výrok v c) tak, aby vznikol pravdivý výrok:
Nech $\overline{a}$, $\overline{b}$ sú vektory, potom

a) existuje také umiestnenie vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $-\overline{a}$ sú komplanárne.

b) neexistuje také umiestnenie vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $-\overline{a}$ sú komplanárne.

c) existuje také umiestnenie vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $-\overline{a}$ sú komplanárne, práve vtedy, keď' ... .

Úloha 1.1.11. Určte pravdivostnú hodnotu výrokov v a) a b), prípadne doplňte výrok v c) tak, aby vznikol pravdivý výrok:
Nech $\overline{a}$, $\overline{b}$ sú vektory.

a) Existuje také umiestnenie vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $-\overline{a}$ sú kolineárne.

b) Neexistuje také umiestnenie vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $-\overline{a}$ sú kolineárne.

c) Existuje také umiestnenie vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $-\overline{a}$ sú kolineárne, práve vetdy, keď' ... .

Úloha 1.1.12. Kedy je množina vektorov $\{\overline{u}\}$ lineárne závislá?

Úloha 1.1.13. Daná je kocka $ABCDA'B'C'D'$. Sú vektory

a) $\overline{AB}$, $\overline{BD'}$, $\overline{B'C'}$,

b) $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{D'B'}$,

c) $\overline{A'D}$, $\overline{AA}$

lineárne závislé?

Úloha 1.1.14. Dokážte, že z každej množiny vektorov, do ktorej patrí aspoň jeden nenulový vektor, je možné vybrať lineárne nezávislú podmnožinu tak, že každý vektor z pôvodnej množiny vektorov je lineárnou kombináciou vybratých vektorov.

Úloha 1.1.15. Dokážte, že ľubovoľnú neprázdnu podmnožinu bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ tvoria lineárne nezávislé vektory.

Úloha 1.1.16. Daný je kosodĺžnik $ABCD$. Označme $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{DA} = \overline{b}$, $\overline{AB} = \overline{u}$, $\overline{DC} = \overline{v}$, $\overline{AD} = \overline{w}$.

a) Napíšte, či sú vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$ lineárne závislé alebo nezávislé a svoje tvrdenie zdôvodnite.

b) Určte koľko vektorov a koľko viazaných vektorov je určených vrcholmi daného kosodĺžnika.

c) Určte $\overline{u} + \overline{w}$; $\overline{u} + \overline{a} - \overline{v}$; $\overline{u} - \overline{a}$; $\overline{u} - (-\overline{v})$.

Úloha 1.1.17. Daný je štvorec $ABCD$. Načrtnite vektory

a) $\overline{AB} + \overline{AD}$, b) $\overline{DC} + \overline{AD}$, c) $\overline{AC} + \overline{BD}$, d) $\overline{CD} - \overline{BC}$, e) $\overline{BC} - \overline{CA}$.

Úloha 1.1.18. Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme $\overline{TA} = \overline{u}$, $\overline{TB} = \overline{u}$, $\overline{TC} = \overline{w}$. Určte $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$.

Úloha 1.1.19. Sčítajte graficky sily $F_1 = 5N$, $F_2 = 3N$, ak pôsobia na teleso v tom istom bode a zvierajú uhol o veľkosti a) $120°$, b) $90°$, c) $30°$.

Úloha 1.1.20. Daný je pravidelný 6-uholník $ABCDEF$ so stredom S.

a) vektor $\overline{BF}$ napíšte ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{AB}$, $\overline{BC}$.

b) vektor $\overline{FD}$ napíšte ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{BC}$, $\overline{DC}$.

c) vektor $\overline{EA}$ napíšte ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{SD}$, $\overline{SC}$.

Úloha 1.1.21. Daný je rovnostranný trojuholník KLM, označme S_1, S_2, S_3 stredy strán KL, LM, KM v poradí. Uvažujme body K, S_1, L, S_2, S_3.

a) Koľko viazaných a koľko voľných vektorov je týmito bodmi určených.

b) Vyjadrite vektor $\overline{S_2S_1}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{KL}$, $\overline{LS_2}$, vektor $\overline{KL}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{S_3S_2}$, $\overline{S_3L}$, vektor $\overline{S_1L}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{KS_3}$, $\overline{LS_2}$, vektor $\overline{LK}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\overline{KS_2}$, $\overline{LS_3}$.

Úloha 1.1.22. Určte všetky hodnoty pre argument $\alpha = (0;\pi)$, ktoré možno zvoliť, aby vektory $\overline{u}(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overline{v}(\sin\alpha, \cos\alpha)$ tvorili bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_2$.

Úloha 1.1.23. Určte $x \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $\overline{a}(x;0;1)$, $\overline{b}(0;x;1)$, $\overline{c}(0;1;x)$ tvorili bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

Úloha 1.1.24. Nájdite $x \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $\overline{u}(1;x;0;2)$, $\overline{v}(1;0;\frac{x}{2};2)$, $\overline{w}(1;0;3;\frac{x}{3})$ boli a) lineárne závislé, b) lineárne nezávislé.

1.2. Afinný priestor

Úloha 1.2.1. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A};\mathbb{V};f)$ je afinným priestorom, ak áno určte aj bázu jeho zamerania a jeho dimenziu.

a) $\mathcal{A} = \{[x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2; |x_1| > |x_2|\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2; x_1 - 3x_2 = 0\}$
$f:\ \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f:\ [[x_1,x_2],[y_1,y_2]] \mapsto (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$

b) $\mathcal{A} = \{[x_1,x_2,x_3,x_4] \in \mathbb{R}^4; x_4 = 1\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 = 0\}$
$f:\ \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f:\ [[x_1,x_2,x_3,x_4],[y_1,y_2,y_3,y_4]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4)$

c) $\mathcal{A} = \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 = 0\}$
$f:\ \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f:\ [[x_1,x_2,x_3],[y_1,y_2,y_3]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2 - y_2, 1, x_3 - y_3)$

Úloha 1.2.2. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A};\mathbb{V};f)$ je afinným priestorom, ak áno určte aj bázu jeho zamerania a jeho dimenziu.
$\mathcal{A} = \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0\}$
$f:\ \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{V}$, pričom

a) $f:\ [[x_1,x_2,x_3],[y_1,y_2,y_3]] \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 - y_3)$

b) $f:\ [[x_1,x_2,x_3],[y_1,y_2,y_3]] \mapsto (x_2 - y_2, x_1 - y_1, x_3 - y_3)$

Úloha 1.2.3. Nech $\mathbb{A}_3$ je geometrický model afinného priestoru.* Určte pravdivostnú hodnotu nasledujúcich dvoch výrokov:
Dané sú body A, B, C, D v $\mathbb{A}_3$. Nech $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ tvoria bázu jeho zamerania $\mathbb{V}_3$. Označme $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$, potom

a) vektory $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_2^{\alpha}$, ktorý je zameraním afinnej roviny α.

b) vektory $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ netvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_2^{\alpha}$, ktorý je zameraním afinnej roviny α.

Úloha 1.2.4. Zistite, či $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4; f)$ je afinný priestor, ak
$f: \ [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, 0)$

Úloha 1.2.5. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinným priestorom, ak

a) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$
$f: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$

b) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$
$f: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2]] \mapsto (\log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2})$

c) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, x_1 < 0\}$, pre pevne zvolené $a, b \in \mathbb{R}^+$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}$
$f: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2]] \mapsto x_2 - y_2$

Úloha 1.2.6. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2; f)$ je afinným priestorom, ak
$f: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2^k - y_2^k)$, kde $k \in \mathbb{Z}$

Úloha 1.2.7. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4; f)$ je afinným priestorom, ak
$f: \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$
$f: \ [[x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]] \mapsto (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_2 - y_2)$

Úloha 1.2.8. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinným priestorom, ak

a) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; |x_2| = x_1^2\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}$
$f: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2]] \mapsto x_2 - y_2$

b) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 = x_1^2\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}$
$f: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2] \mapsto x_1 - y_1$

*Pod geometrickým modelom afinnej roviny (afinného priestoru) budeme rozumieť priestor, ktorého *bodovú zložku* tvoria body - ako primárne pojmy známe zo stredoškolskej geometrie, *vektory* sú reprezentované usporiadanými dvojicami bodov a operácia f je známou operáciu, ktorá usporiadanej dvojici bodov priraďuje vektor určený týmito bodmi.

c) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$
$f: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{V}$
$f: \ [[x_1, x_2], [y_1, y_2] \mapsto (\log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2})$

Poznámka. V ďalšom, ak v usporiadanej trojici $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ označíme binárnu operáciu f ako *mínus*, t.j. $(\mathbb{R}^n; \mathbb{V}; -)$, budeme mať na mysli vždy operáciu definovanú nasledovne
$f: \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}$
$f: \ [A, B] \mapsto B - A$, kde operácia $-$ znamená klasické odčítanie po zložkách.

Úloha 1.2.9. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; -)$ je afinným priestorom, ak áno, určte bázu jeho zamerania a jeho dimenziu.

a) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; |x_1| > |x_2|\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2; x_1 + 3x_2 - 1 = 0\}$

b) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{Z}^2; x_1 - x_2 > 0\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2; x_1 = 3x_2\}$

c) $\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in N^2; x_2 - x_1 > 0\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2) \in N^2; x_1 - 5x_2 = 0\}$

Úloha 1.2.10. Zistite, či usporiadaná trojica $(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}^2; -)$ je afinný priestor.

Úloha 1.2.11. Zistite, či $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinný priestor, ak
$\mathcal{A} = \{[z, 1]; z \in \mathbb{C}\}$
$\mathbb{V} = \{[z, 0]; z \in \mathbb{C}\}$
binárna operácia f je odčítanie po zložkách, pričom na prvej zložke aplikujeme odčítanie komplexných čísel.

1.3. Lineárna súradnicová sústava

Úloha 1.3.1. Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, kde
$\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 = x_1^2\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}$
$f([[x_1, x_2], [y_1, y_2]]) := x_1 - y_1$
Zistite, či zobrazenie

$$\mathcal{L}: \ \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

je lineárna sústava súradníc, ak

a) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := 1 + x_1$

b) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := \sqrt{x_2}$

c)

$$\mathcal{L}([x_1, x_2]) := \begin{cases} \frac{x_2}{x_1}, & \text{pre } x_1 \neq 0 \\ 0, & \text{pre } x_1 = 0 \end{cases}$$

Úloha 1.3.2. Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, kde

$\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,\ x_1 < 0\}$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}$
$f([[x_1, x_2], [y_1, y_2]]) := x_2 - y_2$
Zistite, či zobrazenie

$$\mathcal{L}:\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

je lineárna sústava súradníc, ak
a) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := 5 + 2x_2$
b) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := x_1$
c) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}$
d) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := x_2^3 a^2 - x_1^2 x_2 b^2 - 1$

Úloha 1.3.3. Daný je afinný priestor $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, kde
$\mathcal{A} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}; \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{9} = 1\}$, pričom a je pevne zvolené nenulové reálne číslo,
$\mathbb{V} = \mathbb{R}$
$f([[x_1, x_2], [y_1, y_2]]) := x_2 - y_2$
Zistite, či zobrazenie

$$\mathcal{L}:\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

je lineárna sústava súradníc, ak

$$\mathcal{L}([x_1, x_2]) := \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}$$

Úloha 1.3.4. Daný je afinný priestor $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, kde
$\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$
$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$
$f([[x_1, x_2], [y_1, y_2]]) := (x_1 - y_1, x_2^k - y_2^k)$, k je prirodzené nepárne číslo.
Zistite, či zobrazenie

$$\mathcal{L}:\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$$

je lineárna sústava súradníc, ak
a) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := [x_1 + x_2^k, x_1 - x_2^k]$
b) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := [1 + x_1, 1 + x_1 + x_2^k]$
c) $\mathcal{L}([x_1, x_2]) := [x_1^k, x_2]$

Úloha 1.3.5. Daný je afinný priestor $\mathbb{A}_2 = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, kde
$\mathcal{A} = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$
f je odčitovanie usporiadaných trojíc reálnych čísel po zložkách.
Ukážte, že zúženie zobrazenia $\mathcal{L}$ na $\mathcal{A}$ je lineárnou sústavou súradníc v $\mathbb{A}_2$,

$$\mathcal{L}: [x_1, x_2, x_3] \mapsto [-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1]$$

nájdite jej počiatok a súradnicové vektory.

Úloha 1.3.6. Nech $\mathbb{A}_2$ je geometrický model afinnej roviny (viď poznámku *, str. 10). V $\mathbb{A}_2$ sú dané lineárne nezávislé body A, B, C a body D, E, F tak, aby $\overline{BD} \sim \overline{DC}$, $\overline{AE} \sim \overline{EC}$, $\overline{AF} \sim \overline{FB}$. Nájdite súradnice bodov A, B, C v LSS určenej repérom $\{F; \overline{FE}, \overline{FD}\}$.

1.4. AFINNÉ PODPRIESTORY
PARAMETRICKÉ VYJADRENIE AFINNÉHO PRIESTORU
VZÁJOMNÁ POLOHA AFINNÝCH PRIESTOROV

Úloha 1.4.1. Dokážte, že $\mathcal{A}' = \{(0, x, 0, 1); x \in \mathbb{R}\}$ je afinný podpriestor priestoru $\mathbb{A}_3 = (\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$,
$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 = 1\}$
$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 = 0\}$
f je odčítanie po zložkách.

Úloha 1.4.2. Dokážte, že $\mathcal{A}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + z = 1,\ 2x - y + 3z = 2\}$ je afinný podpriestor priestoru $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, f je odčítanie po zložkách. Určte jeho dimenziu.

Úloha 1.4.3. Zistite, či $\mathcal{A}' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_2 = x_3 = 1\}$ je afinný podpriestor priestoru $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, operácia f je odčítanie po zložkách. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu $\mathcal{A}'$.

Úloha 1.4.4. Daný je afinný priestor $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, operácia f je odčítanie po zložkách. Zistite, či $\mathcal{A}$ je afinný podpriestor afinného priestoru $\mathbb{A}$. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu $\mathcal{A}$;
$\mathcal{A} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y - z = -1\}$.

Úloha 1.4.5. Zistite, či $\mathcal{A}' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$ je afinný podpriestor afinného priestoru $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, f)$, f je operácia odčítania po zložkách. Ak áno, určte bázu jeho zamerania a dimenziu $\mathcal{A}'$.

Úloha 1.4.6. Napíšte parametrické vyjadrenie roviny ϱ, ktorá obsahuje body A, B a ak vektor $\overline{u}$ patrí jej zameraniu $\mathbb{V}^{\varrho}$;
$A[1; -1; 2; -4]$, $B[3; 1; 2; 6]$, $\overline{u}(-2; -1; 3; 1)$.

Úloha 1.4.7. Zistite, či bod B leží na priamke $p = [A; \overline{u}]$;
$A[3; 3; -2]$, $B[2; 1; -1]$, $\overline{u}(1; 2; 3)$

Poznámka. V ďalšom budeme často v zápise afinného (pod)priestoru namiesto $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, f)$ používať zápis $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$. V týchto prípadoch bude binárna operácia f definovaná nasledovne

$$f(X, Y) := Y - X$$

kde $-$ je operácia odčítania po zložkách. Potom označenie $X + \overline{u} = Y$ znamená, že $\overline{u} = Y - X$.

Úloha 1.4.8.
a) Zapíšte bodovú zložku $\mathcal{A}$ aj zameranie $\mathbb{V}$ afinného podpriestoru $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$ afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$, ak
$\mathcal{A} = \{P + \overline{u}; \overline{u} \in \mathbb{V}\}$ kde $P[1; 3; 1]$, $\mathbb{V} = \langle(-2; 1; 0), (3; 1; 1)\rangle$.
b) Overte, že $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$ je afinným podpriestorom afinného priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$.
c) Zapíšte parametrické vyjadrenie tohoto afinného podpriestoru.
d) Zistite, či body $A[3; 2; 1]$, $B[-7; 0; 1]$ patria do $\mathcal{A}$.

Úloha 1.4.9.

a) Zistite, či $\mathcal{A} = \{[1-b-c, a-b, -a-c]; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je afinným podpriestorom af. priestoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, -)$.

b) Určte jeho dimenziu.

c) Napíšte jeho parametrické vyjadrenie.

Úloha 1.4.10. Určte vzájomnú polohu priamok $p = [A; \overline{u}]$, $q = [B; \overline{v}]$ v afinnom priestore $\mathbb{A}_3$;

a) $A[1; 2; 3]$, $\overline{u}(1; -3; 2)$, $B[0; 5; 1]$, $\overline{v}(-2; 6; -4)$,

b) $A[1; -3; 4]$, $\overline{u}(2; 2; -1)$, $B[3; 0; -1]$, $\overline{v}(0; 1; 3)$.

Úloha 1.4.11. Napíšte parametrické vyjadrenie roviny ω prechádzajúcej bodom $A[2; 3; -1]$ a rovnobežnej s priamkami p, q;

$$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - u \\ x_2 &= 2 + 3u \\ x_3 &= 5 + 2u \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x_1 &= 2 + 4v \\ x_2 &= 1 + v \\ x_3 &= -3v \end{aligned}$$

Úloha 1.4.12. Určte $k \in \mathbb{R}$ tak, aby priamky p, q boli a) totožné, b) rovnobežné rôzne, c) mimobežné, d) rôznobežné;
$p: X = [1; -3; 4] + t(-2; -2; +1)$, $\quad q: X = [-1; -5; 5] + t(-6; k; 3)$

Úloha 1.4.13. Určte vzájomnú polohu priamky $a = [A; \overline{u}]$ a roviny $\alpha = [B; \overline{v}, \overline{w}]$ v afinnom priestore $\mathbb{A}_3$;

a) $A[1; 0; 0]$, $\overline{u}(5; 7; 7)$,
$B[0; 1; 3]$, $\overline{v}(1; 3; 1)$, $\overline{w}(2; 2; 3)$.

b) $A[1; 2; 1]$, $\overline{u}(1; 1; 2)$,
$B[2; 1; -2]$, $\overline{v}(0; 2; -1)$, $\overline{w}(3; 1; -2)$.

c) $A[1; 0; 0]$, $\overline{u}(7; 7; 1)$,
$B[0; 1; 3]$, $\overline{v}(1; 3; 1)$, $\overline{w}(2; -1; -1)$.

d) $A[1; 0; 0]$, $\overline{u}(5; 7; 7)$,
$B[0; 1; 3]$, $\overline{v}(1; 3; 1)$, $\overline{w}(2; -1; -1)$.

Úloha 1.4.14. Určte vzájomnú polohu rovín $\varrho = [A; \overline{t}, \overline{u}]$ a $\sigma = [B; \overline{v}, \overline{w}]$ v afinnom priestore $\mathbb{A}_3$;
$A[3; 2; 2]$, $\overline{t}(2; 1; 3)$, $\overline{u}(0; 1; 1)$,
$B[3; 0; 6]$, $\overline{v}(1; -1; 3)$, $\overline{w}(2; -1; 4)$.

Úloha 1.4.15. Určte vzájomnú polohu rovín α, β v afinnom priestore $\mathbb{A}_3$;

$$\alpha: X = [0; 2; -1] + t_1(0; 1; 2) + t_2(1; -1; -3)$$
$$\beta: X = [0; 0; 0] + t_1(1; 1; 0) + t_2(-1; 1; 2)$$

Úloha 1.4.16. Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha = [A; \overline{a}, \overline{b}]$ a $\beta = [B; \overline{u}, \overline{v}]$ v afinnom priestore $\mathbb{A}_4$;
$A[4; 2; 2; 2]$, $\overline{a}(1; 0; 0; -1)$, $\overline{b}(1; 0; 3; 2)$,
$B[-2; -2; 2; 0]$, $\overline{u}(-1; 0; 5; 0)$, $\overline{v}(2; 2; 1; 0)$.

Úloha 1.4.17. Určte vzájomnú polohu rovín $\varrho = [A; \overline{t}, \overline{u}]$ a $\sigma = [B; \overline{v}, \overline{w}]$ v afinnom priestore $\mathbb{A}_5$;

a) $A[1; 3; 0; 0; 0]$, $\overline{t}(1; 0; 0; 0; 0)$, $\overline{u}(0; 5; 0; 1; 0)$,
$B[0; 0; 3; 0; -1]$, $\overline{v}(0; 0; 3; 2; 0)$, $\overline{w}(0; 1; 1; 1; 1)$.

b) $A[0; 0; 0; 0; 0]$, $\overline{t}(1; 2; 0; -1; 0)$, $\overline{u}(0; 1; 1; 0; 0)$,
$B[2; 1; 0; 0; 0]$, $\overline{v}(0; 0; -1; 0; 3)$, $\overline{w}(2; 3; -2; -2; 3)$.

c) $A[0; 0; 1; 2; -1]$, $\overline{t}(1; 0; 1; -1; 0)$, $\overline{u}(1; 1; 1; 0; 1)$,
$B[0; 0; 2; 3; -1]$, $\overline{v}(0; 1; 1; 0; 2)$, $\overline{w}(2; 2; 3; -1; 3)$.

d) $A[1; 0; -1; 0; 0]$, $\overline{t}(1; 3; -1; 0; 1)$, $\overline{u}(0; 0; 0; 1; 0)$,
$B[2; 0; 3; 2; -1]$, $\overline{v}(0; 0; 2; 1; 0)$, $\overline{w}(-1; 0; 0; 0; 1)$.

Úloha 1.4.18. Určte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom P a rovnobežnej s rovinou α. Nájdite aspoň tri rôzne riešenia.
$P[4; 5; 7]$
$\alpha: X = [3; -1; 2] + t_1(2; 1; 3) + t_2(-3; 1; 4)$

1.5. Všeobecná rovnica nadroviny
Priečka mimobežiek
Zväzok nadrovín v $\mathbb{A}_2$ a v $\mathbb{A}_3$

Úloha 1.5.1. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α, ktorá je daná parametricky

$$\alpha: \begin{aligned} x &= 1 + 2u - 3v \\ y &= 1 + 3u - 4v \\ z &= 3 - u + 2v \qquad u, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Úloha 1.5.2. Všeobecnú rovnicu nadroviny ϱ štvorrozmerného afinného priestoru prepíšte do parametrického tvaru;

$$\varrho: x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3 = 0$$

Úloha 1.5.3. Napíšte všeobecnú rovnicu

a) priamky určenej bodmi $A[1; 2]$, $B[-3; 5]$,

b) roviny určenej bodmi $A[2; 1; -2]$, $B[4; -3; 1]$, $C[-3; 2; 4]$.

Úloha 1.5.4. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny určenej bodom $A[3; 1; -2]$ a priamkou p;
$p: X = [-2; 3; 1] + t(4; -3; 2)$

Úloha 1.5.5. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ϱ, ktorá obsahuje body $A[1; 0; -1]$, $B[2; 3; 1]$ a vektor $\overline{u}(3; 4; -2)$ patrí jej zameraniu $\mathbb{V}^{\varrho}$.

Úloha 1.5.6. Vymyslite zadanie nasledovnej úlohy v trojrozmernom afinnom priestore a potom ju vyriešte.

Dané sú dve a) rôzne rovnobežné, b) rôznobežné priamky p a q. Určte všeobecnú rovnicu roviny α prechádzajúcu oboma danými priamkami.

Úloha 1.5.7. Dané sú body $X[1;1;2]$, $Y[0;10;0]$ a priamka m. Určte všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi X, Y a rovnobežnej s priamkou m;

$$m: \begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= 0 \\ z &= -1 + t \end{aligned}$$

Úloha 1.5.8. V $\mathbb{A}_2$ napíšte všeobecnú rovnicu spojnice priesečníka priamok a, b s bodom $B[1;2]$;
$a:\ 2x + y + 1 = 0, \qquad b:\ x - y + 2 = 0.$

Úloha 1.5.9. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny α, ak je určená bodom $P[3;-1;3;2]$ a smerovými vektormi $\overline{a}_1(2;0;0;2)$, $\overline{a}_2(0;1;1;3)$, $\overline{a}_3(-1;0;2;0)$.

Úloha 1.5.10. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny ϱ, ak

$$\varrho: \begin{aligned} x_1 &= 2 - u + v + w \\ x_2 &= 1 + 2u + w \\ x_3 &= u - v - w \\ x_4 &= w \end{aligned}$$

Úloha 1.5.11. Napíšte všeobecnú rovnicu nadroviny ω, ak ω je určená bodmi $A[1;1;1;-2]$, $B[0;0;2;0;0]$, $C[1;1;0;4;0]$, $D[0;0;0;0;-2]$, $E[0;2;2;2;0]$.

Úloha 1.5.12. Napíšte parametrické rovnice nadroviny α v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$, ak

a) $\alpha:\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 1 = 0$, $n = 4$,
b) $\alpha:\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + 2 = 0$, $n = 5$,
c) $\alpha:\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2 = 0$, $n = 5$.

Úloha 1.5.13. Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby α a β boli rovnobežné roviny;
$\alpha:\ 3x - 4y + 5z - 4 = 0$
$\beta:\ x + ay + bz + 1 = 0$

Úloha 1.5.14. Určte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dimenzia vektorového priestoru $\mathbb{V}^\alpha \cap \mathbb{V}^\beta$ bola rovná dvom. Určte jeho bázu;
$\alpha:\ 3x - 4y + 5z - 4 = 0, \qquad \beta:\ x + ay + bz + 1 = 0$

Úloha 1.5.15. Určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka p ležala v rovine α;

a) $p: \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 4 + 3t \\ z &= 1 + at \end{aligned}$ $\quad \alpha:\ 3x + y - 4z - 3 = 0$

b) $p: \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 1 + 3t \\ z &= 1 + at \end{aligned}$ $\quad \alpha:\ 3x + y - 4z - 3 = 0$

Úloha 1.5.16. Daná je priamka $p = [Q;\overline{c}]$ a rovina $\alpha = [P;\overline{a},\overline{b}]$. Zistite, či priamka p leží v rovine α;
$Q[5;2;1]$, $P[2;1;0]$, $\overline{a}(3;0;2)$, $\overline{b}(0;-1;1)$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

Úloha 1.5.17. Priesečnicu rovín ϱ a σ určte bodom a vektorom;
$\varrho:\ 2x - 3y + z - 2 = 0$
$\sigma:\ x + 2y + z + 5 = 0$

Úloha 1.5.18. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ϱ, ktorá je rovnobežná s priamkami p, q a prachádza bodom A;

$A[0;0;5]$, $\quad p: \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \end{aligned} \quad q: \begin{aligned} 2x - 5z + 1 &= 0 \\ 3y - z &= 0 \end{aligned}$

Úloha 1.5.19. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny σ, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s rovinou ϱ;
$A[1;3;5]$, $\varrho:\ 2x + 2y - 3z + 1 = 0$

Úloha 1.5.20. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ϱ, ktorá prechádza priamkou p a je rovnobežná s priamkou q;

$p: \begin{aligned} 2x - y + z - 3 &= 0 \\ 3x + 4y &= 0 \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} 3x + 2z - 1 &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$

Úloha 1.5.21. Určte prienik priamky $p = [A;\overline{u}]$ a roviny ϱ, ak
a) $A[1;3;-1]$, $\overline{u}(1;2;-2)$, $\varrho:\ 3x - 2y + 1 = 0$,
b) $A[1;3;-2]$, $\overline{u}(1;1;-3)$, $\varrho:\ 2x + 3y + z - 4 = 0$.

Úloha 1.5.22. Určte neparametricky priamku p prechádzajúcu bodom A a rovnobežnú s priamkou q;

$A[2;3;-1] \qquad q: \begin{aligned} 3x - y + 1 &= 0 \\ z - 7 &= 0 \end{aligned}$

Úloha 1.5.23. Určte priečku p mimobežiek $a = \overleftrightarrow{AX}$, $b = \overleftrightarrow{BY}$ rovnobežnú so smerom daným vektorom $\overline{w}$;
$A[0;2;-3]$, $X[-1;1;-5]$, $B[1;-2;3]$, $Y[3;4;1]$, $\overline{w}(-1;2;-3)$

Úloha 1.5.24. Určte priečku mimobežiek $a = [A;\overline{u}]$, $b = [B;\overline{v}]$ rovnobežnú so smerom daným vektorom $\overline{w}$.
a) $A[1;3;3]$, $B[3;1;-5]$, $\overline{u}(-2;-2;3)$, $\overline{v}(3;1;4)$, $\overline{w}(-2;2;-3)$.
b) $A[-1;1;-5]$, $B[1;-2;3]$, $\overline{u}(1;1;2)$, $\overline{v}(1;3;-1)$, $\overline{w}(1;-2;3)$.
c) $A[-3;-1;5]$, $B[-1;-3;-3]$, $\overline{u}(2;2;-3)$, $\overline{v}(3;1;4)$, $\overline{w}(2;-2;3)$.

Úloha 1.5.25. Určte priečku mimobežiek $a = [A; \overline{u}]$, $b = [B; \overline{v}]$ prechádzajúcu bodom M.

a) $A[3; -1; 4]$, $B[-1; 2; -2]$, $M[1; 3; -2]$, $\overline{u}(1; -1; 2)$, $\overline{v}(2; 0; 1)$.

b) $A[0; 2; -2]$, $B[1; 1; 7]$, $M[-2; 5; 2]$, $\overline{u}(1; 1; 3)$, $\overline{v}(0; 2; -1)$.

Úloha 1.5.26. Priamkami p, q je určený zväzok priamok. Napíšte rovnicu priamky m patriacej tomuto zväzku, ktorá je rovnobežná so súradnicovou osou x;
$p:\ 2x - y - 5 = 0, \qquad q:\ x + 2y + 4 = 0$

Úloha 1.5.27. Priamkami p, q je určený zväzok priamok. Napíšte rovnicu priamky m patriacej tomuto zväzku, ktorá je rovnobežná s priamkou r;
$p:\ x - 2y + 1 = 0, \qquad q:\ 2x + 2y - 5 = 0, \qquad r:\ 4x + 3y + 12 = 0$

Úloha 1.5.28. Určte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby priamka p patrila zväzku určeného priamkami k, l;
$p:\ x + 2y + 3 = 0, \qquad k:\ ax - y = 0, \qquad l:\ x + y = 0$

Úloha 1.5.29. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $P[-2; 1]$ a patrí do zväzku o rovnici

$$\lambda_1(3x - y + 1) + \lambda_2(2x + 3y - 6) = 0.$$

Úloha 1.5.30. Napíšte rovnicu roviny rovnobežnú so súradnicovou osou z a patriacu zväzku o rovnici

$$\lambda_1(4x - 2y + 3z - 4) + \lambda_2(2x + 3y - z + 1) = 0.$$

Úloha 1.5.31. Rovinami α, β je určený zväzok rovín (zdvôvodnite prečo). Napíšte rovnicu roviny ϱ tohoto zväzku, ktorá prechádza bodom $Y[0; 4; 0]$;
$\alpha:\ x - y + 2z - 1 = 0, \qquad \beta:\ 3x + y - z + 4 = 0$

1.6. Deliaci pomer

Úloha 1.6.1. V afinnom priestore $\mathbb{A}_2$ sú dané tri lineárne nezávislé body A, B, C. Označme A' stred dvojice bodov B, C, B' stred dvojice bodov A, C a T prienik priamok AA', BB'. Určte deliaci pomer (ATA') a svoje tvrdenie dokážte. (Zvoľte vhodne lineárnu súradnicovú sústavu v $\mathbb{A}_2$.)

Úloha 1.6.2. Nech X, Y sú rôzne body v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$. Označme $X \div Y$ stred dvojice bodov X, Y. Dokážte, že pre ľubovoľné body $A, B, C, D \in \mathbb{A}_n$ platí

$$(A \div B) \div (C \div D) = (A \div C) \div (B \div D) = (A \div D) \div (B \div C).$$

(Zvoľte LSS v $\mathbb{A}_n$.)

Úloha 1.6.3. V $\mathbb{A}_2$ sú dané lineárne nezávislé body A, B, C a body D, E, F, pričom $(ABD) = -1$, $(BCF) = -2$, $(EBC) = \frac{2}{3}$. Určte súradnice bodov A, B, C v LSS danej repérom $\mathcal{R} = \{F; \overline{FE}, \overline{FD}\}$.

Úloha 1.6.4. Na priamke AB je daná LSS a body $A[4; -3]$, $B[1; 2]$. Určte súradnice bodu $C[c_1; c_2]$ tak, aby $(ABC) = \frac{2}{3}$.

Úloha 1.6.5. Na priamke AB určte bod P tak, aby $(PAB) = (APB)$.

Úloha 1.6.6. Dokážte, že pre každé štyri navzájom rôzne kolineárne body A, B, C, D platí

$$(ABD).(BCD).(CAD) = 1.$$

Úloha 1.6.7. V $\mathbb{A}_3$ je zvolená LSS a body A, B, C. Vypočítajte deliaci pomer (ABC), ak
$A[2; -1; 3]$, $\overline{u}(-3; 4; 2)$, $B = A - 3\overline{u}$, $C = A + \overline{u}$.

Úloha 1.6.8. V $\mathbb{A}_3$ je zvolená LSS a body A, B, C. Vypočítajte deliaci pomer (ABC), ak
$A[1; 3; 1]$, $B[2; -4; 3]$, $\{C\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha$, $\qquad \alpha:\ x - y + 2z - 3 = 0$.

Úloha 1.6.9. Dané sú štyri navzájom rôzne kolineárne body A, B, C, D. Vyjadrite súčin deliacich pomerov $(ABD).(BCD)$ ako deliaci pomer niektorej trojice z bodov A, B, C, D.

1.7. Transformácia lineárnej súradnicovej sústavy

Úloha 1.7.1. Určte súradnice vektorov $\overline{u}_1(2; 3; 1)$, $\overline{u}_2(0; 2; 1)$, $\overline{u}_3(0; 1; 1)$ v báze $\mathcal{B} = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$, ak

a) $\overline{w}_1(2; 0; 0)$, $\overline{w}_2(1; 1; 0)$, $\overline{w}_3(0; 1; 1)$,

b) $\overline{w}_1(1; 1; 0)$, $\overline{w}_2(-1; 1; 0)$, $\overline{w}_3(0; 0; 1)$.

Úloha 1.7.2. Určte súradnice bodov $M[1; 2; 1]$, $N[2; 1; 1]$, $L[2; 2; 0]$ v LSS $\mathcal{L}_{\{O; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}}$, ak $O[-1; 1; 1]$, $\overline{e}_1(1; 0; 0)$, $\overline{e}_2(1; 1; 0)$, $\overline{e}_3(0; 0; 1)$.

Úloha 1.7.3. V LSS $\mathcal{L}_{\{P; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}}$, je daný bod $M[2; 1; 3]$. Určte súradnice bodu M v LSS $\mathcal{L}'_{\langle P; \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\rangle}$, ak $\overline{a}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_3$, $\quad \overline{a}_2 = -\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\quad \overline{a}_3 = \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$.

Úloha 1.7.4. Určte súradnice bodu $M[1; 2; 1]$ v LSS $\mathcal{L}_{\{O; \overline{e}_1, \overline{e}_2\}}$, ak $O[-1; 1; 1]$, $\overline{e}_1(1; 0; 0)$, $\overline{e}_2(1; 1; 0)$.

Úloha 1.7.5. Určte súradnice bodu M v LSS $\mathcal{L}_{\{P; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}}$, ak
$M = A + 3\overline{a} + \overline{b}$
$A = P + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$