LINEÁRNÍ ALGEBRA A GEOMETRIE

Roman HAŠEK

21. června 2020

Obsah

1 Řešení soustav lineárních rovnic **5**
1.1 Lineární rovnice . . . 5
1.2 Soustava lineárních rovnic . . . 5
1.3 Maticový zápis soustavy . . . 6
1.4 Řešitelnost soustavy - Frobeniova věta . . . 7
1.5 Vztah mezi nehomogenní a homogenní soustavy . . . 11
1.6 Homogenní soustava . . . 13
1.6.1 Báze vektorového prostoru řešení . . . 14
1.7 Nehomogenní soustava . . . 16

2 Vektorový prostor **21**
2.1 Vybrané algebraické struktury . . . 22
2.1.1 Grupa . . . 22
2.1.2 Těleso . . . 23
2.2 Vektorový prostor . . . 24
2.3 Cvičení . . . 27

3 Lineární kombinace vektorů. Závislost a nezávislost. **29**
3.1 Lineární kombinace vektorů . . . 30
3.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů . . . 31
3.3 Lineární obal množiny vektorů . . . 37
3.4 Cvičení: Lineární kombinace, závislost a nezávislost . . . 40

4 Báze vektorového prostoru **44**
4.1 Dimenze vektorového prostoru . . . 45
4.2 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi . . . 49
4.3 Podprostor vektorového prostoru . . . 51
4.4 Steinitzova věta o výměně . . . 54
4.5 Důsledky Steinitzovy věty o výměně . . . 56
4.6 Cvičení: Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru vzhledem k bázi . . . 57

5 Skalární součin **58**
5.1 Příklady skalárních součinů . . . 61
5.2 Norma (velikost) vektoru . . . 62
5.2.1 Normování vektoru . . . 62
5.3 Důležité nerovnosti . . . 64
5.3.1 Cauchyova–Schwarzova nerovnost . . . 64
5.3.2 Trojúhelníková nerovnost . . . 65
5.4 Odchylka vektorů . . . 68
5.4.1 Odchylka přímek . . . 69
5.4.2 Kolmost vektorů . . . 72
5.4.3 Kolmý průmět vektoru do směru jiného . . . 72
5.4.4 Kosinová věta . . . 74
5.4.5 Pythagorova věta . . . 76
5.5 Ortogonální a ortonormální vektory . . . 78

6 Ortonormální báze **80**
6.1 Výhody ortonormální báze . . . 81
6.1.1 Výpočet skalárního součinu . . . 81
6.1.2 Určení souřadnic vektoru vzhledem k ortonormální bázi . . . 82
6.2 Gram–Schmidtův ortogonalizační proces . . . 83
6.2.1 Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 2 . . . 83
6.2.2 Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 3 . . . 87
6.3 Cvičení: Ortonormální báze . . . 91
6.4 Ortogonální matice . . . 92

7 Kolmost vektorových podprostorů **94**
7.1 Kolmost vektoru k podprostoru . . . 94
7.2 Kolmost dvou podprostorů . . . 95
7.3 Ortogonální doplněk vektorového podprostoru . . . 97

8 Orientace báze vektorového prostoru **100**
8.1 Matice přechodu mezi dvěma bázemi . . . 101

9 Vektorový součin **104**
9.1 Výpočet vektorového součinu . . . 107
9.2 Vlastnosti vektorového součinu . . . 108
9.3 Užití vektorového součinu . . . 108
9.4 Ortogonální doplněk *n-1* vektorů v prostoru V_n . . . 111
9.5 Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů . . . 112
9.6 Cvičení: Vektorový součin . . . 112

10 Vnější součin **113**
10.1 Vlastnosti vnějšího součinu . . . 117
10.2 Užití vnějšího součinu . . . 117
10.2.1 Objem rovnoběžnostěnu . . . 117
10.2.2 Obsah rovnoběžníku/trojúhelníku v rovině . . . 117
10.2.3 Rovnice roviny určené třemi body . . . 119
10.2.4 Objem simplexu . . . 121
10.3 Vnější součin v prostoru V_n . . . 124
10.4 Cvičení: Vnější součin . . . 125

11 Afinní bodový prostor **126**
11.1 Definice afinního bodového prostoru . . . 127
11.2 Cvičení: Afinní bodový prostor . . . 130
11.3 Afinní souřadnice bodů . . . 131
11.4 Kartézská soustava souřadnic . . . 133

12 Afinní bodový podprostor **133**
12.1 Parametrické vyjádření podprostoru . . . 135
12.2 Parametrické rovnice podprostoru . . . 136
12.3 Kanonický tvar rovnice přímky . . . 138
12.4 Určení afinního podprostoru . . . 138
12.5 Cvičení: Parametrické rovnice afinního bodového podprostoru . . . 141

13 Obecná (neparametrická) rovnice nadroviny **142**
13.1 Obecná rovnice přímky v A_2 . . . 143
13.2 Obecná rovnice roviny v A_3 . . . 146
13.3 Obecná rovnice nadroviny v A_n . . . 149
13.4 Úsekový tvar rovnice přímky . . . 151

14 Svazky a trsy nadrovin **153**
14.1 Svazky rovin v A_3 . . . 153
14.2 Svazky přímek v A_2 . . . 155
14.3 Trs rovin . . . 156
14.4 Svazek nadrovin . . . 157
14.5 Trs nadrovin . . . 158
14.5.1 Rovnice trsu nadrovin . . . 158

15 Vzájemná poloha afinních bodových podprostorů **160**
15.1 Rovnoběžné afinní bodové podprostory . . . 162
15.2 Spojení podprostorů . . . 164
15.3 Různoběžné a mimoběžné podprostory . . . 165
15.4 Klasifikace vzájemných poloh . . . 166
15.5 Další příklady na vzájemné polohy bodových podprostorů . . . 167

16 Příčky mimoběžných podprostorů **168**

17 Eukleidovský bodový prostor **169**
17.1 Vzdálenost dvou bodů . . . 169
17.2 Vzdálenost bodu od přímky v rovině . . . 169
17.3 Vzdálenost bodu od roviny . . . 170
17.4 Vzdálenost bodu od podprostoru . . . 171
17.5 Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3 . . . 173
17.6 Vzdálenost dvou podprostorů v E_n . . . 173
17.7 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin . . . 175

18 Odchylka podprostorů **176**
18.1 Odchylka dvou přímek . . . 176
18.2 Odchylka přímky od roviny v E_3 . . . 176
18.3 Odchylka dvou rovin v E_3 . . . 177

1 Řešení soustav lineárních rovnic

1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ s reálnými koeficienty rozumíme rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{1}$$

kde koeficienty $a_1, a_2, ..., a_n, b$ jsou reálná čísla.
Označení „lineární“ vyjadřuje skutečnost, že každá z neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ se v rovnici vyskytuje nejvýše v první mocnině. Pokud by nejvyšší mocninou, v níž se v rovnici vyskytuje proměnná, byla mocnina druhá, resp. třetí, hovořili bychom o rovnici kvadratické, resp. kubické (případně o rovnici druhého, resp. třetího stupně).

V případě rovnic o jedné, dvou či třech neznámých používáme pro označení neznámých a koeficientů často i jiné symboly než v (1), např. neznámé označujeme x, y a z a koeficienty a, b, c a d:

$$ax = b, \qquad ax + by = c, \qquad ax + by + cz = d.$$

1.2 Soustava lineárních rovnic

Budeme uvažovat soustavu m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty (obecně s koeficienty z tělesa[1] T; potom hovoříme o soustavě m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\;...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2}$$

Se soustavou (2) jsou spojeny následující dvě matice.

Matice soustavy A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[1] „Tělesem“ zde rozumíme algebraickou strukturu (již znáte algebraickou strukturu zvanou „grupa“). V kurzu lineární algebry a geometrie budeme pracovat výhradně s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Definice této algebraické struktury je uvedena v kapitole věnované vektorovému prostoru.

Rozšířená matice soustavy A^*:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Poznámka. Pro označení rozšířené matice používáme i jiné symboly než A^*. Například $Aroz$.

1.3 Maticový zápis soustavy

Užitím násobení matic můžeme soustavu (2) zapsat ve tvaru

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

kde A je matice soustavy, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ je vektor pravých stran rovnic soustavy.

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{b}$ můžeme chápat také jako matice. Pak použijeme zápis

$$A \cdot X = B,$$

kde $X = \vec{x}$ a $B = \vec{b}$.

Často je výhodné hledět na soustavu (2) jako na rovnost **lineární kombinace sloupcových vektorů matice** A vektoru $\vec{b}$:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

což stručněji zapíšeme ve tvaru:

$$x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + \dots + x_n \cdot \overline{a}_n = \vec{b}.$$

Podle vektoru pravých stran $\vec{b}$ rozlišujeme dva typy soustavy lineárních rovnic (2):

1) Pro $\vec{b} = \vec{o} = (0, 0, ..., 0)$ hovoříme o **homogenní soustavě**, symbolicky ji zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = O).$$

2) Pro $\vec{b} \neq \vec{o}$ hovoříme o **nehomogenní soustavě**, kterou symbolicky zapíšeme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}; \; \vec{b} \neq \vec{o} \quad (\text{nebo} \quad A \cdot X = B; \; B \neq O).$$

1.4 Řešitelnost soustavy - Frobeniova věta

Zajímá nás, jak poznáme, zda má soustava řešení a kolik různých řešení může mít.

PŘÍKLAD 1.1. *Rozhodněte o počtu řešení daných soustav. Potom je vyřešte a jejich řešení geometricky interpretujte.*

a) $$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 1 \\ 3x + 6y + 9z &= 2, \end{aligned}$$

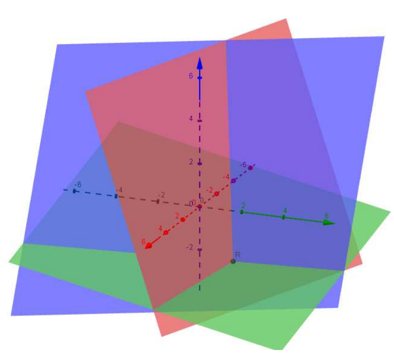
c) $$\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3. \end{aligned}$$

Řešení:
Provedeme Gaussovu eliminaci rozšířené matice každé z daných soustav:

ad a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= 6 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$h(A) = h(A^*) = n$ (poet neznmch), soustava má jediné řešení (je regulární)



Obrázek 1: Řešení příkladu 1.1 a - tři roviny s jedním společným bodem

Řešení určíme například Gaussovou-Jordanovou eliminací (můžeme však použít také Cramerovo pravidlo, inverzní matici či přímé řešení soustavy):

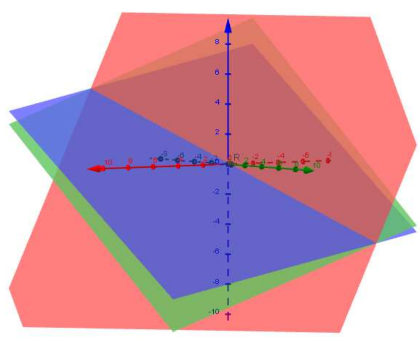
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $X = [1, 2, -2]$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako bod, který je společný třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 1.

ad b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

$h(A) = h(A^*) < n$ (poet neznmch), soustava má nekonečně mnoho řešení



Obrázek 2: Řešení příkladu 1.1 b - tři roviny se společnou přímkou

Řešení určíme ze soustavy (4), která odpovídá matici v Gaussově tvaru ekvivalentní s rozšířenou maticí dané soustavy:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 1 \\ 3y + 6z &= 1 \end{aligned}$$

Neznámé x, y, které odpovídají prvním nenulovým prvkům každého řádku matice v Gaussově tvaru zůstanou neznámými (tzv. „základní“ neznámé), zatímco neznámou z nahradíme reálným parametrem t (nejsme schopni určit hodnoty více neznámých než je počet nezávislých rovnic, proto tuto třetí neznámou uvažujeme jako „volnou“):

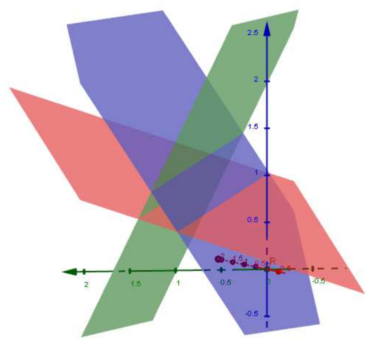
$$\begin{aligned} z &= t;\ \ t \in R \\ x + 3y &= 1 - 5t \\ 3y &= 1 - 6t \end{aligned}$$

Řešením soustavy je množina všech uspořádaných trojic $M = \{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]; t \in R\}$. Geometricky toto řešení interpretujeme jako přímku, která je společná všem třem rovinám odpovídajícím daným rovnicím, viz Obr. 2.

ad c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ y + 4z &= -1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

$h(A) < h(A^*)$, soustava nemá řešení



Obrázek 3: Řešení příkladu 1.1 c - tři roviny nemají společný průnik

Množina řešení dané soustavy je prázdná: $M = \emptyset$. Geometricky lze tento závěr interpretovat tak, že roviny odpovídající daným rovnicím nemají (všechny tři) žádný společný bod, viz Obr. 3.

Věta 1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj.*

$$h(A) = h(A^*).$$

Důkaz. Frobeniova věta má formu ekvivalence. Můžeme ji schematicky vyjádřit takto:

$$\text{aspo jedno een} \;\Leftrightarrow\; h(A) = h(A^*).$$

Dokazujeme tedy příslušné dvě implikace:

(1) aspo jedno een $\Rightarrow$ $h(A) = h(A^*)$

aspo jedno een $\Rightarrow$ ex. $x_1, x_2, ..., x_n$ tak, že $x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}_n = b \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Potom se jeho přidáním k matici tvořené vektory $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ nemůže zvýšit její hodnost, tj. $h(A) = h(A^*)$. Symbolicky zapsáno: $[\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n] = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, b] \Rightarrow h(A) = h(A^*)$.[2]

(2) $h(A) = h(A^*) \Rightarrow$ aspo jedno een

$h(A) = h(A^*) \Rightarrow b$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \Rightarrow$ existuje řešení $x_1, x_2, ..., x_n$ $\square$

Poznámka. Řešení soustavy lineárních rovnic může dopadnout trojím způsobem. Buď má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení a nebo řešení nemá. Jiná možnost není. Jak to dopadne, poznáme už při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky takto:

(i) $h(A) = h(A^*) = n$ ... soustava má právě jedno řešení (tj. jednu uspořádanou n–tici),

(ii) $h(A) = h(A^*) < n$ ... soustava má nekonečně mnoho řešení (tj. nekonečně mnoho uspořádaných n–tic, které tvoří nějaký „podprostor“, např. přímku nebo rovinu),

(iii) $h(A) \neq h(A^*)$ ... soustava nemá řešení.

PŘÍKLAD 1.2. *Rozhodněte o řešitelnosti daných soustav. U každé z nich rozhodněte, zda má právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či zda nemá žádné řešení. Své tvrzení zdůvodněte.*

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 4x + 3y - z &= 7, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 5z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

[2] Zápisem $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$ rozumíme tzv. **lineární obal** množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, což **je množina všech lineárních kombinací těchto vektorů**. Více v partiích věnovaných pojmu „Vektorový prostor“.

1.5 Vztah mezi řešením nehomogenní a příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic

Množiny řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic a k ní příslušné homogenní soustavy spolu úzce souvisí. Zajímá nás povaha tohoto vztahu, a jak ho můžeme využít při řešení nehomogenních soustav.

PŘÍKLAD 1.3. *Řešte dané dané dvojice homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic.*

a) $x + 2y = 0,$ $\qquad$ $x + 2y = 5,$

e)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:
ad a)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-2t, t]; t \in R\} = \{t(-2, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - 2t, t]; t \in R\} = \{[5, 0] + t(-2, 1); t \in R\}.$$

ad b)

Řešení homogenní soustavy: $W = \{[-t, -t, t]; t \in R\} = \{t(-1, -1, 1); t \in R\}$.

Řešení nehomogenní soustavy:

$$M = \{[5 - t, 6 - t, t]; t \in R\} = \{[5, 6, 0] + t(-1, -1, 1); t \in R\}.$$

Věta 2 (Řešení nehomogenní soustavy)**.** *Nechť R je libovolné řešení nehomogenní soustavy $AX = B$ a W_A je vektorový prostor všech řešení odpovídající homogenní soustavy $AX = O$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $AX = B$ platí:*

$$M = \{R + \vec{u}; \vec{u} \in W_A\}.$$

Důkaz. (1) $\{R + \vec{u}\} \subseteq M$; $\quad A(R + \vec{u}) = AR + A\vec{u} = AR + \vec{o} = AR = B$

(2) $M \subseteq \{R + \vec{u}\}$; $\quad AQ = B$, $AR = B \Rightarrow A(Q - R) = O \Rightarrow$ existuje $\vec{u} = Q - R \in W_A$ tak, že $AQ = A(R + \vec{u}) = B$. □

Poznámka. Věta 2 nám jinými slovy říká, že **všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic jsou určena součtem jednoho konkrétního řešení** R **této soustavy a všech řešení** $\vec{u}$ **příslušné homogenní soustavy**.

Závěr: Při řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s nekonečně mnoha řešeními (tj. $h(A) = h(A^*) < n$) můžeme postupovat takto:

1. Vyřešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic. Její obecné řešení označme $\vec{x}$.

2. Najdeme jedno konkrétní řešení dané nehomogenní soustavy. Označme ho R.

3. Množinu M všech řešení dané nehomogenní soustavy vyjádříme jako součet jejího jednoho konkrétního řešení a obecného řešení příslušné homogenní soustavy:

$$M = R + \vec{x}$$

Poznámka. Množina všech řešení nehomogenní soustavy tvoří tzv. **bodový prostor** (tj. je to množina bodů, také můžeme říci „množina míst"), zatímco množina všech řešení příslušné homogenní soustavy tvoří tzv. **vektorový prostor** (tj. je to množina vektorů, také můžeme říci „množina směrů").

Prvky **bodového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 14 - Def. 2.1) nazýváme body. Každý bod, který je řešením nehomogenní soustavy, se dá vyjádřit jako součet jednoho konkrétního bodu a lineární kombinace vektorů (které jsou řešením příslušné homogenní soustavy).

Prvky **vektorového prostoru** (definice bude uvedena později, viz Pech: AGLÚ/str. 8 - Def. 1.1) nazýváme vektory. Každý vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace skupiny vektorů z téhož prostoru, kterou nazýváme **systém (množina) generátorů** daného vektorového prostoru.

Dimenze vektorového prostoru je číslo, které udává počet lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineární kombinací mohu vytvořit každý vektor uvažovaného prostoru. Systém generátorů v.p., který je tvořen lineárně nezávislými vektory se nazývá **báze** vektorového prostoru. Dimenze je tak rovna počtu vektorů báze daného vektorového prostoru. Bod (počátek) má dimenzi 0, přímka dimenzi 1, rovina dimenzi 2 a prostor má dimenzi 3.

1.6 Homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Homogenní soustavou rozumíme soustavu lineárních rovnic, které mají na pravých stranách výhradně nuly (tj. všechny rovnice v soustavě jsou homogenní). Pro takovou soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Homogenní soustava má tedy vždy řešení - tzv. „triviální řešení“, které spočívá v tom, že za všechny neznámé dosadíme nuly (triviálním řešením je tedy uspořádaná n–tice tvořená samými nulami, též můžeme říci nulový vektor).

Pokud je matice homogenní soustavy regulární, tj. $h(A) = n$, má soustava jenom triviální řešení.

Pokud je matice soustavy singulární, tj. $h(A) < n$, má homogenní soustava nekonečně mnoho řešení a triviální řešení je jenom jedním z nich. Tímto případem homogenní soustavy se teď budeme zabývat.

PŘÍKLAD 1.4. *Řešte homogenní soustavu*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \end{array} \tag{5}$$

Řešení: Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$W_A = \{(s + 2t, -2s - 3t, s, t); s, t \in \mathbb{R}\},$$

Množina W_A je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal (tj. množinu všech lineárních kombinací) dvou nezávislých vektorů:

$$W_A = [\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}] \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4.$$

Dimenze W_A je potom

$$\dim W_A = 2.$$

Věta 3. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť matice A této soustavy má hodnost $h(A)$. Potom množina W_A všech řešení této soustavy je podprostor aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a má dimenzi $n - h(A)$, tj.*

$$\dim W_A = n - h(A).$$

K důkazu této věty nemáme zatím vytvořeny potřebné teoretické základy. Proto se zde provizorně opřeme o své dosavadní zkušenosti a k rigoróznímu důkazu se vrátíme, až budeme připraveni.

Již víme, že k nalezení hodnot k neznámých potřebujeme k nezávislých rovnic a neznámé, které jsou nad tento počet nahrazujeme (vesměs reálnými) parametry.

Tím vyjadřujeme, že jejich hodnoty jsou v daném oboru volné, hovoříme o *volných* neznámých. Počet parametrů pak určuje *dimenzi* prostoru řešení soustavy. A jak pro tuto dimenzi dostaneme vyjádření $n - h(A)$? Je-li hodnost matice (homogenní) soustavy A rovna $h(A)$, víme, že nezávislých rovnic soustavy je $h(A)$. Můžeme tedy určit hodnoty $h(A)$ neznámých. Z celkového počtu n ($n \geq h(A)$) tak zbývá právě $n - h(A)$ volných neznámých, které nahradím parametry a jejichž počet určuje dimenzi prostou řešení. Pokud například je $h(A) = n$, nemám žádnou volnou neznámou, řešením je jediná konkrétní uspořádaná n−tice, tj. bod, a dimenze prostoru řešení je $n - h(A) = 0$.

1.6.1 Vytvoření báze vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy

Vraťme se k řešení příkladu 1.4. Viděli jsme, že si ho můžeme zapsat tvaru

$$W_A = [\{(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\}].$$

V této kapitole si na příkladech ukážeme, jak se dají přímo najít vektory báze podprostoru W_A.

Postup řešení Příkladu 1.4:

1. Určíme tzv. základní neznámé
Provedeme Gaussovu eliminaci matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Soustava odpovídající výsledné matici v Gaussově tvaru má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0. \end{array} \qquad (6)$$

Neznámé, které odpovídají prvním nenulovým prvkům na každém řádku matice v Gaussově tvaru (viz podtržení), nazveme **základní neznámé**. V našem případě se jedná o x_1 a x_2. Vzhledem k těmto neznámým pak řešíme soustavu, když zbývající neznámé ("nezákladní" nebo též "volné" neznámé) nahradíme reálnými parametry. V našem konkrétním případě tedy

$$\text{zkladn nezn.:} \quad x_1, x_2; \qquad \text{voln nezn.:} \quad x_3 = s, \quad x_4 = t; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Vypočítáme dimenzi prostoru řešení W_A

$$\dim W_A = n - h(A) = 4 - 2 = 2$$

3. Hledáme dvě nezávislá řešení $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tvořící bázi W_A

Vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ nejprve volíme takto:

$$\vec{b}_1 = (x_1, x_2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (y_1, y_2, 0, 1).$$

Potom je dosadíme do soustavy (6) a dopočítáme příslušné hodnoty x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 1, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, -3, 0, 1).$$

Obecné řešení $\vec{x}$ homogenní soustavy (1.4) pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$:

$$\vec{x} = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 1.5. *Řešte následující homogenní soustavu lineárních rovnic a určete bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 0 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 0 \end{array} \tag{7}$$

Řešení:

$$W_A = [\{(2, 1, 0, 0, 0), (3, 0, 5, 1, 0), (7, 0, 12, 0, 1)\}]$$

Obecné řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = r(2, 1, 0, 0, 0) + s(3, 0, 5, 1, 0) + t(7, 0, 12, 0, 1); \quad r, s, t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Poznámka. Z tvrzení věty 3 plynou jasné závěry o počtu řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. Je zřejmé, že hodnost matice A je vždy menší nebo rovna dimenzi n prostoru neznámých (počtu neznámých). Uvažujme nejprve $h(A) = n$. Po dosazení do vztahu $\dim W_A = n - h(A)$ dostaneme pro dimenzi prostoru řešení soustavy $\dim W_A = 0$. Jedná se tedy o triviální podprostor obsahující jediné - **triviální (nulové) řešení** soustavy. Pro $h(A) < n$ pak dostaneme $\dim W_A \neq 0$. Prostor řešení obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků - soustava má **nekonečně mnoho řešení** soustavy.

1.7 Nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých

Zajímají nás zde hlavně neregulární soustavy, tj. soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení. Již víme, jak spolu souvisí řešení takové nehomogenní soustavy s řešením jí odpovídající soustavy homogenní (viz Věta 2). Pokračujeme příkladem soustavy, která se, až na pravé strany, shoduje s homogenní soustavou (7) z příkladu 1.5.

PŘÍKLAD 1.6. *Řešte následující soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 6 \end{array} \tag{9}$$

Řešení: Řešení

$$M = \{(-14 + 2k + 3l + 7m, k, -22 + 5l + 12m, l, m)\}$$

můžeme přepsat do tvaru, v němž je patrné řešení (8) příslušné **homogenní** soustavy (7):

$$M = \{(-14, 0, -22, 0, 0) + k(2, 1, 0, 0, 0) + l(3, 0, 5, 1, 0) + m(7, 0, 12, 0, 1)\}$$

Cvičení:
Homogenní a nehomogenní soustavy lineárních rovnic

1. Řešte dané soustavy. Nejprve ověřte platnost Frobeniovy podmínky. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy. Pokuste o geometrickou interpretaci řešení soustav.

(a)
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}]\}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$
$$\{[1 - 2t, -1 + t, t]\}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 6 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ x - 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1, -2, 1]\}$$

(e)
$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - w &= 3 \\ 3x + y + 6z + 11w &= 16 \\ 2x - y + 4z + w &= 9 \end{aligned}$$
$$\{[5 - 2t, 1, t, 0]\}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$$
$$\{[1, 0, 1]\}$$

(g)
$$\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$
$$\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \\ 4x + 5y + 7z &= 15 \end{aligned}$$
$$\{[-\frac{15}{2}, 23, -10]\}$$

(i)
$$x + 2y = 0$$
$$\{[-2t, t]\}$$

(j)
$$x + 2y = 3$$
$$\{[3 - 2t, t]\}$$

(k)
$$x - 3y + 2z = 0$$
$$\{[3s - 2t, s, t]\}$$

(l)
$$x - 3y + 2z = 3$$
$$\{[3 + 3s - 2t, s, t]\}$$

(m)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
$$\{[-t, -t, t]\}$$

(n)
$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 12 \end{aligned}$$
$$\{[\frac{17}{3} - t, \frac{19}{3} - t, t]\}$$

(o)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

(p)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$
$$\{\}$$

2. Řešte soustavy lineárních rovnic, které jsou dány následujícími rozšířenými maticemi. U každé soustavy určete dimenzi prostoru jejích řešení a bázi (vektorového) prostoru řešení příslušné homogenní soustavy.

$$\text{(a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right], \quad \text{(b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right], \quad \text{(c)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right],$$

$$\text{(d)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & 17 & 4 & -4 \end{array}\right], \text{(e)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & -10 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \text{(f)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 7 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 2 \end{array}\right],$$

$$\text{(g)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right], \quad \text{(h)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & -7 & 9 \end{array}\right], \quad \text{(i)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right],$$

(j) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$.

ŘEŠENÍ: (a) $\{[t, \frac{1}{3} - 2t, t]\}$, (b) $\{[-7 - 2t, t, 2]\}$, (c) $\{[-8, 4 + t, 8 + 2t, 1 + t]\}$, (d) $\{[-3 - 11t, -1 - t, 4 + 7t]\}$, (e) $\{[2 - 2s - 5t, s, 1 + t, 2t]\}$, (f) $\{[2t, -8 + 3t, t, 3]\}$, (g) $\{[1 + 3s - 2t, s, t]\}$, (h) $\{[-5 - 3t, 19 - 4t, -6 - 2t, t]\}$, (i) $\emptyset$, (j) $\{[-1, -2, 0]\}$.

3. Určete množiny bodů, které jsou společné rovinám α, β, γ, které jsou dány obecnými rovnicemi:

a)
$$\begin{aligned} \alpha &: 3x + y - z - 7 = 0 \\ \beta &: x + 2y - 5z - 15 = 0 \\ \gamma &: 3x + 5y + 2z - 9 = 0, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \alpha &: x + y + z - 5 = 0 \\ \beta &: 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ \gamma &: 4x - y + 2z - 10 = 0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \alpha &: x + 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 3x - z - 6 = 0 \\ \gamma &: 7x - 4y - 5z - 16 = 0, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \alpha &: x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &: 2x - 4y + 2z - 2 = 0 \\ \gamma &: -5x + 10y - 5z + 5 = 0. \end{aligned}$$

4. Řešte dané soustavy lineárních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 4 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1-4x_2+2x_3 &= 1\\ 2x_1-3x_2-x_3+5x_4 &= -7\\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4 &= -6\\ x_2-x_3-x_4 &= -1 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+5x_3-6x_4 &= 0\\ 7x_1+x_2-3x_3-4x_4 &= 1\\ 6x_1+5x_2-13x_3+3x_4 &= 1\\ 2x_1-13x_2+40x_3-16x_4 &= 13 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3+7x_4 &= 12\\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4 &= 0\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4 &= 4\\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5 &= -3\\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5 &= -2\\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5 &= -1\\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5 &= 8\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5 &= 3 \end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: (a) $[-1,-1,0,1]$; (b) $[1,2,1,-1]$; (c) $[1,2,3]$; (d) $[-2,2,-3,3]$; (e) $\varnothing$; (f) $[4-t,\frac{2}{3},t,-2t-\frac{7}{3}]$; (g) $[-\frac{1017}{175}+2t,-\frac{283}{175}+t,t,-\frac{8}{175}]$; (h) $[1,1,1,1]$; (i) $[1,-1,0,2]$; (j) $[2,0,-2,-2,1]$

5. U každé z daných soustav nejprve užitím Frobeniovy věty rozhodněte o její řešitelnosti, potom, jde-li to, ji vyřešte.

a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+7x_4 &= 1,\\ 3x_1+6x_2+4x_3+24x_4+3x_5 &= 0,\\ x_1+4x_2+4x_3+12x_4+3x_5 &= 3, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 2,\\ 2x+y &= 1,\\ x+2y+z &= -3, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+6x_3+x_4 &= 2,\\ x_1+4x_2+2x_3+2x_4 &= 3,\\ 4x_1+11x_2+10x_3+5x_4 &= 1,\\ x_1+x_3+x_4 &= 2, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1+4x_2+x_3+2x_4 &= 2,\\ x_1+3x_2+x_4 &= 0,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4 &= 3,\\ 4x_1+9x_2+3x_3+5x_4 &= 7,\\ 5x_1+5x_2+2x_3+3x_4 &= 0, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4+4x_5+3x_6 &= -2,\\ x_2+3x_3+x_5+5x_6 &= 0,\\ 3x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5+4x_6 &= 1. \end{aligned}$$

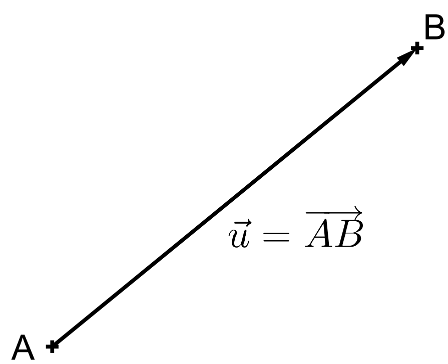
ŘEŠENÍ: viz `https://www.geogebra.org/m/CBD9Ts5Y`

2 Vektorový prostor

Pojem „vektor“ znáte ze střední školy - z fyziky, kde jste ho používali pro znázornění velikosti a směru vektorové veličiny (tzv. „fyzikální vektor“), a z geometrie, kde jste vektor používali k vyjádření směru (a velikosti posunutí v tomto směru) např. při zápisu parametrických rovnic přímky (tzv. „geometrický vektor“).

Vektory jste znázorňovali „orientovanými úsečkami“ (šipkami) konkrétního směru a velikosti. Ve fyzice většinou záleží na umístění počátečního bodu této orientované úsečky, jedná se o tzv. „vázané vektory“. V geometrii většinou na umístění počátečního bodu nezáleží (všechny orientované úsečky téhož směru a téže velikosti jsou rovnocenné), hovoříme o tzv. „volných vektorech“.

Geometrickým vektorem tak vlastně rozumíme *množinu všech orientovaných úseček stejného směru a velikosti.* Konkrétní orientovanou úsečku z této množiny pak nazýváme *umístěním vektoru.* Tohoto vztahu mezi dvojicí bodů (tj. počátečním a konco-



Obrázek 4: Geometrický vektor $\vec{u}$, jehož umístěním je orientovaná úsečka AB

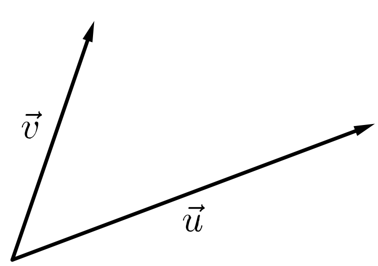
vým bodem orientované úsečky) a vektorem budeme dále využívat. Například vektor $\vec{u}$ na Obr. 4, který je dán orientovanou úsečkou (svým umístěním) AB, budeme zapisovat také jako $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ nebo $\vec{u} = B - A$.

PŘÍKLAD 2.1. *Pro geometrické vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, které jsou dány svými umístěními určete graficky výsledky následujících operací:*

a) $\vec{u} + \vec{v}$,

b) $\vec{u} - \vec{v}$,

c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$.



2.1 Vybrané algebraické struktury

Vlastnosti početní operace (např. sčítání, odčítání, násobení a dělení) prováděné s nějakými čísly závisí na množině, z níž tato čísla pocházejí. Liší se vlastnosti operace sčítání na množině přirozených čísel a na množině celých čísel, liší se vlastnosti dělení na množině celých čísel a na množině racionálních čísel apod. Má proto smysl hovořit o operaci ve spojení s množinou, na jejíž prvcích operaci provádíme.

Algebraickou strukturou rozumíme množinu spolu s jednou nebo i více operacemi, které jsou na ní (neomezeně) definované. Zapisujeme $(M, *)$ nebo $(K, \diamond, \circ)$, kde M, K jsou množiny a $*, \diamond, \circ$ jsou operace na nich definované ($*$ je operace na M a $\diamond$ spolu s $\circ$ jsou operacemi na K).

Příklady algebraických struktur

1. Množina celých čísel (Z) spolu s operací sčítání „+“: $(Z, +)$.
2. Množina reálných čísel (R) spolu s operacemi sčítání „+“ a násobení „·“: $(R, +, \cdot)$.
3. Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic (konkrétního) n–tého řádu spolu s operací násobení matic „·“: $(M_{n\times n}, \cdot)$.
4. Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operacemi sčítání „⊕“ a násobení „⊗“ na hodinovém ciferníku: $(M, \oplus, \otimes)$.

2.1.1 Grupa

Definice 1 ((Komutativní) grupa). *Grupou* $(M, *)$ *rozumíme množinu* M *spolu s operací* $*$ *na* M*, která má tyto vlastnosti:*

i) $\forall\, x, y \in M;\ \ x * y \in M$,
Operace $*$ *je neomezeně definovaná na* M*.*
(Množina M *je uzavřená vzhledem k operaci* $*$*.)*

ii) $\forall\, x, y, z \in M;\ \ x * (y * z) = (x * y) * z$,
Operace (struktura) je asociativní.

iii) $\exists\, e \in M, \forall\, x \in M;\ \ x * e = e * x = x$,
Existuje neutrální prvek vzhledem k $*$*.*
(Jedná se o strukturu s neutrálním prvkem.)

iv) $\forall\, x \in M, \exists y \in M;\ \ x * y = y * x = e$.
Ke každému prvku existuje prvek inverzní vzhledem k $*$*.*
(Jedná se o strukturu s inverzními prvky.)

Je-li struktura $(M, *)$ *navíc* **komutativní**, *nazývá se* **komutativní grupa** *nebo též* **Abelova grupa**.

PŘÍKLAD 2.2. *Rozhodněte, zda algebraická struktura* $(Z, +)$ *je „komutativní grupou“.*

Příklady grup

1. $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$, $(C, +)$,
2. $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$,
3. Množina povelů {stt, vlevo vbok, vpravo vbok, elem vzad} spolu s operací skládání.

$\circ$	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
pozor	pozor	vlevo v bok	vpravo v bok	čelem vzad
vlevo v bok	vlevo v bok	čelem vzad	pozor	vpravo v bok
vpravo v bok	vpravo v bok	pozor	čelem vzad	vlevo v bok
čelem vzad	čelem vzad	vpravo v bok	vlevo v bok	pozor

PŘÍKLAD 2.3. *Rozhodněte, zda množina geometrických vektorů v rovině spolu s operací skládání (sčítání) vektorů tvoří grupu.*

2.1.2 Těleso

PŘÍKLAD 2.4. *Určete vlastnosti algebraické struktury* $(R, +, \cdot)$.

Těleso je algebraickou strukturou, jejíž vlastnosti jsou zobecněním vlastností množiny reálných čísel spolu s operacemi sčítání a násobení, tj. struktury $(R, +, \cdot)$.

Definice 2. *Struktura* $(T, +, \cdot)$ *se nazývá* **těleso**, *právě když je* $(+, \cdot)$*-distributivní, když struktura* $(T, +)$ *je komutativní grupa (tzv. aditivní grupa tělesa) a když struktura* $(T - \{0\}, \cdot)$, *kde* 0 *je nulový prvek grupy* $(T, +)$, *je grupa (tzv. multiplikativní grupa tělesa* T*). Je-li navíc grupa* $(T - \{0\}, \cdot)$ *komutativní, nazývá se* T **komutativní těleso**.

Příklady těles

1. $(Q, +, \cdot)$,
2. $(R, +, \cdot)$,
3. $(C, +, \cdot)$.

2.2 Vektorový prostor

Příklad: Množina všech vektorů v rovině (v prostoru), jak je známe ze středoškolské geometrie (geometrické vektory).

Definice 3 (Vektorový prostor). *Nechť T je komutativní těleso. Množinu V nazveme* **vektorovým prostorem nad tělesem** T, *právě když jsou na V definovány dvě operace:*

i) **sčítání:** *libovolné dvojici $\vec{u} \in V$, $\vec{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\vec{u} + \vec{v} \in V$,*

ii) **násobení prvkem z tělesa** T **(skalárem):** *výsledkem násobení vektoru $\vec{u} \in V$ skalárem $a \in T$ je vektor $a\vec{u} \in V$,*

které splňují následující vlastnosti:

a) *Struktura* $(V, +)$ *je* **komutativní grupa**.

b) **Distributivnost***:*

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u},$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

c) *Existence* **jednotkového prvku skalárního násobení***:*

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$

Poznámky.
1. Prvky množiny V nazýváme **vektory**.
2. Vektor $\vec{o}$, tj. nulový prvek grupy $(V, +)$, nazýváme **nulový vektor**.
3. Vektor $-\vec{u}$ nazýváme **opačný vektor k vektoru** $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}.$$

4. Prvky tělesa T se nazývají **skaláry**.

PŘÍKLAD 2.5. *Ukažte, že množina R^2 všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání uspořádaných dvojic a násobení reálným číslem, definovanými následujícím způsobem, je vektorový prostor:*

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

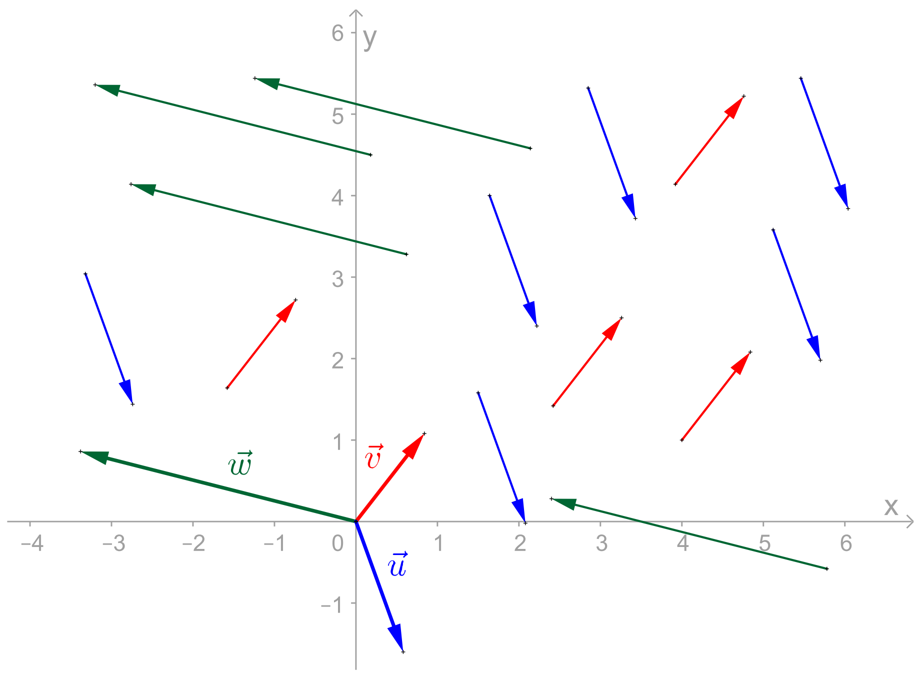
$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

Poznámky.
1. Jedná se o tzv. **aritmetický vektorový prostor** R^2 nad tělesem reálných čísel.
2. Tento prostor můžeme reprezentovat prostřednictvím bodů v rovině, kterou opatříme soustavou souřadnic.

PŘÍKLAD 2.6. *Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:*

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

PŘÍKLAD 2.7. *Ukažte, že geometrické vektory v rovině tvoří vektorový prostor.*[1]



Obrázek 5: Vektor jako množina orientovaných úseček stejné velikosti a stejného směru. Orientovaná úsečka jako umístění vektoru.

Poznámka. U geometrických vektorů nás zajímá pouze jejich velikost a směr, nikoliv jejich působiště, jsou to tzv. volné vektory, viz Obr. 5. Proto je můžeme při zachování jejich směru a působiště libovolně přemisťovat. Vektorový prostor si tak můžeme představovat jako množinu všech vektorů se společným počátečním bodem (který většinou volíme v počátku soustavy souřadnic).

Některé důsledky definice vektorového prostoru

a) $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$,

b) $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$,

c) $c \cdot \vec{o} = \vec{o}$,

d) $c \cdot \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow c = 0 \vee \vec{v} = \vec{o}$.

[1] Geometrickým vektorem rozumíme množinu všech orientovaných úseček stejného směru a stejné velikosti, viz skupiny barevných orientovaných úseček na Obr. 5. Konkrétní orientovanou úsečku z této množiny, se kterou pracujeme, potom nazýváme *umístění vektoru*.

Příklady vektorových prostorů

1. Vektory v rovině a v prostoru z elementární geometrie.

2. Samotné těleso T spolu s operacemi „+, ·“ definovanými na T tvoří vektorový prostor nad tělesem T.

3. Aritmetický vektorový prostor R^2 nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$k \cdot (a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

4. Aritmetický vektorový prostor R^3 nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných trojic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

5. Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$
$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

6. Prostor F_X všech reálných (komplexních) funkcí na nějaké množině X (nad tělesem $\mathbb{R}$).

7. Množina $C_{\langle a,b \rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

8. Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Poznámka. Vektorový prostor V nad tělesem T někdy značíme takto:

$$(V, +, T).$$

PŘÍKLAD 2.8. *Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.*

2.3 Cvičení

Vektorové prostory

1. Ukažte, že následující množiny jsou vektorovými prostory:

a) Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem $\mathbb{R}$, tj. množina všech uspořádaných n–tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými následujícím způsobem:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$k \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ka_1, ka_2, ..., ka_n).$$

b) Množina $F_{\langle a,b\rangle}$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

c) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R tvoří spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

d) Označme $(K, +)$ množinu všech komplexních čísel s obvyklou operací sčítání a za těleso T vezměme těleso $\mathbb{R}$ všech reálných čísel; rovněž unární operaci násobení prvkem $k \in R$ definujeme obvyklým způsobem. Ověřte, zda struktura $(K, +, R)$ je vektorovým prostorem.

2. Zkoumejte následující podmnožiny R^2. Rozhodněte, zda splňují definici vektorového prostoru:

a) $W_1 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$,
b) $W_2 = \{(x, y) \in R^2; y = 3x + 2\}$,
c) $W_3 = \{(0, 0)\}$.

3. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou roviny v $\mathbb{R}^3$ definované rovnicemi $3x + 2y - 5z = 0$, resp. $3x + 2y - 5z = 1$. Ukažte, že ρ_1 je vektorovým prostorem, zatímco ρ_2 nikoliv.

4. Ukažte, že $\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4; 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ je vektorovým prostorem dimenze 3. Najděte bázi tohoto prostoru.

Algebraické struktury

5. Rozhodněte o vlastnostech následujících algebraických struktur (tj. zda se jedná o grupy či tělesa):

a) Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic n–tého řádu spolu s operací sčítání matic „+“.

b) Množina $M_{n\times n}$ čtvercových matic n–tého řádu spolu s operací násobení matic „·“.

c) Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operací sčítání $\oplus$ na hodinovém ciferníku.

d) Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operací násobení „$\otimes$“ na hodinovém ciferníku.

e) Množina $M = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ spolu s operacemi sčítání „$\oplus$“ a násobení „$\otimes$“ na hodinovém ciferníku.

f) Množina $K = \{1, i, -1, -i\}$ (i je imaginární jednotka) spolu s operací „·“ násobení.

g) Množina zákrytových pohybů čtverce (rovnostranného trojúhelníku) v rovině spolu s operací skládání.

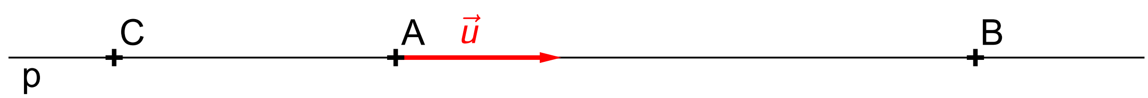
h) Množina celých čísel Z spolu s operacemi sčítání „+“ a násobení „·“.

i) Množina zňamének $Z = \{+, -\}$ spolu s operací „skládání znamének“ ·.

3 Lineární kombinace vektorů. Lineární závislost a nezávislost vektorů.

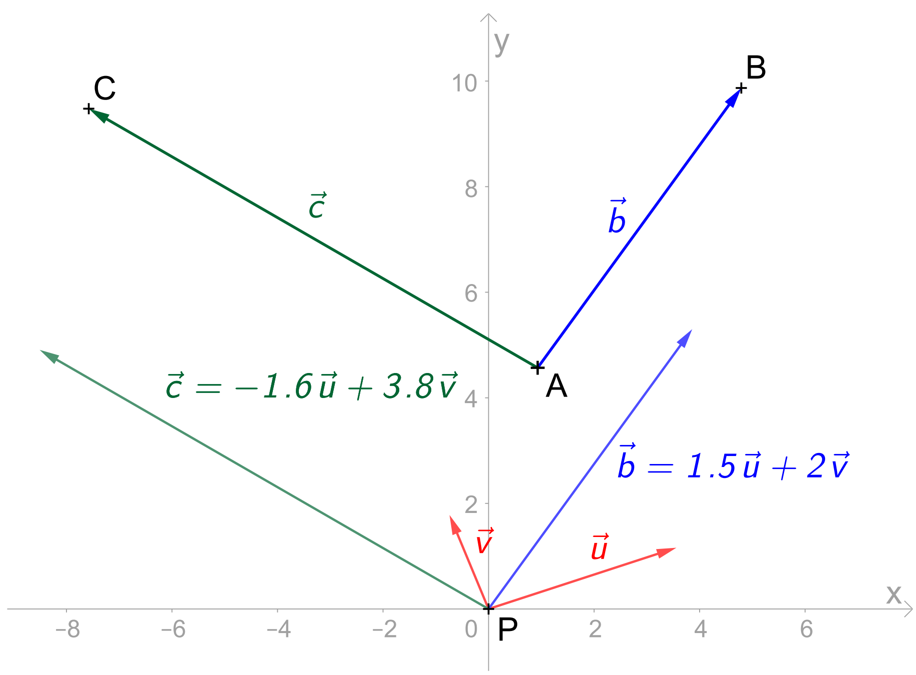
Pro uskutečnění „pohybu“ v bodovém prostoru, tj. pro přemístění z bodu do bodu, je důležité mít možnost udat směr (a samozřejmě také vzdálenost). Směr udáváme pomocí vektoru, potřebnou vzdálenost potom překonáme pomocí jeho násobku. Žijeme-li například na přímce p, viz Obr. 6, tj. v prostoru dimenze 1, dostaneme se z bodu A do bodu B tak, že se vydáme ve směru vektoru $\vec{u}$ a urazíme jeho 3,5 násobek. Do bodu C se potom vydáme ve směru vektoru opačného k $\vec{u}$ a urazíme jeho 1,7 násobek (z hlediska geometrického mají vektory $\vec{u}$ a $-\vec{u}$ stejný *směr*, liší se orientací). Můžeme proto psát:

$$B = A + 3{,}5\vec{u}, \quad C = A - 1{,}7\vec{u}.$$



Obrázek 6: $B = A + 3{,}5\vec{u}$, $C = A - 1{,}7\vec{u}$

Jak tomu bude při „pohybu“, tj. přemístění z bodu do bodu, v rovině nebo v prostoru (rozuměj v prostoru dimenze 3)? Pořád stejně, opět budeme z výchozího



Obrázek 7: $B = A + \vec{b} = A + 1{,}5\vec{u} + 2\vec{v}$, $C = A + \vec{c} = A - 1{,}6\vec{u} + 3{,}8\vec{v}$

bodu mířit vektorem do cílového bodu. Akorát budeme muset nějak postihnout skutečnost, že v těchto prostorech je, na rozdíl od přímky, nekonečně mnoho různých směrů (přímka má jenom jeden). Vhodným nástrojem pro to je *lineární kombinace* vektorů. Jak vidíme na Obr. 7, stačí zvolit si v rovině dva různoběžné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$. Každý další vektor se dá potom vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Cestu z A do B tak můžeme popsat vztahem

$$B = A + \vec{b} = A + 1{,}5\vec{u} + 2\vec{v},$$

cestu z A do C pak takto

$$C = A + \vec{c} = A - 1{,}6\vec{u} + 3{,}8\vec{v}.$$

Výrazy $1{,}5\vec{u}+2\vec{v}$, $-1{,}6\vec{u}+3{,}8\vec{v}$ představují lineární kombinace vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Je zřejmé, že stejný postup lze použít na všechny cesty. Výhoda je pak jasná. Všechny vektory (cesty mezi dvěma body) v rovině můžeme vyjádřit pomocí lineární kombinace dvou různoběžných (hovoříme o *nezávislých* vektorech, viz dále) vektorů. Vektory s touto rolí tvoří tzv. *systém generátorů* příslušného vektorového prostoru. Samozřejmě se hned nabízejí otázky k jejich počtu. My jsme pro rovinu použili dva. Může jich být ale i více? Nebo méně? Méně jich být samozřejmě nemůže. S jedním vektorem a jeho násobky bychom neobsáhli celou rovinu. Více jich být může. Pak je ale vyjadřování směru jako jejich lineární kombinace zbytečně pracné. Proč psát lineární kombinaci tří nebo i více vektorů, když nám stačí dva? Systém generátorů s minimálním počtem vektorů nutným pro vytvoření všech vektorů příslušného vektorového prostoru, tj. pro „generování“ tohoto prostoru, se nazývá *báze vektorového prostoru.* Množina $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ našich dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je tak příkladem báze vektorového prostoru dimenze 2. Další otázky se mohou týkat prostoru dimenze 3, tj. prostoru, v němž žijeme. Pro „cestování“ v tomto prostoru nám dva směry nestačí. To bychom se omezili jenom na rovinu. Potřebujeme tedy alespoň tři směry, takové, které neleží zároveň v jedné rovině (tj. tři *nezávislé* směry, viz dále). Proto je báze tohoto prostoru tvořena třemi nezávislými vektory a proto hovoříme o dimenzi 3. S lineární kombinací tří vektorů v trojrozměrném prostoru můžete experimentovat prostřednictvím appletu https://www.geogebra.org/m/KFL3Onq1. Uvedenými pojmy se budeme podrobně zabývat v následujících pasážích.

3.1 Lineární kombinace vektorů

Definice 4. *Nechť $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jsou prvky vektorového prostoru V nad tělesem T. Řekneme, že vektor $\vec{u}$ je* **lineární kombinací vektorů** *$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_n$, právě když existují prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$ tak, že platí:*

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i.$$

Prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** *lineární kombinace. Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace* **triviální***, jinak se nazývá* **netriviální**.

PŘÍKLAD 3.1. *Ověřte, zda vektor $\vec{u} = (4, -1, 3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.*

Řešení: Řešíme soustavu rovnic, která vzejde z vektorové rovnice

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Geometrické znázornění i algebraické řešení příkladu můžeme provést v programu GeoGebra, viz https://www.geogebra.org/m/rbsz8eug. Vektor $\vec{u}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, platí $\vec{u} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

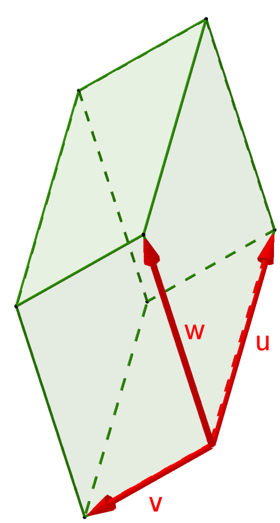
PŘÍKLAD 3.2. *Ověřte, zda vektor $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$.*

Řešení: Řešíme analogicky s příkladem 3.1. Geometrické znázornění i algebraické řešení příkladu můžeme opět provést v programu GeoGebra, viz https://www.geogebra.org/r Tentokrát vektor $\vec{w}$ není lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Geometricky to znamená, že $\vec{w}$ neleží v rovině určené směry vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Algebraickou interpretací je potom skutečnost, že příslušná soustava lineárních rovnic nemá řešení.

PŘÍKLAD 3.3. *Vymyslete nejméně tři vektory o stejném počtu prvků a vytvořte jejich tři různé lineární kombinace.*

3.2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

S pojmem *lineární kombinace* úzce souvisí pojmy *lineární závislost* a *lineární nezávislost* vektorů. Tyto pojmy používáme ve spojení se skupinou (množinou) vektorů



Obrázek 8: Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé, žádný z nich se nedá vyjádřit lineární kombinací ostatních

ze stejného vektorového prostoru (tj. všechny mají např. stejný počet souřadnic) a stručně znamenají toto: *Jestliže se ve skupině vektorů alespoň jeden z nich dá vyjádřit lineární kombinací ostatních, jedná se o vektory lineárně závislé. Pokud tomu tak není, tj. žádný vektor ze skupiny se nedá vyjádřit lineární kombinací ostatních, hovoříme o vektorech lineárně nezávislých.* Příkladem *lineárně závislých* vektorů jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ na Obr. 7. Příkladem *lineárně nezávislých* vektorů jsou potom vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ na Obr. 8

Definice 5 (Lineární závislost a nezávislost vektorů I). *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$, kde $k > 1$, z vektorového prostoru V nad tělesem T jsou lineárně závislé právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Pokud tomu tak není, tj. žádný z vektorů není lineární kombinací ostatních, jsou vektory lineárně nezávislé.*

Poznámka. Za pozornost stojí skutečnost, že v definici 5 není vůbec specifikováno, zda se jedná o lineární kombinaci **triviální** či **netriviální**. Jsou tedy přípustné obě varianty!

PŘÍKLAD 3.4. *Užitím definice 5 a poznámky, která je za ní uvedena, dokažte následující tvrzení:*

a) Je-li jeden z vektorů nulový, jsou vektory lineárně závislé.

b) Jsou-li aspoň dva vektory stejné, jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ závislé.

PŘÍKLAD 3.5. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, 3)$.*

Řešení: Dle definice 5 bychom měli zjistit, zda lze některý z uvedených vektorů vyjádřit lineární kombinací ostatních. Tj. měli bychom prozkoumat, zda má smysl alespoň jeden z těchto zápisů:

$$\vec{v}_1 = a\vec{v}_2 + b\vec{v}_3, \quad \vec{v}_2 = c\vec{v}_1 + d\vec{v}_3, \quad \vec{v}_3 = e\vec{v}_1 + f\vec{v}_2,$$

kde $a, b, c, d, e, f \in R$. Naštěstí není nutné řešit každou z těchto tří rovnic zvlášť. Protože každou z nich lze snadno převést na homogenní tvar, konkrétně $\vec{v}_1 - a\vec{v}_2 - b\vec{v}_3 = \vec{o}$, $\vec{v}_2 - c\vec{v}_1 - d\vec{v}_3 = \vec{o}$, $\vec{v}_3 - e\vec{v}_1 - f\vec{v}_2 = \vec{o}$, stačí místo tří rovnic řešit jedinou ve tvaru

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{o}, \tag{10}$$

s neznámými $x, y, z \in R$. Při použití sloupcových vektorů můžeme po dosazení souřadnic daných vektorů psát rovnici (10) ve tvaru

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Po úpravě levé strany vynásobením a následným sečtení vektorů obě strany rovnosti (11) porovnáme. To vede k homogenní soustavě lineárních rovnic s maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

jejíž sloupcové vektory odpovídají daným vektorům (tato matice se tedy dá psát přímo ze zadání). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad \begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $z = k;\ k \in R$, pro zbývající neznámé platí $x = -2k, y = k$, tj. množinou řešení homogenní soustavy je $W = \{(-2k, k, k); k \in R\}$. Pro naše účely stačí použít jedno konkrétní řešení. Např. pro $k = -1$ dostáváme řešení $(2, -1, -1)$ a příslušná lineární kombinace má tvar

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{o}. \tag{13}$$

Dané vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ jsou tedy lineárně závislé. Z rovnosti (13) vidíme, že každý z těchto vektorů se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch zbývajících, konkrétně $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3$, $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$.

Je naprosto přirozené pokoušet se najít co nejsnazší cestu vedoucí k řešení dané úlohy. V tomto případě, kdy řešíme otázku, zda je daná skupina vektorů *lineárně závislá či nezávislá*, nám pomůže znalost lineární algebry. Rozhodující roli hraje matice (12). Pokud má hodnost menší než je počet neznámých, tj. vektorů (neznámými jsou sice koeficienty lineární kombinace, těch je ale stejně jako vektorů), má příslušná homogenní soustava i netriviální řešení a dané vektory jsou proto *lineárně závislé*. To je případ řešení tohoto příkladu. Pokud by však hodnost matice (12) byla rovna počtu neznámých, příslušná homogenní soustava by měla pouze triviální řešení a dané vektory by byly *lineárně nezávislé* (rovnice (10) by totiž byla splněna právě jenom tehdy, když jsou všechny koeficienty x, y, z rovny nule, tj. $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{o}$, pak ale nelze žádný z vektorů vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních).

Geometrické znázornění a algebraické řešení příkladu v programu GeoGebra najdete zde: https://www.geogebra.org/m/aktd8cez. Všimněte si, že všechny tři vektory leží v jedné rovině, což odpovídá tomu, že jsou lineárně závislé.

Významným poznatkem získaným řešením příkladu 3.5 je následující **efektivní metoda určení lineární závislosti či nezávislosti vektorů:** *Vektory uspořádáme do matice (je jedno, zda do sloupců či řádků), zjistíme její hodnost a porovnáme jí s počtem vektorů. Je-li menší, jsou vektory lineárně závislé, je-li stejná jako počet vektorů, jsou lineárně závislé.*

Poučeni řešením příkladu 3.5 můžeme vyslovit alternativní definici lineární závislosti a nezávislosti.

Definice 6 (Lineární závislost a nezávislost vektorů II). *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ z vektorového prostoru V nad tělesem T se nazývají:*
a) *vektory* **lineárně nezávislé**, *právě když je pouze triviální lineární kombinace těchto vektorů rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\forall\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge ... \wedge a_n = 0).$$

b) *vektory* **lineárně závislé**, *právě když existuje aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj.*

$$\exists\, a_1, a_2, ..., a_n \in T; \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = \vec{o} \Rightarrow (a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee ... \vee a_n \neq 0).$$

Poznámka. Lineární závislost či nezávislost jednoho vektoru. V obou definicích se hovoří o obecném počtu n vektorů, jejichž lineární závislost posuzujeme. Co kdyby ale bylo $n = 1$, tj. kdybychom rozhodovali o lineární závislosti jediného vektoru $\vec{u}_1$. Použijeme k tomu definici 6. Je-li vektor $\vec{u}_1$ nenulový, tj. $\vec{u}_1 \neq \vec{o}$, existuje pouze jeho triviální lineární kombinace (rozuměj násobek), která je rovna nulovému vektoru, tj. pouze $0\vec{u}_1 = \vec{o}$. Jeden **nenulový vektor je tedy vždy lineárně nezávislý**! V případě nulového vektoru, když $\vec{u}_1 = \vec{o}$, existuje samozřejmě nekonečně mnoho jeho netriviálních lineárních kombinací (násobků), které jsou rovny nulovému vektoru, např. $2020\vec{o} = \vec{o}$. Jeden **nulový vektor je tedy vždy lineárně závislý**!

PŘÍKLAD 3.6. *Množina $M = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1), (1,2,3)\}$ je tvořena čtyřmi vektory z vektorového prostoru R^3. Rozhodněte, zda jsou lineárně závislé či nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, najděte aspoň jednu jejich netriviální lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.*

Řešení: Řešení prvního úkolu, tj. rozhodnutí, zda jsou vektory lineárně závislé či nezávislé, je snadné. Vidíme, že počet vektorů 4 přesahuje počet jejich složek 3. Pokud je tedy uspořádáme do matice, jedno zda do sloupců či řádků, viz (14);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

její hodnost nebude moci být větší než 3 (zdůvodněte). Hodnost této matice tedy bude menší než počet vektorů. V souladu se závěrem z řešení příkladu 3.5 proto konstatujeme, že uvedené vektory jsou lineárně závislé.

Řešení druhého úkolu, nalezení netriviální lineární kombinace vektorů, která je rovna nulovému vektoru, bude vyžadovat více úsilí. I když v tomto konkrétním případě ne zas tak velkého. Označme dané vektory $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$ a $\vec{v}_4 = (1,2,3)$. Tyto vektory tvoří sloupce levé z matic (14). Z té se dá „vykoukat“, že platí $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = \vec{o}$. (Pokud bychom řešení neviděli hned, museli bychom řešit příslušnou soustavu homogenních rovnic, jako v případě předchozího příkladu 3.5 nebo následujícího 3.7.) Je tedy zřejmé, že každý z daných vektorů se dá vyjádřit jako lineární kombinace těch zbývajících, například $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Ale pozor, ne vždy tomu tak je! Jak zjistíme řešením následujícího příkladu 3.7.

PŘÍKLAD 3.7. *Jsou dány vektory* $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$ *a* $\vec{v}_4 = (0,2,1)$. *Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících.*

Řešení: Poučeni řešením příkladu 3.5 se ptáme, zda existují takové koeficienty $k, l, m, n \in R$, pro které platí $k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 + n\vec{v}_4 = \vec{o}$. Po dosazení souřadnic vektorů můžeme psát

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Po vynásobení a sečtení na levé straně obě strany rovnosti (15) porovnáme. To vede k homogenní soustavě lineárních rovnic s maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \qquad \begin{aligned} k &= 0 \\ l + 2n &= 0 \\ m - n &= 0 \end{aligned}$$

Jestliže zvolíme $n = t;\ t \in R$, pro zbývající neznámé platí $k = 0, l = -2t, m = t$, tj. množinou řešení homogenní soustavy je $W = \{(0, -2t, t, t); t \in R\}$. Pro naše účely stačí použít jedno konkrétní řešení. Např. pro $t = 1$ dostáváme řešení $(0, -2, 1, 1)$ a příslušná lineární kombinace má tvar

$$0\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{o}.$$

Z této rovnosti je zřejmé, že každý z vektorů $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících, např. $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_4$. Pro vektor $\vec{v}_1$ to však neplatí! Ten kvůli jeho nulovému koeficientu nemůžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Uvažujte dané vektory jako *geometrické vektory* reprezentované orientovanými úsečkami (šipkami) se společným počátečním bodem, totožným třeba s počátkem soustavy souřadnic. Jak můžeme výsledek řešení příkladu interpretovat pomocí jejich vzájemných poloh? Zobrazení v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/p6ze7qys.

PŘÍKLAD 3.8. *Jsou dány vektory $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (0,3,1)$, $\vec{c} = (1,0,2)$ a $\vec{d} = (2,-1,-1)$. Rozhodněte, zda lze každý z nich vyjádřit jako lineární kombinaci těch zbývajících.*

Řešení: Řešte sami dle postupů řešení předchozích příkladů. Zde je zobrazení vektorů v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/dakpt7ps.

PŘÍKLAD 3.9. *Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $\vec{u}_1 = (1,0,2)$, $\vec{u}_2 = (-2,1,1)$, $\vec{u}_2 = (-1,1,0)$.*

Řešení: Řešte sami. Využijte řešení příkladu 3.5. Zde je pro kontrolu řešení v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/za9m7feq.

Již umíme u dané skupiny vektorů určit, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé, nyní se ještě zamyslíme nad tím, **jaký vliv má na závislost či nezávislost skupiny vektorů přidání nebo odebrání vektoru**. Z definice 5 přímo vyplývá, že pokud ke lineárně nezávislým vektorům přidáme vektor, který je jejich lineární kombinací, vznikne skupina lineárně závislých vektorů a naopak, pokud ze skupiny lineárně závislých vektorů postupně odstraníme všechny vektory, které jsou lineární kombinací ostatních, dostaneme nakonec skupinu lineárně nezávislých vektorů. Pro další možné situace vyslovíme následující dvě věty.

Věta 4. *Jsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ $(k > 1)$ z vektorového prostoru V nad tělesem T lineárně nezávislé, dostaneme vynecháním kteréhokoliv z nich opět lineárně nezávislé vektory.*

Věta 5. *Jsou-li vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ z vektorového prostoru V nad T lineárně závislé, jsou závislé i vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$, kde $\vec{u}_{k+1}$ je libovolný vektor z V.*

PŘÍKLAD 3.10. *Pro každou z výše uvedených vět 4, 5 vytvořte alespoň jeden příklad, který ilustruje její tvrzení. Můžete k tomu použít GeoGebru.*

Na začátku kapitoly 3, konkrétně na straně 30, uvádíme, že v rovině stačí zvolit si dva různoběžné vektory (teď už víme, že to znamená *lineárně nezávislé vektory*) a každý další se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Toto tvrzení je založeno na geometrické představě a je podpořeno vizuálním vjemem získaným z Obr. 7. Nyní si, v řešení následujícího příkladu 3.11, toto tvrzení dokážeme užitím prostředků lineární algebry.

PŘÍKLAD 3.11. *Jsou dány dva lineárně nezávislé vektory $\vec{a},\vec{b} \in V_2$. Dokažte, že každý vektor $\vec{u} \in V_2$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

Řešení: Označme souřadnice vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{u} = (u_1, u_2)$. Potom se ptáme, zda existují taková $k, l \in R$, pro která je $\vec{u} = k\vec{a} + l\vec{b}$. Po rozepsání této vektorové rovnice pro jednotlivé souřadnice dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých k, l :

$$a_1 k + b_1 l = u_1$$
$$a_2 k + b_2 l = u_2$$

Tato soustava je pro lineárně nezávislé vektory $\vec{a},\vec{b}$ regulární (proč?). Můžeme ji tak řešit třeba užitím Cramerova pravidla. Dostaneme: $k = \dfrac{u_1 b_2 - b_1 u_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$, $l = \dfrac{a_1 u_2 - u_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$. Koeficienty k, l jsou tedy pro dané vektory $\vec{a},\vec{b}$ a $\vec{u}$ určeny jednoznačně.

PŘÍKLAD 3.12. *Jsou dány tři lineárně nezávislé vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_3$. Dokažte, že každý vektor $\vec{u} \in V_3$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.*

PŘÍKLAD 3.13. *Jaký je maximální počet lineárně nezávislých vektorů v prostorech V_2 a V_3? Pro svá tvrzení předložte věrohodné argumenty.*

3.3 Lineární obal množiny vektorů

Zajímá nás, jak vypadá množina všech lineárních kombinací daných vektorů. Říká se jí *lineární obal* dané skupiny vektorů. Lineárním obalem jednoho vektoru, tj. množinou všech jeho násobků, je zřejmě množina všech vektorů téhož směru. Můžeme ji znázornit přímkou, viz např. Obr. 6 na str. 29. Lineárním obalem dvou nezávislých vektorů je zřejmě rovina rovnoběžná s jejich směry. Lineárním obalem tří nezávislých vektorů je potom trojrozměrný prostor. Zkoumání těchto množin jsou věnovány následující příklady.

PŘÍKLAD 3.14. *Uvažujte vektory $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$ a $\vec{r} = k\vec{u} + l\vec{v}$ zobrazené v appletech https://www.geogebra.org/m/PsG8F0nH a https://www.geogebra.org/m/hrbzybj9. Charakterizujte množiny všech takovýchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů $k, l \in R$.*

Řešení: V obou případech se jedná o rovinu. V obou případech splňují množiny všech vektorů tvořících tuto rovinu (tj. všech vektorů, které jsou lineárními kombinacemi daných dvou) definici vektorového prostoru 3, viz str. 24. V prvním případě se jedná o vektorový prostor, v druhém případě jde o tzv. *vektorový podprostor*, podmnožinu prostoru V_3 dimenze 3, která sama splňuje definici vektorového prostoru (viz též řešení příkladu 3.18).

PŘÍKLAD 3.15. *Uvažujte vektor $\vec{q} = k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w}$ zobrazený v dynamickém appletu https://www.geogebra.org/m/KFL3Onq1. Charakterizujte množinu všech takovýchto vektorů pro všechny možné hodnoty koeficientů k, l, $m \in R$.*

Řešení: V tomto případě vektory (představujte si jejich koncové body) vyplňují celý trojrozměrný prostor. Jejich množina opět splňuje definici vektorového prostoru. Jedná se o vektorový prostor V_3 dimenze 3.

Definice 7 (**Lineární obal množiny vektorů).** *Nechť $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ je podmnožina vektorového prostoru V (tj. je to množina obsahující k vektorů o stejném počtu složek).* **Lineárním obalem** *množiny M rozumíme* **množinu všech lineárních kombinací** *vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$. Lineární obal množiny M značíme $[M]$ a platí, že $[M] \subseteq V$.*

Poznámka. Lineární obal množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ značíme dle potřeby buď $[M]$ nebo $[\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}]$.

PŘÍKLAD 3.16. *Určete lineární obaly $[M]$ pro následující množiny M:*

a) $M = \{(0,0)\}$,
b) $M = \{(1,2)\}$,
c) $M = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

PŘÍKLAD 3.17. *Uvažujme množinu $M = \{(2,-3,0),(1,0,3)\}$. Potom lineárním obalem $[M]$ množiny M je množina všech vektorů $\vec{v}$, které se dají zapsat ve tvaru $\vec{v} = a(2,-3,0) + b(1,0,3)$, kde $a, b \in R$.*

Řešení: Znázornění v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/wxVwhw9W

PŘÍKLAD 3.18. *Uvažujte množinu vektorů $M = \{(1,2,0),(0,3,1)\}$. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří její lineární obal (znázorněte si ho v GeoGebře). Podle definice 3 ověřte, zda to není vektorový prostor. Jaký je vztah $[M]$ k aritmetickému vektorovému prostoru R^3?*

Řešení: Lineárním obalem dané množiny vektorů je, stejně jako v příkladu 3.17, rovina procházející počátkem soustavy souřadnic (tj. bodem $(0,0,0)$) rovnoběžně se směry určenými vektory z množiny M. Ověřením jednotlivých vlastností uvedených ve definici 3 zjistíme, že se jedná o **vektorový prostor**. Přesněji hovoříme o **vektorovém podprostoru** vektorového prostoru R^3.

Věta 6. *Každý lineární obal je vektorovým prostorem.*

PŘÍKLAD 3.19. *Naznačte možný postup důkazu pravdivosti tvrzení věty 6.*

Zjistili jsme, že lineární obal množiny vektorů M je vektorovým prostorem, označme ho V. Platí tedy $[M] = V$. O vektorovém prostoru V potom můžeme říci, že je *lineárním obalem* množiny M. Jak ale popíšeme vztah množiny M vzhledem k V? Používá se k tomu pojem *množina generátorů* (též *systém generátorů*) vektorového prostoru V.

Definice 8 (Systém generátorů vektorového prostoru). *Nechť $[M] = V$, kde V je vektorový prostor. Množina M se potom nazývá* **množinou (systémem) generátorů** *vektorového prostoru V. Říkáme, že množina M generuje vektorový prostor V.*

PŘÍKLAD 3.20. *Najděte množiny generátorů pro následující vektorové prostory. Pokuste se najít množiny generátorů o nejmenším počtu vektorů.*

a) Množina všech vektorů (šipek) v rovině a v třírozměrném prostoru.
b) Aritmetický vektorový prostor R^2.
c) Aritmetický vektorový prostor R^1.
d) Aritmetický vektorový prostor R^3.
e) Množina P_n všech polynomů stupně nejvýše n s koeficienty z R.

PŘÍKLAD 3.21. *Rozhodněte, zda platí uvedená tvrzení o lineárním obalu množiny M:*

a) $M = \{[2,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
b) $M = \{[2,1],[1,3]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
c) $M = \{[2,1],[4,2]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
d) $M = \{[1,2],[3,4],[1,1]\}$ *potom* $[M] = R^2$,
e) $M = \{f(x) = 3\}$, $V = \{f(x) = c; c \in R\}$ *potom* $[M] = V$,
f) $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[-2,0,-1]\}$ *potom* $[M] = R^3$,
g) $M = \{[1,-1,1],[6,1,3],[8,-1,5]\}$ *potom* $[M] = R^3$.

3.4 Cvičení: Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů

1. Jsou dány vektory $\vec{a} = (1,2,3,4)$, $\vec{b} = (1,1,1,-1)$, $\vec{c} = (1,0,-2,-6)$. Vypočítejte:

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$,

b) $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$,

c) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

2. Zjistěte, která dvojice čísel c_1, c_2 splňuje vztah

a) $c_1(-3,4) + c_2(1,2) = (0,0)$;

b) $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{o}$, jestliže $\vec{a} = (2,-1)$, $\vec{b} = (-6,3)$, $\vec{o} = (0,0)$.

3. Zjistěte, při které hodnotě c je vektor $\vec{b} = (7,-2,c)$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}_1 = (2,3,5)$, $\vec{a}_2 = (3,7,8)$, $\vec{a}_3 = (1,-6,1)$.

4. Zjistěte, který z vektorů $\vec{a}_1 = (2,2,0,0,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,5,5,1)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}_3 = (1,1,1,1,0)$, $\vec{a}_4 = (1,1,-1,-1,-1)$, $\vec{a}_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

5. Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $q_1(x) = x+1$, $q_2(x) = x-1$, $q_3(x) = (x+1)^2$, $q_4(x) = (x+1)^3$, která je rovna polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$.

Nápověda: Při řešení úloh, kde v roli vektorů vystupují polynomy (není to nic divného, množina $P_n(x)$ polynomů stupně nejvýše n je vektorovým prostorem) můžeme využít *izomorfismus* (vzájemně jednoznačné zobrazení) prostoru $P_n(x)$ s aritmetickým vektorovým prostorem R^{n+1} (Pozor, prostor je dimenze $n+1$! Víte proč?). Každému polynomu $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ můžeme, při dohodě o uspořádání jeho členů, jednoznačně přiřadit uspořádanou $(n+1)$-tici (aritmetický vektor) $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in R^{n+1}$ a naopak, každé takové $(n+1)$-tici polynom stupně n.

Konkrétně pro tento příklad platí $q_1(x) = x+1 \longrightarrow (0,0,1,1)$, $q_2(x) = x-1 \longrightarrow (0,0,1,-1)$, $q_3(x) = (x+1)^2 = x^2+2x+1 \longrightarrow (0,1,2,1)$, $q_4(x) = (x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 \longrightarrow (1,3,3,1)$, $p(x) = x^3 - 2x + 3 \longrightarrow (1,0,-2,3)$. Původní zadání tak nahradíme jiným, ovšem s ním ekvivalentním, které je pro nás jednodušší. Řešíme úkol nalézt koeficienty lineární kombinace vektorů $(0,0,1,1)$, $(0,0,1,-1)$, $(0,1,2,1)$ a $(1,3,3,1)$, která je rovna vektoru $(1,0,-2,3)$. Samozřejmě, toto není jediný možný postup. Příklad můžeme vyřešit i bez využití aritmetických vektorů, přímými výpočty s danými polynomy. Pro provedení lineární kombinace polynomů potřebujeme akorát mít definované příslušné dvě operace, násobení polynomu reálným číslem a sčítání polynomů (samozřejmě se stejnou proměnnou, bavíme se stále o polynomech jedné proměnné). Na tom však nic není, operace provádíme obvyklým způsobem, známým ze střední školy. Jedninou nevýhodou přímých výpočtů s polynomy je jejich pracnost.

6. Určete koeficienty lineární kombinace polynomů $a_1(x) = 1 - 3x + 2x^2$, $a_2(x) = 1 + x + 4x^2$, $a_3(x) = 1 + 7x^2$, která je rovna polynomu $b(x) = 3 - 2x + x^2$.

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Po zjištění lineární závislosti určete tu jejich lineární kombinaci, která je rovna nulovému vektoru.

a) $\vec{a} = (2,5,7)$, $\vec{b} = (6,3,4)$, $\vec{c} = (5,-2,3)$,

b) $\vec{a} = (6,4,2)$, $\vec{b} = (-9,6,3)$, $\vec{c} = (-3,6,3)$.

c) $\vec{a} = (-1,0,3)$, $\vec{b} = (4,2,0)$, $\vec{c} = (-5,-1,9)$.

d) $\vec{a} = (1,3,5)$, $\vec{b} = (2,4,6)$,

e) $\vec{a} = (3,-8,1)$, $\vec{b} = (-6,16,-2)$,

f) $\vec{a} = (3,2,7)$, $\vec{b} = (1,1,1)$, $\vec{c} = (2,0,3)$,

g) $\vec{a} = (3,2,0)$, $\vec{b} = (1,1,1)$, $\vec{c} = (5,4,2)$,

h) $\vec{a} = (1,0,0,0)$, $\vec{b} = (2,1,0,1)$, $\vec{c} = (3,2,1,1)$,

i) $\vec{a} = (3,0,1,0)$, $\vec{b} = (0,3,0,1)$, $\vec{c} = (0,1,0,3)$, $\vec{d} = (1,0,3,0)$.

8. Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé i tyto vektory:

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}, \quad \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}, \quad 3\vec{u}+\vec{v}.$$

Nápověda: I když tato úloha vypadá záhadně, její řešení je překvapivě jednoduché. Avšak pozor, za touto jednoduchostí se skrývají solidní znalosti základů lineární algebry! ☺

Nejprve si uvažované vektory pojmenujeme: $\vec{a} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{b} = \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}$, $\vec{c} = 3\vec{u}+\vec{v}$. Jsou-li lineárně nezávislé, je dle definice 6 (str. 34) rovna nulovému vektoru pouze jejich triviální lineární kombinace, tj. rovnice

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{o} \tag{16}$$

má jediné řešení ve tvaru $(x,y,z) = (0,0,0)$. Nyní se vrátíme k původním vektorům a příslušné jejich lineární kombinace do rovnice (16) dosadíme

$$x(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) + y(\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}) + z(3\vec{u}+\vec{v}) = \vec{o}, \tag{17}$$

roznásobíme

$$x\vec{u} + x\vec{v} + x\vec{w} + y\vec{u} - y\vec{v} - 2y\vec{w} + 3z\vec{u} + z\vec{v} = \vec{o} \tag{18}$$

a upravíme

$$\vec{u}(x+y+3z) + \vec{v}(x-y+z) + \vec{w}(x-2y) = \vec{o}. \tag{19}$$

Protože ze zadání víme, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé (o těchto vektorech to víme, o vektorech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ to zjišťujeme), víme také to, že rovnice (19) je splněna jedině tehdy, když jsou všechny tři koeficienty na levé straně rovny nule, tj. když

$$\begin{aligned} x+y+3z &= 0, \\ x-y+z &= 0, \\ x-2y &= 0. \end{aligned}$$

Této homogenní soustavě potom přísluší matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

jejíž hodnost je 2 (spočítejte sami). Zde uvádím výpočet hodnosti v programu pro algebraické výpočty wxMaxima, který si můžete zdarma stáhnout na adrese https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/:

(% i1) A:matrix([1,1,3],[1,-1,1],[1,-2,0]);

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{A}$$

(% i2) rank(A);

$$2 \tag{\% o2}$$

To, že hodnost matice je menší než její řád (tj. matice je singulární) ale znamená, že výše uvedená soustava má i netriviální řešení pro x, y, z. Potom ale i rovnice 16, s níž je soustava ekvivalentní, má i netriviální řešení. Z toho vyplývá, že dané vektory $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\quad \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$, $\quad 3\vec{u} + \vec{v}$ jsou lineárně závislé!

9. Nechť $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda jsou tyto vektory lineárně nezávislé:

$$2\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + 3\vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

10. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x.$$

11. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$p_1(x) = x - 2,\ p_2(x) = x^2 - 5x + 4,\ p_3(x) = 3x^2 - 4x,\ p_4(x) = x^2 - 1.$$

12. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) polynomů:

$$f_1(x) = x^2 - 3,\ f_2(x) = 2 - x,\ f_3(x) = (x - 1)^2.$$

Příklady pro dobrovolné řešení

Následující příklady jsou doplňkové, určené pro dobrovolné řešení. Rozhodně však stojí za pozornost. Pokud Vám budou v souvislosti s pojmy lineární kombinace, závislost a nezávislost připadat podivné, vraťte se k podstatě těchto pojmů. Lineární kombinací objektů $\heartsuit$, $\spadesuit$ a $\clubsuit$ rozumíme výraz $k\heartsuit + l\spadesuit + m\clubsuit$, kde $k, l, m \in R$.

13. Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) množiny funkcí:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos^2 x,\ \cos x \sin x,\ \sin^2 x.$$

14. Rozhodněte, zda jsou dané funkce lineárně závislé či nezávislé:

a) $2 - x^2,\ 3x,\ x^2 + x - 2,$
b) $3x - 1,\ x(2x+1),\ x(x-1),$
c) $e^x,\ e^{x+1},$
d) $\sin x,\ \sin(x+1),$
e) $e^x,\ e^{x+1},\ e^{x+2},$
f) $\sin x,\ \sin(x+1),\ \sin(x+2),$
g) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,$
h) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x},$

15. Nechť vektory $\mathbf{u} = \cos^2 x$, $\mathbf{v} = \sin^2 x$ tvoří bázi vektorového prostoru V. Zjistěte, který z uvedených vektorů leží ve V:

a) $2,$
b) $\sin 2x,$
c) $0,$
d) $\cos 2x,$
e) $2 + 3x,$
f) $3 - 4\cos 2x.$

4 Báze vektorového prostoru

V kapitole 3 jsme se na straně 30 zamýšleli nad tím, že je užitečné uvažovat množinu (systém) generátorů vektorového prostoru o minimálním nutném počtu vektorů, který je potřebný pro vytvoření všech vektorů onoho vektorového prostoru (tj. pro „generování“ tohoto prostoru). Tuto množinu generátorů jsme nazvali *báze vektorového prostoru.* V této kapitole se budeme pojmu *báze*[2] vektorového prostoru věnovat podrobněji. Nejprve vyslovíme definici báze a dokážeme si, že každý vektor daného prostoru lze vzhledem k bázi vyjádřit jediným způsobem. Tato vlastnost se později ukáže jako klíčová pro zavedení pojmu *souřadnice vektoru vzhledem k bázi.* S pojmem báze souvisí též pojem *dimenze* vektorového prostoru. Je to, jednoduše řečeno, číslo, které udává počet vektorů báze uvažovaného prostoru. Dimenze je pro daný vektorový prostor unikátní. Je to dáno tím, že ačkoliv lze pro daný vektorový prostor vytvořit nekonečně mnoho bází, všechny mají stejný počet vektorů.

Následující definicí zavádíme *bázi* vektorového prostoru jako takovou množinu generátorů tohoto prostoru, která je tvořena *lineárně nezávislými* vektory.

Definice 9 (Báze vektorového prostoru). *Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá* **báze vektorového prostoru** V*, právě když:*

1. $[M] = V$ *(tj. M je množinou generátorů prostoru V),*

2. M *je* **lineárně nezávislá** *množina.*

Pro pozdější zavedení pojmu *souřadnice vektoru vzhledem k bázi*, viz definice 11 na str. 50 je klíčová skutečnost, že konkrétní vektor lze vzhledem ke konkrétní bázi vyjádřit jediným způsobem.

Věta 7 (O jedinečnosti souřadnic vzhledem k bázi). *Nechť* $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je báze vektorového prostoru V. Potom každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát* **právě jedním způsobem** *jako lineární kombinaci vektorů báze M, tj.*

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in M, \exists a_1, a_2, ..., a_n \in T;\ \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i.$$

Důkaz. Větu 7 dokážeme sporem. Předpokládáme, že platí její negace, tj., že každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ lze psát **aspoň dvěma různými způsoby** jako lineární kombinaci vektorů báze M, a pokusíme se z ní odvodit sporné tvrzení. Pro zjednodušení zápisu se omezíme na prostor V_3, zobecnnění na V_n bude potom zřejmé. Pro každý vektor $\vec{u}$ tedy existují aspoň dvě různé trojice koeficientů a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 takové, že

$$\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 \quad \text{a zrove} \quad \vec{u} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3.$$

Pokud od sebe tyto dvě rovnosti odečteme, dostaneme

$$(b_1 - a_1)\vec{u}_1 + (b_2 - a_2)\vec{u}_2 + (b_3 - a_3)\vec{u}_3 = \vec{o}. \tag{21}$$

[2] Pro další studium viz např. *Wikipedia: Basis (linear algebra)*

Dle předpokladu jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé. Jediná jejich lineární kombinace, která může být rovna nulovému vektoru je tak triviální lineární kombinace. Rovnost (21) je potom splněna právě tehdy, když jsou všechny tři koeficienty $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ rovny nule. To může ale nastat jedině tehdy, když $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ a $b_3 = a_3$. Tím dostáváme spor s předpokladem, že trojice a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 jsou různé. □

4.1 Dimenze vektorového prostoru

S pojmem *dimenze*[3] jsme se všichni setkali již mnohokrát. Omezme se zde na geometrický význam tohoto slova. Dimenzí rozumíme *číslo*, které udává počet nezávislých směrů, které potřebujete pro *pohyb* v daném prostoru.

Pokud žijete na přímce, vystačíte s jedním směrem, reprezentovaným jedním vektorem, např. $\vec{u}$. Veškeré přemisťování po přímce vyřídíte potom pomocí násobků $k\vec{u}$, viz Obr. 6 na str. 29. Přímka má proto dimenzi 1!

Pokud žijete v rovině, potřebujete k přemisťování po ní dva nezávislé směry, tj. dva lineárně nezávislé vektory, např. $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Každé přesunutí můžete potom vyjádřit pomocí jejich lineární kombinace $k\vec{u} + l\vec{v}$, viz Obr. 7 na str. 29. Rovina má proto dimenzi 2!

Pokud žijete v prostoru, v němž žijeme, potřebujete k přemisťování v něm tři nezávislé směry, tj. tři lineárně nezávislé vektory, dva pro pohyb v rovině, ten třetí pro pohyb „nahoru" a „dolů", např. $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Každé přemístění můžete potom vyjádřit pomocí jejich lineární kombinace $k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w}$. Náš životní prostor má proto dimenzi 3!

Definice 10 (Dimenze vektorového prostoru). *Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má* **konečnou dimenzi***, jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V (tj. můžeme říci, že V je konečně generovaný).* **Dimenzí** *vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze (tj. jeho systému generátorů tvořeného lineárně nezávislými vektory). Značíme*

$$\dim V = n \qquad \text{nebo} \qquad V_n.$$

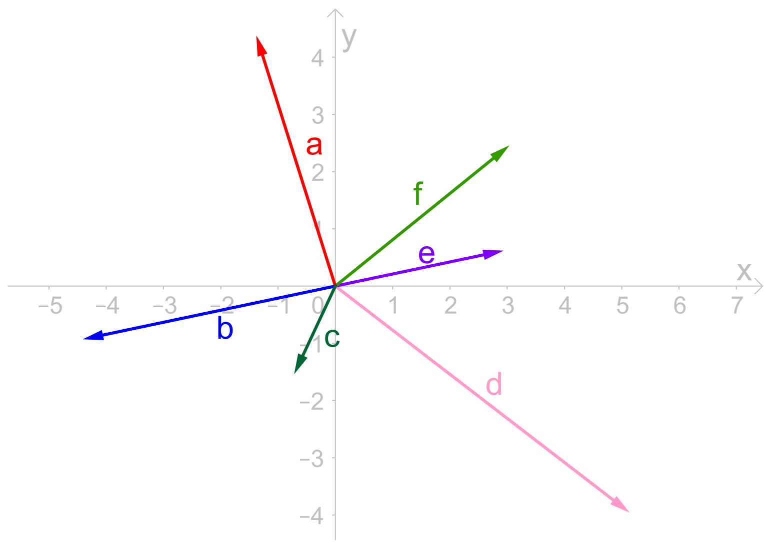
Například informaci o tom, že vektorový prostor V má dimenzi 3 zapíšeme ve tvaru rovnosti: $\dim V = 3$, nebo zkráceně pomocí dolního indexu: V_3.

Věta 8 (O existenci báze). *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor má* **aspoň jednu konečnou bázi***.*

Důkaz. Naznačíme pouze myšlenku důkazu, viz Obr. 9. Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ představují množinu generátorů vektorového prostoru V_2. Jsou evidentně lineárně závislé. Nyní vezměte tužku a postupně (po jednom) vyškrtávejte vektory, které se

[3] Pro další studium viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Dimension

dají vyjádřit jako lineární kombinace ostatních. Měly by Vám zůstat dva lineárně nezávislé vektory, ty tvoří bázi prostoru V_2. Všimněte si, že popsaným způsobem můžete dospět k různým takovýmto dvojicím. To je projev toho, že neexistuje jenom jedna báze vektorového prostoru. Všechny ale, jak víme, mají stejný počet vektorů!



Obrázek 9: Kolik lineárně nezávislých vektorů zůstane po postupném odstranění těch, které se dají vyjádřit jako lineární kombinace ostatních?

Důkaz věty je založen na popsaném mechanismu. Máme-li konečnou množinu generátorů, je jisté, že dříve nebo později se z ní uvedeným postupem proškrtáme až k bázi. □

Důsledek 1. *Odstraníme-li ze systému generátorů vektorového prostoru V vektor, který je lineární kombinací ostatních, pak množina zbývajících vektorů je opět systémem generátorů vektorového prostoru V.*

PŘÍKLAD 4.1. *Rozhodněte, zda je daná množina vektorů systémem generátorů, nebo přímo bází, vektorového prostoru R^3.*

a) $(1,2,3),(1,2,1),(-1,1,0),(2,-1,0)$,

b) $(1,2,3),(1,2,1),(0,0,2),(1,2,-1)$.

Řešení: Na první pohled je zřejmé, že ani jedna z uvedených množin není bází. Maximální počet nazávislých uspořádaných trojic reálných čísel je 3. Je-li jich více, jsou vždycky závislé (Souvisí to s počtem řešení příslušné homogenní soustavy rovnic. Zdůvodněte!). Zbývá vyšetřit, zda se jedná alespoň o systémy generátorů prostoru R^3. Zkoumáme proto, zda lze každý vektor $\vec{v} \in R^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci daných čtyř vektorů.

ad a)

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Rovnice (22) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{rrrr|l}1&1&-1&2&v_1\\2&2&1&-1&v_2\\3&1&0&0&v_3\end{array}\right]$$

(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{rrrr|l}1&1&-1&2&v_1\\2&2&1&-1&v_2\\3&1&0&0&v_3\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}1&1&-1&2&v_1\\0&2&-3&6&3v_1-v_3\\0&0&3&-5&-2v_1+v_2\end{array}\right].$$

Má-li mít příslušná soustava lineárních rovnic řešení (protože je rovnic méně než neznámých, jedno mít nemůže, tak je ve hře nekonečně mnoho řešení) nezávisle na volbě vektoru $\vec{v}$, musí mít matice soustavy dle Frobeniovy věty hodnost 3 (tj. rovnu dimenzi vektorového prostoru R^3, jehož mají být vektory systémem generátorů). Tato podmínka je evidentně splněna. Můžeme tedy říci, že daná množina vektorů je systémem generátorů vektorového prostoru R^3. Vektory jsou zobrazeny na Obr. 10. Viz též příslušný applet https://www.geogebra.org/m/wptxscy7. Vidíme, že v souladu s výsledkem algebraického řešení neleží všechny v jedné rovině (dokonce žádné tři neleží v jedné rovině). V duchu důkazu věty 8 bychom tak vyškrtnutím jednoho z nich získali tři lineárně nezávislé vektory.

ad b)

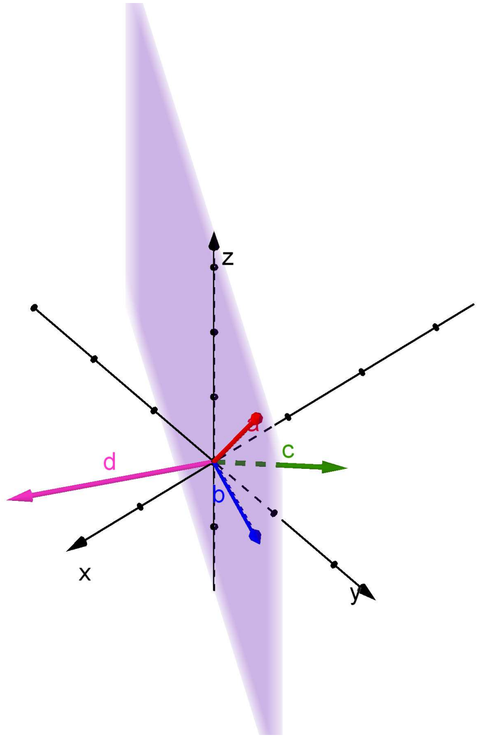
$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Rovnice (23) vede k soustavě lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left[\begin{array}{rrrr|l}1&1&0&1&v_1\\2&2&0&2&v_2\\3&1&2&-1&v_3\end{array}\right]$$

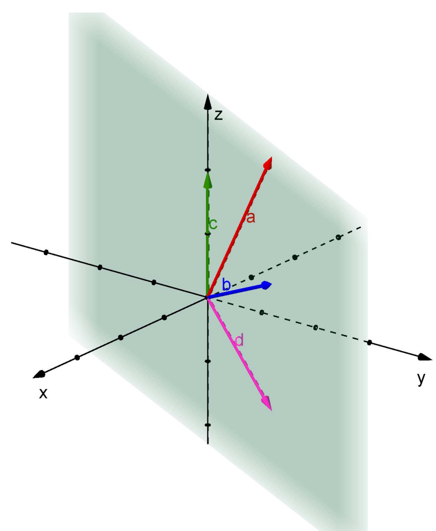
(všimněte si, že sloupcovými vektory této matice jsou dané vektory). Užitím Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left[\begin{array}{rrrr|l}1&1&0&1&v_1\\2&2&0&2&v_2\\3&1&2&-1&v_3\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}1&1&0&1&v_1\\0&-2&2&-4&-3v_1+v_3\\0&0&0&0&-2v_1+v_2\end{array}\right].$$



Obrázek 10: Množina vektorů $(1,2,3),(1,2,1),(-1,1,0),(2,-1,0)$ generuje prostor dimenze 3

Matice příslušné soustavy lineárních rovnic má hodnost 2. Rozšířená matice soustavy má až na případ, kdy $v_2 = 2v_1$, hodnost 3. Dle Frobeniovy věty tedy příslušná soustava nemá pro všechny vektory $\vec{v} \in R^3$ řešení (soustava má řešení pouze pro takové vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pro které je $v_2 = 2v_1$, my ale potřebujeme, aby měla řešení pro jakýkoliv vektor $\vec{v}$). Daná množina vektorů není systémem generátorů vektorového prostoru R^3. Vektory jsou zobrazeny na Obr. 11. Viz též příslušný applet https://www.geogebra.org/m/rqs3zxvs. Vidíme, že, opět v souladu s výsledkem algebraického řešení, leží všechny čtyři vektory v jedné rovině. V duchu důkazu věty 8 bychom tak vyškrtnutím dvou z nich získali dva lineárně nezávislé vektory.

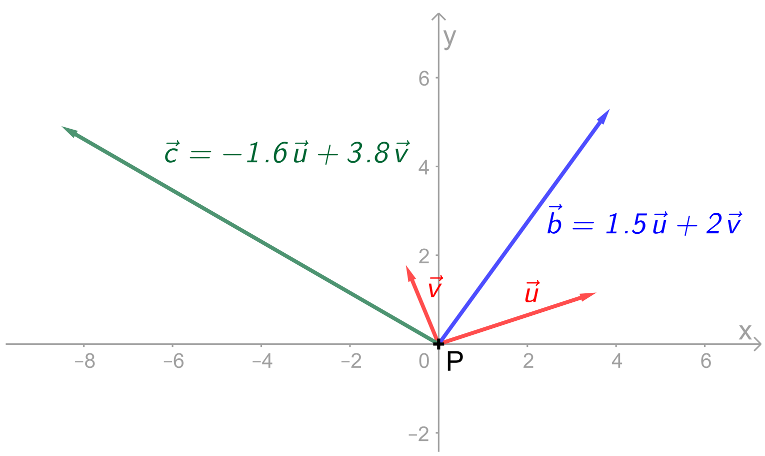


Obrázek 11: Množina vektorů $(1,2,3),(1,2,1),(0,0,2),(1,2,-1)$ generuje prostor dimenze 2

Poznámka. Příklad 4.1 můžeme řešit i rychleji, pouze s využitím matic, jejichž sloupce (nebo řádky) jsou dané vektory. Navrhněte a zdůvodněte postup takového řešení.

4.2 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Jak víme, konkrétní vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů konkrétní báze jediným způsobem, viz věta 7 na str. 44. Koeficienty takové lineární kombinace tak daný vektor vzhledem k dané bázi jednoznačně identifikují. Říkáme, že jsou jeho *souřadnicemi* vzhledem k této bázi. Tak můžeme říci, že vektor $\vec{b}$ na Obr. 12 má vzhledem k bázi $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ souřadnice $(1.5, 2)$, zatímco vektor $\vec{c}$ má vzhledem k ní souřadnice $(-1.6, 3.8)$. Víme, že bází daného vektorového prostoru můžeme vytvořit nekonečně mnoho (například pro rovinu jsou to všechny možné dvojice lineárně nezávislých vektorů). Potom ke každé z nich jsou souřadnice daného vektoru jiné! Vždy je tedy třeba vědět, vzhledem k jaké bázi jsou příslušné souřadnice dány. Pro prostory R^n se používá převážně (ve školní matematice jedině) tzv. *kanonická báze*, nejjednodušší báze, jakou můžeme vytvořit. Pro R^2 je to $\{(1,0),(0,1)\}$, pro R^3 je to $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ atd.



Obrázek 12: Souřadnice vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ vzhledem k bázi $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Dle věty 7 lze vektor $\vec{u} \in V$ psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ vektorového prostoru V. Jinak řečeno, koeficienty $x_1, x_2, ..., x_n \in T$ lineární kombinace

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

jsou pro daný vektor $\vec{u}$ a danou bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ určeny jednoznačně. Tyto koeficienty, konkrétně uspořádanou n–tici (tj. aritmetický vektor) z nich vytvořenou, nazýváme *souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M*.

Definice 11 (Souřadnice vektoru vzhledem k bázi). *Nechť* $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je báze vektorového prostoru* V. *Potom každý vektor* $\vec{u} \in V$ *lze napsat jednoznačně ve tvaru*

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ *nazveme souřadnicemi vektoru* $\vec{u}$ *vzhledem k bázi* M *a značíme*

$$\vec{u}_M = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

PŘÍKLAD 4.2. *Množina* $M = \{(1,1),(2,3)\}$ *je bází vektorového prostoru* R^2. *Určete souřadnice* $\vec{u}_M$ *vektoru* $\vec{u}$ *vzhledem k této bázi, znáte-li jeho souřadnice* $\vec{u} = (7,12)$ *vzhledem ke kanonické bázi* $\{(1,0),(0,1)\}$.

Řešení: Dle definice 11 hledáme koeficienty $x, y \in R$ lineární kombinace $\vec{u} = x(1,1) + y(2,3)$. Protože zároveň platí $\vec{u} = 7(1,0) + 12(0,1)$, můžeme psát

$$\vec{u} = x(1,1) + y(2,3) = 7(1,0) + 12(0,1), \tag{24}$$

po úpravě

$$\vec{u} = x(1,1) + y(2,3) = (7,12). \tag{25}$$

Rovnici (25) po další úpravě můžeme přepsat do podoby s ní ekvivalentní soustavy dvou rovnic o neznámých x, y

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7, \\ x + 3y &= 12, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $(x,y) = (-3,5)$. Pro vektor $\vec{u} = (7,12) \in R^2$ tak platí

$$\vec{u} = -3(1,1) + 5(2,3).$$

Hledané souřadnice vektoru $\vec{u} = (7,12)$ vzhledem k bázi M jsou proto $(-3,5)$, píšeme

$$\vec{u}_M = (-3,5).$$

Připomeňme si ještě pojem **kanonická báze**, který jsme v této kapitole začali používat. Jedná se o bázi, vzhledem k níž určujeme souřadnice vektorů, není-li uvedeno jinak. Později si kanonickou bázi uvedeme jako příklad tzv. *ortonormální* báze, jejíž použití přináší určité výhody, viz definice 18 na str. 80. V případě vektorového prostoru R^2 je kanonickou bází množina $\{(1,0),(0,1)\}$. Pro R^3 je potom kanonickou bází množina vektorů $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ atd.

PŘÍKLAD 4.3. *Ověřte, že vektory*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru R^4. Potom určete souřadnice vektoru

$$\vec{x} = (4, -2, 1, 5)^T$$

vzhledem k této bázi.

Řešení: Vyjděte z definice 9. Ověřte, zda jsou dané vektory nezávislé, potom najděte koeficienty požadované lineární kombinace.

Poznámka: Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k dané bázi je příkladem **izomorfismu**, tj. lineárního zobrazení, které je vzájemně jednoznačné. Pro danou bázi existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi vektorem a jeho souřadnicemi. Máme-li vektor, lze mu přiřadit jediné souřadnice vzhledem k této bázi a naopak, máme-li souřadnice, existuje jediný vektor, které je k dané bázi má.

4.3 Podprostor vektorového prostoru

Na pojem vektorový *podprostor* jsme už několikrát narazili. Jedná se o podmnožinu vektorového prostoru, která sama o sobě splňuje definici 3 vektorového prostoru, viz str. 24. Všimněte si například Obr. 11 na str. 48, nebo si otevřete jemu příslušející applet https://www.geogebra.org/m/rqs3zxvs. Všechny čtyři vektory leží v jedné rovině. Představují množinu generátorů vektorového podprostoru, který je tvořen všemi vektory majícími směr rovnoběžný s touto rovinou (ta rovina je názorným modelem tohoto podprostoru). Kdybychom vhodně odstranili dva z nich, dostali bychom bázi tohoto podprostoru. Jeho dimenze je 2.

Definice 12 (Podprostor vektorového prostoru). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Řekneme, že W je* **podprostor** *vektorového prostoru V, právě tehdy když platí:*

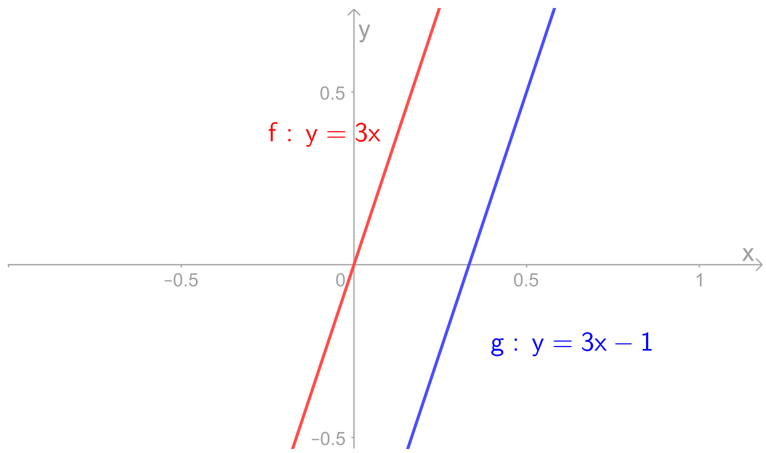
1. W **je neprázdná podmnožina** V *($W \subseteq V \wedge W \neq \emptyset$.)*

2. W **je vektorovým prostorem** *vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem z tělesa T, které jsou definované na V (tj. splňuje definici 3 vektorového prostoru).*

Skutečnost, že W je podprostorem vektorového prostoru V značíme takto:

$$W \subseteq\subseteq V.$$

Poznámka. Význam pojmů uvedených v definici si můžeme ilustrovat na příkladu množiny $U = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$, která je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $V = R^2$ definovaného nad tělesem $T = R$, tj. $U \subseteq\subseteq V$.



Obrázek 13: Jedná se v obou případech o vektorové podprostory?

PŘÍKLAD 4.4. *Rozhodněte, zda je množina $W = \{(x, y) \in R^2; y = 3x - 1\}$ vektorovým podprostorem prostoru R^2 (tj. zda platí $W \subseteq\subseteq R^2$).*

Z definice vektorového prostoru 3 vyplývá **nutná podmínka existence vektorového podprostoru:** *Vektorový podprostor $W \subseteq\subseteq V$ musí obsahovat nulový vektor z prostoru V.* Její užitečnost se, jak to tak u nutných podmínek bývá, projeví v okamžiku, kdy není splněna. To máme totiž jistotu, že vyšetřovaná podmnožina W není vektorovým podprostorem. Pokud splněna je, žádnou jistotu nemáme.

Nad definicí 12 je dobré si promyslet podobu *extrémních* podprostorů:

„Nejmenším“ podprostorem je **triviální vektorový prostor** $\{\vec{o}\}$, tj. množina obsahující jediný prvek, nulový vektor $\vec{o}$.

„Největším“ podprostorem je potom prostor V samotný (protože, jak víme, množina je sama sobě podmnožinou).

Občas se setkáme s úkolem, rozhodnout, zda je nějaká podmnožina vektorového prostoru jeho podprostorem. Je proto dobré, ujasnit si, co je třeba pro to udělat. Jak říká následující věta 9, není naštěstí nutné ověřit celou definici 3 (viz str. 24). Podmnožina totiž přirozeně přebírá (dědí) některé vlastnosti od své mateřské množiny. Například, pokud je sčítání vektorů komutativní ve V, je samozřejmě komutativní i v $W \subseteq\subseteq V$.

Věta 9 (O určení vektorového podprostoru). *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru V je podprostorem prostoru V, právě když platí:*

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W;\ \vec{u} + \vec{v} \in W$,

(2) $\forall a \in T, \forall \vec{u} \in W;\ a\vec{u} \in W$.

PŘÍKLAD 4.5. *Ověřte, zda* $W_i \subseteq\subseteq (R^3, +, R)$:

a) $W_1 = \{[r, 2r, 5r]; r \in R\}$,

b) $W_2 = \{[r, 2r, r^2]; r \in R\}$,

c) $W_3 = \{[r, 2r, 1]; r \in R\}$.

Řešení: Naznačíme si postup řešení pro zadání a). Postupujeme podle věty 9. Vyjádříme si dva vektory z W_1; $\vec{u} = [r_1, 2r_1, 5r_1]$, $\vec{v} = [r_2, 2r_2, 5r_2]$ a ověříme, zda splňují ony dvě vlastnosti (1) a (2) z věty 9.

Ad (1): Ověříme, zda $\vec{u} + \vec{v}$ patří do W_1. Platí

$$\vec{u} + \vec{v} = [r_1 + r_2, 2(r_1 + r_2), 5(r_1 + r_2)].$$

Pokud nahradíme $r_1 + r_2 \in R$ symbolem p; $p \in R$, můžeme psát

$$\vec{u} + \vec{v} = [p, 2p, 5p],$$

což je předpis pro podobu uspořádané trojice patřící do W_1. Proto $\vec{u} + \vec{v} \in W_1$.

Ad (2): Ověříme, zda $a\vec{u}$, kde $a \in R$ patří do W_1. Platí

$$a\vec{u} = [ar, 2ar, 5ar].$$

Pokud nahradíme $ar \in R$ symbolem q; $q \in R$, můžeme psát

$$a\vec{u} = [q, 2q, 5q],$$

což je předpis pro podobu uspořádané trojice patřící do W_1. Proto $a\vec{u} \in W_1$.
Tím jsme prokázali, že $W_i \subseteq\subseteq R^3$.

Zbývající dvě zadání příkladu 4.5 řešte sami.

PŘÍKLAD 4.6. *Rozhodněte, zda jsou následující množiny podprostory prostoru* R^3 *nad* $\mathbb{R}$.

(a) Množina všech řešení (x, y, z) *rovnice* $3x + 2y - z = 0$.

(b) Množina všech lineárních kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (2, -3, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 3)$.

Proveďte geometrickou interpretaci daných množin (podprostorů).

V závěru kapitoly věnované bázi vektorového prostoru je vhodné připomenout si dvě vlastnosti báze, na které jsme již narazili, ale dosud jsme je nijak nedokazovali:

(i) **Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.**

(ii) **Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.**

Důkazy obou těchto tvrzení se dají elegantně provést jako důsledky tzv. *Steinitzovy věta o výměně*, které je věnována následující kapitola. Protože však její obsah nebude kromě těchto důsledků nijak využit v následujících pasážích, je její studium čistě dobrovolné.

4.4 Steinitzova věta o výměně*

Studium této kapitoly je dobrovolné. Znalosti věty a jejího důkazu nebudou vyžadovány u zkoušky. Je třeba znát akorát její výše uvedené důsledky.

Tato věta je pro nás důležitá hlavně svými důsledky. Plynou z ní například tyto skutečnosti:

I. Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

II. Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.

Příklad: Množina M je systémem generátorů příslušného vektorového prostoru. Je možné nahradit některé vektory z M vektory z množiny N tak, aby výsledná množina opět generovala ten samý vektorový prostor?

a) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\},\ N = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$,

b) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\},\ N = \{(0,1,2),(2,0,2)\}$.

Věta 10 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ je* **množina generátorů** *prostoru V a nechť $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k$ jsou* **libovolné lineárně nezávislé vektory** *z V. Potom platí:*

1) $k \le n$,

2) *při* **vhodném přečíslování** *vektorů $\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n$ můžeme prvních k z nich nahradit vektory $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k$ tak, že množina $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k,\vec{u}_{k+1},\vec{u}_{k+2},...,\vec{u}_n\}$ je* **systémem generátorů** *vektorového prostoru V.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k (tj. podle počtu lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_i$).

I. Dokážeme, že věta je pravdivá pro $k = 1$

Máme tedy dokázat, že je-li $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ množina generátorů prostoru V a $\vec{v}_1$ je libovolný lineárně nezávislý vektor z V, potom:
(1) $1 \le n$,
(2) při vhodném uspořádání mohu první vektor z množiny $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ nahradit vektorem $\vec{v}_1$.

Je zřejmé, že tvrzení (1) platí; pro všechna $n \in N$ je skutečně $1 \le n$.
Zaměříme se tedy na důkaz tvrzení (2). To, že $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ je množina generátorů prostoru V lze zapsat rovností $[\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n] = V$. Potom chceme dokázat, že z předpokladů věty vyplývá, že platí také rovnost $[\vec{v}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n] = V$ (tj., že vektor $\vec{u}_1$ můžeme nahradit vektorem $\vec{v}_1$).

Protože $\vec{v}_1 \in V$, lze vektor $\vec{v}_1$ psát jako lineární kombinaci

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + ... + a_n\vec{u}_n. \tag{26}$$

Potom ovšem platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud k ní přidáme vektor, který je lineární kombinací jejích vektorů). Vektor $\vec{v}_1$ je dle předpokladů věty lineárně nezávislý a proto nemůže být nulový. Alespoň jeden z koeficientů a_i lineární kombinace (26) tak musí být různý od nuly. Věta připouští vhodné uspořádání vektorů $\vec{u}_i$, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je a_1. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{a_1}\vec{v}_1 - \frac{a_2}{a_1}\vec{u}_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor V platí

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Dokázali jsme tak, že lze opravdu při vhodném uspořádání vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ první z nich nahradit vektorem $\vec{v}_1$ a výsledná množina bude stále množinou generátorů prostoru V.

II. Dokážeme, že pokud věta platí pro $k = m$, platí i pro $k = m + 1$

Mějme na paměti, že v tomto kroku (říká se mu „indukční krok“) dokazujeme pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m{+}1)$ (kde symbolem $SV(j)$ rozumíme výrok „Steinitzova věta je pravdivá pro $k = j$“) nikoliv pravdivost samotného tvrzení věty. Předpokládáme tedy, že pro $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n] = V$ a m lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ z V je (1) $m \le n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V$. Chceme dokázat, že potom platí i to, že máme-li $m{+}1$ lineárně nezávislých vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ z V, je (1) $m{+}1 \le n$ a (2) při vhodném přečíslování vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ můžeme psát $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..$ V.

Protože $\vec{v}_{m+1} \in V$, lze vektor $\vec{v}_{m+1}$ psát jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$, $\vec{u}_{m+1}, \ldots, \vec{u}_n$, tj.

$$\vec{v}_{m+1} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_m\vec{v}_m + a_{m+1}\vec{u}_{m+1} + \cdots + a_n\vec{u}_n \tag{27}$$

a platí

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n] = V.$$

Protože vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$ jsou lineárně nezávislé, je zřejmé, že alespoň jeden z koeficientů $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ lineární kombinace (27) je různý od nuly (promyslete si detailní zdůvodnění). Věta připouští vhodné uspořádání vektorů množiny generátorů, proto lze bez jakékoliv újmy na obecnosti důkazu předpokládat, že tím nenulovým koeficientem je a_{m+1}. Potom ale můžeme vektor $\vec{u}_{m+1}$ vyjádřit z rovnosti (27) jako lineární kombinaci

$$\vec{u}_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}}\vec{v}_{m+1} - \frac{b_1}{a_{m+1}}\vec{v}_1 - \frac{b_2}{a_{m+1}}\vec{v}_2 - \ldots - \frac{b_m}{a_{m+1}}\vec{v}_m - \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\vec{u}_{m+2} - \ldots - \frac{a_n}{a_{m+1}}\vec{u}_n$$

a pro vektorový prostor V platí

$$\begin{aligned}\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n\right] &= \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n\right] = \\ &= \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, ..., \vec{u}_n\right] = V.\end{aligned}$$

(lineární obal množiny vektorů se nezmění, pokud z ní odebereme vektor, který je lineární kombinací jejích zbývajících vektorů). Opravdu lze při vhodném uspřádání vektorů vektor $\vec{u}_{k+1}$ nahradit vektorem $\vec{v}_{k+1}$. Tím jsme dokázali pravdivost implikace $SV(m) \Rightarrow SV(m+1)$, tzv. indukčního kroku důkazu matematickou indukcí. Tím je tento důkaz kompletní a můžeme proto říci, že Steinitzova věta o výměně je dokázána. □

4.5 Důsledky Steinitzovy věty o výměně

Věta 11. Každé dvě báze *konečně generovaného vektorového prostoru V* **mají týž počet prvků**.

Věta 12. *Každá* **skupina lineárně nezávislých vektorů** *libovolného vektorového prostoru* **generovaného** n**–prvkovou množinou** *obsahuje* **nejvýše** n **vektorů**.

Věta 13. *Je-li* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ **báze vektorového prostoru** V *a jsou-li vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ **lineárně nezávislé**, *je množina $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$* **rovněž báze** *vektorového prostoru V.*

Věta 14. *Nechť* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je* **množina generátorů** *vektorového prostoru V, pak*

$$\dim V \leq n.$$

4.6 Cvičení: Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru vzhledem k bázi

1. Rozhodněte, zda je daná množina vektorů M_i bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, určete souřadnice vektoru $\vec{a} = (1, -2, 5)$ vzhledem k této bázi. Pokud ne, uveďte, jaký vektorový „podprostor“ daná množina generuje.

a) $M_1 = \{(-1,0,2),(3,1,-1),(2,1,1)\}$,
b) $M_2 = \{(2,1,2),(1,1,-1),(2,1,1)\}$,
c) $M_3 = \{(5,0,1),(0,1,3),(1,1,1),(1,0,2)\}$,
d) $M_4 = \{(2,-4,6),(-1,2,-3),(4,-8,12)\}$,
e) $M_5 = \{(1,2,0,1),(2,0,1,-3),(1,1,1,1)\}$,
f) $M_6 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,
g) $M_7 = \{(1,2),(-1,5),(1,1)\}$.

2. Jsou uvedené polynomy bází vektorového prostoru polynomů stupně nejvýše 2?

a) $1 - 3x + 2x^2,\ 1 + x + 4x^2,\ 1 - 7x$,

b) $4 + 6x + x^2,\ -1 + 4x + 2x^2,\ 5 + 2x - x^2$.

3. Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina $M = x+1,\ x-1,\ (x+1)^2,\ (x+1)^3$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 - 2x + 3$ vzhledem k této bázi.

4. Nechť P_3 je vektorový prostor polynomů nejvýše třetího stupně. Ověřte, zda je množina polynomů $M = \{x^3+2x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+1, x^2+1\}$ bází tohoto vektorového prostoru. Pokud ano, určete souřadnice polynomu $p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ vzhledem k této bázi.

Příklady pro dobrovolné řešení

5. Vytvořte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1,2,0,1,2)$, $(2,3,-1,5,4)$, $(-1,0,-2,0,1)$. Potom určete souřadnice vektoru $(2,1,1,0,1)$ vzhledem k této, vámi vytvořené, bázi.

6. Najděte bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, která obsahuje vektory $(1,2,0,1,2)$, $(2,5,-1,8,4)$, $(-1,0,-2,3,-1)$.

7. Najděte bázi vektorového prostoru V, která obsahuje daný vektor $\vec{u}$:

a) $V = [(1,2,3,-1),(1,0,1,-2),(-2,1,4,3)]$, $\vec{u} = (1,1,7,-3)$,

b) $V = [(2,1,0,1),(-1,1,2,3),(2,3,4,0)]$, $\vec{u} = (4,1,0,-6)$.

8. Určete dimenzi vektorového prostoru
$V = [\{(1,1,0,2,3),(2,-1,1,2,3),(-1,0,1,1,2),(2,0,1,-1,0)\}]$. Pokud to jde, vytvořte jeho bázi tak, aby obsahovala vektor $(-4,1,1,0,1)$.

5 Skalární součin

Skalární součin[1] je operace, která dvěma vektorům přiřazuje reálné číslo (obecně *skalár*, tj. prvek tělesa T). Protože do skalárního součinu vstupují dva prvky, konkrétně vektory, říkáme, že je to operace *binární* (když do operace vstupuje jeden prvek, nazývá se *unární*, když tři, tak *ternární* atd.). Symbolem operace *skalární součin* je tečka „·“ (v angličtině se mu proto říká také „dot product“). Skalární součin je významný tím, že se jedná o operaci, která nám otevírá cestu k měření, tj. k určování vzdáleností, odchylek, obsahů a objemů, v afinním bodovém prostoru. Říkáme, že umožňuje zavedení tzv. *metriky*. Bez skalárního součinu umíme vyšetřovat pouze vzájemné polohy bodových podprostorů. Pojem *skalární součin* se objevuje již ve středoškolském učivu matematiky. Konkrétně se jedná o tzv. *Eukleidovský skalární součin*, který je pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ z R^2 dán vztahem

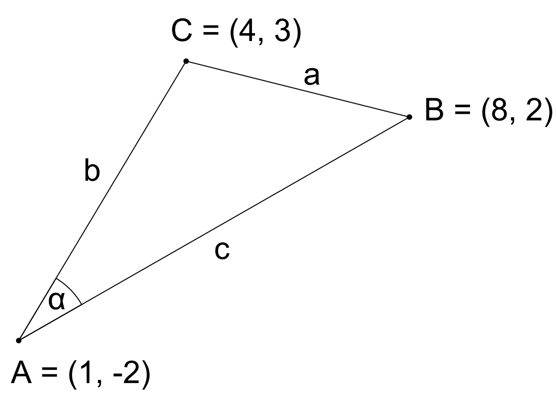
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2. \tag{28}$$

Pro vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ z R^3 pak analogicky

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{29}$$

Následující příklad přináší standardní problém ze středoškolské matematiky, k jehož řešení se skalární součin využívá.

PŘÍKLAD 5.1. *Je dán trojúhelník ΔABC, $A[1,-2]$, $B[8,2]$, $C[4,3]$. Vypočtěte velikost jeho vnitřního úhlu α, viz Obr. 14.*



Obrázek 14: Vypočtěte velikost vnitřního úhlu α trojúhelníku ABC

Řešení: Použijeme známý vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}, \tag{30}$$

[1] Pro doplňkové studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

v němž se skalární součin (29) objevuje ve dvou rolích. Jednak je zřetelně použit v čitateli, viz $\vec{u}\cdot\vec{v}$, jednak se poněkud skrytě uplatňuje při výpočtu norem (velikostí) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ve jmenovateli lomeného výrazu na pravé straně (30). Pro výpočet normy $|\vec{u}|$ vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ totiž platí

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \tag{31}$$

kde výraz pod odmocninou můžeme zapsat pomocí skalárního součinu (29) takto $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 = \vec{u}\cdot\vec{u}$. Potom (31) můžeme přepsat do tvaru

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}. \tag{32}$$

Vraťme se nyní k řešení příkladu 5.1. Pro využití vztahu (30) budeme uvažovat orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ jako umístění vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, v daném pořadí. Tj. $\vec{u} = B - A = (7, 4)$ a $\vec{v} = C - A = (3, 5)$. Pro normy těchto vektorů potom platí $|\vec{u}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$ a $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Po dosazení do (30) tak dostáváme

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{7\cdot 3 + 4\cdot 5}{\sqrt{65}\sqrt{34}} = \frac{41}{\sqrt{65}\sqrt{34}} = 0.872. \tag{33}$$

Úhel α, který splňuje rovnici (33), má při zaokrouhlení na tři desetinná místa velikost $0,511\,\mathrm{rad}$, tj. $\alpha = 29,29°$.

Původ skalárního součinu

Při pohledu na formuli (29) člověka přirozeně napadne otázka, jak se tento výpočet zrodil? Proč zrovna takhle? Možnou odpověď nám nabízí následující řešení problému nalezení vztahu pro výpočet velikosti vektoru $\vec{u} - \vec{v}$, viz Obr. 15. Již jsme si připomenuli, že velikost (též. normu; u geometrického vektoru se jedná o délku orientované úsečky, která je jeho umístěním) vektoru $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ značíme $|\vec{w}|$ a platí $|\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$. Potom pro vektor $\vec{u} - \vec{v}$ platí dle Obr. 15

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

(jedná se vlastně o opakované uplatnění Pythagorovy věty v trojrozměrném prostoru), odkud po umocnění obou stran na druhou dostaneme vztah

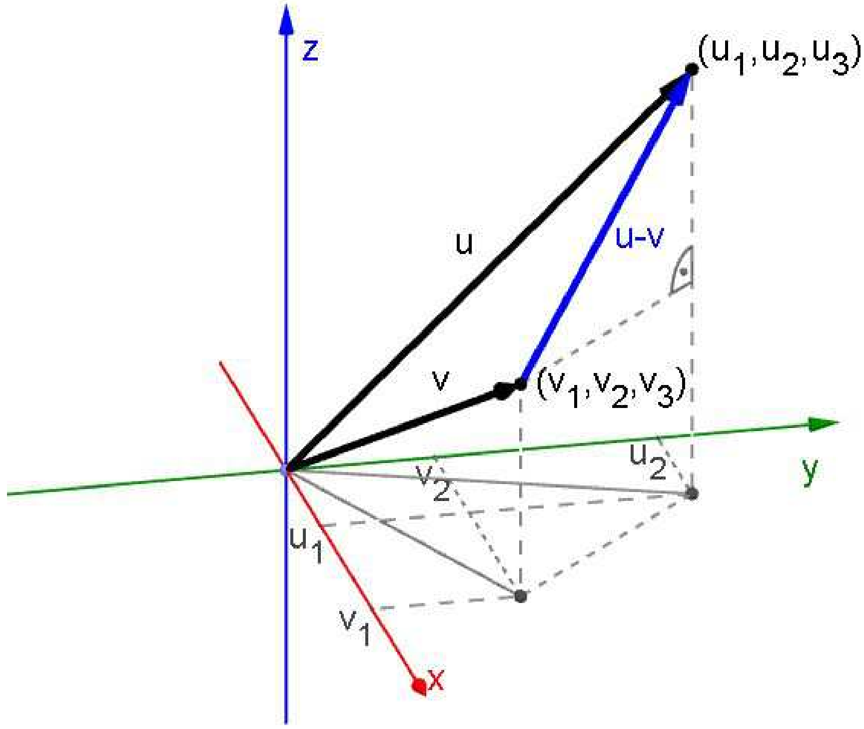
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2,$$

jehož pravou stranu upravíme na následující tvar

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$

a pomocí vztahů pro velikosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ přepíšeme do podoby

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3). \tag{34}$$



Obrázek 15: Vztah pro velikost vektoru $\vec{u}-\vec{v}$ obsahuje formuli pro výpočet Eukleidovského skalárního součinu

Požadavek zápisu rovnosti (34) ve tvaru

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

nás potom vede k definování skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ formulí (29). Aby vše „fungovalo“, musí mít tato operace určité vlastnosti. Ty jsou specifikovány v následující definici 13, která zavádí *skalární součin* jako obecnější operaci, než je výše uvedený *Eukleidovský skalární součin*. Ten se tak stává jenom jednou z mnoha operací vyhovujících této definici.

Definice 13 (**Skalární součin**). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$ tak, že platí:*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, *(SYMETRIE)*
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, *(BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)*
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \ \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$. *(POZITIVITA)*

Poznámky.

1. Skalární součin je vždy definován na nějakém vektorovém prostoru V. Potom hovoříme o **vektorovém prostoru se skalárním součinem**, nebo stručněji o **unitárním prostoru**.

2. Nejčastěji se setkáme s některým z následujících tří způsobů zápisu skalárního součinu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{nebo} \quad < \vec{u}, \vec{v} > \quad \text{nebo} \quad [\vec{u}, \vec{v}].$$

5.1 Příklady skalárních součinů

Existují různé skalární součiny, výše uvedený Eukleidovský není jediný. Za skalární součin totiž považujeme každou operaci, která splňuje definici 13. Uveďme si zde několik příkladů:

1. Eukleidovský skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

2. Vážený skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2; \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_2.$$

   Obecně zapíšeme vážený skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ formulí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i v_i,$$

   kde c_i je **váha** součinu i–tých souřadnic těchto vektorů.

3. Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 4u_2v_2.$$

4. Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$

$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

PŘÍKLAD 5.2. *Ověřte, že operace definovaná předpisem $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2$ pro $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ je skutečně skalárním součinem.*

Řešení: Zvolíme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$ a dosazením jejich souřadnic dle daného předpisu do obou stran příslušných rovností (v případě vlastnosti 4 nerovnosti) postupně ověříme platnost všech vlastností z definice 13.

5.2 Norma (velikost) vektoru

Zde shrneme a zobecníme to, co jsme o *normě* (*velikosti*) vektoru zjistili na str 59, viz formule (31), (32). Zobecnění spočívá v tom, že uvedenou definicí 14 je *norma* vektoru zavedena pro obecný skalární součin „·“, neřeší se jeho konkrétní podoba.

Definice 14 (Norma vektoru). *Normou (velikostí) vektoru* $\vec{u} \in V_n$ *rozumíme číslo*

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Je třeba mít na paměti, že definice 14 zavádí normu vektoru pomocí obecného pojmu *skalární součin*. Hodnota normy tedy závisí na tom, jaký konkrétní skalární součin použijeme, tj. podle jaké formule ho budeme počítat!

PŘÍKLAD 5.3. *Je dán vektor* $\vec{a} = (2, -3, 5)$. *Vypočítejte jeho normu pro*

a) Eukleidovský skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3,$

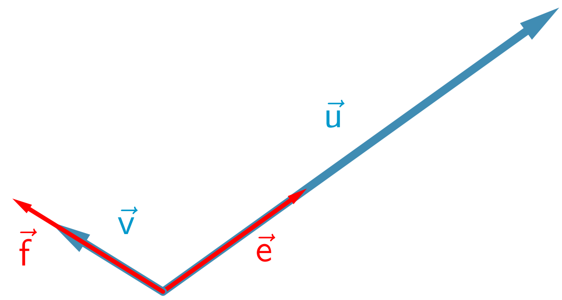
b) vážený skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1 v_1 + 5u_2 v_2 - u_3 v_3; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$

Poznámky.

1. Pro normu vektoru používáme též označení $\|\vec{u}\|$ (potřebujeme-li ji odlišit od absolutní hodnoty reálného čísla).
2. Vektor s normou $|\vec{u}| = 1$ nazýváme **jednotkový vektor**.
3. Součin $\vec{u} \cdot \vec{u}$ zkracujeme na $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. Potom je zřejmé, že platí
$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2. \tag{35}$$
4. Ke každému skalárnímu součinu přísluší dle definice 14 norma, ale **ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu**. Například:
   a) $\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|, \quad$ (tzv. 1-norma)
   b) $\|\vec{u}\|_{\text{inf}} = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|\},$
   c) $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$, Eukleidovská norma (též 2-norma)

5.2.1 Normování vektoru

Jsou situace, kdy je výhodné nahradit daný vektor jednotkovým vektorem téhož směru. Hovoříme o tzv. *normování vektoru*. Často se s tím setkáváme v souvislosti s bázemi. Máme dánu bázi $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ vektorového prostoru V, jejíž vektory mají různé velikosti, a potřebujeme ji nahradit bází $G = \{\vec{e}, \vec{f}\}$, jejíž vektory $\vec{e}, \vec{f}$ mají



Obrázek 16: Vztah pro velikost vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ obsahuje formuli pro výpočet Eukleidovského skalárního součinu

v daném pořadí stejné směry jako vektory $\vec{u}, \vec{v}$, ale jsou jednotkové, tj. $|\vec{e}| = |\vec{f}| = 1$, viz Obr. 16. Normování vektoru $\vec{u}$ provedeme konkrétně tak, že ho vydělíme jeho velikostí (normou), výsledný jednotkový vektor rovnoběžný s $\vec{u}$, označme ho $\vec{e}$, je potom dán vztahem

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \tag{36}$$

PŘÍKLAD 5.4. *Normujte vektor* $\vec{a} = (3, -4, 0)$.

Řešení:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(3, -4, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right).$$

PŘÍKLAD 5.5. *Normujte vektor* $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)$

5.3 Důležité nerovnosti*

Studium této kapitoly je dobrovolné. Její obsah nebude vyžadován u zkoušky. To však neznamená, že není zajímavý a nestojí za nahlédnutí.

Při zkoumání vlastností vektorových prostorů se skalárním součinem nám výrazně pomohou následující dvě nerovnosti:

1) Cauchyova-Schwarzova nerovnost,

2) Trojúhelníková nerovnost.

Ukážeme si, že tyto nerovnosti platí v jakémkoliv vektorovém prostoru se skalárním součinem.

5.3.1 Cauchyova–Schwarzova nerovnost

Věta 15 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost). *Pro každé dva vektory* $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ *a pro jakýkoliv skalární součin platí*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|. \tag{37}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ *lineárně závislé (tj. rovnoběžné).*

Důkaz. Uvažujme vektor $\vec{u} + k\vec{v}$. Potom dle definice skalárního součinu a normy vektoru platí

$$\|\vec{u} + k\vec{v}\|^2 \geq 0,$$

$$\|\vec{u}\|^2 + 2k\vec{u} \cdot \vec{v} + k^2 \|\vec{v}\|^2 \geq 0. \tag{38}$$

Když levou stranu nerovnosti (38) vhodně přeuspořádáme

$$\|\vec{v}\|^2 k^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}\, k + \|\vec{u}\|^2 \geq 0,$$

můžeme na ni nahlížet jako na kvadratický trojčlen $Ak^2 + Bk + C$ s proměnnou k. Potom je kvadratická nerovnost (38) vzhledem k této proměnné splněna právě tehdy, když je diskriminant $B^2 - 4AC$ tohoto trojčlenu menší nebo roven nule

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \leq 0.$$

Odtud dostaneme po několika úpravách nerovnost (37), kterou chceme dokázat

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2,$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

□

Poznámka. Používáme různé zápisy Cauchyovy–Schwarzovy (dále jen „C–S“) nerovnosti:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2},$$

PŘÍKLAD 5.6. *Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, pro která platí:*

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Určete maximální možnou hodnotu e.

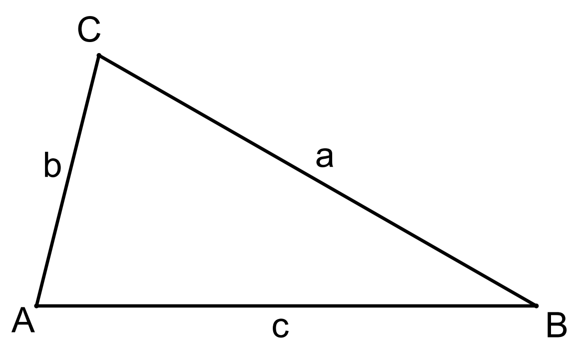
Nápověda: Dané rovnice upravte na tvary

$$a + b + c + d = 8 - e$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2.$$

a uvažujte C–S nerovnost pro vektory $\vec{u} = (a, b, c, d)$ a $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$.

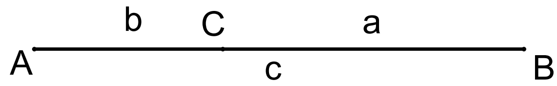
5.3.2 Trojúhelníková nerovnost

Mají-li tři úsečky a, b, c tvořit strany trojúhelníku ABC (viz Obr. 17), musí pro jejich délky platit, že součet každých dvou z nich je větší než ta třetí (tj. $a+b > c$, $a+c > b$, $b+c > a$). Nastane-li v některém z těchto případů rovnost, body A, B, C leží v přímce

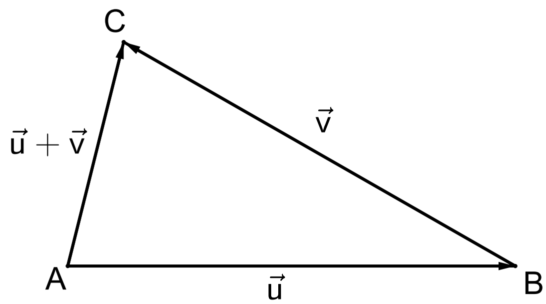


Obrázek 17: Úsečky délek a, b, c jsou stranami trojúhelníku

(trojúhelník degeneruje v úsečku, viz Obr. 18). Tyto skutečnosti jsou popsány tzv. *trojúhelníkovou nerovností*. Pokud do stran trojúhelníku ABC vhodně umístíme vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{u} + \vec{v}$, jak ilustruje Obr. 19, můžeme tuto nerovnost formulovat i pro vektory a jejich normy (viz Věta 16).



Obrázek 18: Pro $a + b = c$ leží vrcholy „trojúhelníku“ v přímce



Obrázek 19: Trojúhelníková nerovnost pro vektory

Věta 16 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ a normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu součinu platí*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \tag{39}$$

Rovnost nastává právě tehdy, když existuje $k \in R, k \geq 0$ takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$ nebo $\vec{v} = k\vec{u}$.

Důkaz. Ukážeme, že platnost nerovnosti (39) je důsledkem platnosti C-S nerovnosti (37). Nejprve obě strany nerovnosti (39) umocníme na druhou

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2,$$

pravou stranu při tom vyjádříme ve tvaru příslušného trojčlenu

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

Potom u členů, které jsou druhými mocninami norem vektorů, užijeme vztah (35) a zapíšeme je ve tvaru skalární mocniny

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2.$$

Po úpravě levé strany

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \vec{v}^2$$

a náležitém zjednodušení dostáváme nerovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|,$$

jejíž pravdivost vyplývá z pravdivosti C–S nerovnosti ($|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$) a z definice absolutní hodnoty ($\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$). □

PŘÍKLAD 5.7. *Dokažte následující nerovnost:*

$$\left| \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \right| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|; \quad \vec{a}, \vec{b} \in V_n.$$

Řešení: Postupujeme úplně stejně jako při výše uvedeném důkazu trojúhelníkové nerovnosti.

PŘÍKLAD 5.8. *Zapište skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pouze užitím normy vektoru.*

Řešení: Využijeme vztah (35), tj. toho, že platí: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. Nejprve uvažujeme vektor $\vec{u} - \vec{v}$. Dle (35) platí

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Odtud potom můžeme vyjádřit skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pomocí norem vektorů takto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right). \tag{40}$$

Další možností je uvažovat vztahy $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Odečteme-li první od druhého, dostaneme vztah $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$, ze kterého vyjádříme skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ takto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right). \tag{41}$$

5.4 Odchylka vektorů

Vztah pro výpočet odchylky dvou vektorů (30), který jsme použili při řešení příkladu 5.1 na str. 58, můžeme definovat jako důsledek Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (37). Z nerovnosti $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ vyplývá vztah $\dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \leq 1$, který můžeme přepsat do tvaru

$$\left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \right| \leq 1.$$

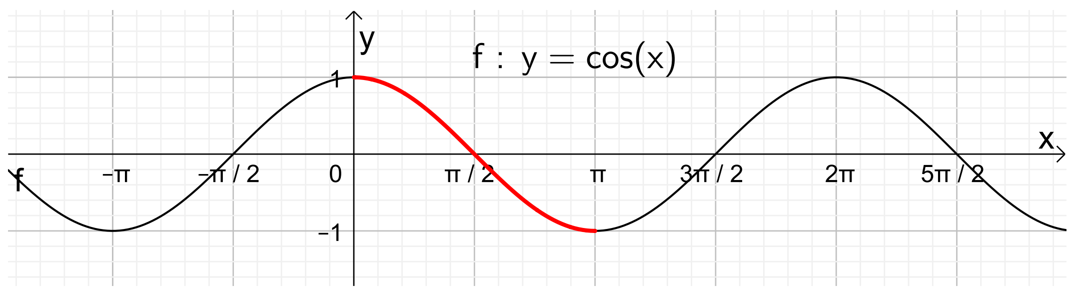
Uvážíme-li průběh hodnot funkce $\cos x$, viz graf na Obr. 20, pro které platí

$$|\cos x| \leq 1,$$

je zřejmé, že pro každé dva nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n$ existuje jediné reálné číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, příslušné hodnoty $\cos \varphi$ viz červená část grafu na Obr. 20, takové, že

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Toto číslo nazveme *odchylkou* nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.



Obrázek 20: Graf funkce $f : y = \cos x$

Definice 15 (Odchylka vektorů). *Odchylkou dvou nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n$ rozumíme reálné číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, které je dáno vztahem*

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \tag{42}$$

PŘÍKLAD 5.9. *Vypočítejte úhel mezi vektory $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 1)$.*

a) Uvažujte Eukleidovský skalární součin.

b) Uvažujte vážený skalární součin $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2 + 3 v_3 w_3$.

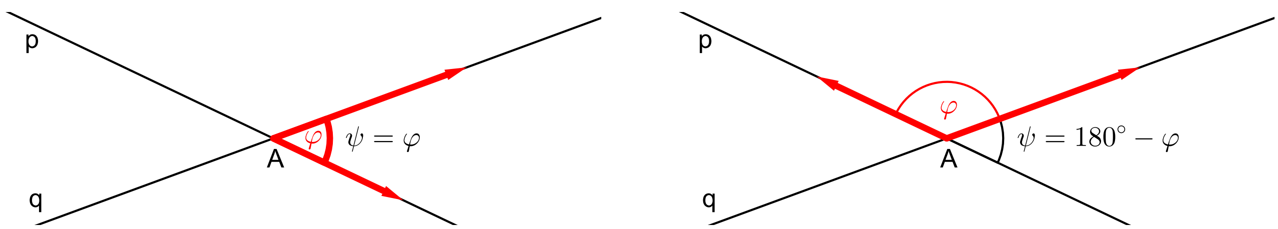
Zápis skalárního součinu pomocí norem vektorů

Důsledkem vztahu (42) je možnost zápisu skalárního součinu (nezapomínejme na to, že je to číslo) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pomocí jejich norem $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ a odchylky φ takto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi. \tag{43}$$

5.4.1 Odchylka přímek

Víme, že u každé přímky lze vyjádřit její směr prostřednictvím*směrového vektoru* přímky. Nabízí se tak využití znalosti výpočtu odchylky dvou vektorů, viz definice 42, k určení odchylky přímek. Samozřejmě to jde, odchylku přímek skutečně můžeme spočítat pomocí odchylky jejich směrových vektorů. Musíme však při tom dát pozor na to, že ne vždy se tyto dvě odchylky rovnají. K jejich rozdílnosti může dojít v důsledku toho, že tyto dva druhy odchylky jsou definovány různým rozmezím úhlů. Zatímco odchylka dvou vektorů může být úhlem ostrým i tupým, odchylka dvou přímek je definována menším z úhlů, které přímky v rovině vytvářejí, tj. je vždy úhlem ostrým, maximálně pravým. Viz Obr. 21, kde jsou zobrazeny obě možné situace, vlevo je případ, kdy se odchylka vektorů shoduje s odchylkou přímek, vpravo pak případ, kdy se tyto úhly liší, ovšem tak, že dohromady tvoří úhel přímý. Jak



Obrázek 21: Odchylka přímek ψ vs. odchylka směrových vektorů φ

tedy budeme při výpočtu odchylky přímek postupovat? Nabízejí se následující dvě cesty:

(i) Spočítáme odchylku směrových vektorů přímek. Pokud je menší nebo rovna 90°, tj. $\cos\varphi \leq 0$, je rovna odchylce přímek. Pokud vyjde odchylka směrových vektorů větší než 90°, tj. $\cos\varphi \geq 0$, odchylka přímek bude jejím doplňkem do 180°.

(ii) Modifikací vztahu (42) vytvoříme speciální vztah pro výpočet odchylky dvou přímek ψ. Z grafu funkce kosinus na Obr. 20 je zřejmé, že hodnoty $\cos\varphi$ a $\cos(\pi - \varphi)$ se liší pouze znaménkem, jejich absolutní hodnoty se rovnají, přitom pro ostrý úhel φ je $\cos\varphi \geq 0$. Pro výpočet odchylky dvou přímek pomocí jejich směrových vektorů, bez ohledu na jejich orientaci, se tak nabízí jednoduchá modifikace vztahu (42). Stačí, přidat závorky pro absolutní hodnotu. Odchylka ψ dvou přímek p, q se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ je tak dána vztahem

$$\cos\psi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \tag{44}$$

PŘÍKLAD 5.10. *Určete odchylku přímek p, q, pro které platí $p: x = 1 + 3t, y = 1 + t, z = 1 + 2t; t \in R$, $q: x = 2s, y = 3 + 9s, z = -1 + 6s; s \in R$.*

Řešení: Přímky jsou dány *parametricky*, tj. tak, že souřadnice libovolného bodu $X[x, y]$ přímky p jsou vyjádřeny pomocí jednoho jejího známého bodu $A[a_1, a_2]$ a jejího směrového vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ rovnicí ve tvaru

$$X = A + t\vec{u};\ t \in R, \tag{45}$$

po dosazení souřadnic

$$[x, y] = [a_1, a_2] + t(u_1, u_2);\ t \in R, \tag{46}$$

a rozepsání pro každou zvlášť dostáváme *parametrické rovnice přímky p*

$$x = a_1 + tu_1, \tag{47}$$

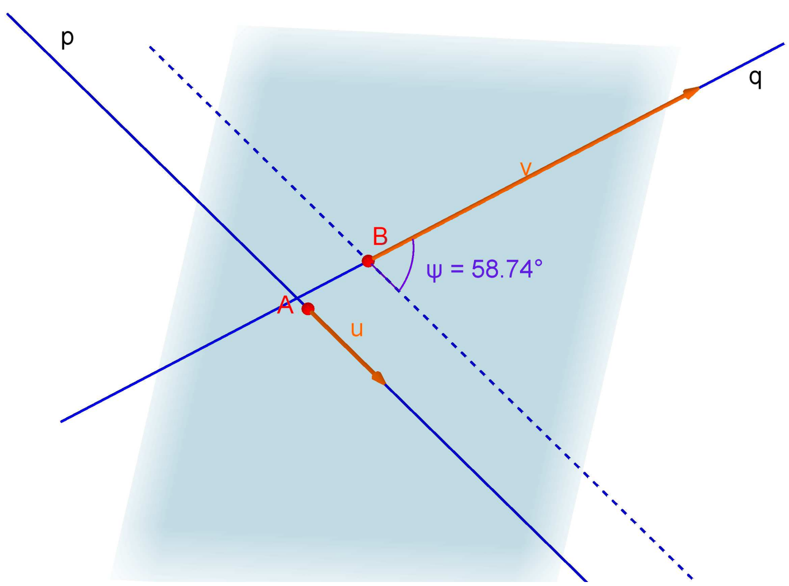
$$y = a_2 + tu_2;\ t \in R. \tag{48}$$

Porovnáním těchto rovnic se zadáním příkladu 5.10 tak získáme souřadnice směrových vektorů daných přímek, pro p je to $\vec{u} = (3, 1, 2)$, pro q potom $\vec{v} = (0, 9, 6)$.

Je otázka, zda k výpočtu odchylky těchto dvou přímek můžeme použít vztah (44), když jsme ho ilustrovali příkladem v rovině a teď se pohybujeme v trojrozměrném prostoru. V dimenzi prostoru problém není, vztah (44) je univerzální. Musíme si akorát ujasnit, jaké vzájemné polohy dvou přímek mohou v prostoru dané dimenze, zde konkrétně dimenze 3, nastat a jak v každé z nich odchylku těchto přímek určujeme.

V případě *různoběžných* přímek, které mají společný bod, je to jasné. Takové přímky leží ve společné rovině, odchylku tak určujeme stejně, jako je naznačeno na Obr. 21.

A jak to bude v případě *mimoběžných* přímek? Ten jednoduše převedeme na předchozí případ různoběžek. Přímky zadané v příkladu 5.10 shodou okolností mimoběžné jsou. Jejich konkrétní situaci můžeme sledovat v tomto GeoGebra appletu: https://www.geogebra.org/m/gqnf6tsf. Viz též Obr. 22. Postupujeme tak, že přím-



Obrázek 22: Odchylka dvou mimoběžných přímek

kou q proložíme rovinu, říkejme jí ρ, která je rovnoběžná s přímkou p, do ní potom přímku p posuneme, třeba tak, aby její obraz procházel bodem B. Tento průmět přímky p do roviny ρ je s přímkou p rovnoběžný a s přímkou q různoběžný, jeho odchylka s přímkou q je tak stejná, jako odchylka původních přímek. I v případě mimoběžných přímek lze proto použít vztah (44). Dosazením do něj dostáváme

$$\cos\psi = \frac{|21|}{\sqrt{14}\sqrt{117}} = \frac{|21|}{3\sqrt{14}\sqrt{13}}.$$

Vidíme, že skalární součin směrových vektorů přímek je kladný, absolutní hodnota v tomto konkrétním případě žádnou změnu znaménka nezpůsobí. Tento případ odpovídá situaci na Obr. 21 vlevo, odchylka přímek je totožná s odchylkou směrových přímek. Velikost úhlu dopočítáme třeba v programu wxMaxima[4]:

```
(% i1)  uhel_rad:float(acos(21/(3*sqrt(14)*sqrt(13))));
                         1.025262482235325                (uhel_ rad)

(% i2)  float(uhel_rad*180/%pi);
                         58.74321312519065                (% o2)
```

Odchylka přímek p, q je $58,74°$.

PŘÍKLAD 5.11. *Určete odchylku přímek k, l, pro které platí $k: x = 2 - t, y = -3 + 3t, z = 1 + t$; $t \in R$, $l: x = 1 + 3s, y = -2s, z = 5$; $s \in R$.*

Řešení: Řešte analogicky s příkladem 5.10. Pro informaci o výsledku a pro zájemce o použití matematického software zde uvádím řešení ve wxMaximě:

```
(% i2)  u:[-1,3,1]$ v:[3,-2,0]$
(% i3)  %psi:acos((u.v)/(sqrt(u.u)*sqrt(v.v))), float;
                         2.422825092052891                (% o3)

(% i4)  float(%psi*180/%pi);
                         138.8176522730258                (% o4)
```

Odchylka přímek k, l je $138,82°$.

Více o vzájemných odchylkách bodových podprostorů, tj. přímek a rovin, viz kapitola 18 na str. 176.

[4] Více o práci s programem wxMaxima viz http://home.pf.jcu.cz/ hasek/VTM1/wxMaxima ve vyuce.pdf

5.4.2 Kolmost vektorů

Souvislost mezi skalárním součinem $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a úhlem φ, přesněji jeho kosinem $\cos\varphi$, ustavená vztahem (42), nám poskytuje důležitý nástroj pro identifikaci vzájemně kolmých vektorů. Graf na Obr. 20 nám připomíná, že pro 90°, tj. $\frac{\pi}{2}$ rad, je hodnota kosinu rovna 0. Dle (42) je pak pro kolmé (nenulové) vektory roven nule i jejich skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Platí tedy, že dva nenulové vektory $\vec{u},\vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\cos\varphi = 0$, tj.

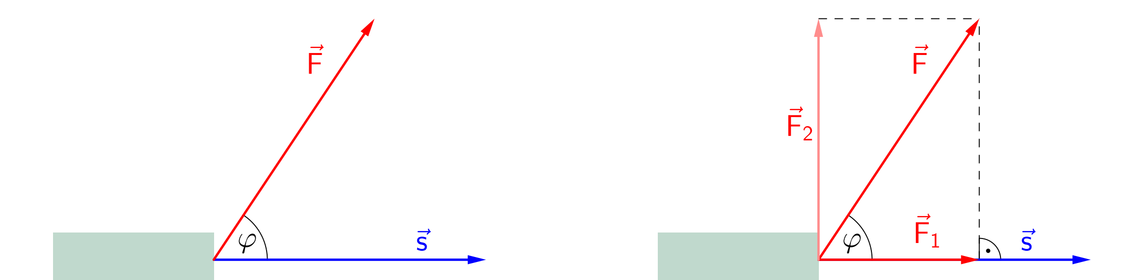
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0. \tag{49}$$

Tuto skutečnost využijeme zanedlouho, konkrétně v kapitole 5.5 na str. 78, k zavedení obecnějšího pojmu *ortogonální* vektory.

PŘÍKLAD 5.12. *Určete hodnotu parametru $c \in R$ tak, aby vektory $\vec{a} = (-2,3,c), \vec{b} = (5,c,-8)$ byly na sebe kolmé.*

5.4.3 Kolmý průmět vektoru do směru jiného vektoru

Ze středoškolské fyziky známe příklad na výpočet mechanické práce konané táhnutím břemene po vodorovné rovině při působení silou, která není rovnoběžná se směrem pohybu, viz Obr. 23, vlevo, kde je pohyb břemene působením síly $\vec{F}$ znázorněn vektorem posunutí $\vec{s}$. Mechanická práce W je v takovém případě konána pouze

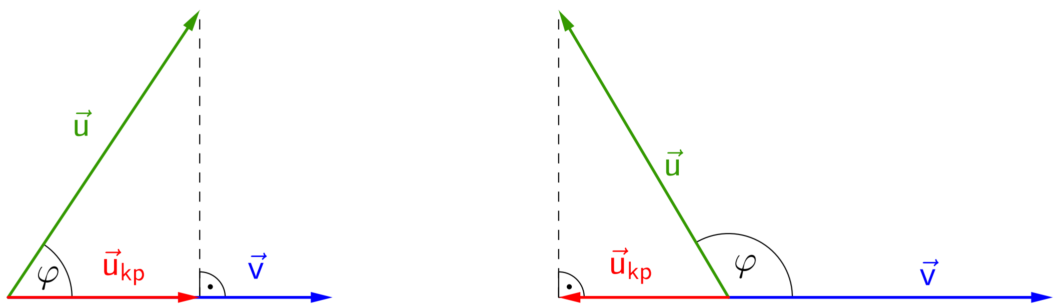


Obrázek 23: $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$

složkou síly $\vec{F}_1$, která je rovnoběžná s vektorem posunutí $\vec{s}$, viz Obr. 23, vpravo. Složka $\vec{F}_2$, kolmá na směr pohybu, nemá pohybový účinek (samozřejmě, nepočítáme s tím, že by se nám působením této složky břemeno při posouvání nadzvedávalo, což se v praxi běžně děje), proto mechanickou práci nekoná.

Velikost práce W konané složkou $\vec{F}_1$ je rovna součinu velikosti této složky $|\vec{F}_1|$ a velikosti $|\vec{s}|$ vektoru posunutí $\vec{s}$, tj. $W = |\vec{F}_1||\vec{s}|$. Z Obr. 23, vpravo, je zřejmé, že velikost $|\vec{F}_1| = |\vec{F}|\cos\varphi$ je rovna *velikosti kolmého průmětu* vektoru $\vec{F}$ do směru vektoru $\vec{s}$, samotný vektor $\vec{F}_1$ potom můžeme nazvat *kolmým průmětem vektoru $\vec{F}$ do směru vektoru $\vec{s}$*. Určení *kolmého průmětu jednoho vektoru do směru druhého* i výpočet *velikosti tohoto průmětu* má široké uplatnění nejenom ve fyzice, ale i v geometrii, viz např. tzv. *Gramm–Schmidtův proces* vytvoření ortonormální báze představený v kapitole 6.2. Proto nyní, inspirováni uvedeným příkladem z fyziky, tyto postupy zobecníme. Použijeme při tom *skalární součin* a operaci *normování vektoru*, tj. nalezení jednotkového vektoru daného směru, viz (36) na str. 63.

Nejprve odvodíme postup výpočtu **velikosti kolmého průmětu** vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{v}$. Na Obr. 24 se jedná o velikost $|\vec{u}_{kp}|$ vektoru $\vec{u}_{kp}$. Vidíme, že podle velikosti φ je orientace $\vec{u}_{kp}$ buď souhlasná s $\vec{v}$, pro $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, nebo opačná, pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$.



Obrázek 24: Kolmý průmět $\vec{u}_{kp}$ vektoru $\vec{u}$ do směru $\vec{v}$, vlevo pro $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, vpravo pro $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

Pro odvození vztahu pro $|\vec{u}_{kp}|$ se dočasně omezíme na situaci na Obr. 24 vlevo, kdy $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Potom platí

$$|\vec{u}_{kp}| = |\vec{u}| \cos \varphi. \tag{50}$$

Porovnáme-li (50) s (43), tj. s vyjádřením skalárního součinu vektorů pomocí jejich norem a odchylky, které je představeno na str. 68, můžeme psát

$$|\vec{u}_{kp}| = |\vec{u}| \cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{51}$$

Obecně může být hodnota výrazu $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ jak kladná, tak i záporná, podle toho zda je úhel φ mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ostrý nebo tupý. Pro velikost $\vec{u}_{kp}$ tak platí buď $|\vec{u}_{kp}| = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$, pro $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, nebo $|\vec{u}_{kp}| = -\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$, pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$. Stručně můžeme zapsat vztah pro výpočet velikosti kolmého průmětu $\vec{u}_{kp}$ vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{v}$ takto

$$|\vec{u}_{kp}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}. \tag{52}$$

Nyní je naším cílem vyjádřit **kolmý průmět vektoru $\vec{u}$ do směru vektoru $\vec{v}$ jako vektor**. Již známe $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \in R$, číslo, jehož absolutní hodnota je rovna velikosti vektoru $\vec{u}_{kp}$ a jehož znaménko odpovídá orientaci $\vec{u}_{kp}$ vzhledem k $\vec{v}$. Cesta k vektoru $\vec{u}_{kp}$ je zřejmá. Protože u vektoru $\vec{v}$ nás zajímá jenom směr, provedeme jeho znormování, tj. nahradíme ho vektorem téhož směru, ale velikosti 1, viz (36). Když tento jednotkový vektor vynásobíme číslem $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$, dostaneme, co hledáme, kolmý průmět $\vec{u}$ do směru $\vec{v}$ jako vektor

$$\vec{u}_{kp} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}. \tag{53}$$

Výsledný výraz v (53) vpravo je možné ještě dále upravit uplatněním vztahu $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2$, viz (35) na str. 62, abychom dostali finální vztah pro kolmý průmět jako vektor

$$\vec{u}_{kp} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^2}\vec{v}. \tag{54}$$

Možná někoho napadá myšlenka, že výraz na pravé straně (54) lze ještě zjednodušit. Pozor, není tomu tak! Tento výraz totiž obsahuje dvě operace, které nelze zaměnit, skalární součin a násobení vektoru reálným číslem. Skalární součin je použit ve výrazech $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a $\vec{v}^2$, které jsou proto reálnými čísly. Násobení reálným číslem je potom aplikováno při vynásobení vektoru $\vec{v}$ číslem $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^2}$. Výskyty symbolu $\vec{v}$ v (54) proto nelze nijak krátit!

PŘÍKLAD 5.13. *Určete kolmý průmět vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}$:*

a) $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = (1,1)$,

b) $\vec{a} = (3,-4)$, $\vec{b} = (4,3)$,

c) $\vec{a} = (2,-3,1)$, $\vec{b} = (1,1,2)$,

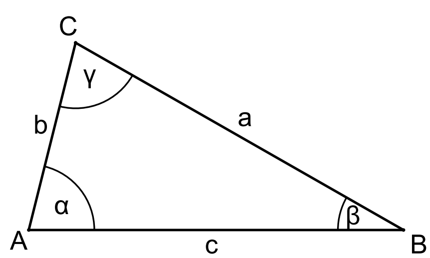
d) $\vec{a} = (7,5,-2)$, $\vec{b} = (1,0,0)$.

5.4.4 Kosinová věta

Získané poznatky o skalárním součinu vektorů a o výpočtu normy vektoru nyní využijeme k důkazu kosinové věty[5].

Věta 17 (Kosinová věta). *Pro libovolný trojúhelník ABC s vnitřními úhly α,β,γ, v daném pořadí protilehlými jeho stranám délek a,b,c (viz Obr. 25), platí*

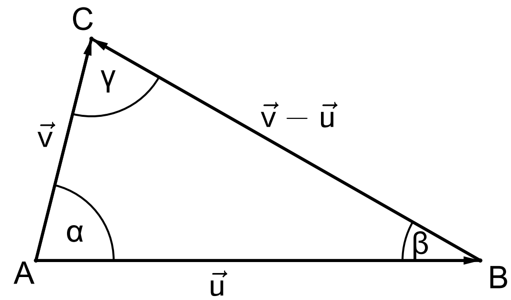
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{55}$$



Obrázek 25: Trojúhelník ABC

[5]Vedle kosinové věty je známa i věta sinová, která říká, že pro libovolný trojúhelník ΔABC s vnitřními úhly α, β, γ a jim protilehlými stranami a, b, c, v daném pořadí, platí: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Důkaz. Uvažujme vektory $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$, jejichž umístěními jsou strany AB a AC trojúhelníku ABC. Strana BC je potom umístěním vektoru $\vec{v} - \vec{u}$ (viz Obr. 26)



Obrázek 26: Užití vektorů k důkazu kosinové věty

a pro normy uvedených vektorů platí $|\vec{u}| = c, |\vec{v}| = b, |\vec{v} - \vec{u}| = a$. Při využití zkušeností z důkazu věty 16 a řešení příkladu 5.8 můžeme psát

$$a^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = (\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u}^2 = |\vec{v}|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2 = b^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + c^2.$$

Nyní stačí za skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{u}$ dosadit podle vztahu (42) pro výpočet odchylky dvou vektorů a dostaneme vztah

$$a^2 = b^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}| \cos \alpha + c^2, \tag{56}$$

který je po dosazení dle rovností $|\vec{v}| = b$ a $|\vec{u}| = c$ již shodný s rovností $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Zbývající rovnosti dokážeme analogicky. □

PŘÍKLAD 5.14. *Ježíšova socha v Bilbau na náměstí Jesusen Bihotza Plaza, viz Obr. 27, je i s podstavcem vysoká* 40 m*, přitom samotná socha má výšku* 10 m*. Z jaké vzdálenosti sochu (tj. postavu Ježíše, bez podstavce) pozorujete, pokud ji vidíte pod zorným úhlem* 15° *(Uvažujte, že terén kolem sochy je vodorovný).*

Obrázek 27: Monumento al Sagrado Corazón de Jesús Bilbao

5.4.5 Pythagorova věta

Jako speciální případ kosinové věty, pro pravoúhlý trojúhelník, můžeme chápat známou Pythagorovu větu.

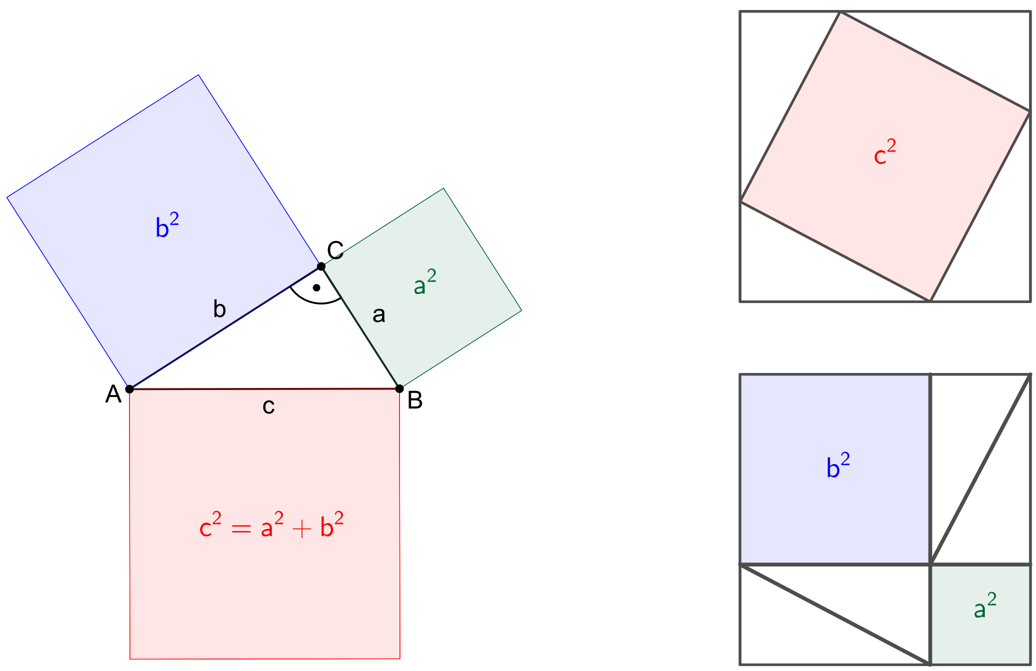
Věta 18 (Pythagorova věta). *V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami. (Pythagoras ze Samu, 570?–510 př. n. l.)*

Důkaz. Uvažujme, že trojúhelník ABC z Obr. 26 má při vrcholu A pravý úhel (tj. $\alpha = 90°$ a $\cos\alpha = 0$). Potom dle (56) platí

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

kde a je přepona a b, c jsou odvěsny tohoto pravoúhlého trojúhelníku. □

Důkazů Pythagorovy věty existuje mnoho, viz https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/. Samostatnou kapitolu mezi nimi tvoří důkazy obrázkem, tzv. *důkazy beze slov*. Jeden takový důkaz Pythagorovy věty je uveden na Obr. 28 a váže se k němu následující příklad.



Obrázek 28: Pythagorova věta (vlevo) a její „důkaz beze slov“ (vpravo)

PŘÍKLAD 5.15. *Vysvětlete podstatu důkazu Pythagorovy věty beze slov na Obr. 28. Potom najděte na internetu nebo v literatuře jiný důkaz Pythagorovy věty, opět grafický, beze slov. Tento důkaz představte a vysvětlete.*

Cvičení: Skalární součin

1. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li: $A = [1, 2]$, $B = [3, 5]$, $C = [1 + 3\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}]$.

2. K vektorům $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ a $\vec{c} = (3, 2, -4)$ určete vektor $\vec{x}$ tak, aby platilo $\vec{a} \cdot \vec{x} = -5$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -11$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 20$.

3. Vypočtěte úhel mezi úsečkami AB a AC; $A = [1, 2, 3]$, $B = [-1, 0, 1]$, $C = [1, -2, 5]$.

4. Znormujte vektor $\vec{v} = (-4, -3)$.

5. Jsou dány vektory $\vec{v} = (1, -1)$, $\vec{w} = (3, 2)$. Najděte kolmý průmět $\vec{u}$ vektoru $\vec{w}$ do směru $\vec{v}$.

4. Kvádr $ABCDEFGH$ má délky hran $|AB| = 4$, $|BC| = 3$ a $|AE| = 5$. Vypočtěte úhel stěnové úhlopříčky DE a tělesové úhlopříčky DF.

Příklady pro dobrovolné řešení

7. Ze čtverce o straně a je sestrojen plášť pravidelného trojbokého hranolu. Vypočtěte úhel φ sousedních stran lomené čáry, kterou na plášti hranolu vytváří úhlopříčka daného čtverce.

8. Určete vnitřní úhly v trojúhelníku KLM; $K = [5\sqrt{3}, 5]$, $L = [-\sqrt{3}, -1]$, $M = [0, 0]$.

9. K jednotkovému vektoru $\vec{a} = \left(\frac{-1}{2}, a_2\right)$, $a_2 > 0$ najděte jednotkový vektor $\vec{b}$ s ním ortogonální.

10. Který z následujících výrazů definuje skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{w}$ vektorů $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$:

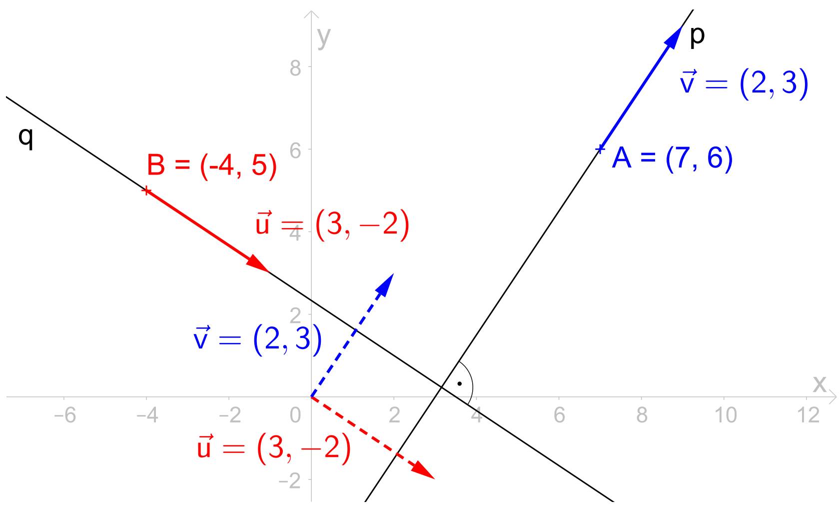
a) $2v_1w_1 + 3v_2w_2$, **b)** $v_1w_2 + v_2w_1$, **c)** $v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2$,
d) $2v_1w_1 + (v_1 - v_2)(w_1 - w_2)$.

5.5 Ortogonální a ortonormální vektory

V kapitole 5.4.2 na str. 72 jsme se zabývali otázkou kolmosti dvou nenulových vektorů. Ukázali jsme si, jak ze vztahu (42) pro výpočet odchylky dvou vektorů vyplývá, že nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Tato skutečnost nám nyní poslouží k zavedení pojmu *ortogonálních vektorů* a využijeme ji při popisu vektorových a bodových (pod)prostorů i při zkoumání jejich vlastností a vzájemných poloh.

PŘÍKLAD 5.16. *Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $A = [7, 6]$ kolmo na přímku $q:\ x = -4 + 3t, y = 5 - 2t;\ t \in R$.*

Řešení: Z parametrických rovnic přímky q vyplývá, že tato přímka je určena bodem $B = [-4, 5]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (3, -2)$ (viz Obr. 29). Má-li být přímka p



Obrázek 29: Přímka p jdoucí bodem A kolmo k přímce q

kolmá k přímce q, je zřejmé, že každý její směrový vektor $\vec{v}$ je kolmý k vektoru $\vec{u}$. K řešení úlohy proto postačuje najít jeden nenulový vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, který splňuje rovnost $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Jeho souřadnice jsou tedy řešením rovnice

$$3v_1 - 2v_2 = 0.$$

Z nekonečně mnoha takových řešení vybereme jedno konkrétní, nabízí se např. $(v_1, v_2) = (2, 3)$. Hledaná přímka p má potom parametrické rovnice $p:\ x = 7 + 2t, y = 6 + 3t;\ t \in R$.

PŘÍKLAD 5.17. *Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $P[-3, 2]$ kolmo na přímku $\overleftrightarrow{AB}$; $A[-1, -2]$, $B[2, 3]$.*

Ortogonální a ortonormální vektory

Pojem *kolmé vektory* má v geometrických vektorových prostorech postižitelných naší zkušeností a představivostí, tj. v prostorech dimenze 2 a 3, jasnou vizuální interpretaci prostřednictvím kolmosti orientovaných úseček, které jsou jejich umístěními.

Pojem *ortogonální vektory* je jeho zobecněním, jak z pohledu dimenze příslušného vektorového prostoru, tak i z pohledu počtu zúčastněných vektorů a jejich velikostí. Pojmem *ortonormální vektory* pak označujeme vektory ortogonální, které jsou navíc jednotkové. Vše je uvedeno v následujících definicích 16 a 17. Nejprve pojmy definujeme pro dvojice vektorů, potom pro skupiny více vektorů.

Definice 16 (Dvojice ortogonálních a ortonormálních vektorů). *Dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{57}$$

Jsou-li navíc jednotkové, tj. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$, nazýváme je ortonormální.

Poznámka. Uvažujeme-li Eukleidovský skalární součin, je vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jednotkový právě tehdy, když je splněna podmínka

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1,$$

kterou lze po umocnění obou stran na druhou vyjádřit ve tvaru

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

O vektorech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tak můžeme říci, že jsou *ortonormální* právě tehdy, když současně platí

$$\begin{aligned} u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1, \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jako ortogonální či ortonormální můžeme označit i větší skupinu vektorů, jak uvádí následující definice.

Definice 17 (Ortogonální a ortonormální vektory). *Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \in V_n$ jsou ortogonální právě tehdy, když*

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0,$$

pro všechna $i, j = 1, 2, ..., k;\ i \neq j$. Jsou-li navíc všechny vektory jednotkové, tj.

$$|\vec{u}_i| = 1,$$

pro všechna $i = 1, 2, ..., k$, nazýváme je ortonormální.

Poznámky.

1. Ortogonální vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme takto
$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Ortogonalita je zobecněním kolmosti. Protože kromě termínu „ortogonální vektory“ používáme též označení „kolmé vektory“, je dobré mít na paměti, že definice ortogonálních vektorů připouští i nulový vektor a vyplývá z ní, že nulový vektor je ortogonální ke všem vektorům. Hovoříme-li o kolmých vektorech, uvažujeme vesměs vektory nenulové.

3. Pojmem *ortogonální vektory* označujeme skupinu dvou, ale i více vektorů, které splňují definici 17. Tj. skupinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ nazveme ortogonální, když pro každé dva *různé* vektory z nich platí $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$.

4. *Ortonormální* jsou vektory, které jsou *ortogonální* a navíc všechny *jednotkové*, tj. platí:
$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_i^j$$
pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

6 Ortonormální báze

Bází vektorového (pod)prostoru je jakákoliv množina jeho generátorů, která je lineárně nezávislá, viz definice 9 na str. 44. Výlučné postavení mezi všemi bázemi mají díky svým vlastnostem tzv. *ortonormální báze*, tj. báze, jejichž vektory jsou *ortonormální* (viz def. 17).

Definice 18 (Ortogonální a ortonormální báze). *Bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ vektorového prostoru V se skalárním součinem nazveme ortogonální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortogonální. Bázi B nazveme ortonormální bází, jestliže jsou její vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ ortonormální.*

Poznámka. Báze B je tedy ortonormální, jestliže
$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_i^j$$
pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde δ_i^j je Kroneckerovo delta ($\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$).

PŘÍKLAD 6.1. *Rozhodněte, zda se jedná o ortogonální či ortonormální báze:*

a) $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$,

b) $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

c) $B_3 = \{(2,0,0),(0,-1,0),(0,0,4)\}$.

Ortogonálnost vektorů zaručuje jejich nezávislost, jak ukazuje následující věta.

Věta 19. *Jsou-li nenulové vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, $n \in N$, ortogonální, jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že nenulové ortogonální vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ jsou lineárně závislé. Aspoň jeden koeficient k_i lineární kombinace

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots k_n\vec{u}_n = \vec{o} \tag{58}$$

tak musí být různý od nuly. Nechť je to třeba k_1. Pokud nyní skalárně vynásobíme obě strany rovnosti (58) vektorem $\vec{u}_1$, dostaneme rovnost

$$k_1\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \ldots k_n\vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 = \vec{o} \cdot \vec{u}_1, \tag{59}$$

na jejíž levé straně jsou všechny členy kromě prvního díky předpokládané ortogonalitě vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ rovny nule. Rovnost (59) se tak redukuje na tvar

$$k_1\vec{u}_1^2 = 0, \tag{60}$$

kde $\vec{u}_1^2 \neq 0$ (vektory $\vec{u}_i$ jsou dle předokladu nenulové). Potom ale musí být $k_1 = 0$, což je ale ve sporu s předpokladem, že $k_1 \neq 0$. Tím je pravdivost věty dokázána. □

6.1 Výhody ortonormální báze

Uvedeme si dvě výhody, které nám oproti „obyčejné“ bázi přinese použití ortonormální báze.

6.1.1 Výpočet skalárního součinu

Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ určeny souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$, je jakýkoliv skalární součin těchto vektorů dán vztahem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n,$$

bez ohledu na jeho konkrétní definici.

Tuto užitečnou skutečnost snadno dokážeme. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů báze B

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n, \quad \vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n$$

a skalárně je spolu vynásobíme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \cdots + u_n\vec{b}_n) \cdot (v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_n\vec{b}_n). \tag{61}$$

Pravou stranu (61) roznásobíme užitím vlastností 2 a 3 z definice skalárního součinu (viz def. 13). Dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1\vec{b}_1^2 + u_1v_2\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + u_1v_n\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + \\ + u_2v_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + u_2v_2\vec{b}_2^2 + \cdots + u_2v_n\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \\ + \cdots + \\ + u_nv_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n + u_nv_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_n + \cdots + u_nv_n\vec{b}_n^2, \end{aligned} \tag{62}$$

kde ovšem, díky ortonormálnosti báze B, pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ pokud $i \neq j$, jinak $\vec{b}_i^2 = 1$. Rovnost (62) je tak pro každou ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ ekvivalentní rovnosti

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n, \tag{63}$$

bez ohledu na to, jak je definován skalární součin „·“.

Poznali jsme, že pokud používáme ortonormální bázi (a my tak činíme, protože neníli řečeno jinak, pracujeme se souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi), nemusíme se starat o definici skalárního součinu a počítáme ho tak, jak jsme zvyklí ze střední školy.

PŘÍKLAD 6.2. *Proveďte výpočet (61) a úpravu naznačenou v (62) pro ortonormální bázi $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Nedosazujte konkrétní hodnoty, pracujte v „symbolickém“ režimu.*

6.1.2 Určení souřadnic vektoru vzhledem k ortonormální bázi

Uvažujme vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, jehož souřadnice $u_1, u_2, ..., u_n$ jsou dány vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$, tj.

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + ... + u_n\vec{b}_n. \tag{64}$$

Potom pro i–tou souřadnici u_i vektoru $\vec{u}$ platí

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i, \tag{65}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah (65) nám umožňuje rychlý výpočet jednotlivých souřadnic vektoru. Podstatu jeho důkazu si ukážeme na případu $i = 1$, zobecnění pro $i = 1, 2, \ldots, n$ bude zřejmé. Jestliže vynásobíme obě strany (64) vektorem $\vec{b}_1$, dostaneme rovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = u_1\vec{b}_1^2 + u_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + ... + u_n\vec{b}_n \cdot \vec{b}_1, \tag{66}$$

která je díky ortonormálnosti vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ ekvivalentní s rovností

$$u_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_1.$$

Pro zobecnění stačí zaměnit 1 za i a uvažovat $i = 1, 2, \dots, n$.

PŘÍKLAD 6.3. *Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (1,1,1)$ vzhledem k ortonormální bázi $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $\vec{u}_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$,*

Řešení: Označme v_i^B i–tou souřadnici vektoru $\vec{v}$ vzhledem k B. Potom $v_1^B = (1,1,1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $v_2^B = (1,1,1) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $v_3^B = (1,1,1) \cdot (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}) = \frac{4}{\sqrt{30}}$.

6.2 Gram–Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 8 nám zaručuje, že každý konečně generovaný vektorový prostor má alespoň jednu konečnou bázi. Poté, co jsme se seznámili s výhodami ortonormální báze, je zřejmé, že bychom uvítali stejnou záruku i pro existenci ortonormální báze. A skutečně, taková záruka existuje, pro vektorové prostory se skalárním součinem nám ji dává následující věta.

Věta 20 (Existence ortonormální báze). *Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor se skalárním součinem má aspoň jednu ortonormální bázi.*

Důkaz. Existence konečné báze je zaručena větou 8. K důkazu věty 20 tak postačí ukázat, že z každé konečné báze uvažovaného vektorového (pod)prostoru můžeme vytvořit bázi ortonormální. To skutečně možné je. Garantuje nám to postup známý jako *Gram–Schmidtův ortogonalizační proces*. Místo důkazu věty 20 si podrobně rozebereme tento postup pro případ vektorových prostorů dimenze dva a tři. Zobecnění postupu pro případ vektorového prostoru dimenze n, které je podstatou důkazu věty, je potom zřejmé. $\square$

Gram–Schmidtův ortogonalizační proces se týká vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru, využíváme ho však především k určování ortonormálních bází vektorových podprostorů. V případě vektorových prostorů můžeme vždy „sáhnout“ po kanonické bázi (tj. například pro R^2 je to $\{(1,0),(0,1)\}$).

6.2.1 Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 2

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (36) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{a}_1$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1. \tag{67}$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{a}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + k\vec{b}_1 \tag{68}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + k\vec{b}_1^2 = 0. \tag{69}$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

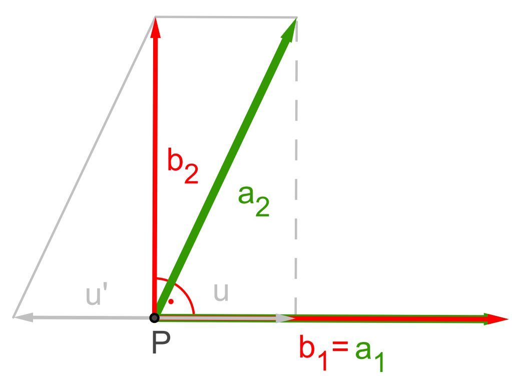
$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}, \tag{70}$$

kterou dosadíme do vztahu (68) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{71}$$

Rovnostmi (67) a (71) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{72}$$



Obrázek 30: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 2 - vytvoření ortogonální báze

Poznámka. Vztah (70) pro výpočet vektoru $\vec{b}_2$ kolmého k vektoru $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ můžeme odvodit „ryze geometricky“, bez nutnosti řešit rovnici (69) pro neznámou k. Použijeme k tomu obrázek 30 (nebo příslušný aplet vytvořený v GeoGebře) a poznatky o kolmém průmětu jednoho vektoru do směru druhého, které jsme shromáždili v kap. 5.4.3. Vidíme, že vektor $\vec{b}_2$, který má být kolmý k $\vec{b}_1$, dostaneme jako součet vektoru $\vec{a}_2$ s vektorem $\vec{u}'$, který je vektorem opačným k vektoru $\vec{u}$, jehož velikost je rovna kolmému průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$ (viz kap. 5.4.3, str. 72). Pro velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{a}_2$ do směru vektoru $\vec{b}_1$ platí

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1|}{|\vec{b}_1|}. \tag{73}$$

Přitom výraz $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \geq 0$ pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ a $\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 < 0$ pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, kde φ je úhel mezi vektory $\vec{b}_1$ (tj. také $\vec{a}_1$) a $\vec{a}_2$. Pravdivost tohoto vztahu pro $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ snadno prokážeme rozepsáním jeho pravé strany podle vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů. Dostaneme vztah

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{|\vec{a}_2||\vec{b}_1| \cos\varphi}{|\vec{b}_1|} = |\vec{a}_2| \cos\varphi,$$

který odpovídá definici hodnoty funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku ($|\vec{a}_2|$ je délka přepony, $|\vec{u}|$ je délka odvěsny přilehlé k úhlu φ). Pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ stačí uvažovat úhel $\pi - \varphi$.

Známe tedy velikost vektoru $\vec{u}$ (viz (73)) a víme, že má směr vektoru $\vec{b}_1$ (nebo opačný, pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi \rangle$). Stačí tedy vynásobit číslem $\dfrac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}$ jednotkový vektor směru $\vec{b}_1$ a dostaneme vektor $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2} \vec{b}_1$$

Podle obrázku 30 je potom vhodným vektorem $\vec{b}_2$ součet $\vec{a}_2 + \vec{u}'$, kde $\vec{u}' = -\vec{u}$, tj.

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{u}' = \vec{a}_2 - \vec{u} = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1^2} \vec{b}_1. \tag{74}$$

Vztah (74) je totožný se vztahem (70). Geometrickou úvahou jsme tak dostali stejný výsledek jako výpočtem. (*konec poznámky*)

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} \quad . \tag{75}$$

PŘÍKLAD 6.4. *Určete ortonormální bázi podprostoru $W \subseteq\subseteq R^3$, který je generován vektory $\vec{v}_1 = (1,1,2)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$.*

Řešení:

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{v}_1 = (1,1,2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1,1,2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1,1,2)$ a $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + k\vec{b}_1 = (0,1,-1) + k(1,1,2) \tag{76}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1,1,2)\cdot(0,1,-1) + k(1,1,2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1,1,2)\cdot(0,1,-1)}{(1,1,2)^2} = \frac{1}{6},$$

kterou dosadíme do vztahu (76) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (0,1,-1) + \frac{1}{6}(1,1,2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{-2}{3}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 6, abychom se zbavili zlomků. Tuto úpravu oceníme zanedlouho při normování vektoru. Hledanou ortogonální bázi podprostoru W tak tvoří vektory

$$\vec{b}_1 = (1,1,2), \quad \vec{b}_2 = (1,7,-4). \tag{77}$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{-4}{\sqrt{66}}\right). \tag{78}$$

Řešení v programu wxMaxima:

(%i1) `load(eigen);`

(%o1) $C:/PROGRA\,2/MAXIMA\,1.0/share/maxima/5.26.0/share/matrix/eigen.mac$

```
(%i2) b:gramschmidt({[1,1,2],[0,1,-1]});
```

(%o2) $[[0,1,-1],[1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}]]$

```
(%i3) e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);
```

(%o3) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

(%o4) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{11}}]$

Poznámka. Vidíme, že algoritmus, který se skrývá za příkazem „gramschmidt", nezpracovává vektory v pořadí, v jakém je zadáme, ale volí si optimální pořadí sám. Stejně můžeme postupovat i my.

6.2.2 Vytvoření ortonormální báze vektorového prostoru dimenze 3

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Předpokládejme, že známe bázi $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ vektorového podprostoru $W \subseteq\subseteq V_n$ (tj. $W = [\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3]$) a chceme vytvořit jeho ortonormální bázi $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Budeme postupovat tak, že nejprve vytvoříme ortogonální bázi $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ podprostoru W. Potom vektory této báze pomocí formule (36) znormujeme. Výsledkem je požadovaná ortonormální báze $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2\}$.

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

Postup vytvoření prvních dvou vektorů $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ ortogonální báze je identický s výše popsaným případem podprostoru dimenze 2. Platí tedy

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1\cdot\vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1. \tag{79}$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ a $\vec{a}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 \tag{80}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1\cdot\vec{b}_3 = \vec{b}_1\cdot\vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 + n\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 = \vec{b}_1\cdot\vec{a}_3 + m\vec{b}_1^2 = 0, \tag{81}$$

$$\vec{b}_2\cdot\vec{b}_3 = \vec{b}_2\cdot\vec{a}_3 + m\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 + n\vec{b}_2^2 = \vec{b}_2\cdot\vec{a}_3 + n\vec{b}_2^2 = 0. \tag{82}$$

Z těchto podmínek (81), (6.2.1) kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = -\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}, \quad n = -\frac{\vec{b}_2\cdot\vec{a}_3}{\vec{b}_2^2} \tag{83}$$

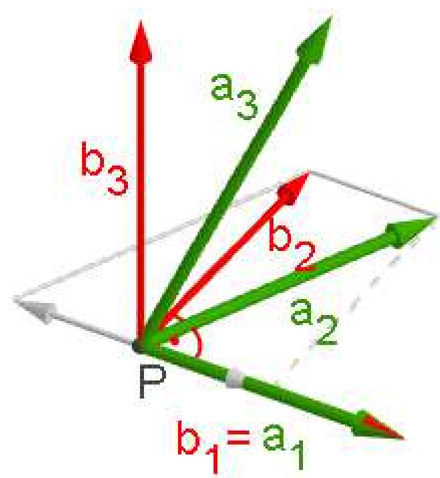
které dosadíme do vztahu (80) pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{84}$$

Rovnostmi (79) a (84) jsou určeny vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2^2}\vec{b}_2. \tag{85}$$

Poznámka. I v případě nalezení třetího vektoru ortogonální báze můžeme uplatnit „ryze geometrický“ přístup. Tentokrát bychom použili opačné vektory ke dvěma kolmým průmětům vektoru $\vec{a}_3$ do směrů vektorů $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$, které bychom složili s vektorem $\vec{a}_3$, abychom dostali vektor $\vec{b}_3$ kolmý na oba vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$. Detailně se zde tímto postupem nebudeme zabývat.



Obrázek 31: Gram–Schmidtův ortogonalizační proces pro podprostor dimenze 3 - vytvoření ortogonální báze

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru W*

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}. \tag{86}$$

PŘÍKLAD 6.5. *Určete ortonormální bázi vektorového prostoru* $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$.

Řešení:

I. *Vytvoření ortogonální báze podprostoru W*

První vektor $\vec{b}_1$ ortogonální báze ztotožníme s prvním vektorem $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$ z dané báze

$$\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2).$$

Druhý vektor $\vec{b}_2$ potom vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$ a $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$

$$\vec{b}_2 = \vec{u}_2 + k\vec{b}_1 = (1, 0, 1, 1) + k(1, 1, -1, -2) \tag{87}$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = (1, 1, -1, -2) \cdot (1, 0, 1, 1) + k(1, 1, -1, -2)^2 = 0.$$

Z této podmínky kolmosti vektorů ortogonální báze vyjádříme hodnotu koeficientu

$$k = -\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{b}_1^2} = -\frac{(1, 1, -1, -2) \cdot (1, 0, 1, 1)}{(1, 1, -1, -2)^2} = \frac{2}{7},$$

kterou dosadíme do vztahu (87) pro vektor $\vec{b}_2$

$$\vec{b}_2 = (1, 0, 1, 1) + \frac{2}{7}(1, 1, -1, -2) = \left(\frac{9}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Protože v případě ortogonální báze jde jenom o směry vektorů, nikoliv o jejich velikosti, můžeme výsledný vektor násobit 7, abychom se zbavili zlomků. Dostaneme

$$\vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3).$$

Třetí vektor $\vec{b}_3$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2), \vec{b}_2 = (9, 2, 5, 3)$ a $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$

$$\vec{b}_3 = \vec{u}_3 + m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2 = (0, 1, 1, 0) + m(1, 1, -1, -2) + n(9, 2, 5, 3)$$

tak, aby

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = (1, 1, -1, -2) \cdot (0, 1, 1, 0) + m(1, 1, -1, -2)^2 + n(1, 1, -1, -2) \cdot (9, 2, 5, 3) = 7m = 0,$$
$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = (9, 2, 5, 3) \cdot (0, 1, 1, 0) + m(9, 2, 5, 3) \cdot (1, 1, -1, -2) + n(9, 2, 5, 3)^2 = 7 + 119n = 0.$$

Z těchto podmínek kolmosti vektorů ortogonální báze (všimněte si, že v tomto případě jsou vektory $\vec{b}_1 = (1, 1, -1, -2)$ a $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$ již na sebe kolmé) vyjádříme hodnoty koeficientů

$$m = 0, \quad n = -\frac{1}{17}$$

které dosadíme do vztahu pro vektor $\vec{b}_3$

$$\vec{b}_3 = (0, 1, 1, 0) + 0(1, 1, -1, -2) - \frac{1}{17}(9, 2, 5, 3) = \left(-\frac{9}{17}, \frac{15}{17}, \frac{12}{17}, -\frac{3}{17}\right).$$

Vektor $\vec{b}_3$ násobíme 17, abychom se zbavili zlomků. Potom vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ortogonální báze podprostoru W jsou

$$\vec{b}_1 = (1,1,-1,-2), \quad \vec{b}_2 = (9,2,5,3), \quad \vec{b}_3 = (-9,15,12,-3)\,.$$

II. *Vytvoření ortonormální báze podprostoru* W

Nyní vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ znormujeme a tím dostaneme požadovanou ortonormální bázi podprostoru W

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right),\\
\vec{e}_2 &= \left(\frac{9}{\sqrt{119}}, \frac{2}{\sqrt{119}}, \frac{5}{\sqrt{119}}, \frac{3}{\sqrt{119}}\right),\\
\vec{e}_3 &= \left(-\frac{9}{\sqrt{459}}, \frac{15}{\sqrt{459}}, \frac{12}{\sqrt{459}}, -\frac{3}{\sqrt{459}}\right).
\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima (kód navazuje na řešení předcházejícího příkladu):

```
(%i5) kill(b);
```

(%o5) *done*

```
(%i6) b:gramschmidt({[1,1,-1,-2],[1,0,1,1],[0,1,1,0]});
```

(%o6) $[[0,1,1,0],[1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1],[\frac{3^2}{5},\frac{3}{5},-\frac{3}{5},-\frac{2\,3}{5}]]$

```
(%i7) e[1]:unitvector(b[1]); e[2]:unitvector(b[2]);
      e[3]:unitvector(b[3]);
```

(%o7) $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]$

(%o8) $[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}]$

(%o9) $[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}]$

Poznámka. Příkaz „gramschmidt“ opět volil jiné pořadí zpracování vektorů a našel jinou ortogonální bázi, s „lépe vypadajícími“ vektory.

Kromě volby vhodného pořadí vektorů si ruční výpočet vektorů ortonormální báze daného podprostoru můžeme v řadě případů podstatně zjednodušit také tím, že daný systém generátorů nahradíme vektory, které jsme získali eliminací příslušné matice. V případě příkladu 6.5 jsme tak mohli místo původních vektorů $(1,1,-1,-2)$,

$(1,0,1,1)$, $(0,1,1,0)$ počítat s vektory $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,-1)$, $(0,0,1,1)$, které generují stejný podprostor, protože

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vyzkoušejte!

6.3 Cvičení: Ortonormální báze

1. Určete ortonormální báze následujících vektorových podprostorů $\mathbb{R}^3$:

a) Rovina generovaná vektory $(0,2,1)$, $(1,-2,-1)$.

b) Rovina definovaná rovnicí $2x - y + 3z = 0$.

c) Množina všech vektorů kolmých na vektor $(1,-1,-2)$.

2. Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = [\{(1,1,2),(1,0,1)\}] \subseteq\subseteq V_3$.

Příklady pro dobrovolné řešení

3. Určete ortonormální bázi vektorového (pod)prostoru W :
a) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}]$; $\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (0,1,1)$,

b) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (1,0,1)$,

c) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,2)$, $\vec{v}_3 = (2,-2,3)$,

d) $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1,1,2,1), \vec{u}_2 = (0,1,1,1), \vec{u}_3 = (3,1,0,1)$.

4. Určete ortonormální bázi vektorového podprostoru $V \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4$, který obsahuje všechny vektory kolmé na vektor $\vec{u} = (1,2,-1,-3)$.

6.4 Ortogonální matice

Z geometrie víme, že afinní transformace bodového prostoru A_n daná rovnicí

$$X = AX' + B,$$

$X, X' \in A_n$, je shodností právě tehdy, když pro matici A platí vztah

$$A^T A = I, \tag{88}$$

kde I je jednotková matice řádu n[1]. Matice A je čtvercová a uvedený vztah je možné rozepsat rovnicemi pro její prvky. Například pro afinní transformaci roviny, jejíž matice má tvar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

je podmínka (88) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{89}$$

V případě afinní transformace prostoru A_n s maticí

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je podmínka (88) ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0,\ \ i \neq j,\ \ i, j = 1, 2, \dots n, \tag{90}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1,\ \ i = 1, 2, \dots n. \tag{91}$$

Porovnáme-li vztahy (90), (91) s definicí ortonormálních vektorů (viz def. 17), vidíme, že řádkové vektory matice A shodnosti v prostoru A_n jsou ortonormální (platí to i pro sloupcové vektory matice A). Protože ortogonální vektory jsou vždy nezávislé (viz věta 19), můžeme podle definice 18 dokonce říci, že řádkové (sloupcové) vektory matice A tvoří ortonormální bázi. Takovouto matici nazýváme „ortogonální matice“ (někdy též „ortonormální matice“[2]).

[1] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 55
[2] viz např. Sekanina, M. a kol.: Geometrie II, SPN, Praha 1988, str. 57

Definice 19 (Ortogonální matice). *Ortogonální maticí rozumíme čtvercovou matici A, pro kterou platí:*

$$A^T \cdot A = I.$$

Poznámky.

1. Po ortogonální matici A zřejmě platí $A^T = A^{-1}$. Potom ale též

$$A \cdot A^T = I.$$

2. V *ortogonální matici* je skalární součin dvou různých řádků roven nule, skalární součin stejných řádků je roven jedné. Symbolicky zapsáno:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_i^j, \ \ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

3. *Determinant ortogonální matice.* Pro A platí

$$A^T \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad \det\left(A^T \cdot A\right) = \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = \left(\det A\right)^2 = \det I = 1.$$

Potom

$$|\det A| = 1,$$

jinak zapsáno

$$\det A = \pm 1.$$

PŘÍKLAD 6.6. *Transformace, pro které je $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinity. Vymyslete čtvercovou matici druhého řádu, jejíž determinant je 1, ale matice není ortogonální. Ukážete tak, že ne každá ekviafinita má matici A ortogonální, tj. že ne každá ekviafinita je shodností.*

PŘÍKLAD 6.7. *Ukažte, že*

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

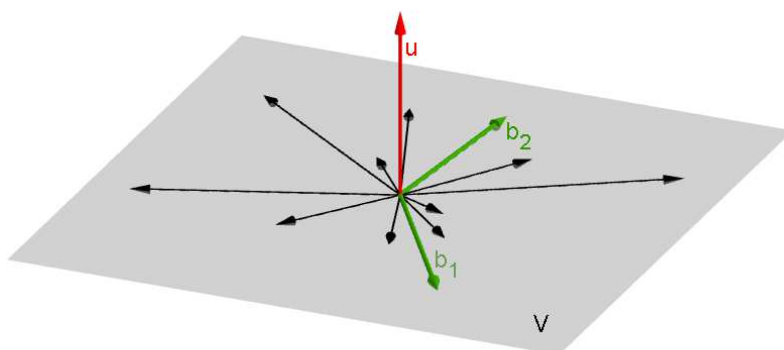
matice otočení kolem počátku soustavy souřadné o úhel α, je ortogonální matice. Spočítejte její determinant.

7 Kolmost vektorových podprostorů

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Od kolmosti dvou vektorů nyní přejdeme ke kolmosti dvou vektorových podprostorů. Budeme se zabývat otázkou, kdy jsou dva vektorové podprostory na sebe kolmé a jak to poznáme. Začneme tím, že stanovíme, jak určit kolmost jednoho vektoru k podprostoru.

7.1 Kolmost vektoru k podprostoru



Obrázek 32: Vektor $\vec{u}$ kolmý k podprostoru $V = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$

Definice 20 (Kolmost vektoru k podprostoru)**.** *O vektoru $\vec{u}$ řekneme, že je kolmý k vektorovému podprostoru V_k, právě když je kolmý ke každému vektoru z tohoto podprostoru. Značíme*

$$\vec{u} \perp V_k.$$

Uvedená definice nám nedává přímý návod, jak o kolmosti vektoru k vektorovém podprostoru rozhodnout. Vektorů je ve vektorovém podprostoru nekonečně mnoho a ověření kolmosti daného vektoru ke každému z nich je proto nereálné. Naštěstí však víme, že každý vektor z vektorového podprostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů jeho báze, a báze už má konečný počet vektorů (viz Obr. 32).

Věta 21 (Kritérium kolmosti vektoru k podprostoru)**.** *Vektor $\vec{u} \in V_n$ je kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k\}$.*

Důkaz. Podle definice 20 je vektor $\vec{u} \in V_n$ kolmý k podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$ právě tehdy, když je kolmý ke každému vektoru $\vec{v} \in V_k$, tj. když pro každý vektor $\vec{v} \in V_k$ platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \tag{92}$$

Protože $V_k = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k]$, můžeme každý vektor $\vec{v} \in V_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{b}_k$. Po dosazení do (92) a roznásobení tak dostáváme rovnost

$$v_1\vec{u} \cdot \vec{b}_1 + v_2\vec{u} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + v_k\vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0, \tag{93}$$

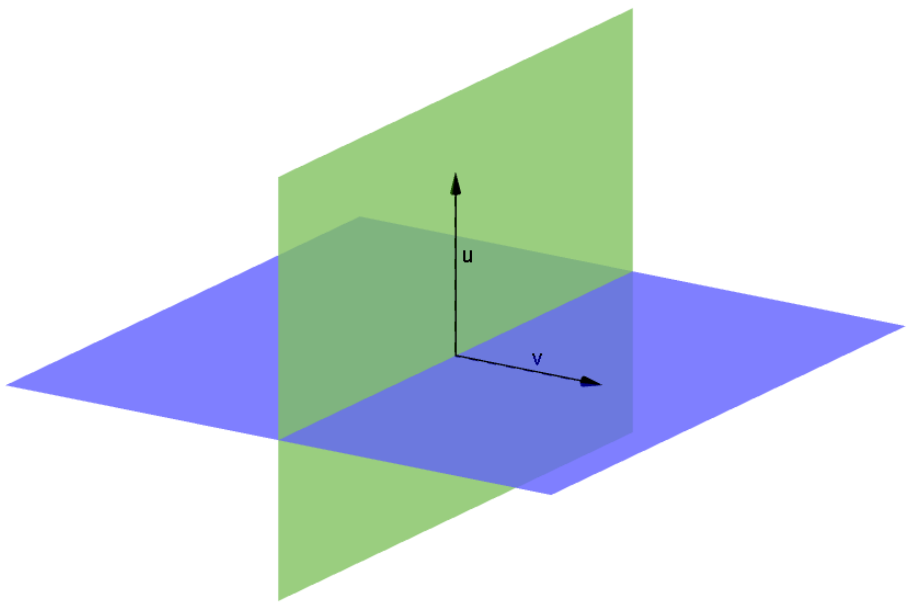
která je určitě splněna, jestliže je vektor $\vec{u}$ kolmý ke všem vektorům báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k$, tj., jestliže

$$\vec{u} \cdot \vec{b}_1 = \vec{u} \cdot \vec{b}_2 = \cdots = \vec{u} \cdot \vec{b}_k = 0. \tag{94}$$

□

7.2 Kolmost dvou podprostorů

Kolmost vektoru k vektorovému podprostoru využijeme v definici a při určení kolmosti dvou vektorových podprostorů.



Obrázek 33: Dva kolmé podprostory

Definice 21 (Kolmost vektorových podprostorů). *Dva vektorové podprostory $V_r, V_s \subseteq\subseteq V_n$ jsou na sebe kolmé, jestliže v každém z nich existuje vektor, který je kolmý k druhému podprostoru. Značíme*

$$V_r \perp V_s$$

Při rozhodování o kolmosti dvou konkrétních vektorových podprostorů daných svými bázemi budeme využívat „nutnou a postačující podmínku kolmosti dvou podprostorů“, která je formulována v následující větě 22. Než ji uvedeme, objasníme si její smysl (a tím i myšlenku jejího důkazu, který přenecháme čtenáři) na příkladu dvou podprostorů dimenzí 2 a 3.

PŘÍKLAD 7.1. *Rozhodněte, za jakých podmínek jsou na sebe kolmé podprostory* $V_2 = [\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}], V_3 = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}]$

Řešení: Dle definice 21 jsou dané dva vektorové podprostory V_2, V_3 na sebe kolmé, jestliže v prostoru V_2 existuje nějaký vektor $\vec{x}$, který je kolmý k podprostoru V_3, a zároveň v podprostoru V_3 existuje vektor $\vec{y}$ kolmý k prostoru V_2. K popsání těchto skutečností využijeme tvrzení věty 21 („vektor je kolmý k podprostoru, jestliže je kolmý ke všem vektorům jeho báze“).

1. Existuje vektor $\vec{x} \in V_2$, který je kolmý k V_3.

Jestliže vektor $\vec{x}$ náleží podprostoru V_2, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Dle věty 21 je vektor $\vec{x}$ kolmý k podprostoru V_3, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{b}_1 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 = 0, \\ \vec{x} \cdot \vec{b}_2 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0, \\ \vec{x} \cdot \vec{b}_3 &= x_1\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 + x_2\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Homogenní soustava (95) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$A_1 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{96}$$

má hodnost menší než 2.

2. Existuje $\vec{y} \in V_3$, který je kolmý k V_2.

Jestliže vektor $\vec{y}$ náleží podprostoru V_3, můžeme ho psát jako lineární kombinaci vektorů jeho báze $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Dle věty 21 je vektor $\vec{y}$ kolmý k podprostoru V_2, jestliže je kolmý k vektorům jeho báze $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, tj., jestliže jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned} \vec{y} \cdot \vec{a}_1 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0 \\ \vec{y} \cdot \vec{a}_2 &= y_1\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 + y_2\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_2 + y_3\vec{b}_3 \cdot \vec{a}_2 = 0 \end{aligned} \tag{97}$$

Homogenní soustava (97) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice

$$A_2 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{98}$$

má hodnost menší než 3 (což je v tomto případě určitě splněno).

Vidíme, že pro kolmost podprostorů V_2, V_3 jsou rozhodující hodnosti matic A_1, A_2. Protože $A_2 = A_1^T$ a $h(A_2) = h(A_1^T)$, stačí uvažovat jenom jednu z těchto matic, například A_2, kterou v souladu s následující větou označíme G. Aby byly podprostory

V_2, V_3 na sebe kolmé, tj. aby měly obě uvedené soustavy (95), (97) nenulová řešení, musí být hodnost matice

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} \tag{99}$$

menší než 2. V obecném případě bychom řekli, že hodnost takovéto matice musí být menší než minimum z dimenzí posuzovaných vektorových prostorů, jak uvádí následující věta.

Věta 22 (Nutná a postačující podmínka kolmosti dvou podprostorů)**.** *Dva vektorové podprostory V_r a V_s s bázemi $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ a $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když pro hodnost matice*

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_s \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{a}_r \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_2 & \cdots & \vec{a}_r \cdot \vec{b}_s \end{bmatrix}$$

platí

$$h(G) < \min(r, s).$$

PŘÍKLAD 7.2. *Rozhodněte, zda jsou dané vektorové podprostory prostoru R^4 na sebe kolmé:*

a) $V_2 = [(1,0,1,1),(0,2,-1,1)],\ V_3 = [(0,1,0,1),(1,0,-1,2),(1,2,1,-2)]$,

b) $V_2 = [(1,1,2,-1),(3,0,1,-1)],\ V_3 = [(1,0,1,2),(2,-3,2,2),(1,1,1,-2)]$,

c) $V_1 = [(1,0,-1,2)],\ V_3 = [(0,1,2,1),(1,3,-1,-1),(2,1,0,-1)]$.

Poznámka. Zvláštní kategorii vzájemně *kolmých podprostorů* daného vektorového prostoru V_n tvoří tzv. *totálně kolmé podprostory.* Jedná se o dvojice podprostorů, které jsou kolmé a součet jejich dimenzí je přitom roven n. Říkáme, že tyto podprostory jsou vzájemně svými *ortogonálními doplňky.*

7.3 Ortogonální doplněk vektorového podprostoru

PŘÍKLAD 7.3. *Určete množinu všech vektorů z V_3, které jsou kolmé (ortogonální) k vektoru $\vec{u} = (2,1,-3)$.*

Řešení: Hledáme množinu $W \subseteq V_3$, pro kterou platí: $\forall \vec{x} \in W;\ \vec{u} \cdot \vec{x} = 0$, tj. množinu všech řešení homogenní rovnice

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \tag{100}$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$. Rovnici (100) můžeme uvažovat jako „soustavu“ jedné rovnice o třech neznámých. Potom dvě ze tří neznámých, např. x_1 a x_3 nahradíme reálnými parametry a zbývající neznámou x_2 dopočítáme. Dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= r, \\ x_3 &= s, \\ x_2 &= -2r + 3s;\ r, s \in R \end{aligned} \tag{101}$$

a hledanou množinu W zapíšeme ve tvaru

$$W = \{(r, -2r + 3s, s); r, s \in R\}. \tag{102}$$

Protože $W = \{(r, -2r + 3s, s); r, s \in R\} = \{r(1, -2, 0) + s(0, 3, 1); r, s \in R\}$, můžeme W psát jako lineární obal dvojice vektorů $(1, -2, 0), (0, 3, 1)$,

$$W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]. \tag{103}$$

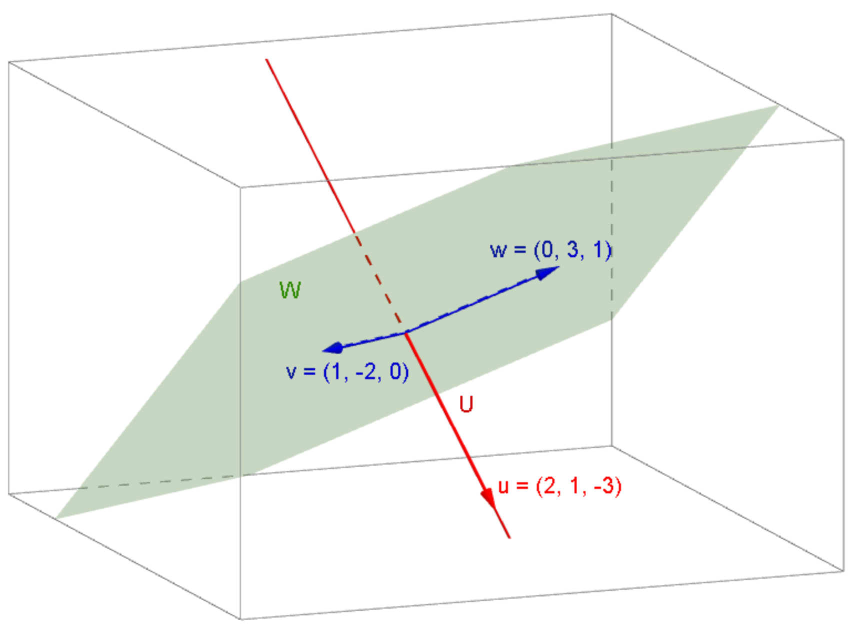
Potom je, jak již víme, W vektorovým podprostorem V_3,

$$W \subseteq\subseteq V_3.$$

Pokud budeme uvažovat také podprostor generovaný vektorem $\vec{u}$,

$$U = [\{(2, 1, -3))\}], \tag{104}$$

tvoří U, W dvojici vzájemně se ortogonálně doplňujících podprostorů vektorového



Obrázek 34: $U = [\{(2, 1, -3))\}], W = [\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}]$

prostoru V_3 (viz Obr. 34), značíme

$$U = W^{\perp}, \quad W = U^{\perp}$$

a čteme „podprostor U je ortogonálním doplňkem podprostoru W“, resp. „podprostor W je ortogonálním doplňkem podprostoru U“.

Poznámka. Ve vektorovém prostoru dimenze 3 je ortogonálním doplňkem roviny (přesněji vektorového prostoru dimenze 2) přímka na ní kolmá (vektorový prostor dimenze 1, jehož vektory jsou ortogonální se všemi vektory té roviny) a ortogonálním doplňkem přímky je naopak rovina.

Definice 22 (Ortogonální doplněk vektorového podprostoru)**.** *Ortogonálním doplňkem vektorového podprostoru $V_k \subseteq V_n$ rozumíme množinu všech vektorů kolmých (ortogonálních) k V_k. Značíme $V_k^{\perp}$.*

Ortogonální doplněk vektorového podprostoru je vektorový prostor a jeho dimenze je $n-k$. Důkaz toho, že se jedná o vektorový prostor přenecháme čtenáři. Stačí na danou množinu uplatnit větu 9 (o určení vektorového podprostoru). Zde se zaměříme jenom na údaj o dimenzi $n-k$ podprostoru $V_k^{\perp}$.

Věta 23 (Dimenze ortogonálního doplňku)**.** *Je-li V_k podprostor vektorového prostoru V_n, je jeho ortogonální doplněk $V_k^{\perp}$ vektorový prostor dimenze $n-k$.*

Důkaz. Nechť $V_k = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k]$, kde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ je ortonormální báze. Potom pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in V_k^{\perp}$ musí platit $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = 0$; $i = 1, 2, \dots, k$. Dostáváme tak homogenní soustavu k rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots& \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0, \end{aligned} \tag{105}$$

jejíž matice má hodnost k (její řádkové vektory $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, k$ jsou ortonormální, proto jsou dle věty 19 lineárně nezávislé). Z n neznámých je tedy k základních a $n-k$ volných. Proto musíme použít $n-k$ parametrů a množinou všech řešení soustavy, tj. ortogonálním doplňkem prostoru V_k, je tak vektorový prostor dimenze $n-k$. □

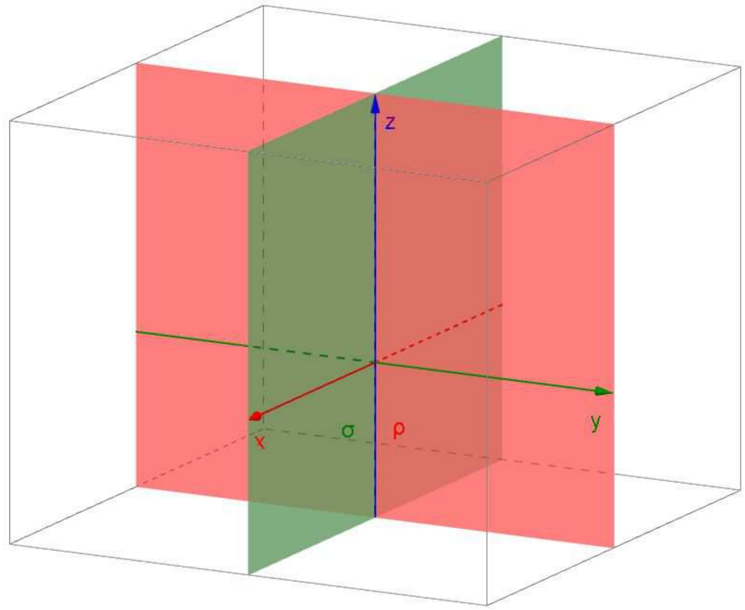
Poznámka. Z výše uvedeného vyplývá, že součet dimenzí dvou vektorových podprostorů prostoru V_n, které jsou vzájemně svými ortogonálními doplňky, je n. Tj. pro $V_r, V_s \subseteq V_n$, kde $V_r = V_s^{\perp}$ (a tedy také $V_s = V_r^{\perp}$), platí

$$r + s = n.$$

Jak bylo uvedeno již v poznámce na straně 97, rozlišujeme podprostory *kolmé* ($V_r \perp V_s$) a podprostory *totálně kolmé* ($V_r = V_s^{\perp}$ a $V_s = V_r^{\perp}$). Přitom prostory totálně kolmé jsou zároveň i kolmé, avšak naopak to neplatí. Ne každé kolmé prostory jsou zároveň také totálně kolmé.

PŘÍKLAD 7.4. *Uveďte příklad vektorových podprostorů, které jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé.*

Řešení: Například dvě na sebe kolmé roviny $\rho : x = 0$ a $\sigma : y = 0$ v prostoru V_3 jsou *kolmé*, ale nejsou *totálně kolmé* (součet jejich dimenzí je 4, tj. větší než dimenze „mateřského“ prostoru V_3), viz Obr. 35.



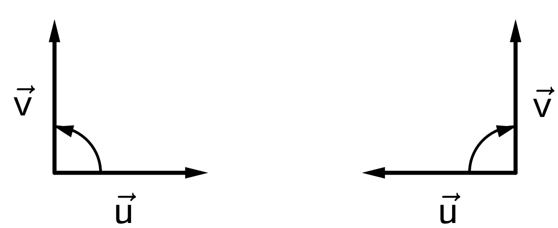
Obrázek 35: Roviny $\rho : x = 0$, $\sigma : y = 0$ jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé

8 Orientace báze vektorového prostoru

Rozlišujeme *pravotočivou* (též *kladnou*) a *levotočivou* (též *zápornou*) bázi vektorového prostoru.

Význam pojmů *kladná* a *záporná* orientace je v souladu s tím, jak je používáme například v planimetrii při nanášení orientovaných úhlů. *Kladný* smysl má pohyb proti směru pohybu hodinových ručiček, *záporný* smysl pak je přisouzen pohybu ve směru pohybu hodinových ručiček. Pohyb v kladném smyslu je *pravotočivý*, protože ho, velmi zjednodušeně řečeno[6], můžeme v daném směru přirozeně realizovat prsty pravé ruky. V případě pohybu v záporném smyslu pak hovoříme o *levotočivém* pohybu, protože přirozeně použijeme levou ruku.

Uvažujme bázi (pro jednoduchost ortonormální) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ prostoru V_2. Jak vidíme na



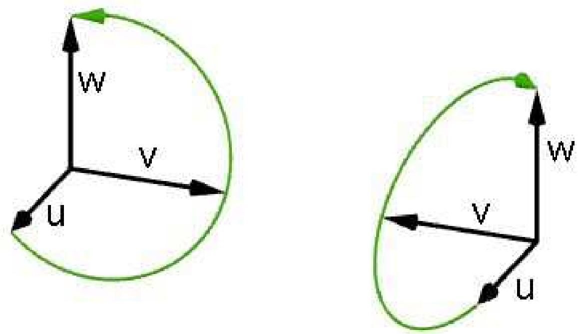
Obrázek 36: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_2

Obr. 36, vektory $\vec{u}, \vec{v}$ můžeme v rovině uspořádat dvěma způsoby, pro které je typické, že chceme-li přejít od jednoho k druhému, nestačí nám vektory pootočit, musíme použít osovou souměrnost. Podle smyslu přechodu od vektoru $\vec{u}$ k vektoru $\vec{v}$ označujeme tyto konfigurace vektorů i jimi tvořené báze jako *pravotočivou* (kladný smysl, Obr. 36, vlevo), respektive *levotočivou* (záporný smysl, Obr. 36, vpravo). Pro

[6]Exaktnější pojednání o pravidlech pravé a levé ruky viz např. Wikipedia: Right hand rule

pravotočivé báze používáme též označení *kladné báze*, pro levotočivé pak *záporné báze*.

Stejně rozdělujeme báze v trojrozměrném prostoru[1]. Uvažujme bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ vektorového prostoru V_3. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ můžeme opět uspořádat dvěma způsoby, mezi kterými nelze přejít pouhým otočením, ale musíme použít souměrnost podle roviny. Konfiguraci, v níž při přechodu mezi vektory v pořadí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ postupujeme v kladném smyslu, nazýváme *pravotočivou* (též *kladnou*) bází (Obr. 37, vlevo), konfiguraci, v níž postupujeme v záporném smyslu, nazýváme *levotočivou* (též *zápornou*) bází (Obr. 37, vpravo).



Obrázek 37: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) báze prostoru V_3

Vektorový prostor, v němž používáme takto orientované báze, nazýváme *orientovaný vektorový prostor*.

8.1 Matice přechodu mezi dvěma bázemi

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Máme-li ve vektorovém prostoru zavedeny dvě báze, můžeme souřadnice vektoru vzhledem k jedné z nich převést na souřadnice tohoto vektoru vzhledem k druhé z nich pomocí tzv. *matice přechodu mezi bázemi*, jak ukazuje následující příklad 8.1.

Každá matice přechodu mezi dvěma bázemi je regulární (proč?) a tak je její determinant různý od nuly. Pokud je kladný, jsou příslušné báze stejně orientované (tj. obě jsou kladné, nebo jsou obě záporné), pokud je determinant matice přechodu záporný, jsou příslušné báze opačně orientované (tj. jedna je kladná a druhá je záporná).

PŘÍKLAD 8.1. *Vektor $\vec{u} \in V_2$ je dán souřadnicemi $\vec{u}_B = (u_1', u_2')$ vzhledem k bázi $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_A = (u_1, u_2)$ vzhledem k bázi $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.*

[1]Pojem orientace báze a vektorového prostoru se dá samozřejmě zavést obecně pro vektorové prostory dimenze n, viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 105–107

Řešení: Vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ báze B samozřejmě patří do vektorového prostoru V_2, můžeme je proto vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ báze A

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2, \\ \vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2. \end{aligned} \tag{106}$$

Pokud soustavu (106) napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{bmatrix}, \tag{107}$$

figuruje v něm tzv. *matice přechodu of báze A k bázi B*

$$P(A,B) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}. \tag{108}$$

Vektor $\vec{u}$ zapíšeme jako lineární kombinace vektorů obou daných bází

$$\vec{u} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = u_1'\vec{b}_1 + u_2'\vec{b}_2$$

a za vektory $\vec{b}_1$ a $\vec{b}_2$ dosadíme výrazy z rovnic (106)

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = u_1'(p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2) + u_2'(p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2).$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 = (u_1'p_{11} + u_2'p_{21})\vec{a}_1 + (u_1'p_{12} + u_2'p_{22})\vec{a}_2,$$

v níž porovnáme sobě odpovídající koeficienty u vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ na levé a pravé straně. Výslednou soustavu

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_1'p_{11} + u_2'p_{21} \\ \vec{u}_2 &= u_1'p_{12} + u_2'p_{22} \end{aligned}$$

potom můžeme zapsat maticovou rovnicí, v níž figuruje *matice přechodu od báze A k bázi B* (108)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' & u_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \tag{109}$$

nebo schematicky pomocí daných vektorů

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B \cdot P(A,B). \tag{110}$$

PŘÍKLAD 8.2. *Vektor $\vec{u}$ má vzhledem k bázi $M = \{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3\}$ vektorového prostoru V_3 souřadnice $\vec{u}_M = (2,1,-3)$. Určete jeho souřadnice $\vec{u}_N$ vzhledem k bázi $N = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, jestliže platí: $\vec{m}_1 = 4\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2 - \vec{n}_3$, $\vec{m}_2 = -3\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + 2\vec{n}_3$, $\vec{m}_3 = -2\vec{n}_1 - 3\vec{n}_2 + 11\vec{n}_3$.*

Řešení: Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= 4\vec{n}_1 - 2\vec{n}_2 - \vec{n}_3,\\ \vec{m}_2 &= -3\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + 2\vec{n}_3,\\ \vec{m}_3 &= -2\vec{n}_1 - 3\vec{n}_2 + 11\vec{n}_3\end{aligned}$$

získáme matici přechodu od báze N k bázi M

$$P(N,M) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix},$$

kterou dle (110) vynásobíme zprava vektor $\vec{u}_M = (2,1,-3)$, abychom dostali hledané souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi N

$$\vec{u}_N = (2,1,-3)\cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 11 \end{bmatrix} = (11,6,-34).$$

PŘÍKLAD 8.3. *Najděte matici přechodu od báze M k bázi N a naopak, od N k M, jestliže $M = \{(1,1),(0,2)\}$, $N = \{(2,1),(1,2)\}$.*

Řešení: Podle (107) můžeme psát $N = P(M,N)\cdot M$. Po dosazení za M a N tak dostaneme maticovou rovnici $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P(M,N)\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, jejímž řešením je matice $P(M,N) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Protože pro matici $P(N,M)$ platí podle (107) rovnice $M = P(N,M)\cdot N$, je zřejmé, že $P(N,M) = P(M,N)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 8.4. *Najděte matice přechodu mezi uvedenými (ortonormálními) bázemi $E = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, $F = \{\vec{f}_1,\vec{f}_2\}$ vektorového prostoru V_2.*
a) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$,

b) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$; $\vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$,

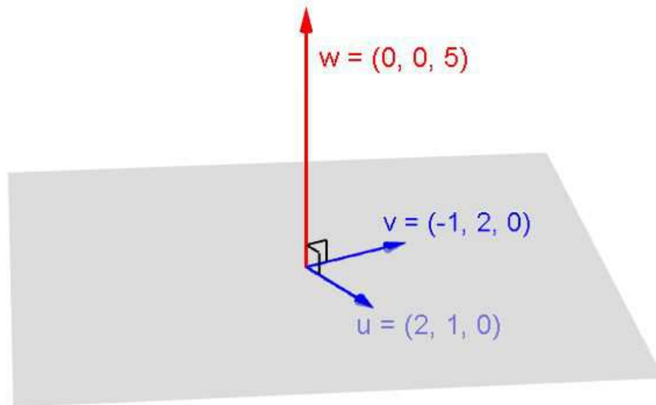
Řešení:
ad a) $P(E,F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F,E) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

ad b) $P(E,F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $P(F,E) = P(E,F)$.

Poznámka. Matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je ortogonální. Její determinant je roven 1 (příslušné báze jsou souhlasné) nebo -1 (příslušné báze jsou nesouhlasné).

9 Vektorový součin

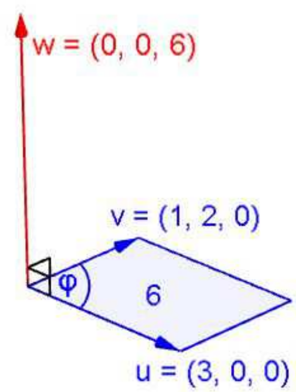
Vektorový součin je operace definovaná ve vektorovém prostoru dimenze 3, do které vstupují dva vektory (tj. binární operace) a jejímž výsledkem je vektor na tyto dva vektory kolmý (viz Obr. 38). Vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ zapisujeme $\vec{u} \times \vec{v}$. Výsledný vektor též nazýváme *vektorový součin*. Zobecněním vektorového součinu



Obrázek 38: Vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

pro prostory dimenze n je tzv. *ortogonální doplněk n-1 vektorů*, operace, do níž vstupuje $n-1$ vektorů a jejímž výsledkem je jeden vektor na všechny tyto vektory kolmý.

Formuli pro výpočet souřadnic vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ odvodíme na základě následujících tří požadovaných vlastností výsledného vektoru (viz Obr. 39):



Obrázek 39: $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\varphi$

i. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý (ortogonální) k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0, \tag{111}$$
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0. \tag{112}$$

ii. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoří spolu s nezávislými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pravotočivou bázi.

iii. Velikost (norma) vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tj.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi. \tag{113}$$

Nejprve si uvědomíme, jaké důsledky plynou z uvedených vlastností pro *pravotočivou ortonormální bázi* vektorového prostoru V_3. Uvažujme například *kanonickou bázi* a označme si její vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Protože jsou tyto vektory (i) na sebe kolmé, (ii) tvoří pro nezávislé $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pravotočivou bázi a (iii) obsah rovnoběžníku (čtverce) vymezeného každými dvěma z nich je 1, je zřejmé, že platí:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \;\; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \;\; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \tag{114}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \;\; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \;\; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \tag{115}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, \;\; \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \;\; \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}. \tag{116}$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ nyní vyjádříme pomocí vektorů této ortonormální báze

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}, \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},$$

zapíšeme jejich vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right) \times \left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\right),$$

který za předpokladu platnosti příslušného distributivního zákona roznásobíme

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} = & u_1v_1\vec{i} \times \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \times \vec{j} + u_1v_3\vec{i} \times \vec{k} + \\ & + u_2v_1\vec{j} \times \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \times \vec{j} + u_2v_3\vec{j} \times \vec{k} + \\ & + u_3v_1\vec{k} \times \vec{i} + u_3v_2\vec{k} \times \vec{j} + u_3v_3\vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

a s použitím vztahů (114), (115), (116) zjednodušíme na tvar

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_2v_3 - u_3v_2\right)\vec{i} + \left(u_3v_1 - u_1v_3\right)\vec{j} + \left(u_1v_2 - u_2v_1\right)\vec{k}. \tag{117}$$

Z (117) vyplývá, že vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor, říkejme mu třeba $\vec{w}$, jehož souřadnice vypočítáme ze souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ takto

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\right). \tag{118}$$

Nyní si ověříme, že vektor $\vec{w}$ definovaný (118) skutečně splňuje ony tři výše uvedené požadavky i–iii.

ad i) Ověříme splnění podmínek ortogonálnosti vektorů $\vec{w}$ a $\vec{u}$, resp. $\vec{w}$ a $\vec{v}$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{u} = u_2v_3u_1 - u_3v_2u_1 + u_3v_1u_2 - u_1v_3u_2 + u_1v_2u_3 - u_2v_1u_3 = 0.$$

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = u_2v_3v_1 - u_3v_2v_1 + u_3v_1v_2 - u_1v_3v_2 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 = 0.$$

ad ii) Pro ověření, že vektory $\vec{u},\vec{v},\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ tvoří kladnou bázi dosadíme za $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vektory kanonické báze $\vec{i} = (1,0,0)$ a $\vec{j} = (0,1,0)$. Podle (118) je potom $\vec{i}\times\vec{j} = (0,0,1) = \vec{k}$. Vektorový součin skutečně tvoří spolu s danými dvěma vektory kladnou bázi.

ad iii) To, že vektor $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ definovaný vztahem (118) má normu $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi$, prokážeme dosazením souřadnic příslušných vektorů. Před tím však ještě obě strany této rovnosti umocníme na druhou

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\varphi,$$

a vhodnou úpravou s využitím vztahu pro výpočet odchylky dvou vektorů se zbavíme goniometrické funkce sin

$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\varphi),\\ |\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\varphi,\\ |\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2. \qquad (119)\end{aligned}$$

Únavné výpočty při dosazení souřadnic vektorů do poslední rovnosti a ověření její platnosti provedeme v programu wxMaxima.
Nejprve načteme balíček funkcí „vect“ pro počítání s vektory a zadáme souřadnice vektorů $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ (vektorový součin je v Maximě reprezentován symbolem ~, výsledek, jak vidíme, odpovídá formuli (118))

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) u:[u1,u2,u3]; v:[v1,v2,v3]; w:express(u~v);
```

(%o2) $[u1, u2, u3]$
(%o3) $[v1, v2, v3]$
(%o4) $[u2\,v3 - u3\,v2, u3\,v1 - u1\,v3, u1\,v2 - u2\,v1]$

Poté zapíšeme vztah (119) a odečtením porovnáme její levou a pravou stranu.

```
(%i5) Rovnice:(w.w)=(u.u)*(v.v)-(u.v)^2;
```

(%o5) $(u2\,v3 - u3\,v2)^2 + (u3\,v1 - u1\,v3)^2 + (u1\,v2 - u2\,v1)^2 = (u3^2 + u2^2 + u1^2)(v3^2 + v2^2 + v1^2) - (u3\,v3 + u2\,v2 + u1\,v1)^2$

```
(%i6) expand(lhs(Rovnice)-rhs(Rovnice));
```

(%o6) 0

Výsledek 0 znamená, že se obě strany (119) rovnají. Platnost vztahu (113) pro vektor $\vec{w}$ definovaný formulí (118) je tím prokázána.

9.1 Výpočet vektorového součinu

Víme, že vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor, jehož souřadnice jsou dány vztahem (viz též (118))

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{120}$$

Není však nutné si tento vztah pamatovat a souřadnice vektorového součinu počítat dosazením do něj. Ukážeme si zde některé jednodušší způsoby jejich výpočtu. Začneme tím, že si všimneme, že výrazy pro jednotlivé souřadnice vektorového součinu v (120) se dají zapsat ve formě determinantů matic řádu 2, které obsahují souřadnice daných vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{121}$$

Po rozepsání pomocí vektorů kanonické báze dostaneme rovnost

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \tag{122}$$

jejíž pravou stranu můžeme interpretovat jako rozvoj determinantu $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$ podle posledního řádku. Zápis vektorového součinu vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve formě tohoto determinantu se snáze pamatuje a přináší i podstatné zjednodušení výpočtu jeho souřadnic

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}. \tag{123}$$

Buď pracujeme přímo s determinantem (123), nebo využijeme některý odvozený algoritmus. Jako například ten následující. Souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ napíšeme pod sebe jako řádky matice (není nutné psát závorky), za kterou ještě připíšeme její první dva sloupce

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{matrix} \tag{124}$$

V tomto schématu potom postupně na vybrané dvojice sloupců (2. a 3., 3. a 4., 4. a 5.) uplatňujeme *křížové pravidlo* a počítáme souřadnice vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{array}{c|cc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_2v_3 - u_3v_2,$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_3v_1 - u_1v_3,$$

$$\begin{array}{ccc|cc|} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array} \longrightarrow u_1v_2 - u_2v_1.$$

9.2 Vlastnosti vektorového součinu

Většinu vlastností vektorového součinu již známe. Zde si je souhrnně zopakujeme a přidáme několik dalších.

(1) Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$; $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$.

(2) Nezávislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvoří spolu s vektorovým součinem $\vec{u} \times \vec{v}$ pravotočivou[1] (kladnou) bázi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$. Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ závislé, je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.

(3) Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ není komutativní; $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

(4) Distributivnost vzhledem ke sčítání vektorů; $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

(5) Asociativnost vzhledem k násobení skalárem; $(c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v}) = c(\vec{u} \times \vec{v})$

(6) Velikost (norma) vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku vymezeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$;

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\varphi. \tag{125}$$

Dle (119) platí pro druhou mocninu normy vektorového součinu

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}, \tag{126}$$

kde $\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je tzv. *Gramův determinant* vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Vztah $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 \end{vmatrix}$ je potom speciálním případem tzv. *Lagrangeovy identity*[2]

9.3 Užití vektorového součinu

S různými aplikacemi vektorového součinu se budeme setkávat v dalších partiích této publikace. Zde si uvedeme dva příklady - výpočet obecné rovnice roviny dané jedním bodem a dvěma nezávislými vektory a výpočet obsahu trojúhelníku daného souřadnicemi jeho vrcholů.

PŘÍKLAD 9.1. *Rovina ρ je dána bodem $A = [-3, 2, 1]$ a dvěma nezávislými vektory $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ a $\vec{v} = (-1, -3, 2)$, určete její obecnou rovnici.*

---

[1] Tato skutečnost nám dovoluje určit směr vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ pomocí *pravidla pravé ruky*: Pravou ruku umístíme malíkovou hranou do roviny vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ tak, aby směr prstů odpovídal pořadí, v němž je násobíme (v případě $\vec{u} \times \vec{v}$ směřují od $\vec{u}$ k $\vec{v}$), potom má vztyčený palec směr vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$.

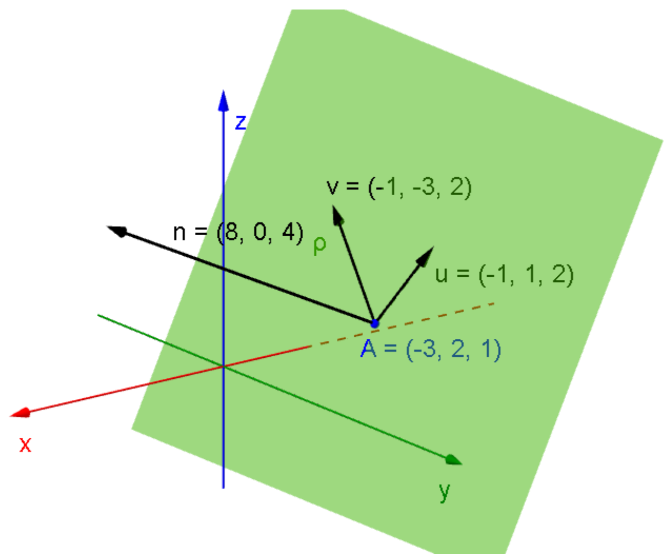
[2] Viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 114–115.

Řešení: Obecná rovnice roviny má tvar $ax+by+cz+d=0$, kde (a,b,c) jsou souřadnice vektoru kolmého k této rovině, říkáme mu normálový vektor a značíme ho $\vec{n}$. K vyřešení příkladu tak stačí najít jakýkoliv normálový vektor roviny ρ, použít jeho souřadnice jako koeficienty a,b,c v obecné rovnici $\rho: ax+by+cz+d=0$, dosadit za x,y,z souřadnice bodu A a dopočítat hodnotu koeficientu d.

Vzhledem k vlastnostem vektorového součinu použijeme jako normálový vektor roviny ρ vektor

$$\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = (1,0,3)\times(7,-1,2) = (8,0,4).$$

(viz Obr. 40). Rovina ρ je tedy dána rovnicí ve tvaru $8x+4z+d=0$, kde d dopočítáme



Obrázek 40: $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = (8,0,4)$

po dosazení souřadnic A. Z příslušné rovnice $8\cdot(-3)+4\cdot 1+d=0$ dostáváme $d=20$. Odpovídající rovnici $8x+4z+20=0$ potom můžeme ještě vydělit 4 a dostaneme základní tvar obecné rovnice roviny $\rho: 2x+z+5=0$.

Poznámka. U normálového vektoru nám jde o jeho směr, nikoliv velikost. Proto jsme mohli dělit 4 již souřadnice vektoru $\vec{u}\times\vec{v}=(8,0,4)$ a nadále pracovat s vektorem $\vec{n}=(2,0,1)$.

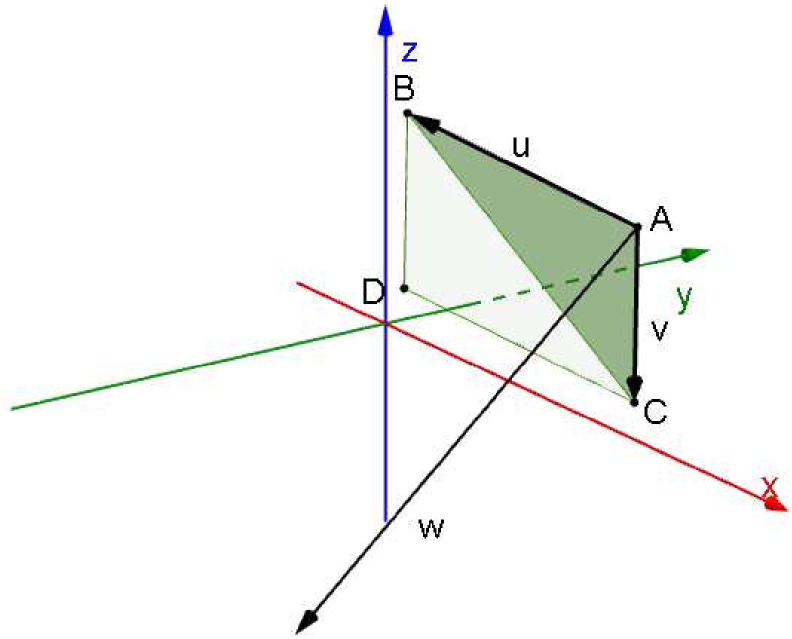
PŘÍKLAD 9.2. *Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC s vrcholy $A=[7,3,4]$, $B=[1,0,6]$, $C=[4,5,-2]$.*

Řešení: Velikost (norma) vektorového součinu $\vec{u}\times\vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku, který je vymezen vektory $\vec{u},\vec{v}$

$$S_\diamond = |\vec{u}\times\vec{v}|.$$

Potom obsah trojúhelníku ABC spočítáme jako polovinu velikosti vektorového součinu $\vec{u}\times\vec{v}$, kde $\vec{u}=B-A, \vec{v}=C-A$ (viz Obr. 41)

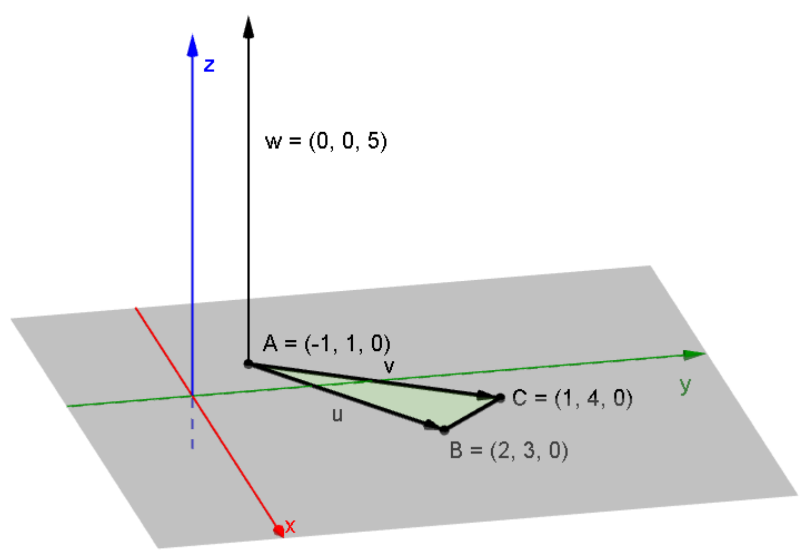
$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|(-6,-3,2)\times(-3,2,-6)| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2} = 24,5.$$



Obrázek 41: Obsah trojúhelníku ABC je roven $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

PŘÍKLAD 9.3. *Vypočtěte obsah trojúhelníku* ABC; $A = [-1, 1], B = [2, 3], C = [1, 4]$.

Řešení: Pro řešení tohoto úkolu je nejsnazší použít *vnější součin* (též *smíšený součin*), jak uvidíme v kapitole 10. Výpočet pomocí vektorového součinu však není nijak obtížný a navíc se ukáže, že oba postupy spolu souvisejí. Rovinu, v níž se nachází



Obrázek 42: Obsah trojúhelníku ABC je roven $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

daný trojúhelník jednoduše chápeme jako podprostor bodového prostoru dimenze 3. Tento přechod do prostoru vyšší dimenze nejjednodušeji vyřešíme tak, že rovinu ABC ztotožníme se souřadnicovou rovinou xy, tj. souřadnice daných bodů změníme z uspořádaných dvojic na trojice přidáním 0 jako třetí složky; $A = [-1, 1, 0], B =$

$[2,3,0], C = [1,4,0]$ (viz Obr. 42). Potom k výpočtu obsahu trojúhelníku ABC použijeme vektorový součin stejně jako při řešení příkladu 9.2. Obsah trojúhelníku ABC vyjde $2,5$.

9.4 Ortogonální doplněk *n-1* vektorů v prostoru V_n

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Zobecněním vektorového součinu do prostoru V_n je *ortogonální doplněk* $n-1$ *vektorů*. Tímto pojmem rozumíme *jeden vektor*, který je kolmý ke všem daným $n-1$ vektorům z V_n. Vektorový součin bychom tedy mohli nazývat také *ortogonální doplněk 2 vektorů* v prostoru V_3.

K zobecnění vektorového součinu do prostoru dimenze n použijeme jeho zápis (123) ve formě determinantu.

Definice 23 (Ortogonální doplněk n-1 vektorů). *Ortogonálním doplňkem* $n-1$ *vektorů* $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1,2,\dots,n-1$, *jejichž souřadnice jsou udány vzhledem k ortonormální bázi* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ *vektorového prostoru* V_n, *nazýváme vektor, který je výsledkem rozvoje determinantu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{vmatrix} \tag{127}$$

podle n–tého řádku. Značíme ho

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1}.$$

Poznámka. Podle definice 23 a podle věty o rozvoji determinantu[1] pro ortogonální doplněk $n-1$ vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-1}$ platí

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{vmatrix} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + \ldots + A_n\vec{e}_n.$$

Potom ale můžeme říci, že ortogonální doplněk uvedených $n-1$ vektorů je vektor, jehož složkami jsou algebraické doplňky prvků posledního řádku determinantu (127)

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1} = (A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

[1] Dle věty o rozvoji determinantu je $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A$, $i,j = 1,2,\dots,n$, kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, pro které platí, že $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

9.5 Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů

Vlastnosti ortogonálního doplňku $n-1$ vektorů[1] jsou analogické vlastnostem vektorového součinu, které jsou uvedeny na straně 108.

(1) Ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1}$ je kolmý k vektorům $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}$.

(2) Pro vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}$ lineárně nezávislé je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1}\}$ kladnou bázi V_n.

(3) Pro vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}$ lineárně závislé je $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1} = \vec{o}$.

(4) Prohozením pořadí dvou vektorů se ortogonální doplněk $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}$ mění na opačný.

(5) $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \ldots \times \vec{a}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3 & \cdots & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2^2 & \vec{a}_2\vec{a}_3 & \cdots & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-2}\vec{a}_2 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_3 & \cdots & \vec{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix} = \det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1})$,

kde $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1})$ je Gramův determinant.

9.6 Cvičení: Vektorový součin

1. Vypočtěte obsah trojúhelníku ΔABC; $A[-2,-3]$, $B[4,-1]$, $C[1,5]$.

2. Vypočtěte obsah trojúhelníku ΔKLM; $K[1,0,-2]$, $L[2,3,5]$, $L[-3,4,0]$.

3. Napište obecnou rovnici roviny $\sigma = (KLM)$ pro $K[1,0,-2]$, $L[2,3,5]$, $L[-3,4,0]$.

4. Určete souřadnice paty kolmice spuštěné z bodu $P[2,1,-3]$ do roviny $\rho = (ABC)$ pro $A[1,-3,0]$, $B[2,5,1]$, $C[1,2,1]$.

[1] Více o těchto vlastnostech viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 106–111.

10 Vnější součin

Dosud jsme se seznámili se dvěma binárními[7] operacemi s vektory, *skalárním součinem*, viz str. 58, jehož výsledkem je *číslo* (*skalár*) a který pro vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ zapisujeme

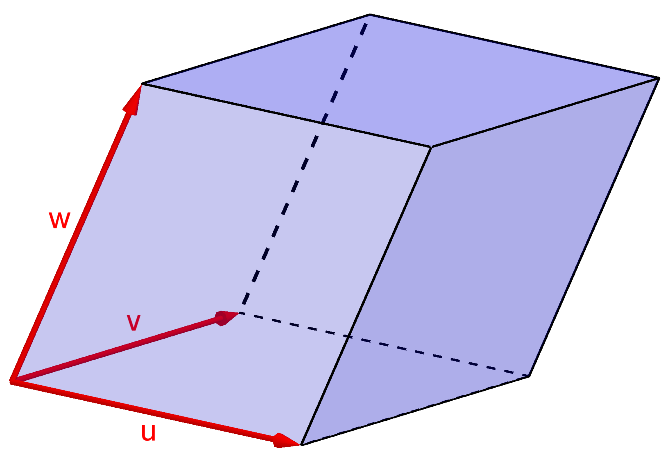
$$\vec{u} \cdot \vec{v},$$

a *vektorovým součinem*, definovaným v trojrozměrném prostoru, viz str. 104, jehož výsledkem je *vektor* a který pro vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ zapisujeme ve tvaru

$$\vec{u} \times \vec{v}.$$

Každá z těchto operací má své praktické užití. Skalární součin nám dovoluje určovat odchylky směrů a velikosti vektorů. Vektorový součin nám zase dovoluje vypočítat obsah plochy omezené vektory, významné užití má i skutečnost, že jeho výsledkem je vektor kolmý na oba dané vektory. Nyní se seznámíme s třetí operací s vektory, která je kombinací uvedených dvou.

Vnější součin, též *smíšený součin*, je ve vektorovém prostoru dimenze 3 operací, do které vstupují tři vektory (jedná se tedy o *ternární operaci*) a jejímž výsledkem je číslo. Absolutní hodnota tohoto čísla je přitom rovna objemu rovnoběžnostěnu vymezeného těmi třemi vektory, které do součinu vstupují, viz Obr. 43. Jak si ukážeme,



Obrázek 43: Rovnoběžnostěn určený vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

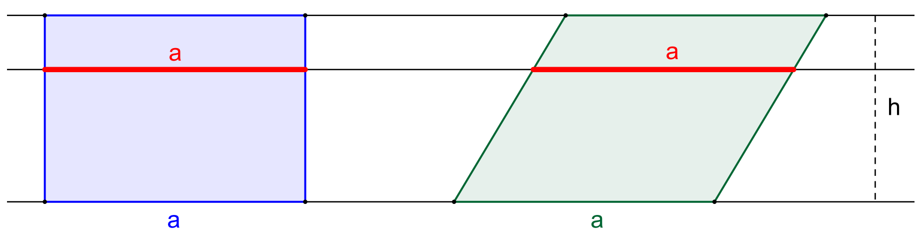
lze vnější součin v prostoru dimenze 3 interpretovat jako spojení vektorového a skalárního součinu, proto se mu říká také *smíšený součin*. Vnější součin není omezen na prostor dimenze 3, lze ho zobecnit do vektorového prostoru dimenze n (kde se ovšem jedná o operaci n–ární). Později to provedeme pro případ $n = 2$.

[7] Označení *binární* znamená, že do operace vstupují dva operandy, v našem případě dva vektory. Dalšími příklady binární operace jsou sčítání, odčítání, dělení, násobení. Pokud do operace vstupuje jeden operand, hovoříme o *unární* operaci. Příkladem unární operace je přiřazení čísla opačného, přičtení konstanty. Pokud do operace vstupují tři operandy, hovoříme o *ternární* operaci. Příkladem takovéto operace je vnější součin, jemuž je věnována tato kapitola.

Vztah pro výpočet vnějšího součinu odvodíme formou řešení následujícího příkladu. Nejprve se bude zdát, že nějakou novou operaci vlastně ani nepotřebujeme, že si vystačíme se skalárním a vektorovým součinem, abychom nakonec přišli na nečekané zjednodušení, které nám zavedení nové operace přinese. Notnou měrou k tomu využijeme znalost věty o rozvoji determinantu.

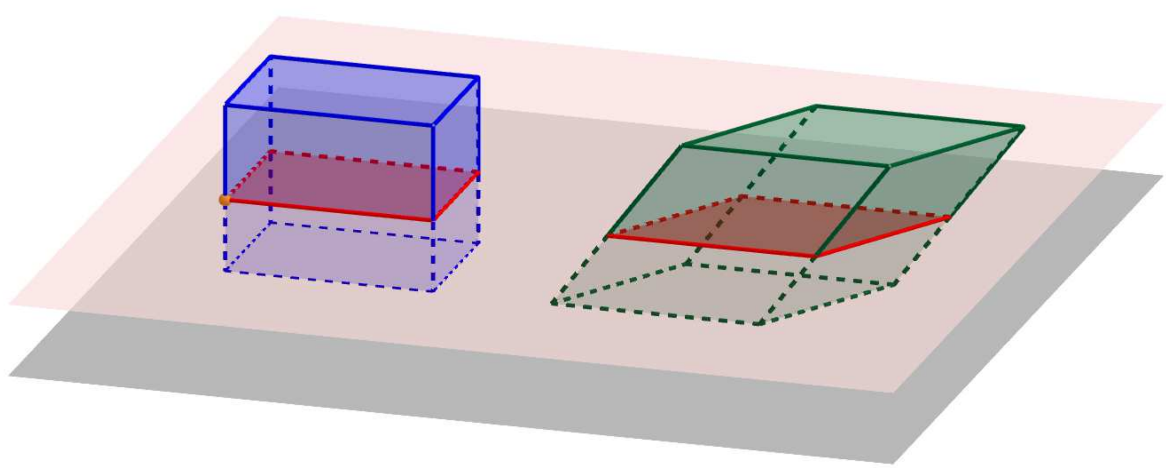
PŘÍKLAD 10.1. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$*,* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$*,* $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$*, viz Obr. 43.*

Řešení: Nejprve si ujasněme, jak lze vypočítat objem rovnoběžnostěnu. Uplatněním tzv. *Cavalieriho principu* dojdeme k tomu, že pro objem rovnoběžnostěnu platí stejný vztah jako pro objem kvádru, tj. $V = S \cdot h$, kde S je obsah podstavy a h je výška.



Obrázek 44: Cavalieriho princip v rovině

Cavalieriho princip si můžeme ilustrovat nejprve na příkladu rovinných obrazců. Uvažujme obdélník a rovnoběžník, oba se základnou stejné délky a a s výškou h, viz Obr. 44. I bez Cavalieriho principu víme, že mají stejný obsah $S = a \cdot h$. Pojďme však

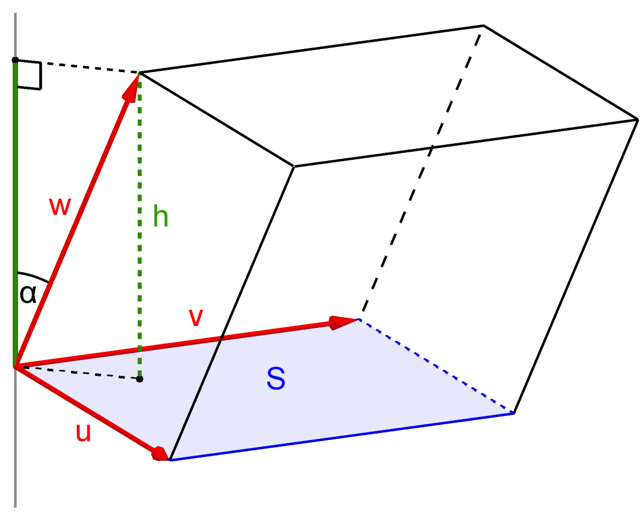


Obrázek 45: Cavalieriho princip v trojrozměrném prostoru

teď na zelený rovnoběžník nahlížet jako na útvar, jehož obsah spočítat neumíme, zatímco u modrého obdélníku nám to nečiní problémy. V takové situaci nám právě pomůže Cavalieriho princip. Ten nám pro tyto dva rovinné obrazce říká toto: *Obrazce mají stejné obsahy, pokud jsou shodné délky úseček, v nichž je protíná každá přímka rovnoběžná s přímkou, v níž leží jejich základny.* Protože je zřejmé, že každá taková přímka má s oběma útvary shodné průniky délky a, mají stejné obsahy, tj. rovnoběžník má stejný obsah $S = a \cdot h$ jako obdélník.

Stejný princip nyní uplatníme na kvádr a rovnoběžnostěn, viz Obr 45. Jejich podstavy leží ve společné rovině, jsou jimi ty dva rovinné útvary, obdélník a rovnoběžník, z Obr. 44 (online applet je zde: https://www.geogebra.org/m/fxz66m8q), o kterých víme, že mají stejný obsah. Cavalieriho princip nám pro takové prostorové útvary říká, že *pokud se shodují obsahy jejich řezů každou rovinou rovnoběžnou s rovinou jejich podstav, shodují se i jejich objemy.* Jednou z takových rovin rovnoběžných s rovinou podstav je červená rovina na Obr. 44. S kvádrem má jako průnik obdélník, s rovnoběžnostěnem rovnoběžník. Protože se tyto obrazce řezů shodují s podstavami příslušných útvarů, o nichž víme, že mají shodné obsahy, mají i tyto řezy shodné obsahy. Dle Cavalieriho principu má tedy rovnoběžnostěn stejný objem $V = S \cdot h$ jako kvádr o stejné výšce h a stejném obsahu podstavy S.

Pokračujeme v řešení příkladu 10.1 dle Obr. 46. Víme, že objem V rovnoběž-



Obrázek 46: Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

nostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je dán vztahem $V = S \cdot h$. Z Obr. 46 a z vlastností vektorového součinu (absolutní hodnota jeho velikosti je rovna obsahu rovnoběžníku omezeného vektory) a z definice funkce $\cos\alpha$ v pravoúhlém trojúhelníku ($\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$) plyne, že $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ a $h = |\vec{w}| \cos\alpha$. Potom

$$V = S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\alpha.$$

Užitím (43) (viz str. 68) můžeme psát $|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$. Objem uvažovaného rovnoběžnostěnu je pak dán vztahem

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}, \tag{128}$$

který je pozoruhodný tím, že smysluplně (pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu) spojuje vektorový a skalární součin. Je tak již zřejmé, proč se vnějšímu součinu říká také *smíšený součin*, jedná se o „směs“ skalárního a vektorového součinu. Tím bychom mohli skončit a prohlásit (128) za onen hledaný vztah pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu. Byla by to ale škoda, ve vztahu (128) se totiž skrývá přímá souvislost vnějšího součinu s determinantem, která navíc dovoluje uskutečnit zobecnění vnějšího součinu do jiných dimenzí.

Pokud za $\vec{u} \times \vec{v}$ dosadíme podle (121) a poté aplikujeme větu o rozvoji determinantu[8], dostaneme postupně

$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3),$$

$$\begin{aligned} V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že objem rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, viz též Obr. 46 je roven determinantu, jehož řádky tvoří tyto vektory. V obecném případě, kdy nemáme zaručeno, že úhel α je ostrý (výraz $|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ je v takovém případě záporný) je *objem rovnoběžnostěnu roven absolutní hodnotě uvedeného determinantu*, tj. *absolutní hodnotě vnějšího součinu příslušných vektorů.*

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|. \tag{129}$$

Tím je příklad 10.1 vyřešen! Poznatky, které jsme získali, shrneme formou následující věty.

Definice 24 (Vnější (smíšený) součin). *Operaci, která třem vektorům $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, daným souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vzhledem k ortonormální bázi V_3, přiřadí hodnotu determinantu*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{130}$$

případně výrazu

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}, \tag{131}$$

[8]Konkrétně nás v tuto chvíli zajímá, že z věty o rozvoji determinantu plyne pro determinant matice třetího řádu A vztah $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}) \cdot (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, kde i je číslo řádku od 1 do 3. Více o determinantu viz https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant.

který je s ním ekvivalentní, nazýváme vnější součin (též smíšený součin) vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, *značíme*

$$[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}].$$

10.1 Vlastnosti vnějšího součinu

Přímo z (130) plynou následující vlastnosti vnějšího součinu:

(1) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}] = -[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$.

(2) Pro $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležící v jedné rovině (tj. *komplanární*) je $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$.

PŘÍKLAD 10.2. *Uvedené vlastnosti vnějšího součinu dokažte použitím jeho zápisu ve formě determinantu*

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

10.2 Užití vnějšího součinu

Zde si uvedeme konkrétní příklady aplikace vnějšího součinu v analytické geometrii v trojrozměrném prostoru i v rovině. Protože, jak plyne z definice 24, hodnota smíšeného součinu vektorů je rovna hodnotě determinantu matice, jejímiž řádky jsou v daném pořadí tyto vektory, bude se zároveň jednat o příklady užití determinantu v analytické geometrii a tím o ukázky praktického významu tohoto algebraického pojmu.

10.2.1 Objem rovnoběžnostěnu

PŘÍKLAD 10.3. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory* $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 2)$, $\vec{w} = (1, 1, 5)$.

Řešení: Dle (129) pro objem daného rovnboběžnostěnu platí

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| = 9. \tag{132}$$

10.2.2 Obsah rovnoběžníku/trojúhelníku v rovině

V řešení příkladů 9.2, 9.3 na str. 109 a 110 jsme si ukázali, jak lze k výpočtu obsahu rovnoběžníku či trojúhelníku využít vektorový součin, nejenom v prostoru dimenze 3, ale i v rovině. V případě roviny stačilo přidat jako třetí souřadnici nulu. Nyní si ukážeme, jak tento postup souvisí s *vnějším součinem*.

Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Pokud jejich souřadnice upravíme ne tvar $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ můžeme obsah rovnoběžníku, který je jimi určen, vyjádřit vztahem

$$S_\diamond = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Protože pro vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ platí

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right),$$

je zřejmé, že obsah uvažovaného rovnoběžníku lze vyjádřit také ve tvaru

$$S_\diamond = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|,$$

kde determinant $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ můžeme dle (130) chápat jako zápis vnějšího součinu $[\vec{u}\ \vec{v}]$ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Potom ovšem můžeme psát

$$S_\diamond = |[\vec{u}\ \vec{v}]|.$$

Pojem vnějšího součinu tak můžeme použít i v rovině, tj. pro dva vektory o dvou složkách. Jeho absolutní hodnotu potom interpretujeme jako *obsah rovnoběžníku těmito vektory omezeného.*

Pro obsah příslušného trojúhelníku pak platí

$$S_\triangle = \frac{1}{2} S_\diamond = \frac{1}{2}|[\vec{u}\ \vec{v}]| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|. \tag{133}$$

Můžeme ovšem použít i zápis, v němž figurují přímo souřadnice bodů – vrcholů trojúhelníku. Dva nezávislé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ příslušející trojúhelníku ΔABC můžeme umístit do jeho stran AB a AC, tj. $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - A$. Po dosazení do (133) potom pro $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ platí

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\|. \tag{134}$$

Případně můžeme použít ekvivalentní tvar, v němž nefigurují rozdíly souřadnic daných bodů

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{135}$$

PŘÍKLAD 10.4. *Užitím svých znalostí o výpočtu determinantu pomocí věty o rozvoji determinantu dokažte, že platí*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Uvažujte rozvoj levého determinantu podle třetího sloupce, ovšem s tím, že si matici nejdříve upravíte tak, aby tento rozvoj měl jenom jeden člen.

Analogické vyjádření bychom dostali i pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru dimenze 3. Dostáváme tak následující snadno zapamatovatelné vztahy:

(1) *Obsah rovnoběžníku určeného body* A, B, C

$A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$:

$$S = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\|. \tag{136}$$

(2) *Objem rovnoběžnostěnu určeného body* A, B, C, D

$A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$:

$$V = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{matrix} \right\|. \tag{137}$$

PŘÍKLAD 10.5. *Vypočítejte obsah trojúhelníka* ABC, *je-li dáno:* $A = [-1, 1]$, $B = [3, 3]$, $C = [1, 5]$.

Řešení: Použijeme (134) (můžeme ovšem použít také (135))

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right\| = 6.$$

10.2.3 Rovnice roviny určené třemi body

Vnější součin můžeme využít k elegantnímu zápisu obecné rovnice roviny dané třemi nekolineárními body, například A, B, C (viz Obr. 47). Využijeme skutečnosti, že právě jenom pro bod X náležející rovině ABC je objem rovnoběžnostěnu určeného trojicí vektorů $B - A$, $C - A$, $X - A$ roven nule. Obecnou rovnici roviny ABC tak můžeme zapsat ve tvaru

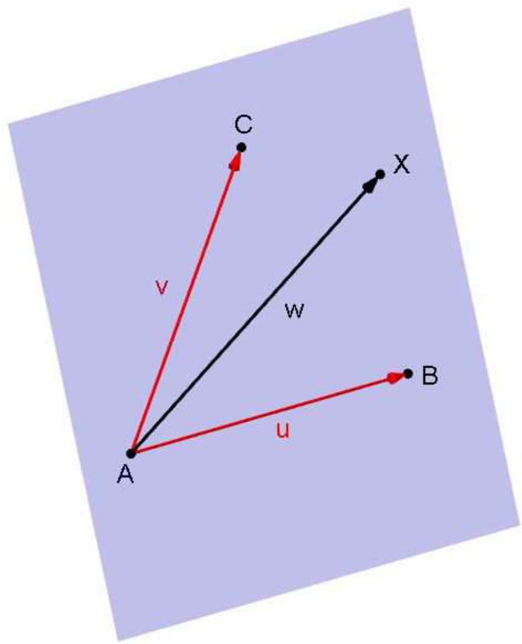
$$[(X - A)(B - A)(C - A)] = 0, \tag{138}$$

nebo pomocí determinantu obsahujícího souřadnice bodů X, A, B, C

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

případně souřadnice příslušných vektorů $X - A, B - A, C - A$

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Obrázek 47: Vektory $X - A, B - A, C - A$ jsou lineárně závislé

PŘÍKLAD 10.6. *Určete obecnou rovnici roviny* $\sigma = (ABC)$ *pro* $A = [-2, 3, 1]$, $B = [4, -2, 5]$, $C = [6, 1, 7]$.

Řešení: Zápis řešení v kódu programu wxMaxima:

```
(% i4)  A:[-2,3,1]$ B:[4,-2,5]$ C:[6,1,7]$ X:[x,y,z]$
(% i5)  M:matrix(X-A,B-A,C-A);
```

$$\begin{pmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 6 & -5 & 4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \tag{M}$$

```
(% i6)  expand(determinant(M))=0;
```

$$28z - 4y - 22x - 60 = 0 \tag{\% o6}$$

10.2.4 Objem simplexu

Dosud jsme se zabývali převážně vlastnostmi vektorového prostoru (tj. množiny směrů), přitom jsme si ale občas odskočili do bodového prostoru (tj. množiny bodů), abychom s jeho pomocí vektorový prostor znázorňovali (přímky nebo roviny jdoucí počátkem soustavy souřadnic), nebo abychom v něm zkoušeli výpočty založené na vlastnostech vektorů (vzdálenosti bodů, odchylky přímek, rovnice přímek a rovin). Takovou návštěvu bodového prostoru (konkrétně *Eukleidovského bodového prostoru*, viz kapitola 17) si dopřejeme i v této kapitole. Budeme se v ní sice zabývat téměř tím samým, jako v předcházejících kapitolách, tedy výpočty obsahů a objemů, tentokrát ovšem budeme na předmětné útvary nahlížet jako na speciální podmnožiny Eukleidovského bodového prostoru, tzv. *simplexy*.

„Simplex“ znamená latinsky „jednoduchý“. Zde tímto pojmem rozumíme *konvexní obal* $n+1$ *lineárně nezávislých bodů v* E_n, tj. konvexní obal 2 různých bodů v prostoru dimenze 1, 3 nezávislých bodů v prostoru dimenze 2, 4 nezávislých bodů v prostoru dimenze 3 atd. *Konvexním obalem množiny bodů* rozumíme *průnik všech konvexních množin, které tyto body obsahují.* Pro správné pochopení této charakteristiky simplexu si připomeneme význam použitých pojmů.

Konvexní a nekonvexní útvar

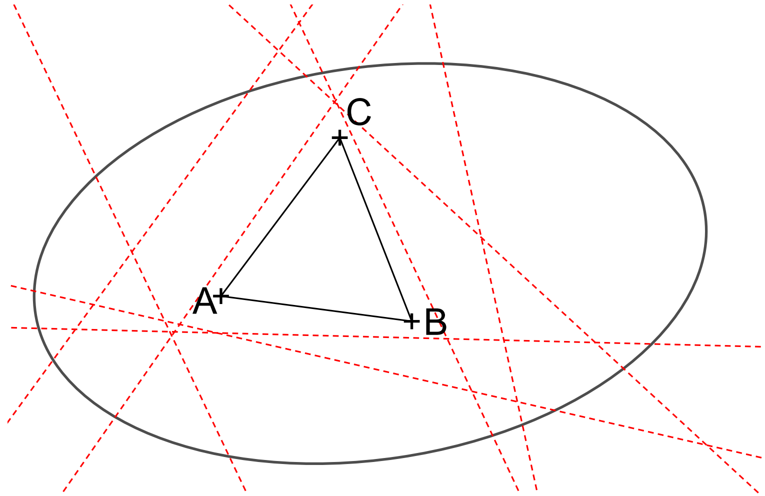
Útvar (množina bodů) je *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 48, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*, je potom

Obrázek 48: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 48, vpravo.

Konvexní obal

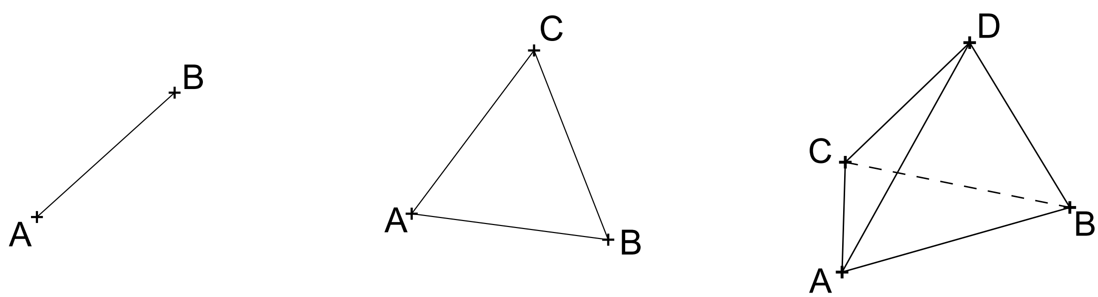
Význam pojmu *konvexní obal lineárně nezávislých bodů* si vysvětlíme na příkladu 3 lineárně nezávislých bodů. Body jsou lineárně nezávislé, pokud jsou lineárně nezávislé vektory jimi určené, viz definice 31 na str. 138. V případě tří bodů to nastane tehdy, když neleží v přímce (tj. nejsou *kolineární*), ale tvoří trojúhelník. Na Obr. 49 se jedná o body A, B, C. Na obrázku tyto body patří konvexnímu útvaru ve tvaru elipsy. Nyní tento útvar budeme „zmenšovat“, abychom nakonec dostali „nejmenší“ konvexní útvar, který ještě body A, B, C obsahuje. Protože takový útvar je průnikem všech konvexních množin, které tyto body obsahují, jedná se o jejich *konvexní*



Obrázek 49: Konvexním obalem 3 lineárně nezávislých bodů A, B, C je trojúhelník ΔABC

obal. Pro zachování konvexnosti budeme používat jenom rovné řezy, viz červené přerušované čáry. Je zřejmé, že se jimi dříve nebo později prořežeme právě k trojúhelníku ΔABC, a dále již nebudeme moci pokračovat. Trojúhelník ΔABC je proto konvexním obalem množiny lineárně nezávislých bodů A, B, C.

Stejným způsobem bychom se prořezali k úsečce v prostoru dimenze 1 (jako bychom hledali nejmenší část niti, která obsahuje „uzlíky“ A, B) a ke čtyřstěnu (trojbokému jehlanu) v prostoru dimenze 3 (zkuste okrajovat bramboru, použijte konvexní, aby na ní zůstaly čtyři body, které si na jejím povrchu vyznačíte), viz Obr. 50.

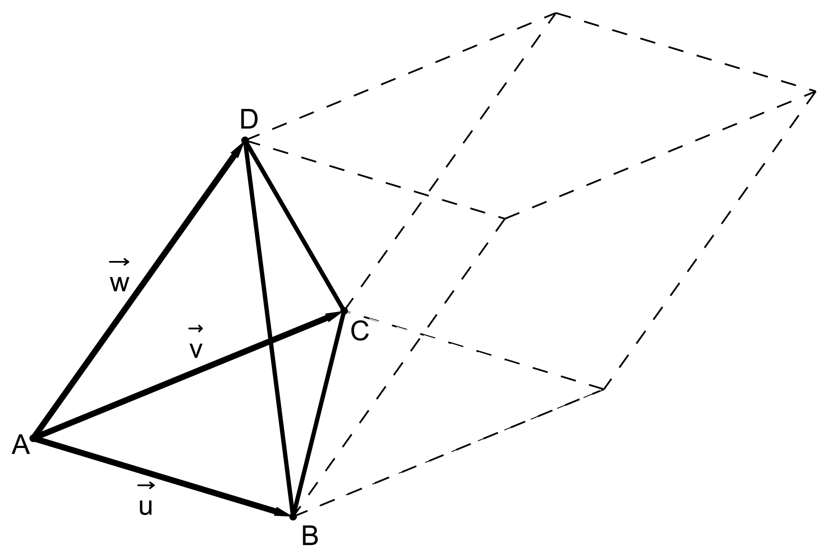


Obrázek 50: Úsečka, trojúhelník a čtyřstěn jako simplexy v bodových prostorech 1, 2 a 3, v daném pořadí

Nyní tedy již známe vše potřebné k tomu, abychom si následující příklad 10.7 uvedli jako *příklad na výpočet objemu simplexu v prostoru dimenze 3.*

PŘÍKLAD 10.7. *Určete objem čtyřstěnu s vrcholy* $A = [3,4,0]$, $B = [9,5,-1]$, $C = [1,7,1]$, $D = [3,2,5]$.

Řešení: Čtyřstěn $ABCD$ si můžeme představit jako část rovnoběžnostěnu určeného body A, B, C, D, viz Obr. 51. Protože objem rovnoběžnostěnu umíme spočítat, platí



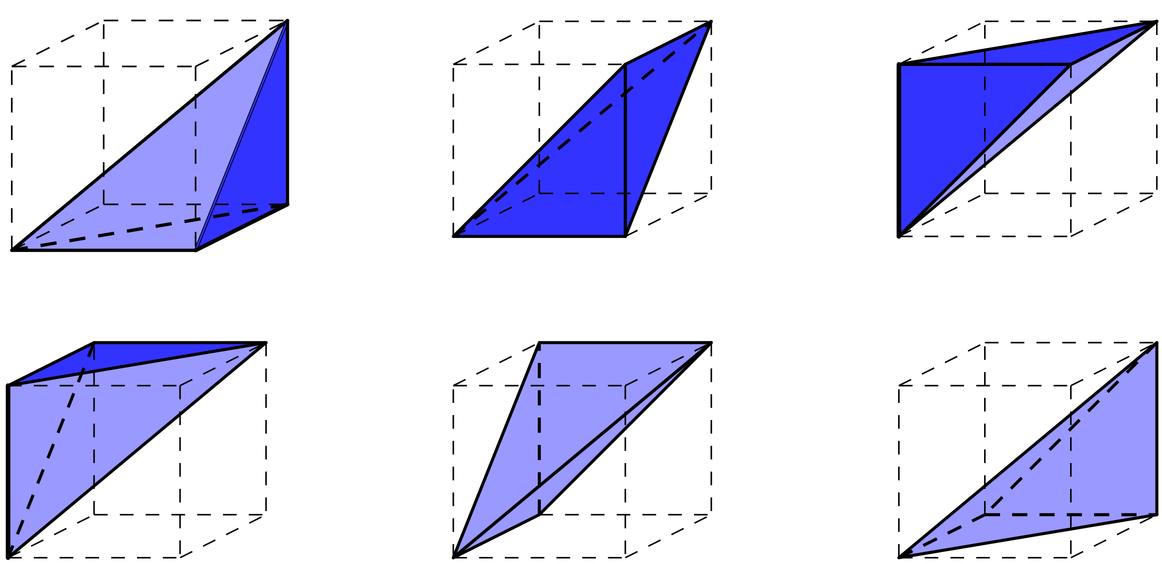
Obrázek 51: Čtyřstěn jako část rovnoběžnostěnu

pro něj

$$V = |[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]| = |[B - A,\ C - A,\ D - A]|,$$

viz též (137), stačí zjistit, jakou částí rovnoběžnostěnu čtyřstěn je. Řešení je překvapivě jednoduché. Díky již zmíněnému Cavalieriho principu, viz str. 114, stačí vyřešit tuto otázku pro krychli. Pro libovolný rovnoběžnostěn pak bude platit totéž.

Ptáme se tedy: *„Na jaký nejmenší počet čtyřstěnů téhož objemu můžeme rozřezat krychli?“* Odpověď zní „6“, jak vidíme na následujících obrázcích.



Objem čtyřstěnu $ABCD$ je tak dán vztahem

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}|[B-A,\ C-A,\ D-A]| = \frac{1}{6}\left\| \begin{array}{ccc} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{array} \right\|.$$

Jak víme, simplexem v rovině je trojúhelník. Rovinnou analogií výše uvedeného výpočtu objemu simplexu v prostoru dimenze 3 je tak výpočet obsahu trojúhelníku ΔABC

$$V(ABC) = \frac{1}{2}|[B-A,\ C-A]| = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{cc} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{array} \right\|.$$

Jak ilustruje definice 26 v následující kapitole, lze vztah pro výpočet objemu simplexu zobecnit do prostoru libovolné dimenze n.

10.3 Vnější součin v prostoru V_n

Studium této kapitoly je dobrovolné.

Definice 25 (Vnější součin). *Vnějším součinem*[1] *vektorů* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V_n$, *které jsou dány souřadnicemi* $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), i = 1, 2, \ldots, n$, *vzhledem k ortonormální bázi, nazýváme determinant*

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|.$$

Značíme ho

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n].$$

Spolu se zobecněním vnějšího součinu do prostoru dimenze n lze to samé provést i s výpočtem objemu simplexu.

Definice 26 (Objem simplexu). *Objemem simplexu, který je určen* $n+1$ *body* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in E_n$, *rozumíme číslo:*

$$V(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \frac{1}{n!}\left|[A_1 - A_{n+1},\ \ldots,\ A_n - A_{n+1}]\right|.$$

[1] Pro podrobnější studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

10.4 Cvičení: Vnější součin

1. Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{k} = (1, -3, 1)$, $\vec{l} = (2, 1, 2)$, $\vec{m} = (1, 1, 7)$.

2. Vypočítejte obsah trojúhelníka ΔABC je-li$A = [5, -1]$, $B = [3, 4]$, $C = [-1, 6]$.

3. Určete obecnou rovnici roviny $\rho = (KLM)$ pro $K = [2, 1, 3]$, $L = [-4, 5, 3]$, $M = [1, 1, 6]$.

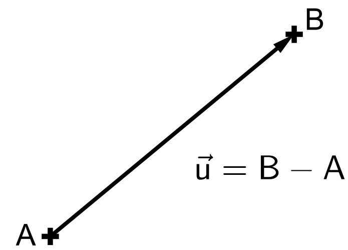
3. Určete objem čtyřstěnu s vrcholy $A = [1, -5, 2]$, $B = [4, 7, 3]$, $C = [1, 0, 1]$, $D = [-3, 1, 6]$.

[1] Pro další studium tématu této kapitoly doporučuji publikaci [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 117–125

11 Afinní bodový prostor

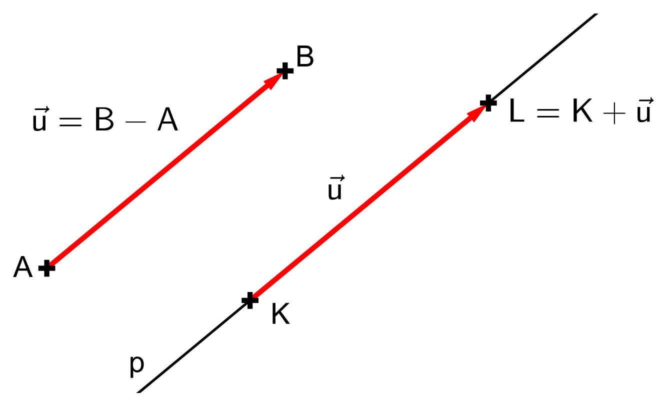
Pojem *afinní bodový prostor*[1] představuje zobecnění pojmů *rovina* (tj. dvojrozměrný bodový prostor) a *prostor* (tj. trojrozměrný bodový prostor), které známe z planimetrie, stereometrie a analytické geometrie.

Prvky afinního bodového prostoru nazýváme *body.* Klíčovou vlastností afinního bodového prostoru je, že každými dvěma jeho body je určen vektor, který je dán jejich rozdílem, viz Obr. 52.



Obrázek 52: Dvěma body A, B je určen vektor $\vec{u}$

Díky této vlastnosti můžeme vyjádřit bod v afinním bodovém prostoru jako součet jiného bodu a vektoru, viz Obr. 53.



Obrázek 53: Součtem bodu K a vektoru $\vec{u}$ je bod L

Uvedené skutečnosti nám dovolují zavést v afinním bodovém prostoru souřadnice, popisovat jeho podmnožiny a zkoumat vztahy[2] mezi nimi. Těmto otázkám se budeme podrobně věnovat v následujících partiích textu. Zde si jenom pro příklad uveďme *parametrickou rovnici přímky*, jejíž zavedení přímo vyplývá z popisované souvislosti mezi dvojicí bodů a vektorem.

Uvažujme přímku p z Obr. 53, která je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{u}$. Stejně jako jsme zapsali bod L součtem $L + \vec{u}$, můžeme vyjádřit každý bod X

[1] *Affinis* znamená latinsky *příbuzný.* Poprvé tento pojem použil *Leonhard Euler* (1707-1783) pro označení vztahu vzoru a obrazu v zobrazení, které zachovává dělící poměr. Takovým zobrazením se začalo říkat *afinní zobrazení. Afinní geometrií* rozumíme geometrii bez vzdáleností a odchylek.

[2] V prostém afinním bodovém prostoru neumíme měřit vzdálenosti a úhly. To je umožněno až zavedením skalárního součinu v příslušném vektorovém prostoru (říkáme mu *zaměření* bodového prostoru). Potom hovoříme o *Eukleidovském bodovém prostoru.*

přímky p součtem $L + \vec{x}$, kde $\vec{x} = t\vec{u}$, $t \in R$. Tak dostáváme *parametrickou rovnici* (též *parametrické vyjádření*) *přímky* p:

$$X = K + t\vec{u};\ t \in R. \tag{139}$$

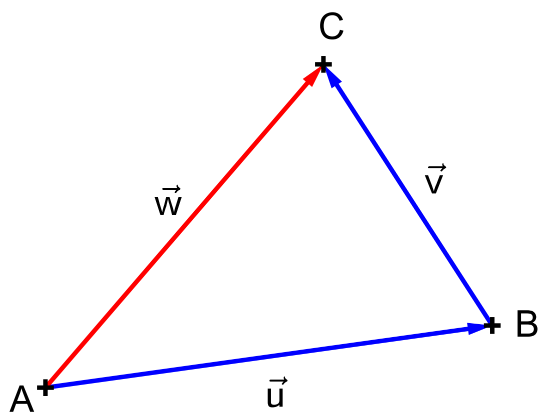
11.1 Definice afinního bodového prostoru

Skutečnost, že každými dvěma body je určen vektor, nám umožňuje při definici afinního bodového prostoru využít axiomů definujících vektorový prostor.

Přiřazení vektoru $\vec{u}$ z prostoru V_n dvojici bodů A, B z afinního bodového prostoru A_n popíšeme pomocí zobrazení $g : A_n \times A_n \to V$, kde

$$g(A, B) = \vec{u} = B - A. \tag{140}$$

V souvislosti se zobrazením (140) se v afinním bodovém prostoru setkáme se dvěma „novými“ operacemi: (i) *Odčítání bodů*, jehož výsledkem je vektor, $\vec{u} = B - A$. (ii) *Sčítání bodu a vektoru*, jehož výsledkem je bod, $B = A + \vec{u}$.



Obrázek 54: $(B - A) + (C - B) = (C - A)$

Při definování afinního bodového prostoru požadujeme, aby zobrazení (140) mělo s ohledem na uvedené operace vlastnost, kterou ilustruje Obr. 54. Pro trojúhelník ABC platí $B - A = \vec{u}$, $C - B = \vec{v}$, $C - A = \vec{w}$, $A + \vec{u} = B$, $B + \vec{v} = C$, $A + \vec{w} = C$. Potom můžeme psát

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{w} = C.$$

Pro vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ by tak měla platit rovnost $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, kterou můžeme přepsat pomocí zobrazení (140) takto

$$g(A, B) + g(B, C) = g(A, C).$$

Jedná se o tzv. *Chaslesův vztah* a jeho platnost požadujeme v každém afinním bodovém prostoru[1].

[1] Další vlastnosti operací *odčítání bodů* a *sčítání bodu a vektoru* jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 15.

Definice 27 (Afinní bodový prostor). *Neprázdnou množinu A_n (její prvky jsou tzv. body) nazveme afinním bodovým prostorem dimenze n, jestliže je dán vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení $g: \ A_n \times A_n \to V$ těchto vlastností:*

1. Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že

$$g(A,B) = \vec{x} \qquad \text{(t zapisujeme jako } B - A = \vec{x}).$$

2. Pro každé tři body $A, B, C \in A_n$ platí, že

$$g(A,C) = g(A,B) + g(B,C).$$

Vektorový prostor V_n nazýváme (vektorovým) zaměřením afinního bodového prostoru A_n.

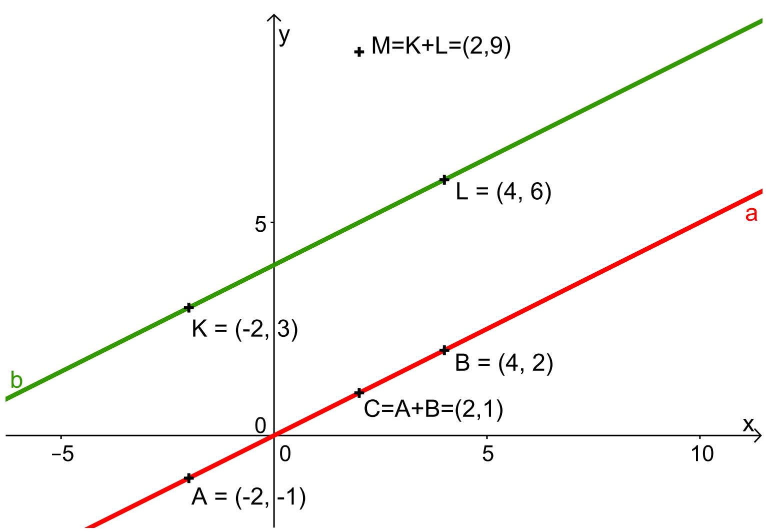
Příklady afinního bodového prostoru

(1) *Bod*, tj. jednoprvková množina se zaměřením $V_0 = \{\vec{o}\}$, je *afinní bodový prostor dimenze 0.*

(2) *Přímka* je *afinním bodovým prostorem dimenze 1* se zaměřením $V_1 = [\vec{u}]$, kde $\vec{u}$ je jejím směrovým vektorem.

(3) *Vektorový prostor V_n je afinním bodovým prostorem dimenze n.* Zobrazení (140) je v tomto případě definováno vztahem $g(\vec{u},\vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$.

Poznámka. Možná překvapivá informace v příkladu (3), že vektorový prostor je zároveň i afinním bodovým prostorem, vychází ze skutečnosti, že vektorový prostor automaticky splňuje definici 27 (Vyzkoušejte!). Obráceně to však neplatí! Nelze říci, že afinní bodový prostor je zároveň vektorovým prostorem. Jak ilustruje Obr. 55, na němž jsou znázorněny dvě přímky a a b, které jsou obě afinními bodovými



Obrázek 55: $C = (A + B) \in a$, $M = (K + L) \notin b$

(pod)prostory. Přitom jenom přímka a je zároveň i vektorovým (pod)prostorem.

Vidíme, že přímka b neobsahuje nulový vektor (tj. bod $[0,0]$, viz *nutná podmínka existence vektorového podprostoru* na str. 52), naplatí pro ni ani požadavek, že součet jejích prvků (bodů) je opět jejím prvkem (bodem) (viz definice 3 a věta 9).

Poznámky.

1. Afinní bodový prostor A_n zapisujeme také jako

$$A_n = (A, V_n, g),$$

kde A je množina bodů, V_n je vektorové zaměření vektorového prostoru a g je zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$.

2. Afinní bodový prostor A_n nazýváme plným jménem „afinní bodový prostor nad tělesem T,“ kde T odpovídá tělesu, nad nímž je definováno zaměření V_n.

PŘÍKLAD 11.1. *Rozhodněte, zda je množina (P, V, g) s níže uvedenými specifikacemi afinním bodovým prostorem.*
a) $P = R^3,\ V = \{(x_1, x_2, x_3); x_1, x_2, x_3 \in R\},\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$,
b) $P = R^3,\ V = \{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in R\},\ g(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, 0)$.

Řešení:
ad a) Jedná se o afinní bodový prostor.

ad b) Nejedná se o afinní bodový prostor. Problém je s vektorovým prostorem V. Z definice 27 není splněn požadavek „Pro každý bod $A \in A_n$ a pro každý vektor $\vec{x} \in V_n$ existuje jediný bod $B \in A_n$ tak, že $g(A, B) = \vec{x}$“. Například pro bod $A = (2, 3, 7)$ a vektor $\vec{x} = (1, 2, 0)$ existuje nekonečně mnoho bodů $B = (3, 5, k), k \in R$, pro které je $\vec{x} = B - A$.

PŘÍKLAD 11.2. *Označme M množinu všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ a W_A vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = o$. Dokažte, že množina M je afinním bodovým prostorem se zaměřením W_A.*

Řešení: Nejprve definujeme zobrazení $g: M \times M \to W_A$. Pro $x_1, x_2 \in M$ zřejmě platí $Ax_1 = b$ a $Ax_2 = b$. Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme $A(x_2 - x_1) = \vec{o}$, tj. $u = x_2 - x_1 \in W_A$. Zobrazení g tak můžeme definovat vztahem $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Ověření, že (M, W_A, g) splňuje definici 27 a je tedy afinním bodovým prostorem přenecháváme čtenáři, postup je zřejmý.

11.2 Cvičení: Afinní bodový prostor

1. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$, kde $K = [1,3]$, $L = [-1,9]$, $M = [-2,-4]$, $N = [0,-10]$, je rovnoběžník. Spočítejte jeho obsah.

2. V rovině $\mathbb{E}_2$ jsou dány body $K = [2,-2]$, $L = [-1,0]$, $M = [0,3]$. Určete bod $N \in \mathbb{E}_2$ tak, aby čtyřúhelník $KLMN$ byl rovnoběžník. Spočítejte jeho obsah.

3. Body $A = [-1,2]$ a $B = [4,0]$ jsou dva sousední vrcholy rovnoběžníku v $\mathbb{E}_2$, jehož střed je v bodě $S = [2,2]$. Najděte souřadnice zbývajících dvou vrcholů. Spočítejte obsah tohoto rovnoběžníku.

4. Body $A = [1,2]$ a $C = [3,8]$ jsou protilehlé vrcholy čtverce $ABCD$. Určete souřadnice jeho zbývajících vrcholů B, D.

5. Zjistěte, zda body $A = [3,5,8]$, $B = [-7,-3,10]$, $C = [8,9,7]$ leží na jedné přímce. Pokud ano, napište její parametrické rovnice.

6. Dokažte, že body $A = [2,1,1]$, $B = [5,5,6]$, $C = [6,11,14]$, $D = [3,7,9]$ jsou vrcholy rovnoběžníka.

7. Určete vrcholy trojúhelníka, jsou-li dány středy $A' = [-2,1]$, $B' = [3,-1]$, $C' = [1,5]$ jeho stran. Vypočtěte jeho obsah.

8. Vrcholem C trojúhelníku ABC veďte rovnoběžku se stranou AB; $A = [-2,1], B = [3,-1], C = [0,4]$.

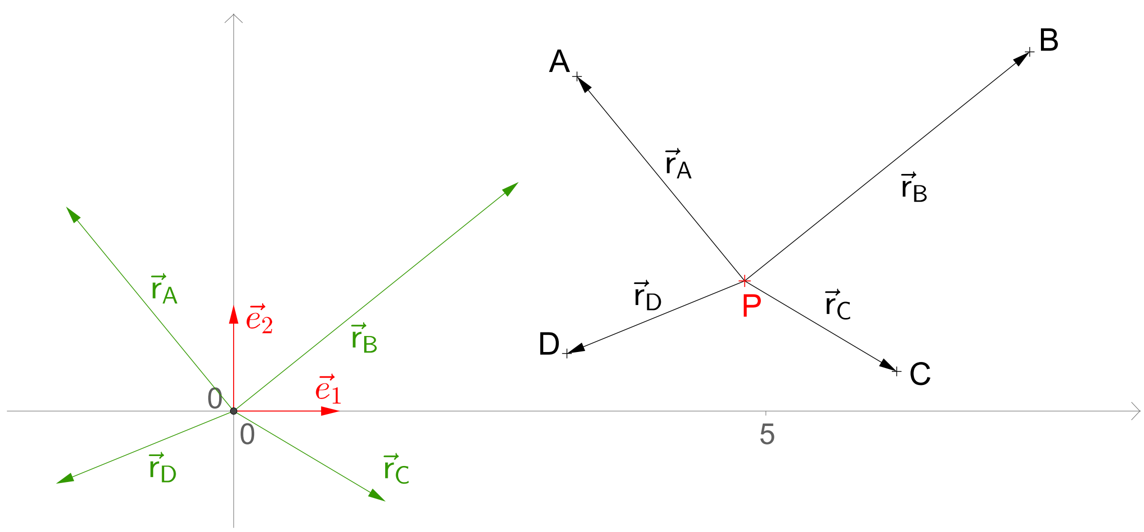
9. Bodem V veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou $\sigma = (KLM)$; $K = [0,4,-3], L = [3,1,5], M = [-2,0,0], V = [1,-2,-3]$.

11.3 Afinní souřadnice bodů

Zobrazení $g: A_n \times A_n \to V$ (140) zprostředkovává vztah mezi afinním bodovým prostorem A_n a příslušným vektorovým prostorem V, jeho zaměřením. Dvěma různým bodům je přiřazen vektor a naopak, bodu a vektoru je přiřazen bod. Kdyby toto zobrazení bylo vzájemně jednoznačné, mohli bychom ho využít k zavedení souřadnic v bodovém prostoru – bodům bychom přiřadili stejné souřadnice, jaké by měly jim odpovídající vektory. Bohužel tomu tak ale není, existuje nekonečně mnoho různých dvojic bodů, kterým je přiřazen stejný vektor.

Naštěstí je snadné tuto nejednoznačnost odstranit. Stačí zvolit jeden bod jako pevný, označme ho P, a každému bodu X bodového prostoru přiřadit vektor $g(P, X) = X - P$. Jak ilustruje Obr. 56, toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, dvěma různým bodům jsou přiřazeny dva různé vektory a každému vektoru odpovídá právě jeden bod:

$$\begin{aligned} A - P &= \vec{r}_A & \longrightarrow && A &= P + \vec{r}_A, \\ B - P &= \vec{r}_B & \longrightarrow && B &= P + \vec{r}_B, \\ C - P &= \vec{r}_C & \longrightarrow && C &= P + \vec{r}_C, \\ D - P &= \vec{r}_D & \longrightarrow && D &= P + \vec{r}_D. \end{aligned}$$



Obrázek 56: Zavedení afinní soustavy souřadnic (repéru)

Potom skutečně mohu každý bod bodového prostoru jednoznačně určit pomocí souřadnic příslušného vektoru (které udávám vzhledem k bázi zaměření V_n).

Poznámka. Vektor $\vec{r} = X - P$ nazýváme *radiusvektor* (též *průvodič*) bodu X. Viz vektory $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ na Obr. 56.

Definice 28 (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$ a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n. Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$. Bod P nazýváme počátek soustavy souřadnic.

Souřadnice bodu X vzhledem k repéru $\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ jsou tedy totožné se souřadnicemi vektoru $X - P$ vzhledem k bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ vektorového zaměření V_n. Jestliže $X - P = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, můžeme bod $P \in A_n$ zapsat rovnicí

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n, \tag{141}$$

případně ve zkráceném tvaru

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \tag{142}$$

a souřadnice bodu P zapíšeme

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{143}$$

Na vztahu (141) (příp. (142)) je založena definice *parametrického vyjádření afinního bodového prostoru a podprostoru*, významného prostředku matematického popisu těchto množin.

Poznámky.

1. Prostor se soustavou souřadnic φ zapisujeme:

$$A_n = [P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n].$$

2. Souřadnice bodů a vektorů někdy odlišujeme typem závorek

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \quad \text{ale} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

3. Souřadnice bodu a jeho radiusvektoru jsou stejné.

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{a} \quad \vec{r}_A = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

4. Protože $P - P = (0, 0, \ldots, 0)$, počátek afinní soustavy souřadnic má souřadnice

$$P = [0, 0, \ldots, 0].$$

PŘÍKLAD 11.3. *V afinní rovině A_2 je dán repér $\mathcal{R} = \{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Pro bod A platí $A = P - \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Určete jeho souřadnice vzhledem k $\mathcal{R}$.*

Řešení: Souřadnice bodu A vzhledem k repéru $\mathcal{R}$ jsou $A = [-1; 2]$.

11.4 Kartézská soustava souřadnic

Afinní bodový prostor na jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin nazýváme *Eukleidovský bodový prostor* a značíme ho E_n. V takovém bodovém prostoru můžeme zavést soustavu souřadnic (repér) $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, jejíž báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je ortonormální. Takovou soustavu nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic.*

Definice 29 (Kartézská soustava souřadnic)**.** *Kartézskou soustavou souřadnic rozumíme afinní soustavu souřadnic $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, ve které $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ je ortonormální bází.*

12 Afinní bodový podprostor

Ze všech možných podmnožin afinního bodového prostoru nás budou zajímat jenom takové, které samy splňují definici afinního bodového prostoru, budeme jim říkat *afinní bodové podprostory* (srovnejte se zavedením pojmu *vektorový podprostor* na str. 51).

Definice 30 (Afinní bodový podprostor)**.** *Neprázdnou podmnožinu A_k afinního bodového prostoru A_n, která je sama afinním bodovým prostorem (viz definice 27), nazýváme afinním bodovým podprostorem prostoru A_n. Zapisujeme*

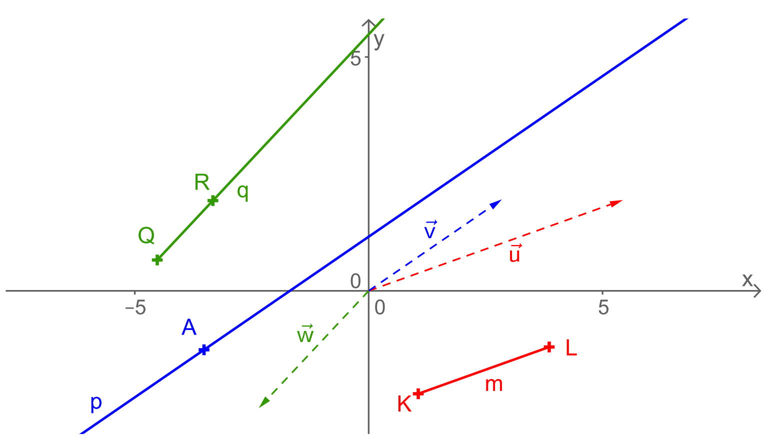
$$A_k \subseteq\subseteq A_n.$$

Příklady afinních bodových podprostorů

(1) Samotný *afinní bodový prostor* A_n je svým podprostorem, $A_n \subseteq\subseteq A_n$.

(2) *Bod* (A_0), *přímka* (A_1), *rovina* (A_2) jsou typické podprostory prostorů A_2, A_3, kterými se budeme zabývat.

PŘÍKLAD 12.1. *Může být polopřímka, úsečka, polorovina, kruh nebo trojúhelník bodovým podprostorem prostoru A_2?*



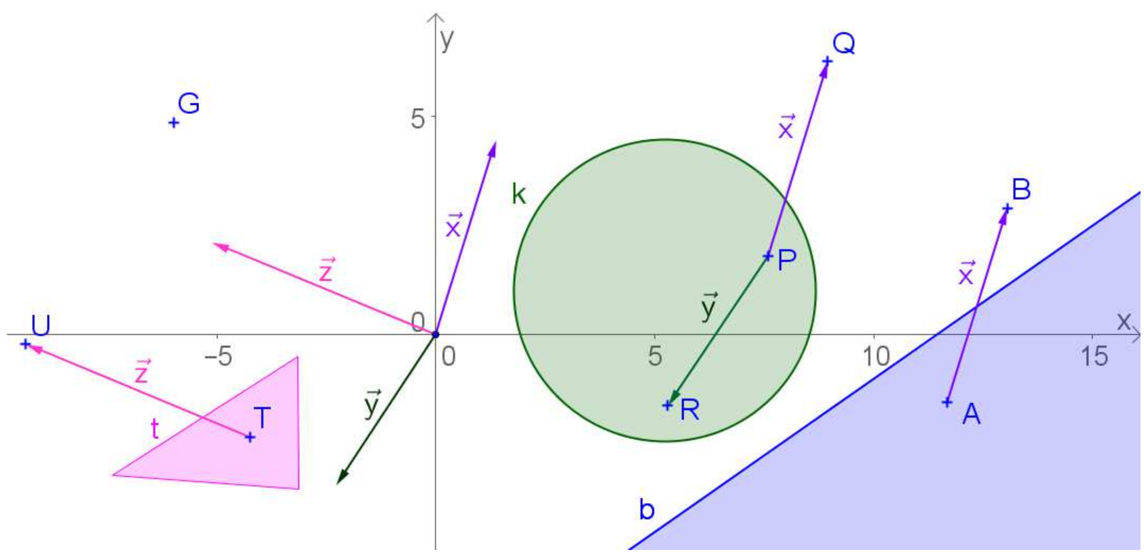
Obrázek 57: Je polopřímka q nebo úsečka m afinním bodovým podprostorem?

Řešení: Nejprve se zaměříme na polopřímku a úsečku, viz Obr. 57. Protože se jedná o části přímky, budeme jako jejich případná zaměření uvažovat vektorové prostory generované směrovými vektory odpovídajících přímek. V případě polopřímky $q = \overrightarrow{QR}$ uvažujeme vektorový prostor $U = [\vec{w}]$, v případě úsečky m pak vektorový prostor $V = [\vec{u}]$.

Nyní ověříme, jak polopřímka a úsečka jako množiny bodů splňují definici 27. Nemusíme se zabývat otázkou existence zobrazení $g : A_k \times A_k \to V$. Ta je zaručena skutečností, že vyšetřované množiny jsou podmnožinami afinního bodového prostoru A_2. Stejně tak vlastnost *2* z definice je zřejmě splněna. Soustředíme se proto na vlastnost *1*.

Z Obr. 57 je evidentní, že pro polopřímku a úsečku tato vlastnost není splněna. Vidíme, že v každé z těchto množin bezesporu existují body a v jim příslušejících vektorových prostorech vektory, které když sečteme, dostaneme body, které do těchto množin nepatří. Příkladem je bod K úsečky m spolu s vektorem $\vec{u}$ nebo bod R polopřímky q spolu s vektorem $\vec{w}$. Body $K + \vec{u}$, $R + \vec{w}$ rozhodně nenáleží úsečce m, respektive polopřímce q. Tyto podmnožiny bodového prostoru A_2 tak nemohou být afinními bodovými podprostory. Pro srovnání je na Obr. 57 přímka p určená bodem A a směrovým vektorem $\vec{v}$, která, jak již víme, definici 27 splňuje a je tedy afinním bodovým prostorem (s vektorovým zaměřením $V = [\vec{v}]$).

Ke stejnému závěru jako v případě polopřímky a úsečky dospějeme i u poloroviny, kruhu nebo trojúhelníku, viz Obr. 58. Pokud jako možné vektorové zaměření těchto množin uvažujeme vektorový prostor V_2, je z obrázku patrné, že opět v každé z množin existuje bod a ve vektorovém prostoru V_2 vektor tak, že jejich součet do množiny nepatří. Nejedná se tedy o afinní bodové podprostory.



Obrázek 58: $U = I + \vec{z} \notin t$, $Q = P + \vec{x} \notin k$, $B = A + \vec{x} \notin \rightarrow bA$

Speciální afinní bodové podprostory

Následující pojmy se používají k označení afinních bodových podprostorů uvedených dimenzí, bez ohledu na dimenzi příslušného afinního bodového prostoru A_n.

- *přímka*, podprostor dimenze 1, značíme A_1,
- *rovina*, podprostor dimenze 2, značíme A_2,
- *nadrovina*, podprostor dimenze $n-1$, značíme A_{n-1}.

12.1 Parametrické vyjádření podprostoru

Již víme, že každý bod X *afinního bodového prostoru* A_n můžeme vyjádřit jako součet zvoleného pevného bodu A a touto volbou jednoznačně určeného vektoru $\vec{x}$, $X = A + \vec{x}$. Při dané bázi $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ vektorového zaměření V_n prostoru A_n potom můžeme dle (141) bod X vyjádřit rovnicí $X = P + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \ldots + x_n\vec{b}_n$.

Stejný princip uplatníme při popisu *afinního bodového podprostoru* $A_k \subseteq\subseteq A_n$. Každý jeho bod $X \in A_k$ můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \vec{x}, \tag{144}$$

kde A je pevně zvolený bod z A_k a $\vec{x}$ je vektor z vektorového podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$, který je zaměřením A_k. Afinní bodový podprostor A_k je tak určen svým zaměřením V_k a libovolným ze svých bodů A, zapisujeme

$$A_k = [A, V_k]. \tag{145}$$

Je-li $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ báze zaměření V_k, můžeme (144) psát ve tvaru

$$X = A + t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \ldots + t_k\vec{b}_k;\ \ t_1, t_2, \ldots, t_k \in R, \tag{146}$$

kterému říkáme *parametrické vyjádření* (též *parametrická rovnice*) *afinního bodového podprostoru*[1] $A_k \subseteq\subseteq A_n$. S ohledem na skutečnost, že zaměření V_k je určeno svou bází, tj. $V_k = [\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}]$, můžeme afinní bodový podprostor kromě (145) zapsat také ve tvaru

$$A_k = \left[A; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\right]. \tag{147}$$

[1] Příslušné věty o určení afinního bodového prostoru a jeho parametrickém vyjádření spolu s jejich důkazy jsou uvedeny v [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupnou na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 16–18.

Parametrická vyjádření speciálních podprostorů

Podobu vztahů (145) a (147) pro konkrétní podprostory si můžeme ilustrovat na příkladech podprostorů, s kterými se budeme v následujících pasážích nejvíce setkávat:

– *přímka*, $A_1 = [A; \vec{u}]: \quad X = A + t\vec{u}$,

– *rovina*, $A_2 = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]: \quad X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$,

– *nadrovina*, $A_{n-1} = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1}] : X = A + \sum_{i=1}^{n-1} t_i\vec{u}_i$,

– *afinní prostor*, $A_n = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n] : X = A + \sum_{i=1}^{n} t_i\vec{u}_i$.

PŘÍKLAD 12.2. *Přímka $p = [A; \vec{u}]$ je dána bodem $A = [1,2,3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (-2,5,11)$. Napište parametrické vyjádření přímky p.*

Řešení: $X = [1,2,3] + t(-2,5,11);\ t \in R.$

Rozepsáním rovnice $X = [1,2,3] + t(-2,5,11)$, kde $X = [x_1, x_2, x_3]$, po složkách dostaneme *parametrické rovnice přímky*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2t, \\ x_2 &= 2 + 5t, \\ x_3 &= 3 + 11t;\ t \in R. \end{aligned} \tag{148}$$

12.2 Parametrické rovnice podprostoru

Rozepsáním *parametrické rovnice* (též *parametrického vyjádření*) rovnice podprostoru A_k pro jednotlivé souřadnice (vzhledem k určité soustavě souřadnic φ) dostaneme *parametrické rovnice podprostoru*. Počet těchto rovnic odpovídá dimenzi n afinního bodového prostoru A_n, počet parametrů v nich potom odpovídá dimenzi k podprostoru A_k (viz příklad 12.2, kde tři rovnice odpovídají dimenzi prostoru, v němž je úloha zadána, zatímco jeden parametr koresponduje s dimenzí uvažovaného podprostoru, tj. přímky).

Uvažujme pro ilustraci ještě rovinu ρ jako podprostor $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$ afinního bodového prostoru A_3. Její parametrická rovnice je

$$\rho: \ X = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}; \quad t_1, t_2 \in R.$$

Pro souřadnice $X = [x_1, x_2, x_3], A = [a_1, a_2, a_3], \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vzhledem k soustavě souřadnic φ ji přepíšeme do tvaru

$$\rho: \ [x_1, x_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3] + t_1(u_1, u_2, u_3) + t_2(v_1, v_2, v_3); \quad t_1, t_2 \in R,$$

z kterého po rozepsání pro jednotlivé souřadnice dostaneme soustavu *parametrických rovnic roviny*

$$\rho: \quad \begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ x_3 &= a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3; \quad t_1, t_2 \in R. \end{aligned} \tag{149}$$

Stejně jako přímku a rovinu popíšeme parametrickými rovnicemi každý podprostor A_k afinního bodového prostoru A_n.

Věta 24 (Parametrické rovnice podprostoru)**.** *Nechť je v afinním prostoru A_n dána soustava souřadnic φ. Potom můžeme podprostor A_k; $A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]$, prostoru A_n určit parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_{11}t_1 + u_{21}t_2 + ... + u_{k1}t_k \\ x_2 &= a_2 + u_{12}t_1 + u_{22}t_2 + ... + u_{k2}t_k \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= a_n + u_{1n}t_1 + u_{2n}t_2 + ... + u_{kn}t_k \end{aligned} \tag{150}$$

zkráceně

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij}t_i; \quad j = 1, 2, ..., n,$$

kde $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$, $i = 1, 2, ..., k$.

PŘÍKLAD 12.3. *Zjistěte, zda body* $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, *leží v rovině* $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, *kde* $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$.

PŘÍKLAD 12.4. *Určete dimenzi afinního bodového prostoru A_n a jeho podprostoru A_k daného rovnicí:*
a) $X = [4, -4, 2, 1, 1] + t\,(2, -8, 3, -5, 1)$,
b) $X = [1, 0, 2, 2] + r\,(1, -1, 0, 0) + s\,(1, 2, 0, -1)$.

PŘÍKLAD 12.5. *Zjistěte, jaké bodové podprostory jsou určené parametrickými rovnicemi*

$$a) \quad \begin{aligned} x_1 &= r + s, \\ x_2 &= 1 - s, \\ x_3 &= -5 + 2r, \\ x_4 &= 2 - r + 4s, \end{aligned} \qquad\qquad a) \quad \begin{aligned} x_1 &= 5 - r + s + t, \\ x_2 &= r, \\ x_3 &= s, \\ x_4 &= 2 + 4s - t. \end{aligned}$$

12.3 Kanonický tvar rovnice přímky

Skutečnost, že parametrické rovnice přímky obsahují jenom jeden parametr, dovoluje modifikovat tuto soustavu rovnic do podoby, v níž je parametr vyloučen. Uvažujme přímku $p \in A_n$ danou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} p:\ x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \\ z &= a_3 + tu_3;\ t \in R. \end{aligned} \tag{151}$$

Potom platí

$$t = \frac{x - a_1}{u_1},\ t = \frac{y - a_2}{u_2},\ t = \frac{z - a_3}{u_3},$$

a přímku p tak můžeme zadat rovnicí ve tvaru

$$p:\ \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3},$$

kterému říkáme *kanonický tvar rovnice přímky.*

Poznámka. Pokud je $u_i = 0$, ponecháme pro příslušnou souřadnici x_i zvláštní rovnici. Například pro $p:\ x = 3, y = 1 - t, z = 4t;\ t \in R$ vypadá kanonický tvar rovnice přímky takto

$$p:\ x = 3,\ \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}.$$

PŘÍKLAD 12.6. *Napište parametrické vyjádření a kanonický tvar rovnice přímky, která je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$.*

a) $A = [3, 1, -4]$, $\vec{u} = (2, 7, 5)$,

b) $A = [2, 5, 1]$, $\vec{u} = (1, 2, 0)$.

12.4 Určení afinního podprostoru

Ze zkušenosti víme, že *přímka je určena dvěma různými body* a *rovina je určena třemi body, které neleží v přímce.* Otázkou je, kolik a jakých bodů potřebujeme k určení afinního bodového podprostoru dimenze k. Odpověď je skrytá ve vztahu (147). Potřebujeme tolik bodů podprostoru A_k, aby jimi bylo určeno k lineárně nezávislých vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ báze jeho vektorového zaměření V_k. Bodů tedy musí být $k + 1$ a musí být uspořádány tak, aby k jimi určených vektorů bylo nezávislých. Pro takovéto body zavedeme pojem *lineárně nezávislé body.*

Definice 31 (Lineárně nezávislé body). *Body $A_0, A_1, A_2, ..., A_k$ z prostoru A_n nazýváme lineárně nezávislé (závislé), jsou-li jimi určené vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, ..., k$, lineárně nezávislé (závislé).*

Věta 25 (O určení afinního bodového podprostoru). *Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je jednoznačně určen $k+1$ lineárně nezávislými body, které mu náleží.*

Důkaz. Zápis $A_k = [A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_0, \dots, A_k - A_0]$ je ekvivalentní vztahu (147)[1]. $\square$

Důsledky věty 25

- Přímka je určena dvěma nezávislými body, tj. dvěma různými body.
- Rovina je určena třemi nezávislými body, tj. třemi body, které neleží v přímce.
- Nadrovina je určena n nezávislými body.

Poznámka. Body ležící na jedné společné přímce nazýváme **kolineární** body. Body ležící v jedné rovině pak **komplanární** body. Více než dva kolineární body jsou lineárně závislé, stejně jako více než tři komplanární body.

Získané poznatky o souvislosti lineárně nezávislých bodů a vektorů nám dovolují zapsat parametrickou rovnici podprostoru A_k, který je dán $k+1$ lineárně nezávislými body, přímo užitím těchto bodů, jak ukazuje následující příklad.

PŘÍKLAD 12.7. *Napište parametrickou rovnici roviny $\rho = (A, B, C)$, kde $A = [1, 0, 1]$, $B = [3, 4, 2]$ a $C = [5, 1, 0]$.*

Řešení: Parametrická rovnice dané roviny je

$$\rho: \; X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A); \; t_1, t_2 \in R.$$

Jednotlivé *parametrické rovnice* potom dostaneme rozepsáním po složkách

$$\begin{aligned} \rho: \; x &= a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2), \\ z &= a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3); \; t_1, t_2 \in R. \end{aligned}$$

Odtud po dosazení souřadnic dostaneme konkrétní parametrické rovnice dané roviny

$$\begin{aligned} \rho: \; x &= 1 + 2t_1 + 4t_2, \\ y &= 4t_1 + t_2, \\ z &= 1 + t_1 - t_2; \; t_1, t_2 \in R. \end{aligned}$$

[1] Více viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, České Budějovice, Jihočeská univerzita v Č. B., dostupné na adrese http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 26

Důsledky řešení příkladu 12.7

Z řešení příkladu 12.7 vyplývá, jak si můžeme urychlit zápis parametrických rovnic speciálních podprostorů, které jsou dány $k+1$ body:

- Přímka: $X = A + t(B - A);\ t \in R$
- Rovina: $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$
- Nadrovina: $X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_{n-1}(A_{n-1} - A_0);$ $t_1, t_2, ..., t_{n-1} \in R$

PŘÍKLAD 12.8. *V A_4 jsou dány body $K = [1, 0, 1, 2]$, $L = [4, 2, 3, 1]$, $M = [-1, 3, 0, 1]$, $N = [2, 1, 1, 5]$. Rozhodněte, zda určují podprostor $A_3 \subseteq\subseteq A_4$. Pokud ano, napište jeho parametrické vyjádření.*

PŘÍKLAD 12.9. *Rovina je určena body $A = [2, 1, 0]$, $B = [2, 4, 1]$ a směrem vektoru $\vec{u} = (1, 1, 3)$. Napište její parametrické rovnice.*

12.5 Cvičení: Parametrické rovnice afinního bodového podprostoru

1: Zjistěte, zda body $A_1 = [2,1,-1]$, $A_2 = [3,3,1]$, $A_3 = [2,1,-5]$, $A_4 = [5,4,-1]$, $A_5 = [5,7,4]$ leží na přímce $[A;\vec{u}]$, kde $A = [3,3,-2]$ a $\vec{u} = (1,2,3)$.

2: Zjistěte, zda body $A_1 = [0,0,-3]$, $A_2 = [1,1,3]$, $A_3 = [3,1,-5]$, $A_4 = [1,2,-3]$, $A_5 = [-1,-2,-3]$, $A_6 = [1,3,1]$ leží v rovině $[A;\vec{u},\vec{v}]$, kde $A = [1,1,-4]$, $\vec{u} = (-1,-1,1)$ a $\vec{v} = (1,3,1)$.

3: Napište parametrické rovnice a kanonický tvar rovnice přímky $[K;\vec{m}]$, je-li:

a) $K = [1,-2]$, $\vec{m} = (5,9)$,

b) $K = [2,5,-3]$, $\vec{m} = (-4,0,1)$,

c) $K = [1,0,-1,0,2]$, $\vec{m} = (4,3,1,2,1)$.

4: Napište parametrické rovnice roviny ρ, která je dána těmito údaji:

a) $\rho = [K,L,M]$; $K = [2,0,1]$, $L = [-1,2,3]$, $M = [3,1,-5]$,

b) $\rho = [A;\vec{u},\vec{v}]$; $A = [1,0,2,3]$, $\vec{u} = (1,1,-1,0)$, $\vec{v} = (4,0,3,2)$,

c) $\rho = [P,Q,\vec{w}]$; $P = [7,-8,3]$, $Q = [4,5,1]$, $\vec{w} = (2,3,4)$.

5: Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází daným bodem $P = [4,5,-6]$ a je rovnoběžná s přímkou $q: x = 2 + r,\ y = -4 + 2r,\ z = 9 - 5r;\ r \in \mathbb{R}$.

6: Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází daným bodem $B = [1,2]$ a je kolmá na přímku $q = [M,N]$; $M = [0,1], N = [4,3]$.

7: Napište parametrické rovnice roviny ρ procházející bodem $Q = [5,10,12]$ rovnoběžně s rovinou σ danou rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 4s + t, \\ y &= -3 + s - 2t, \\ z &= 3s + 5t;\ s,t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

8: Napište parametrické rovnice úsečky AB, je-li:

a) $A = [-2,5]$, $B = [15,9]$,

b) $A = [2,5,-3]$, $B = [0,4,1]$.

9: Určete parametrické vyjádření roviny, která prochází přímkou $x = 2 - 3t$, $y = 7 + t$, $z = -1 + 2t$ a je rovnoběžná s přímkou $x = 3 - r$, $y = 2 + 4r$, $z = 1 - r$.

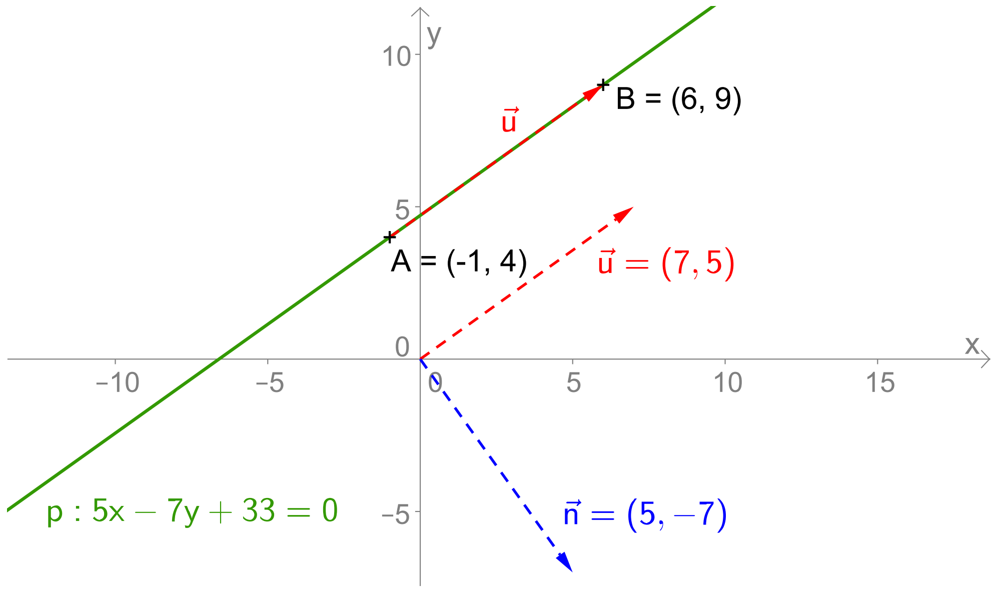
10: Parametrickými rovnicemi vyjádřete polorovinu určenou bodem $A = [3,2,1]$ a přímkou $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $z = 3 + 4t$.

11: Rozhodněte o poloze bodu $M = [3,3]$ vzhledem k trojúhelníku ABC, je-li $A = [0,0]$, $B = [10,2]$, $C = [6,12]$.

13 Obecná (neparametrická) rovnice nadroviny

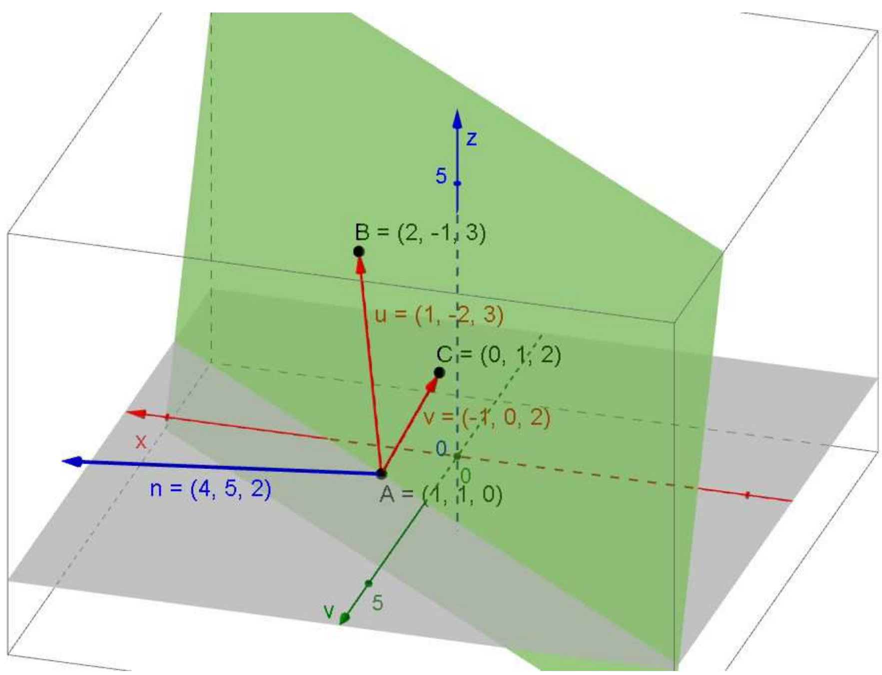
Nadrovinou v afinním bodovém prostoru A_n rozumíme jeho podprostor dimenze $n-1$. V afinním bodovém prostoru A_2 tak roli nadroviny hraje *přímka*, zatímco v afinním bodovém prostoru A_3 je nadrovinou *rovina*.

Ze středoškolské matematiky již víme, že přímku v A_2 a rovinu v A_3 lze popsat jednou algebraickou rovnicí, které říkáme *obecná rovnice*. Například přímka $p \subseteq\subseteq A_2$,



Obrázek 59: Obecná rovnice přímky $p: 5x - 7y + 33 = 0$

která je dána body $A = [-1, 4], B = [6, 9]$, má obecnou rovnici $p: 5x - 7y + 33 = 0$, viz Obr. 59. Rovina $\rho \subseteq\subseteq A_3$, určená body $A = [1, 1, 0], B = [2, -1, 3], C = [0, 1, 2]$, má obecnou rovnici $\rho: 4x + 5y + 2z - 9 = 0$, viz Obr. 60.



Obrázek 60: Obecná rovnice roviny $\rho: 4x + 5y + 2z - 9 = 0$

Skutečnost, že přímku v A_2 a rovinu v A_3 lze popsat jedinou rovnicí můžeme zobecnit na případ nadroviny v afinním bodovém prostoru A_n. Využijeme k tomu své zkušenosti získané řešením soustav lineárních rovnic.

Především víme, že množina všech řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

je *podprostor afinního bodového prostoru* A_n, jehož dimenze je $k = n - h$, kde $h = h(A) = h(A^*)$ (A je *matice soustavy*, A^* je *rozšířená matice soustavy*). Představme si, že máme „soustavu“ jediné nehomogenní rovnice o n neznámých (přitom koeficient u alespoň jedné z nich je různý od nuly). Potom bodový prostor jejího řešení má dimenzi $k = n - 1$, protože pro takovouto rovnici je určitě $h = h(A) = h(A^*) = 1$. Každou lineární algebraickou rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0, \tag{152}$$

kde $a_i \neq 0$ pro aspoň jedno $i = 1, 2, \ldots n$, je tak určena *nadrovina* v prostoru A_n.

Naopak, každý afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subseteq A_n$ lze dle věty 24 na str. 137 popsat soustavou n parametrických rovnic (150) s k parametry. V případě nadroviny se tedy jedná o n parametrických rovnic s $n - 1$ parametry. Pokud z jedné z n parametrických rovnic vyjádříme parametr, řekněme třeba t_1, a získaným výrazem ho nahradíme ve zbývajících rovnicích, přijdeme sice o jednu rovnici, ale také se o jeden zmenší počet parametrů. Říkáme, že jsme parametr t_1 eliminovali. Pokud se rozhodneme takto eliminovat všechny zbývající parametry, je zřejmé, že na konci procesu eliminace nám zůstane jediná rovnice ve tvaru (152), bez parametru, pouze s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Tak jsme ukázali, že každé nadrovině A_{n-1} afinního bodového prostoru A_n je jednoznačně přiřazena rovnice ve tvaru (152), kterou nazýváme *obecnou* (též *neparametrickou*) *rovnicí nadroviny.*

V následujících pasážích této kapitoly se budeme věnovat metodám výpočtu obecné rovnice přímky v afinním bodovém prostoru A_2 a roviny v prostoru A_3. V závěru pak získané poznatky využijeme k zobecnění do prostoru A_n.

13.1 Obecná rovnice přímky v A_2

Na konkrétním příkladu si ukážeme následující čtyři metody výpočtu obecné rovnice přímky v A_2:

i. **Eliminace parametru z parametrických rovnic přímky.**
Z jedné z rovnic

$$p: x = a_1 + tu_1,$$
$$y = a_2 + tu_2;\ t \in R$$

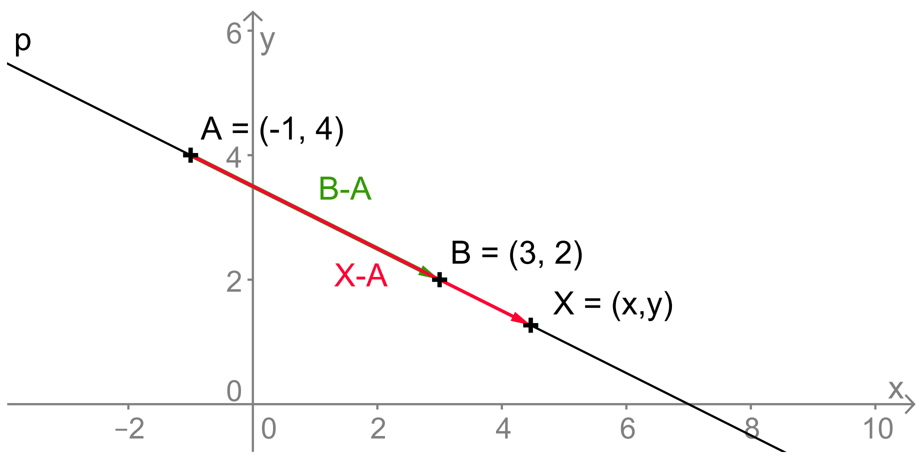
vyjádříme t a dosadíme do té zbývající. Dostaneme rovnici

$$u_2 x - u_1 y - u_2 a_1 + u_1 a_2 = 0, \tag{153}$$

která je obecnou rovnicí přímky p (je ve tvaru rovnice $ax + by + c = 0$, kde $a = u_2, b = -u_1, c = -u_2 a_1 + u_1 a_2$). Všimněte si, že koeficienty u x a y jsou souřadnice $(u_2, -u_1)$ vektoru, který je kolmý ke směrovému vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ přímky p, říkáme mu *normálový vektor*, značíme ho $\vec{n}$ (směrový a normálový vektor přímky viz Obr. 59).

ii. **Dosazení souřadnic daných bodů do obecné rovnice.**
Je-li přímka p dána dvěma svými body $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$, dosadíme jejich souřadnice do obecné rovnice $ax + by + c = 0$ a vypočítáme koeficienty a, b, c (ty jsou ovšem určeny až na násobek nenulovým reálným číslem, protože rovnice $ax + by + c = 0$ a $kax + kby + kc = 0$, kde $k \in R - \{0\}$, popisují stejnou přímku).

iii. **Využití lineární závislosti vektorů nebo nulového obsahu jimi určeného rovnoběžníku.**
Z Obr. 61 je patrné, že právě jenom pro body X přímky p, která je určená dvěma body A, B, platí, že vektory $B - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé. Potom



Obrázek 61: Obecná rovnice přímky; vektory $B - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé

ale matice, jejímiž řádky jsou tyto vektory, je singulární, tj. její determinant je roven nule

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{154}$$

Úpravou (154) dostaneme obecnou rovnici přímky p ve tvaru

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - (b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 = 0. \tag{155}$$

Ke stejnému výsledku se dostaneme úvahou založenou na vztahu pro výpočet obsahu rovnoběžníku určeného dvěma vektory (viz (136) na str. 119). Je zřejmé, že rovnoběžník určený vektory $B - A$ a $X - A$ má obsah

$$S_\diamond = \left\| \begin{matrix} x - a_1 & y - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{matrix} \right\|$$

rovný 0 právě tehdy, když bod X leží na přímce p určené body A, B. Tak se opět dostáváme ke vztahu (154).

iv. **Využití normálového vektoru.**
Ze vztahů (153) a (155) je patrné, že koeficienty a, b v obecné rovnici přímky $p: ax + by + c = 0$ jsou souřadnicemi vektoru kolmého ke směru přímky p, tj. *normálového vektoru* této přímky. Souřadnice normálového vektoru přímky snadno získáme ze souřadnic jejího směrového vektoru uplatněním požadavku kolmosti těchto dvou vektorů, tj. požadavku splnění rovnosti $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, (prohozením a změnou znaménka u jedné z nich, vztah mezi směrovým a normálovým vektorem přímky viz Obr. 59). Takto získané koeficienty a, b dosadíme spolu se souřadnicemi x, y jednoho z daných bodů přímky do rovnice $ax + by + c = 0$ a dopočítáme hodnotu c.

PŘÍKLAD 13.1. *Určete obecnou rovnici přímky* $p = [A, B]$; $A = [-5, 3]$, $B = [2, 4]$.

Řešení:
ad i. Vypočítáme směrový vektor přímky $\vec{u} = B - A = (7, 1)$, napíšeme její parametrické rovnice

$$\begin{aligned} p: x &= -5 + 7t \\ y &= 3 + t; \ \ t \in R \end{aligned}$$

a eliminací (vyloučením) parametru t získáme její obecnou (neparametrickou) rovnici

$$p: x - 7y + 26 = 0.$$

ad ii. Do rovnice $ax + by + c = 0$ dosadíme souřadnice bodů A, B a řešíme příslušnou soustavu rovnice

$$\begin{aligned} -5a + 3b + c &= 0, \\ 2a + 4b + c &= 0 \end{aligned}$$

s neznámými a, b, c. Vyjde nám $a = \frac{1}{26}c, b = -\frac{7}{26}c$, kde $c \in R$. Protože nám jde o jedno konkrétní řešení, které bude vypadat „hezky“, volíme $c = 26$ a dostáváme sadu koeficientů $a = 1, b = -7, c = 26$ pro obecnou rovnici dané přímky

$$p: x - 7y + 26 = 0.$$

ad iii. Do vztahu (154) dosadíme souřadnice bodů A, B

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-3 \\ 2-(-5) & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+5 & y-3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a spočítáme determinant na levé straně. Dostaneme obecnou rovnici dané přímky

$$p: x - 7y + 26 = 0.$$

ad iv. Vypočítáme směrový vektor přímky $\vec{u} = B - A = (7, 1)$ a určíme souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (n_1, n_2)$ tak, aby byla splněna podmínka kolmosti

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (7, 1) \cdot (n_1, n_2) = 7n_1 + 1n_2 = 0.$$

Nejjednodušší je zvolit $\vec{n} = (n_1, n_2) = (u_2, -u_1) = (1, -7)$. Nyní známe podobu prvních dvou členů obecné rovnice přímky $p: x - 7y + c = 0$. Když do ní dosadíme souřadnic bodu $A = [-5, 3]$ (stejně tak můžeme dosadit souřadnice B), dostaneme rovnici $-5 - 7 \cdot 3 + c = -26 + c = 0$, ze které vypočítáme $c = 26$. Opět dostaneme obecnou rovnici dané přímky ve tvaru

$$p: x - 7y + 26 = 0.$$

13.2 Obecná rovnice roviny v A_3

Pro výpočet obecné rovnice roviny v A_3 si popíšeme čtyři metody, které jsou analogické s výše uvedenými metodami výpočtu obecné rovnice přímky v A_2:

i. **Eliminace parametru z parametrických rovnic roviny.**
   Z jedné z rovnic

$$\begin{aligned} \rho: x &= a_1 + su_1 + tv_1, \\ y &= a_2 + su_2 + tv_2, \\ z &= a_3 + su_3 + tv_3, ;\ s, t \in R \end{aligned}$$

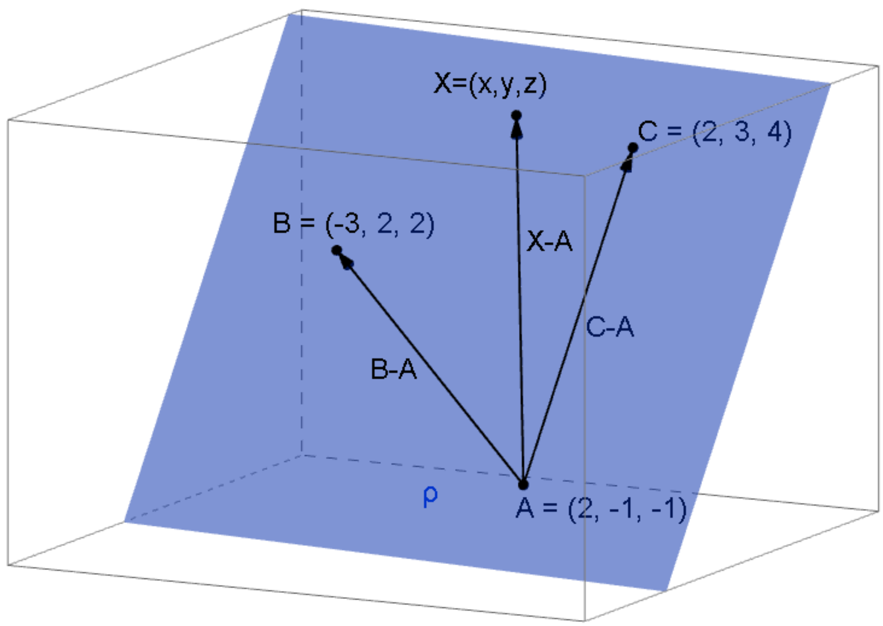
   vyjádříme t a dosadíme do těch zbývajících. To samé potom provedeme s parametrem s. Dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{156}$$

   kde (po případném vydělení celé rovnice společným dělitelem jejích koeficientů) $a = u_2v_3 - u_3v_2$, $b = u_3v_1 - u_1v_3$, $c = u_1v_2 - u_2v_1$, $d = -(u_2v_3 - u_3v_2)a_1 - (u_3v_1 - u_1v_3)a_2 - (u_1v_2 - u_2v_1)a_3$. Jedná se o obecnou rovnici roviny ρ. Všimněte si, že koeficienty u x, y a z jsou souřadnicemi vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, tj. vektoru, který je kolmý k rovině ρ (přesněji k vektorům zaměření roviny ρ.) Říkáme mu *normálový vektor* roviny a značíme ho $\vec{n}$ (normálový vektor roviny viz Obr. 60).

ii. **Dosazení souřadnic daných bodů do obecné rovnice.**
Je-li rovina ρ dána třemi svými (lineárně nezávislými) body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, dosadíme jejich souřadnice do obecné rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a vypočítáme koeficienty a, b, c, d (ty jsou ovšem určeny až na násobek nenulovým reálným číslem, protože rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a $kax + kby + kcz + kd = 0$, kde $k \in R - \{0\}$, popisují stejnou rovinu).

iii. **Využití lineární závislosti vektorů nebo nulového objemu jimi určeného rovnoběžnostěnu.**
Z Obr. 62 je patrné, že právě jenom pro body X roviny ρ, která je určena třemi lineárně nezávislými body A, B, C, platí, že vektory $B - A, C - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé. Potom ale matice, jejímiž řádky jsou tyto vektory, je singulární,



Obrázek 62: Obecná rovnice roviny; vektory $B - A, C - A$ a $X - A$ jsou lineárně závislé

tj. její determinant je roven nule,

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{157}$$

Úpravou (157) dostaneme obecnou rovnici roviny ρ ve tvaru (156), se stejným významem koeficientů a, b, c, d, pokud $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$.

Ke stejnému výsledku se dostaneme úvahou založenou na vztahu pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory (viz (137) na str. 119). Je zřejmé, že rovnoběžnostěn určený vektory $B - A$, $C - A$ a $X - A$ má objem

$$V = \left\| \begin{matrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{matrix} \right\|$$

rovný 0 právě tehdy, když bod X leží v rovině ρ určené body A, B, C. Tak se opět dostáváme ke vztahu (157).

iv. **Využití normálového vektoru.**
Ze vztahů (156) a (157) je patrné, že koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ jsou souřadnicemi vektoru kolmého k rovině (přesněji k vektorům jejího zaměření), tj. *normálového vektoru* této roviny. Dokonce jde, po vydělení případným společným dělitelem, o souřadnice vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, kde $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$ jsou vektory generující vektorové zaměření roviny. Souřadnice normálového vektoru roviny tak snadno získáme výpočtem tohoto vektorového součinu (vztah mezi $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$ a normálovým vektorem $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ roviny viz Obr. 60). Takto získané koeficienty a, b, c dosadíme spolu se souřadnicemi x, y, z jednoho z daných bodů roviny do rovnice $ax + by + cz + d = 0$ a dopočítáme hodnotu d.

PŘÍKLAD 13.2. *Určete neparametrickou (obecnou) rovnici roviny určené body* $A = [1, 0, 3]$, $B = [2, 4, -1]$, $C = [0, 3, 8]$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 32x - y + 7z - 53 = 0$$

PŘÍKLAD 13.3. *Napište obecnou rovnici roviny určené bodem* $A = [2, 1, -2]$ *a směry vektorů* $\vec{u} = (3, 2, 4)$, $\vec{v} = (3, 5, 2)$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16x + 6y + 9z + 44 = 0$$

PŘÍKLAD 13.4. *Napište obecnou rovnici roviny určené třemi body* $A = [1, 1, -1]$, $B = [3, 2, 0]$, $C = [4, 4, -3]$.

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1)  A:[1,1,-1]$ B:[3,2,0]$ C:[4,4,-3]$ X:[x,y,z]$

(%i5)  M:matrix(X-A,B-A,C-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} x - 1 & y - 1 & z + 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

```
(%i6) expand(determinant(M))=0;
```

(%o6) $3\,z+7\,y-5\,x+1=0$

PŘÍKLAD 13.5. *Určete parametrické rovnice roviny*

$$\rho:\ 2x-y+3z-1=0.$$

Řešení: Řešíme jako „soustavu" jedné rovnice o třech neznámých. Dvě z nich nahradíme reálnými parametry, jako vhodné se jeví x a z, a zbývající neznámou, tj. y, z rovnice vyjádříme. Dostaneme parametrické rovnice

$$\begin{aligned}\rho:\ x&=r,\\ y&=-1+2r+3s,\\ z&=s;\ \ r,s\in R.\end{aligned}$$

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) r:2*x-y+3*z-1=0;
```

(%o1) $3\,z-y+2\,x-1=0$

```
(%i2) solve(r,[y,z,x]);
```

(%o2) $[[y=3\,\%r2+2\,\%r1-1,z=\%r2,x=\%r1]]$

13.3 Obecná rovnice nadroviny v A_n

Vztahy (154) a (157), v nichž je k zápisu obecné (neparametrické) rovnice přímky v A_2 a roviny v A_3 použit determinant, nám dovolují pojem obecné (též neparametrické) rovnice zobecnit na nadrovinu v afinním bodovém prostoru A_n. Protože nám v prostorech vyšší dimenze již nevystačí geometrická představa, odvodíme vztah lineární závislosti příslušných vektorů rovnou z definice tohoto pojmu, jak ukazuje následující příklad (který je situován do prostoru dimenze 3).

Uvažujme nadrovinu prostoru A_3 (tj. rovinu), která je určena třemi nezávislými body A, B, C; $A=[a_1,a_2,a_3]$, $B=[b_1,b_2,b_3]$, $C=[c_1,c_2,c_3]$. Vyjádříme ji vektorově parametrickou rovnicí

$$X=A+t_1(B-A)+t_2(C-A).$$

Po jejím přepsání do tvaru

$$t_0(X-A)+t_1(B-A)+t_2(C-A)=\vec{o},$$

kde $t_0=1\neq 0$, je zřejmé, že vektory $X-A$, $B-A$ a $C-A$ jsou **lineárně závislé**. Z toho plyne tvrzení následující věty.

Věta 26 (Obecná rovnice nadroviny I). *Jestliže je nadrovina A_{n-1} určena n lineárně nezávislými body A_0, $A_1, \dots$, A_{n-1}, které mají v afinním bodovém prostoru A_n souřadnice $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, je pro každý bod $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ této nadroviny splněna rovnice*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{158}$$

kterou nazýváme **obecná (neparametrická) rovnice nadroviny**.

Důkaz. Myšlenka důkazu je ilustrována příkladem nadroviny v A_3, který je uveden před větou. Jediné, co je třeba ještě dokázat je, že rovnice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{01} & x_2 - a_{02} & \cdots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \cdots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} - a_{01} & a_{n-1,2} - a_{02} & \cdots & a_{n-1,n} - a_{0n} \end{vmatrix} = 0.$$

S touto ekvivalencí jsme se však již setkali (viz str. 119) a víme, že se snadno dokáže užitím věty o rozvoji determinantu. □

I v prostoru A_n platí, že po výpočtu determinantu dostaneme obecnou rovnici v algebraickém tvaru, jak uvádí následující věta.

Věta 27 (Obecná rovnice nadroviny II). *Každý bod $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ nadroviny A_{n-1} ainního bodového prostoru A_n splňuje svými souřadnicemi obecnou (neparametrickou) rovnici*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0 = 0, \tag{159}$$

kterou můžeme zkráceně zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} c_ix_i + c_0 = 0, \tag{160}$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n, c_0$ jsou po řadě algebraické doplňky prvků $x_1, x_2, \dots, x_n, 1$ prvního řádku determinantu (158) *z věty 26.*

Důsledky vět 26, 27

- Každá rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ je rovnicí nadroviny A_{n-1}, pokud je alespoň jedno $c_i \neq 0$.
- V prostoru A_2 je nadrovinou **přímka**. Nechť $p = \leftrightarrow AB$; $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom
$$p: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ ax + by + c = 0.$$
- V prostoru A_3 je nadrovinou **rovina**. Nechť $\rho = (ABC)$; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom
$$\rho: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ ax + by + cz + d = 0.$$

Obecná rovnice nadroviny A_{n-1} je určena až na nenulový násobek. Je-li $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ rovnicí nadroviny, pak také rovnice $k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0\right) = 0$ je obecnou rovnicí této nadroviny ve stejné soustavě souřadnic, jestliže $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo.

13.4 Úsekový tvar rovnice přímky

Uvažujme přímku p v rovině E_2, která protíná souřadnicové osy x, y soustavy zde zavedené postupně v bodech $A[k, 0]$ a $B[0, l]$, viz Obr. 63. Nabízí se otázka, zda nám znalost souřadnic k a l, tj. vlastně úseků, v nichž přímka protíná souřadnicové osy, nějak pomůže. Odvoďme proto obecnou rovnici přímky p za předpokladu, že hodnoty k a l známe. Dle (154) platí

$$\begin{vmatrix} x - k & y \\ -k & l \end{vmatrix} = 0. \tag{161}$$

Po výpočtu determinantu dostáváme postupně

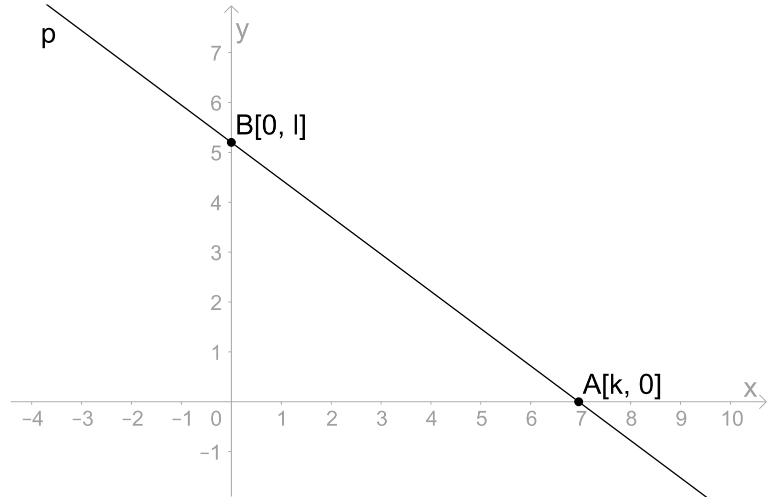
$$xl - kl + ky = 0, \tag{162}$$

$$xl + ky = kl. \tag{163}$$

Po vydělení obou stran rovnice (163) výrazem kl pak dospějeme k hledanému tvaru, který obsahuje pouze x, y, k a l a je dostatečně jednoduchý

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 1. \tag{164}$$

Říkáme mu *úsekový tvar rovnice přímky*, kde k a l jsou „úseky“ (mohou být kladné i záporné, víme, že se vlastně jedná o příslušné souřadnice průsečíků přímky se souřadnicovými osami), které přímka vytíná v daném pořadí na ose x a y.



Obrázek 63: Přímka p protíná souřadnicové osy x a y postupně v bodech A, B.

Dynamická verze Obr. 63 viz https://www.geogebra.org/m/mnmgskm3.

Analogicky úsekovému tvaru rovnice přímky v rovině můžeme zavést *úsekový tvar rovnice roviny v trojrozměrném prostoru.* Uvažujme rovinu ρ, která protíná souřadnicové osy x, y, z postupně v daném pořadí v bodech $A[k, 0, 0], B[0, l, 0], C[0, 0, m]$. Potom rovnici této roviny můžeme psát ve tvaru

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} + \frac{z}{m} = 1. \tag{165}$$

PŘÍKLAD 13.6. *Samostatně odvoďte rovnici* (165) *analogicky s odvozením* (164).

PŘÍKLAD 13.7. *Jak se na tvaru rovnic* (164), (165) *projeví rovnoběžnost přímky, resp. roviny, s některou ze souřadnicových os?*

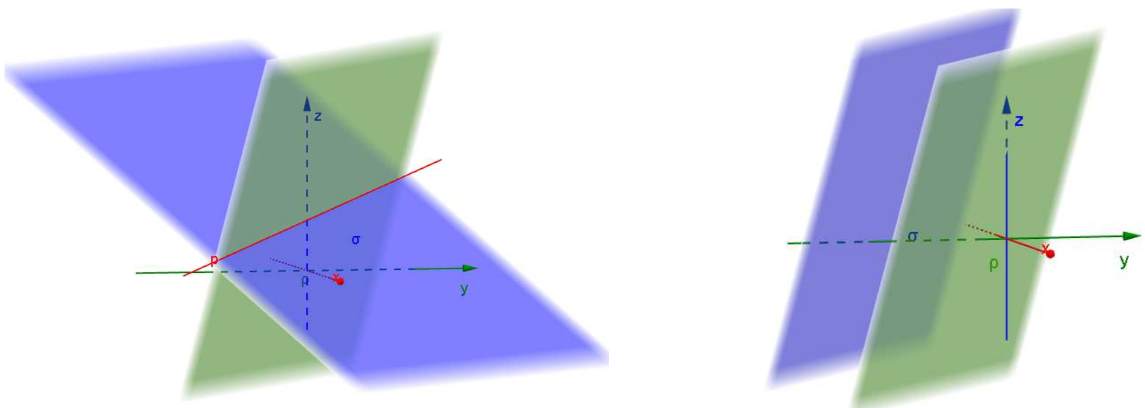
14 Svazky a trsy nadrovin

14.1 Svazky rovin v A_3

PŘÍKLAD 14.1. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ, σ :*

a) $\rho: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \ \sigma: \ x + y + 2z - 3 = 0,$

b) $\rho: \ 2x + 3y - z + 1 = 0, \ \sigma: \ 4x + 6y - 2z + 5 = 0,$

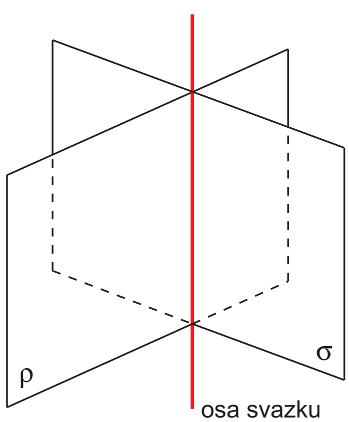


a) Svazek rovin 1. druhu

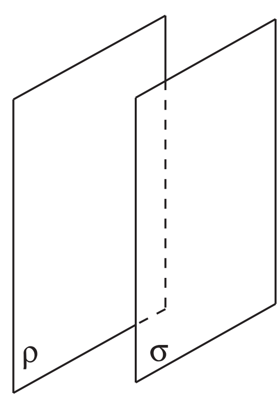
b) Svazek rovin 2. druhu

Obrázek 64: Svazky rovin v A_3

Definice 32 (Svazek rovin)**.** *Množinu všech rovin z A_3, jejichž průnikem je přímka (tj. afinní bodový podprostor dimenze 1) nazveme* **svazkem rovin prvého druhu**. *Množinu všech navzájem rovnoběžných rovin nazveme* **svazkem rovin druhého druhu (osnovou rovin)**.



Svazek rovin 1. druhu



Svazek rovin 2. druhu
(osnova rovin)

Je zřejmé, že *svazek rovin* je určen dvojicí rovin (viz Obr. 64). Otázkou je, jak vypadají rovnice dalších rovin náležejících těmto svazkům. Jak souvisejí s rovnicemi daných „určujících“ rovin

$$\rho: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \ \sigma: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0?$$

Řešením je rovnice ve tvaru lineární kombinace obecných rovnic rovin „určujících“ svazek

$$\tau: \ \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

V případě rovin uvedených v příkladu 14.1 a zobrazených na Obr. 64 se jedná o svazky s těmito rovnicemi:

ad a) Svazek prvního druhu určený rovinami $\rho: \ 2x+3y-z+1 = 0$, $\sigma: \ x+y+2z-3 = 0:$

$$\lambda_1(2x + 3y - z + 1) + \lambda_2(x + y + 2z - 3) = 0.$$

ad b) Svazek druhého druhu určený rovinami $\rho: \ 2x+3y-z+1 = 0$, $\sigma: \ 4x+6y-2z+5 = 0:$

$$\lambda_1(2x + 3y - z + 1) + \lambda_2(4x + 6y - 2z + 5) = 0.$$

Podle typu svazku se liší požadavky na hodnoty koeficientů λ_1, λ_2. Pro svazek rovin 1. druhu stačí požadovat, aby aspoň jeden z těchto koeficientů byl různý od nuly (tj. nesmí být oba zároveň rovny nule). V případě svazku 2. druhu požadujeme, aby tyto koeficienty nebyly řešením soustavy $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = 0$.

Věta 28 (Rovnice svazku rovin 1. druhu). *Jsou-li*

$$L_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0, \quad L_2 = b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$$

rovnice různoběžných rovin v A_3 v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku rovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Věta 29 (Rovnice svazku rovin 2. druhu). *Jsou-li*

$$L_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0, \quad L_2 = b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$$

rovnice rovnoběžných rovin v A_3 v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku rovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = 0; \ i = 1, 2, 3$.

PŘÍKLAD 14.2. *Rovina je určena bodem* $M = [2, -1, 3]$ *a průsečnicí rovin o rovnicích* $6x + 2y - z - 3 = 0$, $3x + 4y - 2z - 2 = 0$. *Napište její rovnici.*

PŘÍKLAD 14.3 (Svazek tří nadrovin). *Rozhodněte, zda roviny* L_1, L_2, L_3 *náleží témuž svazku:*

a) $L_1 :\ 2x + 3y - z + 1 = 0, \quad L_2 :\ x + y + 2z - 3 = 0, \quad L_3 :\ x - 2y + z + 5 = 0.$

b) $L_1 :\ x - 2y + 5z - 1 = 0, \quad L_2 :\ -3x + 6y - 15z + 5 = 0, \quad L_3 :\ 2x - 4y + 10z + 9 = 0.$

Poznámka. Uvažujme matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = H, \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh svazku**, který tvoří uvažované roviny:

i) jestliže $H = h = 2$, potom se jedná o **svazek rovin prvého druhu**,

ii) jestliže $H = 2,\ h = 1$, potom se jedná o **svazek rovin druhého druhu**.

14.2 Svazky přímek v A_2

Analogicky svazkům rovin uvažujeme i *svazky přímek*. Svazku přímek prvního druhu (zkráceně hovoříme o svazku přímek) odpovídá množina všech přímek, které mají společný jeden bod (tzv. střed svazku). Svazku přímek druhého druhu (zkráceně hovoříme o osnově přímek) pak odpovídá množina všech navzájem rovnoběžných přímek.

PŘÍKLAD 14.4. *Rozhodněte, zda přímky* a, b, c *patří do téhož svazku:*

$a :\ 2x + y + 2 = 0, \quad b :\ 5x - 3y + 27 = 0, \quad c :\ x - 6y + 27 = 0.$

Poznámka. K řešení příkladu 14.4 můžeme využít i determinant matice M_1.

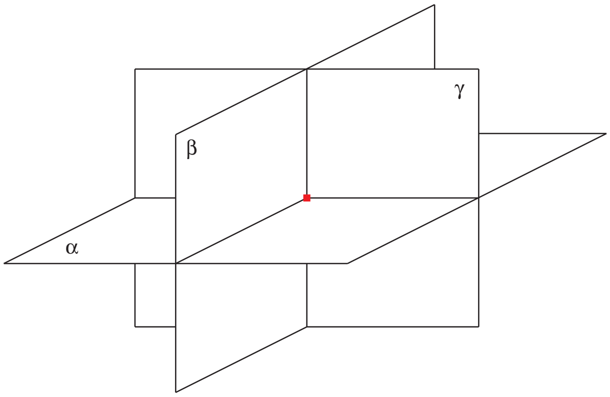
PŘÍKLAD 14.5. *Svazek přímek je určen přímkami* $a :\ x+2y-5 = 0$, $b :\ 3x-2y+1 = 0$. *Určete rovnici přímky svazku, která*

a) prochází bodem $A = [2, -1]$,

b) je rovnoběžná s přímkou $p :\ y - 1 = 0$.

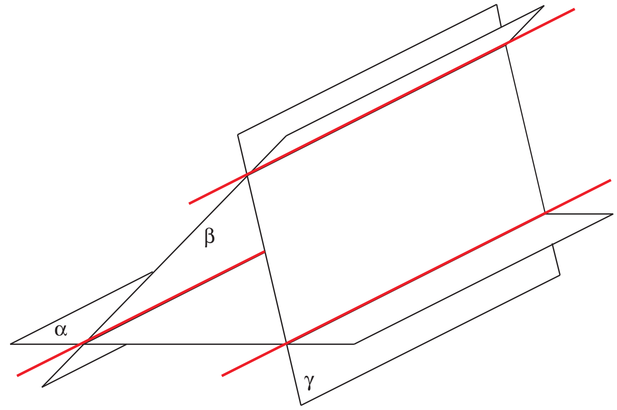
14.3 Trs rovin

K definici trsu rovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří roviny, které nenáleží témuž svazku?“



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$

Trs rovin 1. druhu



$V^\alpha \cap V^\beta \cap V^\gamma = V_{n-2}$

Trs rovin 2. druhu

Věta 30 (Vzájemná poloha tří rovin)**.** *Tři roviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_3, které nenáleží témuž svazku rovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bod (tj. bodový podprostor A_0),
2) průnik rovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_1 (tj. směr).

Definice 33 (Trs rovin)**.** *Množinu všech rovin v A_3, jejichž průnikem je bod, nazýváme* **trs rovin prvého druhu**. *Množinu všech rovin, jejichž zaměření obsahují společný podprostor V_1 (tj. směr) prostoru V_3, nazveme* **trs rovin druhého druhu**.

Poznámka. V každém trsu 1. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 1. druhu a v každém trsu rovin 2. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 2. druhu i nekonečně mnoho svazků 1. druhu.

Poznámka. Analogicky rovinám v A_3 můžeme uvažovat i o *trsech přímek* v prostoru A_2. Ukáže se, že trs přímek prvého v A_2 neexistuje. Trs přímek druhého druhu je pak tvořen všemi přímkami v rovině. Proč to tak je, bude zřejmé z definice trsu nadrovin v A_n.

Opět nás zajímá, jak se dá vyjádřit rovnice libovolné roviny náležející danému trsu pomocí rovnic jeho „určujících rovin“.

Věta 31 (Rovnice trsu 1. druhu)**.** *Nechť průnikem rovin L_1, L_2, L_3 je bod. Potom rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu rovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Věta 32 (Rovnice trsu 2. druhu)**.** *Nechť průnik rovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnikem jejich zaměření je vektorový prostor dimenze* 1*. Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu rovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, 3$.

14.4 Svazek nadrovin

Definice 34 (Svazek nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin z A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n-2$, nazveme* **svazkem nadrovin prvého druhu***. Množinu všech navzájem rovnoběžných nadrovin nazveme* **svazkem nadrovin druhého druhu (osnovou nadrovin)***.*

Věta 33 (Rovnice svazku nadrovin 1. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

rovnice různoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

Věta 34 (Rovnice svazku nadrovin 2. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

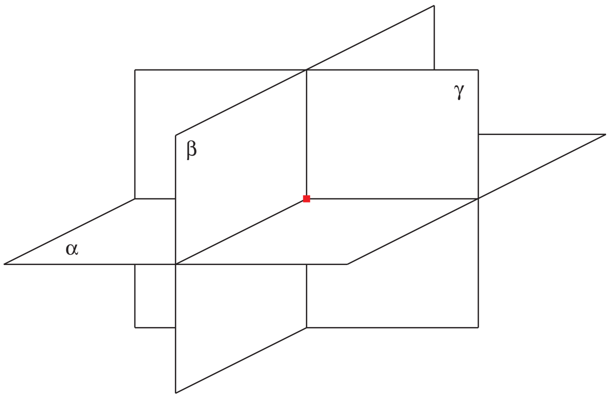
rovnice rovnoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

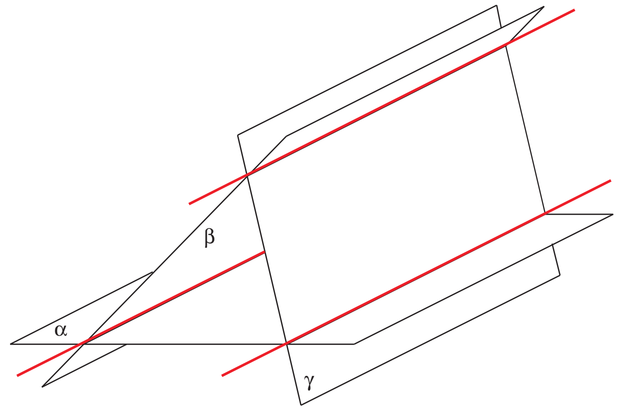
14.5 Trs nadrovin

K definici trsu nadrovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří nadroviny, které nenáleží témuž svazku?“



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$

Trs (nad)rovin 1. druhu



$V^{\alpha} \cap V^{\beta} \cap V^{\gamma} = V_{n-2}$

Trs (nad)rovin 2. druhu

Věta 35 (Vzájemná poloha tří nadrovin). *Tři nadroviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_n, které nenáleží témuž svazku nadrovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bodový podprostor A_{n-3},
2) průnik nadrovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_{n-2}.

Definice 35 (Trs nadrovin). *Množinu všech nadrovin v A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n-3$, nazýváme* **trs nadrovin prvého druhu**. *Množinu všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje podprostor V_{n-2} prostoru A_n, nazveme* **trs nadrovin druhého druhu**.

PŘÍKLAD 14.6 (Průnik tří nadrovin). *Vymyslete, jak z hodností matic M_1, M_2 příslušejících třem nadrovinám L_1, L_2, L_3 poznáme, zda tyto nadroviny náležejí nějakému svazku nebo zda tvoří trs, a potom jaký?*

14.5.1 Rovnice trsu nadrovin

Věta 36 (Rovnice trsu 1. druhu). *Nechť průnikem nadrovin L_1, L_2, L_3 je bodový podprostor dimenze $n-3$. Pak rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

Věta 37 (Rovnice trsu 2. druhu). *Nechť průnik nadrovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnik jejich zaměření je vektorový prostor dimenze $n-2$. Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

PŘÍKLAD 14.7 (Trs čtyř nadrovin). *Vyslovte kritérium pro určení, zda čtyři nadroviny L_1, L_2, L_3, L_4 náleží témuž trsu nadrovin.*

Poznámka. Uvažujme opět matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = h', \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh trsu**, který tvoří uvažované nadroviny:

i) jestliže $h' = h = 3$, potom nadroviny vytváří **trs prvého druhu**,

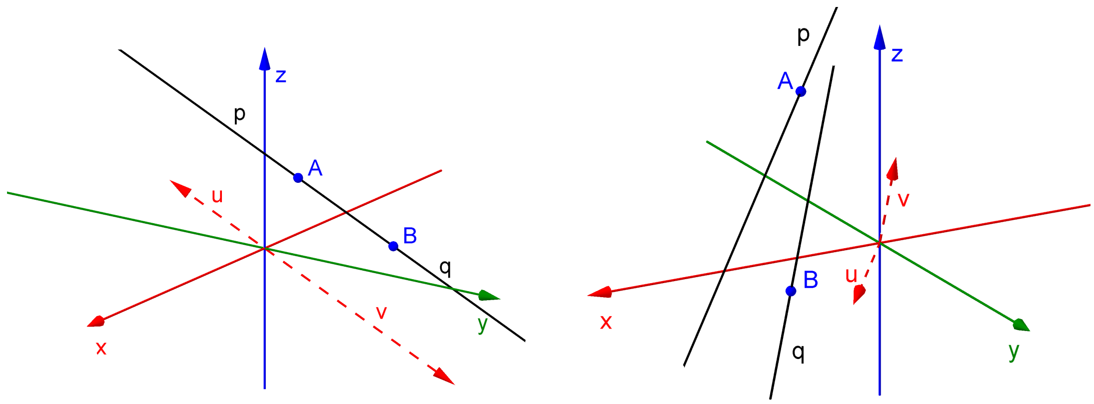
ii) jestliže $h' = 3,\ h = 2$, potom nadroviny tvoří **trs druhého druhu**.

15 Vzájemná poloha afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 15.1. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímek* $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$:

a) $A = [1, 2, 3]$, $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $B = [0, 5, 1]$, $\vec{v} = (-2, 6, -4)$.

b) $A = [1, -3, 4]$, $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $B = [3, 0, -1]$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$.



a) p, q jsou totožné   b) p, q jsou mimoběžné

Obrázek 65: Vzájemná poloha přímek $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$

ad a)

```
(%i1) A:matrix([1],[2],[3])$ u:matrix([1],[-3],[2])$
      B:matrix([0],[5],[1])$ v:matrix([-2],[6],[-4])$

(%i5) M:addcol(u,-v,B-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

```
(%i6) triangularize(M);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Přímky p, q jsou totožné.

ad b)

```
(%i1) A:matrix([1],[-3],[4])$ u:matrix([2],[2],[-1])$
      B:matrix([3],[0],[-1])$ v:matrix([0],[1],[3])$

(%i5) M:addcol(u,-v,B-A);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

```
(%i6) triangularize(M);
```

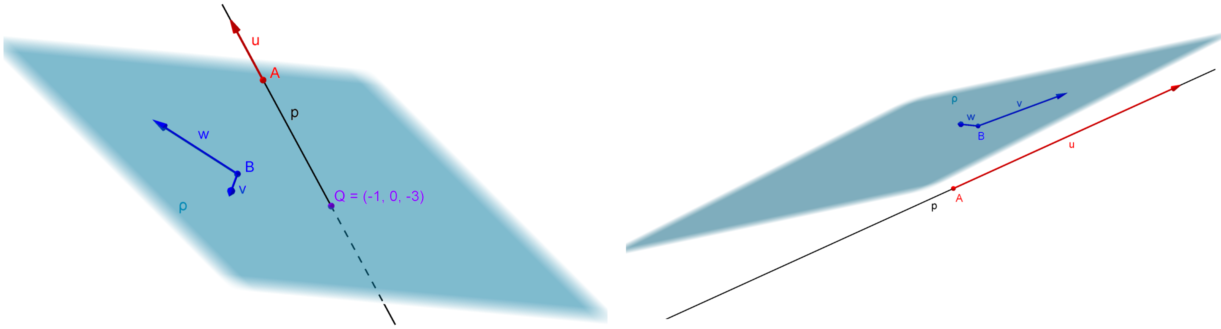
(%o6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

Přímky p, q jsou mimoběžné.

PŘÍKLAD 15.2. *Určete vzájemnou polohu přímky* $p = [A; \vec{u}]$ *a roviny* $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$:

a) $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

b) $A = [1, 0, 0]$, $\vec{u} = (7, 7, 1)$, $B = [0, 1, 3]$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$, $\vec{w} = (2, -1, -1)$.



a) p, ρ jsou různoběžné   b) p, ρ jsou rovnoběžné

Obrázek 66: Vzájemná poloha přímky $p = [A; \vec{u}]$ a roviny $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$

ad a)

```
(%i1) A:matrix([1],[2],[1])$ u:matrix([1],[1],[2])$
      B:matrix([2],[1],[-2])$ v:matrix([0],[2],[-1])$
      w:matrix([3],[-1],[2])$

(%i6) M:addcol(u,-v,-w,B-A);
```

$$(\%o6)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) triangularize(M);
```

$$(\%o7)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

Přímka p a rovina ρ jsou různoběžné se společným bodem $Q = [-1, 0, -3]$.

ad b)

```
(%i1) A:matrix([1],[0],[0])$ u:matrix([7],[7],[1])$
      B:matrix([0],[1],[3])$ v:matrix([1],[3],[1])$
      w:matrix([2],[-1],[-1])$

(%i6) M:addcol(u,-v,-w,B-A);
```

$$(\%o6)\quad \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -1 \\ 7 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) triangularize(M);
```

$$(\%o7)\quad \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & 21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix}$$

Přímka p a rovina ρ jsou rovnoběžné.

Definice 36 (Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů)**.** *Dva afinní bodové podprostory* $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [A; V_k]$ *afinního bodového prostoru* A_n *se nazývají:*

a) **rovnoběžné**, *jestliže* $V_h \subseteq\subseteq V_k$ *nebo* $V_k \subseteq\subseteq V_h$, *značíme* $A_h \| A_k$,

b) **incidentní**, *jestliže* $A_h \subseteq\subseteq A_k$ *nebo* $A_k \subseteq\subseteq A_h$,

c) **různoběžné**, *jestliže* $A_h \cap A_k \neq \emptyset$ *a zároveň* A_h, A_k **nejsou incidentní**,

d) **mimoběžné**, *jestliže* A_h, A_k **nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné**.

15.1 Rovnoběžné afinní bodové podprostory

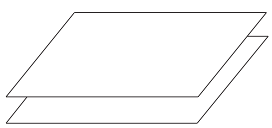
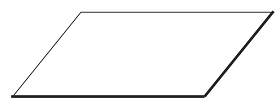
Rovnoběžné afinní bodové podprostory A_h, A_k značíme

$$A_h \| A_k.$$

Dva afinní bodové podprostory jsou rovnoběžné, jestliže zaměření jednoho z nich je součástí (podprostorem) zaměření druhého z nich. Například dvě rovnoběžné přímky mají společný směrový vektor, dvě rovnoběžné roviny mají společné zaměření a nebo směrový vektor přímky rovnoběžné s rovinou patří do zaměření této roviny.

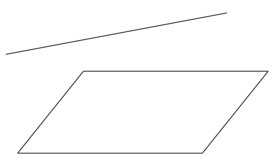
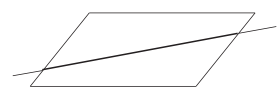
U rovnoběžných podprostorů $A_h \| A_k$ rozlišujeme, zda je jejich průnik prázdná či neprázdná množina:

1) $h = k$

$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h = A_k$: 

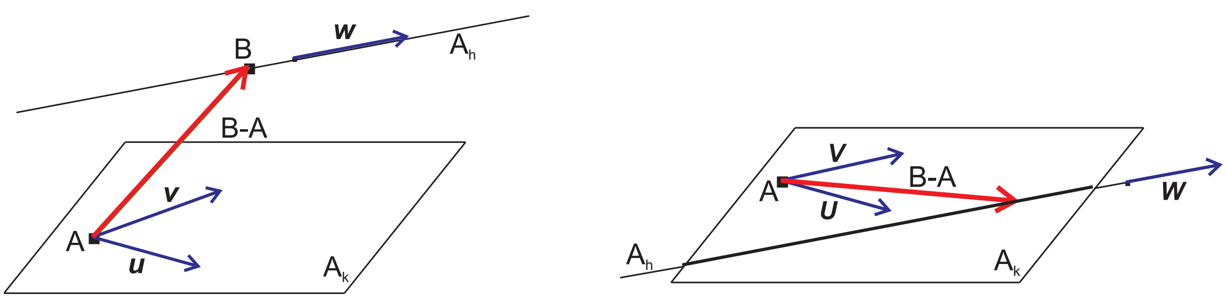
TOTOŽNÉ

2) $h < k$

$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h \subseteq\subseteq A_k$: 

INCIDENTNÍ

Naším cílem je formulovat obecný postup (algoritmus) určení rovnoběžných podprostorů (viz věta 38). Při identifikaci toho, zda mají dva rovnoběžné podprostory



$B - A \notin V_k$ $\qquad$ $B - A \in V_k$

Obrázek 67: $A_h \| A_k$ jsou **incidentní** $\Leftrightarrow$ $B - A \in V_k$

$A_h = [A, V_h]$, $A_k = [B, V_k]$ prázdný či neprázdný průnik, tj. při rozlišení mezi neincidentními a incidentními rovnoběžnými podprostory, hraje významnou roli vektor $B - A$. Z Obr. 67 je patrné, že dva rovnoběžné podprostory $A_h \| A_k$, kde $h < k$, jsou *incidentní* právě tehdy, když $B - A \in V_k$.

Poznámka. Mají-li incidentní podprostory stejnou dimenzi, nazýváme je **totožné** nebo **splývající** podprostory.

Věta 38 (Rovnoběžnost a incidence)**.** *Dva afinní bodové podprostory, dané parametricky rovnicemi*

$$A_h : X = A + \sum_{i=1}^{h} t_i \vec{u}_i, \qquad A_k : Y = B + \sum_{j=1}^{k} r_j \vec{v}_j, \quad h \leq k,$$

jsou **rovnoběžné**, *právě když vektory* $\vec{u}_i$ *náleží do podprostoru* $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k]$, *tj.*

$$\vec{u}_i \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k], \ i = 1, 2, \ldots, h.$$

Jsou **incidentní**, *jestliže současně do tohoto podprostoru patří i vektor* $B - A$, *tj.*

$$B - A \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k].$$

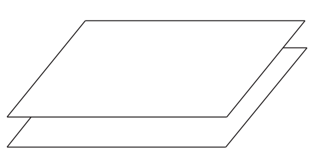
PŘÍKLAD 15.3. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ:*

a) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= -2, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= 1 - r - 2s, \end{aligned}$$

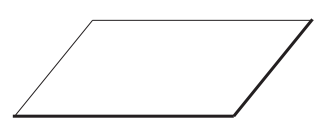
b) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 4 + 3t \\ x_3 &= -3 - 4t, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 3 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= -r - 2s. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 15.4. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin $\rho: \ x + y + 2z - 7 = 0, \quad \sigma: x + y + 2z - 5 = 0$.*

V případě dvou *rovin* (obecně *nadrovin*) snadno rozhodneme o jejich rovnoběžnosti, případně totožnosti, porovnáním jejich obecných (neparametrických) rovnic:



$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 &= 0 \\ ka_1x_1 + ka_2x_2 + \ldots + ka_nx_n + b_0 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 &= 0 \\ ka_1x_1 + ka_2x_2 + \ldots + ka_nx_n + ka_0 &= 0 \end{aligned}$$

15.2 Spojení podprostorů

Důležitou roli v dalším rozboru vzájemných poloh afinních bodových podprostorů bude hrát pojem *spojení podprostorů*, který budeme používat v souvislosti s vektorovými i bodovými podprostory. Zjednodušeně můžeme říci, že spojením dvou podprostorů rozumíme „nejmenší“ podprostor, který obsahuje tyto dva podprostory.

Například spojením dvou vektorových podprostorů $U = [\vec{u}], V = [\vec{v}]$ je vektorový podprostor $W = [\vec{u}, \vec{v}]$. Značíme

$$W = U \bigvee V.$$

Spojením dvou bodových podprostorů $P = [A, \vec{a}], Q = [B, \vec{b}]$ je potom afinní bodový podprostor $R = [A, \vec{a}, \vec{b}, B - A]$. Značíme

$$R = P \bigvee Q.$$

Definice 37 (Spojení dvou vektorových podprostorů)**.** *Spojením dvou vektorových podprostorů $V_h = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h]$, $V_k = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k]$ vektorového prostoru V_n rozumíme jeho podprostor $V_s \subseteq\subseteq V_n$, pro který platí*

$$V_s = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k].$$

Zapisujeme

$$V_s = V_h \bigvee V_k.$$

Věta 39 (O dimenzi spojení a průniku.)**.** *Nechť V_h, V_k jsou podprostory vektorového prostoru V_n. Potom:*

$$\dim\left(V_h \bigvee V_k\right) + \dim\left(V_h \cap V_k\right) = \dim V_h + \dim V_k.$$

Poznámka. Při zkoumání vzájemných poloh bodových podprostorů výše uvedený vztah nahradíme stručnějším zápisem

$$s + p = h + k,$$

kde $h = \dim V_h$, $k = \dim V_k$, $p = \dim\left(V_h \cap V_k\right)$ a $s = \dim\left(V_h \bigvee V_k\right)$.

PŘÍKLAD 15.5. *Určete dimenzi podprostoru $W_1 \cap W_2 \subseteq\subseteq R^4$, jestliže*
$W_1 = [(1,0,2,-3),(3,2,1,-5),(-1,2,1,-2)]$, $W_2 = [(-3,0,2,0)]$.

Definice 38 (Spojení bodových podprostorů)**.** *Spojením dvou afinních bodových podprostorů $A_h = [A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h]$ $A_k = [B, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k]$ prostoru A_n rozumíme takový jeho podprostor A_g, pro který platí*

$$A_g = [A; V_g],$$

kde $V_g = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, B - A]$. Zapisujeme

$$A_g = A_h \bigvee A_k.$$

PŘÍKLAD 15.6. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením dvou mimoběžných přímek.*

PŘÍKLAD 15.7. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením roviny A_2 a přímky A_1 s ní rovnoběžné.*

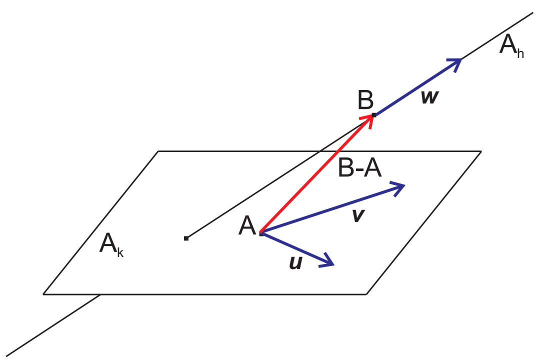
Poznámka. Z definice 38 vyplývá, jaký je vztah mezi dimenzí g spojení dvou afinních bodových podprostorů a dimenzí s spojení jejich zaměření:

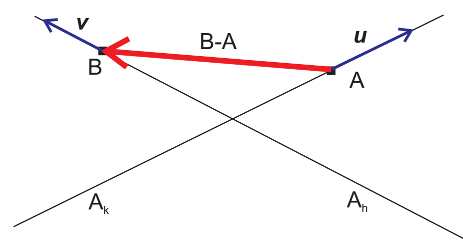
$$\begin{aligned} A_h \cap A_k &= \emptyset \Rightarrow g = s + 1 && (B - A \notin V_s) \\ A_h \cap A_k &\neq \emptyset \Rightarrow g = s && (B - A \in V_s) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 15.8. *Určete dimenzi spojení rovin* $[A; \vec{t}, \vec{u}]$, $[B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [3, 2, -1, 0]$, $\vec{t} = (2, -1, 3, 1)$, $\vec{u} = (0, -1, 3, -2)$, $B = [4, 2, 0, 0]$, $\vec{v} = (-2, -2, 0, 5)$, $\vec{w} = (-2, -1, 0, 1)$.

15.3 Různoběžné a mimoběžné podprostory

Různoběžné prostory

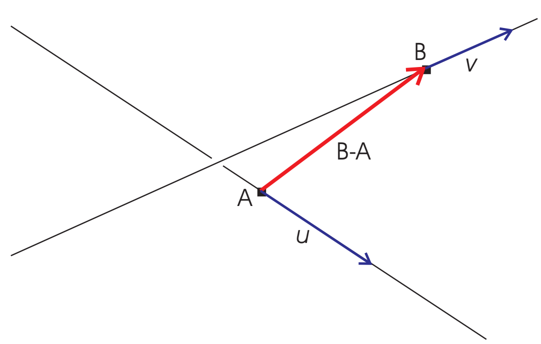




Je zřejmé, že $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, ale v obou případech platí:

$$B - A \in V_h \bigvee V_k.$$

Mimoběžné prostory



Je zřejmé, že tentokrát platí: $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, a zároveň:

$$B - A \notin V_h \bigvee V_k.$$

Věta 40 (Průnik afinních bodových podprostorů). *Dva afinní bodové podprostory* $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [B; V_k]$ *prostoru* A_n *mají společný aspoň jeden bod, právě když pro vektor* $B - A$ *platí:*

$$B - A \in V_s,$$

kde $V_s = V_h \vee V_k$.

PŘÍKLAD 15.9. *Určete souřadnice průsečíku přímky* p *s rovinou* ρ *:*
$p = [A; \vec{u}]$; $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$;
$\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$; $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

$\{[-1, 0, -3]\}$

PŘÍKLAD 15.10. *V afinním prostoru* A_4 *určete vzájemnou polohu roviny* $\rho = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$ *a nadroviny* $A_3 = [B; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$: $A = [3, 3, -1, 3]$, $\vec{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, -1, 0)$, $B = [1, 4, -6, 2]$, $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 3, 1)$.

15.4 Klasifikace vzájemných poloh dvou bodových podprostorů

Budeme zkoumat, jaké vzájemné polohy mohou zaujmout dva dané bodové podprostory A_h, A_k afinního bodového prostoru A_n. Například, jaké vzájemné polohy mohou mít dvě roviny v prostoru A_4. Najdeme odpověď i na otázku, zda mohou být v nějakém prostoru dvě roviny mimoběžné.

Použijeme toto značení:

$$A_h = [A; V_h], \quad A_k = [B; V_k], \quad h \leq k \leq n,$$

$$V_s = V_h \bigvee V_k, \quad V_p = V_h \cap V_k, \quad A_g = A_h \bigvee A_k.$$

Použijeme tyto vztahy:

$$h + k = s + p, \qquad n \geq g, \qquad g = s \text{ nebo } g = s + 1.$$

Zajímá nás vztah mezi n a k

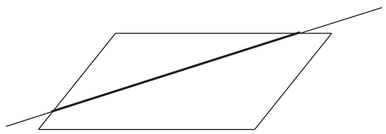
Poznámka. Důležitou roli při klasifikaci vzájemných poloh bodových podprostorů hraje roli dimenze p průniku jejich zaměření, která poukazuje na společné směry těchto zaměření. Hodnoty p mohou být v rozsahu od 0 do h (pokud $h < k$).

Jakých hodnot nabývá dimenze r průniku bodových podprostorů?

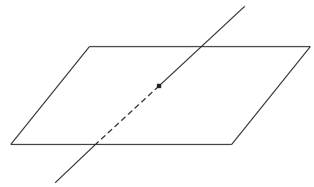
$$A_r = A_h \cap A_k$$

Dimenze **průniku bodových podprostorů** r nemusí být vždy stejná jako dimenze **průniku jejich zaměření** p.

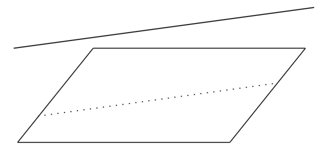
Pokud jsou bodové podprostory A_h, A_k incidentní, tj. $A_h \subseteq\subseteq A_k$ (nebo naopak $A_k \subseteq\subseteq A_h$), nebo jsou A_h, A_k různoběžné, potom je dimenze jejich průniku $A_h \cap A_k$ stejná jako dimenze průniku jejich zaměření $V_h \cap V_k$, tj. $r = p$.



$r = p = 1$



$r = p = 0$



$A_r = \emptyset,\ p = 1$

PŘÍKLAD 15.11. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky a roviny*

Řešení: viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 45.

PŘÍKLAD 15.12. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin* A_h, A_k; $h = k = 2$.

Řešení: viz [1] PECH, P. (2004) *Analytická geometrie lineárních útvarů*, http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf, str. 46.

15.5 Další příklady na vzájemné polohy afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 15.13. *V afinním prostoru* A_4 *určete vzájemnou polohu rovin* $\rho = \left[A; \vec{t}, \vec{u}\right]$, $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}] : A = [4, 2, 2, 2]$, $\vec{t} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{u} = (1, 0, 3, 2)$, $B = [-2, -2, 2, 0]$, $\vec{v} = (-1, 0, 5, 0)$, $\vec{w} = (2, 2, 1, 0)$.

PŘÍKLAD 15.14. *Určete vzájemnou polohu přímky* p *a roviny* ρ *v* A_3 :

$p:\ x = 2 + 4t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - t;\ t \in R,$

$\rho:\ 4x + y - z + 13 = 0.$

PŘÍKLAD 15.15. *Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny* ρ, σ *v* A_3 :

$\rho:\ 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \quad \sigma:\ 3y + 3z - 6 = 0.$

PŘÍKLAD 15.16. *Napište parametrické rovnice přímky* p*, která je průsečnicí rovin* $\rho:\ 5x + y + 2z - 29 = 0$, $\sigma:\ 3x - y + z - 10 = 0$.

PŘÍKLAD 15.17. *V* A_4 *určete podprostor určený nadrovinami:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 5 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

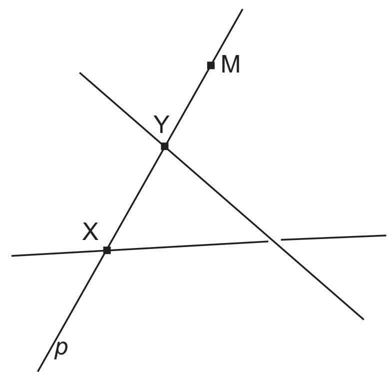
16 Příčky mimoběžných podprostorů

Příčkou mimoběžných podprostorů A_h, A_k *prostoru* A_n rozumíme přímku p, která je s každým z podprostorů A_h, A_k různoběžná, tj. má s každým z nich společný bod.

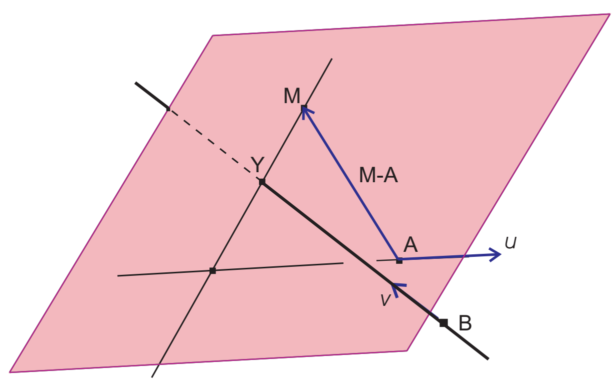
PŘÍKLAD 16.1. *Určete příčku mimoběžek* $[A;\vec{u}]$, $[B;\vec{v}]$ *procházející bodem* M. *Určete průsečíky příčky* p *s danými mimoběžkami;*
$A = [3,-1,4]$, $\vec{u} = (1,-1,2)$, $B = [-1,2,-2]$, $\vec{v} = (2,0,1)$, $M = [1,3,-2]$.

Řešení: K řešení úlohy můžeme přistoupit dvěma způsoby:

1) $X - M = k(Y - M)$; $X \in [A;\vec{u}]$, $Y \in [B;\vec{v}]$,



2) $B + t\vec{v} = M + r\vec{u} + s(M - A)$



PŘÍKLAD 16.2. *Určete příčku mimoběžek* $p = [A;\vec{u}]$, $q = [B;\vec{v}]$ *tak, aby měla směr* $\vec{w}$;
$A = [-1,1,-5]$, $\vec{u} = (1,1,2)$, $B = [1,-2,3]$, $\vec{v} = (1,3,-1)$, $\vec{w} = (1,-2,3)$.

Řešení:

$Y - X = k\vec{w}$

$B + r\vec{v} - A - t\vec{u} = k\vec{w}$

17 Eukleidovský bodový prostor

Eukleidovským bodovým prostorem rozumíme afinní bodový prostor, na jehož zaměření je definován *skalární součin*. Víme, že pomocí skalárního součinu jsou definovány pojmy *norma vektoru* a *odchylka vektorů*. Ty nyní využijeme k zavedení pojmů *vzdálenost bodů*, *vzdálenost podprostorů*, *odchylka podprostorů*. Vektorový a vnější součin potom již známým způsobem (viz str. 108–119) využijeme k výpočtu obsahů a objemů a zavedeme si nový pojem *objem simplexu*.

17.1 Vzdálenost dvou bodů

Definice 39 (Vzdálenost bodů)**.** *Vzdálenost dvou bodů A, B v eukleidovském bodovém prostoru E_n je rovna normě jimi určeného vektoru $B - A$. Zapisujeme*

$$|AB| = |B - A| = \sqrt{(B-A)^2}.$$

Vzdálenost bodů v E_n má následující vlastnosti:

1) $|AB| = |BA|$,

2) $|AB| \geq 0$, $|AB| = 0$ právě když $A = B$,

3) $|AB| + |BC| \geq |AC|$ (Trojúhelníková nerovnost),

kde $A, B, C \in E_n$.

Z výhodnosti ortonormální báze pro výpočet skalárního součinu zmíněné na str. 82 vyplývá její výhodnost i pro výpočet vzdálenosti dvou bodů. V eukleidovském prostoru tak vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$, jejichž souřadnice jsou dány vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic (viz Def. 29, str. 133), počítáme dle vztahu

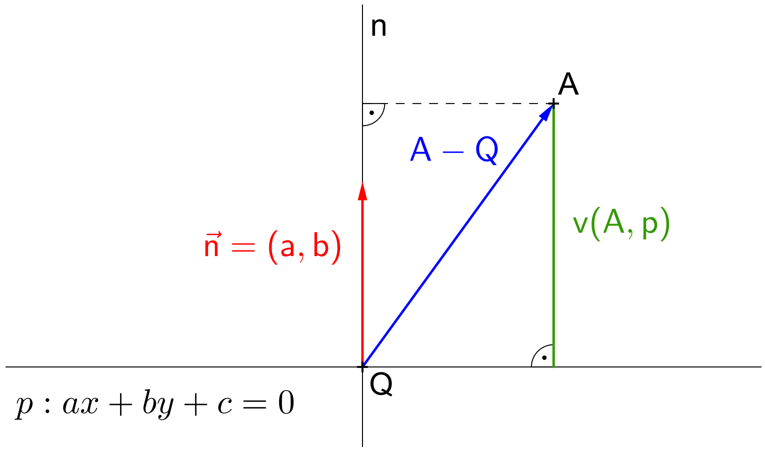
$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2},$$

bez ohledu na definici použitého skalárního součinu.

17.2 Vzdálenost bodu od přímky v rovině

Zajímá nás výpočet vzdálenosti bodu A od přímky p dané obecnou rovnicí. Uvažujme situaci dle Obr. 68. Je zřejmé, že vzdálenost $v(A,p)$ bodu A od přímky p je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - Q$ do směru normálového vektoru $\vec{n}$, přitom směr $\vec{n}$ je na obrázku naznačen *normálovou přímkou* n procházející bodem Q kolmo na p. Dle (52) tak pro $v(A,p)$ platí

$$v(A,p) = \frac{|(A-Q)\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \tag{166}$$



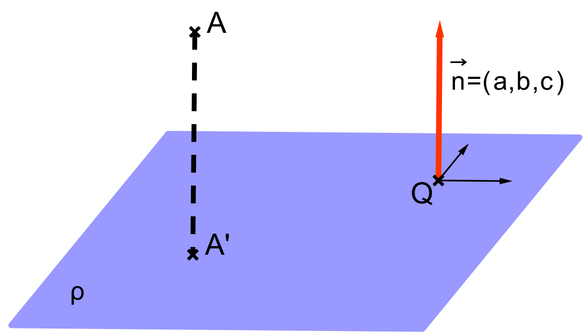
Obrázek 68: Vzdálenost bodu A od přímky p.

Po roznásobení čitatele v (167) a jeho následné drobné úpravě dostaneme následující vztah známý ze středoškolské matematiky

$$v(A,p) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{167}$$

kde a_1, a_2 jsou souřadnice bodu A a $ax + by + c = 0$ je obecná rovnice přímky p.

17.3 Vzdálenost bodu od roviny



Vzdálenost $|A\rho|$ bodu A od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do roviny ρ, tj.

$$|A\rho| = |AA'|.$$

Pro vzdálenost bodu A od roviny ρ, určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$, potom platí:

$$|A\rho| = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{168}$$

PŘÍKLAD 17.1. *Určete vzdálenost bodu* $A = [3, 6, 1]$ *od roviny* $x + 10y + 7z - 78 = 0$.

Poznámka. Pravou stranu vztahu (168) pro $|A\rho|$ můžeme interpretovat jako velikost kolmého průmětu vektoru $A - Q$ do směru vektoru $\vec{n}$.

Stejný vztah jako (168) platí i pro vzdálenost bodu A od nadroviny E_{n-1} určené bodem Q a normálovým vektorem $\vec{n}$:

$$|AE_{n-1}| = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{169}$$

Obecná rovnice roviny v E_3/nadroviny v E_n

Vztah (168) nás může inspirovat k odvození dalšího způsobu zápisu a výpočtu obecné (neparametrické) rovnice roviny (nadroviny). Stačí, když si uvědomíme, že právě jenom pro body X roviny ρ platí, že jejich vzdálenost od této roviny je rovna nule, tj.

$$|X\rho| = \frac{|(X - Q) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = 0.$$

Potom obecnou (neparametrickou) rovnici roviny v E_3 můžeme zapsat vztahem

$$(X - Q) \cdot \vec{n} = 0, \tag{170}$$

kde Q je bod roviny, $\vec{n}$ je normálový vektor roviny a $X = [x_1, x_2, x_3]$ je obecný bod roviny.

PŘÍKLAD 17.2. *Napište rovnici roviny, která je určená body* $A = [1, -2, 3]$, $B = [-4, 5, 6]$, $C = [7, 8, -9]$.

Řešení: Definujeme vektory $\vec{u} = B - A = (-5, 7, 3), \vec{v} = C - A = (6, 10, -12)$ a vypočítáme normálový vektor $\vec{n}$ dané roviny jako jejich vektorový součin $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (57, 21, 46)$. Potom obecnou rovnici roviny ABC zapíšeme dle (170) ve tvaru

$$([x, y, z] - [1, -2, 3]) \cdot (57, 21, 46) = 0,$$

odkud po úpravě levé strany dostaneme rovnici v algebraickém tvaru

$$57x + 21y + 46z - 153 = 0.$$

Poznámka. Dáme-li dohromady vztahy (168) a (170), dostaneme následující vzoreček pro výpočet vzdálenosti bodu $A = [a_1, a_2, a_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$, dobře známý ze střední školy:

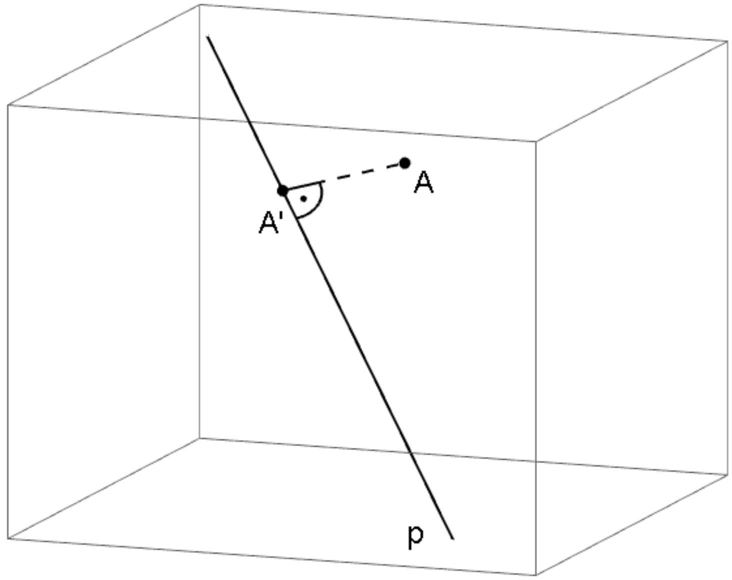
$$|A\rho| = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{171}$$

Stejným vztahem jako (170) zapíšeme i obecnou (neparametrickou) rovnici nadroviny, kde Q je potom bod nadroviny, $\vec{n}$ je vektor kolmý na nadrovinu ($\vec{n} \in V_{n-1}^{\perp}$) a $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ je obecný bod nadroviny.

17.4 Vzdálenost bodu od podprostoru

Vzdálenost bodu A od bodového podprostoru E_k je rovna vzdálenosti bodu A od jeho kolmého průmětu A' do tohoto podprostoru.

PŘÍKLAD 17.3. *V eukleidovském prostoru* E_3 *určete vzdálenost bodu* $A = [7, 9, 7]$ *od přímky* $p : x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t; t \in R$.



Obrázek 69: Jaká je vzdálenost bodu A od přímky p?

Řešení: Viz Obr. 69. Pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku p, bod $A' = [a_1', a_2', a_3']$, náleží přímce p, proto musí existovat hodnota parametru $t \in R$ taková, že pro její souřadnice platí vztahy $a_1' = 2 + 4t, a_2' = 1 + 3t, a_3' = 2t$. Zároveň musí být vektor $A' - A$ kolmý k směrovému vektoru $\vec{u} = (4, 3, 2)$ přímky p, tj. musí být splněna rovnice

$$(A' - A) \cdot \vec{u} = 0.$$

Po dosazení za A' dostaneme

$$((2 + 4t, 1 + 3t, 2t) - (7, 9, 7)) \cdot (4, 3, 2) = 0,$$

tj.

$$(-5 + 4t, -8 + 3t, -7 + 2t) \cdot (4, 3, 2) = 0.$$

Odtud po výpočtu skalárního součinu a zjednodušení dostáváme lineární rovnici

$$29t - 58 = 0,$$

jejímž řešením je $t = 2$. Bod A' má potom souřadnice $A' = [10, 7, 4]$ a jeho vzdálenost od A je rovna

$$|AA'| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

To je také údaj o vzdálenosti bodu A od přímky p.

Poznámka. Pro řešení příkladu 17.3 můžeme použít také následující vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu A od přímky $p: X = Q + t\vec{u}; t \in R$ v prostoru E_3:

$$|Ap| = \frac{|(Q - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}. \tag{172}$$

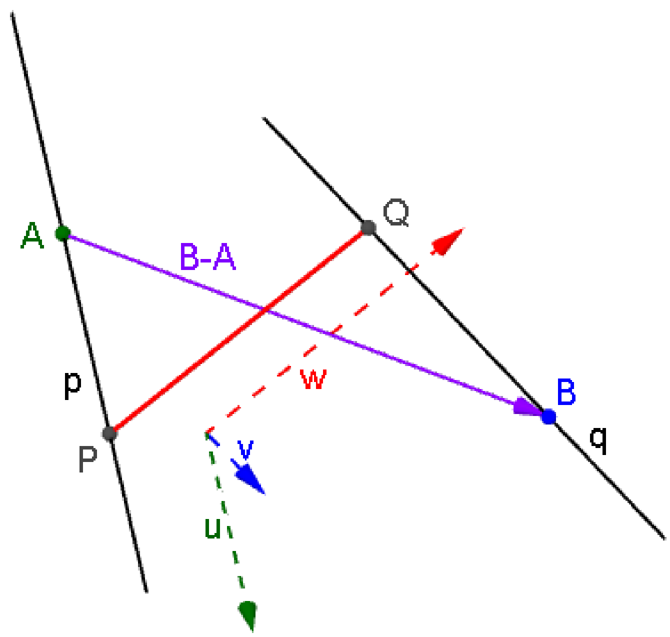
Pokuste se tento vzorec odvodit.

PŘÍKLAD 17.4. *V eukleidovském prostoru E_4 je dán bod $B = [7, 6, 11, 0]$ a rovina $\omega : X = M + k\vec{u} + l\vec{v}$, kde $M = [1, 1, 1, 1]$, $\vec{u} = (3, 2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 0)$. Napište vektorovou rovnici kolmice spuštěné z bodu B na rovinu ω a určete její průsečík B' s rovinou ω. Určete vzdálenost bodu B od roviny ω.*

17.5 Vzdálenost dvou mimoběžek v E_3

PŘÍKLAD 17.5. *Určete vzdálenost dvou mimoběžek p, q v $E_3 : p : X = A + t\vec{u}, A = [-2, -3, 2], \vec{u} = (4, 2, -1)$, $p : X = B + t\vec{v}, B = [1, 6, 2], \vec{v} = (0, 1, -1)$.*

Řešení: Viz Obr. 70. Vzdálenost $v = |pq|$ dvou mimoběžek p, q je rovna délce jejich



Obrázek 70: Vzdálenost dvou mimoběžek p, q je rovna délce jejich nejkratší příčky PQ, která je kolmá k oběma přímkám.

nejkratší příčky PQ, která je kolmá k oběma přímkám, tj. má směr vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Vzdálenost v tak spočítáme jako velikost kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{AB}$ (případně úsečky AB) do směru vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$|pq| = \frac{|(A - B) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}. \tag{173}$$

Pro zadané údaje tak dostáváme hodnotu $|pq| = \dfrac{|(3, 9, 0) \cdot (-1, 4, 4)|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 4^2}} = \sqrt{33}$.

17.6 Vzdálenost dvou podprostorů v E_n

Pro každé dva podprostory E_r, E_s eukleidovského prostoru E_n, které nemají společný bod určitě existují body $A' \in E_r$ a $A'' \in E_s$ takové, že přímka $A'A''$ je kolmá k oběma podprostorům. *Vzdáleností podprostorů* E_r, E_s potom rozumíme vzdálenosti těchto bodů A', A''.

PŘÍKLAD 17.6. *V eukleidovském prostoru* E_4 *určete vzdálenost rovin* ω, $\rho : \omega : X = [3, 5, -2, -3] + k(2, 0, -1, -1) + l(0, 4, -2, -3)$, $\rho : X = [1, 5, -6, 8] + k(2, 1, 2, 0) + l(0, -1, 1, 1)$.

Poznámka. Řešíme stejně jako příklad 17.3.

17.7 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

PŘÍKLAD 17.7. *Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin* $\rho : 2x+3y-6z+14 = 0$, $\sigma : 2x + 3y - 6z - 35 = 0$.

Řešení: Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z nich, uvažujme například bod $K = [k_1, k_2, k_3] \in \rho$, od té druhé z nich, tj. v našem případě od σ. Uvažujme nejprve obecné rovnice příslušných rovin v obecném tvaru $\rho : ax+by+cz+d = 0$, $\sigma : ax+by+cz+e = 0$ (Jsou-li roviny rovnoběžné, koeficienty u prvních tří členů obou rovnic se shodují, nebo se liší o násobek nějakým nenulovým číslem k. V takovém případě stačí příslušnou rovnici tímto k vydělit a bude platit první varianta, že koeficienty u prvních tří členů se shodují.). Podle vztahu (171) platí

$$|K\sigma| = \frac{|ak_1 + bk_2 + ck_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{174}$$

Protože bod K náleží rovině ρ, musí jeho souřadnice splňovat rovnici této roviny, tj. platí $ak_1 + bk_2 + ck_3 + d = 0$. Odtud vyjádříme $ak_1 + bk_2 + ck_3 = -d$ a dosadíme do (174), dostaneme vztah pro výpočet vzdálenosti $|\rho\sigma|$ dvou rovnoběžných rovin ρ, σ, daných obecnými rovnicemi $\rho : ax + by + cz + d = 0$, $\sigma : ax + by + cz + e = 0$:

$$|\rho\sigma| = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pokud je $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$, uvedený vztah se zjednoduší na pěkný tvar:

$$|\rho\sigma| = |d - e|.$$

Poznámka. *Vzdálenost dvou rovnoběžných podprostorů prostoru* E_n. Jsou-li E_r, E_s dva rovnoběžné podprostory v E_n, a platí-li $r \geq s$, pak je vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in E_s$ od podprostoru E_r. Jako příklad můžeme uvažovat vzdálenost přímky rovnoběžné s rovinou od této roviny.

18 Odchylka podprostorů

18.1 Odchylka dvou přímek

Pro určení odchylky dvou přímek využíváme odchylku jejich směrových vektorů. Již víme, že hodnoty těchto dvou odchylek se mohou lišit (v tom případě je jejich součtem 180°). Pro jejich výpočty používáme následující vztahy.

Odchylka dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$

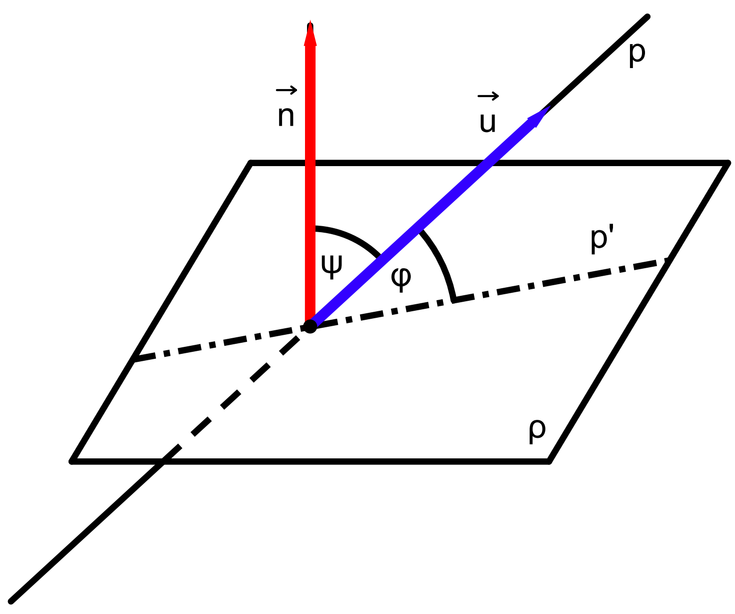
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Odchylka dvou přímek (různoběžek, mimoběžek) se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

PŘÍKLAD 18.1. *Určete odchylku dvou přímek* $p, q : p : \ X = A + t\vec{u};\ A = [1, 3, -1], \vec{u} = (1, 1, 2),\ q : \ X = B + s\vec{v};\ B = [1, 1, 0], \vec{v} = (3, -2, 1)$.

18.2 Odchylka přímky od roviny v E_3



Odchylkou přímky p od roviny ρ rozumíme odchylku φ přímky p od jejího kolmého průmětu p' do roviny ρ. Úhel ψ představuje odchylku přímky p od směru normály roviny ρ. Potom platí $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ a tak ze vztahu pro výpočet odchylky přímky p a normály roviny ρ

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$$

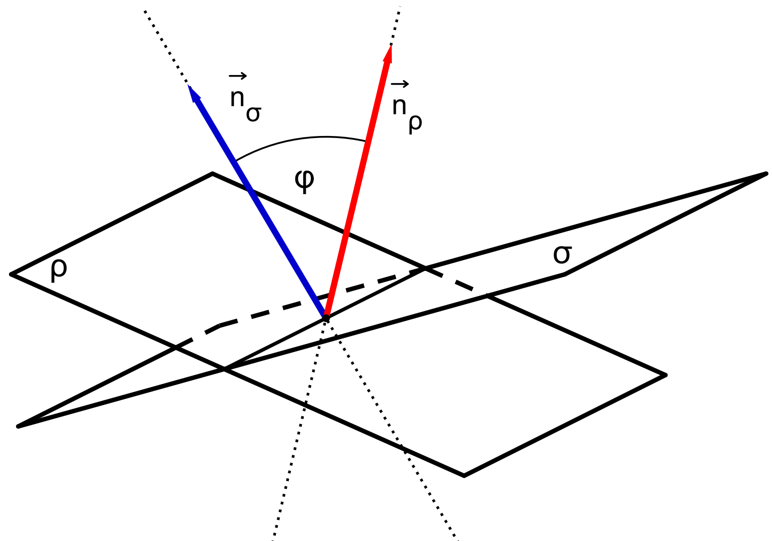
získáme vztah pro výpočet odchylky přímky a roviny

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|},$$

kde $\vec{u}$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ρ.

PŘÍKLAD 18.2. *Určete odchylku přímky AB od roviny ρ : $A = [2,3,-1]$, $B = [3,7,4]$, $\rho : 2x - 3y + z + 4 = 0$.*

18.3 Odchylka dvou rovin v E_3



Odchylkou dvou rovin (nadrovin) v E_3 (E_n) rozumíme odchylku jejich normálových přímek (ortogonálních doplňků).

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho\cdot\vec{n}_\sigma|}{|\vec{n}_\rho||\vec{n}_\sigma|} \tag{175}$$

Uvažujme roviny $\rho = [A;\vec{u},\vec{v}]$, $\sigma = [B;\vec{w},\vec{z}]$. Potom pro výpočet jejich odchylky φ můžeme modifikovat vzorec (175) na tvar:

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z})|}{|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}\times\vec{z}|}$$

PŘÍKLAD 18.3. *V prostoru E_3 určete odchylku φ daných podprostorů E_2', E_2'': $E_2' = [A,\vec{u},\vec{v}]$; $A = [1,0,0], \vec{u} = (1,1,2), \vec{v} = (3,1,1)$, $E_2'' : x - 2y + 1 = 0$.*

PŘÍKLAD 18.4. *V eukleidovském prostoru E_5 určete odchylku nadrovin ω, ρ : $\omega : x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 3 = 0$, $\rho : -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 7 = 0$.*