Prešovská univerzita v Prešove
Fakulta humanitných a prírodných vied
Katedra matematiky

Afinná a Euklidovská geometria

doc. RNDr. Ján Duplák, CSc.

2004

Obsah

PREDSLOV

Tieto učebné texty vznikli z druhého vydania Geometrie I a II oddelením časti I a jej niektorými zmenami (hlavne pridaním úloh v cvičeniach každej kapitoly, spolu je ich cez 300, a pridaním článku Vektorový súčin). Tematicky pokrývajú afinné a euklidovské priestory a predstavujú deduktívnu výstavbu afinnej a euklidovskej geometrie podľa H.Weyla.

Pre pochopenie obsahu sa od čitateľa vyžadujú elementárne znalosti z teórie množín a lineárnej algebry. Potrebné partie z teórie vektorových priestorov a teórie grúp sú zaradené do Prílohy, ktorá je na konci textov.

Považujem za svoju milú povinnosť poďakovať sa rencenzentovi Doc.RNDr. Mariánovi Trenklerovi, CSc. z Prírodovedeckej fakulty UPJŠ Košice za prečítanie rukopisu a poskytnutie cenných rád a pripomienok, ktoré prispeli k vylepšeniu týchto učebných textov.

ÚVOD

V súčasnej dobe existuje niekoľko rôznych ciest axiomatizácie elementárnej geometrie. Historicky jednou z prvých bola axiomatika, predložená vynikajúcim nemeckým matematikom Davidom Hilbertom v knihe "Základy geometrie", ktorá vyšla v roku 1899. V tejto knihe je daná sústava axióm, postačujúca na logickú výstavbu euklidovskej geometrie. Obsahuje 20 axióm rozdelených do piatich skupín nazvaných axiómy incidencie, axiómy usporiadania, axiómy zhodnosti, axiómy spojitosti a axióma rovnobežnosti.

Zo súčasného pohľadu hilbertova axiomatika je neobyčajne zložitá a ťažkopádna. Treba veľa úsilia, trpezlivosti, aby sa s pomocou tejto axiomatiky dokázali najdôležitejšie vety elementárnej geometrie. Nedostatkom hilbertovej axiomatiky je tiež i to, že vnútorne nesúvisí s pojmom vektorového priestoru, ktorý hraje v súčasnosti v matematike i ostatných vedných disciplínach používajúcich matematické metódy veľmi vážnu úlohu. Nemecký matematik Hermann Weyl, v roku 1917 predložil svoju axiomatiku, založenú na pojme vektorového priestoru. Sústava axióm predložená Weylom obsahuje 15 axióm, v ktorých ako primitívne pojmy vystupujú vektor, súčet vektorov, súčin vektora a čísla, skalárny súčin vektorov a súčet bodu a vektora a nie bod, priamka, rovina ako u Hilberta. Ľahkosť aritmetizácie vektorového priestoru zavedením súradníc i možnosť použitia vektorového aparátu od samého začiatku robia weylovskú cestu veľmi efektívnou a jednoduchou. V súvislosti s tým sa táto axiomatika používa i na strednej škole.

Po formálnej stránke je "weylovská" cesta jednou z možných ciest axiomatizácie geometrie, ekvivalentná hilbertovskej, t.j. umožňujúca dokázať tie isté vety. Iné spôsoby axiomatizácie euklidovského priestoru, významné z metodologického i metodického hľadiska, predložili nemecký matematik F.Bachmann a francúzky matematik G.Choquet. Za základ svojich konštrukcií F.Bachmann kladie osové a stredové súmernosti a geometriu rozvíja ako "kalkul symetrií". Axiomatika G. Choqueta je založená na pojmoch rovnobežnosti, kolmosti a vzdialenosti.

Prešov, február 2004 Autor

A F I N N É   P R I E S T O R Y

1 Elementárne vlastnosti afinných priestorov

Pojem afinného priestoru

Definícia 1.1 *Usporiadanú trojicu* $(P,\rightarrow,V)$ *nazývame* afinný systém*, ak* V *je konečnorozmerný vektorový priestor nad poľom* F *charakteristiky* $\neq 2$*,* P *je neprázdna množina (jej prvky budeme nazývať* body*) a* $\rightarrow$ *(čítame šípka) je zobrazenie* $P\times P\rightarrow V$*,* $(X,Y)\mapsto\overrightarrow{XY}$ *spĺňajúce podmienky*

(A1) *pre každý bod* $X\in P$ *a každý vektor* $\vec{v}\in V$ *existuje práve jeden bod* $Y\in P$ *tak, že* $\overrightarrow{XY}=\vec{v}$

(A2) $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{XZ}$ *pre ľubovoľné body* $X,Y,Z\in P$ *.*

Množinu P *nazývame* afinný priestor*, vektorový priestor* V *nazývame* zameranie afinného priestoru P*. Pole* F *nazývame* pole skalárov *afinného priestoru* P *a hovoríme, že* P *je afinný priestor nad poľom* F*.* Dimenzia *(alebo rozmer) afinného priestoru je číslo, ktoré je dimenziou jeho zamerania. Afinný priestor dimenzie* $0,1,2$ *budeme v poradí nazývať* bod, priamka, rovina. $(n-1)$*-rozmerný podpriestor n-rozmerného afinného priestoru* P *nazývame nadrovina priestoru* P*.*

V nasledujúcej leme je použitá stručná formulácia, namiesto afinného systému $(P,\rightarrow,V)$ sa hovorí "len" o afinnom priestore P. Tu (v podobných situáciách aj ďalej) predpokladáme, že P je prvkom nejakého afinného systému $(P,\rightarrow,V)$.

Lema 1.2 *Nech* O,X,Y,Z,A,B,C,D *sú body afinného priestoru* P*; potom*

$$\overrightarrow{XX} = \vec{o} \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX} \tag{1.2}$$

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AY} \Rightarrow X=Y \tag{1.3}$$

$$\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{YB} \Rightarrow X=Y \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{XZ}=\vec{o} \Rightarrow X=Z \tag{1.5}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} \tag{1.6}$$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD} \tag{1.7}$$

Dôkaz. (1.1) Podľa A2 $\overrightarrow{YX}+\overrightarrow{XX}=\overrightarrow{YX}$, odkiaľ $\overrightarrow{XX}=\vec{o}$.
(1.2) $\vec{o}=\overrightarrow{XX}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YX}$, čiže $\overrightarrow{XY}=-\overrightarrow{YX}$.
(1.3) Vyplýva priamo z A1.
(1.4) $\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{YB}\Rightarrow -\overrightarrow{XB}=-\overrightarrow{YB}\Rightarrow \overrightarrow{BX}=\overrightarrow{BY}$ a vzhľadom na (1.3) $X=Y$.
(1.5) Nech $\overrightarrow{XZ}=\vec{o}$. Pretože aj $\overrightarrow{XX}=\vec{o}$, tak $\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{XX}$, odkiaľ podľa (1.3) $X=Z$.
(1.6) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
(1.7) Je zrejmé, že $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Nech $(P,\rightarrow,V)$ je afinný systém. Ak M je neprázdna podmnožina afinného priestoru P, označujeme

$$\overrightarrow{M}=\{\overrightarrow{XY};\ X,Y\in M\}. \tag{1.8}$$

Z A1 priamo vyplýva, že $\overrightarrow{P}=V$ a tiež, že pre každý bod $A\in P$

$$\overrightarrow{P}=\{\overrightarrow{AY};\ Y\in P\}. \tag{1.9}$$

Súradnicový systém

Nech O je ľubovoľný bod afinného priestoru P a nech $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ je báza jeho zamerania $\overrightarrow{P}$. Usporiadanú $(n+1)$-ticu $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = E$ budeme nazývať *repér* (alebo *súradnicový systém*) afinného priestoru P; O nazývame *začiatok repéra* E. Pre každý bod $X \in P$ existuje jediná usporiadaná n-tica skalárov $x_1, \ldots, x_n$ tak, že

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

Túto n-ticu skalárov budeme nazývať *sústavou súradníc* bodu X v repére E a tiež *sústavou súradníc* vektora $\overrightarrow{OX}$ v repére E. Symbolicky to budeme zapisovať pomocou matíc

$$X_E = [x_1, \ldots, x_n] \qquad (\overrightarrow{OX})_E = (x_1, \ldots, x_n) \tag{1.10}$$

$$X^E = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OX}^E = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

alebo skrátene $X[x_1, \ldots, x_n]$, $\overrightarrow{OX}(x_1, \ldots, x_n)$, ak v našich úvahách nebudú vystupovať dva rôzne repéry. Platí aj obrátene, t.j. ku každej usporiadanej n-tici $[x_1, \ldots, x_n]$ (resp. $(x_1, \ldots, x_n)$) existuje jediný bod $X \in P$ (resp. vektor $\overrightarrow{OX} \in \overrightarrow{P}$) tak, že $X_E = [x_1, \ldots, x_n]$ (resp. $(\overrightarrow{OX})_E = (x_1, \ldots, x_n)$. To znamená, že ak $X_E = [x_1, \ldots, x_n]$, $Y_E = [y_1, \ldots, y_n]$ a X, Y sú dva rôzne body, tak $x_i \neq y_i$ pre aspoň jedno i.

Nech $(P, \to, V)$ je afinný systém. Axióma $A1$ umožňuje definovať zobrazenie

$$\tau : P \times V \to P, \quad [X, \vec{v}] \mapsto Y \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{XY} = \vec{v}. \tag{1.12}$$

Zúženie tohto zobrazenia na množinu $P \times \{\vec{v}\} = P \times \vec{v}$ budeme nazývať *translácia* (o vektor $\vec{v}$); označenie: $\tau_{\vec{v}}$.

Lema 1.3 *Nech P je afinný priestor, $E = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ jeho repér, $X, Y \in P$, $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$, d je skalár a nech*

$$X_E = [x_1, \ldots, x_n] \qquad Y_E = [y_1, \ldots, y_n] \qquad \vec{u}_E = (u_1, \ldots, u_n) \qquad \vec{v}_E = (v_1, \ldots, v_n).$$

Potom

$$(\vec{u} + \vec{v})_E = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = \vec{u}_E + \vec{v}_E \tag{1.13}$$
$$(d\vec{u})_E = (du_1, \ldots, du_n) = d(\vec{u}_E) \tag{1.14}$$
$$(\overrightarrow{XY})_E = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) = Y_E - X_E \tag{1.15}$$
$$(\tau_{\vec{v}} X)_E = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n) = X_E + \vec{v}_E \tag{1.16}$$

Dôkaz. Rovnosti (1.13), (1.14) vyplývajú z teórie vektorových priestorov. (1.15): podľa (1.6) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} + (-1)\overrightarrow{OX}$, čo implikuje $\overrightarrow{XY}_E = Y_E - X_E$. Podľa (1.12) $\tau(X, \vec{v}) = Y \Rightarrow \overrightarrow{XY} = \vec{v}$, odkiaľ vzhľadom na (1.15) $y_i - x_i = v_i$ t.j. $y_i = x_i + v_i$ pre všetky i.

Súčet bodu a vektora

Z identity (1.16) vyplýva, že súradnice obrazu bodu X v translácii o vektor $\vec{v}$ dostaneme, ak sčítame "rovnomenné" súradnice (t.j. prvú s prvou, druhú s druhou atď.) bodu X a vektora $\vec{v}$. Pre túto vlastnosť budeme miesto $\tau(X, \vec{v})$ písať $X + \vec{v}$, čiže definujeme

$$X + \vec{v} = Y \Leftrightarrow \overrightarrow{XY} = \vec{v}, \tag{1.17}$$

odkiaľ pre každé dva body X, Y

$$X + \overrightarrow{XY} = Y. \tag{1.18}$$

Z tejto rovnosti za predpokladu $\overrightarrow{XY} = \vec{v}$ vyplýva

$$\forall\ X, Y \quad \exists \vec{v}\ : \quad X + \vec{v} = Y, \tag{1.19}$$

$$X + \vec{v} = X + \vec{u} \quad \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}. \tag{1.20}$$

Nech $X, \vec{u}, \vec{v}$ sú ľubovoľne zvolené. Podľa A1 existuje jediný bod Y tak, že $\overrightarrow{XY} = \vec{v}$ t.j. $X + \vec{v} = Y$ a jediný bod Z tak, že $\overrightarrow{YZ} = \vec{u}$ t.j. $Y + \vec{u} = Z$. Potom $X + (\vec{v} + \vec{u}) = X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) = X + \overrightarrow{XZ} = Z$. Ďalej $(X + \vec{v}) + \vec{u} = Y + \vec{u} = Z$, čiže pre ľubovoľné $X, \vec{u}, \vec{v}$ platí

$$X + (\vec{v} + \vec{u}) = (X + \vec{v}) + \vec{u}. \tag{1.21}$$

Preto môžeme vo výrazoch $X + (\vec{v} + \vec{u})$, $(X + \vec{v}) + \vec{u}$ vynechávať zátvorky a písať $X + \vec{v} + \vec{u}$.

Zrejme $X + \vec{o} = X + \overrightarrow{XX} = X$, čiže pre každý bod X platí

$$X + \vec{o} = X. \tag{1.22}$$

Ak ďalej $Y + \vec{v} = Y$, tak podľa (1.18) $\vec{v}=\overrightarrow{YY}$ čiže $\vec{v} = \vec{o}$; to dokazuje

$$Y + \vec{v} = Y \Rightarrow \vec{v} = \vec{o}. \tag{1.23}$$

Podľa (1.15), súradnice vektora $\overrightarrow{XY}$ sú rozdiely rovnomenných súradníc bodov X, Y. Preto budeme niekedy miesto $\overrightarrow{XY}$ písať $Y - X$, t.j. kladieme

$$\overrightarrow{XY} = Y - X \tag{1.24}$$

odkiaľ vzhľadom na (1.18)

$$X + \vec{v} = Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} = Y - X \tag{1.25}$$

Nech $(P, \rightarrow, V)$ je afinný systém, $+$ zobrazenie definované podľa (1.17) a nech $A \in P$, $L, M \subset P$, $U, W \subset V$. Je užitočné zaviesť nasledujúce označenia

$$\begin{aligned}
&L + U = \{X + \vec{v};\ X \in L,\ \vec{v} \in U\}\\
&M - L = \{Y - X;\ Y \in M,\ X \in L\} = \{\overrightarrow{XY} :\ X \in L,\ Y \in M\}\\
&U + W = \{\vec{u} + \vec{w};\ \vec{u} \in U,\ \vec{w} \in W\}.
\end{aligned}$$

V prípade, že $L = \{A\}$, miesto $M - \{A\}$, resp. $\{A\} + U$ skrátene píšeme $M - A$ resp. $A + U$.

Lema 1.4 *Nech $(P, \rightarrow, V)$ je afinný systém, $A, B \in P$, $L, M \subset P$ a $U, W \subset V$. Potom*

$$(B + \vec{v}) - (A + \vec{u}) \quad = \quad \overrightarrow{AB} + \vec{v} - \vec{u} \tag{1.26}$$

$$B + \vec{v} = A + \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \vec{v} = \vec{u} \tag{1.27}$$

$$M - A = U \quad \Leftrightarrow \quad M = A + U \tag{1.28}$$

$$A + (U + W) \quad = \quad (A + U) + W \tag{1.29}$$

$$(A + U) \cap (A + W) \quad = \quad A + (U \cap W) \tag{1.30}$$

$$A + U \subset A + W \quad \Leftrightarrow \quad U \subset W \tag{1.31}$$

$$L \subset M \quad \Leftrightarrow \quad L - A \subset M - A \tag{1.32}$$

$$(L \cup M) - A \quad = \quad (L - A) \cup (M - A) \tag{1.33}$$

$$M - A \quad = \quad (M - B) + (B - A) \tag{1.34}$$

$$A + (M - A) \quad = \quad M \tag{1.35}$$

$$(A + U) \cup (A + W) \quad = \quad A + (U \cup W) \tag{1.36}$$

Dôkaz. Dokážeme len (1.26), ostatné prenechávame čitateľovi. Označme $(B + \vec{v}) - (A + \vec{u}) = \vec{w}$. Potom $B + \vec{v} = (A + \vec{u}) + \vec{w}$, odkiaľ $B = A + \vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$ t.j. $B - A = \vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$, čiže $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \vec{v} - \vec{u}$.

Identitu (1.30) možno rozšíriť na prienik ľubovoľného počtu podmnožín $A + U$, $A + W, \ldots$ afinného priestoru P.

Stred dvojice bodov

Bod S nazývame *stred* dvojice bodov A, B keď $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$; označenie $S = A \div B$.

Príklad 1.5 *Dokážte, že pre každú dvojicu bodov A, B afinného priestoru P existuje práve jeden ich stred.*

Riešenie. Nech S je stred dvojice A, B. Pole skalárov afinného priestoru P má charakteristiku rôznu od 2, preto existuje skalár $\frac{1}{2}$. Potom $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AS}$ odkiaľ $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Obrátene, ak $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, tak $2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$.

Príklad 1.6 *Nech X, Y, Z, A sú body afinného priestoru P. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

$$\text{(i) } \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{YZ}; \qquad \text{(ii) } \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AZ}; \qquad \text{(iii) } A \div Z = X \div Y.$$

Dôkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ $\quad \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AZ}$.

$$\begin{array}{llcl} (ii) \Rightarrow (iii) & A \div Z & = & A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AZ} = X + \overrightarrow{XA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \\ & & = & X + \frac{1}{2}\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{AX} = X + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{AX}) = X + \frac{1}{2}\overrightarrow{XY} = X \div Y. \\ (iii) \Leftrightarrow (i) & A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AZ} & = & X + \frac{1}{2}\overrightarrow{XY} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{ZY}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{YZ}. \end{array}$$

Príklad 1.7 *Nech A, B, C sú body afinného priestoru P a nech X, Y, Z sú v poradí stredy dvojíc (A, B), (A, C), (B, C). Dokážte, že $2\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{YZ}$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu $Y = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $Z = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, odkiaľ

$$2\overrightarrow{YZ} = 2(Z - Y) = 2((B - A) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC})) = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB},$$

čo je prvá rovnosť, ktorú bolo treba dokázať; z nej vyplýva $\overrightarrow{YZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Keďže $X = A \div B$, tak $X = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a tiež $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Aritmetický afinný priestor

Jedným z modelov teórie afinných priestorov (neskôr uvidíme, že je najdôležitejší) je tzv. *aritmetický afinný priestor* , ktorý teraz definujeme. Nech $(F, +, .)$ je pole charakteristiky rôznej od 2, $n > 0$ a nech

$$F_n = \{[a_1, \ldots, a_n];\ a_i \in F \ \text{ pre všetky } i\}$$

$$\vec{F}_n = \{(a_1, \ldots, a_n);\ a_i \in F \ \text{ pre všetky } i.\}$$

Prvky množín $F, F_n, \vec{F}_n$ budeme v poradí nazývať skaláry, body, vektory. Na množine $\vec{F}_n$ resp. $F \times \vec{F}_n$ definujeme operácie $+$ (t.j. súčet vektorov) a (.) (t.j. skalárny násobok) obvyklým spôsobom

$$\begin{array}{rcl} (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) & = & (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \\ d.(v_1, \ldots, v_n) & = & (dv_1, \ldots, dv_n). \end{array}$$

Usporiadaná trojica $(\vec{F}_n, +, .)$ je vektorový priestor nad poľom F (aritmetický vektorový priestor). Ďalej definujeme zobrazenie

$$\rightarrow : F_n \times F_n \rightarrow \vec{F}_n,\ ([a_1, \ldots, a_n],\ [b_1, \ldots, b_n]) \mapsto (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

Ľahko sa dá overiť, že $(F_n, \rightarrow, \vec{F}_n)$ je afinný systém a preto F_n je afinný priestor. Tento priestor nazývame *aritmetický afinný priestor* nad poľom F. Ak F je pole reálnych (resp. komplexných čísel), F_n nazývame *reálny* (resp. *komplexný*) *aritmetický afinný priestor* a označujeme R_n (resp.C_n).

Nech $(V, +, .)$ je vektorový priestor nad poľom F. Definujme zobrazenie $\rightarrow : V \times V \rightarrow V$, $[\vec{u}, \vec{v}] \mapsto \vec{v} - \vec{u}$. Potom $(V, \rightarrow, V)$ je afinný systém. V tomto prípade je každý bod zároveň aj vektorom a obrátene.

Ak R_n je aritmetický afinný priestor, potom $\vec{R}_n$ je n dimenzionálny vektorový priestor a preto R_n je n-dimenzionálny afinný priestor. To znamená, že pre každé prirodzené číslo n existuje n-dimenzionálny afinný priestor.

Zmena repéra

Nech $n > 0$ je prirodzené číslo a nech $E = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $\quad F = (Q, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ sú dva repéry afinného priestoru P. Nech vektory repérov E, F sú viazané rovnosťami

$$\vec{f}_i = f_{1i}\vec{e}_1 + \cdots + f_{ni}\vec{e}_n \qquad \text{t.j.} \qquad (\vec{f}_i)_E = (f_{1i}, \ldots, f_{ni}) \tag{1.37}$$

pre $i = 1, \ldots, n$, ktoré budeme prehľadnejšie písať v tvare

$$F^E \quad = \quad \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ & \vdots & \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.38}$$

i-tý stĺpec tejto matice je matica $\vec{f}_i^{\,E}$. Nech $(\vec{v}_i)_F = (v_1, \ldots, v_n)$ t.j. $\vec{v} = v_1\vec{f}_1 + \cdots + v_n\vec{f}_n$, odkiaľ po dosadení z (1.37)

$$\vec{v} = v_1(f_{11}\vec{e}_1 + \cdots + f_{n1}\vec{e}_n) + \cdots + v_n(f_{1n}\vec{e}_1 + \cdots + f_{nn}\vec{e}_n)$$

a po úprave

$$\vec{v} = (v_1 f_{11} + \cdots + v_n f_{1n})\vec{e}_1 + \cdots + (v_1 f_{1n} + \cdots + v_n f_{nn})\vec{e}_n,$$

čo znamená, že koeficienty v lineárnej kombinácii vektorov $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ sú súradnice vektora $\vec{v}$ v báze E

$$\vec{v}^E \quad = \quad \begin{pmatrix} v_1 f_{11} + \cdots + v_n f_{1n} \\ \vdots \\ v_1 f_{1n} + \cdots + v_n f_{nn} \end{pmatrix}$$

Túto rovnosť možno skrátene písať v maticovom tvare

$$\vec{v}^E = F^E \vec{v}^F, \tag{1.39}$$

Maticu F^E nazývame *matica prechodu* od bázy F ku báze E. Rovnosť (1.39) vyjadruje závislosť súradníc toho istého vektora v dvoch rôznych bázach.

Ak G je ľubovoľná sústava vektorov priestoru $\vec{P}$, ktorých súradnice v báze E tvoria stĺpce matice G^E, potom z rovnosti 1.39 (kumuláciou vektorov do matice G^E) vyplýva

Veta 1.8 *Nech E,F sú ľubovoľné bázy a G ľubovoľná sústava vektorov vektorového priestoru V , potom*

$$G^E = F^E G^F. \tag{1.40}$$

Ak v poslednej rovnosti nahradíme sústavu G bázou E dostaneme $E^E = F^E E^F$ a pretože E^E je zrejme jednotková matica, musí byť F^E inverzná matica k matici E^F.

Vzorec (1.39) stačí aj na vyjadrenie závislosti súradníc toho istého bodu v dvoch repéroch E, F. Ukazuje to nasledujúci príklad.

Príklad 1.9 *Nech $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (Q, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ sú dva repéry,*

$$Q_E = (2, -4, 0) \quad (\vec{f}_1)_E = (1, 2, 3) \quad (\vec{f}_2)_E = (0, -1, 2) \quad (\vec{f}_3)_E = (0, 1, 0).$$

Vypočítajte súradnice bodu $A_E = [2, 2, 4]$ v repére F.

Riešenie: Zrejme $A^F = \overrightarrow{QA}^F = E^F \overrightarrow{QA}^E = E^F(A^E - Q^E)$. Keďže sú dané súradnice vektorov repéra F v repére E, máme danú maticu F^E, treba však k nej inverznú maticu E^F.

$$F^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2+4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Cvičenie

1.1 Dokážte, že pre ľubovoľné body X, Y, Z platí $X + \overrightarrow{YZ} = Z + \overrightarrow{YX}$.

1.2 Dokážte, že pre ľubovoľné body A, B, D, E, F, G afinného priestoru P platí

$$2\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA},\ 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE},\ 2\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EG} \quad \Rightarrow \quad F = G.$$

1.3 Dokážte rovnosť $A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1.4 Nech A', B', C' sú v poradí stredy dvojíc (B,C), (C,A), (A,B). Dokážte, že body $A' + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$, $B' + \frac{1}{3}\overrightarrow{B'B}$, $C' + \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ sú totožné (taký bod nazývame ťažisko trojice bodov A, B, C).

1.5 Dokážte, že stred dvojice bodov $A[a_1, \dots, a_n]$, $B[b_1, \dots, b_n]$ je bod $C\left[\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right]$.

1.6 Nech A', B', C', D' sú v poradí stredy dvojíc (A,B), (B,C), (C,D), (D,A). Dokážte rovnosti
(i) $A + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'B'}) = B + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'D'}) = A + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'C'})$
(ii) $\overrightarrow{A'B'}{=}\overrightarrow{D'C'}$, $\overrightarrow{B'C'}{=}\overrightarrow{A'D'}$.

1.7 Nech $S = (O, O_1, \dots, O_n)$ je taká usporiadaná množina bodov afiného priestoru P, že $\overrightarrow{OO_i} = \vec{e}_i$ a $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je repér priestoru P (takú množinu S nazývame *simplex* priestoru P). Nech $X_E = [x_1, \dots, x_n]$; to znamená, že $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Pre ľubovoľný bod $Q \in P$ je $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QX}$ $= x_1(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QO_1}) + \cdots + x_n(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QO_n})$, odkiaľ $\overrightarrow{QX} = x_o\overrightarrow{QO} + x_1\overrightarrow{QO_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{QO_n}$, kde $x_o = 1 - (x_1 + \cdots + x_n)$. Pretože tieto rovnosti nezávisia na voľbe bodu Q môžeme skrátene písať

(i) $\quad X = x_oO + x_1O_1 + \cdots + x_nO_n, \qquad x_o + x_1 + \cdots + x_n = 1,$

kde pod x_iO_i rozumieme súčin skalára a matice riadok alebo stĺpec. To znamená, že ku každému usporiadanému simplexu S a bodu X afinného priestoru P existuje jediná sústava skalárov $x_o, \dots, x_n$ tak, že platí (i). Sústavu týchto skalárov nazývame *barycentrické súradnice* bodu X v simplexe S a zapisujeme $X_S = [x_o, x_1, \dots x_n]$. Zrejme platí i obrátene, že každá sústava skalárov $x_o, \dots, x_n$, $x_o + x_1 + \cdots + x_n = 1$, jednoznačne určuje bod $X \in P$ tak, že platí (i). Nech $S = (A, B, C)$ je usporiadaný simplex afinného priestoru R_2. Dokážte, že

(ii) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]$ je sústava barycentrických súradníc stredu dvojice bodov A, B v simplexe S.
(iii) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ je sústava barycentrických súradníc ťažiska trojuholníka ABC v simplexe S .

2 Podpriestory afinného priestoru

Definícia podpriestoru

Definícia 2.1 *Nech P je afinný priestor. Neprázdnu podmnožinu L množiny P nazývame* podpriestorom *afinného priestoru P (označenie: $L \subset\subset P$), ak pre nejaký bod $A \in L$ je $L - A$ podpriestor zamerania priestoru P. Nenulový vektor zamerania $L - A$ podpriestoru L nazývame* smerový vektor *podpriestoru L.*

Nech $(P, \rightarrow, V)$ je afinný systém a nech L je podpriestor afinného priestoru P. Podľa definície 2.1 existuje $A \in L$ tak, že $L - A = U$ je podpriestor priestoru V. Uvažujme o trojici $(L, \rightarrow, U)$ (zúženie zobrazenia $\rightarrow : P \times P \rightarrow V$ na množinu $L \times L$ sme označili tým istým znakom $\rightarrow$). Keď $X, Y \in L$, potom $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AY} - \overrightarrow{AX} \in U$ preto $\vec{L} = U$. Ľahko sa overí, že zobrazenie $\rightarrow : L \times L \rightarrow U$ má vlastnosti $A1, A2$, preto $(L, \rightarrow, U)$ je afinný systém. Takýto systém budeme nazývať *podsystém* afinného systému $(P, \rightarrow, V)$. To nás oprávňuje považovať podpriestor L afinného priestoru P za afinný priestor. Platí teda: Ak $L \subset P$ a $(P, \rightarrow, V)$ je afinný systém, tak L je podpriestor afinného priestoru P práve vtedy, keď $(L, \rightarrow, \vec{L})$ je afinný systém.

Veta 2.2 *Nech P je afinný priestor a L podmnožina P; potom*

(i) *L je podpriestor priestoru P práve vtedy, keď existuje $A \in L$ a podpriestor U priestoru $\vec{P}$ tak, že $L = A + U$*

(ii) *Keď $L = A + U$ je podpriestor afinného priestoru P, potom pre každý bod $B \in L$ je $L = B + U$.*

Dôkaz. (i) vyplýva z definície 2.1 a ekvivalencie (1.28). (ii) Nech $B \in L$; zrejme $\overrightarrow{AB} = \vec{b} \in U$, potom $\vec{b} + U = U$ a $A + \vec{b} = B$. Preto $B + U = (A + \vec{b}) + U = A + (\vec{b} + U) = A + U = L$.

Veta 2.3 *Neprázdny prienik ľubovoľného systému podpriestorov afinného priestoru P je podpriestor priestoru P. Zameranie tohto prieniku je prienik zameraní týchto podpriestorov.*

Dôkaz. Vyplýva z (1.30) a z Vety B.4.

Dôsledok 2.4 *Ak prienik podpriestorov K, L afinného priestoru P je neprázdny, tak*

$$dim\, K \cap L \geq dim\, K + dim\, L\ - dim\, P.$$

Dôkaz. $J = K \cap L$ implikuje $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \cap \overrightarrow{L}$ a na $\vec{J}$, $\vec{K}$, $\vec{L}$ stačí aplikovať Vetu B.11(ii).

Veta 2.5 *Ak sa podpriestor K a nadrovina N afinného priestoru P pretínajú a neincidujú, tak $dim\, K \cap N = dim\, K - 1$.*

Dôkaz. Je zrejmé, že $K \neq P$ (inak by $N \subset K$). Pretože K, N neincidujú $dim\, K \cap N < dim\, K$. Podľa Dôsledku 2.4, $dim\, K \cap N >= dim\, K + dim\, N - dim\, P = dim\, K + dim\, P - 1 - dim\, P = \dim\ K - 1$.

O tom aké sú nutné a postačujúce podmienky, aby sa dva podpriestory afinného priestoru pretínali (t.j. aby ich prienik bol neprázdny), hovorí

Veta 2.6 *(O prieniku podpriestorov afinného priestoru). Nech L, M sú podpriestory afinného priestoru P. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) *L, M sa pretínajú*

(ii) *$\overrightarrow{XY} \in \overrightarrow{L} + \overrightarrow{M}$ pre každé dva body $X \in L$ a $Y \in M$*

(iii) *existujú dva body $A \in L, B \in M$ tak, že $\overrightarrow{AB} \in \vec{L} + \vec{M}$*

Dôkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nech $C \in L \cap M$, $X \in L$, $Y \in M$. Potom $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} \in \overrightarrow{L} + \overrightarrow{M}$. $(ii) \Rightarrow (iii)$ je zrejmé. $(iii) \Rightarrow (i)$ Pretože $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{L} + \overrightarrow{M}$ existujú vektory $\overrightarrow{AD} \in \overrightarrow{L} = L - A$, $\overrightarrow{FB} \in \overrightarrow{M} = M - A$ (pritom $D \in L, F \in M$) tak, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FB}$, odkiaľ po úprave ľavej strany $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FB}$, čiže $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FB}$ a preto $F = D$, čo implikuje $D \in L \cap M$.

Dôsledok 2.7 *Nech L, M sú podpriestory afinného priestoru P. Potom*

$\overrightarrow{L} + \overrightarrow{M} = \overrightarrow{P} \quad \Rightarrow \quad L,\ M$ *sa pretínajú.*

Ľahko sa dá na konkrétnom príklade ukázať, že obrátená veta k Dôsledku 2.7 neplatí.

Afinný obal

Definícia 2.8 *Nech M je neprázdna podmnožina afinného priestoru P. Prienik všetkých podpriestorov priestoru P obsahujúcich množinu M nazývame* afinný obal *(alebo* lineárny obal*) množiny M a označujeme $\overline{M}$.*

Veta 2.9 *Nech M je neprázdna podmnožina afinného priestoru P, $A \in\ M$ je ľubovoľný bod. Potom*

$$\overline{M} = A + \langle M - A \rangle. \tag{2.1}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme, že $M \subset A + \langle M - A \rangle$; nech $X \in M$, potom $X = A + \overrightarrow{AX} \in A + (M - A) \subset A + \langle M - A \rangle$. Ďalej nech $K \subset\subset P$ a $M \subset K$, stačí dokázať, že $A + \langle M - A \rangle \subset K$; pretože $M \subset K$, tak aj $M - A \subset K - A$ a tiež $\langle M - A \rangle \subset \langle K - A \rangle$, odkiaľ $A + \langle M - A \rangle \subset A + \langle K - A \rangle = K$.

Z rovnosti (2.1) sa ľahko dá určiť aj dimenzia afinného obalu množiny M. Táto dimenzia sa rovná dimenzii zamerania afiného obalu množiny M. Tým zameraním je vektorový priestor $\langle M - A \rangle$, ktorého dimenzia sa rovná maximálnemu počtu lineárne nezávislých vektorov množiny $\langle M - A\rangle$ pre ľubovoľné $A \in M$, t.j. $dim\,\langle M - A\rangle$ sa rovná hodnosti sústavy vektorov $M - A$.

Keď $M = \{A_0, A_1, \dots, A_s\}$, potom $M - A_0$ obsahuje aj vektor $\overrightarrow{A_0A_0} = \vec{o}$, preto

$$\overline{M} = A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_s}\rangle. \tag{2.2}$$

Z Vety 2.9 vyplýva, že bod A_0 možno v tomto vzorci zameniť, hociktorým iným bodom z M. Tým je dokázaná

Lema 2.10 *Nech S je ľubovoľná konečná sústava bodov, $A \in S$ a nech $V = \{\overrightarrow{AX}; X \in S, X \neq A\}$. Potom lineárna závislosť (resp. nezávislosť) sústavy V nezávisí na voľbe bodu A.*

Definícia 2.11 *Sústavu bodov $A_0, A_1, \dots, A_s$ $(s \geq 1)$ afinného priestoru P nazývame* afinne nezávislá *(resp.* afinne závislá*), ak sústava vektorov $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_s}$ je lineárne nezávislá (resp. lineárne závislá). Jednoprvková sústava bodov je afinne nezávislá.*

Pripomíname, že afinne nezávislú sústavu $(n + 1)$ bodov n-rozmerného afinného priestoru P nazývame *simplex* priestoru P (alebo n-rozmerný simplex).

Veta 2.12 *Nech P je afinný priestor, $s > 0$ je prir.číslo. Potom*

(i) množina s bodov afinného priestoru P je afinne nezávislá práve vtedy, keď dimenzia jej afinného obalu je $s - 1$.

(ii) konečná sústava bodov je afinne závislá, ak aspoň jeden z nich je z afinného obalu ostatných.

(iii) nech $A_0, \dots, A_s$ sú afinne nezávislé body afinného priestoru P. Existuje práve jeden s-dimenzionálny podpriestor L priestoru P tak, že $\{A_0, \dots, A_s\} \in L$ (t.j. s-rozmerný podpriestor afinného priestoru je jednoznačne určený $s + 1$ afinne nezávislými bodmi).

Tri (resp. štyri) body tvoriace afinne závislú sústavu bodov budeme nazývať *kolineárne* (resp. *komplanárne*). Teda tri (resp. štyri) body sú kolineárne (resp. komplanárne) práve vtedy, keď ležia na jednej priamke (resp. v jednej rovine). Dva body sú afinne nezávislé práve vtedy, keď sú rôzne.

Príklad 2.13 *Dané sú body afinného priestoru R_4 :*

$$A[2, 4, 5, 6] \quad B[-7, 4, 5, 6] \quad C[6, 11, 3, 7] \quad D[-3, -10, 9, 4] \quad E[-3, 11, 3, 7].$$

Zistite, či sústava bodov $M = (A, B, C, D, E)$ je afinne závislá a vypočítajte dimenziu afinného obalu sústavy M.

Riešenie. Podľa Definície 2.11 množina M je afinne závislá, ak sústava vektorov $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = W$ je lineárne závislá. Podľa (1.15)

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-9, 0, 0, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 7, -2, 1), \ \overrightarrow{AD} = (1, -14, 4, -2), \quad \overrightarrow{AE} = (-5, 7, -2, 1).$$

Aby sme zistili či sústava vektorov $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ je lineárne závislá, nájdeme hodnosť matíc

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 1 \\ 1 & -14 & 4 & -2 \\ -5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnosť je dva, t.j. je menšia ako počet vektorov, preto sústava $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ je lineárne závislá a teda body A, B, C, D, E sú afinne závislé. Z poslednej matice vyplýva, že vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sú lineárne nezávislé a $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sú ich lineárne kombinácie, preto

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\rangle = \langle W\rangle.$$

To znamená, že $M = A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$, takže $dim\, M = 2$. Body A, B, C, D, E ležia v rovine $\overline{ABC} = \overline{M}$.

Príklad 2.14 *V R_4 sú dané roviny $M = A+ < \vec{a}, \vec{b} >$, $N = B+ < \overrightarrow{BC}, \vec{c} >$. Zistite, či priestory M, N sa pretínajú, keď* $A[-1,4,0,6]$, $B[-2,-4,5,7]$, $C[6,7,3,7]$, $\vec{a}(-3,-10,9,4)$, $\vec{b}(-3,11,3,7)$, $\vec{c}(0,-7,2,1)$.

Riešenie. Podľa Vety 2.6 je $M \cap N \neq \emptyset$ práve vtedy, keď vektor $\overrightarrow{AB}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{BC}, \vec{c}$, tieto vektory totiž generujú spojenie zameraní rovín M, N. Vytvoríme preto maticu, ktorej posledný riadok je vektor $\overrightarrow{AB}$ a ostatné riadky tvoria vektory $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{BC}, \vec{d}$. Pri úprave tejto matice na trojuholníkový tvar zistíme, že posledný riadok nie je lineárnou kombináciou prvých štyroch, preto M, N sa nepretínajú.

$$\begin{pmatrix} -3 & -10 & 9 & 4 \\ -3 & 11 & 3 & 7 \\ 8 & 11 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -10 & 9 & 4 \\ 0 & -47 & 66 & 32 \\ 0 & 0 & 368 & 271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojenie priestorov

Veta 2.15 *Nech $L = A + \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s \rangle$, $M = B + \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \rangle$ sú podpriestory afinného priestoru P. Potom*

$$N = A + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s, \vec{v}_1, \dots \vec{v}_r \rangle$$

je afinný obal množiny $L \cup M$, ktorý nazývame spojenie afinných priestorov *L, M.*

Dôkaz. Nech K je taký podpriestor priestoru P, že obsahuje množinu $L \cup M$. Stačí dokázať, že $(L \cup M) \subset N$ a $N \subset K$. Z predpokladov vyplýva $A, B \in K$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{K}$, $\overrightarrow{L}, \overrightarrow{M} \subset \overrightarrow{K}$, $\overrightarrow{L} + \overrightarrow{M} \subset K$. Preto

$$N = A + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \rangle = A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \overrightarrow{L} + \overrightarrow{M} \subset A + \overrightarrow{K} = K.$$

Veta 2.16 *Nech Q je neprázdna množina bodov afinného priestoru P a nech U je množina vektorov z $\vec{P}$. Potom afinný priestor*

$$L = \overline{Q} + \langle U \rangle$$

je prienik všetkých podpriestorov K priestoru P takých, že $Q \subset K$, $U \subset \overrightarrow{K}$. Taký priestor L nazývame afinným obalom *množiny bodov Q a množiny vektorov U.*

Dôkaz. Nech K je taký podpriestor afinného priestoru P, že $Q \subset K$ a $U \subset \overrightarrow{K}$; potom aj $\langle \overrightarrow{Q} \rangle \subset \overrightarrow{K}$, takže $\langle \overrightarrow{Q} \rangle + \langle U \rangle \subset \overrightarrow{K}$. Nech $A \in Q$ (teda aj $A \in K$) je ľubovoľný bod; potom $L = A + \langle \overrightarrow{Q} \rangle + \langle U \rangle \subset A + \overrightarrow{K} = K$.

Cvičenie

2.1 Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín reálneho afinného priestoru R_2 sú jeho podpriestory:

$$\begin{aligned} K &= \{[2t-3u, 4t+5u];\ t, u \text{ sú také reálne čísla, že } tu = 0\} \\ L &= \{[2t, 4t];\ t \in R]\} \\ M &= \{[a+bt, c+dt];\ t \in R\}\ a, b, c, d \in R \text{ sú také, že } b^2 + d^2 > 0; \\ N &= \{[3, 4]\} \\ S &= \{[2+4t, 1-2t];\ t \geq 0\} \\ T &= \{[2+4t, 1-2t];\ t \in < 0, 1 >\}; \\ H &= \{[x, y];\ x^2 + y^2 \leq 1\}; \\ G &= \{[x, y];\ x, y \text{ sú racionálne čísla}\}. \end{aligned}$$

Určte afinný obal každej z týchto množín.

2.2 Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín afinného priestoru R_4 sú jeho podpriestory:

$$\begin{aligned} K &= \{[\frac{1}{2}+2t, 3-t, 4+\frac{3}{2}t, 5-t]\};\ t \in R\} \\ L &= \{[\frac{1}{2}+2t, 3-t, 4+\frac{3}{2}t, 5-t];\ t \geq 0\} \\ M &= \{[2,3,1,0],[0,1,0,1],[7,3,5,6]\} \\ N &= \{[x,y,z,t];\ x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1\} \\ S &= \{[1+2t+4u, 2-t+5u, 4-t-u, -1+2t-3u];\ t,u \in R\}. \end{aligned}$$

Určte afinný obal každej z týchto množín.

2.3 Nech Q_2 je aritmetický afinný priestor nad poľom všetkých racionálnych čísel Q. Je Q_2 podpriestor priestoru R_2?

2.4 Nech P je dvojrozmerný aritmetický afinný priestor nad poľom Z_3 (t.j. poľom zvyškových tried modulo 3). Zistite, ktoré z nasledujúcich množín sú podpriestory priestoru P:

$$\begin{aligned} K &= \{[1+2t; 2+t];\ t \in Z_3\} \\ L &= \{[0,0],[1,2],[2,1]\} \\ M &= \{[0,1],[1,1],[1,2]\} \\ N &= \{[0,1],[1,0],[1,1]\} \\ S &= \{[2,1],[1,1]\}. \end{aligned}$$

Ku každej z týchto množín, ktoré netvoria podpriestor priestoru P pridajte toľko bodov, aby vznikol podpriestor priestoru P. Pri množine S nájdite dve riešenia. Ktorá z nich je afinným obalom množiny S? Koľko prvkov môže mať podpriestor priestoru P? Určte počet všetkých priamok priestoru P. Určte, ktoré z množín M, N, L, S sú afinne závislé množiny bodov.

2.5 Dokážte, že pre každé $t, u \in R$ množina bodov

$$\{[1,0,1],[3,3,5],[4,1,6],[1+2t+3u, 3t+u, 1+4t+5u]\}$$

priestoru R_3 je afinne závislá. Akú dimenziu má jej afinný obal?

2.6 Dokážte, že neplatí veta: Nech M je taká podmnožina afinného priestoru P, že $\vec{M}$ je podpriestor priestoru $\vec{P}$; potom M je podpriestor priestoru P.

2.7 Nech $E = (O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ je repér afinného priestoru P. Súradným priestorom nazývame podpriestor $S = O + \langle \vec{e}_{\varphi(1)}, \ldots, \vec{e}_{\varphi(s)} \rangle$ priestoru P, kde φ je zobrazenie množiny $\{1, \ldots, s\} \to \{1, \ldots n\}$. Nech $X_E = [x_1, \ldots, x_n]$ a $\vec{v}_E = (v_1, \ldots, v_n)$. Dokážte, že

(i) $X \in S \Leftrightarrow x_i = 0$ pre každé $i \notin \{\varphi(1), \ldots, \varphi(s)\}$

(ii) $\vec{v} \in \vec{S} \Leftrightarrow v_i = 0$ pre každé $i \notin \{\varphi(1), \ldots, \varphi(s)\}$

2.8 Nech L, K sú podpriestory afinného priestoru P, ktoré sa pretínajú. Dokážte, že

$$L \subset K \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{L} \subset \overrightarrow{K}.$$

2.9 Nech L, K sú podpriestory afinného priestoru P. Dokážte:

$$\overrightarrow{L} \subset \overrightarrow{K} \quad \Rightarrow \quad L \cap K = \emptyset \text{ alebo } L \subset K.$$

2.10 Dokážte, že ak prienik podpriestorov K, L, M afinného priestoru P je neprázdny, tak

$$dim\, K \cap L \cap M \geq dim\, K + dim\, L + dim\, M - 2dim\, P.$$

2.11 Nech M je neprázdna podmnožina afinného priestoru P. Dokážte, že keď pre každé dva rôzne body $A, B \in M$ priamka AB leží v M, potom M je podpriestor priestoru P.

2.12 Dokážte, že pre každú neprázdnu množinu bodov M afinného priestoru P (nad poľom F) a ľubovoľný bod $A \in M$ je

$$\langle M - A \rangle = \{t_1\overrightarrow{AX}_1 + \cdots + t_s\overrightarrow{AX}_s;\ s \in \mathbf{N},\ X_i \in M,\ t_1, \ldots, t_s \in F\}$$

2.13 Nech L_1, L_2, L_3, L_4 sú navzájom rôzne priamky roviny P prechádzajúce bodom F. Nech $\overrightarrow{FX_1} \in \overrightarrow{L_1}$, $\overrightarrow{FX_2} \in \overrightarrow{L_2}$, $\overrightarrow{FX_3} \in \overrightarrow{L_3}$ sú také nenulové vektory, že $\overrightarrow{FX_1} + \overrightarrow{FX_2} = \overrightarrow{FX_3}$ a $r\overrightarrow{FX_1} + \overrightarrow{FX_2} \in \overrightarrow{L_4}$. Dokážte, že skalár r nezávisí na voľbe bodov X_1, X_2, X_3 (skalár r nazývame *dvojpomer štyroch priamok* L_1, L_2, L_3, L_4 a označujeme $r = (L_1L_2L_3L_4)$).

2.14 Nech $ABCD$ je štvorsten a T resp. R je ťažisko $\triangle ABC$ resp. $\triangle BCD$. Dokážte, že $\dim \overline{ADTR} = 2$.

2.15 Nech body $A_0, \ldots, A_s$ sú afinne nezávislé. Zistite, či vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \ldots \overrightarrow{A_{s-1}A_s}$ sú lineárne závislé.

3 Rovnice podpriestorov afinného priestoru

Parametrické rovnice podpriestoru

Vieme už, že pre každé $s \in \{1, \ldots, n\}$ je s-rozmerný podpriestor n-rozmerného afinného priestoru jednoznačne určený $s+1$ afinne nezávislými bodmi. Nech L je afinný obal afinne nezávislej sústavy bodov $M = \{A,\ A_1, \ldots, A_s\}$ afinného priestoru P, $dim\, P = n$. Potom

$$L = A + \langle \overrightarrow{AA_1}, \ldots, \overrightarrow{AA_s} \rangle.$$

To znamená, že $X \in L \Leftrightarrow$ existujú skaláry $t_1, \ldots, t_s$ tak, že

$$X = A + t_1\overrightarrow{AA_1} + \cdots + t_s\overrightarrow{AA_s}. \tag{3.1}$$

Túto rovnicu nazývame *vektorová rovnica* priestoru L (daného afinne nezávislými bodmi $A, A_1, \ldots, A_s$). Ak

$$A[a_1, \ldots, a_n],\ X[x_1, \ldots, x_n],\ A_i[a_{1i}, \ldots, a_{ni}],\ i = 1, \ldots, n$$

možno vektorovú rovnicu (3.1) rozpísať do súradníc

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1(a_{11} - a_1) + ... + t_s(a_{1s} - a_1) \\ x_2 &= a_2 + t_1(a_{21} - a_2) + ... + t_s(a_{2s} - a_2) \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + t_1(a_{n1} - a_n) + ... + t_s(a_{ns} - a_n) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sústavu týchto rovníc nazývame *parametrické rovnice* podpriestoru L (daného afinne nezávislými bodmi $A, A_1, \ldots, A_s$) afinného priestoru P (v príslušnom repére, ktorého znak sme vynechali). Z rovnice (3.1) vyplýva, že priestor L môže byť jednoznačne určený bodom A a lineárne nezávislými vektormi $\vec{u}_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $\ldots \vec{u}_s = \overrightarrow{AA_s}$. V tom prípade $L = A + \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s \rangle$, čiže $X \in L \Leftrightarrow$ existujú skaláry $t_1, \ldots, t_s$ tak, že $X = A + t_1\vec{u}_1 + \ldots + t_s\vec{u}_s$. Túto rovnicu tiež nazývame vektorová rovnica podpriestoru L afinného priestoru P daného bodom A a bázou $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s$ svojho zamerania.

Všeobecná rovnica nadroviny

Nech L je nadrovina afinného priestoru P, $dim\, P = n$. Ak $A[a_1, \ldots, a_n]$, $X[x_1, \ldots, x_n]$, $\vec{u}_i(u_{1i}, \ldots, u_{ni})$, $i = 1, \ldots, n-1$, $L = A + \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1} \rangle$, tak $X \in L \Leftrightarrow$ sústava vektorov $\overrightarrow{AX}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}$ je lineárne závislá a to nastane práve vtedy, keď hodnosť matice

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & \ldots & x_n - a_n \\ u_{11} & \ldots & u_{n1} \\ & \vdots & \\ u_{1,n-1} & \ldots & u_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

je menšia ako počet vektorov (je ich n). Keďže táto matica je štvorcová typu $n \times n$, jej hodnosť je menšia ako n práve vtedy, keď determinant tejto matice je 0, t.j. keď

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & \dots & x_n - a_n \\ u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \vdots & \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

Ak determinant na ľavej strane tejto rovnice rozvinieme podľa prvého riadku dostaneme rovnicu

$$d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n + d_{n+1} = 0 \tag{3.3}$$

kde $d_i \neq 0$ pre aspoň jedno $i = 1, \ldots, n$. Ak by totiž $d_i = 0$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$, rovnica (3.3) by mala tvar $d_{n+1} = 0$. Keď d_{n+1} nie je nula, potom nadrovina L neobsahuje žiadny bod (neexistuje bod, ktorého súradnice vyhovujú rovnici $d_{n+1} = 0$), to však nie je možné, preto aj d_{n+1} je nula. Potom rovnica (3.3) má však tvar $0 = 0$ a takej rovnici vyhovuje každý bod priestoru P, teda $L = P$ a to tiež nie je možné. Tým je dokázaná

Veta 3.1 *Nech P je afinný priestor, $\dim P = n, n \geq 1$. Pre každú nadrovinu N priestoru P, existujú skaláry, $d_1, \ldots, d_{n+1}$ tak, že $(d_1, \ldots, d_n) \neq (0, \ldots, 0)$ pričom bod $X[x_1, \ldots, x_n]$ leží v N práve vtedy, keď platí (3.3). Rovnicu (3.3) nazývame* všeobecná rovnica nadroviny N *(v danom repére).*

Je zrejmé, že keď (3.3) je rovnica nadroviny N, potom aj $dd_1x_1 + \cdots + dd_nx_n + dd_n = 0$ je rovnicou tej istej nadroviny N pre všetky $d \neq 0$.

Veta 3.1 nehovorí, že každá rovnica tvaru (3.3) je rovnicou nejakej nadroviny; že je to skutočne tak, potvrdzuje

Veta 3.2 *Nech $d_1, \ldots, d_{n+1}$ sú ľubovoľné skaláry n-rozmerného afinného priestoru P, $n \geq 1$, $d_i \neq 0$ pre aspoň jedno $i = 1, \ldots, n$. Potom existuje práve jedna nadrovina N priestoru P tak, že jej všeobecná rovnica (v danom repére) je (3.3).*

Dôkaz. Nech $d_1 \neq 0$ (v opačnom prípade prečíslujeme indexy v (3.3)); môžeme dokonca predpokladať $d_1 = 1$. Hľadajme všetky riešenia rovnice

$$x_1 + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n + d_{n+1} = 0.$$

Jedno riešenie je $D = [-d_{n+1}, 0, \ldots, 0]$. Ostatné riešenia nájdeme pomocou riešení homogénnej rovnice

$$x_1 + d_2 x_2 + \cdots + d_n x_n = 0.$$

Je zrejmé, že lineárne nezávislé riešenia sú

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (-d_2, 1, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ \vec{u}_{n-1} &= (-d_n, 0, 0, ..., 0, 1) \end{aligned}$$

Nech $N = D + \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1} \rangle$. To znamená, že N je nadrovina, ktorej rovnicu dostaneme, ak v rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 + d_{n+1} & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ -d_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ -d_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rozvinieme determinant podľa prvého riadku a potom vzniknuté minory podľa riadku, kde je najviac jeden prvok nenulový; je to rovnica $x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n = 0$ a keďže $d_1 = 1$, tak aj $d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$.

Veta 3.3 *Nech N je nadrovina o rovnici $d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$. Potom $\vec{v}(v_1, \ldots, v_n) \in \overrightarrow{N}$ práve vtedy, keď*

$$d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n = 0. \tag{3.4}$$

Túto rovnicu nazývame rovnica zamerania *nadroviny N.*

Dôkaz. Nech $A[a_1,\dots,a_n] \in N$. Ak $\vec{v} \in \overrightarrow{N}$, tak $A+\vec{v} \in N$ a preto $d_1(a_1+v_1)+\cdots+d_n(a_n+v_n)+d_{n+1}=0$, po úprave $(d_1a_1+\cdots+d_na_n+d_{n+1})+(d_1v_1+\cdots+d_nv_n)=0$, odkiaľ vzhľadom na to, že $d_1a_1+\cdots+d_na_n+d_{n+1}=0$, dostávame (3.4). Opačným postupom dostaneme obrátené tvrdenie.

Príklad 3.4 *V R_3 sú dané body $A[2,5,1]$, $B[1,-1,0]$ a vektor $\vec{u}\ (-1,0,1)$. Vypočítajte všeobecnú rovnicu roviny N tak, aby $\vec{u}$ bol jej smerový vektor a aby prechádzala bodmi A, B.*

Riešenie. Zrejme $N = A + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle$. Vektory $\overrightarrow{AB}(-1,-6,-1)$, $\vec{u}$ sú lineárne nezávislé, preto rovina N existuje jediná, jej rovnicu (ako nadroviny) nájdeme, ak rozvinieme determinant v rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & x_2-5 & x_3-1 \\ -1 & -6 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hľadaná rovnica je $3x_1 - x_2 + 3x_3 - 4 = 0$.

Geometrický význam riešenia sústavy lineárnych rovníc

Neprázdny prienik ľubovoľného počtu nadrovín afinného priestoru P je podpriestor afinného priestoru P. Preto neprázdna množina všetkých riešení $[x_1,\dots,x_n]$ sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} d_{11}x_1+\cdots+d_{n1}x_n+d_{n+1,1} &= 0 \\ &\vdots \\ d_{1s}x_1+\cdots+d_{ns}x_n+d_{n+1,s} &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

je podpriestor L afiného priestoru P; je to totiž prienik nadrovín, určených rovnicami (3.5). Preto môžme definovať

$$L \equiv \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{n1} & d_{n+1,1} \\ & \vdots & & \\ d_{1s} & \cdots & d_{ns} & d_{n+1,s} \end{pmatrix}.$$

Z toho vyplýva , že každý podpriestor afinného priestoru P (rôzny od P) sa dá jednoznačne určiť pomocou všeobecných rovníc. Nadrovina má 1-všeobecnú rovnicu, $(n-2)$-rozmerný podpriestor n-rozmerného afinného priestoru P má dve všeobecné rovnice o n-neznámych, atď.

Príklad 3.5 *Vypočítajte všeobecné rovnice priamky AB, keď $A[-2,4,5]$, $B[-8,1,3]$ (rovníc má byť čo najmenej).*

Riešenie. Ak $d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4=0$ je hľadaná rovnica, tak súradnice bodov A, B jej musia vyhovovať, preto riešime sústavu lineárnych rovníc $-2d_1+4d_2+5d_3+d_4=0$, $-8d_1+d_2+3d_3+d_4=0$. Jej riešením sú napr. dve štvorice $(7,-34,30,0)$, $(-1,2,0,-10)$, takže hľadané rovnice sú $7x_1-34x_2+30x_3=0$, $-x_1+2x_2-10=0$.

Veta 3.6 *Ak podpriestor L n-rozmerného af.pr. P je daný sústavou h-lineárne nezávislých rovníc, tak $dim\ L = n-h$ (= počtu voliteľných neznámych v danej sústave lineárnych rovníc).*

Dôkaz. Pre $n=1$ je aj $h=1$, tvrdenie je teda triviálne, majme preto $n>1$. Pretože $L \neq \emptyset$, daná sústava lin.rovníc má riešenie, čo implikuje $h <= n$. Ak $h=1$, L je zrejme nadrovina, čiže $dim\, L = n-1 = n-h$. Nech $k <= n$ a nech tvrdenie vety platí, pre každé $h<k$. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $h=k$. Nech daná sústava lineárnych rovníc je $R_1,\dots,R_h$. Nech riešenie sústavy $R_1,\dots,R_{h-1}$ je priestor K. Jeho dimenzia je podľa predpokladu $n-(h-1)$. Priestory K a nadrovina o rovnici R_h sa pretínajú a neincidujú, preto podľa Vety 2.5 dimenzia ich prieniku (ten je riešením sústavy $R_1,\dots,R_h$) je $n-(h-1)-1=n-h$.

Príklad 3.7 *Nech M je prienikom nadrovín $N_1 \equiv 3x_1+2x_2-5x_3+7x_4-3=0$, $N_2 \equiv 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+5=0$. Vypočítajte všeobecnú rovnicu nadroviny N, ktorá obsahuje M a prechádza bodom $A[-4,1,-1,-1]$.*

Riešenie. Podľa predošlej vety, $dim\, M = 2$. Keďže $M \subset N$, prienik nadrovín N_1, N_2, N je M a teda opäť podľa Vety 3.6, rovnica N musí byť lineárnou kombináciou rovníc N_1, N_2, hľadaná nadrovina bude mať teda rovnicu $p(3x_1+2x_2-5x_3+7x_4-3)+q(2x_1-x_2+3x_3-2x_4+5)=0$. Ak súradnice bodu A dosadíme do tejto rovnice, dostaneme $3p=-q$, odkiaľ $p=-1$, $q=3$. Hľadaná rovnica je $3x_1-5x_2+14x_3-13x_4+18=0$.

Cvičenie

3.1 V R_4 sú dané priamky

$$L : x_1 = 2 + t;\ x_2 = -1 + t;\ x_3 = 5 + 10t;\ x_4 = -16 - 45t$$

$$K : x_1 = 3 + 7t;\ x_2 = -2t;\ x_3 = 15 + 4t;\ x_4 = 61 + t$$

a podpriestor M rovnicami

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 - 5 & = & 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 \quad + 6 & = & 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + 1 & = & 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 + 11 & = & 0 \end{array}$$

Vypočítajte dimenziu a lineárne nezávislé rovnice M a dokážte, že priamka L leží v M a priamka K neleží v M. Vypočítajte súradnice bodu, ktorý leží v M i na priamke K.

3.2 Vypočítajte všeobecnú rovnicu roviny N, v ktorej ležia priamky
$L : x_1 = 2 + 3t,\ x_2 = 3 + 7t,\ x_3 = -2 - 2t,$ $\quad K = \overline{AB},\ A[-1, 3, 2],\ B[5, 10, -4].$

3.3 Zistite, či priamky K, L ležia v jednej rovine, keď
$K = \overline{AB},\ A[1, 0, 1],\ B[0, 1, 0],$ $\quad L : x_1 = 1 - 7t,\ x_2 = -3 + 5t,\ x_3 = 1 + 2t.$

3.4 Dokážte, že parametrické rovnice $x_1 = 2 - 3t,\ x_2 = 3 + 4t,\ x_3 = 7 - t$ sú rovnice priamky $K : x_1 = -1 - 6t,\ x_2 = 7 + 8t,\ x_3 = 6 - 2t.$

3.5 Zistite, či body $A[5, 0, 1, 2],\ B[7, 4, 8, 3],\ C[11, 12, 22, 5],\ D[1, -8, -13, 0]$ ležia na jednej priamke.

3.6 Zistite, či existuje rovina, v ktorej ležia body $A[1, 0, 1, 0],\ B[0, 1, 1, 0],\ C[0, 2, 4, 0],\ D[-1, -1, 1, 2]$. Vypočítajte všeobecné rovnice afinného obalu množiny A, B, C, D.

3.7 Zistite, ktorý z vektorov $\vec{u}(-2, 0), \vec{v}(-3, 6)$ je smerovým vektorom priamky $2x + y - 6 = 0$.

3.8 Dokážte, že bod $C[4, -3]$ leží na priamke $\overline{AB},\ A[2, 1],\ B[0, 5]$.

3.9 V R_2, sú dané body $A[p, 0], B[0, q], pq \neq 0$. Dokážte, že rovnica $\dfrac{x_1}{p} + \dfrac{x_2}{q} - 1 = 0$ (nazývame ju *úsekový tvar* rovnice priamky v rovine, p je úsek na osi x_1, q je úsek na osi x_2) je všeobecná rovnica priamky AB.

3.10 Dané sú body $A[3, 1, 17, 5], B[8, 8, 5, -2], C[2, -5, 7, 4]$ a vektory $\vec{a}(2, 4, 5, 0), \vec{b}(-1, 2, 5, 1)$. Zistite, či prienik priamky $K = \overline{AB}$ a roviny $N = C + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ je prázdny a nájdite jeho dimenziu.

3.11 Vypočítajte parametrické rovnice priamky K prechádzajúcej bodom C, pretínajúcej priamku AB a rovinu N, ak $A[2, 1, 4, 3], B[2, -1, 5, 3], C[10, 3, -9, -13],\ N : x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 = 0.$

3.12 Dokážte, že parametrické rovnice roviny $x_1 = 2 - 3t + 2s,\ x_2 = -1 + 2t - 3s,\ x_3 = 1 + t + s$ sú rovnice roviny $K:\ x_1 = -3 - t - s,\ x_2 = 4 - t + s,\ x_3 = 1 + 2t.$

3.13 V $R_n,\ n \geq 1$ je daná nadrovina $N \equiv (1, 1, 1, \ldots, 1, -5)$. Vypočítajte počet všetkých bodov $X[x_1, \ldots, x_n]$ nadroviny N, ktorých súradnice sú celé nezáporné čísla.

3.14 Dané sú body $R[0, 13],\ P[10, 9],\ Q[4, 5]$ všetko v repére E. Nech $F = (R, \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})$ je nový repér a nech $M_F = [?, 1/4]$, M leží na priamke PQ. Vypočítajte všeobecnú rovnicu priamky MR v repére E.

3.15 Vypočítajte maticu prechodu E^F tak, aby priamka $L = AB,\ A_E[1, 2],\ B_E[-5, 4]$ mala v F rovnicu $2x_1 - 3x_2 - 6 = 0.$

4 Vzájomná poloha podpriestorov afinného priestoru

Definícia vzájomnej polohy

Ak prienik dvoch množín bodov je neprázdny (resp. prázdny) hovoríme, že tieto množiny sa *pretínajú* (resp. *nepretínajú*). Ak $L \cap S = M$ hovoríme, že L a S sa pretínajú v M. Vetu "existuje bod A, s ktorým podpriestory L, M afinného priestoru P incidujú" budeme často nahrádzať vetou "podpriestory L, M prechádzajú bodom A" podobne majú rovnaký význam formulácie "dve priamky ležia v jednej rovine", "existuje rovina incidentná s dvomi priamkami" atď.

Pripomeňme známe relácie rovnobežnosti, rôznobežnosti a mimobežnosti priamok a rovín v priestore ("školskom") E_3. Dve priamky L, M sú rovnobežné, ak sú totožné alebo disjunktné a ležia v jednej rovine. Je zrejmé, že v tomto prípade zamerania priamok L, M incidujú. Nech priamka L je rovnobežná s rovinou N. Podľa známeho kritéria (zo strednej školy) rovnobežnosti priamky s rovinou, priamka L je rovnobežná s N, ak v rovine existuje priamka M rovnobežná s L a obrátene. Tu platí znova $\vec{L} = \vec{M}$ a pretože $\vec{M} \subset \vec{N}$, tak $\vec{L} \subset \vec{N}$ čiže $\vec{L}, \vec{N}$ incidujú. To isté platí o zameraniach dvoch rovnobežných rovín. Dve priamky L, M sú mimobežné, ak sa nepretínajú a neležia v jednej rovine. To znamená, že $L \cap M = \emptyset$ a $\vec{L} \cap \vec{M} = \vec{o}$.

Z týchto úvah vyplýva, že na "vzájomnú polohu" dvoch podpriestorov afinného priestoru má vplyv len ich prienik a prienik ich zameraní. Nasledujúca definícia zovšeobecňuje vyššie uvedené relácie vzájomnej polohy dvoch podpriestorov priestoru E_3. Rovnobežnosť priestorov L, M symbolicky zapisujeme $L \| M$. Ak dve priamky sú rovnobežné aj o ich smerových vektoroch hovoríme, že sú rovnobežné.

Definícia 4.1 *Dva podpriestory afinného priestoru P sú* rovnobežné*, ak ich zamerania incidujú. Dva podpriestory (kladných dimenzií) afinného priestoru P sú* rôznobežné*, ak sa pretínajú a neincidujú,* mimobežné*, ak sa nepretínajú a ich zamerania majú triviálny prienik (t.j. nulový vektor je jediný prvok prieniku ich zameraní),* čiastočne mimobežné*, ak sa nepretínajú a nie sú rovnobežné ani mimobežné.*

Príklad 4.2 *Dané sú body $A[0,2,4,8,0]$, $B[8,5,-4,1,1]$, a vektory $\vec{a}(1,3,5,7,5)$, $\vec{b}(-5,4,7,2,1)$, $\vec{c}(-3,5,4,-7,2)$, $\vec{d}(-9,2,-8,1,0)$, $\vec{e}(-8,10,-11,12,15)$. Zistite, aká je vzájomná poloha roviny $K = A + < \vec{d}, \vec{e} >$ a trojrozmerného priestoru $M = B + < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$.*

Riešenie. O vzájomnej polohe dvoch podpriestorov rozhoduje ich prienik a prienik ich zameraní. Preto vytvoríme maticu, ktorej riadky budú v poradí vektory zo zamerania priestoru M (lebo $dim\, M \geq \dim K$), potom vektory zo zamerania roviny K a nakoniec vektor $\overrightarrow{AB}$ (určený je jedným bodom z K a jedným bodom z M). Túto maticu upravujeme na trojuholníkový tvar tak, že nemeníme poradie jej riadkov , "zhora dole" (t.j. k riadku pripočítavame len lineárnu kombináciu riadkov nad ním) a nulové riadky nevynechávame:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ -5 & 4 & 7 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 4 & -7 & 2 \\ -9 & 2 & -8 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & -11 & 12 & 15 \\ 8 & 3 & -8 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 14 & 19 & 14 & 17 \\ 0 & 0 & -33 & 490 & 137 \\ 0 & 0 & 0 & 1213 & 316 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Tieto matice sú ekvivalentné, z poslednej z nich vyčítame: $dim\,(\overrightarrow{K} + \overrightarrow{M}) = 4$ t.j. hodnosť matice zloženej z prvých piatich riadkov je 4, preto z formuly Grasmanna vyplýva, že $dim\,(\overrightarrow{K} \cap \overrightarrow{M}) = 3 + 2 - 4 = 1$, teda zamerania priestorov K, M neincidujú a nemajú triviálny prienik; posledný riadok nie je lineárnou kombináciou predošlých preto sa podľa Vety 2.6 priestory K, M nepretínajú. Znamená to, že K, M sú čiastočne mimobežné.

Veta 4.3 *Nech L, N sú podpriestory afinného priestoru P, N je nadrovina v P. Potom L, N sú buď rovnobežné alebo rôznobežné. Ak sú rôznobežné tak $dim\, L \cap N = dim\, L - 1$.*

Dôkaz. Nech L, N nie sú rovnobežné; potom existuje $\vec{a} \in \vec{L}$, ktorý nie je z $\vec{N}$, preto $< \vec{a} > + \vec{N} = \vec{P}$ čo implikuje $\vec{L} + \vec{N} = \vec{P}$ a podľa Dôsledku 2.7 L, N sa pretínajú; Zvyšná časť tejto vety vyplýva z Vety 2.5.

Veta 4.4 *Nech L, M sú disjunktné podpriestory af.pr. P a $A \in L, B \in M$ sú ľubovoľné body. Potom*

(i) $A+\vec{L}+\vec{M},\ B+\vec{L}+\vec{M}$ *sú disjunktné rovnobežné podpriestory*
(ii) $A+\vec{L}+\vec{M}, M$ *sú disjunktné rovnobežné podpriestory.*

Dôkaz. (i) Urobíme nepriamo; nech priestory z (i) nie sú disjunktné. Podľa Vety 2.6 $\overrightarrow{AB} \in \vec{L}+\vec{M}+\vec{L}+\vec{M}=\vec{L}+\vec{M}$, odkiaľ opäť podľa tej istej vety sa $\vec{L}, \vec{M}$ pretínajú čo odporuje predpokladu. Tvrdenie (ii) vyplýva priamo z (i) je totiž $M \subset B+\vec{L}+\vec{M}$.

Konštrukcia podpriestorov

Podpriestor L afinného priestoru P považujeme za zostrojený, ak je daná jeho neprázdna množina bodov Q a množina vektorov U jeho zamerania tak, že $L=\overline{Q}+\langle U\rangle$. Z Vety 2.16 vyplýva, že podpriestor L afinného priestoru P budeme považovať za zostrojený, ak je daná množina jeho bodov a množina jeho smerových vektorov, ktoré ho určujú jednoznačne. To špeciálne znamená, že priamku považujeme za zostrojenú, ak sú dané dva jej rôzne body alebo je daný jeden jej bod a jeden jej smerový vektor (priamka nie je jednoznačne určená jedným smerovým vektorom!). Ďalej podpriestor L afinného priestoru P považujeme za zostrojený, ak poznáme jeho parametrické alebo všeobecné rovnice.

Priamku, ktorá pretína každý z podpriestorov L, M af.pr. P nazývame *priečka priestorov* L, M.

Príklad 4.5 *V* R_3 *zostrojte priečku* L *priamok* BC, DE *prechádzajúcu bodom* A*, ak sú dané body* $A[2,1,0],\ B[0,2,-1],\ C[-3,-4,11],\ D[1,4,1],\ E[-3,-3,5]$.

Riešenie. Nech $N=\overline{ABC}$. Pretože $A \in L$ a L pretína $\overline{BC} \subset N$, tak $L \subset N$ (priamym výpočtom možno zistiť, že A, B, C sú nekolineárne body). Ak $G=\overline{DE} \cap L$, tak $G \in N$, čiže $G \in \overline{DE} \cap N$. Preto hľadajme priesečník priamky DE s rovinou N. Všeobecnú rovnicu nadroviny N dostaneme, ak rozvinieme determinant v rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & x_2-1 & x_3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 11 \end{vmatrix}=0,$$

je teda $N: 6x_1+27x_2+15x_3-39=0$. Ak parametrické rovnice $x_1=1-4t, x_2=-4+t, x_3=1+4t$ priamky DE dosadíme do rovnice nadroviny N, dostaneme $6(1-4t)+27(-4+t)+15(1+4t)-39=0$, odkiaľ $t=2$, takže $G[-7,-2,9]$. Vektor $\overrightarrow{AG}(-9,-3,9)$ nie je rovnobežný s vektorom $\overrightarrow{BC}(-3,-6,12)$ preto priamka $L=\overline{AG}$ pretína priamku BC, čiže L je hľadaná priečka.

Príklad 4.6 *Nech každý z rôznych bodov* A, B *afinného priestoru* R_n *neinciduje s podpriestorom* L *priestoru* R_n*. Dokážte, že existuje nadrovina* N*, v ktorej* L *leží a body* A, B *neležia.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $L=C+\langle\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s\rangle, dim\,L=s$. Budeme postupovať podľa vzájomnej polohy priamky AB a priestoru L :

$\overline{AB}\|L$: bez ujmy na všeobecnosti položme $\vec{a}_1=\overrightarrow{AB}$; nech $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\dots,\vec{a}_{n-1},\overrightarrow{CA}$ je báza priestoru $\overrightarrow{R_n}$; stačí definovať $N=C+\langle\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_{n-1}\rangle$.

$\overline{AB}\cap L$ je jeden bod, označme ho C. Nech $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_s,\dots,\vec{a}_{n-1},\overrightarrow{CA}$ je báza priestoru $\overrightarrow{R_n}$. Teraz stačí položiť $N=C+\langle\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_{n-1}\rangle$.

$\overline{AB}, L$ sú mimobežné: potom $L'=L+\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ má dimenziu $1+dim\,L$ a $A, B \notin L', \overline{AB}\|L'$ a tak stačí použiť prvý prípad.

Zväzok nadrovín, trs nadrovín, trs priamok

Definícia 4.7 *Nech* P *je afinný priestor o dimenzii* $n \geq 2$*. Množinu všetkých nadrovín priestoru* P*, ktoré incidujú s nejakým jeho podpriestorom* L *dimenzie* $n-2$*, nazývame* vlastný zväzok *nadrovín priestoru* P*;* L *sa nazýva* stred *tohto zväzku. Množinu všetkých navzájom rovnobežných nadrovín priestoru* P *nazývame* nevlastný zväzok *nadrovín priestoru* P*.* Zväzkom *nadrovín nazývame takú množinu nadrovín, ktorá je buď vlastným alebo nevlastným zväzkom nadrovín.* Vlastným trsom priamok *(resp. nadrovín) nazývame množinu všetkých priamok (resp. nadrovín) priestoru* P*, ktoré incidujú s nejakým bodom priestoru* P*.* Nevlastným trsom priamok *(resp. nadrovín) nazývame množinu všetkých priamok (resp. nadrovín) rovnobežných s danou priamkou priestoru* P*.* Trsom *priamok (resp. nadrovín) nazývame takú množinu priamok (resp. nadrovín), ktorá je buď vlastným alebo nevlastným trsom priamok (resp. nadrovín). Nevlastný trs priamok nazývame aj* smer.

Je zrejmé, že ak dimenzia afinného priestoru P je 2, každý jeho trs priamok (nadrovín) je zväzkom nadrovín a obrátene. Pretože neprázdny prienik dvoch rôznych nadrovín n-rozmerného priestoru P má dimenziu $n-2$ tak, každé dve rôzne nadroviny určujú zväzok nadrovín jednoznačne. V prípade, že tieto nadroviny sú rôznobežné (resp. rovnobežné) určujú vlastný (resp. nevlastný) zväzok nadrovín.

Veta 4.8 *Nech $N_1, \ldots, N_s$ sú nadroviny afinného priestoru P, $\dim P = n$, $n \geq 2$, v poradí dané rovnicami*

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + \ldots + d_{n1}x_n + d_{n+1,1} &= 0 \\ &\vdots \\ d_{1s}x_1 + \ldots + d_{ns}x_n + d_{n+1,s} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(i) Sústava $\{N_1, \ldots, N_s\}$ inciduje so zväzkom nadrovín priestoru P práve vtedy, keď

$$\textit{hodnosť} \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{n1} & d_{n+1,1} \\ & \vdots & & \\ d_{1s} & \ldots & d_{ns} & d_{n+1,s} \end{pmatrix} \leq 2 \tag{4.3}$$

(ii) Sústava $\{N_1, \ldots, N_s\}$ inciduje s trsom nadrovín práve vtedy, keď hodnosť matice

$$\begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{n1} \\ & \vdots & \\ d_{1s} & \ldots & d_{ns} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

je menšia ako n alebo sa rovná hodnosti matice zo (4.3).

Dôkaz. (i) Hľadajme prienik daných nadrovín patriacich zväzku; ak je prázdny, môže sa jednať len o nevlastný zväzok nadrovín, v tom prípade musí byť hodnosť matice (4.4) rovná 1 a teda hodnosť matice (4.3) je ≤ 2. Ak ten prienik je neprázdny, je buď nadrovina (nadroviny sú vtedy totožné - ide o nevlastný zväzok nadrovín) vtedy sa hodnosť matice (4.3) rovná 1 alebo prienik nie je nadrovina a vtedy to musí byť podpriestor dimenzie $n-2$. Z Vety 3.6 vyplýva, že hodnosť matice (4.3) musí byť $n-(n-2) = 2$. Dôkaz obrátenej vety je evidentný. (ii) Dané nadroviny patria vlastnému trsu práve vtedy, keď hodnosti matíc (4.3), (4.4) sa rovnajú; dané nadroviny patria nevlastnému trsu jedine vtedy, keď prienik ich zameraní je netriviálny a to nastane práve vtedy, keď hodnosť matice (4.4) je $< n$.

Dôsledok 4.9 *Nadrovina*

$$N : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

patrí do zväzku nadrovín daného nadrovinami

$$N_1 : c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c_{n+1} = 0$$

$$N_2 : d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$$

práve vtedy, keď existujú skaláry t_1, t_2 tak, že

$$t_1N_1 + t_2N_2 = N.$$

(t_1N_1 je rovnica, ktorú dostaneme z rovnice nadroviny N_1 vynásobením skalárom $t_1, \ldots$).

Príklad 4.10 *Vypočítajte rovnicu nadroviny N, ktorá prechádza bodom A a patrí do zväzku nadrovín N_1, N_2, ak $A[5, 7, -6, 95]$, $\quad N_1 \equiv (3, -1, 0, 1, 5)$, $\quad N_2 \equiv (2, 3, -3, 0, 7)$.*

Riešenie. N má rovnicu $t(3x_1 - x_2 + x_4 + 5) + s(2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 7) = 0$. Tejto rovnici musia vyhovovať súradnice bodu A, preto $t(15 - 7 + 95 + 5) + s(10 + 21 + 18 + 7) = 0$, čiže $108t + 56s = 0$, odkiaľ $t = -14$, $s = 27$, $\quad N \equiv (12, 95, -81, -14, 119)$.

Cvičenie

4.1 Zistite, či roviny DAC, BEF sú rovnobežné, keď $D[4,9,13,10]$, $A[2,3,5,4]$, $C[1,6,9,9]$, $B[-1,0,1,3]$, $E[4,15,26,11]$, $F[7,6,14,-4]$.

4.2 Zistite, či priamka AC je rovnobežná s rovinou BDF, keď $A[0,4,9,6]$, $C[5,0,1,-1]$, $F[0,0,5,8]$, $B[1,-2,1,3]$, $D[1,-1,3,6]$.

4.3 Zistite, či priamky K, L sú mimobežné, keď

$$\begin{array}{llll} K: & x_1 = 2+3t & x_2 = 2+4t & x_3 = -1+5t \\ L: & x_1 = -1+t & x_2 = 2+4t & x_3 = -1+5t \end{array}$$

4.4 Zistite, či roviny M, N sú čiastočne mimobežné, keď

$$\begin{array}{lllll} M: & x_1 = 2+2s & x_2 = 2t & x_3 = 1-t+s & x_4 = -1+t+2s \\ N: & x_1 = 4-2s & x_2 = t+4s & x_3 = -3s & x_4 = 1-t \end{array}$$

4.5 Vyšetrite vzájomnú polohu rovín $K: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7 = 0$, $\quad L: 3x_1 - x_2 + 5 = 0$.

4.6 Vypočítajte m, n tak, aby priamky AB, CD, EF patrili trsu priamok, keď $A[2,-1,0]$, $C[-1,0,-12]$, $E[0,1,0]$ $B[3,2,6]$, $D[3,14,-12]$, $F[0,m,n]$.

4.7 Vypočítajte parametrické rovnice priečky mimobežiek AB, CD rovnobežnej s priamkou, ktorej smerový vektor je $\vec{h}$, keď $A[2,4,8,7]$, $C[-1,0,2,0]$, $B[3,5,-3,4]$, $D[-3,1,0,2]$, $\vec{h}(-3.5,1,-18,-2.5)$.

4.8 Vypočítajte p tak, aby priamka AB bola rovnobežná s rovinou $\overline{CDE}$, keď $A[2,4,5]$, $B[2,-1,p]$, $C[0,0,1]$, $D[-1,-1,3]$, $E[2,4,5]$,.

4.9 Zostrojte priečku priamok AB, CD tak, aby prechádzala bodom Q, ak sú dané body $Q[1,0,0]$, $A[2,4,1]$, $B[-1,O,1]$, $C[0,1,0]$, $D[2,4,-2]$.

4.10 Zistite, či existuje priamka prechádzajúca bodom C rovnobežne s rovinami $N = \overline{ABD}$, $M = E + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, keď $A[2,4,5,0]$, $B[-1,2,3,-1]$, $D[2,2,2,2]$, $E[2.4,3.7,-12.5,0]$, $C[1,-1,2,12]$, $\vec{u}(-9,-2,0,-7)$, $\vec{v}(-3,2,4,-5)$.

4.11 Zistite, či priamka AB je mimobežná s rovinou CDE, keď $A[2,0,0,-1]$, $B[-1,2,0,3]$, $C[2,2,1,0]$, $D[1,6,6,-1]$, $E[-2,4,2,0]$.

4.12 Dokážte, že roviny K, L sa pretínajú v priamke; nájdite jej všeobecné i parametrické rovnice.

$$K \equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -19 & -7 \end{pmatrix}$$

4.13 Vyšetrite vzájomnú polohu rovín $K, M \subset R_4$ daných maticami

$$K \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad M \equiv \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.14 Zistite, či rovina $N: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7 = 0$ je rovnobežná s priamkou $L: -x_1 + 5x_2 - x_3 + 4 = 0$, $8x_1 - x_2 + 14x_3 + 1 = 0$.

4.15 V R_2 sú dané priamky K, L všeobecnými rovnicami (v *smernicovom tvare*) $y = kx + q$, $y = ax + b$. Dokážte, že $k = a \Leftrightarrow K \parallel L$.

4.16 Nech A, B, C sú nekolineárne body. Hovoríme, že body A, B, C, D sú *vrcholy rovnobežníka* $ABCD$, ak $\overline{AB} \| \overline{DC}$ a $\overline{AD} \| \overline{BC}$. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné

(i) A, B, C, D sú vrcholy rovnobežníka

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(iii) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

(iv) $A \div C = B \div D$.

4.17 Vypočítajte všeobecnú rovnicu priamky N tak, aby N, L, K patrili zväzku priamok a aby $N \| M$,ak $L: 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$, $K: 3x_1 + 5x_2 + 5 = 0$, $M: 2x_1 - 3 = 0$.

4.18 Vypočítajte a tak, aby K, L, N patrili zväzku rovín, keď

$$\begin{aligned} N: 2x_1+3x_2-x_3+4 &= 0 \\ K: 3x_1-2x_2+8x_3+17 &= 0 \\ L: 11x_1-16x_2+7ax_3+17 &= 0. \end{aligned}$$

4.19 Vypočítajte parametrické rovnice priamky K, ktorá leží v rovine $R = \overline{Q \cap P}$ a je rovnobežná s rovinou $M = A+ < \vec{a}, \vec{b} >$, ak $P \equiv (2,-1,2,0,7)$, $Q \equiv (3,-4,2,1,-1)$, $\vec{a}(-7,4,1,1)$, $\vec{b}(0,4,-2,3)$.

4.20 Vypočítajte všeobecnú rovnicu nadroviny N rovnobežnej s priamkou AB, $A[1,8,0,5]$, $B[9,12,1,-1]$, patriacej zväzku nadrovín určeného nadrovinami $K \equiv (5,0,4,1,-1)$, $L \equiv (7,8,0,5,2)$.

4.21 Vypočítajte súradnice vrcholov rovnobežníka $ABCD$ tak, aby body A, B ležali v rovine $N \equiv (8,2,-7,0,1) \cap (13,-2,0,7,2)$ a body C,D v rovine $M = E+ < \vec{u}, \vec{v} >$, keď $E[1,0,1,0]$, $\vec{u}(2,5,6,-3)$, $\vec{v}(1,9,6,0)$.

4.22 Dané sú nadroviny $M \parallel N$ a priamky $K = \overline{AB} \subset M$, $L = \overline{CD} \subset N$. Vypočítajte parametrické rovnice priestoru $R = N \cap \overline{K \cup L}$, keď $M \equiv 2x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5-20=0$, $C[0,1,-1,1,-1]$, $A[?,1,1,1,1]$, $B[?,1,-1,1,-1]$, $D[?,1,1,1,-1]$.

4.23 Daná je rovina ABC, $A[0,1,2,0]$, $B[-1,2,1,3]$, $C[2,1,0,1]$ a body $E[3,4,5,7]$, $F[2,1,3,-5]$. Vypočítajte súradnice bodu G tak, aby roviny ABC, EFG boli čiastočne mimobežné.

4.24 Dané sú body $A[3,5]$, $A_0[-1,3]$, $A_1[500,1000]$, $A_2[-3,2]$. Nech $A_{2n} \in \overline{AA_0}$, $A_{2n+1} \in \overline{AA_1}$ pre všetky $n \in N$ a nech $\overline{A_0A_1} \parallel \overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_4A_5} \ldots;\quad \overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_3A_4} \parallel \overline{A_5A_6} \ldots$. Vypočítajte súradnice bodu A_{50}.

4.25 Dokážte, že keď $K = A+ < \vec{a} >$, $L = B+ < \vec{b} >$ sú mimobežky, $\vec{c} \neq \vec{o}$ a $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, sú komplanárne vektory, potom neexistuje priečka mimobežiek K, L rovnobežná s $\vec{c}$.

4.26 Ak priamka je rôznobežná s jednou z rovnobežných nadrovín, je rôznobežná aj s druhou nadrovinou. Dokážte!

4.27 Daná je rovina N a bod A. Nech M je zjednotenie všetkých priamok prechádzajúcich bodom A rovnobežne s N. Dokážte, že M je rovina rovnobežná s N.

4.28 Ak L, M, N sú také podpriestory afinného priestoru P, že $L \| M$, $M \| N$ a $dim\, L \leq dim\, M \leq dim\, N$, tak $L \| N$. Dokážte.

4.29 Dokážte, že rovnobežnosť podpriestorov afinného priestoru nie je relácia ekvivalencie!

4.30 Nech S je množina všetkých podpriestorov afinného priestoru, ktorých dimenzia je rovnaká. Dokážte, že rovnobežnosť je na S relácia ekvivalencie.

4.31 Dané sú tri priamky, každé dve z nich sú rôznobežné. Dokážte, že dané priamky ležia v jednej rovine alebo incidujú s nejakým trsom priamok.

4.32 Dané sú dve mimobežky K, L a ich rôzne priečky M, N. Vyšetrite vzájomnú polohu priamok M, N.

4.33 Nájdite najmenšiu dimenziu afinného priestoru tak, aby v ňom existovali mimobežné roviny. Prečo v trojrozmernom afinnom priestore nemôžu byť dve roviny mimobežné?

4.34 Aká je najmenšia možná dimenzia afinného priestoru P, ak v ňom existujú mimobežné priestory dimenzií r, s ?

4.35 Nech K, L sú podpriestory af. pr. P a nech $K \cup L$ je podpriestor priestoru P. Dokážte, že K, L incidujú.

4.36 Dokážte, že keď nadrovina N je disjunktná s podpriestorom K, tak $N \| K$.

4.37 Nech K, L sú podpriestory af. pr. P. Dokážte, že $K + \overrightarrow{L}$ je najmenší podpriestor (t.j. má najmenšiu možnú dimenziu) af.priestoru P, ktorý obsahuje K a je rovnobežný s L.

4.38 V R_6 zostrojte taký trojrozmerný podpriestor K a rovinu N, aby

(i) $K \cap N$ bola priamka, alebo

(ii) K, N boli čiastočne mimobežné.

4.39 Dokážte, že ak dva podpriestory afinného priestoru sú čiastočne mimobežné, tak ani jeden z nich nie je priamka.

4.40 Dokážte, že ak podpriestory K, L afinného priestoru P sú mimobežné, ani jeden z nich nie je nadrovina priestoru P.

4.41 Dokážte, že ak K, L, M sú podpriestory afinného priestoru, platí implikácia:
$$L \cap M \neq \emptyset \text{ a } K \| L \text{ a } K \| M \Rightarrow \ K \| \overline{L \cup M}.$$

4.42 Dokážte, že neplatí veta: Ak priamka je rôznobežná s jedným z rovnobežných podpriestorov, tak je rôznobežná aj s druhým podpriestorom.

4.43 Dokážte, že keď existuje priamka rovnobežná s dvomi rôznobežnými rovinami, potom dimenzia prieniku týchto rovín je aspoň 1.

4.44 Nech K, L sú podpriestory priestoru R_n a nech $n \leq dim\, K + dim\, L$. Dokážte, že K, L nie sú mimobežné.

4.45 Nech M je neprázdna podmnožina afinného priestoru P. Dokážte, že pre každé $A \in P$ a každé $B \in M$
$$\langle M - A \rangle = \langle M - B \rangle + \langle B - A \rangle.$$

4.46 Nech K, L, M sú také podpriestory afinného priestoru P, že L, M pretínajú K. Dokážte, že
$$L \| M \ \Rightarrow \ (K \cap L) \parallel (K \cap M).$$

4.47 Nech M, N sú dve roviny v R_4, ktoré sa pretínajú v bode O. Nech A je ľubovoľný bod z R_4, $A \notin M \cup N$. Nech $B \in N$, $C \in M$ sú také body, že $\overline{AB} \parallel M$ a $\overline{AC} \parallel N$. Dokážte, že $BACO$ je rovnobežník.

4.48 Nech $L, M \subset\subset R_n$. Dokážte, že
$$L \parallel M \Leftrightarrow \dim(\vec{L} + \vec{M}) = max\{\dim L, \dim M\}.$$

4.49 Roviny M, N v R_4 sa nepretínajú; dokážte, že v každej z nich existuje priamka rovnobežná s druhou z nich. Aká je vzájomná poloha týchto rovín?

4.50 Nech podpriestory M, N afinného priestoru P nie sú rovnobežné, N je nadrovina. Dokážte, že $\dim(M \cap N) = \dim M - 1$.

4.51 Dokážte, že ak existuje priamka rovnobežná s 2-mi disjunktnými nerovnobežnými rovinami, tak tieto roviny sú čiastočne mimobežné.

4.52 Dokážte, že v $R_n,\ n > 3$ neplatí veta: Ak je rovina rôznobežná s jedným z dvoch rovnobežných podpriestorov priestoru R_n, tak je rôznobežná aj s druhým podpriestorom.

5 Deliaci pomer

Deliaci pomer ako invariant

Definícia 5.1 *Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne kolineárne body afinného priestoru P. Skalár d nazývame* deliaci pomer *(alebo podielový pomer) usporiadanej trojice (A, B, C), ak*
$$\overrightarrow{CA} = d\overrightarrow{CB} \qquad (\ t.j.\ \overrightarrow{AC} = d\overrightarrow{BC}); \tag{5.1}$$
označenie: $(ABC) = d$.

Z tejto definície priamo vyplýva, že deliacim pomerom môže byť ľubovoľný skalár rôzny od 0 a 1. Keď $(ABC) = 2$ t.j $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$, potom $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA}$ t.j. $(BAC) = 2^{-1}$. To znamená, že zmena poradia bodov má vplyv na deliaci pomer. Pre tri kolineárne pevne zvolené body A, B, C možno uvažovať o týchto deliacich pomeroch: $(ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA)$. V akom vzťahu sú ľubovoľné dva z nich, dá sa zistiť pomocou nasledujúcich dvoch rovností, dôkaz ktorých prenechávame čitateľovi.

$$(BAC) = (ABC)^{-1} \tag{5.2}$$
$$(ACB) = 1 - (ABC), \tag{5.3}$$

Úloha 5.2 *Dokážte, že pre každé tri rôzne kolineárne body A, B, C*

$$\begin{aligned}(BCA) &= 1 - (ABC)^{-1}\\ (CBA) &= (ABC)((ABC) - 1)^{-1}\\ (CAB) &= (1 - (ABC))^{-1}.\end{aligned}$$

Úloha 5.3 *Dokážte, že $(ABX) = (ABY) \Rightarrow X = Y$.*

Ak $(ABS) = d$, $(BCS) = c$, tak $\overrightarrow{AS} = d.\overrightarrow{BS} = cd.\overrightarrow{CS}$ a to znamená, že

$$(ABS).(BCS) = (ACS) \quad \text{alebo} \quad (ABS).(BCS) = 1 \tag{5.4}$$

pre ľubovoľné kolineárne body A, B, C, D, S, pre ktoré sú definované príslušné deliace pomery.

Je zrejmé, že keď bod S je stred dvojice rôznych bodov (A, B), potom $(ABS) = -1$ a obrátene.

Nech $(ABE) = d$, $C = A + \vec{v}$, $D = B + \vec{v}$, $F = E + \vec{v}$ t.j. body C, D, F sú v poradí obrazy bodov A, B, E v translácii o vektor $\vec{v}$; potom $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF}$ a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EF}$, odkiaľ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$, takže $(ABE) = (CDF)$. To znamená, že platí

Veta 5.4 *Deliaci pomer je invariant každej translácie.*

Veta 5.5 *Nech na rôznych priamkach K resp. K', pretínajúcich sa v bode A, sú dané body B, C resp. B', C' rôzne od A tak, že $\overrightarrow{BB'} \| \overrightarrow{CC'}$; potom*

(i) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}$ *a* $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{BB'}$
(ii) $(ABC) = d \Rightarrow (AB'C') = d$

Dôkaz.(i) Z predpokladov vyplýva, že existujú skaláry r, m tak, že $\overrightarrow{AC'} = r\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{CC'} = m\overrightarrow{BB'}$. Potom $m(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}) = m\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{AB'} - k\overrightarrow{AB}$, odkiaľ $(m-r)\overrightarrow{AB'} + (k-m)\overrightarrow{AB} = \vec{o}$; A, B, B' sú nekolineárne body, preto $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}$ sú lineárne nezávislé vektory. To znamená, že $m - r = 0 = k - m$, čiže $k = r = m$. (ii) Je zrejmé.

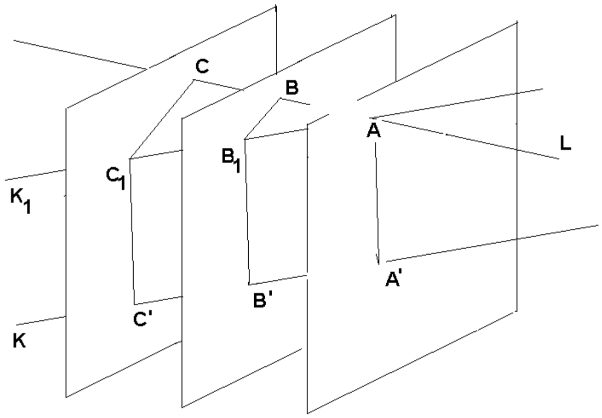
Nasledujúcu vetu možno v istom smere chápať ako obrátenú vetu k predošlej Vete 5.5.

Veta 5.6 *Nech $(ABC) = (AB'C')$ a $B' \notin \overline{AB}$; potom $\overline{BB'} \| \overline{CC'}$.*

Dôkaz. Nech $D \in \overline{AB'}$ je taký bod, že $\overline{BB'} \| \overline{CD}$. Podľa Vety 5.5(ii) $(ABC) = (AB'D)$ a tak aj $(AB'C') = (AB'D)$, odkiaľ $C' = D$, čiže $\overline{BB'} \| \overline{CC'}$.

Nech priamka K je rôznobežná s nadrovinou N v af.priestore P. Zobrazenie $P \rightarrow P$, ktoré priradí bodu X bod $(X + \vec{N}) \cap K$ nazývame *rovnobežné premietanie* s priemetňou K a smerom N.

Veta 5.7 *Rovnobežným premietaním sa deliaci pomer nemení.*



Dôkaz. K vôli presnosti treba doplniť, že v texte tejto vety mlčky predpokladáme, že obrazy uvažovaných bodov nesplývajú. Nech π je rovnobežné premietanie s priemetňou K a smerom N, nech rôzne body A', B', C' sú rovnobežné priemety kolineárnych bodov $A, B, C \in L$. Nech ďalej A_1, B_1, C_1 sú v poradí priesečníky nadrovín $A+\vec{N}$, $B+\vec{N}$, $C+\vec{N}$ s priamkou $K_1 = A+\vec{K}$. Potom $K \| K_1$ a to znamená, že body A_1, B_1, C_1 sú obrazy bodov A', B', C' v translácii o vektor $\overrightarrow{A'A}$; ďalej priamky K_1, L ležia v jednej rovine a tak na body $A = A_1$, B_1, C_1 a body A, B, C môžme použiť Vetu 5.5. Tým je dôkaz skončený.

Nech $K \parallel K'$ sú rôzne priamky a S bod na nich neležiaci. Nech $A, B, C \in K$ a $A', B', C' \in K'$ sú také body, že priamky $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ prechádzajú bodom S (vtedy hovoríme, že A', B', C' sú stredové priemety bodov A, B, C); potom $(ABC) = d \Rightarrow (A'B'C') = d$. Skutočne, nech $\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$. Podľa Vety 5.5 $\overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC'} = k\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{C'B'} = k\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'A'} = k\overrightarrow{CA}$. Z rovnosti $(ABC) = d$ vyplýva $\overrightarrow{CA} = d\overrightarrow{CB}$. Máme $\overrightarrow{C'A'} = k\overrightarrow{CA} = kd\overrightarrow{CB} = dk\overrightarrow{CB} = d\overrightarrow{C'B'}$ t.j. $(A'B'C') = d$. Tým je dokázaná

Veta 5.8 *Stredovým premietaním priamky na priamku s ňou rovnobežnú sa deliaci pomer nemení.*

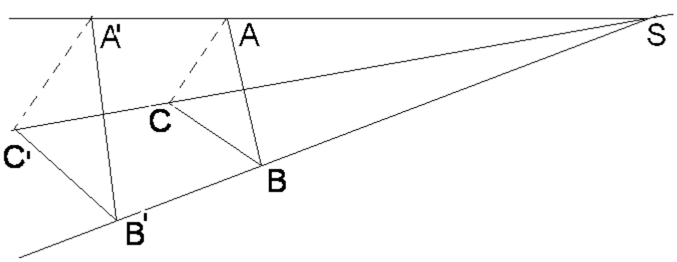
Niekoľko viet

Veta 5.9 *(Desarguesova malá) Nech na navzájom rôznych rovnobežných priamkach K, L, M sú v poradí dané body A, A' resp. B, B' resp. C, C' tak, že $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$ a $\overline{BC} \| \overline{B'C'}$; potom $\overline{AC} \| \overline{A'C'}$.*

Dôkaz. Zrejme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$; sčítaním týchto rovností dostaneme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Veta 5.10 *(Desarguesova veľká) Nech na navzájom rôznych priamkach K, L, M prechádzajúcich bodom S sú v poradí dané body A, A' resp. B, B' resp. C, C' tak, že $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$ a $\overline{BC} \| \overline{B'C'}$; potom $\overline{AC} \| \overline{A'C'}$.*

Dôkaz. Podľa Vety 5.5 $\overrightarrow{SC'} = k\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$, preto $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{SA'} - \overrightarrow{SC'} = k\overrightarrow{SA} - k\overrightarrow{SC} = k(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}) = k\overrightarrow{CA}$.

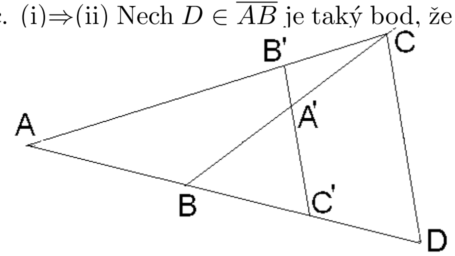


Veta 5.11 *(Menelaova) Nech A, B, C sú nekolineárne body afinného priestoru P a nech $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{AC}$, $C' \in \overline{AB}$ sú také body, že $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(i) A', B', C' *sú kolineárne*

(ii) $(BCA')(CAB')(ABC') = 1$.

Dôkaz. Označme $(BCA') = a, (CAB') = b, (ABC') = c$. (i)$\Rightarrow$(ii) Nech $D \in \overline{AB}$ je taký bod, že $\overline{A'C'} \| \overline{CD}$; potom $(DAC') = (CAB') = b, (BDC') = (BCA') = a$; $\overrightarrow{BC'} = a.\overrightarrow{DC'} = ab\overrightarrow{AC'} = abc\overrightarrow{BC'}$, odkiaľ $abc = 1$. (ii)$\Rightarrow$(i) Nech $\overline{B'A'} \cap \overline{AB} = C''$. Podľa (i)$\Rightarrow$(ii) $(BCA')(CAB')(ABC'') = 1$ a po porovnaní s (ii) dostávame $(ABC'') = (ABC')$ teda $C' = C''$.

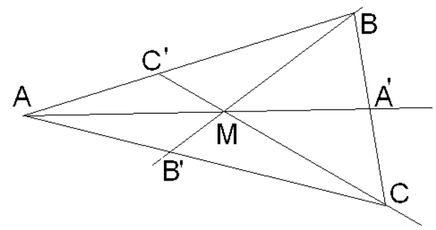


Veta 5.11(i)⇒(ii) je známa pod menom Menelaova a Veta 5.11(ii)⇒(i) pod menom obrátená veta Menelaova.

Veta 5.12 *(Cevova) Nech A, B, C sú nekolineárne body afinného priestoru P a nech $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{AC}$, $C' \in \overline{AB}$ sú také body, že $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(i) *priamky AA', BB', CC' incidujú so zväzkom priamok*

(ii) $(BCA')(CAB')(ABC') = -1$.



Dôkaz. (i)⇒(ii) Dôkaz prevedieme len pre vlastný zväzok priamok. Predpokladajme, že $M = \overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'}$. Podľa Menelaovej vety pre body B, B', A resp. B, B', C je

$$\begin{aligned}
(BB'M)(B'AC)(ABC') = \quad 1 \quad &= (B'CA)(CBA')(BB'M) \\
(ABC')(BCA') \quad &= \quad (AB'C)(B'CA) \\
-//- \quad &= \quad \left(1 - \frac{1}{(CAB')}\right)\frac{1}{1-(CAB')} \\
-//- \quad &= \quad -\frac{1}{(CAB')} \\
(ABC')(BCA')(CAB') \quad &= \quad -1
\end{aligned}$$

(ii)⇒(i) dokážeme analogicky ako obrátenú vetu Menelaovu.

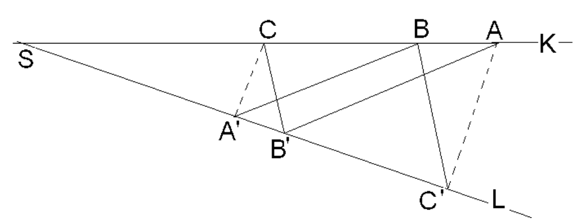
Lema 5.13 *Nech $K \| L$ sú rôzne rovnobežné priamky afinného priestoru P a nech $A_1, A_2, A_3 \in K$, $B_1, B_2, B_3 \in L$ sú také body, že $(A_1A_2A_3) = (B_1B_2B_3)$; potom priamky A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 incidujú so zväzkom priamok.*

Dôkaz. Nech $\overline{A_1B_1} \cap \overline{A_2B_2} = S$ a $\overline{SA_3} \cap L = D$. Podľa Vety 5.8, $(A_1A_2A_3) = (B_1B_2D)$, takže $(B_1B_2B_3) = (B_1B_2D)$, čo implikuje $B_3 = D$, čiže $S \in \overline{A_3B_3}$. Ak by niektoré dve z priamok A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 boli rovnobežné, tak sú rovnobežné každé dve. V opačnom prípade by sa dve pretínali (v bode S) a podľa prvej časti tohto dôkazu by aj tretia prechádzala bodom S.

Veta 5.14 *(Malá Pappova) Nech na rôznych rovnobežných priamkach K, L sú dané body A, B, C resp. A', B', C' tak, že $\overline{AB'} \| \overline{A'B}$, $\overline{BC'} \| \overline{B'C}$; potom $\overline{AC'} \| \overline{A'C}$.*

Dôkaz. Zrejme $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA'}$ a $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{C'B}$, sčítaním týchto rovností dostávame $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$, odkiaľ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CA'}$.

Veta 5.15 *(Veľká Pappova) Nech na rôznobežných priamkach K, L pretínajúcich sa v bode S sú dané body A, B, C resp. A', B', C' rôzne od S tak, že $\overline{AB'} \| \overline{A'B}$, $\overline{BC'} \| \overline{B'C}$; potom $\overline{AC'} \| \overline{A'C}$.*



Dôkaz. Zrejme $\overrightarrow{SB} = p\overrightarrow{SA} \Rightarrow \overrightarrow{SA'} = p\overrightarrow{SB'}$ a $\overrightarrow{SC} = q\overrightarrow{SB} \Rightarrow \overrightarrow{SB'} = q\overrightarrow{SC'}$. Potom $\overrightarrow{SC} = q\overrightarrow{SB} = qp\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SA'} = p\overrightarrow{SB'} = pq\overrightarrow{SC'}$.

Cvičenie

5.1 V R_3 sú dané body $A[2,5,3]$, $B[-1,2,3]$. Vypočítajte deliace pomery (ABX_i), ak X_i, je priesečník priamky AB so súradnou rovinou $\omega_i: \ x_i = 0, \ i = 1,2,3$.

5.2 Dané sú deliace pomery $(ABC) = \frac{5}{3}, (BCD) = \frac{5}{2}$. Vypočítajte (DAC), (ABD).

5.3 Dané sú body A, B, C. Nech D, E, F sú v poradí stredy dvojíc (A, B), (B, C), (C, A). Dokážte, že stredy dvojíc (D, C), (F, E) splývajú.

5.4 V R_3 (resp. R_4) je daná priamka K a rovina N. Akú množinu tvoria stredy všetkých dvojíc (X, Y), $X \in K$, $Y \in N$? Urobte diskusiu vzhľadom na vzájomnú polohu priamky K a roviny N.

5.5 V R_2 sú dané body A, B, C, D. Nech E, F, G, H sú v poradí stredy dvojíc (A, B), (B, C), (C, D), (D, A). Dokážte, že E, F, G, H sú vrcholy rovnobežníka alebo ležia na jednej priamke.

5.6 Dané sú nekolineárne body A, B, C. Nech X, Y sú také body, že $(ABX).(CAY) = -1$. Dokážte, že všetky priamky XY patria trsu priamok.

5.7 Nech $A \neq B$ sú body afinného priestoru R_n. Dokážte, že $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X; (ABX) \in R\}$.

5.8 Nech A, B, C sú nekolineárne body a nech X, Y sú také body, že $(BCX)(CAY) = 1$. Dokážte, že $\overline{XY} \| \overline{AB}$.

5.9 Nech A, B, C, D sú po dvoch rôzne body priamky L ležiacej v rovine P. Skalár

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = (ABCD)$$

nazývame *dvojpomer* štvorice bodov A, B, C, D v tomto poradí. Nech $F \notin L$ je ľubovoľný bod, $L_1 = \overline{FA}$, $L_2 = \overline{FB}$, $L_3 = \overline{FC}$, $L_4 = \overline{FD}$. Dokážte, že $(ABCD) = (L_1 L_2 L_3 L_4)$ (viď cvičenie 2.13).

5.10 Nech A, B, C, D sú po dvoch rôzne kolineárne body a nech $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BD|}$. Vypočítajte $\dfrac{(CDA)}{(CDB)}$.

6 Usporiadané afinné priestory

Relácia "leží medzi"

Nech $(ABC) = d$ (čiže $\overrightarrow{AC} = d\overrightarrow{BC}$), kde A, B, C sú body roviny (školskej) E_2. Ak bod C "leží medzi" bodmi A, B, vektory $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ sú "opačne orientované" a preto d je záporné číslo. Aby sme mohli hovoriť o relácii "leží medzi" musia existovať záporné a teda aj kladné skaláry. Také polia skalárov sa nazývajú usporiadané. Medzi polia, ktoré sa dajú usporiadať patrí napríklad pole všetkých reálnych čísel, medzi polia, ktoré sa nedajú usporiadať patria všetky polia zvyškových tried podľa prvočíselných modulov a pole komplexných čísel.

Úloha 6.1 *Nech d je prvok usporiadaného poľa. Dokážte, že*

$$d < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{d}{d-1} < 1.$$

Úloha 6.2 *Dokážte, že v usporiadanom poli platí*

$$0 \le d \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le e \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le (1-e) + ed \le 1.$$

Definícia 6.3 *Nech pole skalárov afinného priestoru P je usporiadané a nech $A, B, C \in P$. Budeme hovoriť, že bod C* leží medzi *bodmi A, B, ak $(ABC) < 0$; symbolicky zapisujeme $C\,m\,AB$. Ak B neleží medzi A, C, píšeme $B \ \bar{m} \ AC$.*

m je teda ternárna relácia na afinnom priestore; nazývame ju relácia usporiadania; symbol $CmAB$ znamená, že body A, B, C sú kolineárne a po dvoch rôzne. Afinný priestor, v ktorom je definovaná relácia usporiadania nazývame *usporiadaný.* afinný priestor. V celom tomto článku predpokladáme o afinných priestoroch, že sú usporiadané reláciou usporiadania m.

Veta 6.4 *Nech A,B,C sú body usporiadaného af.priestoru. Potom*

$$CmAB \Leftrightarrow CmBA \tag{6.1}$$

$$CmAB \Rightarrow A\,\bar{m}\,BC \quad \wedge \quad B\,\bar{m}\,AC \tag{6.2}$$

$$CmAB \Leftrightarrow \exists k \in (0,1) : \overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB} \tag{6.3}$$

Dôkaz. Dokážeme len (6.3) (ostatné prenechávame čitateľovi): $(ABC) = d \Leftrightarrow (CBA) = d(d-1)^{-1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = d(d-1)^{-1}.\overrightarrow{AB}$; teraz stačí použiť úlohu 6.1.

Veta 6.5 *Relácia usporiadania afinného priestoru je invariant translácie o ľubovoľný vektor.*

Dôkaz. Priamo vyplýva z Vety 5.4.

Definícia 6.6 *Podpriestor L afinného priestoru P* oddeľuje *body $A, B \in P$, ak existuje práve jeden bod $C \in L$ tak, že $CmAB$; označenie $LmAB$. Podpriestor L afinného priestoru P neoddeľuje body $A, B \in P$, ak nie je pravda, že ich oddeľuje; označenie $L\,\bar{m}\,AB$.*

Pretože v usporiadanom poli je $1 \neq -1$, tak pre každé dva rôzne body A, B afinného priestoru P existuje bod C tak, že $(ABC) = -1$, čiže existuje stred dvojice A, B, ktorý nesplýva ani s jedným z nich. Ak ďalej D je stred dvojice A, C, tak $DmAC$, $D \notin \{A, B, C\}$. Takto môžeme postupovať neobmedzene. To znamená, že medzi dvomi rôznymi bodmi existuje nekonečne mnoho bodov. Teda usporiadaný afinný priestor má ∞ mnoho bodov.

Ak podpriestor L afinného priestoru P oddeľuje body A, B, tak $A \notin L$, $B \notin L$ a $A \neq B$. Ak by totiž $A \in L$ a $C \in L$ tak, že $CmAB$, potom $B \in L$ a preto medzi bodmi A, B by existovalo ∞ mnoho bodov priestoru L.

Polpriestory

Nech A, C sú body usporiadaného afinného priestoru P. Budeme používať tieto označenia

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle^+ = \{d.\overrightarrow{AC}; d \geq 0\} \qquad \langle\overrightarrow{AC}\rangle^- = \{d.\overrightarrow{AC}; d \leq 0\}.$$

ľahko sa dá overiť, že

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle^+ \cup \langle\overrightarrow{AC}\rangle^- = \langle\overrightarrow{AC}\rangle \tag{6.4}$$

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle^+ + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^- = \langle\overrightarrow{AC}\rangle \tag{6.5}$$

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle^+ \cap \langle\overrightarrow{AC}\rangle^- = \{\vec{o}\} \tag{6.6}$$

$$\langle\vec{u} + \vec{v}\rangle^+ \subset \langle\vec{u}\rangle^+ + \langle\vec{v}\rangle^+ \tag{6.7}$$

$$\langle\vec{u} + \vec{v}\rangle^- \subset \langle\vec{u}\rangle^- + \langle\vec{v}\rangle^- \tag{6.8}$$

$$t > 0 \Rightarrow \langle t.\vec{u}\rangle^+ = \langle\vec{u}\rangle^+ \tag{6.9}$$

Definícia 6.7 *Nech L je podpriestor afinného priestoru P, $A \in L$ a nech $C \in P$ neleží v L. Množinu $L + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+$ nazývame polpriestor (v priestore P). L je* hranica*, každý jej bod je* hraničný*, ostatné body sú* vnútorné body *tohto polpriestoru. Množinu všetkých vnútorných bodov polpriestoru nazývame* vnútro *tohto polpriestoru alebo* otvorený *polpriestor. Keď L oddeľuje body C, E, potom polpriestory $L + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+$, $L + \langle\overrightarrow{AE}\rangle^+$, nazývame* opačné polpriestory*. Polpriestor, ktorého hranica je bod, priamka, v poradí nazývame* polpriamka*,* polrovina*.*

Nech N je nadrovina o rovnici $d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$. Pre každé $X = [x_1, \ldots, x_n]$ budeme označovať

$$f(X) = d_1x_1 + \ldots + d_nx_n \qquad F(X) = d_1x_1 + \ldots + d_nx_n + d_{n+1}.$$

Priamym výpočtom sa ľahko ukáže

Lema 6.8 *Pre ľubovoľnú konečnú sústavu bodov $A, B, C, D, E, \ldots \in P$ a ľubovoľné skaláry $t, s, \ldots$*

$$\begin{aligned} f(A + t\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{DE} + \ldots) &= f(A) + t(f(C) - f(B) + s(f(E) - f(D)) + \ldots \\ F(A + t\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{DE} + \ldots) &= F(A) + t(F(C) - F(B) + s(F(E) - F(D)) + \ldots . \end{aligned}$$

Veta 6.9 *Nech $N \equiv (d_1, \ldots, d_{n+1})$ je nadrovina afinného priestoru P a nech*

$$K = \{X[x_1, \ldots, x_n]; \quad d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} \geq 0\}$$

$$M = \{X[x_1, \ldots, x_n]; \quad d_1x_1 + \ldots + d_nx_n + d_{n+1} \leq 0\}.$$

Potom K, M sú polpriestory so spoločnou hranicou (je ňou nadrovina N), ktorých zjednotenie je P, prienik N a ktoré sú navzájom opačné polpriestory.

Dôkaz. Nech $N = A + < \overrightarrow{AA_1}, \ldots, \overrightarrow{AA_{n-1}} >$ a $C \in K \setminus N$. Potom $F(A) = F(A_1) = \ldots = F(A_{n-1}) = 0$, $F(C) > 0$ a $A, A_1, \ldots, A_{n-1}, C$ je simplex priestoru P. Preto pre každé $X \in P$ platí

$$\begin{aligned} X &= A + t_1\overrightarrow{AA_1} + \ldots + t_{n-1}\overrightarrow{AA_{n-1}} + t_n\overrightarrow{AC} \\ F(X) &= F(A) + t_1(F(A_1) - F(A)) + \ldots + t_{n-1}(F(A_{n-1}) - F(A)) + t_n(F(C) - F(A)) = t_nF(C) \end{aligned}$$

Je zrejmé, že

$$X \in N + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+ \Leftrightarrow t_n \geq 0 \Leftrightarrow t_nF(C) \geq 0 \Leftrightarrow F(X) \geq 0 \Leftrightarrow X \in K$$

odkiaľ $N + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+ = K$, čiže K je polpriestor. Množina $K = N + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+$ nezávisí teda na voľbe bodov A, C (A volíme v N, C v $int\, K$), preto kladieme $\overleftarrow{NC} = N + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+$. Ďalej dokážeme, že M je polpriestor; zrejme $M = \{X; -F(X) \geq 0\}$ a preto podľa prvej časti dôkazu M je polpriestor s hranicou $N \equiv (-d_1, \ldots, -d_{n+1})$. Aby sme ukázali, že K, M sú opačné polpriestory zvoľme body $C \in int\, K$, $D \in int\, M$. Nech $X = D + t\overrightarrow{DC}$, potom rovnica $F(X) = 0$ má riešenie $t = \dfrac{F(D)}{F(D) - F(C)} = \dfrac{1}{1 - F(C)/F(D)} \in (0, 1)$, čiže N oddeľuje body C, D.

Dôsledok 6.10 *Nech N je nadrovina afinného priestoru P. Existujú práve dva polpriestory s hranicou N. Sú to opačné polpriestory; ak C je vnútorný bod jedného z nich a D vnútorný bod druhého z nich, existuje práve jeden bod nadroviny N, ktorý leží medzi C, D.*

Veta 6.11 *Každý polpriestor je jednoznačne určený svojou hranicou a ľubovoľným svojim vnútorným bodom (t.j. $D \in int\, \overleftarrow{LC} \Rightarrow \overleftarrow{LC} = \overleftarrow{LD}$). K danému polpriestoru existuje práve jeden opačný polpriestor; ich zjednotenie je afinný priestor, ich prienik je spoločná hranica.*

Dôkaz. Nech $\overleftarrow{LC}$ je ľubovoľný polpriestor a $Q = \overline{L \cup C}$. Zrejme $\overleftarrow{LC}$ leží v Q a jeho hranica je nadrovina v Q; možno preto použiť dôsledok 6.10.

Rovnice polpriestoru

Ak $\overleftarrow{LC}$ je polpriestor a $L = A + \langle\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s\rangle$, tak z Definície 6.7 vyplýva

$$\overleftarrow{LC} = A + \langle\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s\rangle + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+. \tag{6.10}$$

To znamená, že $X \in \overleftarrow{LC}$ práve vtedy, keď existujú skaláry $t_1, \ldots, t_s, r$, pričom $r \geq 0$ tak, že

$$X = A + t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_s\vec{v}_s + r\overrightarrow{AC}. \tag{6.11}$$

V prípade, že $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s, \overrightarrow{AC}$ je lineárne nezávislá sústava, rovnicu (6.11) nazývame *vektorová rovnica* polpriestoru $\overleftarrow{LC}$. Ak ju rozpíšeme do súradníc dostaneme tzv. *parametrické rovnice* polpriestoru $\overleftarrow{LC}$. Ak $\overleftarrow{AB}$ je polpriamka, tak podľa (6.10) $\overleftarrow{AB} = \{A + k.\overrightarrow{AB}; k \geq 0.\}$ Ak L je nadrovina o rovnici $d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$ a $F(C) > 0$, tak

$$X[x_1, \ldots, x_n] \in \overleftarrow{LC} \Leftrightarrow d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} \geq 0,$$

túto nerovnicu nazývame *všeobecná nerovnica polpriestoru*(ktorého hranica je nadrovina).

Konvexnosť množín

Definícia 6.12 *Nech A, B sú body afinného priestoru P. Množinu $\{A, B\} \cup \{X; XmAB\}$ nazývame* úsečka *AB a označujeme $\overset{\vdash\!\dashv}{AB}$. Body A, B nazývame* krajné body *úsečky $\overset{\vdash\!\dashv}{AB}$ a ostatné jej body sú vnútorné. Množinu všetkých vnútorných bodov úsečky nazývame* vnútro úsečky*, alebo* otvorená úsečka*.*

Z tejto definície priamo vyplýva, že $\overset{\vdash\!\dashv}{AB} = \overset{\vdash\!\dashv}{BA}$. Z ekvivalencie (6.3) vyplýva

$$\overset{\vdash\!\dashv}{AB} = \{A + k\overrightarrow{AB}; k \in <0, 1>\} = A + <0, 1> \overrightarrow{AB}. \qquad (6.12)$$

Úloha 6.13 *Dokážte implikáciu: $C, D \in \overset{\vdash\!\dashv}{AB} \Rightarrow \overset{\vdash\!\dashv}{CD} \subset \overset{\vdash\!\dashv}{AB}$.*

Lema 6.14 *Pre každé dva rôzne body A, B je $\overset{\vdash\!\dashv}{AB} = \overset{\vdash\!-}{AB} \cap \overset{\vdash\!-}{BA}$.*

Dôkaz. Rovnosť dvoch množín dokážeme pomocou dvoch inklúzií. Prvá inklúzia $\overset{\vdash\!\dashv}{AB} \supset \overset{\vdash\!-}{AB} \cap \overset{\vdash\!-}{BA}$: $X \in \overset{\vdash\!-}{AB} \Rightarrow X = A + k\overrightarrow{AB}, k \geq 0$, $X \in \overset{\vdash\!-}{BA} \Rightarrow X = B + r\overrightarrow{BA}, r \geq 0$, odčítaním posledných dvoch rovností dostávame $\vec{o} = B - A + r\overrightarrow{BA} - k\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{o} = (1 - k - r)\overrightarrow{AB} \Rightarrow k + r = 1 \Rightarrow k \leq 1, r \leq 1$. Obrátená inklúzia $\overset{\vdash\!\dashv}{AB} \subset \overset{\vdash\!-}{AB} \cap \overset{\vdash\!-}{BA}$ je evidentná.

Definícia 6.15 *Podmnožina K afinného priestoru P je* konvexná*, ak pre každé dva jej body A, B: $\overset{\vdash\!\dashv}{AB} \subset K$.*

Veta 6.16 *Každý polpriestor je konvexná množina.*

Dôkaz. Podobne ako v dôkaze Vety 6.11 predpokladajme, že hranica daného polpriestoru H je nadrovina; nech polpriestor H je daný nerovnicou $F(X) \geq 0$ a nech $C, D \in H$, $Z \in \overset{\vdash\!\dashv}{CD}$. Potom $Z = C + r\overrightarrow{CD}$, $r \in \langle 0, 1\rangle$ a $F(Z) = (1 - r)F(C) + rF(D)$, keďže každý sčítanec je súčin nezáporných čísel je $F(Z) \geq 0$ čo implikuje $Z \in H$.

Dôkaz nasledujúcej vety prenechávame čitateľovi .

Veta 6.17 *Prienik ľubovoľného systému konvexných množín je konvexná množina.*

Konvexné obaly

Definícia 6.18 *Nech M je podmnožina afinného priestoru P. Prienik všetkých konvexných podmnožín priestoru P, ktoré obsahujú množinu M nazývame* konvexný obal *množiny M; označenie $\overset{\vdash\!\dashv}{M}$. Množina bodov M je* konvexne závislá*, ak aspoň jeden jej bod je z konvexného obalu ostatných jej bodov. Množina je* konvexne nezávislá*, ak nie je konvexne závislá.*

Definícia 6.19 *Konvexný obal neprázdnej konečnej množiny bodov nazývame* konvexný mnohosten *(skrátene len mnohosten). Bod A mnohostena M je jeho* vrcholom*, keď $M \backslash \{A\}$ je konvexná množina. úsečka AB, ktorej krajné body sú dva rôzne vrcholy mnohostena sa nazýva jeho* hrana*, ak tento mnohosten bez úsečky AB je konvexná množina. Mnohosten, ktorý má n vrcholov a leží v rovine nazývame* n-uholník*. úsečka AB je* strana n-uholníka*, ak A, B sú jeho rôzne vrcholy a tento n-uholník leží v polrovine s hranicou $\overline{AB}$; $A_1 \dots A_n$ je označenie n-uholníka, ktorý má strany A_1A_2, A_2A_3, $\dots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1. Ak M je n-uholník a $n = 3, 4, 5, \dots$ potom M je v poradí* trojuholník, štvoruholník, päťuholník, *$\dots$ Trojuholník označujeme tiež $\triangle ABC$. Štvoruholník, ktorý má práve dve strany rovnobežné (presnejšie priamky, na ktorých ležia strany) nazývame* lichobežník*. Štvoruholník, ktorý má dva páry rovnobežných strán nazývame* rovnobežník.

Definícia 6.20 *Nech bod V neleží v rovine n-uholníka $A_1 \dots A_n$. Konvexný obal množiny $V, A_1, \dots, A_n$ nazývame n-boký* ihlan*; V je hlavný vrchol, $A_1, \dots, A_n$ sú vrcholy tohto ihlana. Trojuholníky VA_iA_{i+1} sú jeho steny, úsečky VA_i, A_iA_{i+1}, pre všetky i (pre indexy platí $n + 1 \equiv 1$) sú jeho hrany, n-uholník $A_1 \dots A_n$ podstava. Trojboký ihlan nazývame* štvorsten.

Definícia 6.21 *Nech $A_1 \dots A_n$, $B_1 \dots B_n$ sú také dva n-uholníky, neležiace v jednej rovine, že $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_jB_j}$ pre všetky i, j. Konvexný obal množiny $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ nazývame hranol. Označenie: $A_1A_2 \dots A_nB_1 \dots B_n$. Body $A_i, B_i \dots$ sú jeho vrcholy, úsečky $A_iA_{i+1}, A_iB_i, B_iB_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$, sú jeho hrany. n-uholníky $A_1 \dots A_n$, $B_1 \dots B_n$ sú podstavy a rovnobežníky $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$, $i = 1, \dots, n$ sú bočné steny. (pre indexy platí $n + 1 \equiv 1$). Hranol, ktorého podstavy sú rovnobežníky nazývame* rovnobežnosten.

Definícia 6.22 *Konvexný obal $(n + 1)$ afinne nezávislých bodov $A_0, A_1, \dots, A_n$ nazývame* n-rozmerný konvexný simplex. *Body $A_0, A_1, \dots, A_n$ sú jeho vrcholy, $(n - 1)$ rozmerné konvexné simplexy $A_{k_o}, A_{k_1}, \dots, A_{k_{n-1}}$, kde $\{k_o, k_1, \dots, k_{n-1}\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ sú jeho steny. Každý bod konvexného simplexu, ktorý neleží v žiadnej jeho stene nazývame vnútorný bod tohto simplexu.*

Príklad 6.23 *Dokážte, že pre ľubovoľné body $A_0, A_1, \dots, A_s$ je*

$$U = \{A_0 + t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_s\overrightarrow{A_0A_s}; \{t_1, \dots, t_s, t_1 + \dots + t_s\} \subset \langle 0, 1\rangle\} \tag{6.13}$$

konvexná množina, do ktorej patria všetky body $A_0, A_1, \dots, A_s$.

Dôkaz. Nech B, C sú ľubovoľné body množiny U a nech $X \in \overline{BC}$. Potom $B = A_0 + b_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + b_s\overrightarrow{A_0A_s}$, $C = A_0 + c_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + c_s\overrightarrow{A_0A_s}$, kde všetky b_i a ich súčet je z intervalu $< 0, 1 >$ a to isté platí aj pre všetky c_i a existuje $t \in (0, 1)$ tak, že $X = B + t\overrightarrow{BC}$. Z poslednej rovnosti máme

$$\begin{aligned} X = B + t(C - B) &= A_0 + (b_1 + t(c_1 - b_1))\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + (b_s + t(c_s - b_s))\overrightarrow{A_0A_s} = \\ & A_0 + ((1 - t)b_1 + tc_1)\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + ((1 - t)b_s + tc_s)\overrightarrow{A_0A_s}, \end{aligned}$$

kde $((1 - t)b_i + tc_i) \in (0, 1)$ pre každé $i = 1, \dots, s$ (skutočne, $(1 - t)b_i + tc_i \leq (1 - t).1 + t.1 = 1$). Podobne

$$\sum_{i=1}^{s}((1 - t)b_i + tc_i) = (1 - t)\sum_{i=1}^{s} b_i + t\sum_{i=1}^{s} c_i \in \langle 0, 1\rangle$$

a to znamená, že $X \in U$. Ďalej, zrejme $b_1 = 1$, $b_2 = 0 \dots$, $b_s = 0$ implikuje $B = A_1$ a teda $A_1 \in U$, atď.

Veta 6.24 *Nech $\{A_0, A_1, \dots, A_s\}$ je ľubovoľná množina bodov afinného priestoru P, $s \geq 0$ ľubovoľné prirodzené číslo. Konvexný obal tejto množiny bodov je množina*

$$\{A_0 + t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_s\overrightarrow{A_0A_s};\ \{t_1, \dots, t_s, t_1 + \dots + t_s\} \subset \langle 0, 1\rangle\}.$$

Dôkaz. Najprv ukážeme, že ľubovoľná konvexná množina, ktorá obsahuje body $A_0, A_1, \dots, A_s$ (označme ju K) obsahuje množinu U z príkladu 6.23; keďže U je konvexná, dôkaz bude hotový. Z toho, že K je konvexná vyplýva:

$$\begin{aligned} A_0,\ A_1 \in K &\ \Rightarrow\ U_1 = \overline{A_0A_1} \subset K \\ A_0,\ A_1,\ A_2 \in K &\ \Rightarrow\ U_2 = \cup\{\overline{XA_2};\ X \in U_1\} \subset K \\ &\ \vdots \\ A_0,\ A_1,\ \dots,\ A_s \in K &\ \Rightarrow\ U_s = \cup\{\overline{XA_s};\ X \in U_{s-1}\} \subset K \end{aligned}$$

Matematickou indukciou (vzhľadom na s) dokážeme, že $U_s = U$. Pre $s = 1$ je tvrdenie zrejmé. Predpokladajme, že $k < s$ a

$$U_k = \{A_0 + t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_k\overrightarrow{A_0A_k};\ \{t_1, \dots, t_s, t_1 + \dots + t_k\} \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Keď $Y \in U_{k+1} = \cup\{\overline{XA_{k+1}}; X \in U_k\}$, existuje $t \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že $Y = X + t\overrightarrow{XA_{k+1}}$, kde podľa indukčného predpokladu $X = A_0 + t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_k\overrightarrow{A_0A_k}$; preto

$$\begin{aligned} Y &= A_0 + t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_k\overrightarrow{A_0A_k} + t((A_{k+1} - A_0) - t_1\overrightarrow{A_0A_1} - \dots - t_k\overrightarrow{A_0A_k}) = \\ &= A_0 + t_1(1 - t)\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_k(1 - t)\overrightarrow{A_0A_k} + t\overrightarrow{A_0A_{k+1}}, \end{aligned}$$

pričom zrejme $t_i(1 - t) \in \langle 0, 1\rangle$ a tiež $t_1(1 - t) + \dots + t_k(1 - t) + t = (t_1 + \dots + t_k)(1 - t) + t \in \langle 0, 1\rangle$.

Cvičenie

6.1 Zistite, či úsečky AC, BD sa pretínajú, keď $A[2,3,1]$, $B[-1,0,4]$, $C[-1,0,1]$, $D[1,2,5]$.

6.2 Zistite, ktorý z podpriestorov K, L priestoru R_3 oddeľuje body $A[2,1,-2]$, $B[14,21,-22]$, keď $K: 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 10 = 0;\quad L: x_1 = 2 + 3t,\quad x_2 = -1 + 7t,\quad x_3 = -2 - 5t.$

6.3 Zistite, či polroviny ABC, DEF sú totožné, keď $A[2,3,1]$, $B[4,5,6]$, $C[2,4,-1]$, $D[0,1,-4]$, $E[-4,-3,-14]$, $F[4,7,2]$.

6.4 Zistite, či body $A[2,0,1,0]$, $B[-3,1,0,2]$, $C[0,0,1,-1]$, $D[-7,2,-1,5]$ sú konvexne závislé.

6.5 Zistite, ktorý z bodov $A[2,4]$, $B[0,1]$ je bodom pásu s hraničnými priamkami $K: 3x_1 + 2x_2 - 7 = 0,\quad L: 3x_1 + 2x_2 + 5 = 0.$

6.6 Zistite, či $D \in \triangle ABC$, ak v R_2 sú dané body $A[2,4]$, $B[2.1, 3.9]$, $C[2.04, 3.95,]$ $D[2.15, 3.97]$.

6.7 Zistite, či nasledujúca množina je pás: $\{[x_1, x_2] \in R_2;\ 2x_1 + 3x_2 - 7 \le 0 \text{ a } x_1 + 2x_2 - 3 \le 0\}$.

6.8 Nech S je pás s hraničnými priamkami $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Dokážte, že množina $S \setminus (\overline{AB} \setminus \{A\})$ je konvexná a že je konvexným obalom množiny $\{A\} \cup \overline{CD}$.

6.9 Dané sú body $A[2,-1,3]$, $B[5,0,3]$, $C[0,3,-3]$, $D[4,2,0]$. Dokážte, že konvexné obaly množín $\overline{AB} \cup C$, $\overline{AB} \cup \overset{\vdash\!\relbar\!\dashv}{CD}$ sú rovnaké.

6.10 Nájdite takú konvexnú množinu M bodov roviny R_2, že existujú 4 priamky, ktoré pretínajú M v poradí, v priamke, polpriamke, otvorenej polpriamke a úsečke.

6.11 Nech $\overset{\vdash\!\relbar\!\relbar}{NA}$ je polpriestor usp.af.pr. P, kde N je nadrovina a nech $K \subset\subset P$. Dokážte, že ak K, $\overset{\vdash\!\relbar\!\relbar}{NA}$ sa pretínajú a neicidujú, tak ich prienik je polpriestor.

6.12 Dokážte, že neprázdny prienik polpriestoru a podpriestoru priestoru R_n je polpriestor alebo podpriestor priestoru R_n.

6.13 Dokážte, že ak polpriamky $\overset{\vdash\!\relbar\!\relbar}{ED}, \overset{\vdash\!\relbar\!\relbar}{DE}$ ležia v polrovine $\overset{\vdash\!\relbar\!\relbar}{ABC}$, tak priamky AB, DE sú rovnobežné. Platí aj opačné tvrdenie?

6.14 Nech $A, B, C, (B \ne C)$ sú ľubovoľné body reálneho afinného priestoru. Dokážte že

(i) $\overline{CB} = \{A + t.\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC};\, t \in R\}$

(ii) $\overset{\vdash\!\relbar\!\relbar}{CB} = \{A + t.\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC};\, t \ge 0\}$

(iii) $\overset{\vdash\!\relbar\!\dashv}{CB} = \{A + t.\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC};\, t \in \langle 0,1\rangle\}$

(iv) $\triangle ABC = \{A + t.\overrightarrow{AB} + s.\overrightarrow{AC};\, \{t+s, t, s\} \subset \langle 0,1\rangle\}$

(v) rovnobežník $ABCD = \{A + t.\overrightarrow{AB} + s.\overrightarrow{AD};\, \{t, s\} \subset \langle 0,1\rangle\}$

6.15 Dokážte, že pre ľubovoľné body A, B, C platí

$$
\begin{aligned}
CmAB &\Leftrightarrow (CAB) \in (0,1)\\
BmAC \text{ a } CmAD &\Rightarrow BmAD\\
BmAC \text{ a } BmAD &\Rightarrow B\,\bar{m}\,CD.
\end{aligned}
$$

6.16 Dokážte, že trojuholník ABC je prienik polrovín ABC, BCA, CAB.

6.17 Výpočtom zistite, či množina $\triangle ABC \cup \triangle ABD$ je konvexná, keď $A[1,0,2,0]$, $B[0,8,8,-1]$, $C[4,12,2,-6]$, $D[5,8,-2,-6]$.

6.18 Vypočítajte všeobecné nerovnice troch polrovín, ktorých prienik je trojuholník ABC, keď $A[7,12]$, $B[-9,20]$, $C[-1,2]$.

6.19 Zistite, či prienikom nasledujúcich 3-och polrovín je trojuholník

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 - 3 & \geq & 0 \\ 8x_1 - x_2 - 51 & \leq & 0 \end{array}$$

6.20 Vypočítajte druhú a tretiu súradnicu bodu $P[1000, ?, ?]$ tak, aby ležal vo vnútri pásu ohraničeného priamkami K, L keď

$$\begin{array}{lrcl} K: & 2x_1 + 3x_2 - 501 = 0 & \cap & x_1 - x_3 = 0 \\ L: & -2x_1 - 3x_2 + 500 = 0 & \cap & x_1 - x_3 = 0 \end{array}$$

6.21 Napíšte parametrické vyjadrenie prieniku konvexného obalu množiny bodov $A[1, 3, 1, -3]$, $B[5, 2, 3, -1]$, $C[-1, -1, 0, -1]$ s polpriestorom $N \equiv (3, 2, -1, 0, 1) \geq 0$.

6.22 Dané sú priamky $L_1 : x_1 = 0$, $L_2 : 3x_1 - 2x_2 = 0$, $L_3 : 2x_1 - 5x_2 = 0$, $L_4 : x_2 = 0$. Nech $A_i \in L_i$, pre všetky i, sú po dvoch rôzne kolineárne body. Zistite, či číslo $\dfrac{(A_1A_2A_3)}{(A_1A_2A_4)}$ závisí na voľbe bodov A_i.

6.23 Zistite, či pre ľubovoľné navzájom rôzne kolineárne body A,B,C,D platí $(ABD)(BCD) = (ACD)$.

6.24 Zistite, či prienik nasledujúcich 4-och polpriestorov priestoru R_3 je štvorsten

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 5 \\ x_2 & \geq & -1 \\ x_3 & \geq & 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 & \geq & 0. \end{array}$$

6.25 V E_n sú dané body $A_1, A_2, \ldots$ tak, že $(A_3A_2A_1) = 3$, $(A_4A_3A_2) = 3$, $(A_5A_4A_3) = 3, \ldots$. Vypočítajte $(A_{10}A_2A_1)$.

6.26 Výpočtom dokážte, že zjednotenie dutých uhlov BAC, BDC nie je konvexná množina, keď $A[1, 0]$, $B[7, 9]$, $C[7, 5]$, $D[3, 3]$.

6.27 Dokážte, že množina $M = \{X[x, y] \in R_2;\ 0 \leq y < 3\} \cup A[0, 3]\}$ je konvexná.

6.28 Zistite, či množina $\triangle ABC \cup \triangle BCD$ je konvexná, ak $A[2, 1, 5, 7]$, $B[0, 0, 0, 0]$, $C[7, 0, 0, 0]$, $D[1, 2, 10, 14]$.

6.29 Dané sú body A, B, C, D priestoru R_n. Popíšte množinu $M = \{X \div Y;\ X \in U, Y \in V\}$, keď

(i) $U = \{A\}$, $V = \overline{BC}$

(ii) $U = \overline{AB}$, $V = \overline{CD}$.

(iii) $U = \{A\}$, $V = \triangle BCD$

(iv) $U = \triangle ABC$, $V = \triangle DEF$.

6.30 Dané sú body $A[0, 1, -2]$, $B[1, 1, -5]$, $C[4, 0, 4]$, $G[3, 0, 7]$, $H[12, -2, 16]$. Zistite, aká množina je prienikom dutých uhlov BAC, GAH.

6.31 Vypočítajte všeobecné nerovnice troch polrovín, ktorých prienik je množina $\sphericalangle BCA - \triangle ABC$, keď $A[-4, 11]$, $B[-9, 20]$, $C[-1, 2]$.

6.32 Nájdite konvexný obal množiny $K = \{X\left[\dfrac{n}{n+1}\right]; n \in N\}$.

6.33 Zistite, či množina $M = (\triangle ABC \cup \triangle ABD) \cap \overline{DE}$ je konvexná, keď body $A[1, 1, 3]$, $B[5, 1, 3]$, $C[5, 1, -2]$, $D[-1, ?, 5/2]$, $E[1, ?, 2]$ ležia v jednej rovine.

6.34 *Ťažnica* trojuholníka je úsečka, ktorej krajné body sú jeden vrchol trojuholníka a stred protiľahlej strany. *Ťažisko* trojuholníka je priesečník jeho ťažníc. *Ťažnica* štvorstena je úsečka, ktorej krajné body sú vrchol a ťažisko protiľahlej steny. Dokážte, že všetky ťažnice štvorstena patria trsu.

6.35 Dokážte, že pre ľubovoľné množiny M, N bodov afinného priestoru P platí

$$M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}.$$

6.36 Nech S je stred rovnobežníka $ABCD$. Dokážte, že konvexný obal množiny A, B, C, D je množina
$$\{S + t\overrightarrow{SA} + r\overrightarrow{SB}; \{|t|, |r|, |t| + |r|\} \subset \langle 0, 1\rangle\}.$$

6.37 Nech M je podmnožina usporiadaného afinného priestoru. Dokážte, že konvexný obal množiny M je zjednotenie konvexných obalov všetkých konečných podmnožín množiny M.

6.38 Nech $X = [x_1, ...x_n]$ je ľubovoľný bod priestoru E_n, nech $F(X) = 0$ je rovnica nadroviny N, kde $F(X) = d_1x_1 + \ldots + d_nx_n + d_{n+1}$. Na príklade pre $n = 6$ ($d_i \notin \{0, 1\}$ pre všetky i) overte, že platí
$$N \text{ oddeľuje body A, B} \quad \Rightarrow \quad \frac{F(A)}{F(A) - F(B)} \in (0, 1)$$

6.39 Nech priamky AB, CD sú rovnobežné s rovinou N a nech G, H sú také body, že $(ACG) = (BDH)$. Dokážte, že $\overline{GH} \parallel N$.

6.40 Súradnicami je daných p nekolineárnych bodov $A_1, ..., A_p$, ktorých konvexný obal je n-uholník U. Napíšte algoritmus (bez výpočtov), pomocou ktorého sa dá zistiť, či bod A_1 je vrchol n-uholníka U.

6.41 Nech $ABCD$ je štvorsten a T resp. R je ťažisko $\triangle ABC$ resp. $\triangle BCD$. Dokážte, že $\dim \overline{ADTR} = 2$.

6.42 Dokážte, že ak priamka $\overline{FG}$ leží v polpriestore $\overset{\longmapsto}{MC}$, tak $\overline{FG}$ je rovnobežná s priestorom M.

6.43 Dokážte, že neplatí tvrdenie : Zo štyroch navzájom rôznych konvexne závislých bodov, práve jeden z nich je z konvexného obalu ostatných.

6.44 Nech $U \subset R_n$ je konvexná množina, $A \in R_n$ je ľubovoľný bod. Dokážte, že $\{\cup \overset{\longmapsto}{AX}; X \in U\}$ je konvexná množina.

6.45 V R_1 sú dané body $A \neq B$. Vypočítajte $\lim_{X \to B}(ABX)$ (bod $X[x]$ sa blíži k bodu $B[b]$, keď x sa blíži k b, x, b sú súradnice bodov X, B).

6.46 Dané sú body $A[-10, 2, 5]$, $B[-5, -4, 4]$, $C[-2, 7, 8]$, $D[2, ?, ?]$, $R[-23/4, 11/2, 35/4]$. Zistite, či bod R je bodom lichobežníka $CDAB$.

6.47 Dokážte, že keď priamka N, ležiaca v rovine ABC, neprechádza žiadnym z nekolineárnych bodov A, B, C a oddeľuje niektoré dva z nich, potom oddeľuje práve dva ďalšie (veta Paschova).

6.48 Ak sú body afine nezávislé, sú aj konvexne nezávislé. Dokážte!

7 Uhly

V celom tomto článku o afinných priestoroch predpokladáme, že sú usporiadané. Podmnožinu M usporiadanej roviny P nazývame

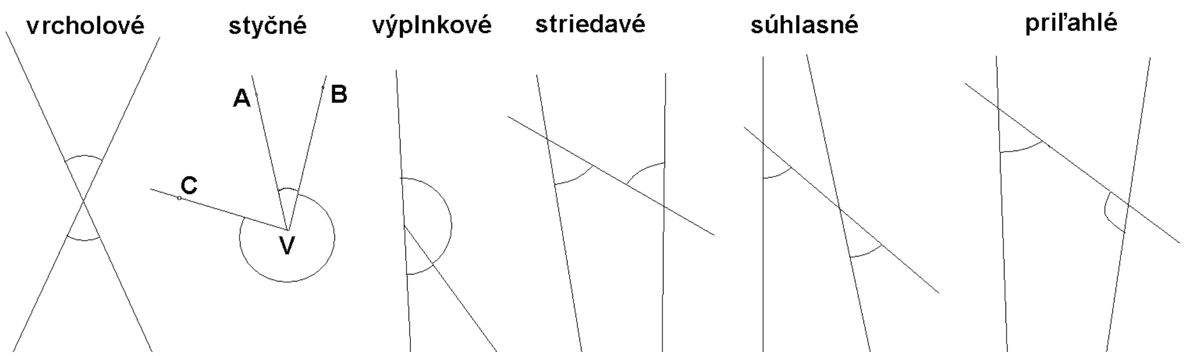
(i) *dutý uhol*, ak M je polpriamka alebo ak M je prienik dvoch polrovín roviny P s rôznobežnými hranicami; ak M je polpriamka $\overset{\longmapsto}{AB}$, A nazývame *vrchol*, $\overset{\longmapsto}{AB}$ rameno uhla M a M nazývame *nulový uhol*; ak M je prienik polrovín BAC, CAB kladieme $M = \sphericalangle BAC$, bod A nazývame *vrchol* a polpriamky $\overset{\longmapsto}{AB}$, $\overset{\longmapsto}{AC}$ *ramená* dutého uhla $\sphericalangle BAC$; množinu všetkých bodov dutého uhla, ktoré nepatria žiadnemu z jeho ramien nazývame *vnútro* tohto uhla; každý bod vnútra je *vnútorný bod* uhla;

(ii) *priamy uhol*, ak M je polrovina; ak M je priamy uhol s hraničnou priamkou L, tak každú dvojicu opačných polpriamok ležiacich na L nazývame *ramená* a ich priesečník *vrchol* priameho uhla M;

(iii) *nevypuklý uhol*, ak M je komplement (do roviny P) vnútra nejakého dutého uhla $\sphericalangle BAC$; v tom prípade bod A nazývame *vrchol* a polpriamky $\overset{\longmapsto}{AB}$, $\overset{\longmapsto}{AC}$ *ramená* nevypuklého uhla M; označenie $\not\sphericalangle BAC$; nevypuklý uhol, ktorého ramená splývajú nazývame *plný uhol*;

(iv) *uhol*, ak M je dutý, priamy alebo nevypuklý uhol.

Hovoríme, že dva duté uhly sú *vrcholové*, ak ramená jedného z nich sú opačné polpriamky k ramenám druhého z nich. Dva uhly AVB, BVC ležiace v jednej rovine nazývame *styčné*, ak ich prienik je jedna alebo dve polpriamky. Dva styčné uhly, ktorých zjednotenie je priamy uhol nazývame *výplnkové*. Dva nenulové duté uhly nazývame *striedavé* , ak ich prienikom je úsečka, ktorá nie je bodom. Dva duté uhly nazývame *súhlasné*, ak jeden z nich je striedavý uhol s vrcholovým uhlom k druhému z nich. Dva nenulové duté uhly nazývame *priľahlé*, ak jeden z nich je striedavý uhol s vedľajším uhlom k druhému z nich. Neprázdny prienik dvoch polrovín (tej istej roviny) s rovnobežnými hranicami, ktorý nie je priamka ani polrovina nazývame *pás*; hraničné priamky polrovín nazývame *hraničné priamky* pásu.



Veta 7.1 *Pre každý dutý uhol* $\sphericalangle BAC$ *platí* $\sphericalangle BAC = A + \langle\overrightarrow{AB}\rangle^+ + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^+$.

Dôkaz. Podľa definície nenulový dutý uhol $\sphericalangle BAC$ je prienikom polrovín $\overleftarrow{BAC}, \overleftarrow{CAB}$. To znamená, že existujú skaláry p, t, r, s pričom r, s sú nezáporné tak, že $A+t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}=A+p\overrightarrow{AC}+r\overrightarrow{AB}$, odkiaľ $(t-r)\overrightarrow{AB}+(s-p)\overrightarrow{AC}=\vec{o}$, čiže $t=r, s=p$, preto p, t sú tiež nezáporné. V prípade, že uhol $\sphericalangle BAC$ je nulový, tvrdenie je evidentné.

Cvičenie

7.1 V R_2 sú dané body $A[2,3]$, $B[3,4]$, $C[7,-1]$. Zistite, ktorý z bodov $D[5,7]$, $E[4,2]$, $F[0,1]$

(i) je bodom dutého uhla BAC

(ii) leží na niektorom ramene dutého uhla BAC

(iii) je vnútorným bodom nevypuklého uhla BAC.

7.2 V R_3 sú dané body $A[2,3,4]$, $B[1,0,2]$, $C[0,0,1]$. Zistite, ktorý z bodov $D[-3,-6,2]$, $E[-2,-3,1]$, $F[2,0,3]$ spĺňa niektorú z podmienok (i), (ii), (iii) z predošlého cvičenia.

7.3 Zistite, či polpriamka DE leží v dutom uhle BAC, keď $A[3,1,0]$, $B[1,5,2]$, $C[5,2,3]$, $E[-15.6, 44.2, 24.6]$, $D[4,4,4]$.

7.4 Dané sú body $A[2,1,0,0]$, $B[0,1,3,1]$, $C[2,2,2,1]$, $D[-4,1,9,?]$, $E[4,2,?,0]$ ležiace v jednej rovine. Zistite, či množina $M = \sphericalangle ABC \cup \sphericalangle DBE$ je priamy uhol.

7.5 Dané sú body $A(-2,0,1,1)$, $B(-5,1,3,1)$, $C(-2,4,0,4)$, $G(-2,8,-1,7)$, $H(1,3,-2,4)$. Zistite, či duté uhly BAC, HAG sú vedľajšie.

7.6 Nech A, B, C sú nekolineárne body usporiadaného afinného priestoru P. Dokážte, že množina

(i) $A + \langle\overrightarrow{AB}\rangle^+ + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^-$ je dutý uhol, výplnkový k dutému uhlu BAC

(ii) $A + \langle\overrightarrow{AB}\rangle^- + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^-$ je vrcholový uhol k uhlu BAC

(iii) $A + \langle\overrightarrow{AB}\rangle^+ + \langle\overrightarrow{AC}\rangle$ je priamy uhol

(iv) $A + ((\langle\overrightarrow{AB}\rangle^- + \langle\overrightarrow{AC}\rangle) \cup (\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^-))$ *je* nevypuklý uhol CAB

(v) $A + ((\langle\overrightarrow{AB}\rangle^- + \langle\overrightarrow{AC}\rangle) \cap (\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{AC}\rangle^-))$ je vrcholový uhol k uhlu BAC.

7.7 Dokážte, že každý dutý uhol je konvexným obalom svojej hranice.

7.8 Dokážte, že pre každý dutý uhol BAC platí $\sphericalangle BAC = \cup\{\overline{XY};\ X \in \overset{\longmapsto}{AB}, Y \in \overset{\longmapsto}{AC}\}$.

7.9 Nájdite neprázdnu podmnožinu M usporiadaného afinného priestoru tak, aby neplatilo $\overline{M} = \cup\{\overline{XY};\ X, Y \in M\}$

7.10 Nech $\triangle ABC$ je ľubovoľný trojuholník. Uhol ABC nazývame *vnútorný uhol trojuholníka* ABC, ak $\triangle ABC$ je podmnožinou tohto uhla. Uhol výplnkový k vnútornému uhlu nazývame *vonkajší uhol.* Dokážte, že každý vnútorný uhol trojuholníka je dutý.

8 Orientácia afinného priestoru

V celom tomto článku predpokladáme o afinných priestoroch, že sú usporiadané.

Nech je daný $\triangle ABC$ v rovine P. Zo skúseností vieme, že obvod trojuholníka ABC môžme "obiehať" buď vo smere alebo proti smeru hodinových ručičiek. Keď začneme obiehať v bode A, pokračujeme cez B do C a potom do A, jednoznačme sme určili smer obiehania; predpokladajme, že je to proti smeru hodinových ručičiek. Keď začneme obiehať v bode A, pokračujeme cez C do B a potom do A, obiehame vo smere hodinových ručičiek. Iste sme si všimli, že smer obiehania ovplyvňuje voľba poradia bodov obiehania; v prvom prípade to bolo poradie A, B, C, v druhom A, C, B. Body A, B, C tvoria simplex roviny P, ich usporiadanie teda určuje smer otáčania (t.j.orientáciu), preto definujeme

Definícia 8.1 *Usporiadanú sústavu $n+1$ afinne nezávislých bodov usporiadaného n-rozmerného afinného priestoru nazývame* orientovaný simplex.

Pokračujme v úvahách v rovine P. Nech $D \in P$ je taký bod, že orientované simplexy ABD, ABC, sú opačne orientované. Je zrejmé, že D musí ležať v opačnej polrovine k $\overset{\longmapsto}{ABC}$. Nech $E = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, je repér roviny P, nech $D_E = [d_1, d_2]$ a nech $F = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Potom $d_2 < 0$ a preto

$$det\, F^E = \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} = d_2 < 0,$$

čiže determinant matice prechodu od F ku E je záporný; ak by sme bod D volili vo vnútri polroviny ABC, tak tento determinant by bol kladný a orientované simplexy ABC, ABD by boli rovnako orientované. Ak meníme poradie bodov simplexu, mení sa aj poradie vektorov repérov E, F, čiže poradie vektorov ovplyvňuje orientáciu. To je motivácia pre nasledujúce definície.

Definícia 8.2 *Usporiadanú sústavu vektorov, ktoré tvoria bázu vek.priestoru V (nad usporiadaným poľom) nazývame* orientovaná báza.

Definícia 8.3 *Orientované bázy E, F sú rovnako (resp. opačne) orientované, keď determinat matice prechodu od E ku F je kladný (resp. záporný). Dva orientované simplexy $A_0A_1 \ldots A_n$, $B_0B_1 \ldots B_n$ usporiadaného n-rozmerného afinného priestoru P, $n > 0$, sú rovnako (resp. opačne) orientované, ak sú rovnako (resp. opačne) orientované usporiadané (t.j. orientované) bázy $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$, $(\overrightarrow{B_0B_1}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_n})$. Ak sú dva orientované simplexy E,F (alebo dve bázy) rovnako orientované budeme písať $E \uparrow F$ a $E \updownarrow F$, ak sú opačne orientované.*

Veta 8.4 *Relácia $\uparrow$ je ekvivalencia na každom usporiadanom afinnom (resp. vektorovom) priestore.*

Dôkaz. Nech E, F, G sú tri orientované bázy vektorového priestoru. Reflexívnosť relácie $\uparrow$ vyplýva zo vzťahu $detE^E = 1 > 0$, zatiaľ čo symetričnosť z $detE^F = 1/det\, F^E$. Ak ďalej $F \uparrow E$ a $E \uparrow G$, potom $detE^F > 0$, $detE^G > 0$ a podľa 1.40 aj $det\, G^F = det\,(E^F G^E) = det\, E^F det\, G^E > 0$ a teda $G \uparrow F$ čiže $\uparrow$ je tranzitívna relácia.

Mmnožina všetkých rovnako orientovaných usporiadaných simplexov daného afinného priestoru je trieda ekvivalencie relácie $\uparrow$. Nech E, F sú opačne orientované simplexy af.pr. P, $dim\, P > 0$; také simplexy vždy existujú. Nech G je ďalší usporiadaný simplex, potom zrejme platí $G \uparrow E$ alebo $G \uparrow F$, čiže G patrí buď do triedy v ktorej je E alebo, v ktorej je F. To znamená, že existujú práve dve triedy rozkladu relácie $\uparrow$. Jednu z nich prehlasujeme za kladnú, druhú za zápornú. Usporiadaný simplex, ktorý patrí do kladnej (resp. zápornej) triedy nazývame kladne (resp. záporne) orientovaný usporiadaný simplex. Afinný priestor, v ktorom je niektorý usporiadaný simplex prehlásený za kladný nazývame *orientovaný afinný priestor*. Keď orientovaný simplex $A_0A_1\dots A_n$ je kladne (resp. záporne) orientovaný, potom hovoríme, že repér $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots \overrightarrow{A_0A_n})$ je kladne (resp. záporne) orientovaný. To znamená, že afinný priestor možno orientovať aj pomocou repéra.

Orientáciu simplexov možno rozšíriť i na orientáciu úsečky, trojuholníka, štvorstena, atď. Konvexný obal simplexu nazývame konvexný simplex. Konvexný simplex spolu s usporiadaním jeho vrcholov nazývame *orientovaný konvexný simplex.* Hovoríme, že orientovaný konvexný simplex $A_0A_1\dots A_n$ usporiadaného afinného priestoru P $(dim\, P = n)$ je kladne orientovaný, ak je kladne orientovaný usporiadaný simplex $A_0A_1\dots A_n$. Známe sú pravidlá na určovanie orientácie na reálnej priamke, v reálnej rovine a reálnom priestore trojrozmernom.

Na priamke sú dve orientované úsečky AB, AC rovnako orientované, ak A neleží medzi bodmi B, C; dve orientované úsečky AB, DE sú rovnako orientované, keď sú rovnako orientované úsečky AB, AC, kde $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$.

V rovine sú dva orientované trojuholníky rovnako orientované, ak sú obidva orientované buď v smere (teda záporne) alebo proti smeru pohybu (teda kladne) hodinových ručičiek.

Zložitejšia je situácia v trojrozmernom priestore. V R_3 je orientovaný štvorsten $ABCD$ *ľavý* (resp.*pravý)*, keď k vektorom $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ možno "priložiť" v poradí veľký palec, ukazovák a stredný palec ľavej (resp. pravej) ruky. Ľavý (resp. pravý) je tiež taký orientovaný štvorsten ABCD, pre ktorý platí: Ak "pozeráme" z vrchola A na stenu BCD, tak orientovaný $\triangle BCD$ je orientovaný proti smeru (resp. vo smere) hodinových ručičiek.

Príklad 8.5 *Dokážte, že orientované trojuholníky ABC, BCA, CAB sú rovnako orientované a orientované trojuholníky ABC, ACB sú opačne orientované.*

Riešenie. Dokážeme, že $\triangle ABC$, $\triangle BCA$ sú rovnako orientované. To znamená, že musia byť rovnako orientované usporiadané sústavy vektorov $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Keďže $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ tak matica prechodu od jednej bázy k druhej je

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant tejto matice je kladný; tým je dôkaz skončený. Podobne sa dokáže zvyšná časť príkladu.

Cvičenie

8.1 Dokážte, že orientované štvorsteny $ABCD$, $BCDA$ sú opačne orientované.

8.2 Dokážte, že orientované simplexy $ABCDE$, $BCDEA$ sú rovnako orientované.

8.3 Nech ABD, ABC sú opačné polroviny. Dokážte, že orientované trojuholníky ABD, ABC sú opačne orientované.

8.4 Nech $ABCD$ je rovnobežník. Dokážte, že orientované trojuholníky ABC, BCD, CDA, DAC sú rovnako orientované.

8.5 Nech S je priesečník uhlopriečok rovnobežníka $ABCD$. Dokážte, že orientované trojuholníky ABS, DCS sú opačne orientované.

8.6 Dané sú rôzne body A, B priamky P. Nech $X, Y \in P$ sú také body, že $(XmAB \Rightarrow XmAY)$ alebo $(AmXB \Rightarrow X\overline{m}YB)$ alebo $(BmAX \Rightarrow XmBY)$. Dokážte, že simplexy (A, B) (X, Y) sú rovnako orientované.

8.7 Nech $ABCD$ je štvorsten a nech R, S sú také body, že $(ABS) = -2$; $(DCR) = \frac{1}{4}$. Výpočtom zistite, či orientované štvorsteny $ABCD$, $BRSC$ sú rovnako orientované.

8.8 Zistite, či orientované simplexy $A_1A_2A_3...A_{100}$, $A_2A_3A_4...A_{100}A_1$ sú rovnako orientované.

8.9 Zistite, pre ktoré $n \in N$, sú orientované simplexy $A_1A_2A_3...A_{n+1}$, $A_2A_3A_4...A_{n+1}A_1$ rovnako orientované.

8.10 Nech A, B, C, D sú po troch nekolineárne body ležiace v rovine N a nech $S = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Zvoľte súradnice bodov A, B, C, D tak, aby orientované trojuholníky ABS, CDS boli opačne orientované v N.

E U K L I D O V S K É   P R I E S T O R Y

9 Skalárny súčin

Motivácia a definícia skalárneho súčinu

Z analytickej geometrie v rovine (známej zo strednej školy) vieme, že ak v karteziánskej súradnicovej sústave s osami x, y a začiatkom O majú body A, B v poradí súradnice $[u_1, u_2], [v_1, v_2]$, vzdialenosť bodov A, B (budeme označovať $|AB|$) je číslo $\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$. Veľkosť uhla $\varphi = \sphericalangle AOB$ sa vypočíta pomocou kosínusovej vety takto: $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\varphi$, a vzhľadom na to, že $|OA| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $|OB| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ máme $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\varphi$, odkiaľ

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \tag{9.1}$$

Z tohto vzorca vyplýva, že ak chceme vypočítať kosínus uhla priamok OA, OB (a teda aj vektorov $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}$) potrebujeme výraz $u_1v_1 + u_2v_2$. Tento výraz je dôležitý aj z iného hľadiska. Ak $\varphi = 90°$, tak $\cos\varphi = 0$ a to vzhľadom na (9.1) nastane práve vtedy, keď $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Pretože bod O má súradnice $(0, 0)$, tak vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ majú súradnice (u_1, u_2), (v_1, v_2). Výraz $u_1v_1 + u_2v_2$ je teda funkciou súradníc vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ a ako sme ukázali veľmi dôležitou. V prípade, že $\vec{u} = \vec{v}$ (t.j. $A = B$) máme $u_1v_1 + u_2v_2 = u_1^2 + u_2^2 = |OA|^2$, môžeme teda aj dĺžku vektora $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ vyjadriť pomocou výrazu $u_1u_1 + u_2u_2$. Pre tieto dôvody venujeme zobrazeniu

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \tag{9.2}$$

väčšiu pozornosť. Priamym výpočtom sa ľahko dá overiť, že toto zobrazenie spĺňa nasledujúce identity resp. kvaziidentity:

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= \vec{v}.\vec{u} && \text{(S1)}\\
(\vec{u} + \vec{v}).\vec{z} &= \vec{u}.\vec{z} + \vec{v}.\vec{z} && \text{(S2)}\\
d(\vec{u}.\vec{v}) &= (d\vec{u}).\vec{v} && \text{(S3)}\\
\vec{u}.\vec{u} \geq 0; \quad & \vec{u}.\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{o}. && \text{(S4)}
\end{aligned}$$

Definícia 9.1 *Nech V je vektorový priestor nad poľom R reálnych čísel. Zobrazenie*

$$. : V \times V \to R, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}.\vec{v},$$

ktoré spĺňa $S1 - S4$, nazývame skalárny súčin *na V. Usporiadanú dvojicu $(V, .)$, kde $(.)$ je skalárny súčin na V, budeme nazývať* reálny metrický vektorový priestor *alebo* euklidovský vektorový priestor. *Euklidovský vektorový priestor $(U, .)$ nazývame podpriestor euklidovského vektorového priestoru $(V, .)$, ak $U \subset V$.*

Definícia 9.2 *Afinný priestor, ktorého zameranie je reálny metrický vektorový priestor, nazývame* euklidovský priestor*; n-rozmerný euklidovský priestor budeme označovať symbolom E_n. Podpriestor euklidovského priestoru E_n je taký jeho afinný podpriestor, ktorého zameranie je podpriestor metrického vektorového priestoru $(\vec{E}_n, .)$.*

O všetkých afinných priestoroch tejto kapitoly budeme predpokladať, že sú euklidovské. Preto niekedy miesto formulácie "nech A, B sú body euklidovského…" budeme používať formuláciu "nech A,B sú body…" a podobne.

Veta 9.3 *V E_n je daný repér E. Existuje taká reálna matica (a_{ik}) typu $n \times n$, že skalárny súčin vektorov $\vec{u}_E = (u_1, \ldots, u_n)$, $\vec{v}_E = (v_1, \ldots, v_n)$ je daný rovnosťou*

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iv_k, \tag{9.3}$$

pre všetky $\vec{u}$, $\vec{v} \in \vec{E}_n$.

Dôkaz. Predpokladajme, že $E = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Označme $\vec{e}_i\vec{e}_k = a_{ik}$ (maticu (a_{ik}) nazývame *gramova matica* sústavy $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$) a $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ pre ľubovoľný vektor $\vec{u}$. Pretože $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + \dots + u_n\vec{e}_n$, $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \dots + v_n\vec{e}_n$, tak použitím $S1 - S4$ dostávame

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= (u_1\vec{e}_1 + \dots + u_n\vec{e}_n)(v_1\vec{e}_1 + \dots + v_n\vec{e}_n) = u_1v_1\vec{e}_1^{\,2} + u_1v_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + \dots + u_nv_n\vec{e}_n^{\,2} = \\
&= u_1v_1a_{11} + u_1v_2a_{12} + \dots + u_nv_na_{nn} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iv_k.
\end{aligned}$$

Priamym výpočtom sa ľahko overí, že platí

Veta 9.4 *Nech E je repér priestoru E_n, $\vec{u}_E = (u_1, \dots, u_n)$, $\vec{v}_E = (v_1, \dots, v_n)$ a nech (a_{ik}) je taká reálna matica typu $n \times n$, že*

(i) *(a_{ik}) je symetrická matica, t.j. $a_{ik} = a_{ki}$ pre všetky i,k*

(ii) *$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k \geq 0$ pre všetky $\vec{u} \in \vec{E}_n$*

(iii) *$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k = 0 \Rightarrow u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ pre všetky $\vec{u} \in \vec{E}_n$.*

Potom zobrazenie $. : \vec{E}_n \to \vec{E}_n$ dané rovnosťou (9.3) je skalárny súčin na $\vec{E}_n$.

Z tejto vety vyplýva, že zadať skalárny súčin možno pomocou vhodnej matice (nad poľom reálnych čísel). Jednou z takých matíc je jednotková matica, teda na každom reálnom afinnom priestore, (ktorý má dimenziu aspoň 1) existuje skalárny súčin. Vhodnou gramovou maticou je teda skalárny súčin ľubovoľných dvoch vektorov jednoznačne určený, preto nezávisí na voľbe bázy, pomocou ktorej sa skalárny súčin počíta.

Veta 9.5 *Sústava vektorov je lineárne závislá práve vtedy, keď determinat gramovej matice tejto sústavy je 0.*

Dôkaz. Nech sústava $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ je lineárne závislá. Potom existuje aspoň jedno $c_i \neq 0$ tak, že $c_1\vec{e}_1 + \dots + c_n\vec{e}_n = \vec{o}$. Ak túto rovnosť postupne násobíme (používame skalárny súčin) každým vektorom sústavy $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ dostaneme

$$\begin{array}{ccc}
c_1\vec{e}_1\vec{e}_1 & \cdots & c_n\vec{e}_1\vec{e}_n = \vec{o} \\
 & \vdots & \\
c_1\vec{e}_n\vec{e}_1 & \cdots & c_n\vec{e}_n\vec{e}_n = \vec{o}
\end{array}$$

čo znamená, že táto sústava lineárnych homogénnych rovníc má nenulové riešenie $(c_1, \dots, c_n)$; to však existuje práve vtedy, keď determinant sústavy (je to determinat gramovej matice sústavy $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$) sa rovná nule.

Dĺžka vektora, vzdialenosť dvoch bodov

Definícia 9.6 Dĺžka *(alebo veľkosť) vektora $\vec{u}$ je číslo $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$; označenie $|\vec{u}|$. Dĺžka (alebo* veľkosť úsečky*) AB je dĺžka vektora $\overrightarrow{AB}$.* Vzdialenosť dvoch bodov A, B *je dĺžka vektora $\overrightarrow{AB}$; označenie: $A \dashv B$ alebo $|AB|$. Vektor, ktorého dĺžka je 1 nazývame* ort *alebo* jednotkový vektor.

Lema 9.7 *Nech A, B sú body, $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}_n$ a d reálne číslo; potom*

(i) $|d\vec{u}| = |d|.|\vec{u}|$

(ii) $|\vec{u}| \geq 0$; $\vec{u}.\vec{o} = 0$; $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{o}$

(iii) $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^{\,2}$

(iv) $|AB| = |BA|$ a $A \dashv B = B \dashv A$

(v) $\vec{u} \neq \vec{o} \Rightarrow \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ *je ort.*

(vi) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}\,|^2 - |\vec{v}|^2)$.

Dôkaz. Dokážeme len (i) a (vi), ostatné dôkazy prenechávame čitateľovi. Pretože $\vec{o} = \vec{u} - \vec{u}$, tak $|\vec{o}| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{u})^2} = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{u} + \vec{u}^2} = 0$. Pre ľubovoľné vektory $\vec{u}, \vec{v}$ platí $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2\vec{u}\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}((\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2})$ čo znamená, že skalárny súčin vektorov sa dá vyjadriť pomocou ich dĺžok a dĺžky ich súčtu.

Veta 9.8 *Pre každé tri kolineárne po dvoch rôzne body A, B, C*

$$(ABC) = \pm \frac{|AC|}{|BC|},$$

pričom znamienko + (resp. -) platí vtedy, ak C neleží (resp. leží) medzi bodmi A, B.

Dôkaz. $(ABC) = d \Rightarrow \overrightarrow{AC} = d\overrightarrow{BC}$, odkiaľ $|\overrightarrow{AC}| = |d\overrightarrow{BC}| = |d||\overrightarrow{BC}|$ a tak $|d| = \dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$.

Schwartzova a Minkowského nerovnosti

Veta 9.9 *Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú vektory priestoru $\vec{E}_n$. Potom*

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}| \qquad (\textit{ Schwartzova nerovnosť }),$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé a

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \qquad (\textit{ Minkowského nerovnosť}),$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\vec{v} = \vec{o}$ alebo $\vec{u} = \vec{o}$ alebo existuje $d > 0$ tak, že $\vec{u} = d\vec{v}$.

Dôkaz. (1) Je zrejmé, že pre ľubovoľné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí $(|\vec{v}|.\vec{u} - |\vec{u}|.\vec{v})^2 \geq 0$ a po umocnení a ďalšej elementárnej úprave $2|\vec{u}||\vec{v}|\,(|\vec{u}|.|\vec{v}| - (\vec{u}.\vec{v})) \geq 0$, odkiaľ $|\vec{u}|.|\vec{v}| \geq \vec{u}.\vec{v}$. Táto rovnosť platí i vtedy, keď miesto $\vec{u}$, píšeme $-\vec{u}$; tak dostaneme $|\vec{u}|.|\vec{v}| \geq -\vec{u}.\vec{v}$, čo spolu s predošlou nerovnosťou dáva Schwartzovu nerovnosť. Keď $\vec{u} = a\vec{v}$, potom $|\vec{u}.\vec{v}| = |a\vec{v}.\vec{v}| = |a.\vec{v}\vec{v}| = |a|.|\vec{v}||\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|$. Keď $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne nezávislé, potom $\vec{w} = |\vec{v}|\vec{u} - |\vec{u}|\vec{v} \neq \vec{o}$ a preto $\vec{w}^2 > 0$, čiže $|\vec{u}.\vec{v}| < |\vec{u}|.|\vec{v}|$ a to znamená, že v Schwarzovej nerovnosti nenastáva rovnosť. (2) Minkowského nerovnosť dokážeme pomocou nerovnosti $|\vec{u}|.|\vec{v}| \geq \vec{u}.\vec{v}$; pričítame k obom jej stranám vynásobeným číslom 2 výraz $\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2}$, dostaneme $\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2\vec{u}\vec{v} \leq \vec{u}^{\,2} + 2|\vec{u}||\vec{v}| + \vec{v}^{\,2}$, odkiaľ $|\vec{u} + \vec{v}|^2 \leq (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$, čo po odmocnení dáva Minkowského nerovnosť. Nech ani jeden z vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ nie je nulový (v opačnom prípade zrejme v Minkowského nerovnosti nastáva rovnosť). Ak $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$, tak aj $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$, odkiaľ $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$ t.j. $|\vec{u}||\vec{v}| - \vec{u}.\vec{v} = 0$, $2|\vec{u}||\vec{v}|(|\vec{u}||\vec{v}| - \vec{u}.\vec{v}) = 0$, $(|\vec{v}|.\vec{u} - |\vec{u}|.\vec{v})^2 = 0$, $|\vec{v}|.\vec{u} = |\vec{u}|.\vec{v}$, $\vec{u} = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}.\vec{v}$. Obrátene, keď $\vec{u} = d\vec{v}, d \geq 0$, zrejme v Minkowského nerovnosti nastáva rovnosť.

Cvičenie

9.1 V E_2 je daný repér $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Nech $\vec{e}_i.\vec{e}_k = a_{ik}$, kde (a_{ik}) je jedna z matíc

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pre ktoré z týchto matíc je zobrazenie definované rovnosťou 9.3 skalárny súčin na E_2 ? Vypočítajte skalárny súčin (ak sa dá) vektorov $\vec{u}_E = (5, -1)$, $\vec{v}_E = (1, 4)$ a ich dĺžky pomocou matice M_3.

9.2 Nech skalárny súčin na E_2 je definovaný pomocou matice M_3 z cvičenia 1. Udajte súradnice vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ tak, aby $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ a $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

9.3 Nech A, B sú také body, že $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$, $|\overrightarrow{BC}| = 5$. Vypočítajte $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$, $(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB})$.

9.4 Dokážte, keď A, B, C sú navzájom rôzne body, potom $|AB| + |BC| = |AC| \Leftrightarrow (ACB) < 0$.

9.5 Dokážte, že rozdiel veľkostí dĺžok dvoch strán trojuholníka je menší ako dĺžka tretej strany.

10 Kolmosť v euklidovských priestoroch

Kolmosť vektorov

Tak ako dĺžka vektora a vzdialenosť bodov aj kolmosť patrí k pojmom, ktorým hovoríme metrické. Sú to pojmy, ktoré definujeme (či už priamo alebo nepriamo) pomocou skalárneho súčinu.

Definícia 10.1 *Vektor $\vec{u}$ je* kolmý *(alebo* ortogonálny *s vektorom $\vec{v}$) na vektor $\vec{v}$, ak $\vec{u}.\vec{v} = 0$; označenie $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Lema 10.2 *Nech $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú ľubovoľné vektory, d skalár. Potom*

(i) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$
(ii) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow d.\vec{u} \perp \vec{v}$
(iii) $\vec{u} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \vec{o}$
(iv) $\vec{o} \perp \vec{v}$.

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi.

Vlastnosť (i) hovorí, že kolmosť (ortogonálnosť) vektorov je symetrická relácia, preto možno hovoriť, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú ortogonálne, namiesto vektor $\vec{u}$ je ortogonálny s vektorom $\vec{v}$.

Daný je trojuholník ABC. Ak niektoré dva z vektorov $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ sú ortogonálne, trojuholník $\triangle ABC$ nazývame *pravouhlý*. Ak v $\triangle ABC$ je $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$, stranu AB nazývame *prepona* a strany AC, BC sú *odvesny* tohto trojuholníka.

Dôkaz nasledujúcej vety prenechávame čitateľovi.

Veta 10.3 *(Pythagorova) Nech $\vec{u}$, $\vec{v} \in \vec{E_n}$. Potom $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2$.*

Nech $\vec{u} \perp \vec{v}$ sú nenulové vektory. Potom $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2$, odkiaľ $|\vec{u}| < |\vec{u} + \vec{v}|$, $|\vec{v}| < |\vec{u} + \vec{v}|$, čo po označení $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$ dáva $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, $|AB| > |AC|$, čiže prepona pravouhlého trojuholníka je jeho najdlhšia strana.

Ortogonálna a ortonormálna sústava vektorov

Definícia 10.4 *Sústavu vektorov $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ nazývame* ortogonálna *, ak $s = 1$ alebo ak $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ pre každé $i \neq j$. Ak každý vektor ortogonálnej sústavy je jednotkový, taká sústava je* ortonormálna*. Repér $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ nazývame* ortogonálny *(resp.* ortonormálny*), ak $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ je ortogonálna (resp. ortonormálna) báza euklidovského priestoru $\vec{E_n}$. Simplex $A, A_1, \ldots, A_n$ nazývame pravouhlý rovnoramenný simplex s ramenami $\overline{AA_i}$, $i = 1, \ldots, n$, ak $(A, \overrightarrow{AA_1}, \ldots, \overrightarrow{AA_n})$ je ortogonálny repér pričom $|\overrightarrow{AA_i}| = |\overrightarrow{AA_j}|$ pre všetky i, j.*

Veta 10.5 *Každá ortogonálna sústava nenulových vektorov priestoru $\overrightarrow{E_n}$*

(i) *je lineárne nezávislá*
(ii) *dá sa doplniť do ortogonálnej bázy priestoru $\overrightarrow{E_n}$.*

Dôkaz.(i) Nech $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$ je ortogonálna sústava nenulových vektorov a $c_1\vec{e}_1 + \ldots + c_s\vec{e}_s = \vec{o}$. Potom aj $0 = \vec{e}_1.(c_1\vec{e}_1 + \ldots + c_s\vec{e}_s) = c_1\vec{e}_1{}^2 + \ldots + c_s\vec{e}_1\vec{e}_s = c_1\vec{e}_1{}^2$, odkiaľ (vzhľadom na to, že $\vec{e}_1 \neq \vec{o}$) vyplýva $c_1 = 0$. Podobne dokážeme $c_2 = 0, \ldots, c_s = 0$. (ii) Najprv dokážeme pomocnú vetu: Nech $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-1}$ je ortogonálna sústava nenulových vektorov priestoru $\overrightarrow{E_s}$, $s > 1$; potom existuje vektor $\vec{b}_s$ tak, že $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s$ je ortogonálna báza priestoru $\overrightarrow{E_s}$. Skutočne, nech $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-1}, \vec{b}$ je báza priestoru $\overrightarrow{E_s}$ a nech $\vec{b}_s = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_{s-1}\vec{b}_{s-1} + \vec{b}$. Skaláry $c_1, \ldots, c_{s-1}$ vypočítame tak, aby vektory $\vec{b}_s$, $\vec{b}_i$ boli kolmé pre všetky $i = 1, \ldots, s-1$: z rovnosti $\vec{b}_s.\vec{b}_i = 0$ dostaneme $c_i = -\dfrac{\vec{b}.\vec{b}_i}{\vec{b}_i.\vec{b}_i}$. Dokázať (ii), znamená dostatočný počet krát použiť práve dokázanú pomocnú vetu.

Veta 10.6 *Každá ortonormálna sústava vektorov je lineárne nezávislá. V každom euklidovskom priestore existuje ortonormálny repér.*

Dôkaz. Prvá časť vety je evidentná. Ak každý vektor ortogonálnej bázy násobíme prevrátenou hodnotou jeho dĺžky, dostaneme ortonormálnu bázu.

Veta 10.7 *Nech $E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je báza priestoru $\vec{E_n}$ a nech $\vec{v}_E = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{u}_E = (u_1, \dots, u_n)$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(i) *E je ortonormálna báza*

(ii) $\vec{u}.\vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ak rovnosti $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0$ pre $i \neq j$ a $\vec{e}_i.\vec{e}_i = 1$ uplatníme na (9.3) dostaneme (ii). (ii) $\Rightarrow$ (i) Stačí si uvedomiť, že $(\vec{e}_i)_E = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde jednotka je na i-tom mieste a potom vypočítať $\vec{e}_i.\vec{e}_j$ podľa (ii).

Úloha 10.8 *Ak vektor $\vec{u}$ je kolmý na každý z vektorov $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$, tak $\vec{u}$ je kolmý na ľubovoľnú lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$. Dokážte.*

Totálna kolmosť, ortogonálny doplnok

Definícia 10.9 *Vektor $\vec{v} \in \vec{E}_n$ je kolmý na $V \subset \vec{E}_n$, ak $\vec{v}$ je kolmý na každý vektor množiny V; označenie $\vec{v} \perp V$. Keď $U, V \subset \vec{E}_n$, potom U je totálne kolmá na V, ak každý vektor z U je kolmý na V; označenie $U \pm V$.*

Z úlohy 10.8 vyplýva

Veta 10.10 *Ak každý vektor sústavy, ktorá generuje priestor V je kolmý na každý vektor sústavy, ktorá generuje U, tak $U \pm V$.*

Veta 10.11 *Nech U, V $\subset\subset$ $\vec{E}_n$. Množina $\{\vec{v} \in V; \vec{v} \perp U\}$ je vektorový priestor, ktorý nazývame ortogonálny doplnok priestoru U vo V; označenie: $U^{\pm V}$. Keď $V = \vec{E}_n$, kladieme $U^{\pm \vec{E}_n} = U^{\pm}$.*

Dôkaz. Množina $U^{\pm V}$ je zrejme neprázdna a uzavretá vzhľadom na lineárne kombinácie (viď úloha 10.8).

Veta 10.12 *Nech $U \subset\subset \vec{E}_n$; potom*

$$\begin{aligned} dim\, U + dim\, U^{\pm} &= n \\ (U^{\pm})^{\pm} &= U \\ U \cap U^{\pm} &= \vec{o}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Nech $dim\, U = s, s > 0$ (ak $s = 0$, tvrdenia sú triviálne), E je ortonormálna báza priestoru $\overrightarrow{E}_n$, $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s \rangle = U$, $\vec{a}_{i\,E} = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$; $\vec{v}_E = (v_1, \dots, v_n)$. Potom $\vec{v} \in U^{\pm}$ práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} a_{11} v_1 + \cdots + a_{n1} v_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1s} v_1 + \cdots + a_{ns} v_n &= 0. \end{aligned}$$

Pretože $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s$ je lineárne nezávislá sústava, množina všetkých riešení tejto homogénnej sústavy lineárnych rovníc je vektorový priestor dimenzie $n - s$. Zvyšná časť vety je evidentná.

Nech U, V, W sú podpriestory priestoru $\vec{E}_n$. Keď $U \subset V$ a $\vec{w} \in W$ je kolmý na V, potom zrejme $\vec{w}$ je kolmý aj na U a leží vo W; tým sme dokázali implikáciu

$$U \subset V \quad \Rightarrow \quad V^{\pm W} \subset U^{\pm W} \tag{10.1}$$

Kolmosť v $\vec{E}_n$

Z Vety 10.11 vyplýva, že priestor $V^{\pm}$ je maximálny (čo do usporiadania reláciou $\subset$) zo všetkých podpriestorov priestoru $\vec{E}_n$, totálne kolmých na V. To znamená, že zo všetkých podpriestorov priestoru $\vec{E}_n$ totálne kolmých na V má $V^{\pm}$ najväčšiu dimenziu. Preto súčet dimenzií dvoch totálne kolmých podpriestorov priestoru $\vec{E}_n$ nie je väčší než n. Špeciálne to znamená, že dve roviny v E_3 nemôžu byť totálne kolmé. Avšak zo stredoškolskej geometrie vieme, že existuje pojem "kolmosť dvoch rovín". Takýto druh kolmosti zovšeobecňuje

Definícia 10.13 *Nech $U,\ V \subset\subset \vec{E}_n$ a $P = U \cap V$. Hovoríme, že U je* kolmý *na V, ak $P^{\pm U}$, $P^{\pm V}$ sú netriviálne totálne kolmé vektorové priestory alebo aspoň jeden z priestorov $U,\ V$ je triviálny; označenie $U \perp V$.*

Táto definícia je "symetrická" vzhľadom na zámenu $U \leftrightarrow V$, preto relácia $\perp$ je symetrická, čiže $U \perp V \Rightarrow V \perp U$; Môžeme preto miesto formulácie "U je kolmý na V" používať formuláciu "U, V sú kolmé".

Veta 10.14 *Nech U,V sú podpriestory v $\vec{E}_n$, U, V neincidujú a nech $P = U \cap V$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & U \perp V \\ \text{(ii)} & U^{\pm V} = P^{\pm V} \\ \text{(iii)} & dim\, U^{\pm V} = dim\, V - dim\, P \end{array}$$

Dôkaz. Pretože $P \subset U$, tak podľa (10.1) $U^{\pm V} \subset P^{\pm V}$. $(i) \Rightarrow (ii)$ $U \perp V \Rightarrow P^{\pm V} \pm P^{\pm U} \Rightarrow P^{\pm V} \pm (P + P^{\pm U}) \Rightarrow P^{\pm V} \pm U \Rightarrow P^{\pm V} \subset U^{\pm V}$ čo spolu s inklúziou $U^{\pm V} \subset P^{\pm V}$ dáva $U^{\pm V} = P^{\pm V}$. $(ii) \Rightarrow (iii)$ je triviálne. $(iii) \Rightarrow (i)$ Keďže U, V neincidujú, $P \neq U$, $P \neq V$, preto dim $P^{\pm U} > 0$ a dim $P^{\pm V} > 0$, t.j. $P^{\pm V}$, $P^{\pm U}$ sú netriviálne vektorové priestory. Ďalej, z $U^{\pm V} \subset P^{\pm V}$ a $dim\, U^{\pm V} = dim\, V - dim\, P =$ dim $P^{\pm V}$ vyplýva, že $U^{\pm V} = P^{\pm V}$, čo znamená, že každý vektor z V kolmý na P je kolmý aj na U a teda aj na každý jeho podpriestor, čiže aj na $P^{\pm U}$ čo implikuje $P^{\pm V}$, $P^{\pm U}$ sú totálne kolmé vektorové priestory.

Veta 10.15 *Každé dva totálne kolmé priestory sú aj kolmé.*

Dôkaz. Keď U, V sú totálne kolmé priestory ich prienik je triviálny vektorový priestor, ktorého ortogonálny doplnok v U je U a vo V je V, znamená to, že U, V sú aj kolmé priestory.

Obrátená veta k Vete 10.15 neplatí, ukazuje to nasledujúci príklad.

Príklad 10.16 *Nech $U = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $V = \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle$, $\vec{a}(1, 3, -1, 5)$, $\vec{b}(1, -5, -3, 1)$, $\vec{c}(14, 5, 3, -1)$, $\vec{d}(14, -3, 1, -5)$. Dokážte, že U, V sú kolmé ale nie totálne kolmé vektorové priestory.*

Riešenie. Označme $P = U \cap V$. Nech $\vec{v} \in U$, $\vec{v} \perp V$; potom $\vec{v} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}$, $\vec{v}.\vec{c} = 0$, $\vec{v}.\vec{d} = 0$, preto

$$\begin{array}{rcl} x_1\vec{a}\vec{c} + x_2\vec{b}\vec{c} & = & 0 \\ x_1\vec{a}\vec{d} + x_2\vec{b}\vec{d} & = & 0 \end{array} \qquad \text{t.j.} \qquad \begin{array}{rcl} 21x_1 - 21x_2 & = & 0 \\ -21x_1 + 21x_2 & = & 0 \end{array}$$

Hodnosť matice tejto sústavy je 1, preto (vzhľadom na to, že $\vec{a}$, $\vec{b}$ sú lineárne nezávislé) $dim\, V^{\pm U} = 1$, čo znamená, že U, V nie sú totálne kolmé. Ďalej hodnosť každej z matíc (riadky prvej sú vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 & 1 \\ 14 & 5 & 3 & -1 \\ 14 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je 3, preto $dim\,(U + V) = 3$ a podľa formuly Grassmana $dim\, U \cap V = 2 + 2 - 3 = 1$, takže $dim\, P^{\pm U} = 2 - 1 = 1$.

Definícia 10.17 *Nech $K, M \subset\subset E_n$. Potom M je* totálne kolmý *(resp.* kolmý*) na K, ak to isté platí pre ich zamerania; označenia $M \pm K$ (resp. $M \perp K$).*

Kolmosť podpriestoru na nadrovinu

Ortogonálny doplnok zamerania nadroviny má zrejme dimemziu 1, je teda generovaný jedným vektorom, nazývame ho *normálový vektor* tejto nadroviny a každú priamku kolmú na nadrovinu nazývame *normála* tejto nadroviny. Teda každý nenulový vektor kolmý na nadrovinu (presnejšie na zameranie nadroviny) musí byť jej normálovým vektorom.

Veta 10.18 *Podpriestor $M(dim\, M > 0)$ priestoru E_n, je kolmý na nadrovinu N priestoru E_n práve práve vtedy, keď normálový vektor nadroviny N je smerovým vektorom M.*

Dôkaz. Nech $\vec{n}$ je normálový vektor N. ($\Rightarrow$) Keďže N, M sú kolmé, tak $\vec{M}$ musí obsahovať aspoň jeden nenulový vektor kolmý na N, taký vektor je len $\vec{n}$ alebo jeho nenulové násobky. ($\Leftarrow$) Nech $\vec{n} \in \vec{M}$ a nech $\vec{M} \cap \vec{N} = V$. Pretože $dim\, \vec{N}^{\pm} = 1$, tak $\vec{N}^{\vec{M}} = \vec{V}^{\vec{M}} =< \vec{n} >\perp \vec{N} \Rightarrow \vec{n} \perp V^{\vec{N}}$ takže $V^{\vec{N}} \perp V^{\vec{M}}$.

Ľahko sa dokáže

Dôsledok 10.19 *Nech $n \geq 1$, N je nadrovina, ktorá má v nejakom ortonormálnom repére E rovnicu $d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$. Každý vektor kolmý na N je skalárnym násobkom vektora $\vec{d}_E = (d_1, \ldots, d_n)$.*

Dôsledok 10.20 *Daným bodom priestoru E_n, $n \geq 2$ prechádza práve jedna priamka kolmá na danú nadrovinu priestoru E_n. Táto priamka a nadrovina sú rôznobežné.*

Dôsledok 10.21 *Nech bod $A \in E_n$ neleží v podpriestore K priestoru E_n, $n \geq 2$. Potom existuje práve jedna priamka L kolmá na K prechádzajúca bodom A a pretínajúca K.*

Dôkaz. Úvahy stačí zúžiť na afinný obal množiny $A \cup K$. V tomto obale je K nadrovinou a preto možno použiť dôsledok 10.20.

Pravouhlý priemet

Nech $A \in E_n$, $M \subset\subset E_n$. Je zrejmé, že $(A + \vec{M}^{\pm}) \cap M$ je jediný bod. Tento bod nazývame *pravouhlý priemet* bodu A do podpriestoru M; *pravouhlým priemetom množiny G* nazývame množinu priemetov všetkých bodov množiny G. Keď G je podpriestor priestoru E_n, potom jeho pravouhlý priemet je $(G + \vec{M}^{\pm}) \cap M$ je opäť podpriestor priestoru E_n.

Príklad 10.22 *V E_4 (v ortonormálnom repére) je dané: $A[2, 3, 1, 5]$, $B[-1, 0, 2, 4]$, $\vec{u}(1, 1, 1, -1)$, $\vec{v}(1, 2, 2, 0)$. Vypočítajte súradnice pravouhlého priemetu A_0 bodu A do roviny $K = B + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.*

Riešenie.1 Keďže $A_0 \in K$, existujú skaláry d_1, d_2 tak, že (i) $A_0 = B + d_1\vec{u} + d_2\vec{v}$, t.j. $\overrightarrow{BA_0} = d_1\vec{u} + d_2\vec{v}$. Pretože $\overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_0}$, tak $\overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{AB} + d_1\vec{u} + d_2\vec{v}$. Ďalej $\overrightarrow{AA_0} \perp K$, preto $\overrightarrow{AA_0}.\vec{u} = 0$, $\overrightarrow{AA_0}.\vec{v} = 0$; po dosadení za $\overrightarrow{AA_0}$ dostávame sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB}.\vec{u} + d_1\vec{u}^{\,2} + d_2\vec{v}.\vec{u} & = & 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{v} + d_1\vec{u}\vec{v} + d_2\vec{v}^2 & = & 0 \end{array} \quad t.j. \quad \begin{array}{rcl} 4d_1 + 5d_2 & = & 4 \\ 5d_1 + 9d_2 & = & 7, \end{array}$$

odkiaľ $d_1 = \dfrac{1}{11}$, $d_2 = \dfrac{8}{11}$ a po dosadení do rovnice (i) dostaneme $A_0\left[\dfrac{-2}{11}, \dfrac{17}{11}, \dfrac{39}{11}, \dfrac{43}{11}\right]$.

Riešenie 2. Nech $M = A + \vec{K}^{\pm}$, potom $M \pm K$ a $dim\, M + dim\, K = 4$. Podľa Vety 10.12 $M \cap K$ je jeden bod; je to A_0. Keď vektor $\vec{w}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ leží v $\vec{M}$, potom $\vec{w}.\vec{u} = 0$ a $\vec{w}.\vec{v} = 0$, čiže

$$\begin{array}{rcl} w_1 + w_2 + w_3 - u_4 & = & 0 \\ w_1 + 2w_2 + 2w_3 & = & 0. \end{array}$$

Dve lineárne nezávislé riešenia tejto sústavy dostaneme, ak raz položíme $w_3 = 0$, $w_4 = 1$ a druhý raz $w_3 = 1$, $w_4 = 0$; potom $\vec{a}(2, -1, 0, 1)$, $\vec{b}(0, -1, 1, 0)$ sú vektory bázy priestoru $\vec{M}$. Parametrické rovnice priestorov M, K sú

$$M: \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 + 2t \\ x_2 & = & 3 - t - s \\ x_3 & = & 1 + s \\ x_4 & = & 5 + t \end{array} \qquad K: \begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 + r + p \\ x_2 & = & 0 + r + 2p \\ x_3 & = & 2 + r + 2p \\ x_4 & = & 4 - r \end{array}$$

Ak korene t, s sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2+2t &= -1+r+p \\ 3-t-s &= r+2p \\ 1+s &= 2+r+2p \\ 5+t &= 4-r \end{aligned}$$

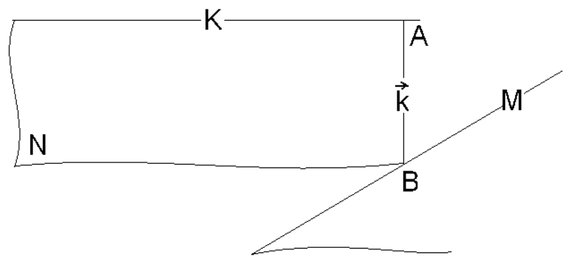
dosadíme do parametrických rovníc roviny M dostaneme súradnice bodu A_0.

Os priestorov

Definícia 10.23 *Priečku podpriestorov K, M priestoru E_n, ktorá je kolmá na K i na M nazývame os priestorov K, M.*

Veta 10.24 *Ku každým dvom disjunktným podpriestorom K, M euklidovského priestoru existuje aspoň jedna ich os.*

Dôkaz. Konštrukcia osi priestorov K, M: Nech $E = \overline{K \cup M}$ a nech $\langle\vec{k}\rangle$ je ortogonálny doplnok priestoru $\vec{K}+\vec{M}$ v $\vec{E}$. Nech $N = K + \langle\vec{k}\rangle$ a nech $B \in N \cap M$. Potom $S = B + \langle\vec{k}\rangle$ je hľadaná os.



Dôkaz konštrukcie: Pretože $K \cap M = \emptyset$, tak $dim\,(\vec{K}+\vec{M})+1 = \dim E$, $\dim(\vec{K}+\vec{M})^{\pm} = 1$. Teda $\langle\vec{k}\rangle$ je ortogonálny doplnok priestoru $\vec{K}+\vec{M}$ (v E). Ďalej $\vec{N}+\vec{M} = \langle\vec{k}\rangle + \vec{K} + \vec{M} = \vec{E}$, preto $N \cap M \neq \emptyset$. Existuje teda bod B. Keďže $B \in N$ a $\vec{k} \in \vec{N}$, tak $S \subset N$; $\vec{K}+\vec{S} = \vec{K}+\langle\vec{k}\rangle = \vec{N}$, preto $K \cap S \neq \emptyset$, čiže S pretína aj priestor K.

Príklad 10.25 *Vypočítajte všeobecné a parametrické rovnice osi S priamok $K = \overline{EF}$, $M = \overline{CD}$, ak sú dané body $E[8,7,12,2]$, $C[2,-1,0,2]$, $F[6,-3,-4,10]$, $D[3,0,1,1]$.*

Riešenie 1. Nech $\vec{u}$, $\vec{v}$ je báza ortogonálneho doplnku priestoru $\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD}\rangle$. Nech $N = K + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, $L = M + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, $E = C + \langle\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CE}\rangle = \overline{K \cup M}$. Potom $S = L \cap N \cap E$. Skutočne, nech $S = \overline{AB}$, $B \in M$, $A \in K$. Pretože $S \perp K, M$, tak $\overrightarrow{AB} \in \langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ a keďže $A \in S \cap K$, tak $S \subset N$, podobne $S \subset L$. Pretože zrejme $S \subset E$, tak $S \subset L \cap N \cap E$. Všeobecné rovnice osi S, to sú všeobecné rovnice nadrovín L, N, E. Z nich voľbou jednej neznámej ako parametra dostaneme parametrické rovnice osi S: $x_1 = 4+3t$, $\quad x_2 = 1+t$, $\quad x_3 = 2+2t$, $\quad x_4 = 6t$, kde $B = [4,1,2,0]$, $A[7,2,4,6]$.

Riešenie 2. Teraz použijeme konštrukciu z dôkazu Vety 10.24. Nech $\langle\vec{k}\rangle = (\vec{K}+\vec{M})^{\pm\vec{E}}$, kde $E = \overline{K \cup M}$. To znamená, že $\vec{k} = d_1\overrightarrow{CD} + d_2\overrightarrow{EF} + d_3\overrightarrow{CE}$. Keďže $\vec{k}.\overrightarrow{EF} = 0$, $\vec{k}.\overrightarrow{CD} = 0$ a $\overrightarrow{EF}(-2,-10,-16,8)$, $\overrightarrow{CD}(1,1,1,-1)$, $\overrightarrow{CE}(6,8,12,0)$, dostávame tak rovnice

$$\begin{aligned} -9d_1 + 106d_2 - 71d_3 &= 0 \\ 2d_1 - 18d_2 + 13d_3 &= 0, \end{aligned}$$

odkiaľ $d_1 = 4$, $d_2 = -1$, $d_3 = -2$ (alebo ich nenulové násobky). Po dosadení do rovnice pre $\vec{k}$ dostaneme $\vec{k}(3r,1r,2r,6r)$. Keď $P = K + \langle\vec{k}\rangle$, potom $B = P \cap M$ a tak $S = B + \langle\vec{k}\rangle$.

Riešenie 3. Nech $S = \overline{XY}$ je os priamok K, M, $X \in K, Y \in M$; potom

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XY} = Y - X = \quad & (C + t\overrightarrow{CD}) - (E + r\overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{EC} + t\overrightarrow{CD} - r\overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{XY}.\overrightarrow{CD} = 0 \;\Rightarrow\quad & \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CD} + t\overrightarrow{CD}^2 - r\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD} \quad = \quad 0 \\ \overrightarrow{XY}.\overrightarrow{EF} = 0 \;\Rightarrow\quad & \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EF} + t\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EF} - r\overrightarrow{EF}^2 \quad = \quad 0\,. \end{aligned}$$

Cvičenie

10.1 Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú ľubovoľné vektory priestoru $\vec{E_n}$. Dokážte, že vektor $-(\vec{u}.\vec{v})\vec{u} + (\vec{u}.\vec{u})\vec{v}$ je kolmý na vektor $\vec{u}$.

10.2 Dokážte, že ak $\vec{u} \perp \vec{v}$ sú lineárne závislé vektory, tak $\vec{u}$ alebo $\vec{v}$ je nulový vektor.

10.3 Nech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E_n}$. Dokážte, že $n \leq 2$, keď v $\vec{E_n}$ platí implikácia

$$\vec{u} \perp \vec{v} \wedge \vec{v} \perp \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{u}, \vec{w} \text{ sú lineárne závislé.}$$

10.4 V E_4 sú dané vektory $\vec{a}(0, 1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3, 0)$, $\vec{c}(1, -1, 1, -1)$ (všetko v ortonormálnej báze). Určte aspoň jednu ortonormálnu bázu priestoru $W = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

10.5 Zistite, či priestory $U = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $V = \langle \vec{c}, \vec{d}, \vec{e} \rangle$ sú (i) totálne kolmé, (ii) kolmé, ak

$\vec{a}(3, 1, 2, 1)$, $\vec{b}(1, 1, 1, -4)$, $\vec{c}(0, -3, 2, -1)$, $\vec{d}(2, 1, 4, 0)$, $\vec{e}(1, -2, 0, -1)$.

10.6 Nech $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ sú lineárne nezávislé vektory, $\vec{v} \perp \vec{v}_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, s$, $\vec{v} \neq \vec{o}$. Dokážte, že sústava $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$, $\vec{v}$ je lineárne nezávislá.

10.7 Zistite, či s priamkou $K = A + \langle \vec{a} \rangle$ inciduje nejaká rovina kolmá na priamku $L = B + \langle \vec{d} \rangle$, ak $\vec{a}, \vec{d}$ sú ako v cvičení 10.5.

10.8 V E_2 sú dané body $A[2, -1]$, $C[-3, 6]$. Nájdite súradnice bodov B, D tak, aby $ABCD$ bol štvorec.

10.9 Dokážte, že ak priamka L je kolmá na podpriestor M priestoru E_n, tak L je totálne kolmá na M.

10.10 Dokážte, že každé dve nadroviny kolmé na nejakú priamku sú rovnobežné.

10.11 Dokážte, že neplatí: ak $K \perp M$ a K nie je totálne kolmý na M, tak K, M sa pretínajú.

10.12 Dokážte, že keď $U, V \subset\subset \vec{E}_n$, potom $U \cap (U \cap V)^{\pm} = (U \cap V)^{\pm U}$.

10.13 Dokážte, že keď $U, V \subset\subset \vec{E}_n$, potom $U \cap V^{\pm} = V^{\pm U}$.

10.14 Dokážte, že existuje prirodzené číslo n tak, že neplatí veta: Ak sú dva podpriestory priestoru E_n kolmé na nejakú priamku, potom sú rovnobežné.

10.15 Nech $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ $(n > 1)$ je báza priestoru $\vec{E}_n$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$ je lineárne nezávislá sústava vektorov a nech $d > 0$ je reálne číslo. Dokážte, že existuje práve jeden vektor $\vec{v} \in \vec{E}_n$ tak, že $\vec{v} \perp \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1} \rangle$, $|\vec{v}| = d$ a usporiadané bázy $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v})$, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ sú rovnako orientované.

10.16 Zistite dimenzie priestorov E_n, v ktorých platí (resp. neplatí) veta: Dve roviny sú na seba kolmé, ak v jednej z nich existuje priamka kolmá na druhú rovinu.

10.17 Nech $U = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $V = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Dokážte, že ak $\dim U = \dim V = 2$ a

$$\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{u} & \vec{b}.\vec{u} \\ \vec{a}.\vec{v} & \vec{b}.\vec{v} \end{vmatrix} = 0,$$

existuje nenulový vektor $\vec{k} \in U$ tak, že $\vec{k} \perp V$.

10.18 Nech bod A neleží na priamke K. Nech B je ortogonálny priemet bodu A na K a nech C je ortogonálny priemet bodu A na priamku L prechádzajúcu bodom B kolmo na K. Dokážte, že C je ortogonálny priemet bodu A do roviny $\overline{K \cup L}$ (Veta o troch kolmiciach).

10.19 Vypočítajte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá inciduje s bodom A, stredom úsečky CB a je rovnobežná s osou priamok AC, BD, ak $C[3, 5, 4]$, $D[-5, 9, 4]$, $A[1, 2, 1]$, $B[-5, 7, 4]$.

10.20 Dané sú body $C[-18, 0, 0, 1]$, $T[-1, 0, 2, 3]$ a vektory $\vec{c}(5, 104, 5, -10)$, $\vec{a}(2, 0, 4, 9)$, $\vec{b}(-4, 1, 0, 2)$. Vypočítajte súradnice bodu $X \in L = C + < \vec{c} >$ tak, aby jeho pravouhlý priemet do roviny $T + < \vec{a}, \vec{b} >$ bol bod T.

10.21 Nech M, N sú dve roviny v R_4, ktoré sa pretínajú v bode O. Nech A je ľubovoľný bod z R_4, $A \notin M \cup N$. Nech $B \in N$, $C \in M$ sú také body, že $\overline{AB} \parallel M$ a $\overline{AC} \parallel N$. Dokážte, že $BACO$ je rovnobežník.

10.22 Vypočítajte súradnice vrcholov kvádra $ABCDEFGH$ tak, aby ležal v nadrovine $N \equiv (-5, 1, 3, -4, 0)$ a aby priamka AB bola rovnobežná s vektorom $(0, 0, ?, ?)$.

10.23 Vypočítajte $t \in R$ tak, aby existovala rovina patriaca zväzku rovín N_1, N_2 a aby bola kolmá na priamku L, keď $N_1 = (10, 4, -10, 14)$, $N_2 = (8, 4, -7, 1)$, $\vec{L} =< (1, 4, t) >$.

10.24 Dané sú dve nerovnobežné roviny $M = A+ < \vec{a}, \vec{b} >$, $N = B+ < \vec{c}, \vec{d} >$. Dokážte, že v M existuje priamka, ktorej pravouhlý priemet do N je bod práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix} = 0.$$

10.25 Nech $M, N \subset\subset E_n$. Dokážte, že ak $\dim M > \dim N > 0$, v M existuje priamka, ktorej pravouhlý priemet do N je bod.

10.26 Nech A, B, C, D sú po dvoch rôzne body priestoru E_n a nech $\overrightarrow{AB} \perp \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\}$ a $\overrightarrow{CD} \perp \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\}$. Dokážte, že body A, B, C, D sú vrcholy *pravouholníka* (t.j. štvoruholníka, ktorého všetky vnútorné uhly sú pravé).

10.27 Nech $M \subset\subset E_n$, $A \notin M, B \notin M$ a nech A_0 resp. B_0 sú pravouhlé priemety A, resp. B do M. Dokážte, že keď $\overline{A_0A}$, $\overline{B_0B}$ nie sú rovnobežné priamky, potom M nie je nadrovina.

10.28 Dané sú body $A[3, -3, 0]$, $B[4, -11, 1]$, $C[21, 8, 4]$, $P[3, 0, 2]$, $Q[-1, -4, 12]$. Na priamke PQ určte bod G tak, aby jeho pravouhlý priemet do roviny $N = \overline{ABC}$ ležal na priamke AB.

10.29 Dokážte, že každé dve čiastočne mimobežné roviny majú nekonečne mnoho osí.

10.30 Dokážte, že keď je priamka kolmá aspoň na dve rôznobežky roviny, tak je kolmá na túto rovinu.

10.31 Dané sú body $A[2, -1, 2, 3]$, $B[2, 4, 0, 2]$, $C[0, 4, 7, 3]$. Určte aspoň jeden ortonormálny repér roviny ABC a vypočítajte súradnice bodov A,B, C v tomto repére.

10.32 Rovina N je daná bodom $A[2, -1, 2, 3]$ a vektormi $\vec{a}(4, -5, 0, 1)$, $\vec{b}(-2, 3, 1, -1)$. Vypočítajte súradnice troch afinne nezávislých bodov tak, aby ich pravouhlé priemety do N splývali.

10.33 Nech v_a, v_b sú telesové výšky štvorstena $ABCD$. Dokážte, že v_a, v_b sa pretínajú práve vtedy, keď $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

10.34 Dané sú body $A[2, 2, 1]$, $B[2, 6, -3]$, $C[7, 11, 2]$, $K[-3, 11, 6]$. Zistite, či pravouhlý priemet K_0 bodu K do $\overline{ABC}$ leží v uhle vrcholovom k dutému uhlu BCA.

10.35 V E_n je daný pravouholník $ABCD$ a bod E, ktorý nie je bodom roviny $\overline{ABC}$. Nech $ABEH$ je rovnobežník a nech priamka K resp. L je výška na stranu AB v $\triangle ABE$ resp. $\triangle ABH$. Dokážte,že $\dim \overline{K \cup L} = 2$.

10.36 Dokážte, že keď existujú aspoň dve rôzne osi disjunktných priestorov, tak tieto osi sú rovnobežné.

10.37 Daný je bod A a nenulový vektor $\vec{v}$. Dokážte, že nasledujúca množina je nadrovina

$$\{X \in E_n; \vec{v}.\overrightarrow{AX} = 0\}.$$

10.38 Nech $U, V \subset\subset \vec{E}_n$, $U =< \vec{p}, \vec{u} >$, $V =< \vec{p}, \vec{v} >$, $dim U = dim V = 2$. Dokážte, že $U \perp V$ práve vtedy, keď $\vec{p}\,\vec{u}.\vec{p}\,\vec{v} = \vec{p}^{\,2}.\vec{u}\,\vec{v}$.

10.39 Nech $K, M \subset\subset E_n$. Dokážte, že $K \perp M$ práve vtedy, keď $(\vec{M} \cap \vec{K})^{\pm} \cap \vec{K}$, $(\vec{K} \cap \vec{M})^{\pm} \cap \vec{M}$ sú netriviálne totálne kolmé priestory.

10.40 Nech K, M sú disjunktné, kolmé ale nie totálne kolmé roviny. Dokážte, že K, M sú čiastočne mimobežné.

10.41 Nech prienik rovín K, N je priamka, $\vec{v} \notin \vec{K} + \vec{N}$ a nech $M = N + \vec{v}$. Dokážte, že K, M sú čiastočne mimobežné roviny.

11 Vzdialenosť v euklidovských priestoroch

Definícia vzdialenosti

Zo stredoškolskej geometrie vieme, že vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok K, L sa rovná vzdialenosti niektorého bodu $A \in K$ od jeho ortogonálneho priemetu A_0 do priamky L. Je evidentné, že keď $X \in K$, $Y \in L$ sú ľubovoľné body, potom vzdialenosť bodov A, A_0 nie je väčšia ako vzdialenosť bodov X, Y. Touto situáciou je motivovaná

Definícia 11.1 *Vzdialenosť neprázdnych podmnožín M, N euklidovského priestoru je reálne číslo*

$$inf\{|XY|; X \in M, Y \in N\},$$

označenie $M \dashv N$ alebo $|MN|$.

Z tejto definície priamo vyplýva, že $M \dashv N = N \dashv M$, pre ľubovoľné neprázdne podmnožiny M, N priestoru E_n.

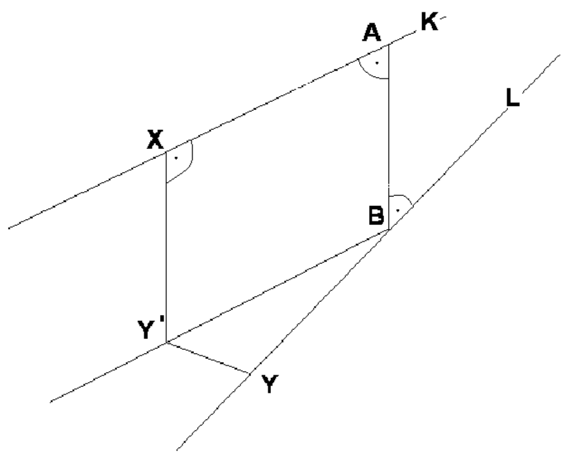
Z matematickej analýzy je známa veta, že každá zdola ohraničená množina reálnych čísel má infimum, preto existuje vzdialenosť dvoch ľubovoľných neprázdnych množín bodov euklidovského priestoru a pritom táto vzdialenosť je nezáporné číslo. Je zrejmé, že keď M, N sa pretínajú, potom $M \dashv N = 0$ (obrátene to neplatí).

Dôkaz nasledujúcej vety je evidentný.

Veta 11.2 *Nech A_0 je ortogonálny priemet bodu A do podpriestoru K euklidovského priestoru E_n. Potom $A \dashv K = |AA_0|$.*

Veta 11.3 *Nech os disjunktných podpriestorov K, L euklidovského priestoru pretína K resp. L v bodoch A resp. B. Potom $K \dashv L = |AB|$.*

Dôkaz. Nech $X \in K$, $Y \in L$ sú ľubovoľné body, $X \neq A$, $Y \neq B$ (v opačnom prípade $|AB| = |XY|$

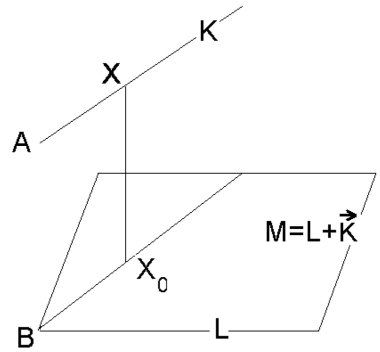


alebo $X = A$ a $Y \neq B$ alebo $X \neq A$ a $Y = B$ a vtedy stačí použiť Vetu 11.2); Nech Y' je taký bod, že $\overrightarrow{XY'} = \overrightarrow{AB}$ a $Y' \neq Y$, potom $\overrightarrow{BY'} = \overrightarrow{AX}$. Pretože vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY'}$ je kolmý na vektory $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{YB}$ ($\overrightarrow{AX} \in \vec{K}$, $\overrightarrow{YB} \in \vec{L}$), tak je kolmý aj na ich lineárnu kombináciu $\overrightarrow{YB} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{BY'} = \overrightarrow{YY'}$, teda $\overrightarrow{XY'} \perp \overrightarrow{YY'}$, t.j. $\triangle XYY'$ je pravouhlý s preponou XY, preto $|XY| > |XY'| = |AB|$.

Veta 11.4 *Keď K, L sú podpriestory euklidovského priestoru E_n, potom pre každé $X \in K$*

$$K \dashv L = X \dashv (L + \vec{K}) \; .$$

Dôkaz: Označme $M = L + \vec{K}$. Keď K, L sa pretínajú, potom $K \dashv L = 0$ a tiež $K \subset M$, takže



pre každé $X \in K$ je $X \dashv M = 0$. Predpokladajme, že $K \cap L = \emptyset$; potom existuje ich os, nech je to $\overline{AB}$, $A \in K$, $B \in L$. Zrejme $\overline{AB}$ je aj os priestorov K, M preto $K \dashv L = K \dashv M$. Nech $X \in K$ je ľubovoľný bod, X_0 jeho pravouhlý priemet do M. Potom $\overline{XX_0} \perp M$ a preto $\overline{XX_0}$ je aj osou priestorov K, M. To znamená, že $X \dashv M = X \dashv X_0 = K \dashv M$. Pretože $\vec{K} \subset \vec{M}$, priamka XX_0 je kolmá na K a je teda osou priestorov K, L, tým je dôkaz skončený.

Projekcia vektora

Vety o vzdialenosti podpriestorov priestoruE_n, uvedené v predošlom článku, neumožňujú priamo túto vzdialenosť vypočítať. Pre takéto účely je užitočný pojem projekcie vektora.

Definícia 11.5 *Nech $\vec{v}$ je vektor z $\vec{E}_n$ a U je podpriestor priestoru $\vec{E}_n$.* Projekcia vektora *$\vec{v}$ do U je taký vektor $\vec{v}_0 \in U$, že $(\vec{v} - \vec{v}_0) \perp U$; označenie $\Pi_U \vec{v} = \vec{v}_0$.*

Nech $\vec{v}_0$ je projekcia vektora $\vec{v}$ do U a nech $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ je ortogonálna báza priestoru U. Potom $(\vec{v} - \vec{v}_0) \perp \vec{u}_i$ pre všetky $i = 1, \dots, r$, čiže $(\vec{v} - \vec{v}_0).\vec{u}_i = 0$ t.j. $\vec{v}.\vec{u}_i = \vec{v}_0.\vec{u}_i$ pre všetky $i = 1, \dots, r$. Keďže $\vec{v}_0 \in U$, existujú skaláry $d_1, \dots, d_r$ tak, že $\vec{v}_0 = d_1\vec{u}_1 + \dots + d_r\vec{u}_r$, preto $\vec{v}.\vec{u}_i = (d_1\vec{u}_1 + \dots + d_r\vec{u}_r)\vec{u}_i = d_i\vec{u}_i\vec{u}_i$, čiže $d_i = \dfrac{\vec{v}.\vec{u}_i}{\vec{u}_i\vec{u}_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$. To znamená, že

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}.\vec{u}_1}{\vec{u}_1.\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v}\vec{u}_r}{\vec{u}_r\vec{u}_r}\vec{u}_r \tag{11.1}$$

je hľadaná projekcia vektora $\vec{v}$ do U. Pretože skaláry $d_1, \dots, d_r$ sú určené jednoznačne, existuje takýto vektor jediný. Teda projekcia vektora do priestoru je jednoznačne určený vektor. Ak vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$ generujú priestor U, vektor $\vec{v}_0 = \Pi_U \vec{v}$ nazývame tiež projekciou vektora $\vec{v}$ na sústavu vektorov $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$ a píšeme $\vec{v}_0 = \Pi_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s} \vec{v}$. Pre $s = 1$ z (11.1) dostávame

$$\Pi_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\vec{u} \tag{11.2}$$

projekciu vektora $\vec{v}$ do priestoru $\langle \vec{u} \rangle$ a teda aj na vektor $\vec{u}$ a na všetky jeho nenulové skalárne násobky. Pre dĺžku projekcie vektora na vektor platí $|\vec{v}_0| = |\dfrac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}^2}||\vec{u}| = \dfrac{|\vec{v}.\vec{u}|}{|\vec{u}|}$, čiže

$$|\Pi_{\vec{u}}.\vec{v}| = \frac{|\vec{v}\vec{u}|}{|\vec{u}|}. \tag{11.3}$$

Lema 11.6 *Nech A_0, B_0 sú ortogonálne priemety bodov A, B do priamky L. Potom vektor $\overrightarrow{A_0B_0}$ je projekcia vektora $\overrightarrow{AB}$ na smerový vektor $\vec{u}$ priamky L (čiže aj do priestoru L).*

Dôkaz. Stačí dokázať, že $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_0B_0}) \perp \vec{u}$. Vzhľadom na (1.7) môžeme písať $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_0B_0}).\vec{u}= (\overrightarrow{AA_0} - \overrightarrow{BB_0}).\vec{u}=\overrightarrow{AA_0}.\vec{u} - \overrightarrow{BB_0}.\vec{u} = 0$.

Vektor $\overrightarrow{A_0B_0}$ nazývame tiež projekciou vektora $\overrightarrow{AB}$ do priamky L. Z lemy 11.6 vyplýva, že projekcia vektora $\overrightarrow{AB}$ do ľubovoľnej priamky rovnobežnej s L je ten istý vektor $\overrightarrow{A_0B_0}$.

Výpočet vzdialeností

Veta 11.7 *Nech K, L sú disjunktné podpriestory priestoru E_n, $\vec{u}$ je smerový vektor osi priestorov K, L. Nech $X \in K$, $Y \in L$ sú ľubovoľné body, potom*

$$K \dashv L = |\Pi_{\vec{u}} \overrightarrow{XY}|.$$

Dôkaz. Nech A, B sú priesečníky osi S priestorov K, L s týmito priestormi. Potom ortogonálne priemety bodov X, Y do S sú body A, B a to znamená, že $\Pi_{\vec{u}} \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$; podľa Vety 11.3 je však $K \dashv L = |AB|$.

Veta 11.8 *Daný je bod $A[a_1, \ldots, a_n]$ a podpriestor K priestoru E_n bodom $B[b_1, \ldots, b_n]$ a bázou $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ svojho zamerania (súradnice sú dané v ortonormálnom repére). Potom*

$$A \dashv K = \sqrt{\frac{G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \overrightarrow{BA})}{G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)}} \tag{11.4}$$

Dôkaz. Nech A_0 je ortogonálny priemet bodu A do K. Gramov determinant $G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \overrightarrow{BA})$ $= G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{A_0A})$ upravíme podľa nasledujúceho pravidla pre determinanty

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,n-1} & b_1 + c_1 \\ \\ a_{n,1} \ldots a_{n,n-1} & b_n + c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,n-1} & b_1 \\ \\ a_{n,1} \ldots a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,n-1} & c_1 \\ \\ a_{n,1} \ldots a_{n,n-1} & c_n \end{vmatrix},$$

dostaneme tak dva determinanty, na každý z ktorých použijeme opäť toto pravidlo (avšak pre riadky). Potom využijeme fakt, že $\overrightarrow{A_0A}.\vec{v}_i = 0$ pre $i = 1, \ldots, r$ a pretože $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \overrightarrow{BA_0}$ sú lineárne závislé, tak aj $G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \overrightarrow{BA_0}) = 0$; dostaneme tak rovnosť

$$G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \overrightarrow{BA}) = G(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)\overrightarrow{A_0A}^2,$$

odkiaľ vzhľadom na Vetu 11.2 už vyplýva 11.4.

Veta 11.9 *Vzdialenosť bodu $A[a_1, \ldots, a_n]$ od nadroviny $N : d_1x_1 + \ldots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$ (repér je ortonormálny) je daná rovnosťou*

$$A \dashv N = \frac{|d_1a_1 + \cdots + d_na_n + d_{n+1}|}{\sqrt{{d_1}^2 + \cdots + {d_n}^2}} \tag{11.5}$$

Dôkaz. Nech $B[b_1, \ldots, b_n] \in N$, t.j. $d_1b_1 + \cdots + d_nb_n + d_{n+1} = 0$, $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. Potom

$$A \dashv N = |\Pi_{\vec{d}} \overrightarrow{AB}| = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|\sum(b_i - a_i)d_i|}{|\vec{d}|} = \frac{|d_1b_1 + \cdots + d_nb_n + d_{n+1} - (d_1a_1 + \cdots + d_na_n + d_{n+1})|}{|\vec{d}|},$$

odkiaľ dostávame 11.5.

Dôsledok 11.10 *Nech $N : d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + a = 0$, $\quad M : d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + b = 0$ sú rovnobežné nadroviny (repér je ortonormálny). Potom*

$$N \dashv M = \frac{|a - b|}{\sqrt{d_1^2 + \cdots + d_n^2}}. \tag{11.6}$$

Dôkaz. Nech $A[a_1, \ldots, a_n] \in N$, potom $-a = d_1a_1 + \cdots + d_na_n$. Podľa Vety 11.4 $N \dashv M = A \dashv M$, preto možno použiť (11.5), takže

$$A \dashv M = \frac{|d_1a_1 + \cdots + d_na_n + b|}{\sqrt{d_1^2 + \cdots + d_n^2}} = \frac{|-a + b|}{\sqrt{d_1^2 + \cdots + d_n^2}}.$$

Príklad 11.11 *V E_4 je daná rovina $L = B + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ a priamka $K = \overline{AC}$. Vypočítajte vzdialenosť priamky K od roviny L, ak je dané $A[2, 3, 1, 0]$, $B[-1, 2, 4, 2]$, $\vec{v}_1(-1, 2, 0, 0)$, $C[-1, 3, 0, 2]$, $\vec{v}_2(3, 2, 1, 1)$ (repér je ortonormálny).*

Riešenie. Nech $M = K + \vec{L}$; potom $M = A + \langle\overrightarrow{AC}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle$. Podľa Vety 11.4 $K \dashv L = M \dashv L = M \dashv B$. Teraz určíme bázu priestoru M, aby sme mohli použiť vzorec (11.4). $\overrightarrow{AC}(-3,0,-1,2), \overrightarrow{AB}(-3,-1,3,2)$. Zistíme hodnosť matice

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynechaním prvého stĺpca dostaneme maticu, ktorej determinant je rôzny od nuly, preto vektory $\overrightarrow{AC}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$, sú lineárne nezávislé, čiže tvoria bázu priestoru $\vec{M}$. Môžeme preto použiť vzorec (11.4):

$$M \dashv B = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{AC}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AB})}{G(\overrightarrow{AC}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)}}, \qquad G(\overrightarrow{AC}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 14 & 3 & -8 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 15 & -6 \\ 10 & 1 & -6 & 23 \end{vmatrix} = 8281$$

$$G(\overrightarrow{AC}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 14 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 1 \\ -8 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 533, \qquad K \dashv L = \sqrt{\frac{8281}{533}} \doteq 3.94.$$

Príklad 11.12 *Vypočítajte vzdialenosť rovín $N = \overline{ABC}$, M, keď je dané $A[2,3,1]$, $B[0,3,-3]$, $C[2,2,-2]$, $M : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5 = 0$ (všetko v ortonormálnom repére).*

Riešenie 1. Pre vzájomnú polohu dvoch rovín v E_3 sú len dve možnosti, buď sú rôznobežné (a vtedy ich vzdialenosť je 0), alebo rovnobežné. Aby vzdialenosť rovín N, M bola rôzna od nuly musia byť rovnobežné. Preto zistíme, či smerové vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ roviny N sú kolmé na normálový vektor $(2,3,-1)$ roviny M. $\overrightarrow{AB}(-2,0,-4)$, $\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$; $\overrightarrow{AB}.(2,3,-1) = 0$, $\overrightarrow{AC}.(2,3,-1) = 0$; to znamená, že $N \| M$. Preto môžeme použiť vzorec (11.5)

$$N \dashv M = A \dashv M = \frac{|2.2 + 3.3 - 1.1 + 5|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{17}{\sqrt{14}};$$

Riešenie 2. Vypočítame všeobecnú rovnicu nadroviny N:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & x_2 - 3 & x_3 - 1 \\ 0 - 2 & 3 - 3 & -3 - 1 \\ 2 - 2 & 2 - 3 & -2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - 2 & x_2 - 3 & x_3 - 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12 = 0.$$

Roviny sú rovnobežné lebo majú lineárne závislé normálové vektory. Ich vzdialenosť určíme podľa (11.6).

$$N \dashv M = \frac{|-12 - 5|}{\sqrt{14}} = \frac{17}{\sqrt{14}}.$$

Množiny bodov definované pomocou vzdialeností

Kružnica, kruh, guľová plocha sú definované pomocou vzdialenosti bodov. Tieto pojmy zovšeobecňuje

Definícia 11.13 *Daný je bod $C \in E_n$ a kladné reálne číslo r. Množinu*

$$K[C,r] = \{X \in E_n;\ |\overrightarrow{CX}| = r\}$$

nazývame guľová nadplocha *a množinu*

$$k[C,r] = \{X \in E_n;\ |CX| \le r\}$$

nadguľa *v E_n so stredom C a polomerom r. Guľovú nadplochu v E_2 resp. E_3 nazývame* kružnica*, resp.* guľová plocha*. Nadguľu v E_1, E_2, E_3 nazývame v poradí* uzavretý interval, kruh*, resp.* guľa*. Priamku (resp. podpriestor euklidovského priestoru), ktorá pretína guľovú nadplochu práve v jednom bode (dotykovom) nazývame* dotyčnica *(resp.* dotykový priestor*) tejto nadplochy.*

Úloha 11.14 *Nech $K[S;r]$, $K_1[S_1,r_1]$ sú dve kružnice v E_2. Dve kružnice sa dotýkajú, ak ich prienikom je jeden bod. Vyšetrite za akých podmienok pre $|SS_1|, r, r_1$ sa kružnice K, K_1 dotýkajú, pretínajú vo dvoch rôznych bodoch alebo nepretínajú.*

Cvičenie

V nasledujúcich cvičeniach predpokladáme, že súradnicový systém je ortonormálny.

11.1 Nech $M,N \subset\subset E_n$, $n > 0$ a nech A, C ležia v M, B, D v N tak, že A, B, C sú nekolineárne body, vektory $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ sú kolmé na M a $|AC| = |BD|$. Dokážte, že priestory M, N nie sú mimobežné.

11.2 Nech A, B, C sú ľubovoľné po dvoch rôzne body roviny E_2. Dokážte, že osi úsečiek AB, BC, CA patria do zväzku priamok.

11.3 Zovšeobecnite predošlé cvičenie na priestor E_n.

11.4 Nech $A \neq B$ sú body priestoru E_n. Dokážte, že $\{X \in E_n;\ |AX| = |BX|\}$ je nadrovina v E_n.

11.5 Dokážte, že implikácia $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$ je pravdivá.

11.6 Dokážte, že ak existujú aspoň dve rôzne osi disjunktných podpriestorov K, L priestoru E_n, tak $K \| L$ alebo K, L sú čiastočne mimobežné.

11.7 Dokážte, že všetky výšky trojuholníka incidujú so zväzkom priamok (*výška trojuholníka* je priamka prechádzajúca jeho vrcholom kolmo na protiľahlú stranu a ležiaca v rovine tohto trojuholníka).

11.8 V rovine $3x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$ nájdite taký bod, ktorý má od bodov $A[1, 2, 3]$, $B[-1, 1, 0]$ rovnaké vzdialenosti; akú množinu tvoria všetky také body ?

11.9 Na polpriamke $x_1 = 2+3t$, $x_2 = 1-2t$, $t \geq 0$ nájdite taký bod, ktorého vzdialenosť od jej hraničného bodu je 3.

11.10 Na priamke AB nájdite všetky také body, ktorých vzdialenosť od nadroviny $2x_1-x_2-2x_3+4x_4+7 = 0$ je 4, ak $A[3, 1, 1, -1]$, $B[4, -1, -2, -7]$.

11.11 Dokážte, že množina všetkých bodov roviny E_2 rovnako vzdialených od dvoch daných rôznobežiek, sú dve navzájom kolmé priamky. Napíšte rovnice týchto priamok, ak dané rôznobežky sú $3x_1 + 4x_2 + 7 = 0$, $-2x_1 + 5x_2 - 7 = 0$.

11.12 Nájdite množinu všetkých bodov priestoru E_n, $n > 2$, rovnako vzdialených od dvoch daných nadrovín.

11.13 Dokážte, že vzdialenosť bodu A od nadroviny $N = B+ < \vec{n} >^{\pm}$ je $\dfrac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{|\vec{n}|}$.

11.14 V E_3 je daný bod $A[0, 0, 1]$. Dokážte, že množina všetkých bodov roviny $x_3 = 0$, ktorých vzdialenosť od bodu A je 5 je kružnica. Vypočítajte jej rovnicu.

11.15 Bodmi $A[1, 2]$, $B[3, -1]$ zostrojte dve priamky, ktorých vzdialenosť je 3.

11.16 Zostrojte všetky priamky, ktorých vzdialenosť od bodov $A[7, -4]$, $B[-9, 0]$ je 5 (sú štyri). Dokážte, že sú to spoločné dotyčnice kružníc $K[A, 5]$, $H[B, 5]$.

11.17 Dané sú kladné reálne čísla m, n a dva rôzne body A, B roviny E_2. Dokážte, že $\{X \in E_2;\ |AX| : |BX| = m : n\}$ je kružnica, ak $m \neq n$ a priamka, ak $m = n$. Táto kružnica sa nazýva *Apollóniova kružnica.*

11.18 Dané sú dve nesústredné (t.j. $S \neq T$) guľové nadplochy K[S,r], $H[T, p]$ v E_n, $n \geq 2$. Dokážte, že

$$\{X \in E_n;\ |XS|^2 - r^2 = |XT|^2 - p^2\}$$

je nadrovina, pričom táto nadrovina inciduje s prienikom $K \cap M$ a je kolmá na priamku ST.

11.19 Dokážte, že všetky osi vnútorných uhlov (osou uhla nazývame priamku, na ktorej ležia všetky body daného uhla, rovnako vzdialené od ramien tohto uhla) daného trojuholníka incidujú so zväzkom priamok.

11.20 Nech priamka L sa dotýka guľovej nadplochy $K[C, r]$ v bode T. Dokážte, že $\overrightarrow{CT} \perp L$.

11.21 Daná je priamka L a rovina N v priestore E_3. Dokážte, že keď na priamke L neexistuje bod, ktorého vzdialenosť od N je rovná 4, potom $L \| N$.

11.22 Dokážte, že množina $\{X \in E_n;\ |AX|^2 - |BX|^2 = d\}$ je nadrovina pre ľubovoľné rôzne body A, B priestoru E_n a ľubovoľné reálne číslo d.

11.23 Dokážte identitu $\Pi_{\vec{u}}\vec{v} + \Pi_{\vec{u}}\vec{w} = \Pi_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w})$.

11.24 Dané sú body $D[2, 9, 2, 3]$, $B[-1, 7, 9, 9]$, $Q[-1, 2, -11, -6]$. Dokážte, že množina všetkých bodov C roviny BDQ takých, že $ABCD$ je rovnobežník, $Q \in \overline{AB}$ a $|AB| >= |AD|$ je polpriamka, označme ju $\overleftarrow{EF}$. Vypočítajte súradnice bodov E, F.

11.25 Dané sú body $A[-5,\ -1,\ 10]$, $B[7,\ 5,\ -11]$, $C[4, -4, -11]$, $D[-2, t, 10]$. Vypočítajte t a súradnice bodov K, N tak, aby existoval obdĺžnik $KLMN$ a aby $K, M \in \overline{AB}$, $L, N \in \overline{CD}$.

11.26 Vzdialenosť rovnobežných rovín M, N priestoru E_3 je $10\sqrt{2}$. Vrstva V je prienik polpriestorov NA, MB, kde $A \in M$ $B \in N$. Vypočítajte všeobecnú rovnicu roviny M tak, aby bod $D[0, 1, 1]$ ležal vo V, ak $N \equiv 4x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$.

11.27 Dané sú body $A[2, 0, 4]$, $B[1, -5, 0]$ a rovina $N \equiv 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5 = 0$. Nech K, L sú priamky rovnobežné s N, K prechádza bodom A a L bodom B. Vypočítajte

(i) vzdialenosť priamok K, L, keď K, L sú mimobežky
(ii) súradnice smerového vektora priamky K tak, aby $K \parallel L$ a aby vzdialenosť priamok K, L bola maximálna
(iii) súradnice smerového vektora priamky K tak, aby $K \parallel L$ a aby vzdialenosť priamok K, L bola minimálna.

11.28 V rovine $M = A + < \vec{a}, \vec{b} >$ zvoľte body C, B tak, aby trojuholník ACB bol rovnoramenný a pravouhlý s preponou CB a aby jeho obsah bol 50, ak $A[1, -3, 0, 0]$, $\vec{a}(-3, 0, 0, 4)$, $\vec{b}(1, 2, , 3, -1)$.

11.29 Na uhlopriečke AC kosoštvorca $ABCD$ je daný bod $E[3, 7]$, tak, že $(ACE) = -1/5$, $C[13, -8]$. Vypočítajte všeobecnú rovnicu priamky AB, keď $BEDF$ je štvorec.

11.30 Daný je kváder $ABCDEFGH = K$ a priamka $L = \overline{IJ}$ tak, že I je stred dvojice H, G a $(BAJ) = 4$. Vypočítajte dĺžku pravouhlého priemetu prieniku $K \cap L$ do roviny ABD, keď $\overrightarrow{AD}(0, -5, 5, -5, ?)$, $\overrightarrow{DC}(-2, 6, 4, 2, 2)$.

11.31 Dané sú po dvoch rôzne body A_0, A_1, A_2 v euklidovskom priestore E_4. Dokážte, že množiny $N_i = \{X \in E_4; X \dashv A_j = X \dashv A_k\}$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \neq k \neq i$, sú nadroviny patriace zväzku nadrovín. Kedy bude tento zväzok nevlastný?

11.32 Nech každý z bodov $X \neq Y$ má rovnaké vzdialenosti od bodov A, B. Dokážte, že každý bod priamky XY má rovnaké vzdialenosti od bodov A, B.

11.33 Dokážte, že neexistuje štvorsten $ABCD$ tak, že $\overline{AB} \perp \overline{AC} \perp \overline{CD}$ a $|AC| = |BD|$.

11.34 Dané sú body $A[-7, 0]$, $B[7, 0]$, $C[0, 7]$. Zistite či existuje $X \in int(op\overleftarrow{BA})$ tak, že

$$(B \dashv \overline{AC}) - (B \dashv \overline{BC}) \neq (X \dashv \overline{AC}) - (X \dashv \overline{BC}).$$

11.35 Dokážte, že ku každému simplexu priestoru E_n, $n > 0$, existuje práve jeden bod, ktorý má tú istú vzdialenosť od každého jeho vrcholu.

11.36 Dokážte, že pre každé $n > 1$, existuje rovnostranný simplex priestoru E_n.

11.37 Daná je polrovina ABC a priamka DF rovnobežná s AB a ležiaca v rovine ABC. Vypočítajte súradnice bodu G tak, aby $G \in \overline{DF}$, $G \in \sphericalangle ABC$, $G \notin \sphericalangle BCA$ a $|AG| = 25$, keď $A[2, 1, 0, 0]$, $B[0, 1, 3, 1]$, $C[2, 2, 2, 1]$, $D[0, 0, ?, ?]$.

11.38 Dané sú vektory $\overrightarrow{AB}(0, -3, -1, 2)$, $\overrightarrow{CD}(4, 0, -2, 0)$, $\overrightarrow{AC}(0, 0, 5, 7)$. Nech $K \in \overline{AB}$, $L \in \overline{CD}$. Nech KLM je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou LM a najmenším možným obsahom. Vypočítajte tento obsah.

11.39 Dané sú body $A[-4,0]$, $B[4,0]$, $C[0,3]$. Dokážte, že pre $\forall X \in \triangle ABC$ platí

$$(X \dashv \overline{AC}) + (X \dashv \overline{BC}) \leq \frac{24}{5}.$$

11.40 Dané sú body $A[-8,-15]$, $B[3,2]$, $E[10,21]$. Vypočítajte súradnice vrcholu D lichobežníka $ABCD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, keď bod E leží na priamke CD a tri strany lichobežníka $ABCD$ majú rovnakú veľkosť. Koľko je takých bodov ?

11.41 Dané sú body $A[21,20,4]$, $B[25,22,0]$, $C[11,19,14]$ $D[11,21,14]$. Vypočítajte súradnice vrcholov aspoň jedného obdĺžnika $KNLM$ tak, aby $\{K,L,N,M\} \subset M \cup N$.

11.42 Nech K,L sú mimobežné priamky rovnobežné s nadrovinou N priestoru E_n. Dokážte, že pre každé $n \geq 3$ platí $K \dashv L = (K \dashv N) + (L \dashv N)$ alebo $K \dashv L = |(K \dashv N) - (L \dashv N)|$.

11.43 Dané sú body $P[3,3,-2]$, $Q[4,4,-3]$, $R[12,-5,3]$, $S[-2,11,5]$. Vypočítajte súradnice všetkých vrcholov jedného zo štvorcov, ktoré sú prienikom takých dvoch kociek, že na každej z priamok $K = \overline{PQ}$, $L = \overline{RS}$ leží práve jedna hrana jednej a práve jedna hrana druhej kocky.

11.44 Dané sú body $A[-4,1]$, $B[6,-14]$.
  (i) Vypočítajte rovnicu množiny $\{X \in E_2; |XA| : |XA| = 2:3\}$. Aká je to množina?
  (ii) Vypočítajte všeobecnú rovnicu priamky L rovnobežnej s osou x-ovou tak, aby na L existoval práve jeden taký bod, ktorého pomer vzdialeností od bodov A, B je $2:3$. Koľko je takých priamok?

11.45 V R_2 sú dané body A, B, C tak, že C leží medzi A,B. Nech Z leží na osi úsečky AC, Y leží na osi úsečky BC a nech $XYCZ$ je rovnobežník. Dokážte, že X leží na osi úsečky AB.

11.46 Dokážte, že množina všetkých bodov priestoru E_n rovnako vzdialených od daných bodov A, B, C je buď prázdna množina alebo podpriestor priestoru E_n.

11.47 Dané sú body $A[1,0,1,0]$, $B[0,2,1,3]$, $C[2,2,5,2]$, $D[1,1,1,-7]$, $E[-1,5,1,-1]$. Zistite, aký útvar je množina $U = \{Z \in E_4; X \in \overline{AB}, Y \in \overline{CDE}$, Z delí úsečku XY na dve úsečky, pomer veľkostí ktorých je $1:2$ $\}$.

11.48 Nech R, S sú stredy strán AB, CD rovnobežníka $ABCD$. Dokážte, že priamky DR, BS delia uhlopriečku AC na tri rovnako veľké úsečky.

11.49 V E_3 je daný $\triangle ABC$. Nech $E \in \overline{AB}$ je taký bod, že $\overline{CE}$ je os $\sphericalangle ACB$. Nájdite množinu $\{X \in E_3;\ \overline{XE}$ je os $\sphericalangle AXB\}$.

11.50 Nech ABCD je taký štvorsten v E_3, že osi uhlov (ako priamky) $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle ACB$ sa pretínajú v bode E. Dokážte, že body E,C,D ležia na guľovej ploche, ktorej stred leží na priamke AB.

11.51 Ktorý z bodov priamky AB má najmenšiu možnú vzdialenosť od nadroviny $N = \overline{CDFG}$, keď $A[3,7,0,0]$, $B[4,2,1,-2]$, $C[0,5,1,-1]$, $D[1,0,2,-3]$ $F[3,1,-2,3]$, $G[2,-1,1,0]$.

11.52 Daná je nadrovina $K \equiv (1,-4,0,2,-1)$ a bod $B[0,1,5,1]$. Vypočítajte všeobecnú rovnicu nadroviny N tak, aby K, N patrili do toho istého nevlastného zväzku nadrovín a aby pomer ich vzdialeností od bodu B bol (v danom poradí) 3:2.

11.53 Nech $C = A \div B$ sú body roviny E_2. Nájdite množiny

$$\begin{aligned} M &= \{X \in E_2 : 2|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2\} \\ N &= \{X \in E_2 : 2|AX| = |BX|\} \\ P &= \{X \in E_2 : |AX|^2 - |BX|^2 = |AB|^2\}. \end{aligned}$$

12 Veľkosti uhlov

Všetky úvahy v tomto článku budú v rovine E_2, v ktorej $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je ortonormálny repér a $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ je kladná báza.

Uhol vektorov

Veľkosť uhla budeme definovať pomocou goniometrických funkcií. Predpokladáme preto, že čitateľ je (z matematickej analýzy) oboznámený so základnými vlastnosťami goniometrických funkcií. Pripomeňme len, že funkcie sínus, kosínus možno definovať ako súčty nekonečných radov

$$\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad \sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Potom pre všetky $\alpha, \beta \in R$ a pre všetky celé čísla k platí

$$\begin{array}{ll} \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha & \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \sin\alpha.\sin\beta \\ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha & \sin(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\sin\beta \pm \sin\alpha.\cos\beta \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{array}$$

Veta 12.15 *Pre ľubovoľné $\alpha \in R$, existuje jediné $\alpha_0 \in (-\pi, \pi\rangle$ a $k \in Z$ tak, že $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$. Číslo α_0 nazývame* základná veľkosť *čísla α.*

Dôkaz. Vyplýva z faktu, že R je zjednotením disjunktných intervalov dĺžky 2π

$$\ldots(-5\pi, -3\pi >, \ (-3\pi, -\pi >, \ (-\pi, \pi >, \ (\pi, 3\pi >, \ (3\pi, 5\pi >, \ (5\pi, 7\pi > \ldots \tag{12.7}$$

Ak $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú nenulové vektory, Cauchy-Buňjakovského nerovnosť možno prepísať do tvaru $-1 \leq \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \leq 1$. Táto nerovnosť umožňuje uviesť nasledujúcu definíciu, motivovanú rovnosťou (9.1).

Definícia 12.16 Uhol *(alebo* odchýlka*) nenulových vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ (priestoru $\vec{E}_n$) je reálne číslo $\sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} \in \langle 0, \pi\rangle$ dané rovnosťou*

$$\sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} = arc\ \cos \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}. \tag{12.8}$$

Priamym výpočtom možno dokázať, že pre ľubovoľné nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} \quad &= \quad \sphericalangle\, \vec{v}\vec{u} && (12.9) \\ \vec{u} \in \langle\vec{x}\rangle^+, \vec{v} \in \langle\vec{y}\rangle^+ \quad &\Rightarrow \quad \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} = \sphericalangle\, \vec{x}\vec{y} && (12.10) \\ \vec{u} \in \langle\vec{x}\rangle^-, \vec{v} \in \langle\vec{y}\rangle^- \quad &\Rightarrow \quad \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} = \sphericalangle\, \vec{x}\vec{y} && (12.11) \\ \vec{u} \in \langle\vec{x}\rangle^+, \vec{v} \in \langle\vec{y}\rangle^- \quad &\Rightarrow \quad \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} = \pi - \sphericalangle\, \vec{x}\vec{y} && (12.12) \end{aligned}$$

Ak $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sú polpriamky, tak z (12.10) vyplýva, že pre každé $X \in int\overline{AB}$, $Y \in int\overline{AC}$, platí $\sphericalangle\, \overrightarrow{AX}\overrightarrow{AY} = \sphericalangle\, \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$. Preto možno definovať uhol (alebo odchýlku) polpriamok AB, AC ako reálne číslo $\sphericalangle\, \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$, t.j. uhol polpriamok AB, AC sa rovná uhlu vektorov $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Orientovaný uhol

Definícia 12.17 *Usporiadanú dvojicu $(\vec{u}, \vec{v})$ nenulových vektorov nazývame* orientovaný uhol *a označujeme $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$. Každé z čísel množiny*

$$\{\ \varepsilon \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} + 2k\pi;\ \ k \textit{ je celé číslo}\}$$

nazývame veľkosť orientovaného uhla $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$, čo skrátene píšeme

$$|\widehat{\vec{u}\vec{v}}| = \varepsilon \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} + 2k\pi,$$

kde ε je znamienko determinantu $\det(\vec{u}^E\vec{v}^E)$ (t.j. ak je tento determinant ≥ 0, kladieme $\varepsilon = +$, ak je záporný kladieme $\varepsilon = -$); číslo $\varepsilon \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v}$ nazývame základná veľkosť orientovaného uhla $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ a ε znamienko základnej veľkosti. Dva orientované uhly $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ sú zhodné (označenie $\widehat{\vec{u}\vec{v}} \cong \widehat{\vec{a}\vec{b}}$), keď ich základné veľkosti sú rovnaké.

Je zrejmé, že v uvedenej definícii znamienko $\varepsilon = +$, keď $\vec{u}, \vec{v}$, je lineárne závislá sústava alebo je rovnako orientovaná ako $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ a $\varepsilon = -$, keď $\vec{u}, \vec{v}$ je opačne orientovaná ako $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Z tejto definície a z definície uhla vektorov vyplýva, že $\varepsilon \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} \in (-\pi, \pi >$ a obrátene, $\alpha \in (-\pi, \pi >$ implikuje $\varepsilon = +$, keď $\alpha \geq 0$ a $\varepsilon = -$, keď $\alpha\ < 0$.

Je zrejmé, že dva orientované uhly $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ sú zhodné práve vtedy, keď

$$\{\ \varepsilon \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v} + 2k\pi;\ \text{k je celé číslo}\} = \{\ \varepsilon \sphericalangle\, \vec{a}\vec{b} + 2k\pi;\ \text{k je celé číslo}\}.$$

Dôsledok 12.18 *Dva orientované uhly sú zhodné práve vtedy, ak rozdiel ich ľubovoľných veľkostí je* $2k\pi$*, pre nejaké celé číslo* k.

Dôsledok 12.19 *Relácia* $\cong$ *je relácia ekvivalencie.*

Veta 12.20 *Nech* $\vec{u}, \vec{v}$ *sú nenulové vektory. Potom*

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\vec{u}\vec{v}}| &= -|\widehat{\vec{v}\vec{u}}| && (12.13)\\
\vec{u} \in \langle\vec{x}\rangle^+, \vec{v} \in \langle\vec{y}\rangle^+ &\Rightarrow \widehat{\vec{u}\vec{v}} \cong \widehat{\vec{x}\vec{y}} && (12.14)\\
\vec{u} \in \langle\vec{x}\rangle^-, \vec{v} \in \langle\vec{y}\rangle^- &\Rightarrow \widehat{\vec{u}\vec{v}} \cong \widehat{\vec{x}\vec{y}} && (12.15)\\
\vec{u} \in \langle\vec{x}\rangle^+, \vec{v} \in \langle\vec{y}\rangle^- &\Rightarrow |\widehat{\vec{u}\vec{v}}| = \pi - |\widehat{\vec{x}\vec{y}}|,\ \textit{pre nejaké veľkosti}\ |\widehat{\vec{u}\vec{v}}|, |\widehat{\vec{x}\vec{y}}| && (12.16)
\end{aligned}
$$

Dôkaz. Vyplýva z (12.9), (12.10),(12.11),(12.12) a z rovností

$$\frac{p\vec{u}.q\vec{v}}{|p\vec{u}||q\vec{v}|} = \frac{pq.\vec{u}\vec{v}}{|pq||\vec{u}||\vec{v}|} = \pm\frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

ktoré platia pre všetky nenulové p, q.

Veta 12.20 umožňuje uviesť nasledujúcu definíciu.

Definícia 12.21 *Orientovaný uhol* $\widehat{\overrightarrow{VA}\overrightarrow{VB}}$ *budeme označovať* $\widehat{AVB}$ *a hovoriť, že* $\widehat{AVB}$ *je orientovaný uhol usporiadanej dvojice polpriamok* $(\overline{VA}, \overline{VB})$; $\overline{VA}$ *(resp.*$\overline{VB}$*) nazývame* začiatočné *(resp.* koncové*) rameno orientovaného uhla* $\widehat{AVB}$.

Dôsledok 12.22 *Pre každé dve polpriamky* VA, VB *je*

$$|\widehat{AVB}| = -|\widehat{BVA}|\ .$$

V definícii orientovaného uhla sme použili oblúkovú mieru uhlov. Často sa však používa stupňová miera. Keď $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je kladná báza, potom

$$
\begin{aligned}
|\widehat{AVB}| &= k.360^\circ,\ \text{ak}\ \overline{VA} = \overline{VB}\\
|\widehat{AVB}| &= 180^\circ + k.360^\circ,\ \text{ak}\ \overline{VA}, \overline{VB}\ \text{sú opačné polpriamky}\\
|\widehat{AVB}| &= 90^\circ + k.360^\circ,\ \ \text{ak}\ \overrightarrow{VA} \perp \overrightarrow{VB}\ \text{ a } (\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})\ \text{ je kladná báza}\\
|\widehat{AVB}| &= 270^\circ + k.360^\circ,\ \text{ak}\ \overrightarrow{VA} \perp \overrightarrow{VB}\ \text{a}\ (\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})\ \text{ je záporná báza.}
\end{aligned}
$$

Keď $\alpha = \sphericalangle\, AVB$, potom

$$
\begin{aligned}
|\widehat{AVB}| &= \alpha + k.360^\circ,\ \ \text{ak}\ (\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})\ \text{je kladná báza}\\
|\widehat{AVB}| &= -\alpha + k.360^\circ,\ \text{ak}\ (\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB})\ \text{je záporná báza.}
\end{aligned}
$$

Veta 12.23 *Nech* $\alpha \in R$ *a nech* $\vec{a}$ *je ort. Potom*

$$\vec{a}_E = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad |\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}| = \alpha.$$

Dôkaz. Nech $\varepsilon_0\alpha_0$, $\varepsilon_1\alpha_1$ sú základné veľkosti uhlov α, $\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}$. Dôkaz implikácie $\Rightarrow$: Pretože $\vec{e_1}_E = (1,0)$, tak

$$\cos\alpha_1 = \cos\sphericalangle\, \vec{e}_1\vec{a} = \frac{\vec{e}_1\vec{a}}{|\vec{e}_1||\vec{a}|} = \cos\alpha = \cos\alpha_0.$$

čiže $\alpha_1 = \alpha_0$. Znamienko ε_1 sa rovná znamienku determinantu

$$\det(\vec{e}_1{}^E\vec{a}^E) = \det\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{pmatrix} = \sin\alpha = \sin\varepsilon_0\alpha_0 = \varepsilon_0\sin\alpha_0$$

odkiaľ vzhľadom na to, že $\sin\alpha_0 > 0$, znamienko čísla $\varepsilon_0\sin\alpha_0$ sa rovná ε_0, je teda $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$. Dôkaz implikácie $\Leftarrow$: Nech $\vec{a} = (a_1, a_2)$; keďže $\varepsilon\alpha_0$ je základná veľkosť uhla α, je základnou veľkosťou aj uhla $\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}$, preto $\cos\alpha = \cos\alpha_0 = \cos\sphericalangle\,\vec{e}_1\vec{a} = \vec{e}_1.\vec{a} = a_1$. Vektor $\vec{a}$ je ort, preto $a_2^2 = 1 - a_1^2 = 1 - \cos^2\alpha_0 = \sin^2\alpha_0$, $a_2 = \pm\sin\alpha_0$. To znamená, že sú dve možnosti $\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ alebo $\vec{a} = (\cos\alpha, -\sin\alpha) = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)$. Obe možnosti splývajú, keď $\alpha = k\pi$, k celé. Druhá možnosť nenastane, keď $\alpha \neq k\pi$ lebo podľa prvej časti dôkazu $|\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}| = -\alpha$, podľa predpokladu je však $|\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}| = \alpha$, odkiaľ $\alpha = -\alpha$ čo implikuje $\alpha = k\pi$, celé k.

Dôsledok 12.24 *Nech $\alpha \in R$. Existuje práve jeden ort $\vec{a}$ tak, že $|\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}| = \alpha$.*

Dôsledok 12.25 *Dva orientované uhly veľkostí α, β sú zhodné práve vtedy, keď*

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad a \quad \sin\alpha = \sin\beta$$

Veta 12.26 *Nech $\vec{a}_E = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{b}_E = (\cos\beta, \sin\beta)$. Potom $|\widehat{\vec{a}\vec{b}}| = \beta - \alpha$.*

Dôkaz. Rovnosť kosínusov

$$\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}} = (\cos\alpha, \sin\alpha).(\cos\beta, \sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha).$$

Vzhľadom na dôsledok 12.25 stačí dokázať, že znamienko základnej veľkosti uhla $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ je to isté ako znamienko čísla $\sin(\beta - \alpha)$:

$$\det(\vec{a}^E, \vec{b}^E) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin(\beta - \alpha)$$

Dôsledok 12.27 *Nech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú ľubovoľné nenulové vektory. Potom $|\widehat{\vec{a}\vec{b}}| + |\widehat{\vec{b}\vec{c}}| = |\widehat{\vec{a}\vec{c}}|$.*

Veta 12.28 *Nech $\vec{a}$ je ort a $\gamma \in R$. Existuje práve jeden ort $\vec{b}$ tak, že $|\widehat{\vec{a}\vec{b}}| = \gamma$.*

Dôkaz. Nech $\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ a nech $\vec{b} = (\cos(\alpha+\gamma), \sin(\alpha+\gamma)$, podľa Vety 12.26 je $|\widehat{\vec{a}\vec{b}}| = \alpha + \gamma - \alpha = \gamma$. Ak by existoval ešte jeden vektor, povedzme $\vec{c}$ tak, že $|\widehat{\vec{a}\vec{c}}| = \gamma$, potom podľa 12.27 $|\widehat{\vec{e}_1\vec{a}}| + |\widehat{\vec{a}\vec{c}}| = |\widehat{\vec{e}_1\vec{c}}| = \alpha + \gamma$ a to znamená, že existujú dva rôzne vektory $\vec{b}, \vec{c}$ tak, že $\widehat{\vec{e}_1\vec{b}} = \alpha + \gamma = \widehat{\vec{e}_1\vec{c}}$, čo odporuje Vete 12.24.

Dôsledok 12.29 *K danej polpriamke $\overleftarrow{VA}$ a $\alpha \in R$ existuje práve jedna polpriamka $\overleftarrow{VB}$, tak, že $|\widehat{AVB}| = \alpha$.*

Úloha 12.30 *Nech $\alpha \neq k\pi$, pre všetky celé k a nech $|\widehat{AVB}| = \alpha$ a $|\widehat{AVC}| = -\alpha$. Dokážte, že polpriamky VB, VC ležia v opačných polrovinách s hranicou VA.*

Veľkosť dutého uhla

Definícia 12.31 *Veľkosť*

(i) *dutého uhla BAC je uhol vektorov $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$; označenie $|\sphericalangle\, BAC|$*

(ii) *priameho uhla je číslo π*

(iii) *nevypuklého uhla BAC je číslo $2\pi - |\sphericalangle\, BAC|$; označenie $|\not\sphericalangle\, BAC|$.*

Kvôli jednoduchosti kladieme $\cos|\sphericalangle BAC| = \cos\sphericalangle BAC$ (podobne pre nevypuklý uhol). Z definície 12.31 vyplýva, že

$$\cos\sphericalangle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}.$$

Dva uhly nazývame *zhodné*, ak ich veľkosti sú rovnaké čísla. Dutý uhol, ktorého veľkosť je z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (resp.$(\frac{\pi}{2}, \pi)$) nazývame *ostrý* (resp. *tupý uhol*). To znamená, že uhol α je ostrý (resp. tupý) práve vtedy, keď $\cos\alpha \in (0,1)$ (resp. $\cos\alpha \in (-1,0)$). Dutý uhol AVB nazývame *pravý uhol*, ak $\overline{AV} \perp \overline{VB}$. To znamená, že dutý uhol α je pravý práve vtedy, keď $\cos\alpha = 0$.

Z Úlohy 12.30 priamo vyplýva

Veta 12.32 *Nech $\alpha \in (0,\pi)$ je ľubovoľné číslo a nech $\overleftarrow{V}\overline{AB}$ je polrovina. V polrovine $\overleftarrow{V}\overline{AB}$ existuje jediná polpriamka VX tak, že $|\sphericalangle XVA| = \alpha$.*

Jednotky miery uhlov

Veľkosť uhla uvedenú v Definícii 12.31 nazývame *oblúková miera*. Jednotkovým uhlom v tejto miere je uhol o veľkosti 1, ktorý nazývame *radián* a skrátene označujeme *rad*. Veľkosť plného uhla je tak $2\pi\,rad$ (častejšie píšeme len 2π a symbol *rad* vynechávame) a veľkosť priameho uhla je π.

Existujú aj iné miery uhlov. Medzi najpoužívanejšie patrí stupňová miera, v nej jednotkovým uhlom je 1° (*stupeň*). Je to uhol, ktorého veľkosť v oblúkovej miere je

$$\frac{2\pi}{360} rad.$$

To znamená, že veľkosť plného (resp. priameho) uhla v stupňovej miere je 360 (resp.180). V stupňovej miere sa používajú aj menšie jednotky ako 1°. Sú to

$$1' \text{ minúta } = \frac{1}{60}1^\circ, \quad 1'' \text{ sekunda } = \frac{1}{60}1'.$$

Na prevádzanie veľkostí z oblúkovej do stupňovej miery a vice versa slúži rovnosť

$$1\,rad \doteq 57^\circ 17' 45''.$$

Ďalšie používané jednotkové uhly sú

$$\begin{aligned} 1\,R \text{ (pravý uhol)} &= \frac{\pi}{2} rad \\ 1^g \text{ (grad)} &= \frac{1}{100} R \\ 1\,md \text{ (matematický dielec)} &= \frac{1}{1000} R \\ 1\,dc \text{ (delostrelecký dielec)} &= \frac{1}{1500} R. \end{aligned}$$

13 Uhol podpriestorov euklidovského priestoru

Definície vzdialenosti dvoch bodov, bodu od podpriestoru, dvoch podpriestorov atď. sme uviedli v jedinej všeobecnej definícii. Podobne by sa dal definovať aj uhol (alebo odchýlka) dvoch ľubovoľných podpriestorov (kladnej dimenzie) priestoru E_n. Takou definíciou by sa však značne skomplikovali výpočty. Preto budeme postupovať "individuálne".

Nech $\vec{a}$, $\vec{c}$ resp. $\vec{b}$, $\vec{d}$ sú smerové vektory priamok K resp. L. Z (12.10), (12.12), (12.11) vyplýva, že číslo $arc\cos\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ nezávisí na voľbe smerových vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ priamok K, L. Preto môže byť uvedená

Definícia 13.33 Uhol *(alebo* odchýlka*) priamok K, L so smerovými vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$ je číslo*

$$\sphericalangle KL = arc\cos\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Dôsledok 13.34 *Ak $K\|M$, $L\|N$ sú priamky, $\sphericalangle KL = \sphericalangle MN$.*

Je zrejmé, že keď priamky K, L sú kolmé, ich uhol (odchýlka) je $\frac{\pi}{2}$.

Definícia 13.35 Uhol *(alebo* odchýlka*)* priamky K a podpriestoru M *priestoru E_n je uhol priamky K a jej pravouhlého priemetu do M; keď $K \perp M$, kladieme $\sphericalangle KM = \frac{\pi}{2}$.*

Definícia 13.36 Uhol *(alebo odchýlka) dvoch* nadrovín *priestoru E_n, $n \geq 2$, je uhol (odchýlka) normál týchto nadrovín.*

Veta 13.37 *Nech $\vec{a}(a_1, \dots, a_n)$ je smerový vektor priamky L, $d_1x_1 + \ldots + d_nx_n + d_n = 0$ je rovnica nadroviny N a nech $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$ (všetko v ortonormálnom repére). Potom*

$$\sphericalangle LN = arc\ \sin\frac{|\vec{a}.\vec{d}|}{|a|.|d|} = arc\ \sin\frac{|d_1a_1 + \cdots + d_na_n|}{\sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)}\sqrt{d_1^2 + \cdots + d_n^2}} \in< 0, \pi/2 > .$$

Dôkaz. Nech $A \in L \setminus N$ a nech A_0 je ortogonálny priemet bodu A do N. Nech $L \cap N = B$ (ak $L \perp N$ alebo $L\|N$ tvrdenie je zrejmé); potom $\triangle BAA_0$ je pravouhlý s preponou BA. $\overline{AA_0} = N_0$ je normála nadroviny N; $\sphericalangle\ L\,\overline{AA_0} = |\sphericalangle\ BAA_0|$, $\sphericalangle\ L\,N = \sphericalangle\ L\,\overline{BA_0} = |\sphericalangle\ ABA_0|$, preto $\sphericalangle LN + \sphericalangle LN_0 = \frac{\pi}{2}$ odkiaľ $\sphericalangle\ L\,N = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle\ L\,N_0$. Zvyšok dôkazu vyplýva z identity $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$ a definície 13.33.

Veta 13.38 *Nech $N \equiv b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + b_{n+1} = 0$, $M \equiv d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + d_{n+1} = 0$ sú rovnice nadrovín N, M v ortonormálnom repére a nech $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$. Potom*

$$\cos\sphericalangle NM = \frac{|\vec{b}.\vec{d}|}{|\vec{b}|.|\vec{d}|} = \frac{|b_1d_1 + \cdots + b_nd_n|}{\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\sqrt{d_1^2 + \cdots + d_n^2}}.$$

Cvičenie

13.1 Nech $\vec{u} \in \langle\vec{v}\rangle^+$ (resp. $\vec{u} \in \langle\vec{v}\rangle^-$) je nenulový vektor. Dokážte, že $\sphericalangle\ \vec{u}\vec{v} = 0$ (resp.$\sphericalangle\ \vec{u}\vec{v} = \pi$).

13.2 Nech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú nenulové vektory a nech $\vec{w} \in \langle\vec{u}\rangle^+ + \langle\vec{v}\rangle^+$. Dokážte, že $\sphericalangle\ \vec{u}\vec{w} + \sphericalangle\ \vec{w}\vec{v} = \sphericalangle\ \vec{u}\vec{v}$.

13.3 Dokážte, že každé dva vrcholové uhly sú zhodné.

13.4 Dokážte, že striedavé uhly ABC, BCD sú zhodné práve vtedy, keď ich ramená $\overline{BA}$, $\overline{CD}$ ležia na rovnobežných priamkach (skrátene ramená sú rovnobežné) a obrátene.

13.5 Dokážte, že súhlasné uhly sú zhodné práve vtedy, keď ich neincidujúce ramená sú rovnobežné.

13.6 Dokážte, že súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov trojuholníka je π rad.

13.7 Nech $\triangle ABC$ je pravouhlý s preponou AB a D je päta kolmice z bodu C na priamku AB. Dokážte, že $D \in \overline{AB}$ a

$$|BC|^2 = |BA|.|BD| \qquad (\text{ Euklidova veta o odvesne})$$
$$|DC|^2 = |DA|.|DB| \qquad (\text{ Euklidova veta o výške}).$$

13.8 Nech $\alpha = \sphericalangle\ BAC$ je vnútorný uhol $\triangle ABC$. Dokážte, že

$$|CB|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC||AB|\cos\alpha \quad (\text{ kosínusová veta})$$

13.9 Dokážte, že ak φ je uhol vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, tak $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

13.10 Dokážte, že ak $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, tak $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sú lineárne závislé vektory.

13.11 Vypočítajte odchýlku hrany BA štvorstena $ABCD$ od podstavy BDC, ak $A[-7, 0, -1, 2]$, $B[25, -1, 0, 4]$, $C[0, 0, 1, -4]$, $D[5, -1, -1, 9]$.

13.12 Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$, ktorého dolná podstava je $ABCD$. Vypočítajte uhol dvoch telesových uhlopriečok tohto rovnobežnostena, ak $A[2,3,0]$, $B[-1,2,1]$, $C[0,0,4]$, $E[2,3,3]$. Ďalej určte uhol dvoch jeho stien.

13.13 Nech $\vec{a}_E = (a_1, \ldots, a_n)$ je ľubovoľný ort euklidovského priestoru $\vec{E}_n$, $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ je ortonormálna báza. Nech $\alpha_i = \sphericalangle\, \vec{a}\, \vec{e}_i$ pre všetky $i = 1 \ldots n$. Dokážte, že

$$\vec{a}_E = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n), \qquad \cos^2\alpha_1 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1$$

(čísla $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n$ nazývame smerové kosíny vektora $\vec{a}$).

13.14 V rovine $N = A + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom A a ktorej uhol s priamkou $L = A + \langle \vec{c} \rangle$ je 60°, ak $A[-1,2,3]$, $\vec{a}(2,-1,0)$, $\vec{b}(4,1,1)$, $\vec{c}(-1,3,1)$. Koľko je takých priamok ?

13.15 Na priamke AB nájdite všetky také body X, aby uhol priamky DX a roviny $N = \overline{ABC}$ bol rovný uhlu priamky CD s rovinou N, ak $A[0,0,-10]$, $B[2,-1,5]$, $C[5,0,5]$, $D[5,-10,4]$.

13.16 Nech $\overset{\longmapsto}{SJ}$ je priemer guľovej plochy G a N jej dotyková rovina v bode J. Nech T_1, T_2 sú rôzne dotyčnice guľovej plochy G v jej bode A a t_1, t_2 ich stredové priemety z bodu S do N. Dokážte, že uhol priamok T_1, T_2 sa rovná uhlu priamok t_1, t_2.

14 Vektorový súčin

V celom tomto článku predpokladáme, že euklidovský priestor je trojrozmerný a $E = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je jeho ortonormálny repér.

Definícia 14.1 *Nech $\vec{u}_E = (u_1, u_2, u_3), \vec{v}_E = (v_1, v_2, v_3)$ sú ľubovoľné vektory. Vektor*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

nazývame vektorový súčin *vektorov $\vec{u}, \vec{v}$. Skalárny súčin $\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v})$ nazývame* zmiešaný súčin *vektorov $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ a označujeme $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$.*

Veta 14.2 *Nech $\vec{w}_E = (w_1, w_2, w_3)$, $\vec{u}_E = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}_E = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{t}$ sú ľubovoľné vektory, r skalár. Potom*

(i) $\vec{u} \times \vec{v} \perp < \vec{u}, \vec{v} >$

(ii) $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

(iii) $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$

(iv) *keď sústava $\vec{u}, \vec{v}$ je lineárne nezávislá, orientované bázy $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}), (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ sú rovnako orientované*

(v) *keď sústava $\vec{u}, \vec{v}$ je lineárne závislá, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$*

(vi) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

(vii) $r(\vec{u} \times \vec{v}) = (r\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (r\vec{v})$

(viii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}, \qquad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

(ix) $(\vec{u} \times \vec{v})(\vec{w} \times \vec{t}) = \begin{vmatrix} \vec{u}.\vec{w} & \vec{u}.\vec{t} \\ \vec{v}.\vec{w} & \vec{v}.\vec{t} \end{vmatrix}$

(x) $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{G(\vec{u}, \vec{v})} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \sphericalangle\, \vec{u}\vec{v}$ *ak $\vec{u}, \vec{v}$ sú nenulové vektory*

(xi) $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

(xii) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\vec{w})\vec{u}$

(xiii) $|[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]|$ *je objem rovnobežnostena* $ABCDEFGH$, *keď* $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Dôkaz. Označme $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{n}$, $\vec{n}_E = (n_1, n_2, n_3)$. (i) Podľa Dôsledku 10.19, súradnice vektora $\vec{n}$ sú súradnice normáloveho vektora nadroviny, ktorej zameranie je $<\vec{u},\vec{v}>$. (ii) Ak rozvinieme prvý determinant v (ii) podľa prvého riadku, dostaneme $w_1n_1 + w_2n_2 + w_3n_3 = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$. Z prvého determinantu dvojitou výmenou riadkov dostaneme druhý determinant. (iii) $[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}] = (\vec{u}\times\vec{v}).(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{u}\times\vec{v})^2 = |\vec{u}\times\vec{v}|^2$ (iv) keď sústava $\vec{u},\vec{v}$ je lineárne nezávislá, je aj sústava $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$ lineárne nezávislá a tá je rovnako orientovaná ako sústava $\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}$, ktorej determinant je podľa (ii) a (iii) $|\vec{u}\times\vec{v})|^2 > 0$ a je teda rovnako orientovaná ako báza $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. (v) - (viii) priamo vyplývajú z vlastností determinantov. (ix) Rovnosť overíme tak, že obidve strany vyjadríme pomocou súradníc vektorov $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{t}$. (x) Ak v (ix) položíme $\vec{u} = \vec{w}$, $\vec{v} = \vec{t}$, dostaneme $(\vec{u}\times\vec{v})^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}.\vec{u} & \vec{u}.\vec{v} \\ \vec{v}.\vec{u} & \vec{v}.\vec{v} \end{vmatrix} = G(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}\vec{v})^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|)^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\sphericalangle\,\vec{u}\vec{v})^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|)^2(1-\cos^2\sphericalangle\,\vec{u}\vec{v}) = (|\vec{u}||\vec{v}|)^2(\sin\sphericalangle\,\vec{u}\vec{v})^2$, odkiaľ vzhľadom na to, že $\sin\sphericalangle\,\vec{u}\vec{v} \geq 0$ dostávame (x) (xi) Dokážeme výmenou riadkov v determinante (ii). (xii) Postupne podľa (xi), (ix) a ďalšími úpravami dostávame $((\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}).\vec{t} = [\vec{u}\times\vec{v},\vec{w},\vec{t}] = (\vec{u}\times\vec{v})(\vec{w}\times\vec{t}) = (\vec{u}\vec{w})(\vec{v}\vec{t}) - (\vec{v}\vec{w})(\vec{u}\vec{t}) = ((\vec{u}\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\vec{w})\vec{u})\vec{t}$, odkiaľ $((\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} - ((\vec{u}\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\vec{w})\vec{u})).\vec{t} = 0$ pre ľubovoľný vektor $\vec{t}$. Jediný vektor kolmý na každý vektor priestoru $\vec{E}_3$ je nulový vektor, preto platí (xii). (xiii) Nech $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}$; potom $\vec{n}$ je normála roviny $ABCD$ a obsah rovnobežníka $ABCD$ je $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = |\vec{n}|$, viď (x). Objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$ (označme O) je napr. súčin veľkosti výšky na stenu $ABCD$ (t.j. vzdialenosti bodu E od roviny $ABCD$, označme ju d) a obsahu tejto steny. Podľa 11.3 je $d = |\Pi_{\vec{n}}\overrightarrow{AE}| = \frac{|\overrightarrow{AE}.\vec{n}|}{|\vec{n}|}$, takže $O = d.|\vec{n}| = |\overrightarrow{AE}.\vec{n}| = |\vec{w}.\vec{n}| = |[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]|$.

Cvičenie

14.1 Dokážte Jacobiho identitu $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} + (\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u} + (\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v} = \vec{o}$.

14.2 Dokážte identitu $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$.

14.3 Dokážte identitu $[\vec{u}+\vec{v},\vec{w},\vec{t}] = [\vec{u},\vec{w},\vec{t}] + [\vec{v},\vec{w},\vec{t}]$.

P R Í L O H A

A Relácie, binárne operácie

Zobrazenia

Jeden z najdôležitejších pojmov matematiky je pojem zobrazenia. Zobrazenia slúžia na "porovnávanie" dvoch algebraickych štruktúr, na porovnávamie počtu prvkov dvoch množín, v geometrii sa používajú na zobrazovanie trojrozmerného priestoru na dvojrozmerný, používajú sa aj v konštrukčných úlohách, atď.

Karteziánskym súčinom $M \times N$ množín M, N nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc $[m,n] = \{m, \{m,n\}\}$, $m \in M$, $n \in N$, pričom $[m,n] = [a,b]$ práve vtedy, keď $m = a$ a $n = b$. *Binárnu reláciu* z množiny M do množiny N nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu $M \times N$; M nazývame prvý *obor* , N druhý obor alebo *koobor* tejto relácie; ak $M = N$ hovoríme o relácii v množine M.

Nech M je neprázdna množina, $n > 0$ prirodzené číslo; každý prvok množiny $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ nazývame *sústava n* prvkov množiny M (kratšie: sústava prvkov).

Budeme hovoriť, že množiny M, N *incidujú*, ak $M \subset N$ alebo $N \subset M$.

Nech α je binárna relácia z množiny M do množiny N. Výraz $[x,y] \in \alpha$ budeme písať tiež v tvare $\alpha(x) = y$ a hovoriť, že y je obraz x v relácii α alebo x je vzor y v relácii α; pre každé $y \in N$, označujeme $\alpha^{-1}(y) = \{x \in M; \alpha(x) = y\}$. Binárnu reláciu α budeme nazývať *zobrazenie* z M do N, ak každý prvok z M má najviac jeden obraz v N; skrátený zápis $\alpha : M \times N$. Binárnu reláciu α budeme nazývať *zobrazenie* množiny M do N, ak každý prvok z M má práve jeden obraz v N; skrátený zápis $\alpha : M \to N$.

Nech α je zobrazenie z M do N, $L \subset M$, $K \subset N$; obraz množiny L v α je množina $\alpha(L) = \{\alpha(x); x \in L\}$. Ak $\alpha(L) \subset K$, tak zobrazenie $\alpha|L : L \to K, x \mapsto y \Leftrightarrow \alpha(x) = y$ nazývame *zúženie zobrazenia* $\alpha : M \to N$ (na množinu L) a obrátene α nazývame rozšírenie zobrazenia $\alpha|L$.

Karteziánsky súčin dvoch množín možno zovšeobecniť na karteziánsky súčin ľubovoľného konečného počtu množín. Karteziánskym súčinom $M_1 \times \ldots \times M_s$ množín $M_1, \ldots, M_s$ nazývame množinu všetkých usporiadaných s-tíc $[a_1, \ldots a_s]$, kde $a_i \in M_i$ pre všetky i. Ak $M_1 = \cdots = M_s = M$, kladieme $M_1 \times \cdots \times M_s = M^s$. Každú podmnožinu množiny $M_1 \times \cdots \times M_s$ nazývame *s-árna relácia* . Podmnožinu množiny M^s nazývame s-árna relácia v množine M. Každý prvok množiny M^s nazývame *usporiadaná sústava s prvkov množiny* M (kratšie: usporiadaná sústava).

Binárnu reláciu R v množine M nazývame *reflexívna* , ak $[a,a] \in R$ pre každé $a \in M$; *symetrická*, ak $[a,b] \in R \Rightarrow [b,a] \in R$; *tranzitívna*, ak $[a,b] \in R$ a $[b,c] \in R \Rightarrow [a,c] \in R$. Reflexívnu, symetrickú a tranzitívnu reláciu v množine M nazývame *ekvivalencia* na M. Ak R je ekvivalencia na M a $a \in M$, tak množinu $R(a) = \{x; [a,x] \in R\}$ nazývame trieda ekvivalencie relácie R; ľahko sa dokáže, že každé dve triedy ekvivalencie R sú buď disjunktné alebo rovnaké.

Systém neprázdnych podmnožín množiny M nazývame rozklad množiny M, ak každý prvok z množiny M patrí práve do jedného prvku tohto systému. Nech S je rozklad množiny M; na M definujeme reláciu R tak, že $[a,b] \in R$ práve vtedy, keď a,b patria do tej istej množiny rozkladu S. Ľahko sa dá dokázať, že takto definovaná relácia je ekvivalencia na M. Platí aj obrátene, ak R je ekvivalencia na M, tak systém $\{R(a); a \in M\}$ je rozklad na množine M.

Relácia R sa nazýva *antisymetrická*, ak $[a,b] \in R$ a $[b,a] \in R \Rightarrow a = b$. Reflexívnu, antisymetrickú a tranzitívnu reláciu na množine M nazývame relácia usporiadania množiny M. Množinu spolu s reláciou usporiadania na tejto množine, nazývame *usporiadaná množina* . Ak R je taká relácia usporiadania na množine M, že pre každé $a,b \in M$ buď $[a,b] \in R$ alebo $[b,a] \in R$, tak R nazývame *lineárne usporiadanie* a M nazývame lineárne usporiadaná množina. Reláciu usporiadania obvykle označujeme znakom $\leq$. To znamená, že keď $\leq$ je relácia usporiadania na množine M, potom $a \leq a$ pre každé $a \in M$; $a \leq b$ a $b \leq a$ $\Rightarrow$ $a = b$; $a \leq b$ a $b \leq c$ $\Rightarrow$ $a \leq c$.

Nech N je podmnožina usporiadanej množiny M; prvok $d \in M$ nazývame *dolné ohraničenie* množiny N, ak pre každé $x \in N$ je $d \leq x$; $h \in M$ je *horné ohraničenie* množiny N, ak pre každé $x \in N$ je $x \leq h$. Najväčšie dolné ohraničenie (resp. najmenšie horné ohraničenie) množiny N nazývame *infimum* (resp. *suprémum*) množiny N; označenia: $inf\, N$ (resp. $sup\, N$).

Grupa zobrazení

Z daných relácií možno utvárať nové relácie. Jeden z najdôležitejších spôsobov vytvárania nových relácií je súčin relácií. Nech α je relácia z M do N, β relácia z N do P. Reláciu $\{[x,z] \in M \times P$; existuje $y \in N$ tak, že $\alpha(x) = y$ a $\beta(y) = z\}$ nazývame súčin relácii α, β a označujeme $\alpha \circ \beta$ alebo len $\alpha\beta$.

Zobrazenie $\varphi : M_1 \times \ldots \times M_s \to M$ nazývame s-árna operácia ; ak $M_1 = \cdots = M_s = M$, hovoríme, že φ je s-árna operácia na množine M. To znamená, že unárna (t.j. 1-árna) operácia na M je zároveň zobrazenie množiny M do M, binárna operácia na M je zobrazenie $M \times M \to M$, ternárna operácia na M je zobrazenie $M \times M \times M$ do M.

Grupoidom nazývame dvojicu $(G, .)$, kde G je neprázdna množina, (.) je binárna operácia na G; prvok $e \in G$ nazývame *jednotkou* (alebo jednotkový prvok), ak pre každé $x \in G \quad x.e = e.x = x \quad (x.y$ je obraz dvojice $[x,y]$ v zobrazení (.)). Grupoid, v ktorom platí asociatívny zákon (t.j. $x.(y.z) = (x.y).z$ pre všetky $x, y, z \in G$) nazývame *pologrupa.* Pologrupu s jednotkou nazývame *monoid.* Grupoid $(H, *)$ nazývame *podgrupoid* grupoida $(G, .)$, ak $H \subset G$ a $x * y = x.y$ pre všetky $x, y \in H$; v tom prípade miesto $(H, *)$ píšeme $(H, .)$. To znamená, že grupoid $(H, .)$ je podgrupoid grupoida $(G, .)$ práve vtedy, keď $H \subset G$.

Zobrazenie $\varphi : M \times N$ nazývame *injekcia* (injektívne alebo prosté), ak $\varphi a = \varphi b$ implikuje $a = b$ a *surjekcia* (surjektívne alebo na množinu), ak $\varphi(M) = N$. To znamená, že $\varphi : M \times N$ je injekcia, ak neexistujú dva rôzne prvky množiny M, ktoré majú ten istý obraz alebo množina $\varphi^{-1}(y)$ má najviac jeden prvok pre každé $y \in N$; je surjekcia, ak každý prvok množiny N má aspoň jeden vzor v M alebo množina $\varphi^{-1}(y)$ má aspoň jeden prvok pre každé $y \in N$. Zobrazenie množiny do množiny, ktoré je injekcia i surjekcia nazývame *bijekcia.* Zobrazenie $\varphi : M \to N$ je bijekcia práve vtedy, keď množina $\varphi^{-1}(y)$ má práve jeden prvok pre každé $y \in N$. *Identické zobrazenie* alebo identita, t.j. zobrazenie, ktoré každý prvok x z oboru M zobrazí do x budeme označovať symbolom 1_M alebo len 1.

Ak $\varphi : M \times N$, $\psi : N \times P$ sú ľubovoľné zobrazenia, existuje zobrazenie (ako súčin relácií), ktoré je definované rovnosťou $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$. Nazývame ho *súčin zobrazení* (v tomto poradí!) alebo zobrazenie zložené zo zobrazení ψ, φ a označujeme $\psi \circ \varphi$ a tiež $\psi\varphi$.

Množina všetkých zobrazení $M \to M$ spolu s operáciou " súčin zobrazení" tvorí grupoid. Tento grupoid je dokonca monoid, jeho jednotkou je identita a asociatívnosť operácie ($\circ$) vyplýva z rovností

$$((\psi \circ \varphi) \circ \xi)(x) = (\psi \circ \varphi)(\xi(x)) = \psi(\varphi(\xi(x))), \qquad (\psi \circ (\varphi \circ \xi))(x) = \psi((\varphi \circ \xi)(x)) = \psi(\varphi(\xi(x))).$$

Každú bijekciu $M \to M$ nazývame *transformácia* (alebo *permutácia*) množiny M.

Veta A.1 *Dané je zobrazenie $\varphi{:}M \to N$. Ak existuje zobrazenie $\alpha : N \to M$ (resp.β: $N \to M$) tak, že $\alpha \circ \varphi = 1_M$ (resp. $\varphi \circ \beta = 1_N$), φ je injekcia (resp. surjekcia) a obrátene.*

Dôkaz. Nech $\alpha \circ \varphi = 1_M$ a $\varphi g = \varphi h$, potom $\alpha(\varphi(g)) = \alpha(\varphi(h))$, t.j. $(\alpha \circ \varphi)(g) = (\alpha \circ \varphi)(h)$, odkiaľ $1_M(g) = 1_M(h)$, $g = h$. Predpokladajme teraz, že $\varphi \circ \beta = 1_N$ a $y \in N$ je ľubovoľný prvok; potom $\varphi(\beta(y)) = 1_N(y) = y$, takže βy je vzor prvku y v zobrazení φ , teda φ je surjekcia. Dôkaz obrátene je evidentný.

Nech $\varphi : M \to N$ je zobrazenie; ak existuje také zobrazenie $\varphi^{-1} : N \to M$, že $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_M$ a $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_N$, tak φ^{-1} nazývame *inverzné zobrazenie* k zobrazeniu φ.

Veta A.2 *Ku každej bijekcii $\varphi : M \to N$ existuje inverzné zobrazenie $\varphi^{-1} : N \to M$, ktoré je bijekcia; ak $\varphi(x) = y$, tak $\varphi^{-1}(y) = x$ a obrátene.*

Dôkaz. Vyplýva z predošlej vety.

Grupoid $(G, .)$ nazývame *grupa*, ak $(G, .)$ je monoid a ku každému $x \in G$ existuje $x^{-1} \in G$ (t.j. inverzný prvok) tak, že $x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$, kde e je jednotka grupoida $(G, .)$. Grupu, ktorej prvkami sú zobrazenia a operáciou je "súčin zobrazení" nazývame *grupa zobrazení.*

Veta A.3 *Množina všetkých transformácií neprázdnej množiny M (spolu s operáciou skladania zobrazení) je grupa zobrazení. Túto grupu budeme nazývať* úplná transformačná grupa *množiny M.*

Dôkaz. Je zrejmé, že množina všetkých transformácií množiny M je monoid. Pre zvyšok dôkazu stačí použiť vetu A.2.

Nech G je grupa zobrazení a nech F, H sú podmnožiny množiny G. Je účelné zaviesť označenia

$$F \circ H = \{\varphi \circ \psi; \varphi \in F, \psi \in H\}, \qquad H^{-1} = \{\psi^{-1}; \psi \in H\}.$$

Úloha A.4 *Nech F, H sú množiny transformácií. Dokážte, že*

$$(i) \quad F \subset H \Rightarrow F^{-1} \subset H^{-1} \qquad (ii) \quad (H^{-1})^{-1} = H.$$

Ak H je podmnožina grupy zobrazení G, môže sa stať, že H je tiež grupou zobrazení (t.j. podgrupou grupy G). O tom aké podmienky musí spĺňať množina H aby bola podgrupou grupy G, hovorí

Veta A.5 *Nech H je neprázdna podmnožina grupy zobrazení G. Ak*

(i) *$H.H \subset H$ t.j. operácia (.) je vnútorná na H a*
(ii) *$H^{-1} \subset H$ t.j. ku každému prvku z H, je jeho inverzný prvok opäť z H*

tak H je podgrupa grupy G.

Dôkaz. Z (i) vyplýva, že H je grupoid (súčin dvoch zobrazení z H je opäť z H). Ukážeme, že identita je z H ; ak $\varphi \in H$, tak $\varphi^{-1} \in H^{-1}$ a podľa (ii) $\varphi^{-1} \in H$, preto podľa (i) $\varphi \circ \varphi^{-1} \in H$, t.j. $1 \in H$. Inklúzia (ii) hovorí, že inverzný prvok ku každému prvku z H je opäť z H. Tým je dôkaz skončený.

Úloha A.6 *Nech H je neprázdna podmnožina grupy zobrazení G. Dokážte, že ak $H \circ H^{-1} \subset H$, H je podgrupa grupy G.*

Cvičenie

A.1 Nech $(R, +, .)$ je pole reálnych čísel a nech $d \in \langle 0, 1\rangle = I$ je ľubovoľné ale pevne zvolené číslo. Nech $*$ je binárna operácia na množine R, definovaná rovnosťou $a * b = (1 - d)a + db$. Dokážte, že $(I, *)$ je grupoid (podgrupoid grupoida $(R, *)$).

A.2 Nech $(R, +, .)$ je pole reálnych čísel, $\langle 0, 1\rangle = I$. Dokážte, že ternárna operácia $\nabla : [a, b, d] \mapsto \nabla(abd) = (1 - d)a + db$ definovaná na množine R je aj ternárnou operáciou na množine I.

A.3 Dokážte, že prienik ľubovoľného počtu podgrúp grupy G je podgrupa grupy G.

A.4 Nech $(Z, +)$ je grupa celých čísel a n ľubovoľné kladné celé číslo; na Z definujeme binárnu reláciu $\equiv$ nasledovne: $a \equiv b \Leftrightarrow a - b$ je deliteľné číslom n. Dokážte, že relácia $\equiv$ (nazývaná *kongruencia* modulo n) je ekvivalencia na množine Z. Určte triedu ekvivalencie $\equiv$, do ktorej patrí číslo 3 (túto triedu označujeme $\bar{3}$). Množinu všetkých tried relácie $\equiv$ označujeme Z_n. Dokážte, že na množine Z_n možno definovať binárnu operáciu nasledovne:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{c} \quad \Leftrightarrow \quad a + b - c \quad \text{je deliteľné číslom } n.$$

Dokážte, že $(Z_n, \oplus)$ je grupa.

A.5 Nech R je pole reálnych čísel a $T(R)$ jej úplná transformačná grupa. Dokážte, že

- zobrazenie $f_{a,b} : R \to R, x \mapsto ax + b$ je transformácia množiny R, pre každé $a \in R, a \neq 0$
- $f_{c,d} \circ f_{a,b} = f_{ac,bc+d}$
- $f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1},-ba^{-1}}$
- $\{f_{a,b}; a, b \in R, a \neq 0\}$ je grupa zobrazení, ktorá je podgrupou grupy $T(R)$.

B Vektorové priestory

Definícia vektorového priestoru

Definícia B.1 *Nech V je neprázdna množina, prvky ktorej budeme nazývať* vektory *a nech F je pole, ktorého prvky budeme nazývať* skaláry*. Nech na V je definovaná binárna operácia $+$ a nech $(.)$ je zobrazenie $F \times V \rightarrow V$. Keď $r, s \in F$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $(V, +)$ je abelovská grupa a platia identity*

V1	$(r+s).\vec{a}$	$=$	$r.\vec{a} + s.\vec{a}$	*V3*	$r.(s.\vec{a})$	$=$	$(r.s).\vec{a}$
V2	$r.(\vec{a}+\vec{b})$	$=$	$r.\vec{a} + r.\vec{b}$	*V4*	$1.\vec{a}$	$=$	$\vec{a}$

potom $(V, +, .)$ (stručnejšie budeme písať len V) nazývame vektorový priestor *nad poľom F (alebo skrátene, vektorový priestor). Zobrazenie $(.)$ nazývame* skalárny násobok *vektora.*

Vektor $c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_k\vec{u}_k$ nazývame *lineárna kombinácia* vektorov $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ s koeficientami $c_1, \ldots, c_k$; ak $c_i = 0$ pre všetky $i = 1, \ldots, k$, hovoríme o triviálnej lineárnej kombinácii, v opačnom prípade o netriviálnej lineárnej kombinácii.

Sústavu vektorov $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ nazývame *lineárne nezávislá*, ak rovnosť $c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_k\vec{u}_k = \vec{o}$ implikuje $c_1 = ... = c_k = 0$ a *lineárne závislá*, ak nie je lineárne nezávislá. Sústava vektorov $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ je lineárne závislá práve vtedy, keď existujú skaláry $c_1, \ldots, c_k$, nie všetky nulové tak, že $c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_k\vec{u}_k = \vec{o}$. Sústava dvoch vektorov je lineárne závislá práve vtedy, keď aspoň jeden z nich je skalárnym násobkom druhého z nich. Keď je vektor lineárnou kombináciou lineárne nezávislých vektorov, potom skaláry v tejto lineárnej kombinácii sú určené jednoznačne. Ak vynecháme s $(s < k)$ vektorov zo sústavy lineárne nezávislých vektorov $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ dostaneme opäť lineárne nezávislú sústavu vektorov. Ak ku lineárne závislej sústave vektorov pridáme ľubovoľný konečný počet vektorov, dostaneme opäť lineárne závislú sústavu vektorov.

Podpriestory vektorového priestoru

Definícia B.2 *Nech $(V, +, .)$ je vektorový priestor nad poľom F. Každý vektorový priestor $(U, +, .)$ nad poľom F, pre ktorý platí $U \subset V$ nazývame podpriestor priestoru $(V, +, .)$*

Nech $(V, +, .)$ je vektorový priestor na poľom F, $M, N, U \subset V$, $R, S \subset F$. Je účelné zaviesť nasledujúce označenia

$$M + U = \{\vec{u} + \vec{v};\ \vec{u} \in M, \vec{v} \in U\} \qquad S.U = \{r.\vec{u};\ r \in S, \vec{u} \in U\}$$

$$R + S = \{r + s;\ r \in R, s \in S\} \qquad R.S = \{r.s;\ r \in R,\ s \in S\}.$$

Ľahko sa dá overiť, že platí

$$(M + U) + N = M + (U + N) \tag{B.1}$$
$$M + U = U + M \tag{B.2}$$
$$R.(S.U) = (R.S).U \tag{B.3}$$
$$1.U = U \tag{B.4}$$
$$(R + S).U \subset R.U + S.U \tag{B.5}$$
$$R.(M + U) \subset R.M + R.U. \tag{B.6}$$

Veta B.3 *Nech $(V, +, .)$ je vektorový priestor nad poľom F a $U \subset V$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(i) $(U, +, .)$ *je podpriestor priestoru* $(V, +, .)$

(ii) $U + U \subset U$ a $F.U \subset U$.

Veta B.4 *Prienik ľubovoľného systému podpriestorov vektorového priestoru je jeho podpriestorom.*

Lineárny obal

Definícia B.5 *Nech M je neprázdna podmnožina vektorového priestoru V. Prienik všetkých podpriestorov vektorového priestoru V, ktoré obsahujú množinu M nazývame* lineárny obal *množiny M a označujeme $\langle M\rangle$. Hovoríme, že sústava vektorov E generuje vektorový priestor V, ak $\langle E\rangle = V$, Každú sústavu lineárne nezávislých vektorov, ktorá generuje priestor V nazývame* báza *priestoru V. Vektorový priestor je* konečnorozmerný*, ak je generovaný konečnou sústavou vektorov.*

$\langle M\rangle$ je vektorový priestor pre každú neprázdnu podmnožinu M vektorového priestoru V a zároveň $\langle M\rangle$ je množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov z množiny M. Ak W je podpriestor vektorového priestoru V, tak $\langle W\rangle = W$.

Veta B.6 *Keď U, W sú podpriestory vektorového priestoru V, potom $\langle U \cup W\rangle = U + W$.*

Platí teda, že ak U, W sú podpriestory vektorového priestoru V, potom $U + W$ je podpriestor priestoru V; $U + V$ nazývame *spojenie* priestorov U, W.

Ak $M = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$, kladieme $\langle M\rangle = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\rangle$.

Veta B.7 *Každý netriviálny konečnorozmerný vektorový priestor má bázu.*

Veta B.8 *(Steinitzova) Každú sústavu lineárne nezávislých vektorov konečnorozmerného vektorového priestoru V možno rozšíriť na bázu priestoru V.*

Veta B.9 *Každé dve bázy netriviálneho konečnorozmerného vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov, ktorý nazývame* dimenzia *(alebo* rozmer*) priestoru V a označujeme* $\dim V$. *Ak $V = \{\vec{o}\}$ kladieme* $\dim V = 0$.

Veta B.10 *Nech V je vektorový priestor.*

(i) *Ak $\dim V = n$, každá sústava majúca viac ako n vektorov priestoru V je lineárne závislá;*
(ii) *Ak U je podpriestor priestoru V, $\dim U \le \dim V$;*
(iii) *Ak U je podpriestor priestoru V a $\dim U = \dim V$, tak $U = V$;*
(iv) *Sústava vektorov $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ je lineárne nezávislá práve vtedy, keď $\dim\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\rangle = n$.*

Veta B.11 *Keď U, V sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru W, potom*

(i) $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ (formula Grassmana)
(ii) $\dim(U \cap V) \ \ge\ \dim U \ + \dim V - \dim W$.

Morfizmy vektorových priestorov

Definícia B.12 *Nech $(U, +, .)$, $(V, +, .)$ sú dva vektorové priestory nad tým istým poľom F. Každé zobrazenie $\varphi : U \to V$ s identitami*

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi\vec{u} + \varphi\vec{v}, \qquad \varphi(r\vec{v}) = r\varphi\vec{v} \tag{B.7}$$

nazývame morfizmus *priestoru U do V. Morfizmus, ktorý je injekcia (resp. surjekcia, bijekcia), nazývame* monomorfizmus *(resp.* epimorfizmus, izomorfizmus*) ; morfizmus $\varphi : U \to U$ nazývame* endomorfizmus *priestoru U. Vektorový priestor U je izomorfný s vektorovým priestorom V, ak existuje izomorfizmus U na V. Izomorfizmus vektorového priestoru U na U nazývame* automorfizmus *priestoru U.*

Každý morfizmus $U \to V$ zobrazí nulový vektor do nulového vektora: $\varphi(\vec{o}) = \varphi(\vec{a} - \vec{a}) = \varphi\vec{a} - \varphi\vec{a} = \vec{o}$.

Veta B.13 *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom F. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

(i) *U, V sú izomorfné*
(ii) $\dim U = \dim V$.

Nech $\varphi : U \to V$ je morfizmus vektorových priestorov; množinu $\{\vec{v}; \vec{v} \in U$ a $\varphi\vec{v} = \vec{o}\}$ nazývame *jadro* morfizmu φ a označujeme $Ker\,\varphi$.

Veta B.14 *Nech $\varphi : U \to V$ je morfizmus vektorových priestorov; potom*

(i) *φ je monomorfizmus $\Rightarrow$ φ zobrazí každú sústavu lineárne nezávislých vektorov na sústavu lineárne nezávislých vektorov*

(ii) *φ je epimorfizmus $\Rightarrow$ φ zobrazí každú sústavu vektorov, ktorá generuje U na sústavu vektorov, ktorá generuje V*

(iii) *$\varphi(U)$ je podpriestor priestoru V*

(iv) *morfizmus $\varphi : U \to V$ vektorových priestorov je monomorfizmus práve vtedy, keď $Ker\,\varphi = \vec{o}$*

(v) *endomorfizmus φ je automorfizmus $\Leftrightarrow$ $Ker\,\varphi = \vec{o}$.*

Veta B.15 *Nech F je ľubovoľné pole a nech V je množina všetkých usporiadaných n-tíc $(a_1, \ldots, a_n)$ prvkov z poľa F. Definujeme*

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

$$c.(a_1, \ldots, a_n) = (ca_1, \ldots, ca_n)$$

pre ľubovoľné prvky a_i, b_i, c poľa F. Potom $(V, +, .)$ je vektorový priestor nad poľom F a $\dim V = n$. Tento priestor nazývame aritmetický vektorový priestor *(nad poľom F).*

Aritmetický vektorový priestor nad poľom reálnych (resp. komplexných) čísel nazývame *reálny* (resp. *komplexný*) aritmetický priestor.

Veta B.16 *Nech V je vektorový priestor. Potom*

(i) *skalárne násobenie nenulovým skalárom je automorfizmus vektorového priestoru,*

(ii) *obraz nenulového vektora v monomorfizme je nenulový vektor,*

(iii) *každý monomorfizmus $V \to V$ je automorfizmus priestoru V,*

(iv) *každý epimorfizmus $V \to V$ je automorfizmus priestoru V.*

Matica endomorfizmu

Nech $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ sú dve usporiadané sústavy vektorov vektorového priestoru V. Ak $\vec{f}_i = f_{1i}\vec{e}_1 + \cdots + f_{ni}\vec{e}_n$, kladieme

$$(\vec{f}_i)_E = (f_{1i}, \ldots, f_{ni}),\ i = 1, \ldots, m, \quad F^E \;=\; \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1m} \\ & \ldots & \\ f_{n1} & \ldots & f_{nm} \end{pmatrix}. \tag{B.8}$$

V prípade, že E je báza priestoru V a $m = 1$, môžeme položiť $F = (\vec{v})$ a $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \ldots + v_n\vec{e}_n$. Vtedy hovoríme, že $v_1, \ldots, v_n$ sú súradnice vektora $\vec{v}$ v báze E a symbol F^E nahradzujeme symbolom $\vec{v}^{\,E}$, takže $\vec{v}^{\,E}$ je matica-stĺpec, ktorej prvky sú súradnice vektora $\vec{v}$ v báze E; tento fakt zapisujeme vzhľadom na (B.8) aj takto $\vec{v}_E = (v_1, \ldots, v_n)$.

Nech $\mu : V \to V$ je endomorfizmus, $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ je usporiadaná sústava vektorov z V, pričom $\mu\vec{e}_i = \vec{f}_i$ pre všetky i. Ak $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \ldots + v_n\vec{e}_n$, tak $\mu\vec{v} = v_1\mu(\vec{e}_1) + \cdots v_n\mu(\vec{e}_n)$ čiže

$$\mu\vec{v} = v_1\vec{f}_1 + \ldots + v_n\vec{f}_n \tag{B.9}$$

Ďalej označme $\vec{v'} = \mu(\vec{v})$, $\vec{v'}_E = (v'_1, \ldots, v'_n)$. Ak rovnicu (B.9) prepíšeme do súradníc (všetky v báze E, t.j. použijeme (B.8)), dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} v'_1 &= f_{11}v_1 + \cdots + f_{1n}v_n \\ &\vdots \\ v'_n &= f_{n1}v_1 + \cdots + f_{nn}v_n, \end{aligned} \tag{B.10}$$

ktorú nazývame rovnice endomorfizmu μ v báze E. Matica pravej strany tejto sústavy je matica F^E, ktorú nazývame matica endomorfizmu μ v báze E a budeme ju označovať symbolom μ^E. Sústavu (B.10) môžeme prepísať do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \dots f_{1n} \\ \vdots \\ f_{n1} \dots f_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{B.11}$$

a v skrátenom tvare

$$(\mu\vec{v})^E = \mu^E.\vec{v}^{\,E} \tag{B.12}$$

Túto rovnicu nazývame *maticová rovnica endomorfizmu* μ (v báze E). Tým je dokázaná

Veta B.17 *Ku každému endomorfizmu μ vektorového priestoru V a jeho báze E existuje matica (f_{ij}) tak, že $(\mu\vec{v})^E = (f_{ij})\vec{v}^{\,E}$.*

Veta B.18 *Nech $\mu : V \to V$ je zobrazenie dané maticovou rovnicou $(B.12)$, kde (f_{ij}) je ľubovoľná matica* (typu $n \times n$) *nad poľom skalárov vektorového priestoru V. Potom μ je endomorfizmus priestoru V.*

Zmena bázy

Ak E, F sú bázy priestoru V, rovnosť (B.9) môžeme prepísať do tvaru $(\mu\vec{v})^F = \vec{v}^{\,E}$; to aplikujeme na (B.12) a dostaneme $(\mu\vec{v})^E = \mu^E\vec{v}^F$ a vzhľadom na to, že μ je surjekcia, tak pre každé $\vec{u} = \mu\vec{v} \in V$ platí

$$\vec{u}^{\,E} = F^E\vec{u}^{\,F} \tag{B.13}$$

Táto rovnica vyjadruje závislosť súradníc vektora $\vec{u}$ v báze E od súradníc toho istého vektora v báze F, čiže umožňuje prechod od súradníc v báze F k súradniciam v báze E, preto maticu F^E nazývame *matica prechodu* od bázy F ku báze E. Táto matica je zároveň maticou automorfizmu, ktorý zobrazí bázu E na bázu F (pozri (B.8).

Nech γ , φ sú endomorfizmy vektorového priestoru V. Podľa (B.12)

$$((\gamma \circ \varphi)(\vec{v}))^E = (\gamma(\varphi\vec{v}\,))^E = \gamma^E(\varphi\vec{v}\,)^E = \gamma^E(\varphi^E\vec{v}^{\,E}) = (\gamma^E\varphi^E)\vec{v}^{\,E}$$

čiže

$$(\gamma \circ \varphi)^E = \gamma^E.\varphi^E \tag{B.14}$$

a teda matica súčinu dvoch endomorfizmov vektorového priestoru v báze E je súčin matíc týchto endomorfizmov v báze E. Nech E, F sú bázy vektorového priestoru V a $\alpha : V \to V$ je endomorfizmus. Postupne podľa (B.12), (B.13), (B.12), (B.13) máme

$$\alpha^E\vec{v}^{\,E} = (\alpha\vec{v}\,)^E = F^E(\alpha\vec{v}\,)^F = F^E\alpha^F\vec{v}^{\,F} = F^E\alpha^F E^F\vec{v}^{\,E}$$

odkiaľ

$$\alpha^E = F^E\alpha^F E^F. \tag{B.15}$$

Táto rovnosť ukazuje ako sa mení matica endomorfizmu, keď sa mení báza.

Ak v (B.15) je α identita, tak vzhľadom na to, že 1^E je jednotková matica pre ľubovoľnú bázu E, platí $1 = F^E E^F$, čiže

$$E^F = (F^E)^{-1} \tag{B.16}$$

pre každé dve bázy E, F vektorového priestoru V. Ak (B.16) aplikujeme na (B.15) dostaneme

$$\alpha^E = (E^F)^{-1}\alpha^F E^F. \tag{B.17}$$

Pretože determinant súčinu matíc sa rovná súčinu determinantov týchto matíc z (B.17) vyplýva

$$det\,\alpha^E = det\,(E^F)^{-1}.det\,\alpha^F.det\,E^F = det\,(E^F)^{-1}.det\,E^F.det\,\alpha^F = det\,\alpha^F,$$

takže determinant matice endomorfizmu α v báze E sa rovná determinantu tohto endomorfizmu v ľubovoľnej inej báze, preto ho nazývame *determinantom endomorfizmu* α.

Cvičenie

B.1 Určte bázu lineárneho obalu množiny nasledujúcich vektorov $\vec{v}_1(2,4,5,0)$, $\vec{v}_2(-1,3,5,6)$, $\vec{v}_3(-7,1,5,18)$, $\vec{v}_4(1,0,0,5)$.

B.2 Určte dimenziu prieniku $U \cap V$, keď

$$\begin{array}{llll} U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle & \vec{u}_1(1,-3,-6,-1) & \vec{u}_2(5,2,2,4) & \vec{u}_3(2,1,7,8) \\ V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle & \vec{v}_1(2,0,0,1) & \vec{v}_2(-1,1,2,0) & \vec{v}_3(4,1,0,3). \end{array}$$

B.3 Určte bázu prieniku $U \cap V$ ak U, V sú dané ako v cvičení B2.

B.4 Zistite, či priestory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ *incidujú* (t.j. či $U \subset V$ alebo $V \subset U$), ak $\vec{u}_1(-1,0,1)$, $\vec{v}_1(-1,8,-1)$, $\vec{u}_2(2,4,-3)$, $\vec{v}_2(0,4,-1)$.

B.5 Nech $(R_2, +, .)$ je reálny aritmetický vektorový priestor. Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín množiny R_2 sú podpriestory priestoru R_2.

$$\begin{array}{lll} U_1 = \{(x,y); x,y \in R\} & U_4 = \{(2t,3t); t \in R\} & U_7 = \{(x,y); 2x-3y=0\} \\ U_2 = \{(2t+1,3t); t \geq 0\} & U_5 = \{(2t,3s); t.s \neq 0\} & U_8 = \{(2t,3s); t.s = 0\} \\ U_3 = \{(x,y); x^2+y^2=1\} & U_6 = \{(x,y); 2x-3y+1=0\} & U_9 = \{(5t-1,2t+4); t \in R\}. \end{array}$$

B.6 Nech U, W sú podpriestory vektorového priestoru V, $U \cap W = \vec{o}$ a $\dim U + \dim W = \dim V$. Dokážte, že $U + W = V$ (v tom prípade hovoríme, že V sa dá rozložiť na priamy súčet svojich podpriestorov U, W nazývaných priame sčítance; v takom prípade píšeme $V = U \oplus W$).

B.7 Nech $\varphi : V \to U$ je morfizmus vektorových priestorov. Dokážte, že

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s \in V \Rightarrow \varphi\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s \rangle = \langle \varphi\vec{v}_1, \ldots, \varphi\vec{v}_s \rangle.$$

L I T E R A T Ú R A

[1] Artin, E.: Geometričeskaja algebra. Nauka, Moskva 1969

[2] Budinský, B., Šmakal, S.: Vektory v geometrii. ŠMM, Praha 1971

[3] Dieudonné, J.: Linejnaja algebra i elementarnaja geometrija. Moskva 1970

[4] Gatial, J., Hejný, M.: Od pravouhlých súradníc k vektorom. SPN, Bratislava 1980

[5] M.Hejný a kol.:Geometria 1. SPN Bratislava 1985

[6] Horský, Z.: Vektorové prostory. SNTL, Praha 1980

[7] Sekanina a kol. Geometria I. SPN Praha 1986.