ktorých vektory $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (2, -1)$ sú vlastné (resp. samodružné) a bod $A = [0, 0]$ sa zobrazí do bodu $A' = [4, 0]$.

Riešenie: Pre nesúhlasné zhodnosti platí, že vektorom \vec{u} a \vec{v} , ktoré určujú dva rôzne samodružné smery zobrazenia, prislúchajú navzájom opačné vlastné čísla (± 1) zodpovedajúceho asociovaného zobrazenia. Riešeniu vyhovujú dve zhodnosti:

$$\mathcal{Z}_1 : x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4, \quad y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y; \quad \mathcal{Z}_2 : x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4, \quad y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y.$$

Úloha 3.53. Zistite, či afinita roviny \mathbb{E}_2 daná rovnicami $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$ je súhlasná alebo nesúhlasná zhodnosť. Určte jej samodružné prvky.

Riešenie: Uvažujme dve otáčania okolo bodu T o uhol $\pm 120^\circ$ s analytickým vyjadrením $x' = -\frac{1}{2}x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 \mp 2\sqrt{3}$, $y' = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 6 \pm \sqrt{3}$. Dosadením týchto rovníc do rovnice danej priamky incidentnej so stranou trojuholníka, dostaneme hľadané rovnice priamok $(3\sqrt{3} \pm 1)x - (3 \mp \sqrt{3})y \mp 42 - 2\sqrt{3} = 0$.

Úloha 3.61. Napíšte rovnice všetkých zhodností v rovine, ktoré zobrazia bod $A = [1, 0]$ na bod $A' = [5, -2]$ a bod $B = [2, 3]$ na bod $B' = [2, ?]$.

Riešenie: Najskôr určíme y -ovú súradnicu bodu B' . K tomu nám stačí využiť vlastnosť, že zhodné zobrazenie zachováva veľkosť úsečky, teda platí: $|A'B'| = |AB|$. Potom súradnice bodu B sú $[2, -1]$, resp. $[2, -3]$. Týmto bodom prislúchajú dve zhodnosti: $Z_1 : x' = -y + 5, y' = x - 3$ a $Z_2 : x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{28}{5}, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5}$.

Úloha 3.62. Určte súradnice vrcholov ostrých uhlov rovnoramenného pravouhlého trojuholníka ABC , ak $C = [0, 0]$ a body A, B ležia postupne na priamkach $8x - y - 20 = 0, 7x + 4y - 41 = 0$.

Úloha 3.63. Dokážte, že zložením párneho [nepárneho] počtu osových súmerností v rovine \mathbb{E}_2 je súhlasná [nesúhlasná] zhodná transformácia.

Úloha 3.64. V rovine je daný rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABC . Aké zobrazenie vznikne zložením zobrazení

- a) $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_{BC}$; b) $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{R}_{C,90^\circ} \circ \mathcal{T}_{BC}$.

a napíšte ich rovnice (vo vhodnej súradnicovej sústave).

Riešenie: Nech $A = [0, a], B = [-a, 0], C = [0, 0]$:

- a) posunutá súmernosť $x' = -y - a, y' = -x + a$, t.j. zobrazenie zložené z osovej súmernosti podľa priamky $x + y = 0$ a posúvania v smere vektora $(-a, a)$;
 b) posunutá súmernosť $x' = x, y' = -y + a$, t.j. zobrazenie zložené z osovej súmernosti podľa osi \mathbf{o}_x a posúvania v smere vektora $(0, a)$.

Úloha 3.65. Štvorec má vrcholy $A = [0, 0], B = [1, 0], C = [1, 1], D = [0, 1]$. Napíšte rovnice všetkých zhodností, ktoré zobrazujú bod A do stredu štvorca S a bod D do bodu $D' = [d, 0]$, pričom $d > 0$.

Riešenie: $x' = \pm \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}, y' = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$.

Úloha 3.66. Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ je daný bod M . Dokážte, že existuje štvoruholník, ktorého ulopriečky s dĺžkami $|AB|, |BC|$ sú navzájom kolmé a ktorého veľkosti strán sú $|AM|, |BM|, |CM|, |DM|$.

Návod: Použite napr. posúvanie v smere vektora \overrightarrow{BC} .

Úloha 3.67. V rovine \mathbb{E}_2 je daný obdĺžnik $ABCD$, ktorý nie je štvorcom. Určte všetky zhodné zobrazenia, v ktorých obrazom trojuholníka ABC je trojuholník CDA . Určte v týchto zobrazeniach aj obrazy vrcholov obdĺžnika.

Riešenie: Stredová súmernosť so stredom S , kde $S \in AC \cap BD$. $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, $C \rightarrow A$, $D \rightarrow B$,

Úloha 3.68. Afinné zobrazenie \mathbb{E}_2 na seba zobrazuje postupne vrcholy trojuholníka ABC do vrcholov B, C, A . Môže byť táto transformácia zhodnosťou? Ak áno, napíšte jej rovnice vzhľadom k vhodnej karteziánskej súradnicovej sústave.

Riešenie: Existuje iba v prípade rovnostranného trojuholníka ABC - otáčanie:

$$x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Úloha 3.69. Koľko existuje zhodností v \mathbb{E}_2 , ktoré zobrazujú začiatok súradnicového systému do bodu $[3, 4]$ a bod $[0, 5]$ do bodu na priamke $4x - 3y = 0$? Napíšte ich rovnice.

Riešenie: $Z_{1,2} : x' = \mp \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3, \quad y' = \pm \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4$

$Z_{3,4} : x' = \mp \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 3, \quad y' = \pm \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4.$

Úloha 3.70. Napíšte rovnice všetkých zobrazení, v ktorých je kružnica $x^2 + y^2 = 4$ samodružná.

Riešenie: $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = \mp x \sin \alpha \pm y \cos \alpha.$

Úloha 3.71. Zhodné zobrazenie euklidovskej roviny do euklidovského trojrozmerného priestoru je dané rovnicami: $x' = x + by - 2$, $y' = \frac{1}{2}y + 1$, $z' = ax + cy - 3$. Určte koeficienty a, b, c .

Riešenie: $a = 0, b = 0, c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Úloha 3.72. Zistite, či rovnice $x' = x + 3$, $y' = -y + 2$, $z' = z - 1$ vyjadrujú zhodnú transformáciu v priestore \mathbb{E}_3 . Ak áno, určte jej základné vlastnosti.

Riešenie: Rovnice vyjadrujú nesúhlasnú zhodnosť v priestore ($|\mathbf{A}| = -1$) zloženú zo súmernosti podľa roviny $y - 1 = 0$ a z posunutia v smere rovnobežnom s touto rovinou. Smer posunutia je určený vektorom $\vec{u} = (3, 0, -1)$.

Úloha 3.73. Overte, že rovnice $x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$, $y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}$, $z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$ sú analytickým vyjadrením zhodnosti v priestore \mathbb{E}_3 . Určte jej samodružné body a samodružné smery príslušného asociovaného zobrazenia.

3.3 Podobné zobrazenia

Nech \mathbb{E}_n a \mathbb{E}'_n sú dva euklidovské priestory. Afinné zobrazenie $\mathcal{P} : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}'_n$ sa nazýva *podobné zobrazenie* (resp. *podobnosť*), ak existuje také reálne číslo $k > 0$, že pre každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a ich obrazy $X', Y' \in \mathbb{E}'_n$ platí

$$(P-1) |X'Y'| = k \cdot |XY|.$$

Zhodnosti sú podobné zobrazenia s koeficientom podobnosti $k = 1$ (tzv. *nevlastná podobnosť*), pre $k \neq 1$ hovoríme o tzv. *vlastnej podobnosti*.

Podobnosť je afinné zobrazenie, t.j. spĺňa všetky vlastnosti afinít. Navyše z definície podobnosti vyplýva:

(P-2) Podobné zobrazenia zachovávajú veľkosti uhlov;

(P-3) Podobné zobrazenia zachovávajú pomery obsahov a objemov.

Afinné zobrazenie s analytickým vyjadrením (AZ) popisuje podobnosť priestoru \mathbb{E}_n práve vtedy, keď matica \mathbf{A} je ortogonálna, t.j. $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = k^2 \mathbf{E}$.

Nech S je ľubovoľný pevný bod euklidovského priestoru \mathbb{E}_n a κ ľubovoľné pevné nenulové reálne číslo. Zobrazenie $\mathcal{H} : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$, $\mathcal{H} : X \rightarrow X' = \mathcal{H}(X)$, kde

$$X' = S + \kappa \cdot (X - S)$$

sa nazýva *rovnoláhosť* so stredom S a *charakteristikou* κ .

Zobrazenie \mathcal{H} je rovnoláhosť s koeficientom κ práve vtedy, keď platí $\mathbf{A} = \kappa \mathbf{E}$.

Každú vlastnú podobnosť euklidovského priestoru \mathbb{E}_n s koeficientom podobnosti k môžeme vyjadriť ako zloženie rovnoláhlosti s kladnou charakteristikou k a nejakej zhodnosti.

Rovnice podobného zobrazenia v euklidovskej rovine \mathbb{E}_2 sú

$$x' = k \cdot x \cos \alpha \mp k \cdot y \sin \alpha + a, \quad y' = k \cdot x \sin \alpha \pm k \cdot y \cos \alpha + b.$$

Úloha 3.80. Napíšte rovnice rovnoláhlosti v \mathbb{E}_2 , v ktorej sa body $A = [1, 2]$, $B = [3, -2]$ zobrazia postupne do bodov $A' = [3, 5]$, $B' = [?, 2]$.

Riešenie: Rovnice rovnoľahlosti majú tvar $x' = kx + a$, $y' = ky + b$. Dosadením súradníc dvojíc bodov $A, A'; B, B'$ (vzor, obraz) do týchto rovníc dostaneme systém rovníc $3 = k + a$, $5 = 2k + b$, $b_1 = 3k + a$, $2 = -2k + b$, kde b_1 je x -ová súradnica bodu B . Jej riešením získame rovnice hľadanej rovnoľahlosti $x' = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$, $y' = \frac{3}{4}y + \frac{7}{2}$.

Úloha 3.81. Určte koeficienty a, b tak, aby rovnice $x' = 2x + ay + 2$, $y' = 3x - by$ vyjadrovali podobnosť v \mathbb{E}_2 .

Riešenie: Stačí vyriešiť maticovú rovnicu $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = k^2 \mathbf{E}$. Zadaniu úlohy vyhovujú dve dvojice čísel $a = 3$, $b = -2$, resp. $a = -3$, $b = 2$.

Úloha 3.82. Dokážte, že afinné zobrazenie v \mathbb{E}_2 , ktoré je vyjadrené rovnicami $x' = 2x + 5y - 1$, $y' = -5x + 2y + 4$ je podobnosť. Určte samodružné body a samodružné smery asociovaného zobrazenia.

Riešenie: Zobrazenie je podobnosť s koeficientom $\sqrt{29}$ a samodružným bodom $[\frac{21}{26}, \frac{1}{26}]$. Príslušné asociované zobrazenie nemá samodružné smery (podobnosť je zložením rovnoľahlosti a otáčania okolo stredu rovnoľahlosti).

Úloha 3.83. Dokážte, že ku každým dvom parabolám existuje podobné zobrazenie, ktoré zobrazuje jednu parabolu do druhej.

Úloha 3.84. V rovine je daný bod $S = [1, -1]$ a priamky $\mathbf{p} : 3x + 6y - 1 = 0$, $\mathbf{q} : x + ay - 3 = 0$. Napíšte rovnice rovnoľahlosti \mathcal{H} so stredom S , ktorá zobrazí priamku \mathbf{p} na priamku \mathbf{q} .

Riešenie: $x' = 3x - 2$, $y' = 3y + 2$.

Úloha 3.85. V rovine je daný bod $S = [1, 0]$ a bod $M = [-1, 1]$. Napíšte rovnice rovnoľahlosti so stredom v bode S , ktorá zobrazí priamku $\mathbf{p} : x - y = 0$ do priamky \mathbf{p}' prechádzajúcej bodom M .

Riešenie: Rovnice hľadanej rovnoľahlosti budú: $x = kx + a$, $y' = ky + b$. Priamka \mathbf{p} (neprechádzajúca bodom S) sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí na priamku \mathbf{p}' prechádzajúcu bodom M , pričom $\mathbf{p} \parallel \mathbf{p}'$, t.j. na priamku $x - y + 2 = 0$. Ďalej bod $O = [0, 0] \in \mathbf{p}$ sa zobrazí na bod $O' = [-2, 0] \in \mathbf{p}'$, odkiaľ dostávame hodnoty $a = -2$, $b = 0$. Pre charakteristiku k rovnoľahlosti platí $O' = S + k \cdot (O - S)$, teda $k = 3$. Rovnice rovnoľahlosti sú: $x' = 3x - 2$, $y' = 3y$.

Úloha 3.86. V rovine je daný bod $S = [0, 2]$ a priamka $\mathbf{p} : 2x + y - 1 = 0$. Napíšte rovnice rovnoľahlosti so stredom v bode S , ktorá zobrazuje bod $M = [-3, 2]$ do bodu M' ležiaceho na priamke \mathbf{p} .

Riešenie: $x' = \frac{1}{6}x$, $y' = \frac{1}{6}y + \frac{5}{3}$.

Úloha 3.87. Napíšte rovnice všetkých podobností, ktoré zobrazujú bod $[1, 1]$ do začiatku súradnicového systému a začiatok do bodu $[0, 2]$.

Riešenie: $\mathcal{P}_1 : x' = x - y, y' = -x - y + 2$; $\mathcal{P}_2 : x' = -x + y, y' = -x - y + 2$.

Úloha 3.88. Napíšte rovnice všetkých podobností v \mathbb{E}_2 , v ktorých sa bod $A = [1, 0]$ zobrazí na bod $A' = [4, -2]$ a bod $B = [2, 3]$ na bod $B' = [2, -8]$.

Riešenie: $\mathcal{P}_1 : x' = -2x + 6, y' = -2y - 2$; $\mathcal{P}_2 : x' = \frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{12}{5}, y' = -\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{4}{5}$.

Úloha 3.89. Napíšte rovnice podobnosti, v ktorej je začiatok súradnicového systému samodružný bod a obrazom bodu $M = [5, -3]$ je bod $M' = [1, 1]$.

Riešenie: $\mathcal{P}_1 : x' = \frac{1}{17}x - \frac{4}{17}y, y' = \frac{4}{17}x + \frac{1}{17}y$; $\mathcal{P}_2 : x' = \frac{4}{17}x + \frac{1}{17}y, y' = \frac{1}{17}x - \frac{4}{17}y$.

Úloha 3.90. Určte všetky podobnosti v rovine, pre ktoré je bod $M = [1, 1]$ a vektor $\vec{u} = (1, 1)$ samodružné.

Riešenie: $x' = ax + 1 - a, y' = ay + 1 - a$ alebo $x' = by + 1 - b, y' = bx + 1 - b$.

Úloha 3.91. V rovine je daný štvorec $ABCD$. V súradnicovej sústave $\langle A; \vec{AB}, \vec{AD} \rangle$ napíšte rovnice podobného zobrazenia, ktoré zobrazuje body A, B, C postupne do bodov D, S, A , kde S je stred štvorca $ABCD$. Rozložte túto podobnosť na zhodnosť a rovnoľahlosť, ktoré navzájom komutujú.

Riešenie: Podobnosť \mathcal{P} je daná jednoznačne trojicou nekolineárnych bodov a ich obrazov: $A = [0, 0], A' = D = [0, 1]; B = [1, 0], B' = S = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; C = [0, 1], C' = A = [0, 0]$. Rovnice sú: $x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1$. Koeficient podobnosti je $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. V rozklade podobnosti na zhodnosť a rovnoľahlosť musí platiť, že tieto navzájom komutujúce zobrazenia majú rovnaký samodružný bod, ktorý je súčasne samodružným bodom výslednej podobnosti. V našom prípade je to bod $[-1, 1]$. Týmto bodom a koeficientom k je určená rovnoľahlosť $\mathcal{H} : x = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Potom rovnice zhodného zobrazenia \mathcal{Z} , pre ktoré $\mathcal{Z} \circ \mathcal{H} = \mathcal{P}$, sú $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2} - 1, y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$.

Úloha 3.92. Rozložte podobnosť $x' = 2x - y + 5, y' = x + 2y - 1$ na rovnoľahlosť a zhodnosť.

Riešenie: $\mathcal{H} : x' = \sqrt{5}x, y' = \sqrt{5}y$; $\mathcal{Z} : x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + 5, y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - 1$.

Úloha 3.93. Rozložte podobnosť $x' = 2x - y + 5, y' = x + 2y - 1$ na otáčanie a rovnoľahlosť tak, aby ich stredy boli totožné.

Riešenie: $\mathcal{H} : x' = \sqrt{5}x - 2 + 2\sqrt{5}, y' = \sqrt{5}y + 3 - 3\sqrt{5}$;
 $\mathcal{Z} : x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{7}{\sqrt{5}} - 2, y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + 3 - \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Úloha 3.94. Dokažte, že každá vlastná podobnosť má práve jeden samodružný bod.

Úloha 3.95. Určte stred rovnoľahlosti, ktorá je zložená z rovnoľahlosti \mathcal{H} : $x' = 2x + 1$, $y' = 2y - 1$ a posúvania \mathcal{T} : $x' = x + 3$, $y' = y$.

Riešenie: $S = [-4, 1]$.

Úloha 3.96. Určte koeficienty a , b , tak, aby rovnice $x' = 2x + ay$, $y' = x + by$, $z' = y$ vyjadrovali podobné zobrazenie z euklidovskej roviny do trojrozmerného euklidovského priestoru.

Riešenie: $a = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $b = \mp \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Úloha 3.97. Určte koeficienty p , q , r tak, aby rovnice $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ vyjadrovali podobnosť v \mathbb{E}_3 . Nájdite jej samodružné body a samodružné smery.

Riešenie: $p = 2, q = -2, r = 1$; samodružný bod $[0, 2, 0]$, samodružný smer $(0, 1, 1)$.

Úloha 3.98. Napíšte rovnice rovnoľahlosti v \mathbb{E}_3 , ktorá zobrazuje bod $M = [2, 0, -1]$ do bodu $N = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Určte stred tejto rovnoľahlosti.

Riešenie: Pretože pre každý bod $X \in \mathbb{E}_3$ je $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(B) - 2(X - B)$, bude pre dvojicu bodov $X = [x, y, z]$, $\mathcal{H}(X) = [x', y', z']$ platiť: $x' = -2(x - 2)$, $y' = 1 - 2y$, $z' = 3 - 2(z + 1)$. Po úprave dostaneme rovnice hľadanej rovnoľahlosti $x' = -2x + 4$, $y' = -2y + 1$, $z' = -2z + 1$. Súradnice stredu rovnoľahlosti (samodružného bodu zobrazenia) musia spĺňať rovnice $3x = 4$, $3y = 1$, $3z = 1$. Potom stred má súradnice $[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Literatúra

- [1] DUPLÁK, J.: *Geometria 1,2*, PedF UPJŠ, Košice, 1985.
- [2] ELIÁŠ, J - HORVÁTH, J. - KAJAN, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1*, Alfa, Bratislava, 1966.
- [3] HEJNÝ, M - ZAŤKO, V. - KRŠŇÁK, P.: *Geometria 1*, SPN, Bratislava, 1985.
- [4] KLETENIK, D.V.: *Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii*, Nauka, Moskva, 1986.
- [5] SEKANINA, M - BOČEK, L. - KOČANDRLE, M. - ŠEDIVÝ, J.: *Geometrie 1*, SPN, Praha, 1986.
- [6] SEKANINA, M - BOČEK, L. - KOČANDRLE, M. - ŠEDIVÝ, J.: *Geometrie 2*, SPN, Praha, 1988.
- [7] ŠEDIVÝ, O. - BOŽEK, M. - DUPLÁK, J. - KRŠŇÁK, P. - TRENKLER, M.: *Geometria 2*, SPN, Bratislava, 1987.