Aplikácie vektorového súčinu

RNDr. Viera Vodičková

U: Povieme si niečo o tom, aký význam má vektorový súčin v geometrii a stereometrii. Najdôležitejší význam už poznáš. Vektorový súčin nám umožňuje pomerne rýchlo nájsť vektor, ktorý je kolmý na dané dva lineárne nezávislé vektory.

Ž: *Áno, vyplýva to z podmienky, že vektorový súčin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý aj na vektor $\vec{u}$, aj na vektor $\vec{v}$.*

U: Pohovoríme si o ďalších aplikáciach vektorového súčinu. Vektorový súčin využijeme na výpočet obsahu trojuholníka i rovnobežníka a na výpočet objemu rovnobežnostena i štvorstena.

Ž: *Obsahu? Ako sa dá použitím vektora počítať obsah?*

U: Uvidíš. Začneme obsahom trojuholníka. Poznáš vzorec na jeho výpočet?

Ž: *Poznám ich niekoľko. Napríklad: obsah sa rovná jedna polovica strany a krát výška na túto stranu v_a.*

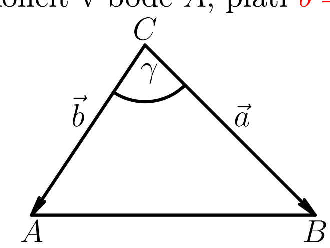
$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot v_a}$$

U: Správne, ale my budeme potrebovať iný.

Ž: *Ešte som si spomenul na tento: obsah trojuholníka sa vypočíta ako jedna polovica zo súčinu strany a, strany b a sínusu uhla gama.*

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma}$$

U: Tento sa nám hodí. Podľa písmenok vo vzorci súdim, že máme daný trojuholník ABC s klasickým označením strán a uhlov. Zavedieme si v trojuholníku dva vektory. Prvý bude ležať na strane a trojuholníka ABC, označíme ho preto ako vektor $\vec{a}$. Jeho začiatočný bod bude C a koncový B, preto platí $\vec{a} = B - C$. Podobne druhý vektor označíme ako vektor $\vec{b}$ a bude začínať v bode C a končiť v bode A, platí $\vec{b} = A - C$. Pozri si obrázok.



Ž: *Stále nevidím, kde tam budem potrebovať vektorový súčin.*

U: Vydrž ešte, už sa k tomu blížime. Po takomto zavedení vektorov mi určite dáš za pravdu, že strana a má takú istú veľkosť ako vektor $\vec{a}$.

Ž: *S tým súhlasím.*

U: Podobne strana b má takú istú veľkosť ako vektor $\vec{b}$. Vnútorný uhol γ trojuholníka ABC je zároveň aj uhlom vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Preto v modrom vzorci na výpočet obsahu trojuholníka môžeme namiesto a písať veľkosť vektora $\vec{a}$ a namiesto b veľkosť vektora $\vec{b}$.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma}$$

Ž: *To sme teraz skomplikovali, nie?*

U: Možno sa to tak zdá, no počkaj ešte. Pozrime sa na definíciu vektorového súčinu, konkrétne na poznatok, ktorý hovoril o veľkosti vektorového súčinu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Máš ho v rámčeku.

$$\boxed{|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi}$$

Veľkosť vektorového súčinu vypočítame ako súčin veľkosti oboch vektorov a sínusu uhla, ktorý zvierajú.

Ž: *To je aj náš prípad! Máme tam súčin veľkostí oboch vektorov $\vec{a}$ aj $\vec{b}$ a je tam aj sínus uhla. Nie síce φ, ale γ. Avšak uhol γ je vnútorný uhol trojuholníka pri vrchole C, no zároveň je to aj uhol vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Všetko sedí.*

U: Vystihol si to správne. Znamená to, že vo vzorci pre obsah trojuholníka môžeme výraz $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma$ nahradiť veľkosťou vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Obsah trojuholníka sa potom rovná jednej polovici z veľkosti vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

$$\boxed{\text{Obsah trojuholníka} \quad S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Ž: *Je to pekné, ale zatiaľ nevidím výhodu počítať obsah takto cez vektorový súčin.*

U: Nezabúdaj, že pracujeme v analytickej geometrii. Trojuholník nemáš narysovaný, ale máš zadané súradnice jeho vrcholov. Ak by si chcel počítať jeho obsah klasicky, musel by si zistiť dĺžky jeho strán a veľkosť uhla, ktorý zvierajú, alebo nedajbože nájsť veľkosť výšky. Všetko sa to samozrejme dá, len je to kopa roboty. Pomocou vzorca, ktorý sme si práve uviedli, stačí vypočítať vektorový súčin, t. j. jeho súradnice, a potom určiť polovicu veľkosti získaného vektora.

Ž: *Našiel som predsa jednu slabinu. Čo ak budeme mať trojuholník v rovine?*

U: Vidno, že si definíciu pozorne počúval. Nezabudol si na to, že vektorový súčin možno počítať len v priestore. Túto situáciu však môžeme oklamať. Ak máme trojuholník zadaný v rovine, prenesieme si ho do priestoru tak, že bude ležať v rovine xy. To znamená, že tretie (chýbajúce) súradnice jeho vrcholov budú nulové. Skrátka, každému bodu priradíme tretiu súradnicu, ktorá je nulová.

Ž: *Hm ... to je dobrá finta!*

U: Podobne môžeme počítať aj obsah rovnobežníka. Dobre vieme, že ho môžeme uhlopriečkou rozdeliť na dva zhodné trojuholníky, a že vzorec na výpočet obsahu sa v porovnaní s trojuholníkom líši len o jednu polovicu. Preto obsah rovnobežníka $ABCD$ vypočítame ako veľkosť vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$, pričom $\vec{a} = B - A$ a $\vec{b} = D - A$.

$$\boxed{\text{Obsah rovnobežníka} \quad S = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

U: Vektorový súčin môžeme využiť aj na výpočet objemu ***rovnobežnostena***.

Ž: *Rovnobežnostena???*

U: Určite si už počul o rovnobežnostene. Pripomeniem ti, že rovnobežnosten je priestorové teleso, ktoré má šesť stien v tvare rovnobežníkov, pričom každé dve protiľahlé steny sú rovnobežné a zhodné.

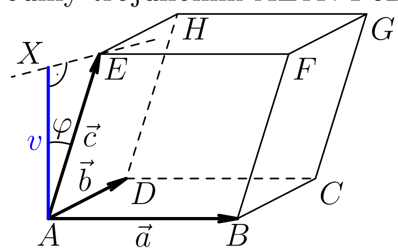
Ž: *To bude asi kocka alebo kváder...*

U: Áno, kocka aj kváder patria medzi rovnobežnosteny, ale nie sú to jediní zástupcovia. Rovnobežnosten je skrátka štvorboký hranol. Ako sa počíta jeho objem?

Ž: *Ak je to hranol, tak jeho objem sa počíta ako objem hranolov, obsah podstavy krát výška na túto podstavu.*

$$\boxed{V = S_p \cdot v}$$

U: Správne. Načrtneme si rovobežnosten $ABCDEFGH$ a vyznačíme si výšku na dolnú podstavu $ABCD$. Výška je vlastne vzdialenosť medzi podstavami, preto predĺžením steny $EFGH$ sa nám vytvorí pravouhlý trojuholník AEX. Pozri si obrázok.



U: Podstavou rovnobežnostena je rovnobežník $ABCD$, jeho obsah už pomocou vektorov vieme vypočítať.

Ž: *Áno, hovorili sme o tom pred chvíľou. Zvolíme si dva vektory, vektor $\vec{a} = B - A$ a vektor $\vec{b} = D - A$. Potom obsah podstavy vypočítame ako veľkosť vektorového súčinu $\vec{a}$ krát $\vec{b}$.*

$$\boxed{\text{Obsah podstavy} \quad S_p = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

U: Výborne. Teraz preskúmame výšku. V trojuholníku AEX označme uhol pri vrchole A ako φ.

Ž: *Použijeme goniometrickú funkciu kosínus v trojuholníku AEX a dostávame:*
Výška sa rovná súčinu veľkosti strany AE a kosínusu uhla φ.

$$\boxed{v = |AE| \cdot \cos\varphi}$$

U: Ešte si zavedieme jeden vektor, vektor $\vec{c} = E - A$. Veľkosť vektora $\vec{c}$ je zrejme taká istá ako veľkosť úsečky AE, preto môžeme písať: výška sa rovná súčinu veľkosti vektora $\vec{c}$ a kosínusu uhla φ.

$$\boxed{v = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi}$$

Ž: *Pomaly už strácam prehľad.*

U: Neboj sa teraz si to všetko zhrnieme. V pôvodnom modrom vzorci nahradíme obsah podstavy veľkosťou vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ a výšku nahradíme našim predchádzajúcim vyjadrením.

Ž: *Dobre. skúsim to. Dostávame: objem sa rovná súčinu veľkosti vektora $\vec{a}\times\vec{b}$, veľkosti vektora $\vec{c}$ a kosínusu uhla φ.*

$$\boxed{V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi}$$

U: Na výsledný vzorec sa pozrieme očami vektorovej algebry, všímame si vektory. Máme tam súčin veľkostí dvoch vektorov a to vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ a vektora $\vec{c}$, vynásobený kosínusom uhla φ. Kde už sme sa s niečim takým stretli?

Ž: *To naozaj neviem. Moment, možno by to mohol byť zase vektorový súčin? Máme tam veľkostí dvoch vektorov ... ale nie je tam sínus uhla, ale jeho kosínus.*

U: Bude to niečo podobné. Trochu si zaspomínaj. Spomeň si na skalárny súčin. Skalárny súčin môžeme vypočítať pomocou súradníc, ale to nám teraz nepomôže. Alebo ho môžeme vypočítať ako súčin veľkostí oboch vektorov a kosínusu uhla φ.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\varphi}$$

Ž: *Jasné, tak to bude skalárny súčin.*

U: Áno, ale overil si si, či uhol φ je ten, ktorý potrebujeme?

Ž: *Uhol φ, to bol uhol medzi výškou a bočnou hranou AE rovnobežnostena.*

U: Áno. Na bočnej hrane AE je umiestnený vektor $\vec{c}$. Pozrime sa na druhý vektor, ktorý je výsledkom vektorového súčinu $\vec{a}$ krát $\vec{b}$. Vektorový súčin je vektor kolmý na rovinu, v ktorej sa oba vektory nachádzajú. Na obrázku vidíme, že je to rovina spodnej podstavy rovnobežnostena. Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ je teda kolmý na spodnú podstavu, t. j. môžeme ho umiestniť na priamku, na ktorej leží výška.

Ž: *Tak je všetko v poriadku. Uhol φ je uhol medzi výškou a hranou AE. Výška predstavuje vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ a hrana AE vektor $\vec{c}$. Uhol φ je uhol medzi týmito vektormi.*

U: Áno, je to v poriadku, až na jednu maličkosť.

Ž: *Och, všetko musí mať nejaký zádrheľ.*

U: Tento je len maličký. Uhol vektorov môže byť aj tupý. Ako dobre vieš, kosínus tupého uhla je záporné číslo.

Ž: *To by sme mali aj záporný objem! Čo s tým urobíme?*

U: Vyriešime to veľmi jednoducho. Kosínus uhla φ dáme do absolútnej hodnoty. Pozri si vzniknutý vzorec v rámčeku.

$$\boxed{V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos\varphi|}$$

U: Teraz už len vzorec zapíšeme ako skalárny súčin vektorového súčinu $\vec{a} \times \vec{b}$ a vektora $\vec{c}$, ktorý dáme do absolútnej hodnoty. Objem rovnobežnostena sa rovná absolútnej hodnote zo skalárneho súčinu vektorov $\vec{a} \times \vec{b}$ a $\vec{c}$.

objem rovnobežnostena $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

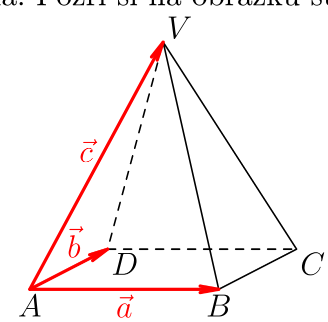
U: Súčin vektorov

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

sa nazýva ***zmiešaný súčin vektorov*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ (v tomto poradí).

Ž: *Uf! Trochu by som si odýchol.*

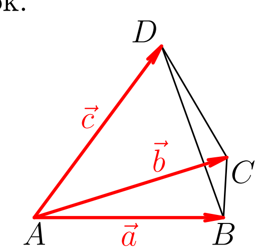
U: Ešte chvíľu vydrž. Pomocou tohto vzorca si vieme odvodiť vzorec aj na výpočet objemu štvorbokého ihlana a štvorstena. Pozri si na obrázku štvorboký ihlan $ABCDV$.



Objem štvorbokého ihlana je jedna tretina z objemu štvorbokého hranola s rovnakou podstavou a výškou. Preto stačí do vzorca pridať jednu tretinu. Objem štvorbokého ihlana:

$$V = \frac{1}{3}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Objem štvorstena je zase jedna polovica objemu ihlana, nakoľko podstavou štvorstena je trojuholník. Opäť si pozri obrázok.



$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, stačí do vzorca pridať jednu šestinu. Objem štvorstena:

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Všetky vzorce máš zhrnuté v rámčeku.

Obsah trojuholníka $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$
Obsah rovnobežníka $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$
Objem rovnobežnostena $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
Objem štvorbokého ihlana $V = \frac{1}{3}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
Objem štvorstena $V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Príklad 1: *Vypočítajte obsah rovnobežníka* $ABCD$*, ak poznáte súradnice troch jeho vrcholov:* $A[5;1;4]$, $B[-1;-2;6]$, $C[2;3;-2]$.

Ž: *Viem, že obsah rovnobežníka môžem vypočítať použitím vektorového súčinu. Obsah rovnobežníka* $ABCD$ *vypočítame ako veľkosť vektorového súčinu vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$*, pričom* $\vec{a} = B - A$ *a* $\vec{b} = D - A$.

$$\boxed{\text{Obsah rovnobežníka} \quad S = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

U: Správne. Ak však chceš postupovať presne podľa tohto vzorca, chýba ti bod D.

Ž: *Dopočítať štvrtý vrchol rovnobežníka nie je žiadny problém...*

U: Verím, že si šikovný. Možno však nebude potrebné vypočítať súradnice bodu D.

Ž: *Samozrejme, spomenul som si, že vektory umiestnené na protiľahlých rovnobežných stranách rovnobežníka sú tie isté.*

U: Presnejšie povedané, vektor $D - A$ sa rovná vektoru $C - B$.

Ž: *Takže za vektor* $\vec{a}$ *zoberiem* $B - A$ *a za vektor* $\vec{b}$ *zoberiem* $C - B$*. Idem počítať súradnice.*
Najprv vektor $\vec{a}$*, ktorý sa rovná* $B - A$*, preto bude mať súradnice* $-1-5$*, čo je* -6*,* $-2-1$*, čo je* -3 *a* $6-4$*, čo je* 2.
Nasleduje vektor $\vec{b}$*, ktorý sa rovná* $C - B$*, preto bude mať súradnice* $2-(-1)$*, čo je* 3*,* $3-(-2)$*, čo je* 5 *a* $-2-6$*, čo je* -8.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= B - A = (-1-5; -2-1; 6-4) = (-6; -3; 2) \\ \vec{b} &= C - B = (2-(-1); 3-(-2); -2-6) = (3; 5; -8) \end{aligned}}$$

U: Výborne. Súradnice už máme. Môžeme ísť na vektorový súčin.

Ž: *Áno, vypočítam vektorový súčin vektorov* $\vec{a} = (-6; -3; 2)$ *a* $\vec{b} = (3; 5; -8)$ *Použijem na to pomôcku. Zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora* $\vec{a}$*, teda* -6*;*-3 *a* 2*, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu. Pripíšem* -6 *a* -3.
V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{b}$*, budú to čísla* 3*;* 5 *a* -8 *a ešte* 3 *a* 5.

$$\begin{array}{rrrrr} -6 & -3 & 2 & -6 & -3 \\ 3 & 5 & -8 & 3 & 5 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam.*
Prvá súradnica: $-3 \cdot (-8) - 2 \cdot 5 = 24 - 10 = 14$.
Druhá súradnica: $2 \cdot 3 - (-6) \cdot (-8) = 6 - 48 = -42$.
A nakoniec tretia súradnica: $-6 \cdot 5 - (-3) \cdot 3 = -30 + 9 = -21$.
Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ *bude vektor so súradnicami* $(14; -42; -21)$.

U: Vidím, že výpočet súradníc vektorového súčinu je pre teba hračka.

Ž: *Ak použijem tento zápis súradníc, naozaj to ide celkom ľahko. Takže, aby sme dokončili úlohu, máme súradnice vektorového súčinu* $\vec{a} \times \vec{b} = (14; -42; -21)$*. My však máme vypočítať obsah. To asi nebude vektor, nejako potrebujem z tohto vektora dostať číslo.*

U: Len ti zopakujem, čo sme povedali na začiatku: obsah rovnobežníka vypočítame ako veľkosť vektorového súčinu.

Ž: *Jasné. Vypočítam teraz veľkosť vektora $\vec{a} \times \vec{b}$. Veľkosť vektora vypočítame podľa vzorca*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Náš vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ má súradnice $(14; -42; -21)$, preto môžeme písať:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \sqrt{196 + 1764 + 441} = \sqrt{2401} = 49.$$

U: Správne. Musím však poznamenať, že číselný výraz pod odmocninou sa dal vypočítať aj jednoduchšie. Stačilo si všimnuť, že všetky čísla sú násobkami 7, a teda $7^2 = 49$ sa dá vybrať pred zátvorku. Výpočet potom vyzerá takto:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \sqrt{7^2(2^2 + 6^2 + 3^2)}.$$

7 môžeme vybrať pred odmocninu a zvyšné čísla pod odmocninou sa sčítajú ľahko:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 7\sqrt{4 + 36 + 9} = 7\sqrt{49} = 49.$$

Ž: *Uznávam, ani netreba kalkulačku. Vyhneme sa tak veľkým číslam. Dôležité však je, že veľkosť vektorového súčinu je 49. Rovnobežník $ABCD$ má obsah 49.*

Úloha 1: *Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ktorý je určený vektormi $\vec{u} = (-2; -3; 2)$ a $\vec{v} = (3; 4; -2)$.*

Výsledok: 3

Príklad 2: *Vypočítajte obsah trojuholníka KLM, ak $K[-3;-1]$, $L[2;-6]$, $M[1;1]$.*

Ž: *Obsah trojuholníka vypočítame ako jednu polovicu veľkosti vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$.*

$$\boxed{\text{Obsah trojuholníka} \quad S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

U: Vzorec je v poriadku, skúsme však bližšie popísať vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Ž: *Vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ budú dva vektory, ktoré ležia na dvoch stranách trojuholníka. Napríklad si zvolím vektor $\vec{a} = L - K$ a vektor $\vec{b} = M - K$.*

U: Áno. Výpočet obsahu použitím vektorového súčinu je zaujímavý aj tým, že nech si zvolím vektory na ktorýchkoľvek dvoch susedných stranách, výsledok bude ten istý.

Ž: *Dobre, pustím sa do výpočtu súradníc vektorov. Najprv vektor $\vec{a}$, ktorý sa rovná $L - K$, preto bude mať súradnice $2-(-3)$, čo je 5 a $-6-(-1)$, čo je -5.*
Nasleduje vektor $\vec{b}$, ktorý sa rovná $M - K$, preto bude mať súradnice $1-(-3)$, čo je 4 a $1-(-1)$, čo je 2.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a} = L - K = (2-(-3); -6-(-1)) = (5; -5) \\ \vec{b} = M - K = (1-(-3); 1-(-1)) = (4; 2) \end{array}}$$

U: Výborne. Skôr ako sa pustíme do výpočtu súradníc vektorového súčinu, nezabudnime na to, že ho môžeme počítať len ***v priestore***.

Ž: *Vybabreme s tým tak, že obidvom vektorom priradíme tretiu súradnicu a to nulu. Vektor $\vec{a}$ bude mať súradnice $(5; -5; 0)$. Vektor $\vec{b}$ bude mať súradnice $(4; 2; 0)$.*

U: Môžeme sa pustiť do výpočtu súradníc vektorového súčinu.

Ž: *Použijem na to pomôcku. Zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{a}$, teda 5;-5 a 0, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu, t. j. 5 a -5. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{b}$, budú to čísla 4; 2 a 0 a ešte 4 a 2.*

$$\begin{array}{ccccc} 5 & -5 & 0 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam.*
Prvá súradnica: $-5 \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0$.
Druhá súradnica: $0 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 0$.
A nakoniec tretia súradnica: $5 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 10 + 20 = 30$.
Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ bude mať súradnice $(0; 0; 30)$.
Je to náhoda, že je tam toľko núl?

U: Ani nie. Uvedomme si, že sme vektorom $\vec{a}$ a $\vec{b}$ pridali tretiu nulovú súradnicu. Tým sme ich umiestnili v sústave súradníc do roviny xy.

Ž: *Aha! Vektorový súčin je vektor kolmý na rovinu, v ktorej ležia dané vektory. V našom prípade to bude vektor kolmý na rovinu xy. Preto musí byť v smere osi z.*

U: Výborný postreh. Môže to byť akási kontrola našich výpočtov. Výsledný vektor musí mať prvú a druhú súradnicu rovnú nule. Vráťme sa k výpočtu obsahu.

Ž: *Vieme už, že vektorový súčin* $\vec{a} \times \vec{b}$ *má súradnice* $(0; 0; 30)$. *Vypočítame jeho veľkosť.*

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 30^2} = \sqrt{900} = 30.$$

U: Opäť sa dá poznamenať, že výpočet je zbytočný. Stačí si uvedomiť, že veľkosť vektora v smere osi z je rovná absolútnej hodnote jeho tretej nenulovej súradnici.

Ž: *Absolútnej hodnote?*

U: Ak by bola tretia súradnica napríklad -30, jeho veľkosť je predsa 30.

Ž: *Jasné. Jeho veľkosť je to, ako ďaleko je koniec vektora od roviny* xy.
Dokončíme úlohu. Obsah trojuholníka KLM *sa rovná* $\frac{1}{2}$ *z veľkosti vektorového súčinu. Preto obsah trojuholníka sa rovná 15.*

Úloha 1: *Vypočítajte obsah trojuholníka* ABC, *ak* $A[3; -1; 2]$, $B[1; 3; 2]$, $C[5; 1; 5]$.

Výsledok: 9

Úloha 2: *Vypočítajte obsah trojuholníka* KLM, *ak* $K[-1; 3]$, $L[5; -3]$, $M[2; 7]$.

Výsledok: 21

Príklad 3: *Vypočítajte objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ak je dané $A[1;2;1]$, $B[7;3;0]$, $D[-1;5;2]$,$E[1;0;6]$.*

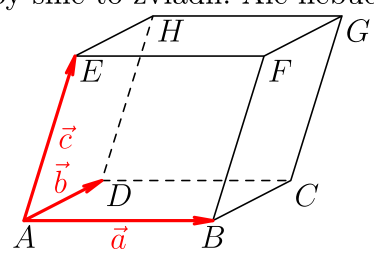
Ž: *Na výpočet objemu rovnobežnostena máme taký trošku dlhší vzorec. Je to tento: objem rovnobežnostena sa rovná absolútnej hodnote zo skalárneho súčinu vektorov $\vec{a}$ krát (vektorovo) $\vec{b}$ a $\vec{c}$.*

$$\boxed{\text{objem rovnobežnostena} \quad V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}$$

U: Správne. Pustíme sa do práce s týmto vzorcom. Najprv potrebujeme vektory.

Ž: *Všimol som si, že máme dané len štyri vrcholy rovnobežnostena. Zvyšné sa zrejme dajú dopočítať.*

U: Áno, s našimi vedomosťami by sme to zvládli. Ale nebude to potrebné. Pozri si obrázok.



Ak si napríklad vrchol A spojíme s ostanými danými vrcholmi B, D a E, vidíme, že všetky tieto úsečky tvoria hrany rovnobežnostena.

Ž: *To je výborné. Môžeme teda z týchto úsečiek AB, AD a AE vytvoriť vektory, ktoré sa nám hodia. Žiadne ďalšie vrcholy nepotrebujeme.*

U: Správne. Poďme na to.

Ž: *Začnem so súradnicami jednotlivých vektorov. Označím si ich $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Vektor $\vec{a}$ sa bude rovnať $B - A$, preto bude mať súradnice $7-1$, čo je 6, $3-2$, čo je 1 a $0-1$, čo je -1. Nasleduje vektor $\vec{b}$, ktorý sa rovná $D - A$, preto bude mať súradnice $-1-1$, čo je -2, $5-2$, čo je 3 a $2-1$, čo je 1.*
Posledným je vektor $\vec{c}$, ktorý sa rovná $E - A$ a má súradnice $1-1$, čo je 0, $0-2$, čo je -2 a $6-1$, čo je 5.

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{a} = B - A = (6;1;-1) \\ \vec{b} = D - A = (-2;3;1) \\ \vec{c} = E - A = (0;-2;5) \end{gathered}}$$

U: Výborne. Ideme na výpočet objemu. Vo vzorci vystupuje zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Znamená to, že prvé dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vynásobíme vektorovo. Tým dostaneme vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. A tento vektor skalárne vynásobíme s tretím vektorom $\vec{c}$.

Ž: *A všetko je ešte v absolútnej hodnote.*

U: Áno, to preto, ak by skalárny súčin bol záporný. Čo sa kľudne môže stať.

Ž: *Začnem hádam s vektorovým súčinom vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Použijem na to pomôcku. Zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{a}$, teda 6; 1 a -1, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu, t. j. 6 a 1. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{b}$, budú to čísla -2; 3 a 1 a ešte -2 a 3.*

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam.*
Prvá súradnica: $1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 1 + 3 = 4$.
Druhá súradnica: $-1 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 = 2 - 6 = -4$.
A nakoniec tretia súradnica: $6 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 18 + 2 = 20$.
Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ *bude mať súradnice* $(4; -4; 20)$.

U: Výborne. Prvú časť máme za sebou. Ostáva nám skalárny súčin.

Ž: *Vypočítať skalárny súčin je už ľahké. Iba vynásobím príslušné súradnice a všetko sčítam. Počítame teda skalárny súčin vektora* $\vec{a} \times \vec{b} = (4; -4; 20)$ *a vektora* $\vec{c} = (0; -2; 5)$. *Dostávame, že objem sa rovná* $4 \cdot 0 + (-4) \cdot (-2) + 20 \cdot 5$. *A to sa rovná* $0 + 8 + 100$, *čo je* 108. *Objem rovnobežnostena je* 108.

$$\boxed{\begin{gathered} V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \\ V = |(4; -4; 20) \cdot (0; -2; 5)| = |4 \cdot 0 + (-4) \cdot (-2) + 20 \cdot 5| \\ V = |0 + 8 + 100| = 108 \end{gathered}}$$

Úloha 1: *Vypočítajte objem rovnobežnostena* $ABCDEFGH$, *ak je dané* $A[1; -2; -3]$, $B[4; 1; -1]$, $D[-3; 3; 1]$,$E[2; 0; 5]$.

Výsledok: 178

Príklad 4: *Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak je dané $A[0;0;2]$, $B[1;-1;4]$, $C[4;2;4]$,$D[4;1;2]$.*

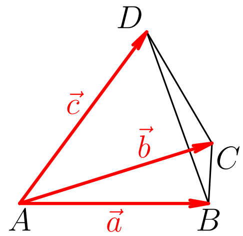
Ž: *Objem štvorstena môžeme vypočítať využitím vektorového súčinu. Odvodili sme preň vzorec: Objem švorstena sa rovná jednej šestine z absolútnej hodnoty skalárneho súčinu vektorov $\vec{a}$ krát (vektorovo) $\vec{b}$ a $\vec{c}$.*

$$\boxed{\text{objem štvorstena} \quad V = \frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

U: Áno, vzorec si uviedol správne. Dôležité ešte bude, ako si zvolíš vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$.

Ž: *Myslel som, že je to úplne jedno, ako si ich zvolím. Len musia ležať na troch rôznych hranách štvorstena.*

U: Celkom jedno to nie je. Pozri si obrázok.



Predstav si, že by si si zvolil napríklad vektory $B-A$, $C-A$ a $B-C$.

Ž: *To by boli všetky hrany jednej steny! Vrchol D by sme vôbec nevyužili.*

U: No vidíš! Nie je to jedno, ako si zvolíš vektory. Aby si sa vyhol takýmto situáciam, najjednoduchšie bude zvoliť si tri hrany, ktoré vychádzajú z jedného vrcholu.

Ž: *To je dobrý nápad. Zvolím si vrchol A. Vektory budú tieto: vektor $\vec{a}=B-A$, vektor $\vec{b}=C-A$ a vektor $\vec{c}=D-A$. Vypočítam ich súradnice. Vektor $\vec{a}$ sa rovná $B-A$, preto bude mať súradnice $1-0$, čo je 1, $-1-0$, čo je -1 a $4-2$, čo je 2.*
Nasleduje vektor $\vec{b}$, ktorý sa rovná $C-A$, preto bude mať súradnice $4-0$, čo je 4, $2-0$, čo je 2 a $4-2$, čo je 2.
Posledným je vektor $\vec{c}$, ktorý sa rovná $D-A$ a má súradnice $4-0$, čo je 4, $1-0$, čo je 1 a $2-2$, čo je 0.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=B-A=(1;-1;2)\\ \vec{b}&=C-A=(4;2;2)\\ \vec{c}&=D-A=(4;1;0)\end{aligned}}$$

U: Výborne. Ideme na výpočet objemu. Samotný výpočet je taký istý ako pri výpočte objemu rovnobežnostena.

Ž: *Áno. Vo vzorci vystupuje zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Znamená to, že prvé dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vynásobíme vektorovo. A tento výsledný vektor skalárne vynásobíme s tretím vektorom $\vec{c}$. Samozrejme, dáme ešte pozor na absolútnu hodnotu.*

Ž: *Začnem s vektorovým súčinom vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Použijem na to pomôcku. Zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora $\vec{a}$, teda 1; -1 a 2, pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu, t. j. 1 a -1. V druhom riadku urobím to isté s vektorom $\vec{b}$, budú to čísla 4; 2 a 2 a ešte 4 a 2.*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam.*
Prvá súradnica: $-1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 - 4 = -6$.
Druhá súradnica: $2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 8 - 2 = 6$.
A nakoniec tretia súradnica: $1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 2 + 4 = 6$.
Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ *bude mať súradnice* $(-6; 6; 6)$.

U: Výborne. Ostáva nám skalárny súčin.

Ž: *Vypočítať skalárny súčin znamená, vynásobiť príslušné súradnice a všetko sčítať. Počítame teda skalárny súčin vektora* $\vec{a} \times \vec{b} = (-6; 6; 6)$ *a vektora* $\vec{c} = (4; 1; 0)$. *Dostávame* $\frac{1}{6}(-6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 0)$. *A to sa rovná* $\frac{1}{6}(-24 + 6 + 0)$, *čo je* -3. *Použijeme absolútnu hodnotu. Objem štvorstena je* 3.

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$
$$V = \frac{1}{6}|(-6; 6; 6) \cdot (4; 1; 2)| = \frac{1}{6}| - 6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 0|$$
$$V = \frac{1}{6}| - 24 + 6 + 0| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$$

Úloha 1: *Vypočítajte objem štvorstena* $ABCD$, *ak je dané* $A[5; 2; -3]$, $B[-3; 4; -1]$, $C[-1; -1; 3]$,$D[-; 1; 1 - 2]$.

Výsledok: 18

Príklad 5: *Vypočítajte povrch štvorstena* $ABCD$, *ak je dané* $A[0;0;2]$, $B[1;-1;4]$, $C[4;2;4]$, $D[4;1;2]$.

Ž: *Povrch štvorstena - to je súčet obsahov všetkých jeho stien.*

U: Správne. Aké steny má štvorsten?

Ž: *Štvorsten je vlastne trojboký ihlan. Všetky jeho steny sú trojuholníky.*

U: Opäť správne.

Ž: *Mojou úlohou je vypočítať obsahy štyroch trojuholníkov a potom ich sčítať.*

U: Áno. Dúfam, že pri práci využiješ vektorový súčin.

Ž: *Samozrejme. Nezabudol som, že obsah trojuholníka, ktorého vrcholy sú dané súradnicami, môžeme vypočítať ako jednu polovicu veľkosti vektorového súčinu vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$.

U: Pričom je potrebné dodať, že vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sú vektory umiestnené vo vrcholoch trojuholníka.

Ž: *Začnem so stenou - s trojuholníkom* ABC. *Zvolím si dva vektory, vektor* $\vec{a} = B - A$ *a vektor* $\vec{b} = C - A$. *Vypočítam ich súradnice. Vektor* $\vec{a}$ *sa rovná* $B - A$, *preto bude mať súradnice* $1 - 0$, *čo je* 1, $-1 - 0$, *čo je* -1 *a* $4 - 2$, *čo je* 2.
Nasleduje vektor $\vec{b}$, *ktorý sa rovná* $C - A$, *preto bude mať súradnice* $4 - 0$, *čo je* 4, $2 - 0$, *čo je* 2 *a* $4 - 2$, *čo je* 2.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= B - A = (1;-1;2)\\ \vec{b} &= C - A = (4;2;2)\end{aligned}}$$

Ž: *Vypočítam vektorový súčin vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$. *Použijem na to pomôcku. Zapíšem si súradnice vektorov do zákrytov pod seba, prvý riadok budú súradnice vektora* $\vec{a}$, *teda* 1; -1 *a* 2, *pridám ešte raz prvú a druhú súradnicu, t. j.* 1 *a* -1. *V druhom riadku urobím to isté s vektorom* $\vec{b}$, *budú to čísla* 4; 2 *a* 2 *a ešte* 4 *a* 2.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

Ž: *A teraz počítam.*
Prvá súradnica: $-1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 - 4 = -6$.
Druhá súradnica: $2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 8 - 2 = 6$.
A nakoniec tretia súradnica: $1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 2 + 4 = 6$.
Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{b}$ *bude mať súradnice* $(-6;6;6)$.

U: Výborne. Aký obsah bude mať stena ABC?

Ž: *Musím ešte vypočítať veľkosť tohto vektora. Veľkosť vektora vypočítame podľa vzorca*

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Náš vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ *má súradnice* $(-6; 6; 6)$, *preto môžeme písať:*

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{1+1+1} = 6\sqrt{3}.$$

Obsah trojuholníka sa rovná jednej polovici veľkosti vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$. $6 : 2 = 3$, *a preto* **obsah steny ABC sa rovná $3\sqrt{3}$.**

U: Dobre. Pokračujeme s ostatnými stenami.

Ž: *Ostatné steny sú tiež trojuholníky, preto bude postup úplne rovnaký. Len použijeme iné vektory. Inak to bude to isté: vypočítať súradnice, potom vektorový súčin a nakoniec jednu polovicu jeho veľkosti.*

U: Ešte že má štvorsten len štyri steny. Inak by si sa asi unudil, však? Ber to tak, že si to lepšie precvičíš.

Ž: *Púšťam sa do toho. Budem sa teraz venovať stene* ABD.

U: Skús využiť vektory, ktoré už máme. Aby si nemusel dvakrát počítať to isté.

Ž: *Áno. Všimol som si, že vektor* $\vec{a} = B - A$ *už máme. Má súradnice* $(1; -1; 2)$. *Druhým bude vektor* $\vec{c} = D - A$, *bude mať súradnice* $(4; 1; 0)$. *Na výpočet vektorového súčinu* $\vec{a} \times \vec{c}$ *si zapíšem súradnice vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{c}$ *pod seba:*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

Ž: *A počítam. Prvá súradnica:* $-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 - 2 = -2$.
Druhá súradnica: $2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 = 8 - 0 = 8$.
A nakoniec tretia súradnica: $1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 1 + 4 = 5$.
Vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{c}$ *má súradnice* $(-2; 8; 5)$.

U: Ostáva nám veľkosť vektora…

Ž: *Počítam veľkosť vektora* $\vec{a} \times \vec{c}$:

$$|\vec{a} \times \vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 64 + 25} = \sqrt{93}.$$

Obsah steny ABD sa rovná $\frac{1}{2}\sqrt{93}$.

U: Výborne. Polovicu práce máme za sebou.

Ž: *Pokračujem so stenou* BCD.

U: V tomto trojuholníku zatiaľ nemáme žiadne vektory.

Ž: *Tak si ich vyrobíme. Vektor* $\vec{d} = B - C$ *má súradnice* $(-3; -3; 0)$. *Druhým bude napríklad vektor* $\vec{e} = B - D$ *a bude mať súradnice* $(-3; -2; 2)$. *Na výpočet vektorového súčinu* $\vec{d} \times \vec{e}$ *si zapíšem súradnice vektorov* $\vec{d}$ *a* $\vec{e}$ *pod seba:*

$$\begin{array}{ccccc} -3 & -3 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & -3 & -2 \end{array}$$

Ž: *A počítam. Prvá súradnica:* $-3 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) = -6 - 0 = -6$.
Druhá súradnica: $0 \cdot (-3) - (-3) \cdot 2 = 0 + 6 = 6$.
A nakoniec tretia súradnica: $-3 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-3) = 6 - 9 = -3$.
Vektorový súčin $\vec{d} \times \vec{e}$ *má súradnice* $(-6; 6; -3)$.
Počítam veľkosť vektora $\vec{d} \times \vec{e}$ *:*

$$|\vec{d} \times \vec{e}| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9.$$

Obsah steny BCD sa rovná $\frac{9}{2}$.

U: Ide ti naozaj výborne. Ostáva posledná stena ACD.

Ž: *V trojuholníku ACD už máme určené dva vektory. Sú to $\vec{b} = C - A$ a $\vec{c} = D - A$. Počítam vektorový súčin $\vec{b} \times \vec{c}$.*

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

Ž: *Prvá súradnica:* $2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 - 2 = -2$.
Druhá súradnica: $2 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 8 - 0 = 8$.
A nakoniec tretia súradnica: $4 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = -4$.
Vektorový súčin $\vec{b} \times \vec{c}$ *má súradnice* $(-2; 8; -4)$.
Počítam veľkosť vektora $\vec{b} \times \vec{c}$ *:*

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 64 + 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

Obsah steny ACD sa rovná $\sqrt{21}$.

U: Povrch štvorstena vypočítame ako súčet obsahov všetkých jeho stien.

Ž: *Preto povrch štvorstena $ABCD$ sa rovná súčtu obsahov trojuholníkov ABC, ABD, BCD a ACD. Povrch sa preto rovná* $3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{93} + \frac{9}{2} + \sqrt{21}$.