— text obsahuje znenia viet, ktoré budeme dokazovať na prednáškach
— text je doplnený aj o množstvo poznámok, ich cieľom je dopomôcť študentom k lepšiemu pochopeniu pojmov aj súvislostí medzi nimi
— text je tiež doplnený aj o niekoľko úloh, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôcť k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém
— na konci tejto kapitoly nájdete aj zadania úloh semestrálnej práce, vypracované úlohy (každú na osobitnom hárku papiera formátu $A4$) treba odovzdať najneskôr dva dni pred riadnym termínom skúšky

G. Monoszová, Analytická geometria 1 - Kapitola II

KAPITOLA II
EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR

II. 1. SKALÁRNY SÚČIN - definícia, vlastnosti
(zopakovanie z *Lineárnej algebry*)

Definícia.
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel $\mathbb{R}$. Operáciu "." nazývame **skalárny súčin**, ak

$$. : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

a pre ľubovoľné vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{V}$ a ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ platí

(SKS 1) $\overline{w}.(\overline{u}+\overline{v}) = \overline{w}.\overline{u} + \overline{w}.\overline{v}$
(SKS 2) $(c.\overline{u}).\overline{v} = c.(\overline{u}.\overline{v})$
(SKS 3) $\overline{u}.\overline{v} = \overline{v}.\overline{u}$
(SKS 4) $\overline{u}.\overline{u} \geq 0$
(SKS 5) $\overline{u}.\overline{u} = 0 \Longrightarrow \overline{u} = \overline{0}$

Veta 1. *(ďalšie vlastnosti skalárneho súčinu)*
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{V}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom

a) $(\overline{u}+\overline{v}).\overline{w} = \overline{u}.\overline{w} + \overline{v}.\overline{w}$ *(pozri poznámku 1.)*
b) $\overline{u}.(c.\overline{v}) = c.(\overline{u}.\overline{v})$
c) $\overline{0}.\overline{u} = 0$

Poznámky.

1. Pre skalárny súčin platí aj zovšeobecnený distributívny zákon.
2. Dôsledok vety 1c:
Pre skalárny súčin platí

$$\overline{u}.\overline{u} = 0 \Longleftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$$

Definícia.
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u} \in \mathbb{V}$. Pod **normou (veľkosťou) vektora** $\overline{u}$ rozumieme druhú odmocninu skalárneho súčinu vektora $\overline{u}$ samého so sebou. Normu vektora budeme označovať $\|\overline{u}\|$, teda

$$\|\overline{u}\| := \sqrt{\overline{u}.\overline{u}}\ .$$

Dohovor. Skalárny súčin vektora samého so sebou budeme označovať aj nasledovne

$$\overline{u}.\overline{u} \overset{ozn.}{=} \overline{u}^2\ .$$

Definícia.
Vektor, ktorého norma sa rovná jednej nazývame **jednotkový (normovaný) vektor**.

Veta 2. *(vlastnosti normy vektora)*
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{a} \in \mathbb{V}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom

a) *norma vektora $\overline{a}$ sa rovná nule práve vtedy, keď vektor $\overline{a}$ je nulový, t.j.*

$$\|\overline{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \overline{a} = \overline{0},$$

b) *norma vektora $\overline{a}$ je väčšia ako nula práve vtedy, keď vektor $\overline{a}$ je nenulový, t.j.*

$$\|\overline{a}\| > 0 \Longleftrightarrow \overline{a} \neq \overline{0},$$

c) *norma vektora $c.\overline{a}$ sa rovná súčinu absolútnej hodnoty reálneho čísla c a normy vektora $\overline{a}$, t.j.*

$$\|c.\overline{a}\| = |c|.\|\overline{a}\|,$$

d) *ak vektor $\overline{a}$ je nenulový, potom $\frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|}$ je jednotkový vektor, t.j.*

$$\left\| \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|} \right\| = 1, \ \ \textit{ak } \overline{a} \neq \overline{0}.$$

Úloha 1.
Zdôvodnite:
Nech $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ je báza vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ a nech $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sú súradnice vektorov $\overline{x}$, $\overline{y}$ v báze $\mathcal{B}$. Potom

$$\overline{x}.\overline{y} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \overline{u}_i \overline{u}_j \ .$$

Veta 3. *(Cauchy-Buňakovského (Schvartzova) nerovnosť)*
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}$. Potom

$$|\overline{u}.\overline{v}| \leq \|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|$$

a rovnosť vo vzťahu nastáva práve vtedy, keď vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé.

Dôsledok vety 3.
Pre nenulové vektory $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}$, kde $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, platí

$$-1 \leq \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|} \leq 1$$

$$\exists!\, \alpha \in \langle 0; \pi \rangle : \quad \cos\alpha = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|}$$

– uhol α nazývame **uhol vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$**.

Veta 4.
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}$. Potom

$$\overline{u}.\overline{v} \leq \|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|$$

a rovnosť vo vzťahu nastáva práve vtedy, keď existuje $c \in \mathbb{R}_0^+$ také, že $\overline{u} = c.\overline{v}$.

Veta 5.
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}$. Potom

$$\begin{aligned} &a) \quad \|\overline{u}+\overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|, \\ &b) \quad \|\overline{u}-\overline{v}\| \geq |\,\|\overline{u}\| - \|\overline{v}\|\,|, \\ &c) \quad \|\overline{u}-\overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|, \\ &d) \quad \|\overline{u}+\overline{v}\| \geq |\,\|\overline{u}\| - \|\overline{v}\|\,|. \end{aligned}$$

Navyše, rovnosť vo všetkých uvedených vzťahoch nastáva práve vtedy, keď existuje $c \in \mathbb{R}_0^+$ také, že $\overline{u} = c.\overline{v}$.

Definícia.
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k \in \mathbb{V}$ nazývame **ortogonálne**, ak $\overline{u}_i.\overline{u}_j = 0$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$.

Úloha 2 (známe z lineárnej algebry).
Zdôvodnite:
Vektor je kolmý na každý vektor vektorového priestoru práve vtedy, keď je kolmý na každý vektor jeho bázy.

Úloha 3 (známe z lineárnej algebry).
Dokážte:
Nech $\mathbb{V}'$ a $\mathbb{V}''$ sú vektorové podpriestory a nech $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_r\}$ je báza vektorového priestoru $\mathbb{V}'$ a $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_s\}$ je báza vektorového priestoru $\mathbb{V}''$. Potom každý vektor z vektorového priestoru $\mathbb{V}'$ je kolmý na každý vektor vektorového priestoru $\mathbb{V}''$ práve vtedy, keď $\overline{u}_i.\overline{v}_j = 0$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Definícia.
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k \in \mathbb{V}$ nazývame **ortonormálne**, ak sú ortogonálne a zároveň každý z nich je jednotkový.

Úloha 4. - doplňte, aby vznikol pravdivý výrok
Ak vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ sú ortogonálne a zároveň lineárne závislé, tak potom ...

Úloha 5. - doplňte a) alebo b) tak, aby vznikol pravdivý výrok
Ak vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ sú ortonormálne, tak potom sú ...
a) lineárne závislé,
b) lineárne nezávislé.

Veta 6. *(Schmidtov ortogonalizačný proces)*
Nech $\mathbb{V}$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k \in \mathbb{V}$ sú lineárne nezávislé vektory. Potom existujú ortonormálne vektory $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k \in \mathbb{V}$, pre ktoré platí

$$[\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_i\}] = [\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_i\}], \; \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Poznámky - **dôležité**.

3. nech $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n\}$ je ortonormálna báza vo $\mathbb{V}_n$, potom

$$\overline{e}_i.\overline{e}_j = \begin{cases} 1, \text{pre } i = j \\ 0, \text{pre } i \neq j \end{cases}$$

4. nech $\mathbb{V}'_k$ je vektorový podpriestor $\mathbb{V}_n$, potom existuje ortonormálna báza $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n\}$ vo $\mathbb{V}_n$ taká, že $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k\}$ je ortonormálna báza vo $\mathbb{V}'_k$.

Úloha 6.
Zdôvodnite:
Nech $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n\}$ je ortonormálna báza vo $\mathbb{V}_n$,
nech $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$, potom

$$\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$
$$\|\overline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

II. 2. Totálne kolmé vektorové priestory Kolmé vektorové priestory

V ďalšom (časti II.2, II.3, II.4) budeme stále predpokladať, že na vektorovom priestore je definovaný skalárny súčin.

Veta 7.
Nech $\mathbb{V}'_k$ *je vektorový podpriestor vektorového priestoru* $\mathbb{V}_n$*. Potom* $\{\overline{x} \in \mathbb{V}_n; \overline{x} \perp \overline{y}, \forall \overline{y} \in \mathbb{V}'_k\}$ *tvorí vektorový podpriestor (vo* $\mathbb{V}_n$*) dimenzie* $n-k$*.*

Definícia.
Nech $\mathbb{V}'_k$ je vektorový podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Vektorový podpriestor $\{\overline{x} \in \mathbb{V}_n; \overline{x} \perp \overline{y}, \forall \overline{y} \in \mathbb{V}'_k\}$ budeme nazývať **ortogonálny doplnok** ku $\mathbb{V}'_k$, budeme ho označovať $\mathbb{V}'^{\perp}_k$.
Hovoríme, že vektorový podpriestor $\mathbb{V}'^{\perp}_k$ je **totálne kolmý** ku vektorovému podpriestoru $\mathbb{V}'_k$.

Dôsledky vety 7.
Nech $\mathbb{V}'_k$ *je vektorový podpriestor vektorového priestoru* $\mathbb{V}_n$*.*

(1) *Ak* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k, \overline{e}_{k+1}, \ldots, \overline{e}_n\}$ *je ortonormálna báza vo vektorovom priestore* $\mathbb{V}_n$ *taká, že* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k\}$ *je ortonormálna báza vektorového podpriestoru* $\mathbb{V}'_k$*, tak* $\{\overline{e}_{k+1}, \ldots, \overline{e}_n\}$ *je ortonormálna báza vektorového podpriestoru* $\mathbb{V}'^{\perp}_k$*.*
(2) $(\mathbb{V}'^{\perp})^{\perp} = \mathbb{V}'$.
(3) $\{\overline{0}\}^{\perp} = \mathbb{V}_n$.
(4) $\mathbb{V}_n^{\perp} = \{\overline{0}\}$.
(5) $\mathbb{V}'^{\perp} \cap \mathbb{V}' = \{\overline{0}\}$.

Poznámka.

5. Na základe dôsledku vety 7 - (2) môžeme hovoriť o **navzájom totálne kolmých** vektorových podpriestoroch.
   Pre dva totálne kolmé vektorové podpriestory $\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}''$ budeme používať symbolický zápis $\mathbb{V}' \underline{\perp} \mathbb{V}''$.
   Na základe predchádzajúceho je teda zrejmé, že pre dva vektorové podpriestory platí

$$\mathbb{V}' \underline{\perp} \mathbb{V}'' \iff \mathbb{V}' = \mathbb{V}''^{\perp} \iff \mathbb{V}'' = \mathbb{V}'^{\perp}.$$

Veta 8.
Nech $\mathbb{V}'$ *a* $\mathbb{V}''$ *sú vektorové podpriestory vektorového priestoru* $\mathbb{V}_n$*. Potom* $\mathbb{V}'$ *je vektorovým podpriestorom priestoru* $\mathbb{V}''$ *práve vtedy, keď* $\mathbb{V}''^{\perp}$ *je vektorovým podpriestorom priestoru* $\mathbb{V}'^{\perp}$*.*

Definícia.
Nech $\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}''$ sú vektorové podpriestory vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Budeme hovoriť, že $\mathbb{V}'$ je **kolmý** ku $\mathbb{V}''$, ak $\mathbb{V}'' \subset \mathbb{V}'^{\perp}$ alebo $\mathbb{V}'^{\perp} \subset \mathbb{V}''$;
symbolicky budeme zapisovať $\mathbb{V}' \perp \mathbb{V}''$.

Poznámky.

6. Podobne ako relácia "byť totálne kolmý" na vektorových podpriestoroch vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ aj relácia "byť kolmý" je na vektorových podpriestoroch vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ symetrická (postačí využiť dôsledok vety 7-(2) a vetu 8). Preto môžeme hovoriť o **navzájom kolmých** vektorových podpriestoroch.
7. Nech $[\overline{a}]$, $\mathbb{V}'_k$ sú vektorové podpriestory vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$, $k \leq n-1$, tak na základe predchádzajúcej definície je $\overline{a} \perp \mathbb{V}'_k$ práve vtedy, keď je vektor $\overline{a}$ kolmý na každý vektor z $\mathbb{V}'_k$.

Úloha 7.
Určte pravdivostnú hodnotu výrokov:
a) Ak dva vektorové podpriestory sú kolmé, tak sú aj totálne kolmé.
b) Ak dva vektorové podpriestory sú totálne kolmé, tak sú aj kolmé.
c) Dva vektorové podpriestory sú kolmé práve vtedy, keď sú totálne kolmé.

Úloha 8.
Dokážte alebo vyvráťte (uvedením kontrapríkladu).
Nech $\mathbb{V}'_r$ a $\mathbb{V}''_s$ sú vektorové podpriestory vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Ak podpriestory $\mathbb{V}'_r$ a $\mathbb{V}''_s$ sú na seba kolmé a zároveň pre ich dimenzie platí, že $r + s = n$, potom $\mathbb{V}'_r$ a $\mathbb{V}''_s$ sú totálne kolmé vektorové podpriestory.

Úloha 9.
Dokážte alebo vyvráťte (uvedením kontrapríkladu).
Nech $\mathbb{V}'$ a $\mathbb{V}''$ sú vektorové podpriestory, potom platí
a) $\mathbb{V}' \perp \mathbb{V}''^{\perp} \iff \mathbb{V}' \| \mathbb{V}''$,
b) $\mathbb{V}' \underline{\perp} \mathbb{V}''^{\perp} \iff \mathbb{V}' \| \mathbb{V}''$.

II. 3. Vonkajší súčin n vektorov vo $\mathbb{V}_n$
 Vektorový súčin dvoch vektorov vo $\mathbb{V}_3$

Definícia.
Nech $\mathbb{V}_n$ je orientovaný vektorový priestor a nech $\mathcal{B}$ je jeho kladná ortonormálna báza. Pod **vonkajším súčinom** vektorov $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n \in \mathbb{V}_n$ rozumieme nasledovný determinant

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{vmatrix},$$

kde v riadkoch tohoto determinantu sú súradnice vektorov $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$, t.j. $\overline{v}_i(v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})_{\mathcal{B}}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vonkajší súčin vektorov $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ budeme označovať $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]_{\mathcal{B}}$.

Poznámka.

8. Nech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sú kladné ortonormálne bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$, potom pre vonkajší súčin platí $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]_{\mathcal{B}} = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]_{\mathcal{B}'}$. Preto v zápise vonkajšieho súčinu vektorov môžeme index $\mathcal{B}$ vynechávať.

Úloha 10.
Nech $\mathcal{B}$ je kladná báza vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Čo viete povedať o vonkajšom súčine vektorov $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]_{\mathcal{B}}$,
a) ak $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ sú lineárne závislé,
b) ak $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ tvoria kladnú bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$,
c) ak $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ tvoria zápornú bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$?

Poznámky (geometrický význam vonkajšieho súčinu vektorov vo $\mathbb{V}_2$ a vo $\mathbb{V}_3$).

9. Nech $\mathcal{B}$ je kladná báza vektorového priestoru $\mathbb{V}_2$ a nech vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ tvoria tiež kladnú bázu vo $\mathbb{V}_2$. Potom vonkajší súčin $[\overline{u}, \overline{v}]_{\mathcal{B}}$ určuje obsah rovnobežníka určeného vektormi $\overline{u}$, $\overline{v}$.

10. Nech $\mathcal{B}$ je kladná báza vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$ a nech vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ tvoria tiež kladnú bázu vo $\mathbb{V}_3$. Potom vonkajší súčin $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]_{\mathcal{B}}$ určuje objem rovnobežnostena určeného vektormi $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$.

Veta 9.
Nech $\mathbb{V}_3$ je orientovaný vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom pre ľubovoľné dva vektory $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}_3$ existuje jediný vektor $\overline{w} \in \mathbb{V}_3$ taký, že pre ľubovoľný vektor $\overline{x} \in \mathbb{V}_3$ platí rovnosť $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{x}] = \overline{w}.\overline{x}$.

Definícia.
Nech $\mathbb{V}_3$ je orientovaný vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}_3$. Pod **vektorovým súčinom** vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ rozumieme vektor $\overline{w}$, pre ktorý platí

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{x}] = \overline{w}.\overline{x}, \quad \forall \overline{x} \in \mathbb{V}_3.$$

Vektorový súčin vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ budeme označovať $\overline{u} \times \overline{v}$.

Dôsledok vety 9.
Nech $\mathbb{V}_3$ je orientovaný vektorový priestor so skalárnym súčinom, nech $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}_3$. Potom pre vektorový súčin vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ platí

$$\overline{u} \times \overline{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

kde $\overline{u}(u_1; u_2; u_3)$, $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$ v ľubovoľnej kladnej ortonormálnej báze vektorového priestoru $\mathbb{V}_3$.

Veta 10.
Pre normu vektorového súčinu platí

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = \begin{vmatrix} \overline{u}\,\overline{u} & \overline{u}\,\overline{v} \\ \overline{v}\,\overline{u} & \overline{v}\,\overline{v} \end{vmatrix}.$$

Veta 11.
Pre normu vektorového súčinu platí

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\|.\overline{v}\|.\sin\varphi,$$

kde φ je uhol vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$.

Poznámka (geometrický význam normy vektorového súčinu).

11. Norma vektorového súčinu lineárne nezávislých vektorov sa rovná obsahu rovnobežníka určeného týmito vektormi.

Veta 12.
Nech $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{V}_3$, $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$\begin{aligned}
\overline{u} \times \overline{v} &= -\overline{v} \times \overline{u}, \\
(c\overline{u}) \times \overline{v} &= \overline{u} \times (c\overline{v}) = c(\overline{u} \times \overline{v}), \\
(\overline{u} + \overline{v}) \times \overline{w} &= (\overline{u} \times \overline{w}) + (\overline{v} \times \overline{w}), \\
\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) &= (\overline{u} \times \overline{v}) + (\overline{u} \times \overline{w}), \\
\overline{u} \times \overline{v} &= \overline{0} \text{ práve vtedy, keď sú vektory } \overline{u}, \overline{v} \text{ lineárne závislé.}
\end{aligned}$$

Veta 13.
Nech $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}_3$. *Potom*
a) vektor $\overline{u} \times \overline{v}$ *je kolmý na vektory* $\overline{u}$ *a* $\overline{v}$,
b) ak $\overline{u}$, $\overline{v}$ *sú lineárne nezávislé vektory, tak vektory* $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u} \times \overline{v}$ *tvoria kladnú bázu vo* $\mathbb{V}_3$.

Úloha 11.
Čo viete povedať (na základe vety 13) o vektoroch $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u} \times \overline{v}$ (vo $\mathbb{V}_3$), ak $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú nenulové ortogonálne vektory?

Veta 14.
Nech $\mathbb{V}'_2$ *je orientovaný vektorový podpriestor vektorového priestoru* $\mathbb{V}_3$. *Nech* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ *je kladná ortonormálna báza vektorového priestoru* $\mathbb{V}_3$ *taká, že* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ *je kladná ortonormálna báza vektorového podpriestoru* $\mathbb{V}'_2$. *Potom*

$$\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}'_2 : \ \overline{u} \times \overline{v} = [\overline{u}, \overline{v}].\overline{a}_3 \,,$$

(pripomeňme, že $[\overline{u}, \overline{v}]$ *je označenie pre vonkajší súčin vektorov* $\overline{u}$,$\overline{v}$ *vo* $\mathbb{V}'_2$*).*

II. 4. Euklidovský priestor
Základné vlastnosti euklidovského priestoru

Definícia.
Pod **n-rozmerným euklidovským priestorom** rozumieme n-rozmerný afinný priestor, na zameraní ktorého je definovaný skalárny súčin; označovať ho budeme $\mathbb{E}_n$.

Definícia.
Lineárnu súradnicovú sústavu v $\mathbb{E}_n$ danú repérom $\mathcal{R} = \{P; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ nazývame **karteziánskou súradnicovou sústavou**, ak $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ je ortonormálna báza zamerania $\mathbb{V}_n$ euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$.

Definícia.
Pod **vzdialenosťou dvoch bodov** euklidovského priestoru rozumieme normu prislúchajúceho vektora, t.j.

$$|XY| := \|Y - X\|.$$

Úloha 12.
Zdôvodnite:
Ak $X[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ sú súradnice bodov v karteziánskej súradnicovej sústave, tak pre vzdialenosť bodov X, Y platí

$$|XY| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Veta 15.
Pre ľubovoľné tri body $X, Y, Z \in \mathbb{E}_n$ platí
a) $|XY| \geq 0$,
b) $|XY| = 0 \Longleftrightarrow X = Y$,
c) $|XY| = |YX|$,
d) $|XY| + |YZ| \geq |XZ|$.

Veta 16.
Pre ľubovoľné tri body $X, Y, Z \in \mathbb{E}_n$ platí

$$|XY| + |YZ| = |XZ| \Longleftrightarrow Y \in XZ.$$

(Poznamenajme, že zápis $Y \in XZ$ znamená, že bod Y patrí úsečke XZ, čo znamená, že existuje parameter $t \in \langle 0; 1\rangle$, taký, že platí $Y = X + t(Z - X)$.)

Veta 17.
Bod $S \in \mathbb{E}_n$ je stredom dvojice bodov $A, B \in \mathbb{E}_n$ práve vtedy, keď $|SA| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$.

Definícia.
Hovoríme, že podpriestory $\mathbb{E}'$, $\mathbb{E}''$ euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$ sú **kolmé** (**totálne kolmé**), ak sú kolmé (totálne kolmé) ich príslušné zamerania; označíme $\mathbb{E}' \perp \mathbb{E}''$ ($\mathbb{E}' \underline{\perp} \mathbb{E}''$).

Úloha 13.
Dokážte:

(1) ak $\mathbb{E}' \perp \mathbb{E}''$ & $\mathbb{E}'' \underline{\perp} \mathbb{E}''' \Longrightarrow \mathbb{E}' \| \mathbb{E}'''$,
(2) $\forall A \in \mathbb{E}_n, \forall \mathbb{E}' \subset \mathbb{E}_n : (\exists! \mathbb{E}''; A \in \mathbb{E}''$ & $\mathbb{E}'' \underline{\perp} \mathbb{E}')$,
(3) prienikom dvoch totálne kolmých euklidovských podpriestorov je triviálny (t.j. jednobodový) euklidovský podpriestor.

Veta 18.
Nech $\alpha : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ je nadrovina v $\mathbb{E}_n$, označme vektor $\overline{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Potom
a) vektor $\overline{n}$ je nenulový,
b) vektor $\overline{n}$ je kolmý na každý vektor zo zamerania $\mathbb{V}^\alpha$,
c) každý vektor, ktorý je kolmý na $\mathbb{V}^\alpha$ je násobkom vektora $\overline{n}$.

Vektor $\overline{n}$ sa nazýva **normálový vektor nadroviny** α (normálový vektor nadroviny α budeme označovať aj $\overline{n}^\alpha$).

Úloha 13.
Dokážte:
Nech α, β sú nadroviny euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$. Potom α, β sú rovnobežné nadroviny práve vtedy, keď ich normálové vektory sú lineárne závislé.

Dôsledok vety 18.
Nech α je nadrovina v $\mathbb{E}_n$, $\overline{n}^\alpha$ je jej normálový vektor a nech $Q \in \alpha$. Potom

$$\overline{n}^\alpha.(Q - X) = 0$$

je všeobecná rovnica nadroviny α.

Veta 19. *(vzdialenosť bodu od podpriestoru)*
Nech $\mathbb{E}'$ je euklidovský podpriestor euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$ a nech bod $A \in \mathbb{E}$. Potom existuje jediný bod $A' \in \mathbb{E}'$ taký, že vektor $(A - A')$ je kolmý na všetky vektory zamerania $\mathbb{V}'$ euklidovského podpriestoru $\mathbb{E}'$.
Navyše pre vzdialenosť $|AA'|$ platí $|AA'| \leq |AX|$ pre ľubovoľný bod $X \in \mathbb{E}'$.

Vzdialenosť $|AA'|$ nazývame **vzdialenosť bodu od podpriestoru***, t.j. $|A, \mathbb{E}'| = |AA'|$, kde A' je takzvaný ortogonálny priemet bodu A do $\mathbb{E}'$.*

Veta 20. *(vzdialenosť bodu od nadroviny)*
Nech $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ je všeobecná rovnica nadroviny ϱ euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$ a nech bod $M \in \mathbb{E}_n$, $M[m_1, m_2, \ldots, m_n]$. Potom pre vzdialenosť bodu M od nadroviny ϱ platí

$$|M, \varrho| = \frac{|a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_nm_n + a_0|}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2}}\,.$$

Veta 21. *(vzdialenosť dvoch podpriestorov)*
Nech $\mathbb{E}'$, $\mathbb{E}''$ sú euklidovské podpriestory euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$. Potom existujú také body $A' \in \mathbb{E}'$, $A'' \in \mathbb{E}''$, že vektor $(A - A')$ je kolmý na zamerania $\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}''$ euklidovských podpriestorov $\mathbb{E}'$, $\mathbb{E}''$.
Navyše pre vzdialenosť $|A'A''|$ platí $|A'A''| \leq |XY|$ pre ľubovoľné body $X \in \mathbb{E}'$, $Y \in \mathbb{E}''$.

Vzdialenosť $|A'A''|$ nazývame **vzdialenosť podpriestorov***, t.j. $|\mathbb{E}', \mathbb{E}''| = |A'A''|$.*

Veta 22.
Nech $\mathbb{V}'_1$, $\mathbb{V}''_k$ sú vektorové podpriestory $\mathbb{V}_n$, nech $\mathbb{V}'_1 = [\overline{a}']$. Potom existuje jediný vektor $\overline{a}'^* \in \mathbb{V}''_k$ taký, že vektor $(\overline{a}' - \overline{a}'^*)$ je kolmý na každý vektor z $\mathbb{V}''_k$ a zároveň $\overline{a}'.\overline{a}'^* \geq 0$;
$\overline{a}'^*$ je tzv. ortogonálny priemet vektora $\overline{a}'$ do podpriestoru $\mathbb{V}''_k$.

Poznámka.

12. Priečku mimobežiek, ktorá je kolmá na obidve mimobežky nazývame **os mimobežiek**.

V súvislosti s osou mimobežiek riešime v euklidovskom priestore dva typy úloh.
1) Určiť os mimobežiek.
2) Určiť vzdialenosť mimobežiek.

Definície. (uhol dvoch euklidovských podpriestorov)

- φ nazývame **uhol priamok** a**,** b, ak

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{a}.\overline{b}|}{\|\overline{a}\|.\|\overline{b}\|}, \quad \text{kde } \mathbb{V}^a = [\overline{a}],\ \mathbb{V}^b = [\overline{b}].$$

- **uhol priamky p a podpriestoru $\mathbb{E}'_k$**

$$\sphericalangle(p, \mathbb{E}'_k) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ak } p \perp \mathbb{E}'_k \\ \sphericalangle(\overline{p}, \overline{p}^*), & \text{ak } p \not\perp \mathbb{E}'_k \end{cases}$$

  $\overline{p}^*$ je ortogonálny priemet smerového vektora $\overline{p}$ priamky p do podpriestoru $\mathbb{V}'_k$ (pozri vetu 22).

- **uhol podpriestoru $\mathbb{E}'_k$ a nadroviny $\mathbb{E}''_{n-1}$**

$$\sphericalangle(\mathbb{E}'_k, \mathbb{E}''_{n-1}) := \sphericalangle(\mathbb{E}'^{\perp}_k, (\mathbb{E}''_{n-1})^{\perp}).$$

æ

Semestrálna práca

Geometria 1

úlohu č. 1 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 8. týždni semestra
úlohu č. 2 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 12. týždni semestra
úlohu č. 3 - by ste mali byť schopní vyriešiť po 13. týždni semestra

- vypracované úlohy (každú na osobitnom hárku papiera formátu $A4$) treba odovzdať najneskôr dva dni pred riadnym termínom skúšky

Semestrálna práca

Geometria 1

Úloha 1.

a) Daná je súradnicová sústava $\mathcal{L}$ repérom $\mathcal{R} = [P; \overline{u}_1, \overline{u}_2]$. Určte prienik priamky c s priamkou a a tiež prienik priamky c s priamkou b, ak

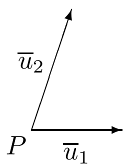
$$c:\ x - 3y + 13 = 0$$

$$a = \overleftrightarrow{AB},\ A[-4; 2],\ B[-1; 3]$$

$$b:\ \begin{aligned} x &= 6 - 2t \\ y &= 3 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Zopakujte riešenie úlohy z časti a) pri transformácii lineárnej súradnicovej sústavy $\mathcal{L}$ na lineárnu súradnicovú sústavu $\mathcal{L}'$, ktorá je daná repérom $\mathcal{R}' = [Q; \overline{v}_1, \overline{v}_2]$, pričom $Q[5; 2]$, $\overline{v}_1(-1; -1)$, $\overline{v}_2(-2; 1)$.

c) Načrtnite do obrázka riešenie úlohy v LSS $\mathcal{L}$ aj v $\mathcal{L}'$.



Semestrálna práca

Geometria 1

Úloha 2.

Určte obsah trojuholníka ABC, $A[2;3]$, $B[1;-1]$, $C[0;1]$

a) využitím vonkajšieho súčinu vektorov,

b) využitím normy vektorového súčinu,

c) využitím vzťahu pre výpočet obsahu trojuholníka, v ktorom sa využíva uhol dvoch strán trojuholníka,

d) využitím vzťahu pre výpočet obsahu trojuholníka, ktorý poznáte zo základnej školy.

Semestrálna práca

Geometria 1

Úloha 3.

a) Určte súradnice c_2, d_1, d_2, d_3 bodov C, D tak, aby $ABCD$ bol pravidelný štvorsten, pričom $d_2 > 0$;
$A[8; 0; 1]$, $B[5; 0; 1 + 3\sqrt{3}]$, $C[2; c_2; 1]$, $D[d_1; d_2, d_3]$.

b) Určte súradnice bodu E tak, aby $(DAE) = \frac{1}{3}$.

c) Určte vzdialenosť $|E; \overleftrightarrow{BC}|$.

d) Určte vzdialenosť $|E; \overleftrightarrow{CDB}|$.

e) Vypočítajte objem štvorstena dvoma spôsobmi, pričom v jednom zo spôsobov využite vonkajší súčin vektorov.

(Výsledky zapíšte do doleuvedenej tabuľky.)

$C[2; \quad ; 1]$
$D[\quad ; \quad ; \quad]$
$E[\quad ; \quad ; \quad]$
$\lvert E; \overleftrightarrow{BC}\rvert =$
$\lvert E; \overleftrightarrow{CDB}\rvert =$
$V_{ABCD} =$