— text obsahuje znenia viet, ktoré budeme dokazovať na prednáškach
— text je doplnený aj o množstvo poznámok, ich cieľom je dopomôcť študentom k lepšiemu pochopeniu pojmov aj súvislostí medzi nimi
— text je tiež doplnený aj o niekoľko úloh, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôcť k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém

G. Monoszová, Analytická geometria 2 - Kapitola III

KAPITOLA III
AFINNÉ ZOBRAZENIA

III. 1. Afinné zobrazenie - definícia, vlastnosti, analytické vyjadrenie

---

Definícia.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}', \mathbb{V}', -)$ sú afinné podpriestory. Zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

nazývame **afinné zobrazenie**, ak obrazom ľubovoľných troch kolineárnych bodov sú totožné body, alebo kolineárne body, pričom ich deliaci pomer sa zachováva.

Dohovor.
Pre afinné zobrazenie $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ (kde $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}', \mathbb{V}', -)$ sú afinné priestory), budeme používať aj zápis $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$.

Poznámky.

1. Obrazom priamky v afinnom zobrazení je priamka alebo bod.
2. Stred dvojice bodov sa afinným zobrazením zachováva.

Veta 1.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}', \mathbb{V}', -)$ sú afinné podpriestory, nech $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je afinné zobrazenie. Potom
a) môžeme definovať takzvané asociované zobrazenie $\overline{f}$ afinného zobrazenia f nasledovne

$$\begin{aligned} \overline{f} : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}', \\ (X - Y) &\longmapsto \overline{f}(X - Y) := f(X) - f(Y), \end{aligned}$$

b) asociované zobrazenie $\overline{f}$ je homomorfizmus vektorových priestorov,
c) afinné zobrazenie je jednoznačne určené obrazom jedného bodu a svojím asociovaným homomorfizmom.

Poznámka.

3. (dôsledok vety 1 c))
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}', \mathbb{V}', -)$ sú afinné podpriestory, nech $\overline{f} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}'$ je homomorfizmus vektorových priestorov a nech $B \in \mathcal{A}$, $B' \in \mathcal{A}'$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie f, ktorého asociovaný homomorfizmus je práve zobrazenie $\overline{f}$ a platí $f(B) = B'$. Zrejme f je dané predpisom $f(X) = B' + \overline{f}(X - B)$.

Veta 2.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A},\mathbb{V},-)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}',\mathbb{V}',-)$ *sú afinné podpriestory. Zobrazenie* $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$ *je afinné zobrazenie práve vtedy, keď pre ľubovoľné dva body* $P,Q\in\mathcal{A}$ *a ľubovoľné* $t\in\mathbb{R}$ *platí* $f(P+t(Q-P))=f(P)+t.\overline{f}(Q-P)$.

Veta 3.
Obrazom dvoch rovnobežiek v afinnom zobrazení sú dve rovnobežky alebo dva body.

Úloha 1. (známe z lineárnej algebry)
Dokážte, že homomorfizmus φ vektorových prietorov je prosté zobrazenie práve vtedy, keď jedine nulový vektor sa zobrazuje do nulového vektora.

Veta 4.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A},\mathbb{V},-)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}',\mathbb{V}',-)$ *sú afinné podpriestory, nech* $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$ *je afinné zobrazenie a nech* $\overline{f}:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}'$ *je prislúchajúci asociovaný homomorfizmus. Potom*
a) f *je injektívne zobrazenie práve vtedy, keď* $\overline{f}$ *je prostý homomorfizmus,*
b) f *je surjektívne zobrazenie práve vtedy, keď* $\overline{f}$ *je surjektívny homomorfizmus.*

Úloha 2.
Nech $\mathbb{A}_r(\mathcal{A},\mathbb{V}_r,-)$, $\mathbb{A}'_s(\mathcal{A}',\mathbb{V}'_s,-)$ sú afinné podpriestory, nech $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$ je afinné zobrazenie. Čo viete povedať o vzťahu medzi dimenziami r, s, ak a) f je prosté zobrazenie, b) f je surjektívne zobrazenie, c) f je bijekcia?

Veta 5.
Afinné zobrazenie $f:\mathbb{A}_k\longrightarrow\mathbb{A}'$ *je jednoznačne určené obrazmi* $k+1$ *lineárne nezávislých bodov afinného priestoru* $\mathbb{A}_k$.

III. 2. Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia

Nech v afinnom podpriestore $\mathbb{A}_n(\mathcal{A},\mathbb{V},-)$ je daná LSS repérom $[P,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n]$, nech v afinnom podpriestore $\mathbb{A}'_m(\mathcal{A}',\mathbb{V}',-)$ je daná LSS repérom $[Q,\overline{d}_1,\overline{d}_2,\ldots,\overline{d}_m]$, nech $f:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$ je afinné zobrazenie a $\overline{f}:\mathbb{V}_n\longrightarrow\mathbb{V}'_m$ je ku f prislúchajúci asociovaný homomorfizmus, a nech $f(P)=Q+\sum\limits_{j=1}^{m}b_j\overline{d}_j$, $\overline{f}(\overline{e}_i)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}\overline{d}_j$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Potom je môžné odvodiť analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f, resp. analytické vyjadrenie jeho asociovaného homomorfizmu $\overline{f}$, ktoré vyjadruje vzťah medzi súradnicami bodu $X\in\mathcal{A}$, $X[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ a jeho obrazu $X'[x'_1,x'_2\ldots,x'_m]$ v zobrazení f, resp. vyjadruje vzťah medzi súradnicami vektora $\overline{x}\in\mathbb{V}_n$, $\overline{x}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a jeho obrazu $\overline{x}'(x'_1,x'_2\ldots,x'_m)$ v zobrazení $\overline{f}$.

Systém rovníc (1) je **analytickým vyjadrením afinného zobrazenia** f a systém rovníc (2) je **analytickým vyjadrením jeho asociovaného homomorfizmu** $\overline{f}$.

$$
\begin{aligned}
f:\ x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots + a_{n1}x_n + b_1 \\
x'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{n2}x_n + b_2 \\
x'_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{n3}x_n + b_3 \\
&\vdots \\
x'_m &= a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + a_{3m}x_3 + \cdots + a_{nm}x_n + b_m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}:\ x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots + a_{n1}x_n \\
x'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{n2}x_n \\
x'_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{n3}x_n \\
&\vdots \\
x'_m &= a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + a_{3m}x_3 + \cdots + a_{nm}x_n
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Symbolicky môžeme prehľadne pre zobrazenia f a $\overline{f}$ zapísať:

$$
\begin{aligned}
f:\ \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}', \\
X[x_1, x_2, \ldots, x_n] &\xmapsto{f} X'[x'_1, x'_2, \ldots, x'_m],
\end{aligned}
$$

$$
P \xmapsto{f} B[b_1, b_2, \ldots, b_m]
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}:\ \mathbb{V}_n &\longrightarrow \mathbb{V}'_m, \\
\overline{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\xmapsto{\overline{f}} \overline{x}'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{e}_1 &\xmapsto{\overline{f}} \overline{e}'_1(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) \\
\overline{e}_2 &\xmapsto{\overline{f}} \overline{e}'_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}) \\
&\vdots \\
\overline{e}_n &\xmapsto{\overline{f}} \overline{e}'_n(a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm})
\end{aligned}
$$

Analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f (t.j. sústavu rovníc (1)) môžeme zapísať aj v maticovom tvare

$$
\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{pmatrix},
$$

stručne píšeme aj

$$X' = X.M_f + B, \qquad \text{kde } M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

M_f je tzv. **matica zobrazenia** f.

III. 3. Grupa afinných transformácií

Poznámka.

4. Tak ako všetky zobrazenia, tak aj afinné zobrazenia môžeme za istých podmienok skladať.
   - Uvedomme si, že ak $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinné zobrazenie a afinný podpriestor $\mathcal{B}$ je podpriestorom afinného priestoru $\mathcal{A}$, tak aj zúžené zobrazenie f na podpriestor $\mathcal{B}$ je zrejme afinné zobrazenie ($f|_{\mathcal{B}}$ je afinné zobrazenie).
   - Nech sú dané afinné zobrazenia $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, a $f_2 : \mathcal{A}'' \to \mathcal{A}'''$; ak platí $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$, tak môžeme uvažovať o zloženom zobrazení $f_1 \circ f_2$. Zrejme platí, že zložením afinných zobrazení je opäť afinné zobrazenie.
   - Ak f je prosté afinné zobrazenie, tak existuje inverzné zobrazenie f^{-1} a toto zobrazenie je tiež afinné. Príslušný asociovaný homomorfizmus ku zobrazeniu f^{-1} je inverzné zobrazenie ku asociovanému zobrazeniu $\overline{f}$, t.j. $\overline{f^{-1}} = (\overline{f})^{-1}$.
   - Poznamenajme ešte, že identita je zrejme afinným zobrazením.

Definícia.
Prosté afinné zobrazenie afinného priestoru $\mathbb{A}$ na seba nazývame **afinná transformácia priestoru** $\mathbb{A}$ (stručne budeme hovoriť len **afinita priestoru** $\mathbb{A}$).

Veta 6.
Všetky afinity afinného priestoru $\mathbb{A}$ *pri obvyklom skladaní zobrazení tvoria grupu. Nazývame ju* **grupa afinných transformácií** *(stručne* **grupa afinít***) priestoru* $\mathbb{A}$.

Úloha 3. Zdôvodnite, prípadne vyvráťte tvrdenie:
Prosté afinné zorazenie priestoru $\mathbb{A}$ do seba je vždy afinnou transformáciou priestoru $\mathbb{A}$.

Poznámka.

5. Afinné zobrazenie afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ do seba je prostým zobrazením práve vtedy, keď jeho asociované zobrazenie je izomorfizmus vektorových priestorov.

Úloha 4. Zdôvodnite, prípadne vyvráťte tvrdenie:
Matica afinnej transformácie je regulárna.

Samozrejme nie vždy má zmysel hovoriť o samodružných prvkoch daného zobrazenia. Aby otázka o exitencii samodružných prvkov zobrazenia $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mala zmysel, tak prienik $f(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}$ musí byť neprázdny. Ak ale ide o zobrazenie množiny do samej seba, tak uvažovať o samodružných prvkoch je vždy zmysluplné. V nasledujúcich častiach tejto kapitoly budeme pracovať výhradne s afinnými zobrazeniami afinného priestoru do seba a budeme skúmať ich samodružné prvky.

Nech teda f je zobrazenie afinného priestoru $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$ do seba, nech $\overline{f}$ je jeho asociovaný homomorfizmus a nech matica zobrazenia f je

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definícia.
Nech f je zobrazenie afinného priestoru $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$ do seba. Bod $X \in \mathcal{A}$ nazývame **samodružný bod** zobrazenia f, ak sa bod X zobrazí v zobrazení f do seba, t.j. $f(X) = X$.

Určenie množiny samodružných bodov afinného zobrazenia f

Zrejme $X[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{A}$ je samodružný bod afinného zorazenia f práve vtedy, keď súradnice bodu X sú riešením sústavy (3)

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n + b_1 &= 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - 1)x_2 + \dots + a_{n2}x_2 + b_2 &= 0 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + (a_{nn} - 1)x_n + b_n &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Veta 7.
Nech $f : \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{A}_n$ je afinné zobrazenie. Potom zobrazenie f buď nemá žiadne samodružné body, alebo množina samodružných bodov tvorí afinný podpriestor afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ dimenzie $n - h$, kde h je hodnosť matice sústavy (3).

Úloha 5.
Dokážte, že ak K, L sú dva rôzne samodružné body afinného zobrazenia f, potom každý bod priamky $\overleftrightarrow{KL}$ je samodružný bod zobrazenia f.

Úloha 6.
Nech A, B, C sú tri nekolineárne body afinného priestoru $\mathbb{A}_n$. Dokážte, že ak A, B, C sú samodružné body afinného zobrazenia f, potom každý bod roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ je samodružný bod zobrazenia f.

Definícia.
Pod **smerom afinného priestoru** rozumieme každý 1-rozmerný podpriestor jeho zamerania.

Poznámky.

6. Každý nenulový vektor zamerania afinného priestoru určuje práve jeden smer afinného priestoru.

7. Každá priamka afinného priestoru určuje práve jeden smer afinného priestoru.

Úloha 7. Doplňte tak, aby vznikol pravdivý výrok:
a) Dva nenulové vektory vektorového priestoru $\mathbb{V}$ určujú ten istý smer práve vtedy, keď ...
b) Dve priamky (jednorozmerné afinné podpriestory) afinného priestoru určujú ten istý smer práve vtedy, keď ...

Poznámka. (známe z lineárnej algebry)

8. Nenulový vektor $\overline{v}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}$ nazývame charakteristickým vektorom endomorfizmu φ vektorového priestoru $\mathbb{V}$, ak existuje reálne číslo c, také, že platí $\varphi(\overline{v}) = c\overline{v}$. Číslo c sa nazýva charakteristickým číslom endomorfizmu φ.

V súlade s predchádzajúcou poznámkou budeme používať pojem charakteristický vektor a charakteristické číslo v súvislosti s asociovaným homomorfizmom afinného zobrazenia.

Definícia.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \mathbb{V}, -)$ je afinný priestor. Pod **samodružným smerom** afinného zobrazenia $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ rozumieme smer zamerania $\mathbb{V}$, ktorý sa v príslušnom asociovanom zobrazení $\overline{f} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ zobrazí do seba (t.j. $\overline{u} \in \mathbb{V}$ - zrejme $\overline{u} \neq \overline{0}$ - určuje samodružný smer afinného zobrazenia f, ak existuje nenulové reálne číslo λ také, že $\overline{f}(\overline{u}) = \lambda\overline{u}$).

Číslo λ je **charakteristické číslo** asociovaného homomorfizmu $\overline{f}$.

Vektor $\overline{u}$ je **charakteristický vektor** asociovaného homomorfizmu $\overline{f}$.

Poznámka.

9. Ohľadne samodružných smerov afinného zobrazenia nás teda budú zaujímať len nenulové charakteristické čísla asociovaného homomorfizmu.

Postup pri určovaní samodružných smerov afinného zobrazenia f

1) určíme charakteristické číslo(a) λ asociovaného zobrazenia $\overline{f}$ ako nenulové riešenie tzv. charakteristickej rovnice (4) homomorfizmu $\overline{f}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

2) určíme charakteristický(é) vektor(y) prislúchajúce charakteristickému číslu λ, súradnice charakterisického vektora $\overline{u}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ určíme ako n-ticu, ktorá je nenulovým riešením sústavy (5)

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n &= 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{n2}x_2 &= 0 \\ &\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Veta 8.
Afinné zobrazenie f afinného priestoru $\mathbb{A}$ je prosté práve vtedy, keď nula nie je charakteristickým číslom jeho asociovaného homorfizmu $\overline{f}$.

Úloha 8.
Nech f je afinné zobrazenie v $\mathbb{A}_n$ a nech $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú charakteristické vektory jeho asociovaného homomorfizmu $\overline{f}$ (zamerania $\mathbb{V}_n$), ktoré prislúchajú k tomu istému charkteristickému číslu λ. Dokážte, že potom všetky smery vektorového podpriestoru $\mathbb{V}_2'$ generovaného charakteristickými vektormi $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú samodružné smery afinného zobrazenia f.

III. 5. Homotetické transformácie

V tejto časti budeme skúmať afinné zobrazenia, ktoré majú všetky smery samodružné.

Poznámka.

10. Ak afinné zobrazenie v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$ má všetky smery samodružné, potom existuje jediné charakteristické číslo asociovaného homomorfizmu $\overline{f}$, t.j. pre každý vektor $\overline{x} \in \mathbb{V}_n$ platí $\overline{f}(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$.

Veta 9. *Afinné zobrazenie, ktoré má všetky smery samodružné je buď rovnoľahlosť alebo posunutie (vrátane identity).*

Poznámka.

11. Ak afinné zobrazenie f má všetky smery samodružné, tak f je afinná transformácia.

Definícia.
Afinné zobrazenie, ktoré má všetky smery samodružné nazývame **homotetická transformácia** (stručne **homotétia**).

Veta 10.
Všetky homotetické transformácie afinného priestoru $\mathbb{A}$ tvoria vzhľadom na skladanie zobrazení grupu, tzv. grupu homotetických transformácií (stručne budeme túto grupu nazývať aj grupou homotétií).

Poznámka.

12. Grupa homotetických transformácií afinného priestoru $\mathbb{A}$ je podgrupou grupy všetkých afinít priestoru $\mathbb{A}$.

Úloha 9.
Dokážte, prípadne vyvráťte tvrdenie:
Všetky rovnoľahlosti afinného priestoru $\mathbb{A}$ tvoria vzhľadom na skladanie grupu.

III. 6. Projekcie a základné afinity

V tejto časti budeme skúmať afinné zobrazenia v $\mathbb{A}_n$, ktorých samodružné body tvoria nadrovinu afinného priestoru $\mathbb{A}_n$. Je možné odvodiť, že takéto zobrazenia

môžu byť dvoch typov. Jedným typom sú tzv. **projekcie**, v ktorých sa celý priestor $\mathbb{A}_n$ zobrazí do príslušnej nadroviny samodružných bodov a druhým typom sú tzv. **základné afinity**, pri ktorých, naopak, nie každý bod priestoru $\mathbb{A}_n$ sa zobrazí do nadroviny samodružných bodov tohoto zobrazenia. Pre základnú afinitu je možné odvodiť, že obraz bodu, ktorý neleží v nadrovine samodružných bodov tiež neleží v tejto nadrovine. Teda v základnej afinite sa do nadroviny samodružných bodov zobrazujú jedine body tejto nadroviny, t.j. samodružné body.
Pre afinné zobrazenie f v $\mathbb{A}_n$, pre ktoré platí, že množina jeho samodružných bodov je nadrovina v A_n, je možné odvodiť analytické vyjadrenie v nasledujúcom tvare

$$
\begin{aligned}
f:\ x_1' &= x_1 + \lambda_1(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c)\\
x_2' &= x_2 + \lambda_2(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c)\\
&\ \vdots\\
x_n' &= x_n + \lambda_n(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

kde $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c = 0$ je všeobecná rovnica nadroviny samodružných bodov afinného zobrazenia f a λ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sú reále čísla, pričom aspoň jedno z čisel λ_i je rôzne od nuly.

Úloha 10. Dokážte:
Nech f je projekcia alebo základná afinita v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$. Potom pre ľubovoľné dva body $X, Y \in \mathbb{A}_n$ platí, že vektory $f(X) - X$ a $f(Y) - Y$ sú lineárne závislé.

Úloha 11. Nech

$$
\begin{aligned}
f:\ x_1' &= x_1 + \lambda_1(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c)\\
x_2' &= x_2 + \lambda_2(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c)\\
&\ \vdots\\
x_n' &= x_n + \lambda_n(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c)
\end{aligned}
$$

je analytické vyjadrenie afinného zobrazenia v $\mathbb{A}_n$, ktorého množina samodružných bodov bodov je nadrovina ρ, $\rho:\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c = 0$. Dokážte
a) f je projekcia práve vtedy, keď $1 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_n = 0$,
b) f je základná afinita práve vtedy, keď $\lambda_i = \frac{m_i' - m_i}{c_1m_1 + c_2m_2 + \cdots + c_nm_n + c}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $M \notin \rho$, $f(M) = M'$, $M[m_1, m_2, \ldots, m_n]$, $M'[m_1', m_2', \ldots, m_n']$.

III. 7. Klasifikácia afinných zobrazení v afinnom priestore $\mathbb{A}_2$

Klasifikáciu afinných zobrazení v $\mathbb{A}_2$ urobíme na základe samodružných prvkov. Nech f je afinné zobrazenie v $\mathbb{A}_2$, potom rovnice (1) sú jeho analytickým vyjadrením. Súradnice samodružných bodov zobrazenia f, resp. súradnice charakteristických vektorov asociovaného zobrazenia $\overline{f}$, potom spĺňajú sústavu (2), resp. (3).

analytické vyjadrenie afinného zobrazenia f

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{aligned} \tag{1}$$

$X[x; y]$ je <u>samodružný bod</u> afinného zobrazenia f , ak

$$\begin{aligned} (a-1)x + by + p &= 0 \\ cx + (d-1)y + q &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

nenulový vektor $\overline{x}(x; y)$ určuje <u>samodružný smer</u> afinného zobrazenia f, ak

$$\begin{aligned} (a-\lambda)x + by &= 0 \\ cx + (d-\lambda)y &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

charakteristická rovnica asociovaného zobrazenia $\overline{f}$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \tag{4}$$

- charakteristická rovnica má (v $\mathbb{R}$) zrejme maximálne dve riešenia, počet závisí od diskriminantu rovnice

$D = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc$
$D = (a-d)^2 + 4bc$

- rozlíšime prípady pre diskriminant $\quad D > 0 \quad D = 0 \quad D < 0$

$\boxed{A}$

ak $\underline{\underline{D > 0}}$, potom

existujú dva rôzne reálne korene charakteristickej rovnice (4) $\qquad (\circledcirc)$

teda **existujú dva samodružné smery**,

zvoľme LSS[◇] tak, aby osi x, y mali tieto samodružné smery, potom charakteristické vektory sú

$\overline{u}_1(1; 0)$ ... prislúchajúci napr. ku charakteristickému číslu λ_1
$\overline{u}_2(0; 1)$ ... prislúchajúci napr. ku charakteristickému číslu λ_2

[◇]LSS - lineárna sústava súradníc

podľa (3) potom $a = \lambda_1$
$c = 0$
$b = 0$
$d = \lambda_2$

potom sústavu (2) môžeme zapísať: $(\lambda_1 - 1)x + p = 0$
$(\lambda_2 - 1)y + q = 0$

- pre λ_1, λ_2 môžu nastať tri prípady

A$_1$) $\lambda_1 \neq 1 \neq \lambda_2$

A$_2$) $\lambda_1 = 1 \neq \lambda_2$
alebo naopak

A$_3$) $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$
čo je spor s tým, že $D > 0$

v prípade A$_1$) existuje jediný samodružný bod $[\frac{-p}{\lambda_1 - 1}; \frac{-q}{\lambda_2 - 1}]$
ak ho zvolíme za počiatok LSS, tak
$p = 0$
$q = 0$
potom

$$\begin{aligned} f:\ x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

v prípade A$_2$) pre samodružné body (sústava (2)), potom platí

$$\begin{aligned} 0.x + p &= 0 \\ (\lambda_2 - 1).y + q &= 0 \end{aligned}$$

---

ak
$p = 0$, tak
existuje priamka samodružných bodov
o rovnici $y = \dfrac{-q}{\lambda_2 - 1}$,
ak počiatok LSS
zvolíme na tejto priamke,
tak $q = 0$,

potom

$$f: \quad x' = x$$
$$y' = \lambda_2 y$$

ak
$p \neq 0$, tak
neexistujú samodružné body;

ak by existovali samodružné priamky,

tak môžu mať len smer osi x alebo osi y;

ak by m bola samodružná priamka
rovnobežná s osou x, tak

$$\begin{array}{l} m: y = r \\ \underline{f(m): y = \lambda_2 r + q} \\ m = f(m) \\ r = \lambda_2 r + q \\ r = \dfrac{q}{1 - \lambda_2} \end{array}$$

t.j. existuje jediná samodružná priamka m
rovnobežná s osou x; $m: y = \dfrac{q}{1 - \lambda_2}$,
ak zvolíme počiatok LSS
na tejto priamke m, tak
$q = 0$;

ak by n bola samodružná priamka
rovnobežná s osou y, tak

$$\begin{array}{l} n: x = s \\ \underline{f(n): x = s + p} \\ n = f(n) \\ s = s + p \end{array}$$

čo je spor, lebo $p \neq 0$
t.j. neexistuje samodružná priamka
rovnobežná s osou y,

potom pre analytické vyjadrenie f dostaneme

$$f: x' = x + p$$
$$y' = \lambda_2 y$$

$\boxed{B}$

ak $\underline{\underline{D = 0}}$, potom

existuje jeden dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice (4) (◎◎)

označme tento koreň λ_1,

teda **existuje aspoň jeden samodružný smer**;

zvoľme LSS tak, aby os x mala tento samodružný smer, potom charakteristický vektor prislúchajúci k tomuto smeru je

$\overline{u}(1; 0)$

podľa sústavy (3) potom $a = \lambda_1$
$c = 0$

potom charakteristická rovnica (4) má tvar

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + d)\lambda + \lambda_1 d = 0$$

zrejme táto kvadratická rovnica má dva korene λ_1 a d,

keďže platí (◎◎), tak $d = \lambda_1$,

potom analytické vyjadrenie zobrazenia f je

$$\begin{aligned} f:\ x' &= \lambda_1 x + by + p \\ y' &= \lambda_1 y + q \end{aligned}$$

potom systém rovníc (3) môžeme písať nasledovne

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda)x + by &= 0 \\ \underline{(\lambda_1 - \lambda)y} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

opäť využijeme fakt (◎◎), preto $\lambda = \lambda_1$, potom
$by = 0$

- pre b môžu nastať dva prípady

$B_1)$ $b = 0$ $B_2)$ $b \neq 0$

B_1) v tomto prípade je **každý smer samodružný**,
pre samodružné body sústavu (2) môžeme písať

$$(\lambda_1 - 1)x + p = 0$$
$$(\lambda_1 - 1)y + q = 0$$

ak a) $\lambda_1 = 1$		ak b) $\lambda_1 \neq 1$
a_1) $p = 0 = q$	a_2) $p \neq 0 \bigvee q \neq 0$	
každý bod je samodr.	$\nexists$ samodr. bod	$\exists!$ samodr. bod $\left[-\frac{p}{\lambda_1 - 1}; -\frac{q}{\lambda_1 - 1}\right]$ ak ho zvolíme za začiatok LSS, tak $p = q = 0$
$f:\ x' = x$, $y' = y$	$f:\ x' = x + p$, $y' = y + q$	$f:\ x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_1 y$
IDENTITA	POSUNUTIE	ROVNOLAHLOSŤ

B_2) v tomto prípade **existuje jediný samodružný smer**, je určený vektorom $\overline{u}(1; 0)$
pre samodružné body sústavu (2) môžeme písať

$$(\lambda_1 - 1)x + by + p = 0$$
$$(\lambda_1 - 1)y + q = 0$$

pre $\lambda_1 = 1$		pre $\lambda_1 \neq 1$
ak $q = 0$	ak $q \neq 0$	
$\exists$ priamka samodr. bodov $by + p = 0$ ak počiatok LSS zvolíme na nej, tak $p = 0$	$\nexists$ samodr. bod	$\exists!$ samodr. bod $\left[\frac{bq - \lambda_1 p + p}{(\lambda_1 - 1)^2}; \frac{-q}{\lambda_1 - 1}\right]$, ak ho zvolíme za počiatok LSS, tak $q = p = 0$
$f:\ x' = x + by$, $y' = y$	$f:\ x' = x + by + p$, $y' = y + q$	$f:\ x' = \lambda_1 x + by$, $y' = \lambda_1 y$

$\boxed{C}$

ak $\underline{\underline{D < 0}}$, potom

neexistuje reálny koreň charakteristickej rovnice (4)

t.j.
neexistuje charakteristické číslo,
t.j.
neexistuje charakteristický vektor,
t.j.
neexistuje samodružný smer,
keďže ani číslo 1 nemôže byť koreňom charakteristickej rovnice (4), tak

$$1^2 - (a+d).1 + ad - bc \neq 0$$
$$ad - bc - a - d + 1 \neq 0 \qquad (\circledcirc\circledcirc\circledcirc)$$

potom pre samodružné body (sústava (2)) platí

$$(a-1)x + by + p = 0$$
$$cx + (d-1)y + q = 0$$

---

táto sústava má riešenie práve vtedy, keď pre hodnosť matice sústavy a hodnosť rozšírenej matice platí rovnosť

$$\text{hod}\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} = \text{hod}\begin{pmatrix} a-1 & b & p \\ c & d-1 & q \end{pmatrix}$$

pretože platí $(\circledcirc\circledcirc\circledcirc)$, tak

$$\text{hod}\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} = 2$$

teda aj

$$\text{hod}\begin{pmatrix} a-1 & b & p \\ c & d-1 & q \end{pmatrix} = 2$$

t.j. sústava (2) má riešenie, keďže ide o dve rovnice o dvoch neznámych, tak existuje jediný samodružný bod,
ak by sme ho zvolili za počiatok LSS, tak

$$p = q = 0$$

a pre analytické vyjadrenie zobrazenia f dotaneme:

$$f:\ x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$