$$\mathbf{K}: 4x^2 - 25y^2 - 100z = 0.$$

a) Určte všetky body kvadriky $\mathbf{K}$, ktorými prechádzajú dve rôznobežky ležiace na $\mathbf{K}$.
b) Určte všetky body kvadriky $\mathbf{K}$, ktorými prechádza jediná priamka ležiaca na $\mathbf{K}$.
c) Zvoľte taký bod A kvadriky $\mathbf{K}$, ktorým prechádzajú dve priamky ležiace na $\mathbf{K}$, napíšte ich parametrické vyjadrenie a presvedčte sa, že sú rôznobežné.
d) Zvoľte taký bod B kvadriky $\mathbf{K}$, ktorým prechádza jediná priamka ležiaca na $\mathbf{K}$, napíšte jej parametrické vyjadrenie a presvedčte sa, že leží na $\mathbf{K}$.
e) Určte taký bod C kvadriky $\mathbf{K}$, ktorým neprechádza žiadna priamka ležiaca na kvadrike. Koľko takýchto bodov existuje?

8.2. Nerotačné kvadriky

Úloha 8.2.1. Určte rezy kvadriky $\mathbf{K}$ so súradnicovými rovinami;
$$\mathbf{K}: 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 48 = 0.$$

Úloha 8.2.2. Určte o akú kvadriku ide a určte jej rez rovinou $\alpha: y + 1 = 0$;
$$\mathbf{K}: 4x^2 - 5y^2 - 120z = 0.$$

Úloha 8.2.3. Určte typ kvadratickej plochy $\mathbf{K}$ a jej rez rovinou a) $\omega: z + 5 = 0$, b) $\varrho: y - 2 = 0$;
$$\mathbf{K}: 4x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 36z - 32 = 0.$$

Úloha 8.2.4. Zistite typ kvadratickej plochy $\mathbf{K}$ a určte jej rez rovinou rovnobežnou so súradnicovou rovinou a) $\overleftrightarrow{xy}$, b) $\overleftrightarrow{yz}$, c) $\overleftrightarrow{xz}$;
$$\mathbf{K}: 4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 4y + 24z - 32 = 0.$$

VÝSLEDKY ÚLOH

KAPITOLA 1. AFINNÝ PRIESTOR

1.1. Geometrický model vektora. Pojem voľného a viazaného vektora. Operácie s vektormi

3. a) C je stred úsečky AB, b) ak $A \neq B$, tak neexistuje C, ak $A = B$, tak vyhovuje každý bod C uvažovaného priestoru; **4.** a) 36, b) 19; **5** a) 64, b) 27; **6.** a) 5 alebo 7 (závisí od polohy bodov), b) 9; **7.** a) 7, 9, 11 alebo 13 (načrtnite si voľbu bodov A, B, C, D pre všetky možné prípady), b) 16; **8.** a) je pravdivý výrok, b) je nepravdivý výrok; **9.** a), b) sú nepravdivé výroky, c) uvažujte o podmienke pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$; **10.** a) je pravdivý výrok, b) je nepravdivý výrok; **11.** a), b) sú nepravdivé výroky, c) uvažujte o podmienke pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$; **12.** len ak $\overline{u} = \overline{0}$; **13.** a) nie, b) áno, c) áno; **16.** a) sú lineárne závislé ($\overline{a} = -\overline{b}$), b) vektorov 9, viazaných vektorov 16, c) $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $2\overline{u}$; **18.** $\overline{0}$; **20.** a) $\overline{BC} - 2\overline{AB}$, b) $2\overline{BC} + \overline{DC}$, c) $-2\overline{SD} + \overline{SC}$; **21.** a) viazaných vektorov 25, voľných vektorov 13, b) $\overline{S_2S_1} = -\frac{1}{2}\overline{KL} - \overline{LS_2}$, $\overline{KL} = 2\overline{S_3S_2}$, $\overline{S_1L} = \overline{KS_3} - \overline{LS_2}$, $\overline{LK} = \frac{2}{3}\overline{LS_3} - \frac{2}{3}\overline{KS_2}$; **22.** $\alpha \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{3}{4}\pi; \pi)$; **23.** $x \in R - \{-1; 0; 1\}$; **24.** a) $x \in \{0; 6\}$, b) $x \in R - \{0; 6\}$.

1.2. Afinný priestor

1. a) nie, b) áno, $\dim \mathbb{A} = 3$, báza $\mathbb{V}$ je napr. $\mathcal{B} = \{(1;0;0;0), (0;1;0;0), (0;0;1;0)\}$ c) nie; **2.** a) nie, b) áno, $\dim \mathbb{A} = 2$, báza $\mathbb{V}$ je napr. $\mathcal{B} = \{(1;0;0), (0;1;0)\}$; **3.** a) pravda, b) nepravda; **4.** nie; **5.** a) nie, b) áno, c) áno; **6.** pre k nepárne áno, pre k párne nie; **7.** nie; **8.** a) nie, b) áno, c) áno; **9.** a) nie, b) nie, c) nie; **10.** nie; **11.** áno.

1.3. Lineárna sústava súradníc

1. a) áno, b) nie, c) áno; **2.** a) áno, b) nie, c) nie, d) áno; **3.** nie; **4.** áno, b) áno, c) nie; **5.** počiatok je $P[2; 1; -1]$, súradnicové vektory sú $\overline{u}_1(3; 2; \frac{5}{2})$, $\overline{u}_2(2; 1; \frac{3}{2})$; **6.** $A[1; -1]$, $B[-1; 1]$, $C[1; 1]$.

1.4. Afinné podpriestory. Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru[1]. Vzájomná poloha afinných podpriestorov

1. Treba si uvedomiť, že $\mathcal{A}' \neq \emptyset$ a overiť existenciu vektorového podpriestoru $\mathbb{V}'(\subset \mathbb{V})$, ktorý má vlastnosti z definície afinného podpriestoru; napr. $[0;1;0;1] \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, $\mathbb{V}' = \{(0;x;0;0), x \in R\}$; **2.** $\dim \mathcal{A}' = 1$; **3.** áno, $\mathbb{V}' = \langle(1;0;0)\rangle$, $\dim \mathcal{A}' = 1$; **4.** áno, $\mathbb{V} = \langle(1;0;1),(0;1;1)\rangle$, $\dim \mathcal{A} = 2$; **5.** áno, $\mathbb{V}' = \langle(1;2;0),(0,1,1)\rangle$, $\dim \mathcal{A}' = 2$, **6.** $\varrho: X = [1;-1;2;-4] + t_1(2;2;0;10) + t_2(-2;-1;3;1)$, **7.** nie, **8.** a) $\mathbb{V} = \{(3b -$

[1] Nakoľko parametrické vyjadrenie podpriestoru nie je jednoznačné, vo výsledkoch uvádzame vždy len jedno z možností parametrického vyjadrenia hľadaného podpriestoru.

$2a, a+b, b), a, b \in R\}$, $\mathcal{A} = \{[1+3b-2a; 3+a+b; 1+b], a, b \in R\}$, c) $X = [1;3;1] + t_1(-2;1;0) + t_2(3;1;1)$, d) $A \in \mathcal{A}$, $b \notin \mathcal{A}$; **9.** a) $\mathcal{A}$ je afinným podpriestorom daného afinného priestoru, b) $\dim \mathcal{A} = 2$, c) $\mathcal{A} : X = [1;0;0] + r(1;0;1) + s(0;1;-1)$; **10.** a)rovnobežné totožné, b) mimobežné; **11.** $\omega : X = [2;3;-1] + t(-1;3;2) + s(4;1;-3)$; **12.** a) $k = -6$, b) hľadané k neexistuje, c) hľadané k neexistuje, d) $k \in R - \{-6\}$; **13.** a) rovnobežné nie incidentné; b) rôznobežné, c) rovnobežné nie incidentné, d) rôznobežné; **14.** rôznobežné; **15.** rôznobežné; **16.** rôznobežné; **17.** a) mimobežné, b) mimobežné, c) mimobežné, d) rôznobežné; **18.** $X = [4;5;7] + t(2;1;3)$; $X = [4;5;7] + t(-1;2;7)$; $X = [4;5;7] + t(5;0;-1)$;

1.5. Všeobecná rovnica nadroviny
Priečka mimobežiek
Zväzok nadrovín v $\mathbb{A}_2$ a v $\mathbb{A}_3$

1. $\alpha : 2x - y + z - 4 = 0$; **2.** $\varrho : X = [1;1;1;3] + t_1(1;1;1;0) + t_2(0;0;1;2) + t_3(1;0;0;-1)$; **3.** a) $3x + 4y - 11 = 0$, b) $3x + 3y + 2z - 5 = 0$; **4.** $13x + 22y + 7z - 47 = 0$; **5.** $14x - 8y + 5z - 9 = 0$; **7.** $m : 9x + 7y + 27z - 70 = 0$; **8.** $x - 2y + 3 = 0$; **9.** $\alpha : 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$; **10.** $\varrho : x_1 + x_3 - 2 = 0$; **11.** $\omega : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + 2 = 0$; **12.** a) $\alpha : X = [-3;1;0;0] + t_1(-2;1;0;0) + t_2(1;0;1;0) + t_3(-1;0;0;1)$, b) $\alpha : X = [0;0;2;0;0] + t_1(1;0;1;0;0) + t_2(0;1;1;0;0) + t_3(1;0;0;1;0) + t_4(0;0;1;0;1)$, c) $\alpha : X = [-1;0;0;0;0] + t_1(1;2;0;0;0) + t_2(0;1;1;0;0) + t_3(0;1;0;1;0) + t_4(0;-1;0;0;1)$; **13.** $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{5}{3}$; **14.** a) $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{5}{3}$; **15.** a) $a = \frac{9}{4}$, b) neexistuje; **16.** áno; **17.** $\varrho \cap \sigma = [M; \overline{v}]$, kde napr. $M[7;0;-12]$, $\overline{v} = (5;1;-7)$; **18.** $\varrho : 4x - 81y + 17z - 85 = 0$; **19.** $\sigma : 2x + 2y - 3z + 7 = 0$; **20.** $\varrho : x + 5y - z + 3 = 0$; **21.** a) $Q[-1;-1;3]$, b) $Q[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{11}{2}]$; **22.** p je určená sústavou dvoch rovníc, napr. $6x - 2y + z - 5 = 0$, $z + 1 = 0$; **23.** $p : X = [2;1;2] + t(-1;2;-3)$; **24.** a) $X = [9;3;3] + r(-2;2;-3)$, b) $X = [1;3;-1] + r(1;-2;3)$, c) $X = [1;3;-1] + t(2;-2;3)$; **25.** a) $X = [1;2;-1] + t(0;-1;1)$, b) priečka $p = \overleftrightarrow{XY}$, kde $X[\frac{23}{15}; \frac{53}{15}; \frac{13}{5}]$, $Y[1; \frac{23}{3}; \frac{11}{3}]$ sú priesečníky priečky s mimobežkami a, b v poradí; **26.** $m : 5y + 13 = 0$; **27.** $m : 24x + 18y - 53 = 0$; **28.** neexistuje také a; **29.** $-9x + 25y - 43 = 0$; **30.** $10x + 7y - 1 = 0$; **31.** $23x - 3y + 11z + 12 = 0$.

1.6. Deliaci pomer

1. $(ATA') = 3$; **3.** $C[-1;0]$, $B[2;0]$, $A[-2;2]$; **4.** $C[10;-13]$; **5.** $(PAB) = -1$; **6.** zvoľte LSS na priamke AB napr. repérom $\mathcal{R} = \{A; B - A\}$; **7.** $(ABC) = \frac{1}{4}$; **8.** $(ABC) = -\frac{1}{3}$; **9.** $(ABD).(BCD) = (ACD)$.

1.7. Transformácia lineárnej súradnicovej sústavy

1. a) $\overline{u}_1(0;2;1)$, $\overline{u}_2(-\frac{1}{2};1;1)$, $\overline{u}_3(0;0;1)$, b) $\overline{u}_1(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1)$, $\overline{u}_2(1;1;1)$, $\overline{u}_3(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1)$; **2.** $M[1;1;0]$, $N[3;0;0]$, $L[2;1;-1]$ **3.** $M[\frac{5}{2};\frac{1}{2};0]$; **4.** $M[1;1]$; **5.** $M[11;4;-3]$; **6.** $M[1;2;4;-1]$; **7.** $M[-3;4;0]$; **8.** $\alpha : 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 3 = 0$.

KAPITOLA 2. EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR

2.1. Skalárny súčin vektorov

1. a) nie, b) áno, c) nie; **2.** a) nie, b) áno, c) áno; **3.** $\sqrt{52}$; **4.** -7; **5.** -25; **6.** a) 20, b) $\frac{-9\sqrt{2}}{2}$, c) -3; **7.** a) $\cos\varphi = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}$, b) $\cos\varphi = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}$; **8.** $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{61}}{61}$; **9.** $\frac{\pi}{3}$; **10.** $\frac{2\pi}{3}$; **11.** $120°$; **12.** -19; **13.** $\sqrt{73}$; **15.** $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$; **16.** $\sqrt{145 + 72\sqrt{3}}$; **17.** $2\sqrt{37}$; **18.** a) 5, b) $\|\overline{u}\| = \sqrt{13}$, $\|\overline{v}\| = \sqrt{17}$, c) $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{221}}{221}$; **19.** $\frac{1}{2}$; **20.** jedno riešenie $C[0;9]$, $D[-5;7]$, druhériešenie $C'[4;-1]$, $D'[-1;-3]$; **21.** $C[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2\sqrt{3} + \frac{5}{2}]$; **22.** 7; **23.** $\overline{w}(-\frac{4}{13}; \frac{11}{13}; -\frac{6}{13}; \frac{10}{13})$.

2.2. Schmidtov ortogonalizačný proces
Totálna kolmosť vo $\mathbb{V}_n$
Kolmosť vo $\mathbb{V}_n$

1. $\mathcal{B} = \{(\frac{\sqrt{4}}{4}; \frac{\sqrt{4}}{4}; \frac{\sqrt{4}}{4}; \frac{\sqrt{4}}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{3\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}), (\frac{4\sqrt{42}}{42}; 0; \frac{-5\sqrt{42}}{42}; \frac{\sqrt{42}}{42}), (-\frac{2\sqrt{14}}{14}; 0; -\frac{14}{14}; \frac{3\sqrt{14}}{14})\}$; **2.** $\overline{e}_1(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\overline{e}_2(-\frac{\sqrt{42}}{42}; \frac{4\sqrt{42}}{42}; \frac{5\sqrt{42}}{42})$, $\overline{e}_3(\frac{3\sqrt{14}}{14}; \frac{2\sqrt{14}}{14}; -\frac{\sqrt{14}}{14})$; **3.** $\overline{a}_3(-23;40;65;9)$, $\overline{a}_4(-17;-10;0;1)$; **4.** $\mathbb{V}'^{\perp} = \langle(2;0;-2;0;1),(0;1;0;0;0)\rangle$; **5.** nie; **6.** a) áno (lebo $\mathbb{V}''^{\perp}$ je vektorový podpriestor $\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}''^{\perp} = \langle(0;-1;1;0;0),(1;-1;0;1;0)\rangle$), b) $\overline{e}_1(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0)$, $\overline{e}_2(\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{\sqrt{10}}{10}; -\frac{\sqrt{10}}{25}; \frac{\sqrt{10}}{5})$, $\overline{e}_3(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0; 0)$, $\overline{e}_4(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4})$, $\overline{e}_5(\frac{\sqrt{10}}{10}; -\frac{\sqrt{10}}{20}; -\frac{\sqrt{10}}{20}; -\frac{3\sqrt{10}}{20}; \frac{\sqrt{10}}{4})$; **7.** $(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$.

2.3. Vonkajší súčin vo $\mathbb{V}_n$
Vektorový súčin vo $\mathbb{V}_3$

1. a) 3, b) 6; **2.** $7\sqrt{3}$; **3.** $(0;0;6\sqrt{3})$; **4.** a) $(1;9;4)$, b) $(7;63;28)$; **5.** 66; **6.** $|A, \varrho| = \sqrt{\frac{2}{139}}$; **7.** $p : X = [3;0;0] + t(1;1;3)$.

2.4. Metrické vlatnosti euklidovského priestoru

1. napr. $\gamma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2 = 0$, 16 riešení; **2.** úloha má 2 riešenia, jedno z nich je $\varrho : 15x + 5y + 3z - 12 = 0$; **3.** a) $10x - 4y + 23 = 0$, b) $2x + 5y - 7 = 0$; **4.** $X_1[2+\frac{\sqrt{6}}{3}; -1+\frac{\sqrt{6}}{3}; 1-\frac{2\sqrt{6}}{3}]$, $X_2[2-\frac{\sqrt{6}}{3}; -1-\frac{\sqrt{6}}{3}; 1+\frac{2\sqrt{6}}{3}]$; **5.** $3x + 4y - 26 = 0$; **6.** $p : X = [3;8;-4] + t(2;-1;2)$; **7.** $p : X = [-1;4;3;1] + t(3;2;1;-4)$; **8.** $B[5;2]$, $D[1;4]$; **9.** $\beta : x_1 + 3x_2 + x_3 - 11 = 0$; **10.** $v_K = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $v_L = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $v_M = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; **11.** a) $X = [-6;1;0] + t(5;-7;4)$, $v_V = \frac{22\sqrt{10}}{15}$, b) $X = [-6;1;0] + t(5;-7;4)$, $v_V = \frac{22\sqrt{10}}{15}$, c) $X = [3;1;5] + t(1;-1;4)$, $v_V = \frac{17\sqrt{18}}{18}$; **12.** $4x - 3y + 25 = 0$; **13.** $4x + 3y - 24 = 0$; **14.** $A[-10;-7]$, $B[12;-1]$, $C[2;17]$; **15.** úloha má 2 riešenia: $4x + y - 6 = 0$ a $3x + 2y - 7 = 0$; **16.** $\sqrt{21}$; **17.** $\frac{8\sqrt{2}}{5}$; **18.** $A'[-\frac{11}{9}; \frac{16}{9}; \frac{46}{9}; -\frac{8}{3}]$; **19.** $\sqrt{\frac{2.521}{19}}$; **20.** a) $x + 3y - 4z + 3 = 0$, b) $x - y + 3z - 2 = 0$; **21.** $M'[\frac{7}{8}; \frac{9}{8}; \frac{7}{8}; \frac{10}{8}; \frac{23}{8}]$; **22.** $A[-\frac{1373}{451}; \frac{446}{451}]$, $B[\frac{145}{41}; \frac{108}{41}]$, $C[\frac{3793}{451}; \frac{3316}{451}]$, $D[\frac{75}{41}; \frac{234}{41}]$; **23.** $\overleftrightarrow{BC} : x + y - 8 = 0$, $\overleftrightarrow{CD} : x - y + 5 = 0$, $\overleftrightarrow{AD} : x + y + 2 = 0$; **24.** a) 1, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **25.** $a = 10$, $b = 6$; **27.** $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3 = 0$; **28.** $\cos\varphi = \frac{8\sqrt{217}}{217}$; **29.** $C[\frac{5-4\sqrt{3}}{2}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2}; 0]$, $D[\frac{15-4\sqrt{3}}{6}; \frac{4+\sqrt{3}}{2}; \frac{5\sqrt{6}}{3}]$; **30.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$; **31.** $A^0[\frac{29}{6}; \frac{8}{6}; \frac{11}{6}]$; **32.** $p^0 : X = [0;-1;3] + t(-4;-5;3)$; **33.** nutnou a postačujúcou podmienkou je, aby roviny boli na seba kolmé, napr. $\alpha : x + y - z + 1 = 0$, $\beta : x - 2y - z + 2 = 0$; **34.** $B[-\frac{1}{2}; -\frac{51}{2}; -\frac{25}{2}]$; **35.** p, q sú mimobežné, $|p, q| = \frac{2\sqrt{51}}{51}$; **36.** využite vzťah pre objem hranola určeného vektormi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $(B - A)$; **37.** $|\mathbb{E}', \mathbb{E}''| = 0$ (sú rôznobežné); **38.** a) $\sqrt{13}$, b) $\sqrt{3}$.

KAPITOLA 3. AFINNÉ ZOBRAZENIA

3.1. Základné vlastnosti afinných zobrazení

1. $f(O) = [2; 3]$, $\overline{f}(\overline{e}_1) = (2; 1)$, $\overline{f}(\overline{e}_2) = (-1; 1)$; **2.** využite nutnú a postačujúcu podmienku pre afinné zobrazenie ($\forall P, Q \in \mathcal{A}$, $\forall t \in \mathbb{R} : f(P + t(Q - P)) = f(P) + t\overline{f}(Q - P)$); **3.** zvoľte vhodne LSS v $\mathbb{A}_2$, f nie je surjektívne; **4.** zvoľte vhodne LSS v $\mathbb{A}_2$; **5.** zvoľte vhodne LSS v $\mathbb{A}_3$ (f je projekcia); **8.** afinné zobrazenie f v $\mathbb{A}_2$ je jednoznačne určené obrazmi troch lineárne nezávislých bodov, označme K, L, M nekolineárne body v $\mathbb{A}_2$ (t.j. lineárne nezávislé), potom môžu nastať tri možnosti: *1.* ak $f(K)$, $f(L)$, $f(M)$ sú nekolineárne body, tak f je prosté afinné zobrazenie a $\dim f(\mathbb{A}_2) = 2$, *2.* ak $f(K)$, $f(L)$, $f(M)$ sú kolineárne body, tak f je afinné zobrazenie, ktoré nie je prosté a $\dim f(\mathbb{A}_2) = 1$ (t.j. obrazom priestoru $\mathbb{A}_2$ je priamka určená bodmi $f(K)$, $f(L)$), *3.* ak $f(K) = f(L) = f(M)$, tak f je konštantné afinné zobrazenie, zrejme nie je prosté a $\dim f(\mathbb{A}_2) = 0$ (t.j. obrazom priestoru $\mathbb{A}_2$ je bod $f(K)$).

3.2. Asociovaný homomorfizmus afinného zobrazenia

1. $\overline{f}(\overline{w}) = (1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\overline{f}(\overline{w} - 2\overline{u}) = (-1; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$; **2.** $\overline{f}(\overline{u}) = (3; 2; -3)$, $\overline{f}(-\overline{u}) = (-3; -2; 3)$, $\overline{f}(3\overline{u}) = (9; 6; -9)$; **3.** $\overline{f}(\overline{v}) = (0; \frac{4}{3})$; **4.** $f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3a - 2)x^2 + (2b - 2)x + c + 1$.

3.3. Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

1. $f : x' = -x - y + 1$, $y' = x$, $z' = y$; **2.** a) $f : x' = -4x + 2y + 8$, b) $f : x' = -3x + y + 7$; **3.** a) afinné zobrazenie f nie je určené jednoznačne, b) neexistuje afinné zobrazenie f; **4.** $f : x'_1 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$, $x'_2 = x_2 + 1$, $x'_3 = x_1 + x_3$, $x'_4 = 3x_2 + 3$, $x'_5 = 5x_3 - x_4$; **5.** ak $p = -1$, tak neexistuje afinné zobrazenie daných vlastností, ak $p \neq -1$, tak $f : x' = -x + 3$, $y' = -x + 2$, $z' = \frac{3-p}{1+p}x + \frac{4}{1+p}y - \frac{4}{1+p}$; **6.** $f : x' = x - y + 1$, $y' = 2x + y + z + 2$, $z' = y - z$; **7.** $f : x' = x + y + z - 1$, $y' = x + y + z - 2$; **8.** $f : x' = x + y + 1$, $y' = x - y$.

3.4. Skladanie afinných zobrazení
Inverzné zobrazenie afinného zobraznenia

1. treba ukázať, že A, B, C sú lineárne nezávislé body a že f je injektívne zobrazenie, $f^{-1} : x' = x - 1$, $y' = \frac{y}{2}$, $f^2 : x' = x + 2$, $y' = 4y$; **2.** a)$f \circ g : x' = 3x + 5, y' = 5x + 4y + 1$, b) $f \circ g : x' = 2x, y' = x - 3$; **3.** a) $f(p) : x = 6, y = 4 + t, z = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}$, b) $f(\alpha) : x - 2y + z = 0$, c) $f(\gamma) = f(\alpha)$, d) $f(\mathbb{A}_3) = f(\alpha)$.

3.5. Samodružné prvky afinného zobrazenia

1. $\mathrm{Fix}_f = \{[t + 2; t + 1; t], t \in \mathbb{R}\}$, charakteristické vektory sú $\overline{u}(1; 1; 1)$, $\overline{v}_1(1; 0; 1)$, $\overline{v}_2(0; 1; 1)$ a všetky lineárne kombinácie vektorov $\overline{v}_1$ a $\overline{v}_2$; **2.** $\mathrm{Fix}_f = \{[-2; -1]\}$, samodružné smery neexistujú; **3.** a) napr. pri voľbe LSS repérom $\mathcal{R} = \{C; A - C, B - C\}$ je $\mathrm{Fix}_f : x - y = 0$, charakteristické vektory sú $\overline{u}_1(1; 1)$, $\overline{u}_2(1; -1)$, b) napr. pri voľbe LSS repérom $\mathcal{R} = \{A; C - A, B - A\}$ je $\mathrm{Fix}_f = [\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$, samodružné smery neexistujú; **4.** $\mathrm{Fix}_f = \{[x; y], x = y\}$, charakteristiccké vektory sú $\overline{u}_1(1; 1)$, $\overline{u}_2(1; -1)$, samodružné priamky sú $p : x - y = 0$, $q : x + y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$; **5.** $\mathrm{Fix}_f = \{[-2; -\frac{3}{2}]\}$, charakteristické vektory sú $\overline{u}_1(2; \sqrt{5} - 1)$, $\overline{u}_2(2; -1 - \sqrt{5})$, samodružné priamky sú $a : (1 - \sqrt{5})x + 2y + 5 - 2\sqrt{5} = 0$, $b : (1 + \sqrt{5})x + 2y + 5 + 2\sqrt{5} = 0$; **6.** $\mathrm{Fix}_f = \{[x; y], x - 2y + 1 = 0\}$, charakteristické vektory sú $\overline{u}_1(2; 1)$, $\overline{u}_2(-1; 1)$, samodružné priamky sú $p : x - 2y + 1 = 0$, $q_i : x + y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$; **7.** $\mathrm{Fix}_f = \{[2; 1; t], t \in \mathbb{R}\}$, charakteristtické vektory sú $\overline{u}_1(0; 0; 1)$, $\overline{u}_2(0; 1; -3)$, $\overline{u}_3(1; -2; 7)$, samodružné priamky sú $a : x = 2, y = 1, z = t$, kde $t \in \mathbb{R}$, $p : x = 2, y = 1 + t, z = c - 3t$, kde $t, c \in \mathbb{R}$, $q : x = t, y = 5 - 2t, z = c + 7t$, kde $t, c \in \mathbb{R}$; **8.** $f : x' = 2x - 1, y' = -y, z' = 6y + 2z$; **9.** a **10.** uvedomte si, aká vlastnosť platí pre asociovaný homomorfizmus.

3.6. Homotetické transformácie

1. $S[2; -\frac{1}{2}]$, $h = 3$; **2.** $S[\frac{12}{5}; \frac{14}{5}]$; **3.** $a = \frac{21}{5}$, $h = \frac{89}{189}$; **4.** $y_H = 7$, $r = -4$, $s = 24$; **5.** $[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}]$; **6.** $p = 3$, $f : x' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y' = \frac{1}{2}y + 1$; **7.** $f : x' = -2x + 4, y' = 1 - 2y, z' = 1 - 2z$, $S[\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$; **8.** $L'[0; -2]$, $f : x' = x - 1, y' = y - 1$, $\mathrm{Fix}_f = \emptyset$; **9.** rovnoľahlosť $f = \kappa_{S,\lambda}$, kde $S[-1; 0; 2]$, $\lambda = 4$; **10.** a) rovnoľahlosť $\kappa_{H,\frac{3}{4}}$, kde $H[1; 2; -1]$, b) rovnoľahlosť $g_{U,\frac{3}{4}}$, kde $U[1; 1; 0]$.

3.7. Základné afinné zobrazenia

1. $f : x' = x + 3y, y' = 5y$; **2.** $f : x' = x, y' = y, z' = 2x + 4y - z + 2$; **3.** $f : x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}, y' = y, z' = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + z - \frac{1}{3}$; **4.** $f : x' = 5x - 4y + 4, y' = 6x - 5y + 6$.

KAPITOLA 4. ZHODNÉ ZOBRAZENIA

4.1. Základné vlastnosti zhodných zobrazení

1. neexistuje; **2.** a) $a = 2 - b$, $b \in \mathbb{R}$, b) áno, ak $a \neq 2$ (teda $b \neq 0$), t.j. ak A, B, C sú lineárne nezávislé body; **3.** a) $a = \frac{13}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, b) áno; **4.** dané vlastnosti spĺňajú dve zobrazenia f_1, f_2, $f_1(A) = [0; -1; 1]$, $f_2(A) = [0; 1; -1]$; **5.** osem; **6.** označme f zhodné zobrazenie požadovaných vlastností, potom 1) ak $r \neq -3$ alebo $t \neq -s$, tak f neexistuje, 2) ak $r = -3$, $s = 2$, $t = -2$, tak existuje zhodné zobrazenie f požadovaných vlastností, ale nie je jednoznačne určené, 3) ak $r = -3$, $s \neq 2$, $t = -s$, tak existuje jediné zobrazenie f; **7.** neexistuje f požadovaných vlastností; **8.** $q = r = 0$, $p = 1$ alebo $q = r = \frac{4}{3}$, $p = -\frac{1}{3}$.

4.2. Analytické vyjadrenie zhodného zobrazenia

1. $a = b = 0$, $c \in \{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$; **2.** a) $p = 2$, b) $f : x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - 1, y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 3, z' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$, c) $f(P) = [-1; 3; 0]$; **3.** označme štvorec $ABCD$, ak zvolíme KSS napr. repérom $\mathcal{R} = \{S; A - S, B - S\}$, tak zhodné zobrazenia reprodukujúce štvorec $ABCD$ sú $\iota : x' = x, y' = y$, $\sigma_{\overleftrightarrow{BD}} : x' = -x, y' = y$, $\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} : x' = x, y' = -y$, $\varrho_S : x' = -x, y' = -y$, $\sigma_{o_{AB}} : x' = y, y' = x$ (o_{AB} je os úsečky AB), $\sigma_{o_{BC}} : x' = -y, y' = -x$ (o_{BC} je os úsečky BC),

$\varrho_{S,+90^\circ}: x' = -y, y' = x$, $\varrho_{S,+270^\circ}: x' = -y, y' = -x$; **4.** obrazom bodu C môže byť bod $C'[1;-1;0]$ alebo bod $C''[0;-1;1]$, (úloha má štyri riešenia, pre každý z uvedených obrazov bodu C dve riešenia); **5.** a) $s \in \{3,-3\}$, b) štyri riešenia, pre $s = 3$ sú to $f_1 : x' = y + 5, y' = x$, $f_2 : x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + 5, y' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y$, pre $s = -3$ sú to $f_3 : x' = y + 5, y' = -x$, $f_4 : x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + 5, y' = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y$, c) $f_1([5;0]) = [5;5]$, $f_2([5;0]) = [\frac{49}{5}, -\frac{7}{5}]$, $f_3([5;0]) = [5;-5]$, $f_4([5;0]) = [\frac{49}{4}, \frac{7}{5}]$.

4.3. Samodružné prvky zhodného zobrazenia

1. $p = -1$, $q = 0$, $\mathrm{Fix}_f = \{[0;1]\}$, samodružné smery neexistujú; **2.** overte napríklad, že skalárny súčin sa na vektoroch bázy zachováva, $\mathrm{Fix}_f = \{[1;0;0]\}$, charakteristický vektor je $\overline{u}(0;1;1)$, samodružnou priamkou je $l: X = [1;0;0] + t(0;1;1)$, $t \in \mathbb{R}$; **3.** a) dve riešenia, 1) ak $p = 1$, $r = -1$, $s = 1$, $q = -5$, tak $\mathrm{Fix}_f = \{[3;-3;3;2]\}$, samodružné smery neexistujú, 2) ak $p = 1$, $r = -1$, $s = -1$, $q = -3$, tak $\mathrm{Fix}_f = \emptyset$, existukú dva samodružné smery určené charakteristickými vektormi $\overline{u}(1;-1;1;-1)$, $\overline{v}(1;1;1;1)$, b) neexistujú také reálne čísla r, s, p, q.

4.4. Súmernosť podľa nadroviny

1. $f : x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{4}{13}, y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{6}{13}$; **2.** $f : x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{16}{5}, y' = y, z' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + \frac{8}{5}$; **3.** $M'[10;3;2]$ (uvedomte si, že zo zadania zobrazenia f je zrejmé, že f je súmernosť podľa nadroviny); **4.** v prípade c); **5.** existuje jediná taká zhodnosť $f : x' = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{10}{3}, y' = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{15}y + \frac{2}{15}z - \frac{2}{3}, z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z + \frac{4}{3}$; **6.** neexistuje taká súmernosť podľa nadroviny, lebo $||C - A|| \neq ||C' - A||$ (hľadaná nadrovina by mohla byť len $\alpha : 2x - y + 2z - 6 = 0$, ale normálový vektor n_α a vektor $(C - C')$ sú lineárne nezávislé); **7.** $f : x_1' = \frac{5}{13}x_1 + \frac{8}{13}x_2 - \frac{8}{13}x_4 - \frac{4}{13}x_5 + \frac{16}{13}, x_2' = \frac{8}{13}x_1 + \frac{7}{13}x_2 + \frac{8}{13}x_4 + \frac{4}{13}x_5 - \frac{16}{13}, x_3' = x_3, x_4' = -\frac{8}{13}x_1 + \frac{8}{13}x_2 + \frac{5}{13}x_4 - \frac{4}{13}x_5 + \frac{16}{13}, x_5' = -\frac{4}{13}x_1 + \frac{4}{13}x_2 - \frac{4}{13}x_4 + \frac{11}{13}x_5 + \frac{8}{13}$; **8.** a) neexistuje taká súmernosť podľa nadroviny (ak ozn. hľadanú nadrovinu ω, tak vektory $\overline{n}_\omega$, $(A' - A)$ sú lineárne nezávislé), b) neexistuje taká súmernosť podľa nadroviny (vektory $(A' - A)$,$(B' - B)$ sú lineárne nezávislé), c) $f : x_1' = \frac{1}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_3 - \frac{4}{9}x_4 + \frac{8}{9}, x_2' = x_2, x_3' = -\frac{4}{9}x_1 + \frac{11}{9}x_3 - \frac{2}{9}x_4 + \frac{4}{9}, x_4' = -\frac{4}{9}x_1 + \frac{2}{9}x_3 + \frac{7}{9}x_4 + \frac{4}{9}$; **9.** nie (stačí si uvedomiť obrazmi koľkých lineárne nezávislých bodov je v $\mathbb{E}_n$ jednoznačne určené zhodné zobrazenie).

4.5. Zhodnosti v euklidovskom priestore

1. f je posunutá súmernosť, napr. $f = \sigma_o \circ \tau_{\overline{w}}$, kde $o : x - y = 0$, $\overline{w} = (-2;-4)$; **2.** $f : x' = y, y' = -x - 2$, $f = \varrho_{S;-90^\circ}$, $S[-1;-1]$; **3.** $f = \varrho_S$, $S[0;1]$; **4.** $f = \sigma_o$, $o : x + y - 1 = 0$; **5.** $f = \tau_{\overline{w}}$, $\overline{w}(-3;2)$; **6.** f je zhodnosť, ide o stredovú súmernosť so stredom $S[2;-1]$; **7.** a) $\psi : x' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{171}{25}, y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + \frac{172}{25}$, b) overte napr., že $\mathbf{M}_\psi.\mathbf{M}_\psi^T = \mathbf{I_2}$, ($\mathbf{M}_\psi$ je matica zhodnosti ψ).

KAPITOLA 5. PODOBNÉ ZOBRAZENIA

5.1. Podobnosť v $\mathbb{E}_2$ a v$\mathbb{E}_3$

1. $a = 3$, $\mathrm{Fix}_f = \{[-\frac{1}{10}; \frac{7}{10}]\}$; **2.** $[a;c] = [3;4]$ alebo $[a;c] = [-3;-4]$; **3.** neexistuje $r \in \mathbb{R}$; **4.** $g_1 : x' = -2x + 6, y' = -2y - 2$, $g_2 : x' = \frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{12}{5}, y' = -\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{4}{5}$; **5.** $[a;b] = [\frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{4\sqrt{5}}{5}]$ alebo $[a;b] = [-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5}]$, koeficient podobnosti $k = \sqrt{5}$; **6.** $[p;q;r] = [2;-2;1]$, $\mathrm{Fix}_g = \{[0;2;0]\}$, samodružný smer je určený vektorom $\overline{u}(0;1;1)$; **7.** napr. $g = \kappa_{S;\lambda} \circ \tau_{\overline{u}}$, kde $S[0;0]$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\overline{u}(1;2)$ alebo $g = \kappa_{S';\lambda} \circ \tau_{\overline{v}}$, kde $S'[3;0]$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\overline{(}-\frac{1}{2};2)$; **8.** overte vlastnosť matice podobnosti, $g = \kappa \circ f$, $\kappa : x' = 3x - \sqrt{2}, y' = 3y - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f : x' = \frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}y + \frac{\sqrt{2}+1}{3}, y' = \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{\sqrt{2}-4}{6}$; **9.** a) overte napríklad vlastnosť matice podobnosti, b) $g = \kappa_1 \circ f_1$, kde $\kappa_1 : x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, y' = \frac{1}{2}y + 2$, koeficient rovnoľahlosti κ_1 je $h_1 = \frac{1}{2}$, $f_1 = \tau_{\overline{w}}$, vektor posunutia $\overline{w}(-4;-8)$ alebo $g = \kappa_2 \circ \varrho_O$, kde $\kappa_2 : x' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y' = -\frac{1}{2}y + 6$, koeficient rovnoľahlosti κ_2 je $h_2 = -\frac{1}{2}$, $f_2 = \varrho_O$, stred stredovej súmernosti $O[-1;0]$.

KAPITOLA 6. PROJEKTÍVNE ROZŠÍRENIE AFINNÉHO PRIESTORU

6.1. Homogénne súradnice bodu
Vyjadrenie priamky v homogénnych súradniciach

1. $A[0;0;1]$, $B[1;0;1]$, $C[0;1;1]$, $D[1;1;1]$, $E[3;-2;1]$, $F[4;3;-1]$; **2.** $P[2;1;0]$, $Q[-4;3;0]$, $R[1;5;0]$; **3.** $U[1;-19;0]$; **4.** a) $x + 3y - 4z = 0$, b) $2x - 5y + z = 0$, c) $3x - 2y = 0$; **5.** $Q[4;1;-3]$; **6.** $k : x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$, napr. body $A, B, C \in k$, $A[2;0;1]$, $B[0;4;2]$, $C[\sqrt{2};\sqrt{2};1]$; **7.** $U[i;1;0]$, $U'[-i;1;0]$ (i - komplexná jednostka), reálne nevlastné body kružnica nemá; **8.** a) $8x + 3y - 25z = 0$, b) $x = 2k + 2l, y = 3k - 2l, z = k + 2l$, $k, l \in \mathbb{R}$.

KAPITOLA 7. KUŽEĽOSEČKY

7.1. Kružnica

1. a) nie, b) áno, $S[-\frac{1}{2};0]$, $r = \frac{1}{2}$ c) áno, $S[-2;3]$, $r = \sqrt{23}$ d) nie; **2.** $S[2;-\frac{2}{3}]$, $r = \frac{2}{3}$; **3.** A - zvonku, B, D - vnútri, $C \in k$; **4.** dve riešenia: pre $a = 6$ je dotykový bod $T[-2;2]$, pre $a = -4$ je dotykový bod $T[2;0]$; **5.** $c \in (-1 - 2\sqrt{65}; -1 + 2\sqrt{65})$; **6.** a) $s \in (-6;20)$, b) $s \in \{-6;20\}$; **7.** $p \cap k = \{P_1, P_2\}$, $P_1[-3;-3]$, $P_2[1;1]$; **8.** a) $\left(x + \frac{21}{26}\right)^2 + \left(y + \frac{33}{26}\right)^2 = \frac{6641}{338}$, b) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 50$; **9.** a) $k : x^2 + y^2 - 2x = 0$, $S[1;0]$, $r = 1$, b) $k : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$, $S[2;1]$, $r = 5$; **10.** pre $d \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{52}) \cup (-1 + 2\sqrt{52}; \infty)$ je $p \cap k = \emptyset$, pre $d \in (-1 - 2\sqrt{52}; -1 + 2\sqrt{52})$ je $p \cap k = \{P_1, P_2\}$, $P_1[\frac{-42-3d+2\sqrt{-d^2-2d+207}}{13}; \frac{-2d+63-3\sqrt{207-2d-d^2}}{13}]$, $P_2[\frac{-42-3d-2\sqrt{-d^2-2d+207}}{13}; \frac{-2d+63+3\sqrt{207-2d-d^2}}{13}]$, pre $d \in \{-1 - 2\sqrt{52}; -1 + 2\sqrt{52}\}$ je $p \cap k = \{T\}$, $T[\frac{-42-3d}{13}; \frac{63-2d}{13}]$; **11.** $-2x + 5y - 19 = 0$; **12.** dve riešenia: $S_1[2;2]$, $r_1 = 2$; $S_2[10;10]$, $r_2 = 10$; **13.** $\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{12}$; **14.** dve riešenia $k_1 : (x-3)^2 + (y - 2 - 2\sqrt{2})^2 = 9$, $k_2 : (x-9)^2 + (y - 2 + 4\sqrt{2})^2 = 81$; **15.** dve riešenia: $k_1 : x^2 + y^2 = 9$,