**1.4. Parametrické vyjadrenie euklidovského priestoru**

**Úloha 1.4.10**

Určte vzájomnú polohu priamok .

**Riešenie**

Vektory sú lineárne závislé (). Priamku sú buď rovnobežné alebo totožné. Vzťah vedie na sústavu

,

ktorá má 1-parametrické riešenie resp. má nekonečne veľa riešení.

**Záver: priamky sú totožné.**

**Úloha vzájomná poloha 1**

Dokážte totožnosť priamok

**Riešenie**

Ak priamky sú totožné, tak sústava

 Iné riešenie

Vektory sú zrejme lineárne závislé a bod je spoločný bod oboch priamok. Preto sú totožné.

**Úloha vzájomná poloha 2**

Vypočítajte vzdialenosť priamok

**Riešenie**:

Hľadáme také body A = (1 + 2t, 6 − t, −3) a B = (4 + s, 9 + 3s, 6 + s), pre ktoré je vektor

kolmý na smerové vektory priamok . Podmienky kolmosti sú ekvivalentné s rovnicami .

Sústava má riešenie , preto a.

**1.4. Nadrovina a priečky**

**Úloha 1.5.3**

Určte neparametricky nadrovinu určenú bodmi .

**Riešenie**

* Určte vektory , a parametrické rovnice .

+s

Potom eliminujte parametre a dostanete všeobecnú rovnicu .

* Dosaďte do všeobecnej rovnice súradnice bodov a dostanete sústavu troch rovníc o štyroch neznámych

Riešte úlohy 1.5.4 až 1.5.5. , 1.5.13 až 1.5.21.

**Úloha 1.5.22**

Určte neparametricky priamku prechádzajúcu bodom  rovnobežnú s priamkou .

kde , .

**Riešenie**

Označme neznámu ako parameter . Potom priamku môžeme vyjadriť parametricky

 Odkiaľ dostaneme smerový vektor , ktorým je určená aj hľadaná priamka.

Bod a vektor určujú parametrické rovnice

Po vyjadrení parametra a porovnaním dostaneme neparametrické vyjadrenie

**Úloha priečka 1**

Napíšte parametrické rovnice priečky mimobežiek 〈〉 a 〈〉, ktorá prechádza bodom . .

**Riešenie**

Označme hľadané priesečníky priečky s oboma mimobežkami po rade . Body ležia v rovine , preto v nej leží aj priečka , a teda aj bod . Preto je priesečník priamky s rovinou .

Výpočet bodu .

Rovnicu roviny vyjadríme parametricky ako

Čo je ekvivalentné všeobecnej rovnici .

Priamku vyjadríme parametricky: . Pre jej prienik s rovinou máme rovnicu . Riešenie je, preto .

Priečka má parametrické vyjadrenie .

Výpočtom sa presvedčíme, že pretína priamku , a to v bode .

**Úloha priečka 2**

V priestore (geometrický model afinného priestoru) sú dané dve mimobežky , kde .

Určite ich priečku rovnobežnú s priamkou o smerovom vektore ;

**Riešenie**

Označme hľadané priesečníky priečky s oboma mimobežkami po rade . Pre tieto body platí vzťah

čo rozpísané do súradníc poskytuje sústavu rovníc

Riešením získame , odtiaľ .

Riešte úlohy 1.5.23 až 1.5.25.

**2.1. Skalárny súčin vektorov**

**Úloha 2.1.9**

Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory , ak , sú na seba kolmé vektory.

**Riešenie.**

Zvoľme si jeden z jednotkových vektorov ľubovoľne ale pevne pomocou bodu  na jednotkovej kružnici . Napríklad nech má súradnice . Vektor určíme pomocou súradníc bodu (stačí uvažovať len v I. a IV. kvadrante) takto: . Pozrite obrázok

Odkaz na applet [Tu](https://www.geogebra.org/m/dugqt6qt)

Pri takejto voľbe bude . Počítajme skalárny súčin

Dosadením dostaneme pre bod . Hodnotu uhla môžeme vypočítať napr. analyticky pomocou kosínusu alebo goniometricky z vlastností rovnostranného trojuholníka, lebo .

**Priamy výpočet**: skalárny súčin je ( bežný súčin dvojčlenov)

Po dosadení dostaneme a dosadení do vzorca

**Úloha** **2.1.15**.

Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného trojuholníka , ktorého ťažnice z vrcholov základne sú navzájom kolmé.

**Riešenie.**



Trojuholník podľa predpokladu je pravouhlý. Trojuholník je zároveň rovnoramenný (zdôvodnite prečo), tak uhol (pri jeho základni) musí byť rovný 45°. Odkiaľ dostaneme, že trojuholník je tiež rovnoramenný (pre ramená platí ), preto pre ťažnicu bude platiť

Z pravouhlého trojuholníka vypočítame .

Vektorový výpočet: bez ujmy na obecnosti môžeme predpokladať, že , potom dostaneme po vhodnom umiestnení do súradného systému , a nakoniec

**Úloha** **2.1.22**

Použitím skalárneho súčinu určte veľkosť vektora , kde je stred strany rovnobežníka , ak 6, uhol je 60°.

**Riešenie.**

Uhol ° a pre vektor platí okiaľ a .

Veľkosť vektora je

[**Tu**](file:///C%3A%5CUsers%5CHanzel%5CDownloads%5CAfinneZobrazenia%5CMON_Pr_2.1.22.ggb)

**2.4. Metrické vlastnosti euklidovského priestoru**

**Úloha 2.4.2**

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny , ktorá prechádza bodmi a na osi vytína úsek dĺžky 4.

**Riešenie.**

Bod na osi  má súradnice . Uvažujme o vektoroch , . Parametrické rovnice pre sú

Po vyjadrení parametrov pomocou neznámych dostaneme

 a zároveň

 Po dosadení parametra dostaneme riešenie **.**

**Úloha 2.4.5**

Určte všeobecnú rovnicu priamku , na ktorej leží výška trojuholníka ABC; .

**Riešenie:**

Určite smerový vektor . Potom parametrické rovnice priamky určenej bodom a vektorom sú

Po vyjadrení parametra a porovnaním oboch strán rovnice dostaneme

a po úprave dostaneme riešenie. Pozrite si nasledujúci obrázok.

****

**Úloha 2.4.10**

Určte veľkosti výšok trojuholníka , ak strany ležia na priamkach

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Obrázok, na ktorom je text, rad, diagram, vývoj  Automaticky generovaný popis* |

**Riešenie**

Určte súradnice vrcholov trojuholníka ako priesečníky priamok (3x sústava 2 rovníc o 2 neznámych), potom kolmé priamky a ich priesečníky (,,) a nakoniec vzdialenosti 2 bodov.

* Napríklad prvé dve rovnice dávajú riešenie .
* Priamka idúca vrcholom a kolmá na má smerový vektor
* Jej parametrický tvar je alebo v „bodovom“ tvare [2-3t,-1-t].
* Dosadením [2-3t,-1-t] do určíme a nakoniec priesečník [.
* Vzdialenosť bodov[[1]](#footnote-1) .

Riešte úlohy 2.4.14., 2.4.15. , 2.4.25., 2.4.27., 2.4.30.

**3.1. Základné vlastnosti afinných zobrazení**

**Úloha 3.1.10**

Je dané afinné zobrazenie ; , , . Určte .

**Riešenie**

Vektor je umiestnením vektora a pre jeho obraz v afinnom (lineárnom) zobrazení dostaneme

Odkiaľ

Pomerne ľahko sa určí aj obraz vektora . Vektor sa zobrazí na vektor

Teraz môžeme určiť obraz vektora ako lineárnej kombinácie vektorov (1,2), (5,2). Zrejme platí

a pre obraz

Podobne pomocou lineárnej kombinácie

spočítame, že

**Úloha 3.3.2a** – pozrite kapitolu Rôzne dimenzie, riešenie [Tu](https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=202553&chapterid=10565)

**Úloha rovnoľahlosť**

Je dané afinné zobrazenie ; , , . Určte .

**Riešenie**. (pozrite siodkaz na rovnoľahlosť [Tu](https://lms.umb.sk/mod/book/view.php?id=202553&chapterid=8180))

Určenie obrazu vektora ako lineárnej kombinácie bodov . Potrebujeme obrazy bodov

* , kde
* , kde

Riešením je , a pre obrazy dostaneme

Parametrické rovnice sú

alebo zápis

1. $\left|AB\right| = \sqrt{ (b1 - a1)^{2} + (b2 - a2)^{2}}$. [↑](#footnote-ref-1)