æ

— text obsahuje znenia viet, ktoré budeme dokazovat' na prednáškach
— text je doplnený aj o množstvo poznámok, ich cieľom je dopomôct' študentom k lepšiemu pochopeniu pojmov aj súvislostí medzi nimi
— text je tiež doplnený aj o niekoľko úloh, vyriešenie ktorých by tiež malo študentom pomôct' k lepšiemu pochopeniu prednášaných tém

G. Monoszová, Analytická geometria 1 - Kapitola I

KAPITOLA I

AFINNÝ PRIESTOR

I. 1. Afinný priestor - definícia, vlastnosti

Definícia.
Pod **afinným priestorom** rozumieme usporiadanú trojicu $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$, pričom množina $\mathcal{A}$ je neprázdna, $\mathbb{V}$ je vektorový priestor a f je zobrazenie s vlastnosťami

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ [X, Y] &\longmapsto f(X, Y) \end{aligned}$$

(AP1) $$f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$$

$$\begin{aligned} \exists P \in \mathcal{A};\ f_P : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ X &\longmapsto f(P, X) \end{aligned}$$

(AP2) je bijektívne zobrazenie

Vektorový priestor $\mathbb{V}$ nazývame **zameraním afinného priestoru**, prvky množiny $\mathcal{A}$ nazývame **bodmi afinného priestoru**.

Poznámka.

1. Pod **dimenziou afinného priestoru** rozumieme dimenziu jeho zamerania; dimenziu afinného priestoru budeme označovať indexom vpravo dole, napríklad k-rozmerný afinný priestor označíme $\mathbb{A}_k(\mathcal{A}; \mathbb{V}_k; f)$.

- afinný priestor dimenzie 1 nazývame **afinná priamka**, označujeme ho $\mathbb{A}_1$ ale aj ako obvykle a, b, p, ...
- afinný priestor dimenzie 2 nazývame **afinná rovina**, označujeme ho $\mathbb{A}_2$ ale aj ako obvykle α, β, ϱ, ...

Úloha 1.
Existuje afinný priestor dimenzie 0?

Poznámky.

2. Afinný priestor, ktorého zameraním je vektorový priestor nad poľom reálnych čísel nazývame **reálny afinný priestor**.

3. V afinnom priestore $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ platí vlastnosť (AP2) pre ľubovoľný pevne zvolený bod P', t.j.

$$\forall P' \in \mathcal{A}, f_{P'} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{V}, f_{P'}(X) := f(P', X) \text{ je bijektívne zobrazenie}$$

(stačí si uvedomiť, že $f(P', X) = f(P', P) + f(P, X)$).

4. Nech $\mathbb{A} = (\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinný priestor, potom v $\mathbb{A}$ môžeme definovať zobrazenie $g : \mathcal{A} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{A}$ nasledovne

$$g(X, \overline{u}) = Y \Longleftrightarrow f(X, Y) = \overline{u}.$$

Zobrazenie f v afinnom priestore často označujeme $-$, v takom prípade g označujeme $+$. Potom teda platí

$$X + \overline{u} = Y \Longleftrightarrow Y - X = \overline{u}.$$

Dohovor.

1. Kvôli lepšej orientácii čitateľa v texte budeme v afinnom priestore $(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n; f)$ označovať n-tice reálnych čísel, ktoré sú bodmi tohoto afinného priestoru v hranatých zátvorkách a n-tice reálnych čísel, ktoré sú prvkami zamerania tohoto afinného priestoru v okrúhlych zátvorkách.
2. Ak povieme, že zobrazenie f v afinnom priestore $(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n; f)$ je definované ako odčítanie po zložkách, budeme tým mať na mysli, že
   $$f(X, Y) = Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$$
   a zrejme potom
   $$g(X, \overline{u}) = X + \overline{u} = [x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_n + u_n],$$
   kde $X[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $Y[y_1, y_2, \dots, y_n]$, $\overline{u}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Veta 1.
Nech $(\mathcal{A}; \mathbb{V}; -)$ je afinný priestor. Potom

a) $A - A = \overline{0}$
b) $-(A - B) = B - A$
c) $(A + \overline{u}) - B = (A - B) + \overline{u}$
d) $A - (B + \overline{u}) = (A - B) - \overline{u}$
e) $A + (\overline{u} + \overline{v}) = (A + \overline{u}) + \overline{v}$
f) $(A - B) + (C - D) = (A - D) + (C - B)$
g) $A - B = C - D \Longleftrightarrow A - C = B - D$
h) $A + \overline{u} = B + \overline{v} \Longleftrightarrow A - B = \overline{v} - \overline{u}$

I. 2. Lineárna sústava súradníc

Definícia.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}; \mathbb{V}; -)$ je afinný priestor, nech $P \in \mathcal{A}$ a nech $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n\}$ je báza zamerania $\mathbb{V}$. Potom $(n+1)$-ticu $[P; \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n]$ nazývame **repérom** afinného priestoru $\mathbb{A}$.

Definícia.
Nech $\mathbb{A}_n(\mathcal{A};\mathbb{V}_n;f)$ je afinný priestor, nech $[P;\overline{u}_1,\overline{u}_2,\dots,\overline{u}_n]$ je repér v $\mathbb{A}$. Pod **lineárnou súradnicovou sústavou** (stručne budeme písať LSS) rozumieme zobrazenie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}:\mathcal{A}&\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ X&\longmapsto [x_1;x_2;\dots;x_n],\ \text{pričom } X=g(P,x_1\overline{u}_1+x_2\overline{u}_2+\cdots+x_n\overline{u}_n).\end{aligned}$$

Bod P nazývame **počiatok lineárnej súradnicovej sústavy**,
$[x_1;x_2;\dots,x_n]$ nazývame **súradnice bodu** X.

Úloha 2.
Čo viete povedať o súradniciach počiatku LSS? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Úloha 3.
Je LSS v afinnom priestore (pri danom repére) bijektívnym zobrazením? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Úloha 4.
Nech v $\mathbb{A}_n$ je daná LSS, nech $X,Y\in\mathbb{A}_n$ a nech súradnice bodov X, Y sú $X=[x_1,x_2,\dots,x_n]$, $Y=[y_1,y_2,\dots,y_n]$. Potom pre súradnice vektora $X-Y$ platí $X-Y=(x_1-y_1,x_2-y_2,\dots,x_n-y_n)$. Zdôvodnite.

I. 3. Afinný podpriestor
Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru
Vzájomná poloha afinných podpriestorov
Priečka mimobežiek

Definícia.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};f)$ je afinný priestor. Neprázdnu podmnožinu $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$ nazývame **afinný podpriestor** afinného priestoru $\mathbb{A}$, ak existuje vektorový podpriestor $\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}'\subset\mathbb{V}$, pričom platí

(APP1) $\quad \forall X,Y\in\mathcal{A}' :\ f(X,Y)\in\mathbb{V}'$

(APP2) $\quad \forall X\in\mathcal{A}',\forall\overline{u}\in\mathbb{V}' :\ g(X,\overline{u})\in\mathcal{A}'$

Poznámky.

5. Všimnime si, že afinný priestor je definovaný ako usporiadaná trojica a afinný podpriestor ako bodová podmnožina. Zároveň však priamo z definície afinného podpriestoru je zrejmé, že každý afinný podpriestor $\mathcal{A}'$ afinného priestoru $(\mathcal{A};\mathbb{V};f)$ môžeme doplniť na trojicu $(\mathcal{A}';\mathbb{V}';f|_{\mathcal{A}'\times\mathcal{A}'})$, ktorá je afinným priestorom. Preto nebudeme striktne rozlišovať medzi afinným podpriestorom $\mathcal{A}'$ a trojicou $\mathbb{A}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';f|_{\mathcal{A}'\times\mathcal{A}'})$.
6. Afinný podpriestor je jednoznačne určený jedným svojím bodom a svojím zameraním. Preto pre afinný podpriestor $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};f)$ budeme používať aj zápis $\mathbb{A}=[Q;\mathbb{V},f]$, kde $Q\in\mathcal{A}$, v prípade keď nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu ohľadne zobrazenia f, tak budeme afinný podpriestor stručne označovattt len $\mathbb{A}=[Q;\mathbb{V}]$.

7. Afinný podpriestor dimenzie 1 nazývame afinnou priamkou,
afinný podpriestor dimenzie 2 nazývame afinnou rovinou,
afinný podpriestor dimenzie $n-1$ v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$ nazývame **nadrovinou**.

Úloha 5.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}; \mathbb{V}; f)$ je afinný priestor. Je zrejmé, že nie každá neprázdna podmnožina $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ je afinným podpriestorom afinného priestoru $\mathbb{A}$.
Uvažujte geometrický model afinného priestoru $\mathbb{A}_2 = (\mathcal{A}; \mathbb{V}_2; f)$. Zvoľte bodovú množinu $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ a vektorový podpriestor $\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}' \subset \mathbb{V}_2$ tak, aby
a) bola splnená podmienka (APP1) a zároveň nebola splnená podmienka (APP2),
b) nebola splnená podmienka (APP1) a zároveň bola splnená podmienka (APP2).

Úloha 6. Určte pravdivostnú hodnotu výroku a svoju odpoveď zdôvodnite.
Každá jednobodová podmnožina je afinným podpriestorom príslušného afinného priestoru.

Úloha 7. Zdôvodnite nasledujúce tvrdenie.
Afinný podpriestor dimenzie k je jednoznačne určený svojimi $k+1$ lineárne nezávislými bodmi.

Definícia.
Nech $\mathbb{A}'_k(\mathcal{A}'; \mathbb{V}'_k; -)$ je afinný podpriestor dimenzie k a nech $[P; \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k]$ je repér v $\mathbb{A}'_k$. Pod **parametrickým vyjadrením afinného podpriestoru** rozumieme zobrazenie

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathcal{A}', \\ [t_1; t_2; \dots; t_k] &\longmapsto X, \text{ pričom } X = P + t_1\overline{u}_1 + t_2\overline{u}_2 + \cdots + t_k\overline{u}_k. \end{aligned}$$

Poznámka.

8. Parametrické vyjadrenie podpriestoru $\mathbb{A}_k$ je inverzným zobrazením k LSS v $\mathbb{A}_k$, ktorá je daná prislúchajúcim repérom.

Definícia.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A}; \mathbb{V}; -)$ a $\mathbb{A}'(\mathcal{A}'; \mathbb{V}'; -)$ sú afinné podpriestory. Hovoríme, že podpriestory $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ sú
a) **incidentné**, ak $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ alebo $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$,
b) **rovnobežné**, ak $\mathbb{V} \subset \mathbb{V}'$ alebo $\mathbb{V}' \subset \mathbb{V}$,
c) **rôznobežné**, ak $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$ a zároveň $\mathbb{V} \not\subset \mathbb{V}'$ a $\mathbb{V}' \not\subset \mathbb{V}$,
d) **mimobežné**, ak $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$ a zároveň $\mathbb{V} \not\subset \mathbb{V}'$ a $\mathbb{V}' \not\subset \mathbb{V}$.

Úloha 8.
Určte pravdivostnú hodnotu nasledovných implikácií:
a) Ak sú dva afinné podpriestory incidentné, tak sú rovnobežné.
b) Ak sú dva afinné podpriestory rovnobežné, tak sú incidentné.

Úloha 9.
Dokážte,že ak rovnobežné afinné podpriestory majú spoločný aspoň jeden bod, tak potom sú tieto podpriestory incidentné.

Úloha 10. (známe z lineárnej algebry)
Dokážte nasledujúce tvrdenie.
Vektorový priestor $\mathbb{V}'$ je vektorovým podpriestorom vektorového priestoru $\mathbb{V}$ práve vtedy, keď každý vektor bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}'$ je lineárnou kombináciou vektorov bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}$.

Veta 2.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ *sú afinné podpriestory, nech* $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$. *Potom platí*

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset \Longleftrightarrow A - B = \overline{u} + \overline{v}, \text{ kde } \overline{u} \in \mathbb{V}, \overline{v} \in \mathbb{V}'$$

Veta 3.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ *sú afinné podpriestory, pričom* $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$. *Potom prienikom* $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ *je afinný podpriestor.*

Úloha 11.
Určte pravdivostnú hodnotu nasledovných výrokov a svoje tvrdenia zdôvodnite.
Nech $\mathbb{A}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$, $\mathbb{A}''(\mathcal{A}'';\mathbb{V}'';-)$ sú afinné podpriestory.
a) Ak prienikom afinných podpriestorov $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ je prázdna množina alebo jednobodová množina, potom prienikom ich zameraní je triviálny vektorový podpriestor (t.j. $\mathbb{V}' \cap \mathbb{V}'' = \{\overline{0}\}$).
b) Ak prienik $\mathbb{V}' \cap \mathbb{V}''$ je triviálny vektorový podpriestor, potom prienikom afinných podpriestorov $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ je prázdna množina.
c) Ak prienik $\mathbb{V}' \cap \mathbb{V}''$ je triviálny vektorový podpriestor, potom prienikom afinných podpriestorov $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ je buď prázdna množina alebo jednobodová množina.

Definícia.
Pod **priečkou mimobežiek** rozumieme priamku, ktorá je rôznobežná s obidvoma mimobežkami.

Poznámka.

9. V afinnom priestore riešime v súvislosti s priečkou mimobežiek dva typy úloh.
1) Určiť priečku mimobežiek daným bodom.
2) Určiť priečku mimobežiek daným smerom.

I. 4. Spojenie afinných podpriestorov

Definícia.
Nech $\mathcal{M}$ je množina afinných podpriestorov. Afinný podpriestor $\mathcal{A}^*$ nazývame **spojením afinných podpriestorov** z množiny $\mathcal{M}$, ak platí

(SPOJ1) $\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{M} : \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$

(SPOJ2) $\quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{M} : (\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}')$

Spojenie dvoch afinných podpriestorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ budeme označovať $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}'$, spojenie troch afiných podpriestorov $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ budeme označovať $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}' \vee \mathcal{A}''$ (analogické označenie môžeme používať aj pre spojenie iného menšieho počtu afinných podpriestorov). Keďže spojenie afinných podpriestorov je asociatívne (viď veta 4 b)), zátvorky v zápise pre spojenie troch, príp. viac afinných podpriestorov vynechávame.

Konštrukcia spojenia dvoch a troch afinných podpriestorov.

Nech $\mathbb{A}_k(\mathcal{A};\mathbb{V}_k;-)$, $\mathbb{A}'_r(\mathcal{A}';\mathbb{V}'_r;-)$, $\mathbb{A}''_s(\mathcal{A}'';\mathbb{V}''_s;-)$ sú afinné podpriestory,
nech $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$, $C \in \mathcal{A}''$

a nech $\mathbb{V}_k = [\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k]$, $\mathbb{V}'_r = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_r]$, $\mathbb{V}''_s = [\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_s]$.
Potom

$$\mathbb{A} \vee \mathbb{A}' = [A; B - A, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_r],$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{A} \vee \mathbb{A}') \vee \mathbb{A}'' &= [A; B - A, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_r] \vee [C; \overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_s] = \\ &= [A; C - A, B - A, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_r, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_s].\end{aligned}$$

Poznamenajme, že vymenované vektory v obidvoch uvedených zápisoch spojenia dvoch aj spojenia troch afinných podpriestorov nie sú nevyhnutne nezávislé.

Úloha 12.
Uvažujme geometrický model afinného priestoru $\mathbb{A}_3$. Nech A, B, C sú body afinného priestoru $\mathbb{A}_3$ a nech priamky p, q sú podpriestory afinného priestoru $\mathbb{A}_3$. Určte spojenie podpriestorov:
a) $\{A\} \vee \{B\}$,
b) $\{A\} \vee \{B\} \vee \{C\}$,
c) $\{A\} \vee p$,
d) $p \vee q$.
Bude riešenie úlohy závisieť od vzájomnej polohy spomínaných podpriestorov?

Veta 4.
Nech $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$, $\mathbb{A}''$ sú afinné podpriestory (daného afinného priestoru), potom
a) $\mathbb{A} \vee \mathbb{A}' = \mathbb{A}' \vee \mathbb{A}$,
b) $\mathbb{A} \vee (\mathbb{A}' \vee \mathbb{A}'') = (\mathbb{A} \vee \mathbb{A}') \vee \mathbb{A}''$,
c) $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}' \ \& \ \mathbb{A} \subset \mathbb{A}'' \Longrightarrow \mathbb{A} \subset \mathbb{A}' \cap \mathbb{A}''$,
d) $\mathbb{A}' \subset \mathbb{A} \ \& \ \mathbb{A}'' \subset \mathbb{A} \Longrightarrow \mathbb{A}' \vee \mathbb{A}'' \subset \mathbb{A}$,
e) $\mathbb{A} \cap (\mathbb{A}' \vee \mathbb{A}'') \supset (\mathbb{A} \cap \mathbb{A}') \vee (\mathbb{A} \cap \mathbb{A}'')$,
f) $\mathbb{A} \vee (\mathbb{A}' \cap \mathbb{A}'') \subset (\mathbb{A} \vee \mathbb{A}') \cap (\mathbb{A} \vee \mathbb{A}'')$.

Veta 5.
Nech $\mathbb{A}_r(\mathcal{A}; \mathbb{V}_r; -)$, $\mathbb{A}'_s(\mathcal{A}'; \mathbb{V}'_s; -)$ sú afinné podpriestory. Potom pre ich dimenzie platí
a) $r + s = \dim(\mathbb{V} \cap \mathbb{V}') + \dim(\mathbb{A} \vee \mathbb{A}') - 1$, *ak* $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$,
b) $r + s = \dim(\mathbb{A} \cap \mathbb{A}') + \dim(\mathbb{A} \vee \mathbb{A}')$, *ak* $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$.

Úloha 13.
Dva afinné podpriestory, z ktorých aspoň jeden je nadrovinou sú buď rovnobežné alebo rôznobežné. Dokážte.

Úloha 14.
Nech $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ sú dve rôznobežné nadroviny v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$. Čo viete povedať o dimenzii prieniku afinných podpriestorov $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$?

I. 5. Všeobecná rovnica nadroviny afinného priestoru

Definícia.
Rovnicu $R(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ o n premenných nazývame **všeobecnou rovnicou nadroviny**, ak súradnice každého jej bodu vyhovujú rovnici a súradnice bodu, ktorý nadrovine nepatrí, rovnici nevyhovujú.

Veta 6.
Nech $\varrho = [Q; \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_{n-1}]$ *je nadrovina afinného priestoru* $\mathbb{A}_n$. *Potom*

$$\begin{vmatrix} x_1 - q_1 & x_2 - q_2 & \cdots & x_n - q_n \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n-1\,1} & u_{n-1\,2} & \cdots & u_{n-1\,n} \end{vmatrix} = 0$$

je všeobecná rovnica nadroviny ϱ, *kde* $Q[q_1, q_2, \ldots, q_n]$, $\overline{u}_i(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in})$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Veta 7.
Každá nadrovina afinného priestoru $\mathbb{A}_n$ *má všeobecnú rovnicu, ktorá je lineárnou rovnicou o* n *premenných.*

Veta 8.
Každej lineárnej rovnici o n *premenných odpovedá nadrovina (v* n*-rozmernom afinnom priestore), ktorej daná rovnica je všeobecnou rovnicou.*

Veta 9.
Nech $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ *je všeobecná rovnica nadroviny* ϱ. *Potom pre ľubovoľný vektor* $\overline{u} \in \mathbb{V}^{\varrho}_{n-1}$, $\overline{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *platí*

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0.$$

I. 6. Zväzok priamok v $\mathbb{A}_2$
Zväzok rovín v $\mathbb{A}_3$

Definícia.
Nech p a q sú rôznobežky v afinnom priestore $\mathbb{A}_2$. Pod **zväzkom priamok** (danom rôznobežkami p, q) rozumieme množinu všetkých priamok v $\mathbb{A}_2$, ktoré prechádzajú priesečníkom $p \cap q$.

Analytické vyjadrenie zväzku priamok určeného rôznobežkami $p: \ ax + by + c = 0$, $q: \ a'x + b'y + c' = 0$ je rovnica

$$\lambda_1(ax + by + c) + \lambda_2(a'x + b'y + c') = 0, \text{ pričom } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0.$$

Definícia.
Nech α a β sú rôznobežné roviny v afinnom priestore $\mathbb{A}_3$. Pod **zväzkom rovín** (danom rôznobežnými rovinami α, β) rozumieme množinu všetkých rovín v $\mathbb{A}_3$, ktoré prechádzajú priesečnicou $\alpha \cap \beta$.

Analytické vyjadrenie zväzku rovín určeného rôznobežnými rovinami $\alpha: \ ax + by + cz + d = 0$, $\beta: \ a'x + b'y + c'z + d' = 0$ je rovnica

$$\lambda_1(ax + by + cz + d) + \lambda_2(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \text{ pričom } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0.$$

I. 7. Afinné zobrazenie
Deliaci pomer
Stred dvojice bodov

Definícia.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ sú afinné podpriestory. Zobrazenie

$$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

nazývame **afinným zobrazením**, ak jeho tzv. **asociované zobrazenie**

$$\begin{aligned} \overline{f} : \quad \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}' \\ X - Y &\longmapsto \overline{f}(X - Y) := f(X) - f(Y) \end{aligned}$$

je homomorfizmus vektorových priestorov.

Príkladom afinného zbrazenia je rovnoľahlosť (špeciálne aj stredová súmernosť a identita). Ďalším príkladom afinného zobrazenia je takzvaná projekcia.

Úloha 15.
Dokážte, že rovnoľahlosť je afinné zobrazenie.

Projekcia.

Nech $\mathbb{A}'_k(\mathcal{A}';\mathbb{V}'_k;-)$ je afinný podpriestor afinného priestoru $\mathbb{A}_n(\mathcal{A};\mathbb{V}_n;-)$. Zvoľme vektorový podpriestor $\mathbb{V}''_{n-k}$ vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ tak, aby $\mathbb{V}'_k \cap \mathbb{V}''_{n-k} = \{\overline{0}\}$. Zobrazenie

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}' \\ X &\longmapsto X', \text{ pričom } X' - X \in \mathbb{V}''_{n-k} \end{aligned}$$

nazývame **projekcia** afinného priestoru $\mathbb{A}$ do podpriestoru $\mathcal{A}'$.

Úloha 16.
Uvažujte geometrický model afinného priestoru $\mathbb{A}_3$ a LSS v $\mathbb{A}_3$ danú repérom $[P;\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3]$. Navrhnite dva príklady projekcie v $\mathbb{A}_3$. Navrhnuté príklady potom aj načrtnite.

Definícia.
Nech $\mathbb{A}_1(\mathcal{A};\mathbb{V}_1;-)$ je afinná priamka, pričom $\mathbb{V}_1 = [\overline{u}]$. Nech $A,B,C \in \mathcal{A}$, $A \neq B \neq C$. Pod **deliacim pomerom** usporiadanej trojice bodov A,B,C (označovať budeme (ABC)) rozumieme reálne číslo d, pričom

$$d = (ABC) := \frac{C-A}{C-B} = \frac{x\overline{u}}{y\overline{u}} = \frac{x}{y}.$$

Poznámka.

10. - deliaci pomer nezávisí na smerovom vektore $\overline{u}$ príslušnej afinnej priamky $\mathbb{A}_1$,
- deliaci pomer je reálne číslo rôzne od jednej,
- deliaci pomer môžeme definovať aj pre tri kolineárne body v n-rozmernom afinnom priestore $\mathbb{A}_n$.

Veta 10.
Nech $\mathbb{A}_1(\mathcal{A};\mathbb{V}_1;-)$ *je afinná priamka, nech* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$. *Potom zobrazenie*

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{A} - \{B\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ X &\longmapsto (ABX) \end{aligned}$$

je bijekcia.

Veta 11.
Nech $\mathbb{A}_n(\mathcal{A};\mathbb{V}_n;-)$ *je n-rozmerný afinný priestor (s danou LSS), nech* $\mathbb{A}'_1(\mathcal{A}';\mathbb{V}'_1;-)$ *je jeho 1-rozmerný afinný podpriestor, ktorého zameranie je generované vektorom* $\overline{v}$ *a nech* $A, B, C \in \mathcal{A}'$, $A \neq B \neq C$. *Potom pre deliaci pomer bodov* A, B, C *platí*

$$(ABC) = \frac{c_i - a_i}{c_i - b_i}, i \in \{1, 2 \ldots, n\}, \ \text{ak } v_i \neq 0,$$

kde $A[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B[b_1, b_2, \ldots, b_n]$, $C[c_1, c_2, \ldots, c_n]$, $\overline{v}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Veta 12.
Nech $\mathbb{A}_1(\mathcal{A};\mathbb{V}_1;-)$ *je afinná priamka, nech* $A, B, C \in \mathcal{A}$, $A \neq B \neq C$. *Potom*
a) $(BAC) = \frac{1}{(ABC)}$,
b) $(ACB) = 1 - (ABC)$,
c) $(BCA) = 1 - \frac{1}{(ABC)}$,
d) $(CAB) = \frac{1}{1-(ABC)}$,
e) $(CBA) = \frac{(ABC)}{(ABC)-1}$.

Veta 13.
Nech $\mathbb{A}(\mathcal{A};\mathbb{V};-)$, $\mathbb{A}'(\mathcal{A}';\mathbb{V}';-)$ *sú afinné podpriestory, nech* $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ *je afinné zobrazenie, nech* $A, B, C \in \mathcal{A}$, $A \neq B \neq C$ *sú kolineárne body. Potom* $f(A) = f(B) = f(C)$ *alebo* $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ *sú kolineárne body, pričom zároveň* $(f(A)f(B)f(C)) = (ABC)$.

Veta 14.
Nech v afinnej rovine $\mathbb{A}_2$ *sú dané tri rôzne priamky* a, b, c *prechádzajúce bodom* R *a dve rôzne rovnobežné priamky* p, p' *neprechádzajúce bodom* R, *ktoré nie sú rovnobežné ani s jednou z priamok* a, b, c. *Označme* $\{A\} = a \cap p$, $\{B\} = b \cap p$, $\{C\} = c \cap p$, $\{A'\} = a \cap p'$, $\{B'\} = b \cap p'$, $\{C'\} = c \cap p'$. *Potom* $(ABC) = (A'B'C')$.

Veta 15.
Nech $\mathbb{A}'_{n-1}$, $\mathbb{A}''_{n-1}$, $\mathbb{A}'''_{n-1}$ *sú navzájom rôzne rovnobežné nadroviny v* $\mathbb{A}_n$ *a* p, q *sú rôzne priamky v* $\mathbb{A}_n$, *ktoré sú rôznobežné so spomínanými nadrovinami. Označme* $\{P'\} = \mathbb{A}' \cap p$, $\{P''\} = \mathbb{A}'' \cap p$, $\{P'''\} = \mathbb{A}''' \cap p$, $\{Q'\} = \mathbb{A}' \cap q$, $\{Q''\} = \mathbb{A}'' \cap q$, $\{Q'''\} = \mathbb{A}''' \cap q$. *Potom* $(P'P''P''') = (Q'Q''Q''')$.

Definícia.
Nech $A, B \in \mathbb{A}_n$, pod **stredom dvojice bodov** A, B rozumieme
a) bod A, ak $A = B$,
b) bod S, pre ktorý platí $(ABS) = -1$, ak $A \neq B$.

Stred dvojice bodov A, B budeme označovať S_{AB}.

Poznámka.

11. Definovať stred dvojice bodov je možné len v afinnom priestore, ktorého zameranie je nad poľom charakteristiky rôznej od 2.

Veta 16.
Bod S je stred dvojice bodov A, B práve vtedy, keď $S = A + \frac{1}{2}(B - A)$.

Veta 17.
Nech body $A, B \in \mathbb{A}_n$, nech $A[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B[b_1, b_2, \dots, b_n]$ a nech S je stred dvojice bodov A, B. Potom $S[\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}]$.

Veta 18.
Nech body $A, B, C, D \in \mathbb{A}_n$, potom $A - B = C - D$ práve vtedy, keď $S_{AD} = S_{BC}$.

I. 8. Transformácia lineárnej súradnicovej sústavy
Orientovaný afinný priestor

Definícia.
Nech $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ sú lineárne súradnicové sústavy v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$. Pod **transformáciou lineárnej súradnicovej sústavy** $\mathcal{L}$ na lineárnu súradnicovú sústavu $\mathcal{L}'$ rozumieme zobrazenie $\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}'$.

$$\begin{tikzcd}
{[x_1, x_2, \dots, x_n]} \arrow[r, mapsto, "\mathcal{L}^{-1}"] \arrow[dr, mapsto, "\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}'"'] & X \arrow[d, mapsto, "\mathcal{L}'"] \\
 & {[x_1', x_2', \dots, x_n']}
\end{tikzcd}$$

Nech $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ sú lineárne súradnicové sústavy v afinnom priestore $\mathbb{A}_n$.
Nech LSS $\mathcal{L}$ je daná repérom $[P; \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n]$,
nech LSS $\mathcal{L}'$ je daná repérom $[P'; \overline{u}_1', \overline{u}_2', \dots, \overline{u}_n']$.

- Vzťah medzi súradnicami ľubovoľného vektora $\overline{x} \in \mathbb{V}_n$ v báze $\mathcal{B} = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n\}$, $\overline{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ a súradnicami vektora $\overline{x}$ v báze $\mathcal{B}' = \{\overline{u}_1', \overline{u}_2', \dots, \overline{u}_n'\}$, $\overline{x}(x_1', x_2', \dots, x_n')_{\mathcal{B}'}$ udávajú tzv. transformačné rovnice pre vektor

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots + a_{n1}x_n \\
x_2' &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{n2}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

kde $\overline{u}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{u}_j'$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Zápis transformačných rovníc pre súradnice vektora v maticovom tvare je nasledovný

$$\left(x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n \right) = \left(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \right) . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} . \end{pmatrix}$$

Maticu

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazývame **maticou prechodu od bázy $\mathcal{B}'$ ku báze $\mathcal{B}$.**

- Vzťah medzi súradnicami ľubovoľného bodu $X \in \mathcal{A}$ v LSS $\mathcal{L}$, $X[x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{L}}$ a súradnicami bodu X v LSS $\mathcal{L}'$, $X[x'_1, x'_2, \dots, x'_n]_{\mathcal{L}'}$ udávajú tzv. transformačné rovnice pre bod

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \dots + a_{n1}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \dots + a_{n2}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{aligned}$$

kde $\overline{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{u}'_j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

a kde $P = P' + \sum_{j=1}^{n} b_j \overline{u}'_j$.

Zápis transformačných rovníc pre súradnice bodu v maticovom tvare je nasledovný

$$\left(x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n \right) = \left(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \right) . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \left(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n \right)$$

Veta 19.
Nech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sú tri bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Potom pre matice $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}')$, $M(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$ platí

(TM1) $\qquad M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}').M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$

(TM2) $\qquad M(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$

(TM3) $\qquad M(\mathcal{B}, \mathcal{B}').M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = I_n$

(I_n sme označili jednotkovú maticu typu $n \times n$)

Veta 20.
Nech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sú tri bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Potom pre determinanty matíc $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$, $M(\mathcal{B}'',\mathcal{B})$ platí

(TD1) $\quad \det M(\mathcal{B}'',\mathcal{B}').\det M(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \det M(\mathcal{B}'',\mathcal{B})$

(TD2) $\quad \det M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = 1$

(TD3) $\quad \det M(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \dfrac{1}{\det M(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$

Definícia.
Nech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sú bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$. Hovoríme, že bázy $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sú **súhlasne orientované**, ak determinant matice prechodu od bázy $\mathcal{B}$ ku báze $\mathcal{B}'$ je kladný.

Veta 21.
Relácia "byt' súhlasne orientované" na množine báz vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ je relácia ekvivalencie.

Veta 22.
Relácia "byt' súhlasne orientované" na množine báz vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ rozloží množinu báz vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ práve na dve triedy.

Definícia.
Hovoríme, že **afinný priestor $\mathbb{A}$ je orientovaný**, ak na množine báz jeho zamerania je uvažovaná relácia "byt' súhlasne orientované". Potom bázam z jednej triedy rozkladu hovoríme, že sú **kladné bázy** a bázy z tej druhej triedy rozkladu nazývame **záporné bázy**.