$\overline{a} = 4\overline{e}_1 - 2\overline{e}_3$
$\overline{b} = -\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3.$

Úloha 1.7.6. Určte súradnice bodu M v LSS $\mathcal{L}_{\{O;\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3,\overline{e}_4\}}$, ak
$M = A + \overline{a} + 2\overline{b}$
$A = O + \overline{e}_1 + 2\overline{e}_3$
$\overline{a} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_4$
$\overline{b} = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 - 2\overline{e}_4.$

Úloha 1.7.7. Dané sú body $M[3;1;1]$, $P[2;-3;1]$ a vektory $\overline{e}_1(1;0;0)$, $\overline{e}_2(1;1;0)$, $\overline{e}_3(0;0;1)$. Určte súradnice bodu M v LSS danej repérom $\mathcal{R} = \{P;\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$.

Úloha 1.7.8. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny α v LSS $\mathcal{L}'$ danej repérom $\mathcal{R} = \{Q;\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3,\overline{u}_4,\overline{u}_5\}$;
$\alpha:\ 2x_1 - x_2 + x_4 - 3x_5 - 1 = 0,$
$Q[0;1;0;-1;0]$, $\overline{u}_1(1;1;0;0;1)$, $\overline{u}_2(0;0;2;0;1)$, $\overline{u}_3(0;-1;0;0;0)$, $\overline{u}_4(0;-1;0;0;2)$, $\overline{u}_5(0;0;0;-1;2)$

KAPITOLA 2.
EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR

2.1. Skalárny súčin vektorov

Úloha 2.1.1. Zistite, či zobrazenie f je skalárnym súčinom vo vektorovom priestore $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, ak
a) $f: ((x_1;y_1),(x_2;y_2)) \mapsto x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2,$
b) $f: ((x_1;y_1),(x_2;y_2)) \mapsto x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10y_1y_2,$
c) $f: ((x_1;y_1),(x_2;y_2)) \mapsto x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 9y_1y_2.$

Úloha 2.1.2. Daný je vektorový priestor $\mathbb{R}^2$ s obvyklými operáciami. Zistite či usporiadaná dvojica $(\mathbb{R}^2, .)$ tvorí vektorový priestor so skalárnym súčinom, ak $\overline{x}(x_1;x_2)$, $\overline{y}(y_1;y_2)$
a) $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1,$
b) $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2,$
c) $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$

Úloha 2.1.3. Skalárny súčin je definovaný $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$, $\overline{x}(x_1;x_2)$, $\overline{y}(y_1;y_2)$. Určte veľkosť vektora $\overline{u}(2;4)$.

Úloha 2.1.4. Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\overline{a} = 2\overline{u} + 3\overline{v}$, $\overline{b} = 4\overline{u} - 5\overline{v}$, ak $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú kolmé a jednotkové vektory.

Úloha 2.1.5. Nech pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ platí, $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$, $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 4$, $\|\overline{c}\| = 5$. Vypočítajte súčet $\overline{a}.\overline{b} + \overline{b}.\overline{c} + \overline{c}.\overline{a}$.

Úloha 2.1.6. Určte skalárny súčin $\overline{a}.\overline{b}$, ak
a) $\|\overline{a}\| = 5$, $\|\overline{b}\| = 8$, $|\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})| = \frac{\pi}{3}$;
b) $\|\overline{a}\| = \|\overline{b}\| = 3$, $|\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})| = 135°$;
c) $\|\overline{a}\| = 1$, $\overline{b} = -3\overline{a}$.

Úloha 2.1.7. Nech pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$ platí, $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 1$, $|\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})| = 30°$. Určte kosínus uhla vektorov
a) $\overline{a} + 2\overline{b}$, $3\overline{a}$,
b) $\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{a}$.

Úloha 2.1.8. Vypočítajte kosínus uhla vektorov $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} - \overline{b}$, ak $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 2$, $|\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})| = \frac{\pi}{6}$

Úloha 2.1.9. Zistite, aký uhol zvierajú jednotkové vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, ak $\overline{x} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{y} = 5\overline{a} - 4\overline{b}$ sú na seba kolmé vektory.

Úloha 2.1.10. Zistite, aký uhol zvierajú vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, ak $\|\overline{u}\| = 2$, $\|\overline{v}\| = 4$ a ak vektory $\overline{a} = \overline{u} + \overline{v}$, $\overline{b} = 3\overline{u}$ sú na seba kolmé.

Úloha 2.1.11. Určte veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A v trojuholníku ABC, ak $A[0;1]$, $B[\sqrt{3};0]$, $C[0;3]$.

Úloha 2.1.12. Daný je trojuholník ABC. Vypočítajte skalárny súčin $\overline{a}.\overline{b}$, ak $\overline{a} = B - A$, $\overline{b} = C - B$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$, $|AB| = 7$.

Úloha 2.1.13. Vypočítajte veľkosť vektora $\overline{c} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, ak $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 4$, $|\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})| = \frac{2}{3}\pi$.

Úloha 2.1.14. Dokážte, že vektory $\overline{c}$ a $\overline{x}$ sú na seba kolmé, ak $\overline{x} = (\overline{b}.\overline{c}).\overline{a} - (\overline{a}.\overline{c}).\overline{b}$.

Úloha 2.1.15. Určte veľkosti vnútorných uhlov rovnoramenného trojuholníka, ktorého ťažnice z vrcholov základne sú navzájom kolmé.

Úloha 2.1.16. Vypočítajte veľkosť vektora $3\overline{u} + 2\overline{v}$, ak $\|\overline{u}\| = 3$, $\|\overline{v}\| = 4$ a $|\sphericalangle(\overline{u},\overline{v})| = 30°$.

Úloha 2.1.17. Vypočítajte normu vektora $2\overline{u} + 3\overline{v}$, ak $\|\overline{u}\| = 4$, $\|\overline{v}\| = 2$ a $|\sphericalangle(\overline{u},\overline{v})| = \frac{1}{3}\pi$.

Úloha 2.1.18. Nech $\overline{a}$ a $\overline{b}$ tvoria ortonormálnu bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_2(\mathbb{R})$, nech $\overline{u} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{v} = 4\overline{a} - \overline{b}$. Určte
- a) skalárny súčin vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$;
- b) veľkosť vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$;
- c) kosínus uhla vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$;
- d) zvoľte umiestnenie pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$ a narysujte situáciu s vektormi $\overline{u}$, $\overline{v}$.

Úloha 2.1.19. Nech platí $\|\overline{u}\| = \|\overline{v}\| = \|\overline{w}\| = 1$, $\overline{w} = \overline{u} + \overline{v}$. Vypočítajte $\overline{u}.\overline{v} + \overline{v}.\overline{w} + \overline{w}.\overline{u}$.

Úloha 2.1.20. Body $A[-3;2]$, $B[2;4]$ sú susedné vrcholy štvorca. Pomocou skalárneho súčinu určte jeho ďalšie dva vrcholy.

Úloha 2.1.21. Dané sú body $A[2;1]$, $B[5;5]$. Určte súradnice bodu C, ak vektor $C - A$ vznikne otočením vektora $B - A$ okolo bodu A o uhol veľkosti $\frac{5\pi}{6}$ pri kladnej orientácii.

Úloha 2.1.22. Použitím skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\overline{a} = \overline{AL}$, kde L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, ak $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|\sphericalangle(DAB)| = 60°$.

Úloha 2.1.23. Dané sú vektory $\overline{u}(1;0;1;1)$, $\overline{v}(-1;2;1;-2)$. Nájdite vektor $\overline{w}$ tvaru $(0;1;0;1) + k\overline{u} + r\overline{v}$, $k, r \in \mathbb{R}$ tak, aby $\overline{w}$ bol ortogonálny ku $\overline{u}$ aj $\overline{v}$.

2.2. Schmidtov ortogonalizačný proces
Totálna kolmosť vo $\mathbb{V}_n$
Kolmosť vo $\mathbb{V}_n$

Úloha 2.2.1. Schmidtovým ortogonalizačným procesom nájdite ortonormálnu bázu vo $\mathbb{V}_4$, ak poznáte jeho bázu $\langle\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4\rangle$, kde $\overline{a}_1(1;1;1;1)$, $\overline{a}_2(1;-1;1;1)$, $\overline{a}_3(2;0;-1;1)$, $\overline{a}_4(-1;1;0;1)$.

Úloha 2.2.2. Vo vektorovom priestore usporiadaných trojíc reálnych čísel sú dané vektory $\overline{a}_1(1;-1;1)$, $\overline{a}_2(0;1;2)$, $\overline{a}_3(1;1;0)$. Vykonajte Schmidtov ortogonalizačný proces.

Úloha 2.2.3. Dané sú vektory $\overline{a}_1(1;-2;2;-3)$, $\overline{a}_2(2;-3;2;4)$. Dokážte, že vektory $\overline{a}_1$ a $\overline{a}_2$ sú na seba kolmé a nájdite $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ tak, aby $\{\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\overline{a}_4\}$ bola ortogonálna báza vo $\mathbb{V}_4$.

Úloha 2.2.4. Určte bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}'^{\perp}$, ak $\mathbb{V}' = \langle(1;0;1;2;0),(0;0;1;1;2),(-1;0;0;1;2)\rangle$.

Úloha 2.2.5. Zistite, či vektorové priestory $\mathbb{V}' = \langle\overline{a},\overline{b}\rangle$ a $\mathbb{V}'' = \langle\overline{c},\overline{d}\rangle$ sú na seba kolmé, ak $\overline{a}(1;3;-1;5)$, $\overline{b}(1;-5;-3;1)$, $\overline{c}(14;5;3;-1)$, $\overline{d}(14;-3;1;-5)$.

Úloha 2.2.6. Dané sú vektorové priestory $\mathbb{V}' = \langle(1;0;-1;1;0),(0;2;-2;0;0),(0;0;3;-1;0)\rangle$ a $\mathbb{V}'' = \langle(1;1;1;0;0),(-1;0;0;1;1),(0;0;0;0;1)\rangle$.
- a) Zistite či vektorové priestory $\mathbb{V}'$ a $\mathbb{V}''$ sú na seba kolmé.
- b) Určte vo $\mathbb{V}_5$ ortonormálnu bázu $\langle\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3,\overline{e}_4,\overline{e}_5\rangle$ tak, aby $\mathbb{V}''^{\perp} = \langle\overline{e}_1,\overline{e}_2\rangle$ a zároveň $\mathbb{V}'' = \langle\overline{e}_3,\overline{e}_4,\overline{e}_5\rangle$.

Úloha 2.2.7. Určte jednotkový vektor kolmý k nadrovine α;

$$\alpha: \quad \begin{aligned} x_1 &= u + v + w \\ x_2 &= 1 + u - v + w \\ x_3 &= u - v + w \\ x_4 &= 1 + u + v + 3w \end{aligned}$$

2.3. Vonkajší súčin vo $\mathbb{V}_n$
Vektorový súčin vo $\mathbb{V}_3$

Úloha 2.3.1. Vypočítajte troma spôsobmi obsah trojuholníka ABC, ak
- a) $A[2;3]$, $B[1;-1]$, $C[0;1]$,
- b) $A[0;3]$, $B[4;1]$, $C[2;5]$.

Úloha 2.3.2. Vypočítajte dvoma spôsobmi obsah trojuholníka ABC, ak $A[2;1;-3]$, $B[4;1;5]$, $C[0;7;-6]$.

Úloha 2.3.3. Určte vektorový súčin vektorov $\overline{u}(3;\sqrt{3};0)$, $\overline{v}(3;3\sqrt{3};0)$ aspoň troma spôsobmi.

Úloha 2.3.4. Dané sú vektory $\overline{a}(1;-1;2)$, $\overline{b}(3;1;-3)$. Vypočítajte

a) $\overline{a}\times\overline{b}$,

b) $(2\overline{a}-\overline{b})\times(\overline{a}+3\overline{b})$,

c) overte pomocou výsledku z časti a), že $\|\overline{a}\times\overline{b}\| = \|\overline{a}\|.\|\overline{b}\|.\sin\varphi$.

Úloha 2.3.5. Pre kolmé vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$ platí $\|\overline{a}\| = 2$, $\|\overline{b}\| = 3$. Vypočítajte $\|(\overline{a}+3\overline{b})\times(2\overline{a}-5\overline{b})\|$.

Úloha 2.3.6. Použitím zmiešaného súčinu určte vzdialenosť bodu $A[2;3;4]$ od roviny ϱ;

$$\begin{aligned}\varrho:\quad x_1 &= 2-3b+2u\\ x_2 &= 3+2t-u\\ x_3 &= 2+t+4u\end{aligned}$$

Úloha 2.3.7. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom D rovnobežne s priesečnicou rovín α, β;
$\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$, $\beta: x+2y-z=0$, $A[1;0;0]$, $B[0;-1;0]$, $C[1;0;1]$, $D[3;0;0]$
(riešte aj využitím vektorového súčinu).

2.4. Metrické vlastnosti euklidovského priestoru

Úloha 2.4.1. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny γ štvorrozmerného afinného priestoru, ktorá na súradnicových osiach vytína rovnako veľké úseky dĺžky 2. Koľko riešení má úloha?

Úloha 2.4.2. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ϱ, ktorá je určená bodmi A, B a na súradnicovej osi z vytína úsek dĺžky 4;
$A[-1;3;4]$, $B[2;-3;-1]$.

Úloha 2.4.3. K priamke idúcej bodmi $E[3;4]$, $F[1;-1]$ veďte priesečníkom priamok p, q a) rovnobežku, b) kolmicu (zapíšte jej všeobecnú rovnicu);
$p: 6x-7y+23=0$, $\quad q: 2x+y+1=0$.

Úloha 2.4.4. Daná je priamka p a bod M. Nájdite na priamke p body, ktorých

vzdialenosť od bodu M sú 4 jednotky;

$$\begin{aligned}p: x &= 1+t \qquad\qquad M[4;1;3]\\ y &= -2+t\\ z &= 3-2t\end{aligned}$$

Úloha 2.4.5. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží výška v_A trojuholníka ABC; $A[2;5]$, $B[4;2]$, $C[1;-2]$.

Úloha 2.4.6. V euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$ je daná rovina α a bod M. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom M a kolmej na α;
$\alpha: 2x_1-x_2+2x_3-4=0$,
$A[3;8;-4]$.

Úloha 2.4.7. V euklidovskom priestore $\mathbb{E}_4$ je daný podpriestor α a bod A. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom A a kolmej na α;
$\alpha: X=[2;1;0;5]+t_1(2;-4;6;1)+t_2(4;1;-2;3)+t_3(0;4;0;2)$,
$A[-1;4;3;1]$.

Úloha 2.4.8. Určte vrcholy B, D štvorca $ABCD$, ak $A[2;1]$, $C[4;5]$.

Úloha 2.4.9. V $\mathbb{E}_3$ napíšte všeobecnú rovnicu roviny β, ktorá prechádza priamkou p a je kolmá na rovinu α;
$p: X=[2;3;0]+t(1;0;-1)$, $\qquad \alpha: x_1-x_2+2x_3-4=0$.

Úloha 2.4.10. Určte veľkosti výšok trojuholníka KLM, ak
$\overleftrightarrow{KL}: x+y-1=0$,
$\overleftrightarrow{KM}: 2x-y-5=0$,
$\overleftrightarrow{LM}: 3x+y=0$.

Úloha 2.4.11. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky, na ktorej leží výška v_V (prechádzajúca vrcholm V) štvorstena $ABCV$ a vypočítajte veľkosť tejto výšky;

a) $A[-1;0;3]$, $B[4;3;2]$, $C[2;1;1]$, $V[-6;1;0]$,

b) $A[2;1;1]$, $B[-1;0;3]$, $C[4;3;2]$, $V[-6;1;0]$.

c) $A[1;0;1]$, $B[2;1;1]$, $C[-3;0;2]$, $V[3;1;5]$,

Úloha 2.4.12. Určte analytické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodom $L[-4;3]$ a od počiatku súradnicovej sústavy vzdialenej päť jednotiek.

Úloha 2.4.13. Určte analytické vyjadrenie priamky, na ktorej leží strana trojuholníka prechádzajúca bodom $M[3;4]$, ak ostatné dve strany trojuholníka ležia na súradnicových osiach x, y a obsah trojuholníka $S_\triangle = 24$.

Úloha 2.4.14. Dané sú body $S_a[7;8]$, $S_b[-4;5]$, $S_c[1;-4]$. Určte vrcholy trojuholníka ABC, pre ktorý sú body S_a, S_b, S_c v poradí stredy strán BC, AC, AB.

Úloha 2.4.15. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky prechádzajúcej bodom $M[1;2]$, ktorá má od bodov $M_1[2;3]$, $M_2[4;-5]$ rovnakú vzdialenosť.

Úloha 2.4.16. V $\mathbb{E}_3$ určte dvoma spôsobmi vzdialenosť euklidovských podpriestorov $\mathbb{E}' = \{M\}$ a $\mathbb{E}'' = [Q; \overline{u}]$;
$M[5;2;3]$, $Q[1;-3;1]$, $\overline{u}(1;2;-1)$.

Úloha 2.4.17. Určte vzdialenosť bodu $B[2;3;4]$ od roviny α;
$\alpha: 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6 = 0$.

Úloha 2.4.18. Určte súradnice bodu A', ktorý je súmerne združený s bodom $A[-1;2;5;-3]$ podľa nadroviny $\omega: 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 5$.

Úloha 2.4.19. Určte vzdialenosť bodu $A[1;2;1;-2]$ od priamky m,

$$\begin{aligned} m: x_1 &= 2 - 3t \\ x_2 &= 3 - 2t \\ x_3 &= -2 + 3t \\ x_4 &= 5 + 4t \end{aligned}$$

Úloha 2.4.20. Napíšte rovnicu roviny súmernosti bodov A, B, ak
a) $A[2;-2;3]$, $B[3;1;-1]$,
b) $A[2;-1;-4]$, $B[4;-3;2]$.

Úloha 2.4.21. V $\mathbb{E}_5$ je daná nadrovina α a bod M. Určte pravouhlý priemet bodu M do nadroviny α;
$\alpha: x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 1 = 0, \qquad M[1;1;1;1;3]$.

Úloha 2.4.22. Vypočítajte súradnice vrcholov kosoštvorca $ABCD$, ktorého jedna strana obsahuje bod M, protiľahlá strana leží na priamke m a uhlopriečka BD leží na priamke p;

$$\begin{aligned} m: x &= 3 + 4t \\ y &= 6 + t \end{aligned} \qquad p: 9x + 5y - 45 = 0 \qquad M[1;2]$$

Úloha 2.4.23. Bod S je priesečníkom uhlopriečok obdĺžnika, ktorého jedna strana leží na priamke p. Určte všeobecné rovnice priamok, na ktorých ležia zvyšné strany obdĺžnika, ak jedna z nich obsahuje bod M;
$S[0;3]$, $M[1;7]$, $p: x - y + 1 = 0$.

Úloha 2.4.24. Dvoma spôsobmi vypočítajte vzdialenosť mimobežiek a, b (1.sp. využite priečku mimobežiek kolmú na priamku a aj b, 2.sp. využite úlohu 2.3.6);
a) $a: X = [0;0;\frac{1}{3}] + t(0;1;0)$,
$b: X = [1;1;1] + t(0;\frac{1}{2};1)$,
b)

$$\begin{aligned} a: x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b: x &= 0 \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}$$

Úloha 2.4.25. Určte reálne čísla a, b tak, aby priamka p bola kolmá na rovinu α;

$$\begin{aligned} p: x &= 1 + 2t \\ y &= 3 + at \\ z &= -1 + bt \end{aligned} \qquad \alpha: x + 5y + 3z - 4 = 0$$

Úloha 2.4.26. Riešte úlohu 2.2.7 čo najjednoduchšie (využitím normálového vektora nadroviny).

Úloha 2.4.27. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na priamku p;
$M[2;-1;1;1]$, $\qquad p: X = [7;1;4;-2] + t(3;2;-2;1)$.

Úloha 2.4.28. Daný je štvorsten $ABCD$. Určte kosínus uhla, ktorý zvierajú roviny ABD a ABC;
$A[3;-2;0]$, $B[5;6;0]$, $C[-1;2;0]$, $D[2;2;3]$.

Úloha 2.4.29. Dourčte súradnice bodov C, D v $\mathbb{E}_3$ tak, aby $ABCD$ bol pravidelným štvorstenom a aby y-ová súradnica bodu C aj z-ová súradnica bodu D boli kladné;
$A[1;0;0]$, $B[4;4;0]$, $C[?;?;0]$, $D[?;?;?]$.

Úloha 2.4.30. Daná je jednotková kocka $ABCDA'B'C'D'$. Vypočítajte vzdialenosť bodu B' od roviny $A'CE$, ak $(DD'E) = -1$.

Úloha 2.4.31. Určte ortogonálny priemet bodu $A[5;1;2]$ do roviny α:
$\alpha: x - 2y + z - 4 = 0$.

Úloha 2.4.32. Určte ortogonálny priemet priamky p do roviny α;
$p: X = [3;1;2] + t(3;2;-1)$, $\qquad \alpha: 2x - y + z - 4 = 0$.

Úloha 2.4.33. Napíšte všeobecné rovnice takých dvoch rovín (v $\mathbb{E}_3$), aby ortogonálny priemet jednej z nich do druhej bola priamka.

Úloha 2.4.34. Dané sú roviny α, β. V rovine β je daný bod B^0. Určte v rovine α bod B tak, aby jeho ortogonálnym priemetom do roviny β bol práve bod B^0;
$\alpha: 3x - y + 2z + 1 = 0$, $\qquad \beta: x + 3y + z - 4 = 0$, $\qquad B^0[8;0;-4]$.

Úloha 2.4.35. Určte vzájomnú polohu priamok $p = [A;\overline{u}]$ a $q = [B;\overline{v}]$ a ich vzdialenosť;
$A[2;0;0]$, $B[0;1;1]$, $\overline{u}(5;0;1)$, $\overline{v}(0;1;1)$.

Úloha 2.4.36. Nech priamky $a: X = A + t\overline{a}$, $b: X = B + r\overline{b}$ sú mimobežky. Ukážte, že ich vzdialenosť je $d = \frac{|(\overline{a}\times\overline{b}).(B-A)|}{||\overline{a}\times\overline{b}||}$.

Úloha 2.4.37. Určte vzdialenosť euklidovských podpriestorov $\mathbb{E}'$ a $\mathbb{E}''$, ak sú dané parametricky;

$$\mathbb{E}' : x_1 = r - s \qquad \mathbb{E}'' : x_1 = k$$
$$x_2 = 1 + r \qquad x_2 = l$$
$$x_3 = 2 + r + 2s \qquad x_3 = -1$$
$$x_4 = -3s \qquad x_4 = -l$$

Úloha 2.4.38. Vypočítajte vzdialenosť euklidovských podpriestorov
a) $\mathbb{E}' = [M; \overline{u}_1, \overline{u}_2]$ a $\mathbb{E}'' = [N; \overline{v}]$;
$M[3;0;0;0;1]$, $\overline{u}_1(1;-1;0;1;2)$, $\overline{u}_2(0;0;1;0;0)$, $N[1;1;0;0;1]$, $\overline{v}(1;0;0;0;1)$.
b) $\mathbb{E}' = [A; \overline{a}, \overline{b}]$ a $\mathbb{E}'' = [B; \overline{c}, \overline{d}]$;
$A[1;1;0;0;1]$, $\overline{a}(0;0;0;1;0)$, $\overline{b}(1;0;0;0;1)$, $B[3;0;0;0;1]$, $\overline{c}(0;0;1;0;0)$, $\overline{d}(1;-1;0;1;2)$.

KAPITOLA 3

AFINNÉ ZOBRAZENIA

3.1. Základné vlastnosti afinných zobrazení

Úloha 3.1.1. V $\mathbb{A}_2$ je daná LSS a afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$,
$A[1;1] \overset{f}{\mapsto} A'[3;5]$
$B[5;2] \overset{f}{\mapsto} B'[10;10]$
$\overline{v}(5;2) \overset{\overline{f}}{\mapsto} \overline{v}'(8;7)$.
Určte $f(O)$, $\overline{f}(\overline{e}_1)$ a $\overline{f}(\overline{e}_2)$, ak $O[0,0]$, $\overline{e}_1(1;0)$, $\overline{e}_2(0;1)$.

Úloha 3.1.2. Dané sú body $A, B \in \mathbb{A}_n$, označme $T_{(A,B,X)} = A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{3}(X - A)$. Dokážte, že $f : X \mapsto T_{(A,B,X)}$ je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.3. V afinnej rovine $\mathbb{A}_2$ sú dané rôznobežky p, q. Pre ľubovoľný bod $X \in \mathbb{A}_2$ označme q_X priamku prechádzajúcu bodom X a rovnobežnú s priamkou q. Dokážte, že $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$, kde $f(X) = X'$, $X' \in q_X \cap p$ je afinné zobrazenie. Je f surjekcia?

Úloha 3.1.4. V afinnej rovine $\mathbb{A}_2$ sú dané rôznobežky p, q. Pre ľubovoľný bod $X \in \mathbb{A}_2$ označme q_X priamku prechádzajúcu bodom X a rovnobežnú s priamkou q. Dokážte, že $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$, kde $f(X) = X'$, pričom obraz X' leží na priamke q_X a stred úsečky XX' leží na priamke p je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.5. Dané sú dve mimobežky $p, q \subset \mathbb{A}_3$ a rovina $\alpha \subset \mathbb{A}_3$ tak, že p aj q sú rôznobežné s α. Pre ľubovoľné $X \in p$ označme α_X rovinu prechádzajúcu bodom X rovnobežne s rovinou α.
Dokážte, že $f : p \to q$, $f : X \mapsto \alpha_X \cap q$ je afinné zobrazenie.

Úloha 3.1.6. Dokážte, že každé posunutie je afinná transformácia.

Úloha 3.1.7. Dokážte, že každá rovnoľahlosť je afinná transformácia.

Úloha 3.1.8. Nech $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}'$ je afinné zobrazenie. Aké prípady môžu nastať pre f, t.j. čo môže byť obrazom $f(\mathbb{A}_2)$?

3.2. Asociovaný homomorfizmus afinného zobrazenia

Úloha 3.2.1. Pre asociovaný homomorfizmus $\overline{f}$ afinného zobrazenia $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_4$ platí, že $\overline{f}(\overline{u}) = \overline{u}'$, $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{v}'$. Určte obrazy vektorov $\overline{w}$ a $(\overline{w} - 2\overline{u})$.
$\overline{u}(2;1)$, $\overline{v}(0;1)$, $\overline{u}'(1;2;1;1)$, $\overline{v}'(1;1;0;0)$, $\overline{w}(1;1)$

Úloha 3.2.2. Afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ je dané predpisom

$$X[x;y] \overset{f}{\mapsto} X'[x + y - 3; y - 1; x - 2y].$$

Určte obraz vektorov $\overline{u}(1;2)$, $-\overline{u}$ a $3\overline{u}$ v asociovanom homomorfizme $\overline{f}$.

Úloha 3.2.3. Dané je afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_3 \to \mathbb{A}_2$ tak, že $f(A) = K$, $F(B) = L$, $f(C) = M$ a $f(D) = N$. Určte obraz vektora $\overline{v}$ v asociovanom zobrazení $\overline{f}$.
$A[3;1;3]$, $B[0;0;2]$, $C[1;0;1]$, $D[3,1,-3]$, $K[-1;2]$, $L[1;1]$, $M[1;2]$, $N[2;4]$, $\overline{v}(2,1,-2)$

Úloha 3.2.4. Daný je afinný priestor $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, body aj vektory afinného priestoru tvoria polynómy nanajvýš tretieho stupňa nad reálnymi číslami, – je operácia odčitovania dvoch polynómov. Vyjadrite afinné zobrazenie $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, ak viete, že $f(M) = K$, kde $M = x^3 + x^2 + x + 1$, $K = x^2 + 2$ a $\overline{f}(\overline{u}) = \overline{u}'$, kde $\overline{u}'$ znamená deriváciu polynómu $\overline{u}$.

3.3. Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

Úloha 3.3.1. V afinnej rovine $\mathbb{A}_2$ sú dané tri lineárne nezávislé body B, C, D a repér $\mathcal{R} = \{B; C-B, D-B\}$ určujúci LSS v $\mathbb{A}_2$. Existuje práve jedno afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$, také že $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ a $f(D) = D'$. Určte analytické vyjadrenie zobrazenia f;
$B'[1;0;0]$, $C'[0;1;0]$, $D'[0;0;1]$

Úloha 3.3.2. Napíšte analytické vyjadrenie afinného zobrazenia $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_1$, ak $f(A) = K$, $f(B) = L$, $f(C) = M$.
a) $A[2;1]$, $B[3;2]$, $C[0;1]$, $K[2]$, $L[0]$, $M[10]$
b) $A[2;1]$, $B[3;2]$, $C[0;1]$, $K[2]$, $L[0]$, $M[8]$

Úloha 3.3.3. Existuje afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_1$, pre ktoré platí, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$?
a) $A[2;1]$, $B[3;2]$, $C[5;4]$, $A'[2]$, $B'[1]$, $C'[-1]$,
b) $A[2;1]$, $B[3;2]$, $C[5;4]$, $A'[2]$, $B'[0]$, $C'[8]$.
V prípade, že f je afinné zobrazenie, je určené jednoznačne? Zapíšte jeho analytické vyjadrenie.

Úloha 3.3.4. Určte analytické vyjadrenie afinného zobrazeia $f : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{A}_5$, ak $f(K) = K'$, $f(L) = L'$, $\overline{f}(\overline{u}) = \overline{u}'$ $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{v}'$ $\overline{f}(\overline{w}) = \overline{w}'$;
$K[0;1;2;3]$, $L[1;2;1;0]$, $\overline{u}(1;0;0;1)$, $\overline{v}(0;0;1;0)$, $\overline{w}(0;0;0;2)$, $K'[-5;2;2;6;7]$, $L'[-6;3;2;9;5]$, $\overline{u}'(2;0;1;0;-1)$, $\overline{v}'(-3;0;1;0;5)$, $\overline{w}'(2;0;0;0;-2)$.

Úloha 3.3.5. V $\mathbb{A}_2$ a v $\mathbb{A}_3$ sú zvolené LSS-íc. Zistite, či existuje afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$, také že $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$. Ako závisí riešenie úlohy od parametra p?
$B[1;0]$, $C[0;1]$, $D[2;p]$, $B'[2;1;-1]$, $C'[3;2;0]$, $D'[1;0;2]$

Úloha 3.3.6. Nájdite analytické vyjadrenie afinného zobrazenia, ktoré
$A[1;2;3] \mapsto A'[0;9;-1]$,
$B[3;2;1] \mapsto B'[2;11;1]$,
$C[1;-1;1] \mapsto C'[3;4;-2]$,
$D[2;1;0] \mapsto D'[2;7;1]$.

Úloha 3.3.7. Nájdite analytické vyjadrenie afinného zobrazenia, ktoré

$K[1;2;3] \mapsto K'[5;4]$,
$L[1;1;1] \mapsto L'[2;1]$,
$M[1;0;1] \mapsto M'[1;0]$,
$N[0;1;3] \mapsto N'[3;2]$.

Úloha 3.3.8. Nájdite analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f, ktoré
$P[3;3] \overset{f}{\mapsto} P'[7;0]$,
$Q[2;1] \overset{f}{\mapsto} Q'[4;1]$,
$\overline{u}(2;1) \overset{\overline{f}}{\mapsto} \overline{u}'(3;1)$.

3.4. Skladanie afinných zobrazení
Inverzné zobrazenie afinného zobrazenia

Úloha 3.4.1. Dokážte, že f je afinná transformácia $\mathbb{A}_2$ a určte analytické vyjadrenie zobrazení f^{-1} a f^2, ak
$A[0;2] \overset{f}{\mapsto} A'[1;4]$, $B[2;2] \overset{f}{\mapsto} B'[3;4]$, $C[2;0] \overset{f}{\mapsto} C'[3;0]$.

Úloha 3.4.2. Nájdite analytické vyjadrenie afinného zobrazenia $f \circ g$, ak

$$a)\quad f: \begin{aligned} x' &= x+3 \\ y' &= y-1 \\ z' &= 2x+y \end{aligned} \qquad g: \begin{aligned} x' &= x-y+z+1 \\ y' &= x+2y+2z \end{aligned}$$

$$b)\quad f: \begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= x+3 \end{aligned} \qquad g: \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x-y \end{aligned}$$

Úloha 3.4.3. Dané je afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_3 \to \mathbb{A}_3$

$$f: \begin{aligned} x' &= x+y-2z+1 \\ y' &= x-z \\ z' &= x-y-1 \end{aligned}$$

Nájdite obraz afinného podpriestoru

$$a)\quad p: \begin{aligned} x &= 3+t \\ y &= -t \\ z &= -1 \end{aligned} \qquad b)\quad \alpha: \begin{aligned} x &= 1+u+v \\ y &= 2+v \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$c)$ $\gamma:\ x+y+z+3=0$, $\qquad d)$ $\delta = \mathbb{A}_3$

3.5. Samodružné prvky afinného zobrazenia

Úloha 3.5.1. Dané je afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_3 \to \mathbb{A}_3$

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= x - y + z + 1 \\ y' &= -x + y + z + 2 \\ z' &= -x - y + 3z + 3 \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f.

Úloha 3.5.2. Dané je afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= x + 2y + 3 \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f.

Úloha 3.5.3. V $\mathbb{A}_2$ sú dané nekolineárne body A, B, C. Nájdite samodružné body a samodružné smery afinného zobrazenia f, ak
a) $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = C$;
b) $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = A$.

Úloha 3.5.4. Dané je afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

Určte samodružné body a samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f.

Úloha 3.5.5. Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f;

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= x + 2y + 3 \\ y' &= 2x - y + 1 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.6. Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f;

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= -x + 4y - 2 \\ y' &= 2x - 3y + 2 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.7. Určte samodružné body, samodružné smery a samodružné priamky afinného zobrazenia f;

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= 2x - 2 \\ y' &= -6x - y + 14 \\ z' &= 19x + 6y + z - 44 \end{aligned}$$

Úloha 3.5.8. Napíšte analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f v afinnom priestore $\mathbb{A}_3$, ak M je samodružný bod af. zobrazenia f a $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sú charakteristické vektory asociovaného homomorfizmu $\overline{f}$, pričom $\overline{u}$ a $\overline{v}$ prislúchajú charakteristickému číslu $\lambda_1 = 2$ a vektor $\overline{w}$ prislúcha charakteristickému číslu $\lambda_2 = -1$; $M[1; 0; 0]$, $\overline{u}(1; 0; 1)$, $\overline{v}(1; 0; -1)$, $\overline{w}(0; 1; -2)$

Úloha 3.5.9. Dokážte, že všetky smery afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ sú samodružné smery každého posunutia v $\mathbb{A}_n$.

Úloha 3.5.10. Dokážte, že každý smer v $\mathbb{A}_n$ je samodružným smerom každej rovnoľahlosti v $\mathbb{A}_n$.

3.6. Homotetické transformácie

Úloha 3.6.1. Rovnoľahlosť je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 4 \\ y' &= 3y + 1 \end{aligned}$$

Nájdite jej stred S a charakteristiku h.

Úloha 3.6.2. Rovnoľahlosť $\varkappa$ je daná charakteristikou $h = -\frac{2}{3}$ a dvojicou odpovedajúcich si bodov $A[3; 1]$, $A'[2; 4]$. Určte súradnice stredu S rovnoľahlosti $\varkappa$.

Úloha 3.6.3. V rovine je daný bod $S[1; -3]$ a priamky p, p'

$$\begin{aligned} p &: 3x + 5y - 15 = 0, \\ p' &: ax + 7y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Určte $a \in R$ tak, aby obrazom priamky p v rovnoľahlosti $\varkappa$ so stredom S bola priamka p' a určte jej charakteristiku.

Úloha 3.6.4. Určte stred a charakteristiku rovnoľahlosti $\varkappa$ a reálne čísla r, s tak, aby $H[1; ?]$ bol jej samodružným bodom, bod $M'[3; 1]$ bol obrazom bodu $M[2; 4]$ a priamka a' obrazom priamky a v rovnoľahlosti $\varkappa$;

$$\begin{aligned} a &: x - y = 0, \\ a' &: rx + 4y + s = 0. \end{aligned}$$

Úloha 3.6.5. Určte stred rovnoľahlosti $\varkappa$, ktorej charakteristika $h = 3$, ak viete, že priamka m sa v nej zobrazí do priamky m' a že priesečník priamky m s osou x sa zobrazí do bodu, ktorého y-ová súradnica je rovná $\frac{1}{3}$;

$$\begin{aligned} m &: 2x - 3y + 1 = 0, \\ m' &: x + ty + 1 = 0. \end{aligned}$$

Úloha 3.6.6. Určte p tak, aby existovala rovnoľahlosť so stredom $S[3; 2]$, ktorá bod $A[1; 4]$ zobrazí do bodu $B[2; p]$. Napíšte rovnice tejto rovnoľahlosti.

Úloha 3.6.7. Napíšte analytické vyjadrenie rovnoľahlosti v $\mathbb{A}_3$, ak charakteristické číslo $\lambda = -2$ a obrazom bodu $B[2;0;-1]$ je bod $C[0;1;3]$. Určte stred tejto rovnoľahlosti.

Úloha 3.6.8. Napíšte analytické vyjadrenie homotetickej transformácie f, pre ktorú $f(K) = K'$ a $f(L) = L'$. Určte samodružné body zobrazenia f.
$K[3;2]$, $L[1;-1]$, $K'[2;1]$, $L'[0;?]$

Úloha 3.6.9. Dané je afinné zobrazenie

$$f: \begin{aligned} x' &= 4x + 3 \\ y' &= 4y \\ z' &= 4z - 6 \end{aligned}$$

Zistite, či f je homotétia. Ak áno, určte presnejšie o akú homotétiu ide.

Úloha 3.6.10. V afinnom priestore $\mathbb{A}_3$ sú dané robnoľahlosť f so stredom $S[1;-2;3]$ a koeficientom $\lambda = \frac{3}{4}$ a posunutie g, vektorom posunutia je $\overline{u}(0;1;-1)$.
a) Určte aká transformácia vznikne zložením $f \circ g$,
b) Určte aká transformácia vznikne zložením $g \circ f$,
c) Overte, že rovnoľahlosť, ktorú ste dostali v a) má stred $H = S + \frac{1}{1-\lambda}\overline{u}$,
d) Overte, že rovnoľahlosť, ktorú ste dostali v b) má stred $U = S + \frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{u}$.

3.7. Základné afinné zobrazenia

Úloha 3.7.1. Napíšte rovnice osovej afinity, ktorej osou je súradnicová os x a zobrazuje bod $[0;1]$ na bod $[3;5]$.

Úloha 3.7.2. Napíšte rovnice základnej afinity f priestoru $\mathbb{A}_3$, ktorej množinou samodružných bodov je rovina $\omega: x + 2y - z + 1 = 0$ a počiatok LSS P sa zobrazí do bodu $Q[0;0;2]$.

Úloha 3.7.3. Napíšte analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f, ak body $A[1;2;3]$, $B[0;1;0]$, $C[-1;0;1]$ sú samodružné a bod $D[2;0;1]$ sa zobrazí do počiatku LSS. (Môžeme využívať, že f je základná afinita? Prečo?)

Úloha 3.7.4. Napíšte rovnice involutórnej osovej afinity, ktorej osou je priamka $x - y + 1 = 0$ a počiatok LSS sa zobrazí do bodu $[4;?]$.

KAPITOLA 4. ZHODNÉ ZOBRAZENIA

4.1. Základné vlastnosti zhodných zobrazení

Úloha 4.1.1. Zistite, či existuje zhodné zobrazenie z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_3$, pričom $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $A[1;2]$, $B[2;-3]$, $A'[4;1;0]$, $B'[6;5;0]$.

Úloha 4.1.2. a) Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovalo zhodné zobrazenie z $\mathbb{E}_2$ do $\mathbb{E}_2$, pri ktorom $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$;
$A[0;0]$, $B[2;1]$, $C[4;a]$, $A'[1;2]$, $B'[3;1]$, $C'[5;b]$.
b) Je zobrazenie f určené v a) jednoznačne? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 4.1.3. Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovalo zhodné zobrazenie $f: \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$, pre ktoré
$[0;0] \mapsto [1;2]$, $[2;1] \mapsto [3;1]$, $[4;a] \mapsto [6;b]$.
Je takto určené zobrazenie f dané jednoznačne?

Úloha 4.1.4. V zhodnom zobrazení $f: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ sú body $K[0;0;0]$, $L[1;1;1]$ samodružné a bod $A[1;-1;0]$ sa zobrazí do roviny $\alpha: x = 0$. Určte súradnice bodu $f(A)$.

Úloha 4.1.5. V $\mathbb{E}_2$ je daný štvorec $ABCD$. Koľko zhodných zobrazení euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$ do seba reprodukujúcich štorec $ABCD$ existuje? Vypíšte ich.

Úloha 4.1.6. Koľko zhodných zobrazení f v $\mathbb{E}_3$ existuje, ak
$[-1;2;1] \mapsto [1;-2;-1]$
$[0;0;3] \mapsto [0;0;r]$, $r \in \mathbb{R}$
$[0;3;0] \mapsto [0;-3;0]$
$[1;1;s] \mapsto [-1;-1;t]$, $t, s \in \mathbb{R}$

Úloha 4.1.7. Určte $s, r \in \mathbb{R}$ tak, aby $f: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ bolo zhodné zobrazenie, pre ktoré $\overline{f}(\overline{u}) = -\overline{u}$, $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{v}'$, $f(A) = P$, $f(P) = A$.
$\overline{u}(1;-2;0)$, $\overline{v}(1;0;2)$, $\overline{v}'(s;1;r)$, $A[3;2;1]$, P je počiatok KSS;

Úloha 4.1.8. Určte $r, p, q \in \mathbb{R}$ tak, aby $f: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ bolo zhodné zobrazenie, v ktorom body A, B, C sú samodružné a bod D sa zobrazí do bodu D';
$A[1;0;0]$, $B[0;0;1]$, $C[1;1;1]$, $D[0;1;0]$, $D'[r;p;q]$

4.2. Analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia

Úloha 4.2.1. Dané je analytické vyjadrenie zobrazenia

$$f:\quad \begin{aligned} x' &= x + by - 2 \\ y' &= \frac{1}{2}y + 1 \\ z' &= ax + cy - 3 \end{aligned}$$

Dourčte $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie.

Úloha 4.2.2. Dané je zobrazenie
$f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_3$,
$A[3;0] \mapsto A'[1;5;1]$, $B[0;3] \mapsto B'[-3;4;p]$, $C[3;3] \mapsto C'[-1;6;3]$.
a) Určte $p \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie.
b) Napíšte rovnice zobrazenia f.
c) Určte obraz počiatku $P[0;0]$ v zobrazení f.

Úloha 4.2.3. Napíšte analytické vyjadrenie všetkých zhodných zobrazení reprodukujúcich štvorec. Zvoľte vhodne KSS.

Úloha 4.2.4. V zhodnom zobrazení f sú body $A[0;0;0]$, $B[1;1;1]$ samodružné a bod $C[1;-1;0]$ sa zobrazí do roviny $\gamma : y + 1 = 0$. Určte obraz bodu C. Koľko riešení má úloha?

Úloha 4.2.5. a) Určte parameter s tak, aby existovala zhodnosť f v $\mathbb{E}_2$ taká, že $f(A) = B$ a $f(C) = D$; $A[0;0]$, $B[5;0]$, $C[3;4]$, $D[9;s]$.
b) Napíšte analytické vyjadrenie zhodnosti f.
c) Určte obraz bodu B v zhodnosti f.

4.3. Samodružné prvky zhodného zobrazenia

Úloha 4.3.1. Dané je zobrazenie

$$f:\quad \begin{aligned} [3;0] &\mapsto [1;4] \\ [1;2] &\mapsto [p;2] \\ [-1;-1] &\mapsto [2;q] \end{aligned}$$

Určte $p, q \in \mathbb{R}$ tak, aby f bolo zhodné zobrazenie a určte jeho samodružné body a smery.

Úloha 4.3.2. Overte, či rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

je dané zhodné zobrazenie $\mathbb{E}_3$ na seba. Určte jeho samodružné body, smery a priamky.

Úloha 4.3.3. Určte koeficienty $r, s, p, q \in \mathbb{R}$ v analytickom vyjadrení

$$f: \begin{aligned} x_1' &= -\,x_4 + p \\ x_2' &= rx_1 \\ x_3' &= -\,x_2 \\ x_4' &= sx_3 + q \end{aligned}$$

tak, aby f bolo zhodné zobrazenie, pre ktoré
a) $[1;1;1;1] \xrightarrow{f} [0;-1;-1;-4]$,
b) $[1;1;1;1] \xrightarrow{f} [0;0;-1;0]$
a určte jeho samodružné prvky.

4.4. Súmernosť podľa nadroviny

Úloha 4.4.1. Napíšte analytické vyjadrenie súmernosti podľa priamky
$$p : 2x - 3y + 1 = 0.$$

Úloha 4.4.2. Určte analytické vyjadrenie súmernosti podľa nadroviny, v ktorej sa bod $A[0;2;9]$ zobrazí do bodu $A'[4;2;7]$.

Úloha 4.4.3. Určte obraz M' bodu $M[6;3;2]$ v zhodnosti f, v ktorej body $A[8;0;0]$, $B[8;100;0]$, $C[8;-1;50]$ sú samodružné.

Úloha 4.4.4. Zistite, v ktorom z prípadov a), b), c) sa bod $Q[1;0;2]$ zobrazí do bodu $R[0;0;4]$ v súmernosti podľa nadroviny ω;
a) $\omega : x + y - 2z + 1 = 0$,
b) $\omega : x - 2z + 1 = 0$,
c) $\omega : 2x - 4z + 11 = 0$.

Úloha 4.4.5. Napíšte analytické vyjadrenie neidentickej zhodnosti v $\mathbb{E}_3$, v ktorej body $A[-2;0;0]$, $B[0;0;5]$, $C[-1;-3;1]$ sú samodružné. (Koľko zhodností s danou vlastnosťou existuje?)

Úloha 4.4.6. Napíšte analytické vyjadrenie súmernosti podľa roviny (ak taká neexistuje, zdôvodnite prečo), v ktorej body $A[3;2;1]$, $B[1;2;3]$ sú samodružné a bod $C[1;0;3]$ sa zobrazí do bodu $C'[1;0;1]$.

Úloha 4.4.7. Napíšte analytické vyjadrenie neidentickej zhodnosti v $\mathbb{E}_5$, v ktorej body $A[1;0;0;1;0]$, $B[2;0;1;0;0]$, $C[0;1;0;3;0]$, $D[0;0;0;0;4]$, $E[0;0;0;2;0]$ sú samodružné.

Úloha 4.4.8. Napíšte analytické vyjadrenie súmernosti podľa nadroviny v $\mathbb{E}_4$ (ak neexistuje, zdôvodnite prečo), v ktorej M, N sú samodružné body a bod A sa zobrazí do bodu A' a bod B do bodu B'.
a) $M[10;0;0;0]$, $N[5;0;0;0]$, $A[0;0;0;2]$, $A'[2;0;0;0]$, $B[0;1;0;1]$, $B'[1;1;0;0]$,
b) $M[7;5;0;2]$, $N[1;3;-2;0]$, $A[0;0;1;2]$, $A'[2;2;2;2]$, $B[1;-1;0;1]$, $B'[1;1;1;1]$,
c) $M[0;5;0;2]$, $N[0;3;-2;0]$, $A[2;0;-1;3]$, $A'[-2;0;1;1]$, $B[7;0;-3;3]$, $B'[-5;0;3;-3]$.

Úloha 4.4.9. *Vhodne zvolenou dvojicou bodov L, L' z euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$ je jednoznačne zadaná súmernosť podľa nadroviny, v ktorej sa bod L zobrazí do bodu L'.*
Závisí pravdivosť tohoto tvrdenia od dimenzie euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$? Svoju odpoveď zdôvodnite.

4.5. Zhodnosti v euklidovskej rovine

Úloha 4.5.1. Určte o ktorú zhodnosť v $\mathbb{E}_2$ ide, ak

$$f: \begin{aligned} x' &= y-2 \\ y' &= x-4. \end{aligned}$$

Úloha 4.5.2. Zhodnosť v $\mathbb{E}_2$ je daná obrazmi bodov A, B, C. Určte analytické vyjadrenie f a zistite o ktorú zhodnosť v $\mathbb{E}_2$ ide;

$$\begin{aligned} A[-1;3] &\mapsto A'[3;-1], \\ B[0;1] &\mapsto B'[1;-2], \\ C[0;0] &\mapsto C'[0;-2]. \end{aligned}$$

Úloha 4.5.3. Overte, že

$$f: \begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y+2 \end{aligned}$$

je zhodné zobrazenie a zistite, o ktorú zhodnosť v rovine ide.

Úloha 4.5.4. Napíšte analytické vyjadrenie zhodnosti f, ak

$$f: \begin{aligned} [0;-3] &\mapsto [4;1] \\ [1;1] &\mapsto [0;0] \end{aligned}$$

a bod $[3;-2]$ je samodružný. Určte o ktoré zobrazenie ide.

Úloha 4.5.5. Určte o ktorú zhodnosť f ide, ak

$$\begin{aligned} A[10;-1] &\overset{f}{\mapsto} A'[7;1], \\ B[0;1] &\overset{f}{\mapsto} B'[-3;3], \\ \overline{u}(1;7) &\overset{\overline{f}}{\mapsto} \overline{u}(1;7). \end{aligned}$$

Úloha 4.5.6. Zistite, či zobrazenie f, ktoré bod B_i zobrazí do bodu B_i', $i = 1,2,3$ je zhodným zobrazením, ak áno, určte o ktorú zhodnosť ide. Situáciu potom načrtnite.
$B_1[4;1]$, $B_2[5;1]$, $B_3[3;-2]$, $B_1'[0;-3]$, $B_2'[-1;-3]$, $B_3'[1;0]$

Úloha 4.5.7.
a) Napíšte analytické vyjadrenie posunutej súmernosti $\psi = \sigma_o \circ \tau_{\overline{w}}$ a určte v nej obraz počiatku P súradnicovej sústavy, ak $o: 4x+3y-12=0$, $\overline{w}=(3;4)$.
b) Overte, že ide o zhodnosť.

5.1. Podobnosť v $\mathbb{E}_2$ a v $\mathbb{E}_3$

Úloha 5.1.1. V afinnej transformácii g určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby g bola podobnosťou,

$$\begin{aligned} g: x' &= ax - 4y + 3 \\ y' &= 4x + 3y - 1. \end{aligned}$$

Zistite, či g má samodružný bod.

Úloha 5.1.2. Určte reálne čísla $a, c \in \mathbb{R}$ tak, aby afinná transformácia g bola podobnosťou,

$$\begin{aligned} g: x' &= ax - 4y + 3 \\ y' &= cx + 3y + 1. \end{aligned}$$

Úloha 5.1.3. V afinnej transformácii g určte $r \in \mathbb{R}$ tak, aby g bola podobnosťou,

$$\begin{aligned} g: x' &= 4x - 4y + 3 \\ y' &= 3x - ry + 1. \end{aligned}$$

Úloha 5.1.4. Určte všetky podobnosti v $\mathbb{E}_2$, ktoré bod o súradniciach $[1; 0]$ zobrazia do bodu o súradniciach $[4, -2]$ a bod o súradniciach $[2; 3]$ do bodu o súradniciach $[2; -8]$.

Úloha 5.1.5. Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby zobrazenie g roviny α, $\alpha \subset \mathbb{E}_3$, do $\mathbb{E}_3$ bolo podobné zobrazenie a určte jeho koeficient podobnosti,

$$\begin{aligned} g: x' &= 2x + ay - 1 \\ y' &= x + by + 2 \\ z' &= y + 1. \end{aligned}$$

Úloha 5.1.6. Určte $p, q, r \in \mathbb{R}$ tak, aby zobrazenie g bolo podobnosťou,

$$\begin{aligned} g: x' &= x - 2y + 2z + 4 \\ y' &= px + 2y + z - 2 \\ z' &= qx + ry + 2z - 2. \end{aligned}$$

Určte jej samodružný bod a samodružné smery.

Úloha 5.1.7. Zistite, či zobrazenie g je podobnosť, ak áno určte zložením ktorej rovnoľahlosti a zhodnosti ju môžeme dostať. Uveďte dve rôzne možnosti;

$$\begin{aligned} g: x' &= \frac{1}{2}x + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}y + 2 \end{aligned}$$

Úloha 5.1.8. Overte, že zobrazenie g je podobnosť a napíšte analytické vyjadrenia zobrazení, zložením ktorých zobrazenie g vzniklo v prípade, že práve samodružný bod podobnosti bude stredom rovnoľahlosti, ktorá je jednou z komponent zloženia;

$$\begin{aligned} g: x' &= x - 2\sqrt{2}y + 1 \\ y' &= 2\sqrt{2}x + y - 2 \end{aligned}$$

Úloha 5.1.9. Dané je zobrazenie g v $\mathbb{E}_2$;

$$\begin{aligned} g: x' &= \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ y' &= \frac{1}{2}y - 6. \end{aligned}$$

a) Overte, že g je podobnosť.
b) Napíšte analytické vyjadrenia rovnoľahlosti $\kappa_{(S;k)}$ a zhodnosti g, ktorých zložením vznikne g, ak stredom rovnoľahlosti κ je bod $S[1; 4]$. Určte koeficient k rovnoľahlosti κ. A určte ktorým zo šiestich typov zhodnosti v $\mathbb{E}_2$ je g.
c) Riešte tú istú úlohu ako v časti b), ale za stred rovnoľahlosi zvoľte bod rôzny od bodu $S[1; 4]$.