MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Tereza Ptáčková

Analytická reprezentace shodných zobrazení na středních školách

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky–informatiky pro střední školy

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Analytická reprezentace shodných zobrazení na středních školách

Autor: Tereza Ptáčková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce se zabývá analytickým přístupem ke shodným zobrazením v rovině, které se běžně vyučují na středních školách. Má formu webových stránek, obsahuje řadu interaktivních prvků pomáhajících žákovi pochopit problém jako hypertextové odkazy, krokování postupu řešení, applety, apod. Práce obsahuje řadu řešených příkladů a úloh. Důraz je kladen na propojení syntetického a analytického přístupu ke shodným zobrazením. V práci se rovněž využívá znalostí z analytické geometrie, které žáci získají na středních školách
Stránky jsou určeny nadaným žákům středních škol a pro výuku v matematickém semináři.

Klíčová slova: Shodné zobrazení, analytická geometrie, matice

Title: Analytical representation of congruent transformations at high schools

Author: Tereza Ptáčková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This work deals with analytical representation of congruent transformation in a plane at high schools. The work is a web page, it contains several interactive components which help student to understand the problem like hyperlinks, stepping of the construction, applets, etc. The work contains several solved problems. Main emphasis is placed on the connection of the synthetic and the analytic approach to congruent transformation. The work uses knowledge of analytic geometry students learn at high school.
The web page is aimed at talented students of high school and for teaching at mathematical class.

Keywords: Congruent transformation, analytic geometry, matrix

Ráda bych poděkovala doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc., vedoucí mé diplomové práce, za odbornou pomoc při vypracování diplomové práce a za všechen čas, který mi věnovala. Dále bych chtěla poděkovat svým rodičům, sestře a přátelům za podporu v průběhu studia.

Obsah

Úvod

Na základních a středních školách se používá syntetický přístup ke shodným zobrazením – žáci se učí o základních vlastnostech shodných zobrazení a řeší konstrukční úlohy na shodná zobrazení. Bohužel nezbývá čas na analytický přístup ke shodným zobrazením, přestože z hodin analytické geometrie (a jiných oblastí matematiky) je vybudován pevný základ pro tento přístup.

Tato práce využívá znalostí, které žáci získají v průběhu středoškolského studia, a snaží se je prohloubit. Propojuje hned několik témat, která se probírají v hodinách matematiky – analytickou geometrii, shodná zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, funkce atd. První část práce je zaměřena na porozumění analytickému přístupu ke shodným zobrazením – postupně je zde vybudována teorie odvozením ze znalostí, které žák získal na hodinách matematiky. Druhá část práce je zaměřena na řešené příklady a úlohy na procvičení, které usnadňují žákovi pochopení učiva a které využívají možností webového prostředí, jako jsou např. hypertextové odkazy na související teorii, názorné obrázky.

Práce ve formě webové stránky bude umístěna na portálu středoškolské matematiky – webové stránce sloužící jako interaktivní výuková pomůcka pro žáky středních škol i učitele. Lze ji nalézt na adrese `http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~tptackova/dp-analyticka_zobrazeni/vzor/?page=title`.

Papírová verze práce se od webových stránek liší hned v několika ohledech. Chybí dynamické prvky jako applety a hypertextové odkazy. Dále chybí symboly pro odkrývání a skrývání textu, které jsou hojně na stránkách používány v případě rozšiřujícího učiva. Tištěná verze práce je rovněž ochuzena o tři obrázky, které z technických důvodů nebylo možné vložit na stránku.

O práci

Se shodnými zobrazeními se často setkáváme, jsou všude kolem nás. Připomeňme si, že mezi shodná zobrazení řadíme identitu, osovou a středovou souměrnost, posunutí a otočení. Vlastnosti těchto zobrazení používáme ve škole převážně v některých konstrukčních úlohách.

V průběhu střední školy jsme začali zkoumat geometrické objekty analytickou metodou. Naučili jsme se popsat pomocí bodů a vektorů přímku, polopřímku, úsečku i rovinu a vyjádřit je rovnicemi. Napadlo vás někdy, jestli bychom nemohli analyticky přistupovat i ke shodným zobrazením?

Tím se právě budeme zabývat v této práci, pokusíme se popsat shodná zobrazení v rovině pomocí rovnic, budeme zkoumat jejich vlastnosti a zkusíme si vyřešit různé příklady. V celé práci budeme pracovat v kartézské soustavě souřadnic, jak jsme zvyklí ze školy.

Může se nám zdát zvláštní a možná i zbytečné snažit se používat analytický přístup ke geometrii. Pravdou je, že v naší zemi se ve škole setkáváme převážně se syntetickým přístupem ke geometrii. V některých zemích (např. Anglie, USA) ale převládá analytický přístup ke geometrii a žáci tak mohou mít problém si úlohu představit. Oba dva přístupy jsou v něčem důležité, proto se prostřednictvím této práce budeme snažit oba přístupy propojit a pomoci tak rozvinout naši představivost a naše matematické znalosti.

Předpoklady

V práci se budeme opírat o základní znalosti z analytické geometrie, nebudeme vysvětlovat pojmy, které se vyučují v analytické geometrii na středních školách. Pokud jsme se s pojmem analytická geometrie ještě nesetkali, důrazně doporučuji prostudovat například tyto stránky: Portál středoškolské geometrie – analytická geometrie.

Dále je dobré znát soustavy lineárních rovnic a umět je řešit, goniometrické funkce sinus a kosinus a shodná zobrazení na úrovni, na které se probírají na středních školách.

Ovládání stránek

Na stránkách se můžete setkat s následujícími ovládacími prvky:

Symbol zobrazení odpovědi nebo řešení:

Po kliknutí na symbol se zobrazí odpověď na položenou otázku.

Symbol zobrazení rozšiřujícího učiva nebo nápovědy:

Po kliknutí na symbol se zobrazí skrytý text, ve kterém je podrobněji rozebrán daný problém.

Symboly pro krokování řešení příkladů:

Řešení daného příkladu se skládá z několika kroků, které se budou objevovat buďto postupně (vždy po kliknutí na první symbol), nebo celé najednou (po kliknutí na druhý symbol). Symbolem posledním, který se objeví až po odkrytí alespoň jednoho kroku řešení, můžete zakrýt všechny odkryté kroky.

Součástí těchto stránek jsou applety vytvořené programem GeoGebra. V appletech můžete měnit pozice některých prvků a sledovat tak, jak se změní daná konstrukce. U každého appletu naleznete popis prvků, se kterými můžete pohybovat.

Seznam používaných symbolů

X, Y	bod X, Y
P	počátek kartézské soustavy souřadnic
p, q	přímka p, q
XY	úsečka s krajními body X, Y
$\lvert XY \rvert$	délka úsečky XY, vzdálenost bodů X, Y
$\angle AVB$	úhel s vrcholem V, ramena tvoří polopřímky VA a VB
$\lvert\angle AVB\rvert$	velikost úhlu AVB
$ABCD\dots$	n-úhelník s vrcholy A, B, C, D, $\dots$
$\vec{u}$	vektor $\vec{u}$
$(u_1; u_2)$	souřadnice vektoru $\vec{u}$
$\lvert\vec{u}\rvert$	velikost vektoru $\vec{u}$
$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$	souřadnicové vektory ve směru os x, y
$\mathbb{Z}$	obor celých čísel
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$a \in \mathbb{R}$	číslo a náleží oboru reálných čísel
E_2	euklidovská rovina
$\mathbb{R}^2$	vektorový prostor, množina vektorů $\{(u_1; u_2);\ u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$
f	zobrazení f
$f : E_2 \to E_2$	zobrazení roviny
$f(p) = p'$	přímka p' je obrazem přímky p v zobrazení f
$f(X) = X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení f
$f \circ g$	složené zobrazení $f\big(g(X)\big)$
A, B	matice
E	jednotková matice
O	nulová matice
A^T	transponovaná matice k matici A

1. Základní pojmy

1.1 Matice

V práci budeme používat pojem matice. Matice nám poslouží převážně k přehlednějšímu zápisu některých soustav rovnic. Pojďme se proto s maticemi seznámit; představíme si i základní operace, které s nimi lze provádět.

Definice. *Mějme množinu reálných čísel* $\mathbb{R}$ *a přirozená čísla* m, n. *Maticí* A *typu* $m \times n$ *nad množinou* $\mathbb{R}$ *budeme rozumět obdélníkové schéma*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prvků $a_{ij} \in \mathbb{R}$, *kde* $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Úmluva. V práci budeme používat pro označení typu matice přirozená čísla l, m, n a nebudeme opakovaně uvádět, že se jedná o přirozená čísla.

Typ matice určuje počet řádků a počet sloupců matice. Matice typu $m \times n$ bude mít m řádků a n sloupců. Zároveň typ matice určuje počet prvků matice – matice typu $m \times n$ má $m \cdot n$ prvků. Matice A se též značí (a_{ij}), kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Úmluva. V práci budeme občas používat označení matice A jako (a_{ij}) a budeme vynechávat $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Typ matice bude vždy jednoznačný z kontextu.

Speciální maticí je matice E typu $m \times m$. Tímto písmenkem se značí matice, pro jejíž prvky e_{ij} platí: $e_{ij} = 1$ pro $i = j$, jinak $e_{ij} = 0$. Matice vypadá takto:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice E se nazývá *jednotková matice*.

Další speciální matice se nazývá *nulová matice*. Nulová matice typu $m \times n$ se značí O a pro její prvky platí: $o_{ij} = 0$. Jedná se tedy o matici, která obsahuje samé nuly.

1.1.1 Operace s maticemi

Sčítání matic

Matice A, B, obě typu $m \times n$, sčítáme tzv. po složkách. Výsledná matice bude stejného typu a její prvky budou odpovídat součtu prvků matic A, B na příslušných pozicích. Symbolicky můžeme součet matic $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ zapsat jako $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Zkusme sečíst následující dvě matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2 & -2+2 & 3+1 \\ 5+(-1) & 0+2 & -3+4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Násobení matice reálným číslem

Ani násobení matice reálným číslem není obtížné, musíme každý prvek matice vynásobit daným reálným číslem. Chceme-li matici $A = (a_{ij})$ vynásobit reálným číslem k, můžeme operaci symbolicky zapsat $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$. Například:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Násobení matic

Dvě matice můžeme vynásobit pouze za určité podmínky. Podmínka, která musí být splněna, je, že počet sloupců první matice se musí rovnat počtu řádků druhé matice.

Mějme matici A typu $m \times n$ a matici B typu $n \times l$, výsledná matice $C = A \cdot B$ bude typu $m \times l$. Násobení matic definujeme vzorcem:

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Zkusme si vzorec rozepsat pro prvek c_{11}:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} = c_{11}.$$

Podle vzorce vezmeme z matice A první řádek, z matice B první sloupec, a vynásobíme první prvek a_{11} prvního řádku matice A s prvním prvkem b_{11} prvního sloupce matice B, druhý prvek a_{12} s druhým b_{21}, třetí prvek a_{13} s třetím b_{31}, až poslední prvek a_{1n} s posledním b_{n1} a všechny součiny sečteme. Číslo, které získáme, zapíšeme do výsledné matice C právě na pozici c_{11}.

Pro získání prvku c_{ij} musíme stejným způsobem vynásobit i-tý řádek matice A s j-tým sloupcem matice B. Násobení matic je trochu složitější než jiné operace, proto si zkusme společně vynásobit následující dvě matice krok za krokem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matice A je typu 2×3, matice B je typu 3×2. Matice $C = A \cdot B$ bude typu 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 13 & ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Pomocí násobení matic můžeme například úsporněji zapsat soustavu rovnic. Soustavu

$$\begin{aligned} 4 &= 2x + 3y \\ 3 &= 1x + 2y \end{aligned}$$

můžeme zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dvě matice se rovnají, pokud jsou stejného typu a pokud se sobě rovnají prvky na stejných pozicích obou matic. Dáme-li do rovnosti odpovídající si prvky matice na levé straně rovnosti a matice získané vynásobením dvou matic na pravé straně rovnosti, dostaneme původní soustavu rovnic.

Násobení matic má jednu pro nás celkem netypickou vlastnost – nemusí být komutativní. To je vlastnost, která nás nejspíš napadne, neboť dvě matice A typu $m \times n$, B typu $n \times l$ můžeme násobit pouze v pořadí $A \cdot B$. Nemůžeme násobit $B \cdot A$, neboť není splněna podmínka o stejném počtu řádků matice B a sloupců matice A. Co kdybychom měli matice A, B, obě typu $n \times n$?

Zkusme si zvolit matice A, B typu $n \times n$ a spočtěme $A \cdot B$ a $B \cdot A$. Matice A, B zvolme takto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěme $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}.$$

Spočtěme $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že $A \cdot B \neq B \cdot A$. To je něco, s čímž jsme se zatím nejspíš v matematice nesetkali. Dosud platilo, že $a \cdot b = b \cdot a$, pro $a, b \in \mathbb{R}$. Co to pro nás znamená? Budeme si muset dát pozor při vytýkání. Pokud budeme mít výraz $A \cdot B + A \cdot C$, můžeme vytknout matici A zleva: $A \cdot (B + C)$. Nemůžeme napsat $(B + C) \cdot A$, protože bychom mohli dostat špatný výsledek (nehledě na to, že bychom takto mohli zapsat součin dvou matic, jejichž součin vůbec není definovaný).

Transponovaná matice

Další operace s maticemi je transponování. Ke každé matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ existuje transponovaná matice A^T typu $n \times m$, pro jejíž prvky platí: $a_{ij}^T = a_{ji}$. Transponování matice je operace, při které zaměníme řádky a sloupce matice. Ilustrujme si operaci transponování na příkladu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Věta 1. *Mějme matici A typu $m \times n$ a matici B typu $n \times l$. Pak platí:*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Nejprve si ověříme vztah na příkladu. Mějme matice A, B zadané takto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tyto dvě matice jsme již jednou násobili v části věnované násobení matic, výsledná matice $C = A \cdot B$ je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Po transponování matice C dostaneme matici C^T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Na pravé straně rovnosti v uvedené větě máme součin $B^T \cdot A^T$. Transponujme matice A, B:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěme součin $B^T \cdot A^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Získali jsme matici C^T, rovnost $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ platí.

Pokud bychom chtěli zdůvodnit platnost vzorce, stačí si rozmyslet, jak funguje násobení matic a jak operace transponování ovlivňuje matice.

Násobení probíhá postupně po řádcích matice A typu $m \times n$ a sloupcích matice B typu $n \times l$, výsledná matice je typu $m \times l$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

Při transponování matic A, B zaměníme řádky obou matic za sloupce. Matice A^T je typu $n \times m$ a matice B^T je typu $l \times n$. Abychom mohli matice násobit, musíme zaměnit jejich pořadí, aby počet řádků první matice odpovídal počtu sloupců druhé matice. Násobíme-li $B^T \cdot A^T$, násobíme řádky matice B^T se sloupci matice A^T, což odpovídá násobení řádků matice A se sloupci matice B. Výsledná matice bude typu $l \times m$.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1l} & b_{2l} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1l} & c_{2l} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

V uvedených rovnostech jsou barevně zvýrazněny odpovídající si sloupce a řádky matic, součty součinů zvýrazněných řádků a sloupců v obou rovnostech jsou zjevně stejné. Platí:

$$a_{21} \cdot b_{1l} + a_{22} \cdot b_{2l} + a_{23} \cdot b_{3l} + \dots + a_{2n} \cdot b_{nl} = c_{2l},$$

což je stejné číslo, které dostaneme z druhé rovnosti:

$$b_{1l} \cdot a_{21} + b_{2l} \cdot a_{22} + b_{3l} \cdot a_{23} + \dots + b_{nl} \cdot a_{2n} = c_{2l}.$$

Jediný rozdíl bude v pozici, kam číslo c_{2l} zapíšeme. Při násobení $A \cdot B$ bude číslo c_{2l} napsáno v druhém řádku a l-tém sloupci, při násobení matic $B^T \cdot A^T$ bude číslo c_{2l} napsáno v l-tém řádku a v druhém sloupci. Matice $A \cdot B$ je transponovaná matice k matici $B^T \cdot A^T$. Vzorec tedy platí.

1.2 Vektorový prostor

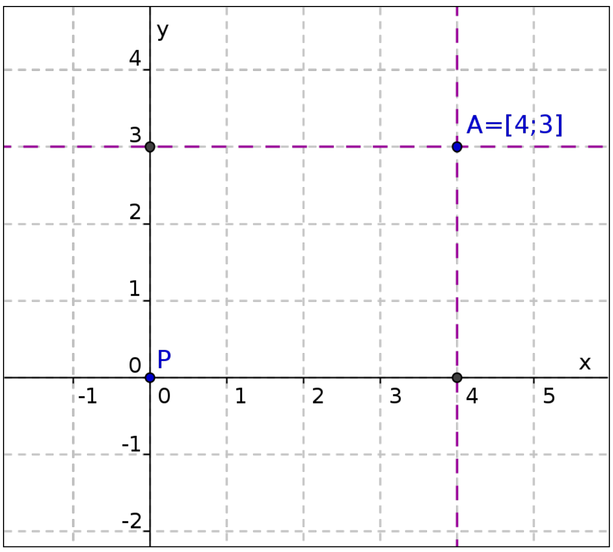
Vektorový prostor je pojem, se kterým jsme se nejspíš ještě nesetkali, přesto ho už známe z analytické geometrie. Tam jsme se setkali s pojmem vektor (uvažujme teď pro jednoduchost pouze vektory v rovině). Připomeňme si, že vektor je množina orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost. Zároveň po zvolení kartézské soustavy souřadnic lze každý vektor $\vec{u}$ vyjádřit jako uspořádanou dvojici reálných čísel $(u_1; u_2)$, čísla u_1,u_2 nazýváme souřadnice vektoru. S vektory umíme provádět některé operace. Umíme sečíst dva vektory a umíme vynásobit vektor reálným číslem. Snadno se ukáže, že pro libovolné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ v rovině a libovolná čísla $r, s \in \mathbb{R}$ platí:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u}, \\
(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \\
\vec{u} + \vec{o} &= \vec{u}, \\
\vec{u} + (-\vec{u}) &= \vec{o}, \\
1 \cdot \vec{u} &= \vec{u}, \\
(r \cdot s) \cdot \vec{u} &= r \cdot (s \cdot \vec{u}), \\
(r + s) \cdot \vec{u} &= r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}, \\
r \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v},
\end{aligned}
$$

kde vektor $-\vec{u}$ značí opačný vektor k vektoru $\vec{u}$ a vektor $\vec{o}$ je nulový vektor $\vec{o} = (0; 0)$. Pod pojmem *vektorový prostor* budeme rozumět množinu vektorů $\mathbb{R}^2 = \{(u_1; u_2);\ u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ s operacemi sčítání prvků vektorového prostoru a násobení prvků vektorového prostoru reálným číslem. Pro prvky vektorového prostoru a uvedené operace platí všech osm rovností uvedených výše.

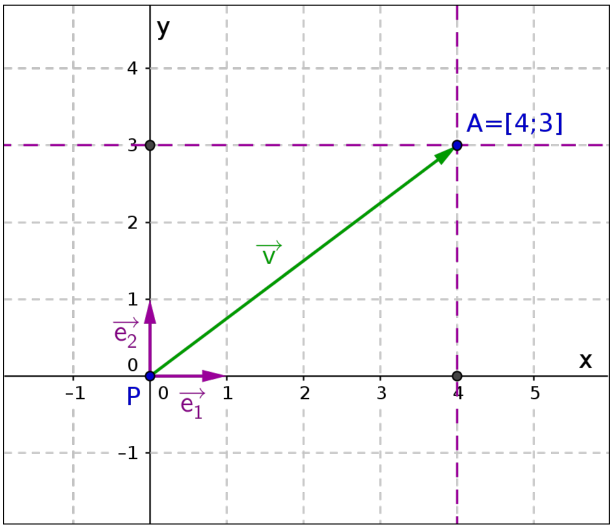
1.3 Vyjádření souřadnic bodu v rovině

Z analytické geometrie víme, že součtem bodu a vektoru je bod. Tuto vlastnost budeme používat pro určení souřadnic bodu v rovině. Vzpomeňme si, jak určíme souřadnice bodu A v rovině, je-li zvolená kartézská soustava souřadnic s počátkem P. Bodem A vedeme rovnoběžku s osou y, průsečík přímky a osy x nám dává x-ovou souřadnici bodu A. Podobně bodem A vedeme rovnoběžku s osou x, průsečík přímky a osy y nám dává y-ovou souřadnici bodu A (obr. 1.1).



Obrázek 1.1: Souřadnice bodu

Pokusme se souřadnice bodu A vyjádřit pomocí vektorů. Víme, že bod + vektor = bod. Body A, P leží na úsečce AP, označme $\vec{v}$ vektor $A - P$, pak $X = P + t \cdot \vec{v}$, $t \in \langle 0; 1 \rangle$, je parametrické vyjádření úsečky AP. Bod A můžeme vyjádřit jako $A = P + \vec{v}$ (viz obr. 1.2).



Obrázek 1.2: Souřadnice bodu analytickou metodou

Vektor $\vec{v}$ z obrázku 1.2 můžeme vyjádřit jako součet vektorů $(4; 0)$ a $(0; 3)$: $\vec{v} = (4; 0) + (0; 3)$. Vektor $\vec{v}$ můžeme také vyjádřit za pomocí tzv. *jednotkových vektorů* ve směru os x, y. Jednotkové vektory ve směru os x, y jsou vektory $\vec{e}_1 = (1; 0)$ a $\vec{e}_2 = (0; 1)$, říká se jim též *souřadnicové vektory*. Vyjádřeme vektor $\vec{v}$ pomocí souřadnicových vektorů: $\vec{v} = 4 \cdot (1; 0) + 3 \cdot (0; 1)$. Bod A lze tedy vyjádřit zápisem $A = P + 4 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$. Ze zápisu můžeme získat souřadnice bodu A, jsou to čísla, kterými musíme vynásobit souřadnicové vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, tedy $A = [4; 3]$. Tento způsob vyjádření souřadnic bodu v rovině budeme používat v následujících kapitolách.

2. Shodná zobrazení

2.1 Shodná zobrazení

V této kapitole se budeme věnovat analytickému vyjádření shodných zobrazení v euklidovské rovině E_2, k tomu budeme potřebovat znalost definice shodného zobrazení. Připomeňme si definici shodného zobrazení.

Úmluva. V práci budeme pod pojmem rovina chápat vždy euklidovskou rovinu E_2.

Definice. *Zobrazení f v rovině nazveme shodné, jestliže pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy $f(X)$, $f(Y)$ platí $|XY| = |f(X)f(Y)|$.*

Jinými slovy zobrazení f můžeme nazvat shodné, jen pokud zachovává vzdálenosti bodů. Z definice shodného zobrazení také přímo plyne, že každé shodné zobrazení je prosté. Kdyby nebylo prosté, znamenalo by to, že existují dva různé body X, Y takové, že $f(X) = f(Y)$. Pak by ale neplatilo $|XY| = |f(X)f(Y)|$, neboť $|XY| \neq 0$, ale $|f(X)f(Y)| = 0$.

Ještě jednou uvedeme výčet shodných zobrazení, která známe ze školy: identita, osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí a otočení.

2.2 Analytické vyjádření shodných zobrazení

Pojem analytické vyjádření geometrického objektu známe z analytické geometrie, kde jsme hledali například analytické vyjádření přímky. Víme, že analytické vyjádření přímky má tvar rovnice, ze které můžeme zjistit souřadnice všech bodů na přímce. Podobně u analytického vyjádření shodných zobrazení budeme hledat rovnici, která by nám prozradila, kam se v dané shodnosti $f : E_2 \to E_2$ zobrazí libovolný bod v rovině.

Úmluva. Obraz bodu X v zobrazení f budeme značit $f(X)$ nebo X'.

Snadno určíme analytické vyjádření shodného zobrazení identity. Platí, že každý bod X se zobrazí sám na sebe, tj. $X' = X$. Pro souřadnice vzoru $X = [x; y]$ a obrazu $X' = [x'; y']$ platí:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Tato jednoduchá soustava dvou rovnic je analytickým předpisem identity. V úvodu práce jsme se seznámili s pojmem matice. Zapíšeme-li tuto soustavu rovnic pomocí maticového zápisu, získáme rovnici:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticový zápis zobrazení bývá často přehlednější než vyjádření pomocí soustavy rovnic, proto ho budeme používat, i když u identity to není moc patrné. Jak bude vypadat analytický předpis ostatních shodných zobrazení?

2.2.1 Odvození analytického vyjádření shodných zobrazení

Mějme shodné zobrazení f v E_2 a zvolenou kartézskou soustavu souřadnic. Zobrazení f zobrazí bod $X \in E_2$ na bod $f(X) \in E_2$. Bod $X = [x; y]$ lze ve zvolené kartézské soustavě souřadnic vyjádřit jako $X = P + x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$. Obraz $f(X)$ bodu X popíšeme analyticky: $f(X) = f(P + x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2)$.

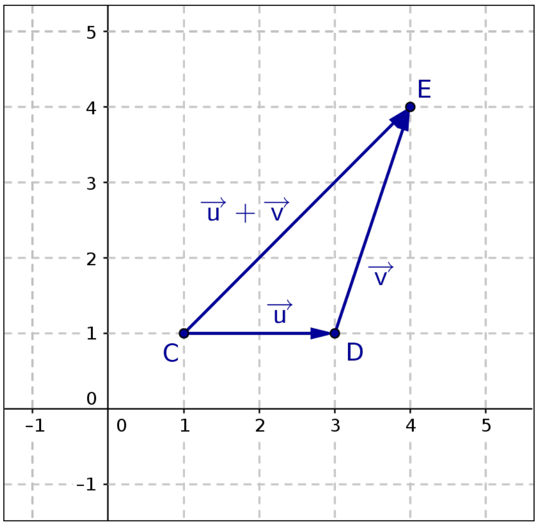
Zobrazení f určuje, jak se zobrazí body v rovině. Jak se budou zobrazovat vektory? Vektor je definován jako rozdíl bodů a obrazy bodů jsou dány zobrazením f. Máme-li vektor $\vec{u} = D - C$, body C, D se zobrazí na $f(C), f(D)$, pak by se vektor $\vec{u}$ měl zobrazit na vektor $f(D) - f(C)$. Definujme si zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které bude zobrazovat vektory a bude pro něj platit: $\varphi(\vec{u}) = \varphi(D - C) = f(D) - f(C)$, pro $\vec{u} = D - C$.

Zobrazení φ je zobrazení z vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ do vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$. Z předpisu zobrazení φ přímo plyne, že pro každé dva vektory $\vec{u}$,$\vec{v}$ platí $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v})$, a pro každé reálné číslo k a vektor $\vec{u}$ platí $\varphi(k \cdot \vec{u}) = k \cdot \varphi(\vec{u})$.

Zamysleme se a zkusme odvodit, že je zobrazení φ dobře definováno a že výše popsané vztahy pro zobrazení φ platí.

Nejdříve musíme ukázat, že dvě orientované úsečky, které jsou umístěním jednoho vektoru, se zobrazí na dvě orientované úsečky, které budou opět umístěním jednoho vektoru. Zvolme takové shodné orientované úsečky CD a FE, které neleží na jedné přímce, označme $\vec{u} = D - C = E - F$. Body C, D, E, F jsou potom vrcholy rovnoběžníka $CDEF$. Shodné zobrazení f zobrazí rovnoběžník na rovnoběžník s ním shodný, obrazy bodů C, D, E, F určí umístění vektoru $\varphi(\vec{u}) = f(D) - f(C) = f(E) - f(F)$. (Shodnost zachovává vzdálenost bodů i rovnoběžnost úseček.) Zobrazení φ je tedy korektně definováno.

Ukažme, že platí $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$. Vyjádřeme si vektor $\vec{u} = D - C$ a vektor $\vec{v} = E - D$, vektor $\vec{u} + \vec{v} = E - C$ (viz obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Sčítání vektorů

Chceme ukázat, že platí: $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$. Upravme levou stranu rovnosti:

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{u}+\vec{v}) &= \varphi\big((D-C)+(E-D)\big) = \\
&= \varphi\big((E-D)+(D-C)\big) = \\
&= \varphi\big(E-C\big) = \\
&= f(E)-f(C).
\end{aligned}$$

Upravme pravou stranu rovnosti:

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v}) &= \varphi\big(D-C\big)+\varphi\big(E-D\big) = \\
&= \big(f(D)-f(C)\big)+\big(f(E)-f(D)\big) = \\
&= \big(f(E)-f(D)\big)+\big(f(D)-f(C)\big) = \\
&= f(E)-f(C).
\end{aligned}$$

Při úpravách levé a pravé strany rovnosti jsme použili zákon komutativity sčítání a ukázali jsme tak, že platí $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

Podobně dokážeme i druhý vztah $\varphi(k\cdot\vec{u}) = k\cdot\varphi(\vec{u})$, kde $k \in \mathbb{R}$. Mějme vektor $\vec{u} = D - C$, a vektor $k \cdot \vec{u} = E - C$. Vektor $E - C$ je tedy k-násobkem vektoru $D-C$, tj. $(E-C) = k\cdot(D-C)$. Zároveň si uvědomme, že zobrazení f je shodné, tj. zachovává vzdálenosti bodů $|EC| = |f(E)f(C)|$, tedy i velikost vektoru. Proto pokud $(E-C) = k\cdot(D-C)$, tak i $(f(E)-f(C)) = k\cdot(f(D)-f(C))$.

$$\begin{aligned}
\varphi(k\cdot\vec{u}) &= \varphi\big(k\cdot(D-C)\big) = \\
&= \varphi(E-C) = \\
&= f(E)-f(C) = \\
&= k\cdot\big(f(D)-f(C)\big) = \\
&= k\cdot\varphi(D-C) = \\
&= k\cdot\varphi(\vec{u})
\end{aligned}$$

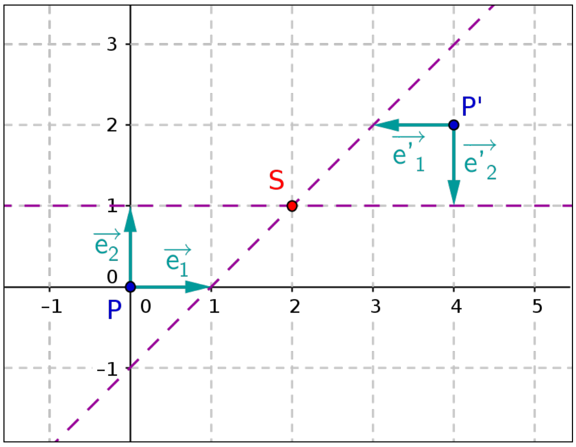
Zobrazení φ umožňuje upravit analytické vyjádření obrazu $f(X)$ bodu X. Využijeme známý fakt, že součtem bodu a vektoru je bod:

$$f(X) = f(P + x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2) = f(P) + \varphi(x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2).$$

Z vlastností zobrazení φ víme, jak se chová k součtu vektorů a k násobku vektoru reálným číslem, proto:

$$\begin{aligned}
f(X) &= f(P)+\varphi(x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2) = \\
&= f(P)+\varphi(x\cdot\vec{e}_1)+\varphi(y\cdot\vec{e}_2) = \\
&= f(P)+x\cdot\varphi(\vec{e}_1)+y\cdot\varphi(\vec{e}_2).
\end{aligned}$$

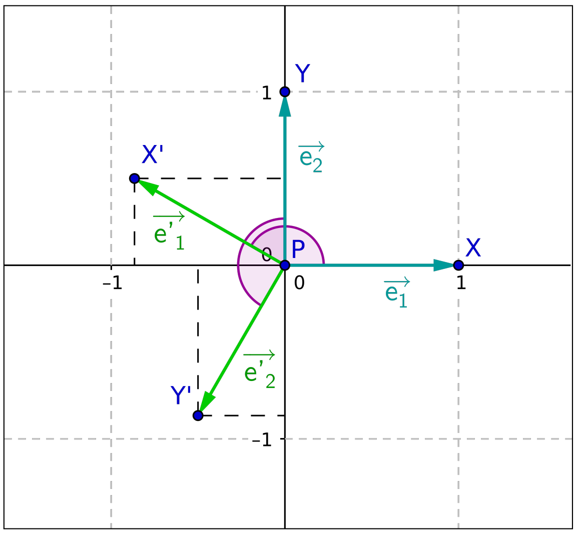
Obraz bodu $X = P + x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2$ získáme tak, že určíme obraz počátku P a obrazy souřadnicových vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, tedy obrazy koncových bodů vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ v daném zobrazení. Podívejme se na následující obrázek. Na obrázku 2.2 je znázorněna středová souměrnost se středem v bodě S.



Obrázek 2.2: Středová souměrnost

Z obrázku je vidět, že ve shodném zobrazení nemusí být obrazy bodů (resp. vektorů) totožné se vzory. Bod P se zobrazí na bod $f(P) = [b_1; b_2]$, takový bod můžeme vyjádřit jako $f(P) = P + b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2$, tj. za pomoci vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ a počátku P.

Podobně se zamysleme, jak bychom mohli vyjádřit $\varphi(\vec{e}_1)$ a $\varphi(\vec{e}_2)$. Dané zobrazení φ zobrazí vektor $\vec{e}_1$ na vektor $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}'_1$ (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Otočení okolo počátku o orientovaný úhel $+150\,^\circ$

Vektor $\vec{e}'_1$ lze vyjádřit jako $a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{12} \cdot \vec{e}_2$, kde a_{11}, a_{12} jsou souřadnice koncového bodu vektoru $\vec{e}'_1$ (vyznačeno na obrázku 2.3). Podobně můžeme vyjádřit i souřadnice vektoru $\vec{e}'_2$:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{e}_1) &= a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{12} \cdot \vec{e}_2, \\ \varphi(\vec{e}_2) &= a_{21} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Vektor $\vec{e}_1 = (1; 0)$ se zobrazí na vektor $(a_{11}; a_{12})$ a vektor $\vec{e}_2 = (0; 1)$ se zobrazí na vektor $(a_{21}; a_{22})$.

Vraťme se ke vztahu

$$f(X) = f(P) + x \cdot \varphi(\vec{e}_1) + y \cdot \varphi(\vec{e}_2)$$

a zkusme dosadit vyjádření $f(P)$ a $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$:

$$\begin{aligned}f(P)+x\cdot\varphi(\vec{e}_1)+y\cdot\varphi(\vec{e}_2)=P+b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2 &+ x\cdot(a_{11}\cdot\vec{e}_1+a_{12}\cdot\vec{e}_2)+\\ &+ y\cdot(a_{21}\cdot\vec{e}_1+a_{22}\cdot\vec{e}_2).\end{aligned}$$

Pravou stranu vztahu upravme tak, aby byla na první pohled patrná role vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (vytkneme vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$):

$$\begin{aligned}P &+ \vec{e}_1\cdot(b_1+x\cdot a_{11}+y\cdot a_{21})+\\ &+ \vec{e}_2\cdot(b_1+x\cdot a_{12}+y\cdot a_{22}).\end{aligned}$$

Pro přehlednost v uvedených krocích odvození vztahu mezi bodem X a jeho obrazem $f(X)$ v zobrazení f zopakujeme důležité kroky:

$$\begin{aligned}f(X) &= f(P+x\cdot\vec{e}_1+y\cdot\vec{e}_2)=\\ &= f(P)+x\cdot\varphi(\vec{e}_1)+y\cdot\varphi(\vec{e}_2)=\\ &= P+b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+x\cdot(a_{11}\cdot\vec{e}_1+a_{12}\cdot\vec{e}_2)+y\cdot(a_{21}\cdot\vec{e}_1+a_{22}\cdot\vec{e}_2)=\\ &= P+\vec{e}_1\cdot(b_1+x\cdot a_{11}+y\cdot a_{21})+\vec{e}_2\cdot(b_1+x\cdot a_{12}+y\cdot a_{22}).\end{aligned}$$

Bod $f(X)=X'=[x';y']$ můžeme vyjádřit pomocí bodu P a vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ jako $X'=P+x'\cdot\vec{e}_1+y'\cdot\vec{e}_2$, kde čísla x' a y' představují souřadnice bodu X'. Porovnáme-li předpis bodu X' se získaným obrazem bodu X v zobrazení f (tedy vzoru bodu X'), dostaneme vztah mezi souřadnicemi vzoru a obrazu v zobrazení f:

$$\begin{aligned}x' &= x\cdot a_{11}+y\cdot a_{21}+b_1,\\ y' &= x\cdot a_{12}+y\cdot a_{22}+b_2.\end{aligned}$$

Využijme maticového zápisu, abychom získali přehlednější zápis téhož:

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix},$$

což lze napsat symbolicky

$$X'=X\cdot A+B,$$

kde matice A je matice zobrazení φ a matice B obsahuje souřadnice obrazu počátku P. Matice A se někdy též nazývá matice shodného zobrazení f.

Z jakého důvodu jsou prvky matice B souřadnice obrazu počátku P? Zkusme dosadit do analytického vyjádření shodného zobrazení souřadnice bodu P a zkoumejme, na jaký bod se zobrazí. Obraz bodu $P=[0;0]$ označme třeba $R=[r_1;r_2]$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}r_1 & r_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}r_1 & r_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.2.2 Podmínky pro matici A

Jednou z důležitých vlastností shodných zobrazení je, že zachovávají vzdálenosti. Řečeno matematicky, pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí: $|XY|=|X'Y'|$. Tuto vlastnost jsme ale při odvozování analytického předpisu shodného zobrazení nepoužili. Mohlo by se zdát, že vlastnost nemá na předpis zobrazení žádný vliv, pojďme se zamyslet, jestli je to pravda.

Vyjděme z rovnosti $|X'Y'| = |XY|$. Vzdálenost bodů X, Y je rovna velikosti úsečky XY. Velikost úsečky XY je stejná jako velikost orientované úsečky XY. Orientovaná úsečka XY (nebo-li vektor) se dá zapsat jako rozdíl koncového a počátečního bodu orientované úsečky. Rovnost $|X'Y'| = |XY|$ můžeme zapsat jako velikost příslušných vektorů: $|Y' - X'| = |Y - X|$.

Použijme předpis analytického vyjádření shodného zobrazení, abychom určili, jaké souřadnice budou mít obrazy bodů X, Y:

$$\begin{aligned} X' &= X \cdot A + B, \\ Y' &= Y \cdot A + B, \end{aligned}$$

odečtením první rovnice od druhé získáme $Y' - X' = (Y - X) \cdot A$. Dosadíme do vyjádření:

$$\begin{aligned} |Y' - X'| &= |Y - X|, \\ |(Y - X) \cdot A| &= |Y - X|. \end{aligned}$$

Velikost vektoru $\vec{u} = Y - X = (u_1; u_2)$ je rovna $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Abychom si počítání usnadnili, nebudeme počítat s velikostmi úseček, ale s velikostmi umocněnými na druhou, čímž se zbavíme odmocniny.

$$\begin{aligned} |(Y - X) \cdot A| &= |Y - X| \\ |(Y - X) \cdot A|^2 &= |Y - X|^2 \end{aligned}$$

Víme, že $|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2$, daný součet můžeme vyjádřit i za pomocí matic. Souřadnice vektoru $\vec{u}$ lze zapsat pomocí matice $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$. Vynásobíme-li matici U s maticí transponovanou U^T, dostaneme:

$$U \cdot U^T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2^2 \end{pmatrix} = |\vec{u}|^2.$$

Vraťme se k vyjádření $|(Y - X) \cdot A|^2 = |Y - X|^2$. Použijeme myšlenku s násobením matic a zapíšeme rovnost pomocí násobení matic:

$$\begin{aligned} |(Y - X) \cdot A|^2 &= |Y - X|^2, \\ ((Y - X) \cdot A) \cdot ((Y - X) \cdot A)^T &= (Y - X) \cdot (Y - X)^T. \end{aligned}$$

Rovnost upravíme, nejprve převedeme pravou stranu rovnice na levou, pak použijeme pravidlo pro transponování součinu matic, a nakonec vytkneme:

$$\begin{aligned} ((Y - X) \cdot A) \cdot ((Y - X) \cdot A)^T - (Y - X) \cdot (Y - X)^T &= O, \\ (Y - X) \cdot A \cdot A^T \cdot (Y - X)^T - (Y - X) \cdot (Y - X)^T &= O, \\ (Y - X) \cdot [A \cdot A^T \cdot (Y - X)^T - (Y - X)^T] &= O, \\ (Y - X) \cdot [A \cdot A^T - E] \cdot (Y - X)^T &= O. \end{aligned}$$

Pro libovolné matice X, Y tento vztah platí, tedy i pro $X \neq Y$. Proto pro prostřední člen $A \cdot A^T - E$ platí:

$$\begin{aligned} A \cdot A^T - E &= O, \\ A \cdot A^T &= E. \end{aligned}$$

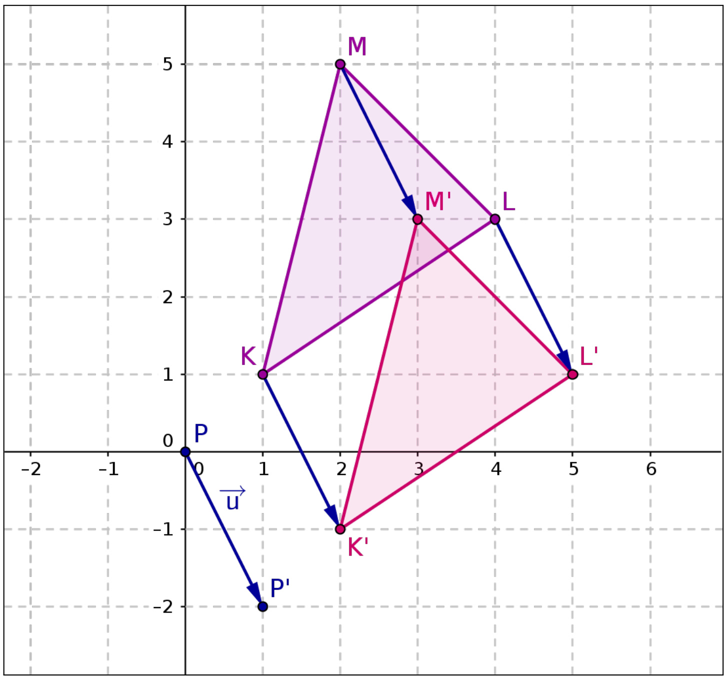
Vidíme, že přeci jen vlastnost zachování vzdáleností ovlivňuje analytický předpis shodných zobrazení. Matice A musí splňovat vlastnost $A \cdot A^T = E$, aby byl předpis $X' = X \cdot A + B$ předpisem pro shodné zobrazení. Zároveň jsme při odvození použili jen ekvivalentní úpravy, čímž jsme zdůvodnili platnost následující věty.

Věta 2. *Zobrazení $f : E_2 \to E_2$ s analytickým vyjádřením $X' = X \cdot A + B$ je shodné právě tehdy, když pro matici A zobrazení f platí: $A \cdot A^T = E$.*

2.2.3 Příklady

Příklad 1

V rovině je dáno posunutí určené vektorem $\vec{u} = (1; -2)$. V daném posunutí se trojúhelník KLM o souřadnicích $K = [1; 1], L = [4; 3], M = [2; 5]$ zobrazí na trojúhelník $K'L'M'$ o souřadnicích $K' = [2; -1]$, $L' = [5; 1]$, $M' = [3; 3]$ (obr. 2.4).



Obrázek 2.4: Posunutí

Určete analytické vyjádření posunutí.

Řešení. Jde o shodné zobrazení, takže jeho analytické vyjádření musí být $X' = X \cdot A + B$, stačí určit prvky matic A a B. Už víme, že v matici B jsou napsány souřadnice obrazu počátku, bodu P'. Počátek, bod $P = [0; 0]$, se zobrazí na bod $P' = P + \vec{u} = [1; -2]$. Doplníme do předpisu:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jak určit prvky matice A? Stačí do předpisu dosadit libovolný bod a jeho obraz a prvky a_{ij} matice A vypočítat. Vlastně budeme muset dosadit dva body a jejich obrazy, neboť máme čtyři neznámé. Dosaďme třeba bod K a jeho obraz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Z předpisu získáme dvě rovnice:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1, \\ -1 &= 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + (-2). \end{aligned}$$

Dosaďme bod M a jeho obraz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a opět sestavme rovnice:

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot a_{11} + 5 \cdot a_{21} + 1, \\ 3 &= 2 \cdot a_{12} + 5 \cdot a_{22} + (-2). \end{aligned}$$

Získáme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 1, \\ 3 &= 2 \cdot a_{11} + 5 \cdot a_{21} + 1, \\ -1 &= 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} - 2, \\ 3 &= 2 \cdot a_{12} + 5 \cdot a_{22} - 2. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme, zde je řešení vidět asi na první pohled,

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \\ a_{21} &= 0, \\ a_{12} &= 0, \\ a_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Doplňme pro úplnost do předpisu zobrazení prvky matice A:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

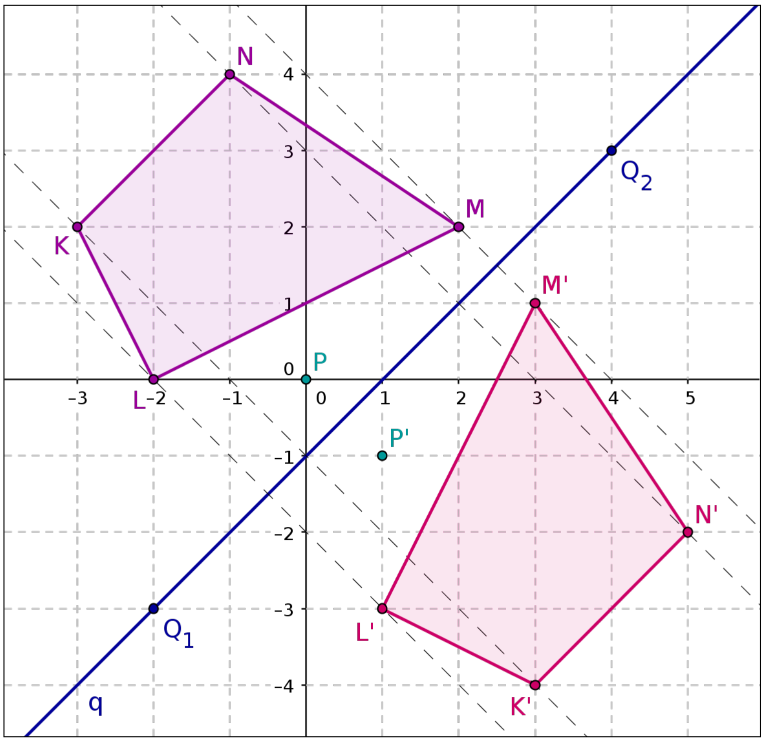
Takto vypadá předpis posunutí určeného vektorem $\vec{u} = (1; -2)$.

Platí podmínka $A \cdot A^T = E$? Můžeme ověřit, že podmínka opravdu platí:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Příklad 2

Určete analytické vyjádření osové souměrnosti určené osou q, osa q je určena body $Q_1 = [-2; -3], Q_2 = [4; 3]$. Čtyřúhelník $KLMN$ se v osové souměrnosti zobrazí na čtyřúhelník $K'L'M'N'$ (souřadnice bodů lze vyčíst z obrázku 2.5, nebo je lze dopočítat).



Obrázek 2.5: Osová souměrnost

Řešení. Nejprve zkusíme nalézt bod P', obraz počátku P. Víme totiž, že obraz počátku určí prvky matice B v analytickém předpisu zobrazení $X' = X \cdot A + B$. Souřadnice bodu P' lze vyčíst z obrázku, $P' = [1; -1]$.

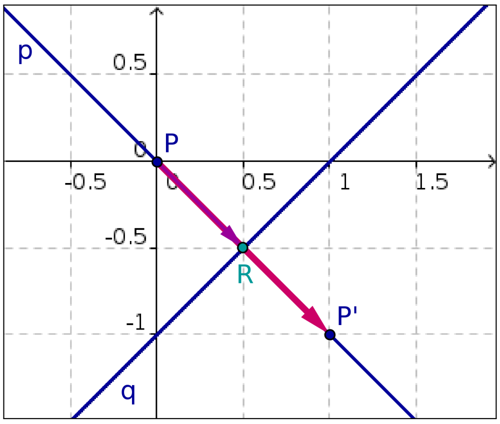
Víme, jak bychom našli souřadnice bodu P', pokud bychom je neuměli určit úvahou přímo z obrázku? Kdyby souřadnice bodu P' nešly vyčíst z obrázku, museli bychom je vypočítat pomocí znalostí z analytické geometrie. Popíšeme jeden z možných postupů, kterým bychom mohli souřadnice bodu P' nalézt.

Námi zvolený postup bude následující: zjistíme obecnou rovnici přímky q, určíme rovnici přímky p kolmé na přímku q procházející bodem P, spočteme průsečík R přímek p, q. Dále stačí určit souřadnice vektoru $\vec{v} = R - P$, souřadnice bodu P' můžeme spočítat jako $P' = P + 2 \cdot \vec{v}$, protože vektor $\vec{v}$ je normálový vektor přímky q a určuje vzdálenost bodu P od přímky q. Postup ilustruje obrázek 2.6.

Teď k výpočtu; nejprve určíme obecnou rovnici přímky q, k tomu musíme znát bod ležící na přímce a normálový vektor přímky. Přímka je zadána body Q_1, Q_2, použijme je k získání rovnice přímky q:

$$Q_2 - Q_1 = [4; 3] - [-2; -3] = (6; 6) = 6 \cdot (1; 1),$$

Směrový vektor přímky je $\vec{u} = (1; 1)$, normálový vektor $\vec{n} = (1; -1)$. Obecná rovnice přímky q je $x - y - 1 = 0$. Určíme obecnou rovnici přímky p kolmé na



Obrázek 2.6: Určení obrazu počátku v osové souměrnosti

přímku q procházející bodem P: $x + y = 0$. Najdeme průsečík R obou přímek vyřešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x - y - 1 &= 0, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Průsečík přímek p a q má souřadnice $\left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right]$. Vektor $\vec{v} = R - P = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, bod $P' = P + 2 \cdot \vec{v} = [0; 0] + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = [1; -1]$.

Tímto způsobem bychom mohli přijít na souřadnice bodu P', kdybychom je nemohli vyčíst z obrázku.

Doplníme souřadnice obrazu počátku do předpisu shodného zobrazení:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podobně jako u minulého příkladu dosadíme souřadnice dvou bodů a jejich obrazů do předpisu shodného zobrazení a dopočítáme prvky matice A. Dosadíme například body K, L (kdybychom neznali obrazy bodů, dokázali bychom je spočítat stejným postupem jako bod P'):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= -3 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1, \\ 1 &= -2 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 1, \\ -4 &= -3 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} - 1, \\ -3 &= -2 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= -3 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1, \\ a_{11} &= \frac{1 - 1}{-2} = 0, \\ -4 &= -3 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} - 1, \\ a_{12} &= \frac{-3 + 1}{-2} = 1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3 &= -3 \cdot 0 + 2 \cdot a_{21} + 1, \\
-4 &= -3 \cdot 1 + 2 \cdot a_{22} - 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{3-1}{2} = 1, \\
a_{22} &= \frac{-4-(-3)-(-1)}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Předpis zobrazení je:

$$
\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Opět můžeme snadno ověřit, že je splněna podmínka $A \cdot A^T = E$, ověření necháme na čtenáři.

2.3 Samodružné body shodných zobrazení

Definice. *Je dáno shodné zobrazení $f : E_2 \to E_2$. Bod $X \in E_2$ nazveme samodružným bodem shodného zobrazení f právě tehdy, když se zobrazí sám na sebe, tj. $f(X) = X$.*

Připomeňme si, co tvoří množiny všech samodružných bodů jednotlivých zobrazení:

- *identita* – každý bod roviny je samodružným bodem,
- *středová souměrnost* – jediným samodružným bodem středové souměrnosti je střed souměrnosti,
- *osová souměrnost* – samodružnými body osové souměrnosti jsou všechny body náležící ose souměrnosti,
- *posunutí* – nemá samodružné body, pokud není vektor posunutí nulový (v takovém případě by se jednalo o identitu a každý bod by byl samodružný, množinu samodružných bodů by tvořila celá rovina),
- *otočení* – samodružný bod otočení je střed otočení, avšak pokud je úhel otočení roven $k \cdot 360^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pak se jedná o identitu a množinou samodružných bodů je celá rovina.

Podívejme se na množiny samodružných bodů analyticky. Víme, že shodné zobrazení má analytické vyjádření $X' = X \cdot A + B$ a zároveň pro samodružný bod X zobrazení platí $X' = X$. Dosadíme do předpisu zobrazení a upravíme:

$$
\begin{aligned}
X &= X \cdot A + B, \\
X - X \cdot A &= B, \\
X \cdot (E - A) &= B.
\end{aligned}
$$

Vztah ještě rozepíšeme:

$$
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.
$$

Z uvedeného zápisu získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x \cdot (1 - a_{11}) - y \cdot a_{21} &= b_1, \\ -x \cdot a_{12} + y \cdot (1 - a_{22}) &= b_2. \end{aligned}$$

Máme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y (čísla a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} i b_1, b_2 jsou nám známá). Takovou soustavu umíme vyřešit, jaká řešení můžeme získat?

Tato soustava může být jednoho ze čtyř typů v závislosti na počtu řešení dané soustavy. *První typ* soustavy rovnic o dvou neznámých je například

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 3 \cdot y &= 1, \\ 1 \cdot x + 3 \cdot y &= 2. \end{aligned}$$

Na první pohled je vidět, že soustava nemá řešení, nemůže současně platit rovnost $1 \cdot x + 3 \cdot y = 1$ a zároveň $1 \cdot x + 3 \cdot y = 2$. Množina řešení soustavy rovnic je prázdná. Shodné zobrazení f tedy nemá žádné samodružné body.

Druhý typ soustavy rovnic o dvou neznámých je například

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 3 \cdot y &= 1, \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y &= 0. \end{aligned}$$

Soustava rovnic má jedno řešení, je jím uspořádaná dvojice $[x; y] = [-2; 1]$. Zobrazení f má právě jeden samodružný bod, jehož souřadnice získáme vyřešením soustavy rovnic.

Třetí typ soustavy rovnic o dvou neznámých je například

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 3 \cdot y &= 1, \\ 1 \cdot x + 3 \cdot y &= 1. \end{aligned}$$

Taková soustava má nekonečně mnoho řešení, množina řešení soustavy rovnic je množina uspořádaných dvojic $[x; y] = \left[x; \frac{1-x}{3}\right]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Zobrazení f má nekonečně mnoho samodružných bodů, které tvoří přímku.

Čtvrtým typem soustavy rovnic je soustava

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 0. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je každá uspořádaná dvojice $[x; y]$, kde $x \in \mathbb{R}$ a zároveň $y \in \mathbb{R}$. Tedy každý bod zobrazení f je samodružný, jedná se o identitu.

2.3.1 Příklady

Vraťme se k příkladům z kapitoly Anylytické vyjádření shodných zobrazení. Určili jsme tam předpisy pro posunutí a pro osovou souměrnost. Analytickou metodou odvoďme množiny samodružných bodů těchto zobrazení.

Příklad 1

Posunutí f je zadáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určete samodružné body zobrazení f.

Řešení. Dosaďme do předpisu $X \cdot (E - A) = B$ pro hledání samodružných bodů:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y &= -2. \end{aligned}$$

Soustava rovnic nemá řešení, proto neexistuje žádný samodružný bod daného posunutí.

Příklad 2

Osová souměrnost f je zadána předpisem

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete samodružné body zobrazení f.

Řešení. Dosazením do předpisu $X \cdot (E - A) = B$ pro hledání samodružných bodů získáme rovnici

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x - 1 \cdot y &= 1, \\ -1 \cdot x + 1 \cdot y &= -1. \end{aligned}$$

Vyřešíme soustavu; protože první řádek je násobkem druhého řádku, máme vlastně jen jednu rovnici o dvou neznámých. Množina řešení rovnice je množina bodů, pro které platí $[x; y] = [x; x-1]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Množinu samodružných bodů osové souměrnosti tvoří přímka – osa souměrnosti, její předpis je $y = x - 1$ (na obrázku 2.5 u příkladu 2 u kapitoly Analytické vyjádření shodných zobrazení si můžeme ověřit, že osa souměrnosti má opravdu předpis $y = x - 1$).

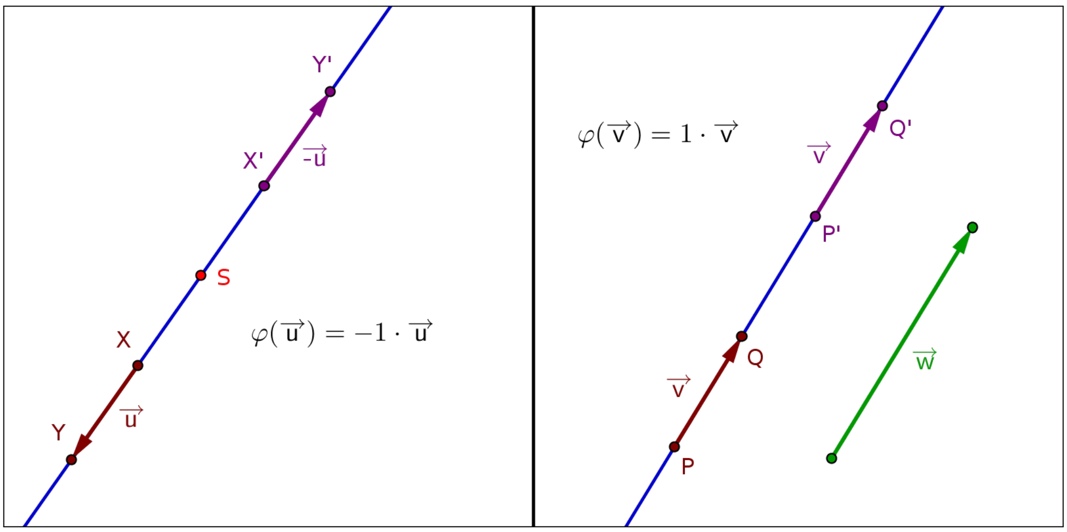
2.4 Samodružné přímky shodných zobrazení

Definice. *Je dáno shodné zobrazení $f : E_2 \to E_2$. Samodružná přímka zobrazení f je taková přímka p, která se zobrazí sama na sebe, tj. $f(p) = p$.*

Připomeňme si, které přímky u jednotlivých zobrazení jsou samodružné:

- *identita* – všechny přímky jsou samodružné,
- *středová souměrnost* – samodružné přímky jsou všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti,
- *osová souměrnost* – samodružné přímky jsou všechny přímky kolmé na osu souměrnosti a osa souměrnosti,
- *posunutí* – samodružné přímky jsou všechny přímky, které jsou rovnoběžné s vektorem posunutí,
- *otočení* – nemá žádné samodružné přímky pro úhel otočení $\alpha \neq k \cdot 180\,°$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Aby byla přímka samodružná, musí se zobrazit sama na sebe. Pro obecné rovnice přímky p a jejího obrazu $f(p)$ tedy musí platit, že je jedna rovnice k-násobkem druhé (přímky jsou totožné). Zaměřme se jen na směrové vektory obou přímek. Pro zobrazení vektorů jsme definovali pomocné zobrazení φ. Pro směrový vektor samodružné přímky musí platit: $\varphi(\vec{u}) = k \cdot \vec{u}$, kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Zároveň víme, že shodné zobrazení zachovává vzdálenosti bodů, tedy zobrazení φ zachovává velikosti vektorů: $|\varphi(\vec{u})| = |\vec{u}|$. Proto musí platit, že $k = 1$, nebo $k = -1$. Příkladem shodného zobrazení, pro které je $k = 1$, je identita nebo posunutí, příkladem shodného zobrazení s $k = -1$ je středová souměrnost (obr. 2.7).



Obrázek 2.7: Obrazy vektorů ve shodných zobrazeních

Pokud máme samodružnou přímku, tak pro obraz $\varphi(\vec{u})$ jejího směrového vektoru $\vec{u}$ platí $\varphi(\vec{u}) = 1 \cdot \vec{u}$, nebo $\varphi(\vec{u}) = -1 \cdot \vec{u}$. Nalezneme-li vektor, který splňuje jednu ze dvou uvedených podmínek, jedná se o "kandidáta"na směrový vektor samodružné přímky. Jinými slovy, daný vektor může být směrovým vektorem samodružné přímky shodného zobrazení. Proč splněním rovnosti získáme pouze „kandidáta“ na směrový vektor samodružné přímky bude jasné, když uvážíme posunutí. U posunutí každý vektor splňuje podmínku $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$, ale samodružné přímky jsou pouze přímky rovnoběžné s vektorem posunutí. Nicméně určením všech „kandidátů“ na směrové vektory samodružných přímek společně se znalostí samodružných bodů daného zobrazení už stačí k tomu, abychom dokázali určit, o jaké zobrazení se jedná, a podle toho určíme i samodružné přímky zobrazení.

Vyjádřeme obraz $\varphi(\vec{u}) = Y' - X'$ vektoru $\vec{u} = Y - X$. Použijme k tomu analytický předpis shodného zobrazení:

$$
\begin{aligned}
X' &= X \cdot A + B, \\
Y' &= Y \cdot A + B.
\end{aligned}
$$

Dosaďme předpis pro obrazy bodů X', Y' do vyjádření obrazu $\varphi(\vec{u})$ vektoru $\vec{u}$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{u}) = Y' - X' &= (Y \cdot A + B) - (X \cdot A + B) = \\
&= Y \cdot A - X \cdot A = \\
&= (Y - X) \cdot A = \\
&= \vec{u} \cdot A.
\end{aligned}
$$

Poznámka. Na pravé straně odvození $\varphi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot A$ je vztah $\vec{u} \cdot A$, kde $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je vektor a A je matice. Ve skutečnosti jde o násobení dvou matic, matice $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ s maticí A. Jinými slovy souřadnice vektoru $\vec{u} = (u_1; u_2)$ lze napsat do matice U typu 1×2 a počítat s vektorem jako s maticí. V následujících řádcích bude pro lepší srozumitelnost vektor $\vec{u}$ vystupovat v roli matice, ale ponecháme vektorové značení.

Co jsme zatím získali? Víme, že $\varphi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot A$ a že současně $\varphi(\vec{u}) = k \cdot \vec{u}$. Tedy platí:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot A &= k \cdot \vec{u}, \\
\vec{u} \cdot A - k \cdot \vec{u} &= O, \\
\vec{u} \cdot (A - k \cdot E) &= O.
\end{aligned}
$$

Rozepišme si rovnost $\vec{u} \cdot (A - k \cdot E) = O$ pomocí maticového zápisu:

$$
\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Dosazením $k = 1$ a $k = -1$ získáme dvě soustavy rovnic:

$$
\begin{aligned}
u_1 \cdot (a_{11} - 1) + u_2 \cdot a_{21} &= 0, & \qquad u_1 \cdot (a_{11} + 1) + u_2 \cdot a_{21} &= 0, \\
u_1 \cdot a_{12} + u_2 \cdot (a_{22} - 1) &= 0, & \qquad u_1 \cdot a_{12} + u_2 \cdot (a_{22} + 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Vyřešením soustav dostaneme souřadnice všech možných „kandidátů“ na směrové vektory samodružných přímek. Poznamenejme zde pro úplnost, že vyřešením soustav můžeme získat i nulový vektor, který ale, jak víme z hodin analytické geometrie, neurčuje žádnou přímku.

V tabulce 2.1 najdeme shrnutí počtu samodružných bodů jednotlivých shodných zobrazení a počtu vektorů, které získáme výše uvedeným postupem (tedy počet „kandidátů“ na směrové vektory samodružných přímek). V tabulce budeme pod pojmem posunutí chápat posunutí o nenulový vektor (jinak by se jednalo o identitu, kterou najdeme v tabulce hned na prvním řádku) a pod pojmem otočení budeme chápat otočení o úhel různý od $k \cdot 180°$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (jinak by šlo o středovou souměrnost, nebo o identitu).

Zobrazení	*Samodružné body*	*„Kandidáti“ směr. vektorů samodružných přímek*
Identita	všechny	všechny
Středová souměrnost	právě jeden	všechny
Osová souměrnost	body osy souměrnosti	dva na sebe kolmé
Posunutí	žádný	všechny
Otočení	právě jeden	žádný

Tabulka 2.1: Přehledová tabulka

Protože přímka je jednoznačně určena bodem a směrovým vektorem a my umíme určit samodružné body a „kandidáty“ směrových vektorů určujících samodružné přímky shodného zobrazení, dovedeme i napsat rovnice samodružných přímek. Musíme se ale opírat o znalosti samodružných přímek jednotlivých zobrazení ze syntetické geometrie.

2.4.1 Příklady

Podívejme se opět na příklady z kapitoly Analytická reprezentace shodných zobrazení a zkusme analytickou metodou určit samodružné přímky daných zobrazení.

Příklad 1

Shodné zobrazení f je zadáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Určete samodružné přímky zobrazení f.

Řešení. Zapomeňme na chvíli, že již víme, že se jedná o posunutí, a zkusme to určit na základě vyšetření množiny samodružných bodů a „kandidátů“ na směrové vektory samodružných přímek zobrazení. V předchozí kapitole jsme určili, že toto zobrazení nemá žádné samodružné body. Zkusme vyšetřit směrové vektory samodružných přímek. Vektor $\vec{u}$ může být vektorem samodružné přímky, pokud $\vec{u} \cdot (A - k \cdot E) = 0$. Dosaďme do předpisu prvky matice A:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} = O.$$

Dosazením $k = 1$ a $k = -1$ získáme soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 &= 0, \qquad & 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 &= 0, \\ 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 &= 0, \qquad & 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Na první pohled je vidět, že první soustava rovnic bude platit pro libovolné hodnoty u_1, u_2, jinými slovy každý vektor je „kandidát“ na směrový vektor, jenž určuje samodružnou přímku. (Z druhé soustavy získáme jediné řešení, nulový vektor, který ale nemůže určovat žádnou samodružnou přímku.) Z přehledové tabulky 2.1 je jasné, že se jedná o posunutí. Samodružné přímky posunutí jsou všechny přímky rovnoběžné s vektorem posunutí. Vektor posunutí je $\vec{u} = (1; -2)$. Vyjádřeme přímky například obecnou rovnicí: normálový vektor přímky je $\vec{n} = (2; 1)$, obecné rovnice samodružných přímek jsou $2x + y + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Příklad 2

Shodné zobrazení f je zadáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete samodružné přímky zobrazení f.

Řešení. Již víme, že dané zobrazení má samodružné body $[x; y] = [x; x-1]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Určeme „kandidáty“ na vektory samodružných přímek zobrazení – jako v předchozím příkladě dosaďme do předpisu $\vec{u} \cdot (A - k \cdot E) = 0$:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} = O$$

čísla $k = 1$ a $k = -1$. Získáme:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = O, \qquad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = O,$$

Nejprve vyřešme soustavu pro $k = 1$:

$$\begin{aligned} -u_1 + u_2 &= 0, \\ u_1 - u_2 &= 0. \end{aligned}$$

První rovnice je násobkem druhé, úpravou získáme rovnici $u_1 = u_2$, zvolme $u_2 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Řešením je tedy každý vektor tvaru $(t; t) = t \cdot (1; 1)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Vyřešme soustavu pro $k = -1$:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 0, \\ u_1 + u_2 &= 0. \end{aligned}$$

První rovnice je násobkem druhé, tedy $u_1 = -u_2$. Zvolme $u_2 = s$, kde $s \in \mathbb{R}$. Řešením je každý vektor tvaru $(s; -s) = s \cdot (1; -1)$, kde $s \in \mathbb{R}$.

Protože vektory $t \cdot (1; 1)$, $t \in \mathbb{R}$, jsou lineárně závislé, můžeme z nich zvolit libovolný vektor a napsat rovnici samodružné přímky. Podobně pro vektory $s \cdot (1; -1)$, $s \in \mathbb{R}$. Zvolme například vektory $(1; 1)$ a $(1; -1)$. Zároveň si uvědomme, že vektory $(1; 1)$ a $(1; -1)$ jsou na sebe kolmé. Tato skutečnost spolu se znalostí existence přímky samodružných bodů zobrazení určí, že se jedná o osovou souměrnost – samodružné přímky jsou všechny přímky kolmé na osu souměrnosti a osa souměrnosti. Stačí určit, který z vektorů určuje osu souměrnosti, což je snadné – už jsme to vlastně jednou spočítali při určování množiny samodružných bodů. Samodružné body jsou $[x; y] = [x; x-1]$, kde $x \in \mathbb{R}$. Odtud hned získáme analytické vyjádření osy souměrnosti $y = x - 1$.

Máme tedy obecnou rovnici osy souměrnosti $x - y - 1 = 0$. Z obecné rovnice osy vyčteme její normálový vektor $\vec{n} = (1; -1)$, směrový vektor osy souměrnosti je $(1; 1)$. Zbylé samodružné přímky tedy určíme pomocí vektoru $(1; -1)$.

Směrový vektor samodružné přímky je $(1; -1)$, její normálový vektor je $(1; 1)$. Dosadíme do obecné rovnice přímky $ax + by + c = 0$ a získáme: $x + y + c = 0$. Jaká bude hodnota čísla c? Protože samodružná přímka se směrovým vektorem $(1; -1)$ je každá přímka, kolmá na osu souměrnosti, každá hodnota čísla $c \in \mathbb{R}$ určí jednu samodružnou přímku. Uvedeným postupem jsme získali samodružné přímky:

$$
\begin{aligned}
x - y - 1 &= 0, \\
x + y + c &= 0, \; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

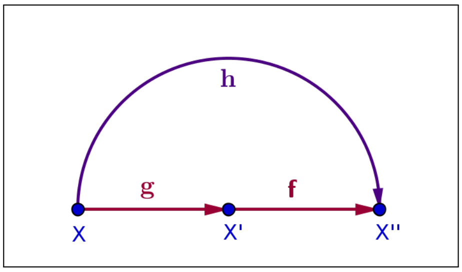
Můžeme ověřit, že tyto samodružné přímky odpovídají obrázku 2.5 v kapitole Analytická reprezentace shodných zobrazení.

3. Klasifikace shodností

3.1 Speciální postavení osové souměrnosti

Osová souměrnost je oproti ostatním shodným zobrazením něčím výjimečná. Má jednu velmi zajímavou vlastnost, skládáním osových souměrností se dají získat všechna shodná zobrazení v rovině. Jinými slovy, pro každé shodné zobrazení v rovině platí, že se jedná buď o osovou souměrnost, nebo se zobrazení dá vyjádřit složením několika osových souměrností.

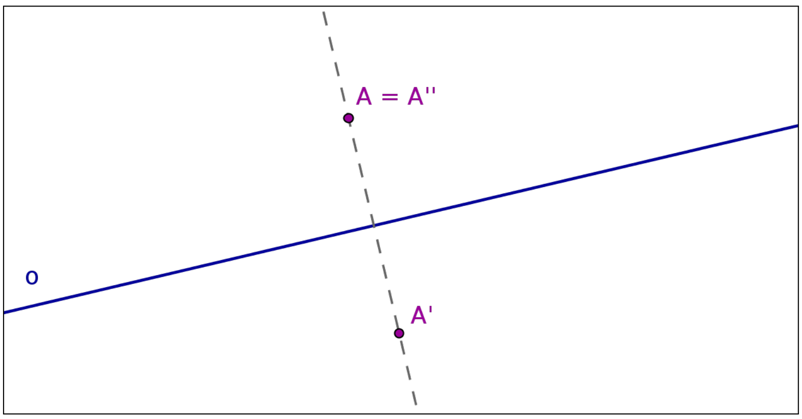
Připomeňme si, jakým způsobem se skládají zobrazení. Předpokládejme, že máme dvě shodná zobrazení f,g v rovině. Zápisem $f \circ g$ značíme složené zobrazení $h = f \circ g$. Obraz X'' bodu X v zobrazení h vznikne tak, že se nejprve určí obraz X' bodu X v zobrazení g a poté se určí obraz X'' bodu X' v zobrazení f (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Skládání zobrazení

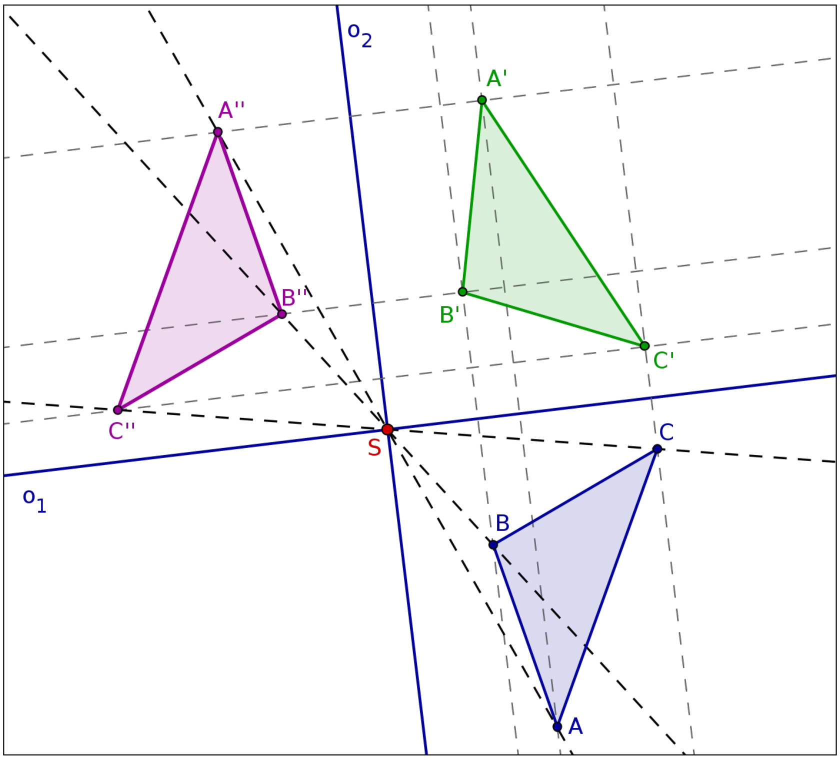
Známe-li analytické vyjádření $X'' = X' \cdot A_2 + B_2$ zobrazení f a analytické vyjádření $X' = X \cdot A_1 + B_1$ zobrazení g, pak analytické vyjádření složeného zobrazení $h = f \circ g$ získáme tak, že složíme analytická vyjádření zobrazení f a g: $X'' = \big(X \cdot A_1 + B_1\big) \cdot A_2 + B_2$ (tj. do předpisu zobrazení f „dosadíme“ za X' s využitím předpisu zobrazení g).

Identita je složení osové souměrnosti se sebou samotnou. Osová souměrnost určená osou o zobrazí bod A na bod A', který se v téže osové souměrnosti zobrazí na bod $A'' = A$, viz obr. 3.2.



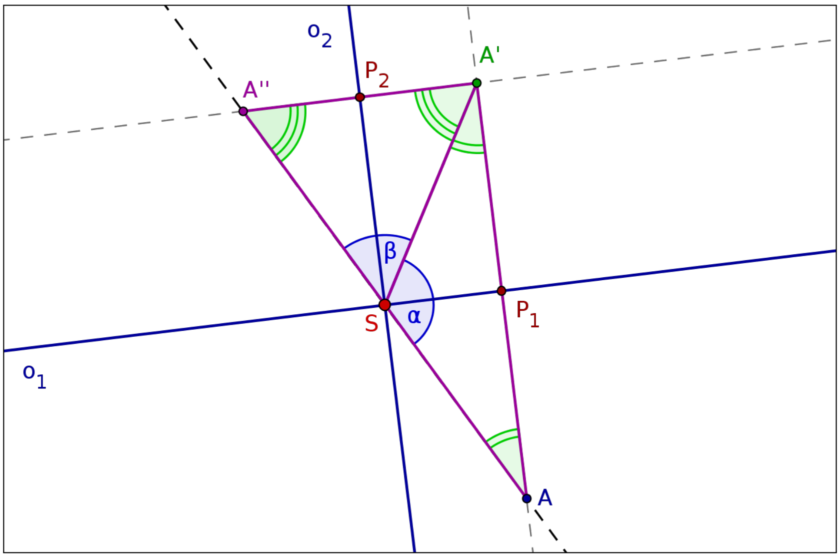
Obrázek 3.2: Identita

Středovou souměrnost můžeme získat složením dvou osových souměrností, jejichž osy o_1, o_2 jsou na sebe kolmé a protínají se v bodě S (tj. ve středu souměrnosti), viz obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Středová souměrnost

Ukažme si, že středovou souměrnost opravdu získáme za pomocí dvou výše popsaných osových souměrností. Zvolme v rovině bod A jako na obr. 3.4, zobrazme ho v osové souměrnosti určené osou o_1 na bod A', a ten poté zobrazme v osové souměrnosti určené osou o_2 na bod A'' (obr. 3.4).



Obrázek 3.4: Středová souměrnost jako složení dvou osových souměrností

Aby platilo, že středovou souměrnost lze získat složením dvou osových souměrností jako na obrázku 3.4, musí platit, že $|AS| = |SA''|$ a body A, A'' musí ležet na přímce procházející S, tedy úhel ASA'' musí být roven 180°.

Zobrazíme-li bod A v osové souměrnosti určené osou o_1 na bod A', bude platit, že $|AP_1| = |P_1A'|$. Spojíme-li body A, A' s bodem $S \neq P_1$, získáme rovnoramenný trojúhelník $AA'S$. Proto platí, že velikost úhlu SAA' je rovna velikosti úhlu $AA'S$. Pro úhel α platí $\alpha = 180° - 2 \cdot |\angle AA'S|$. Podobnou úvahou dojdeme k vyjádření velikosti úhlu β v trojúhelníku $SA'A''$: $\beta = 180° - 2 \cdot |\angle SA'A''|$. V obrázku navíc nalezneme obdélník P_1SP_2A', tedy víme, že $|\angle AA'S| + |\angle SA'A''| = 90°$. Můžeme spočítat velikost úhlu $\alpha + \beta$:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - 2 \cdot |\angle AA'S|,\\ \beta &= 180° - 2 \cdot |\angle SA'A''|,\end{aligned}$$

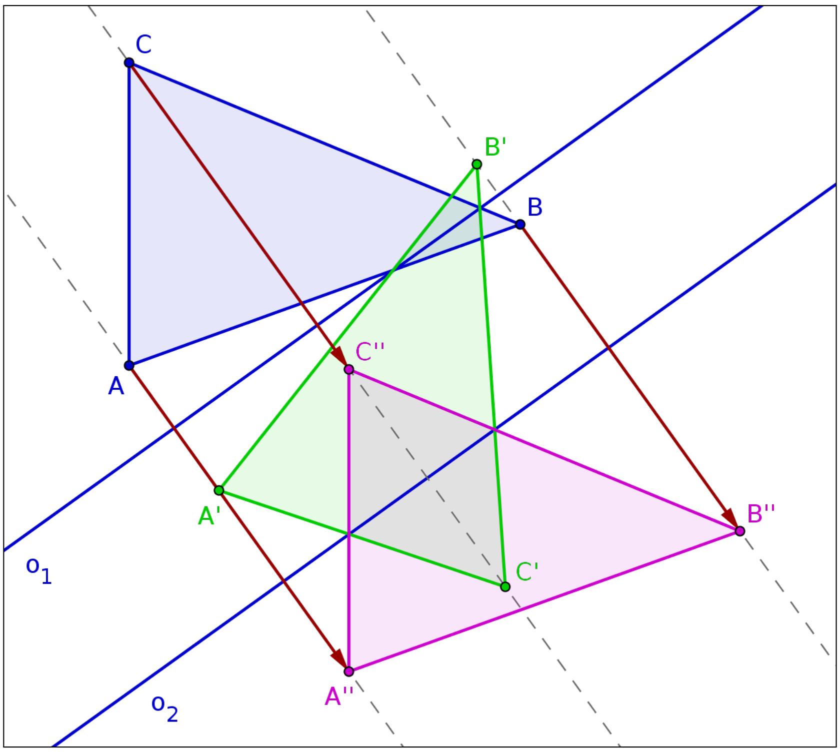
$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 360° - 2 \cdot (|\angle AA'S| + |\angle SA'A''|),\\ \alpha + \beta &= 360° - 2 \cdot 90° = 180°.\end{aligned}$$

Proto body A, A'' leží na přímce, která prochází bodem S. Protože oba rovnoramenné trojúhelníky mají společnou stranu SA', platí i $|AS| = |SA''|$.

Co kdyby bod A ležel na jedné z os (např. na ose o_2)? Pro takový bod platí, že jeho obraz dostaneme ihned po zobrazení v osové souměrnosti určené osou o_1, druhá osová souměrnost by nezměnila jeho umístění (bod by ležel na ose souměrnosti, byl by tak samodružným bodem zobrazení).

Jinými slovy jsme ukázali, že složením daných dvou osových souměrností získáme středovou souměrnost. Obdobně bychom postupovali, kdybychom skládali osové souměrnosti v obráceném pořadí.

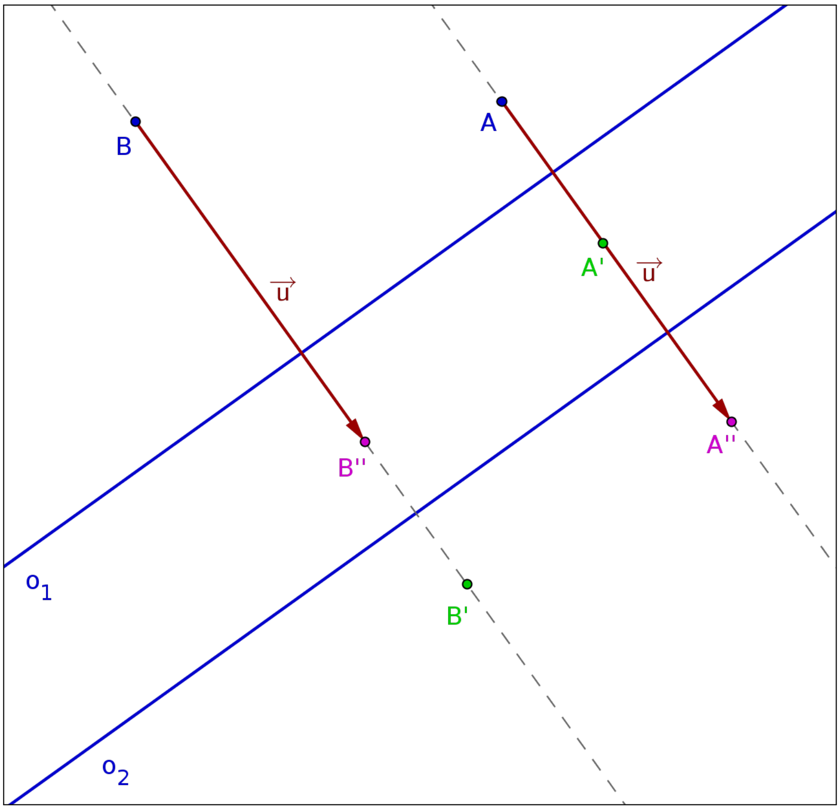
Posunutí o nenulový vektor získáme složením dvou osových souměrností, jejichž osy o_1 a o_2 jsou rovnoběžné, ale nejsou totožné, viz obr. 3.5.



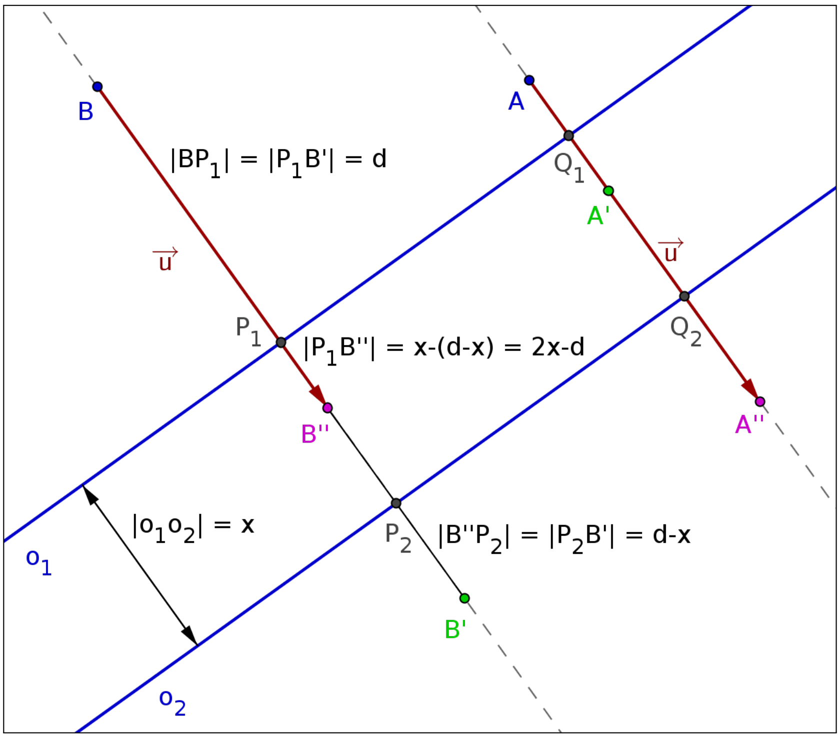
Obrázek 3.5: Posunutí

Vektor posunutí v obrázku 3.5 je vektor $A'' - A$ (resp. $B'' - B$, $C'' - C$).

V následujícím appletu (obr. 3.6) mužeme měnit polohu os a bodu B a sledovat, jak se (ne)změní vektor posunutí.



Obrázek 3.6: Applet 1



Obrázek 3.7: Posunutí jako složení dvou osových souměrností

Podívejme se, jak lze získat posunutí složením daných dvou osových souměrností. Zvolme v rovině bod A, zobrazme ho v osové souměrnosti určené osou o_1 na bod A', a ten poté zobrazme v osové souměrnosti určené osou o_2 na bod A''

(obr. 3.7). Vektor posunutí je vektor $\vec{u} = A'' - A$, jeho velikost je rovna $2x$, kde x je vzdálenost daných os souměrností. Zkusme zvolit jiný bod roviny, bod B, zobrazme ho stejným postupem a ukažme, že vektor $B'' - B$ má stejnou velikost a stejný směr jako vektor posunutí.

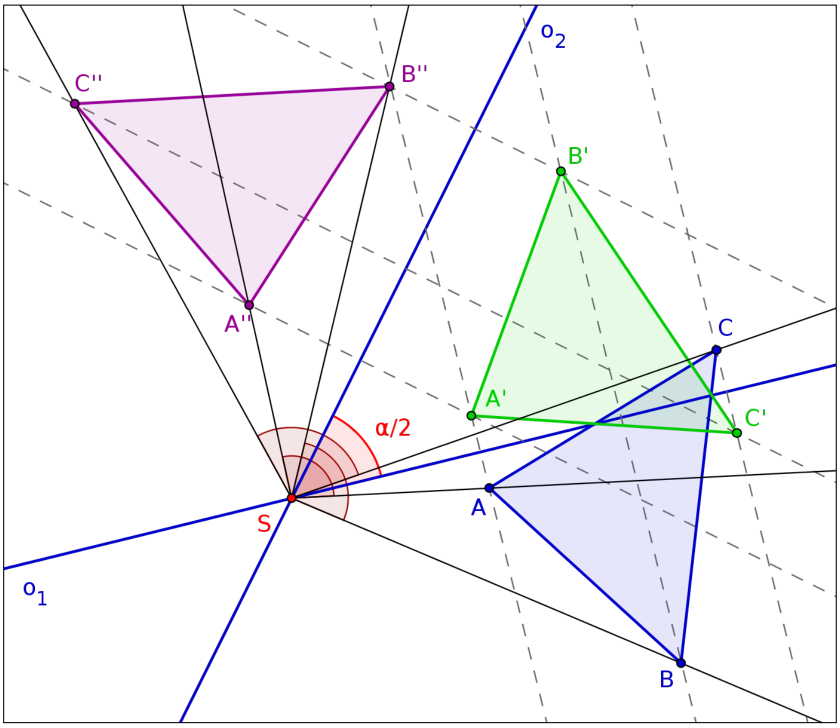
To, že mají oba vektory stejný směr, lze vidět z obrázku. Oba dva leží na kolmicích k osám souměrnosti, navíc musejí mít i stejnou orientaci – orientace je jednoznačně určená pořadím skládání daných osových souměrností. Že mají vektory stejnou velikost musíme spočítat. Vektor $A'' - A$ má velikost $2x$. Označme $|AQ_1| = |Q_1A'| = a$, $|A'Q_2| = |Q_2A''| = b$. Dohromady je $|AA''| = 2a + 2b$. Vzdálenost os o_1, o_2 je rovna x, tato vzdálenost je rovna vzdálenosti bodů Q_1Q_2, což je $|Q_1Q_2| = a + b$. Dohromady máme $|AA''| = 2a + 2b = 2x$.

Spočtěme velikost vektoru $B'' - B$. Označme $|BP_1| = |P_1B'| = d$, $|B'P_2| = |P_2B''| = d - x$. Velikost vektoru $B'' - B$ je rovna $|BP_1| + |P_1B''|$. Víme, že $|BP_1| = d$, vzdálenost $|P_1B''|$ spočítáme: $|P_1B''| = x - (d - x) = 2x - d$. Dohromady $|BB''| = |BP_1| + |P_1B''| = d + (2x - d) = 2x$.

Tím jsme ukázali, že složením daných dvou osových souměrností získáme posunutí. Pro opačné pořadí skládání je postup obdobný.

Otočení se středem v bodě S o orientovaný úhel α, $\alpha \neq k \cdot 180°$ pro $k \in \mathbb{Z}$, získáme složením dvou osových souměrností, určených různoběžnými osami o_1 a o_2 s průsečíkem ve středu otočení. Osy svírají úhel velikosti $\frac{\alpha}{2}$, viz obr. 3.8.

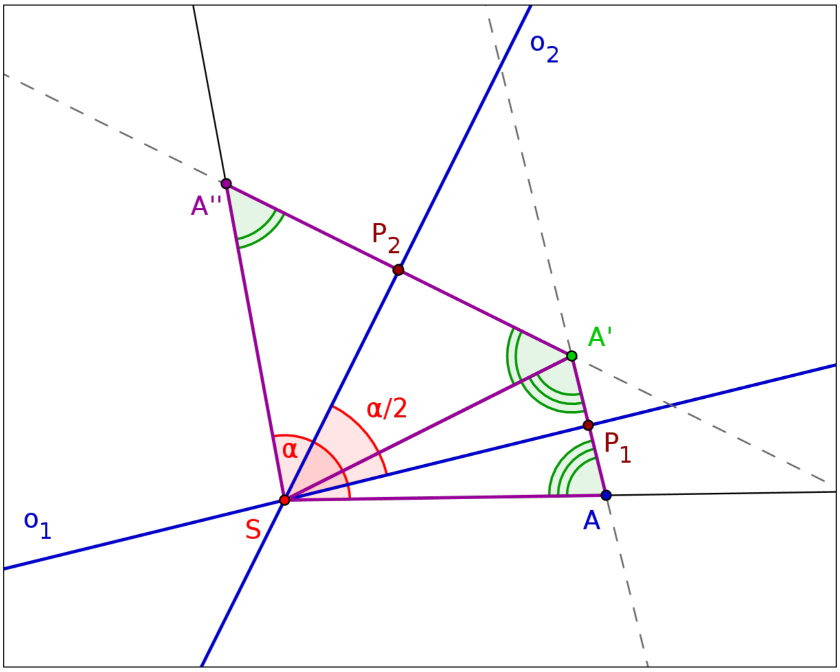
Poznámka. Orientaci úhlu α v otočení budeme v práci značit znaménkem. Například zápisu $\alpha = +45°$ budeme rozumět, že jde o otočení v kladném smyslu o 45°, naopak zápis $\alpha = -45°$ bude značit otočení o 45° v záporném smyslu, jak jsme zvyklí ze školy.



Obrázek 3.8: Otočení

Ověřme si, že lze získat otočení o orientovaný úhel α složením dvou výše popsaných osových souměrností. Předpokládejme, že se jedná o otočení o orientovaný úhel α v kladném smyslu otočení. Pro záporný smysl otočení bychom museli skládat osové souměrnosti v opačném pořadí.

Zvolme libovolně v rovině bod A, zobrazme ho v osové souměrnosti určené osou o_1, obraz A' poté zobrazme v osové souměrnosti určené osou o_2, viz obr. 3.9.



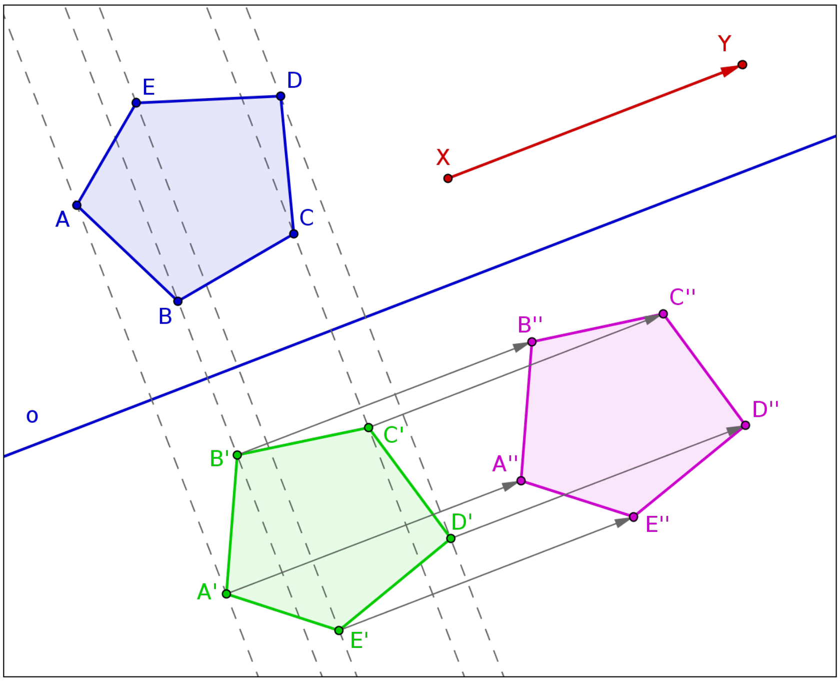
Obrázek 3.9: Otočení jako složení dvou osových souměrností

Podobně jako u středové souměrnosti, i zde získáme po zobrazení dva rovnoramenné trojúhelníky $A'SA$ a $A''SA'$. Protože SP_1 je výška v rovnoramenném trojúhelníku $A'SA$, platí $|\angle A'SP_1| = |\angle P_1SA|$. Podobně se pro trojúhelník $A''SA'$ ukáže, že $|\angle A''SP_2| = |\angle P_2SA'|$. Odtud je vidět, že pokud velikost úhlu P_1SP_2 (tedy úhlu, který svírají osy souměrností) je roven $\frac{\alpha}{2}$, pak je velikost úhlu ASA'' rovna α. Zároveň z vlastnosti rovnoramených trojúhelníků $A'SA$ a $A''SA'$ platí i $|AS| = |SA''|$.

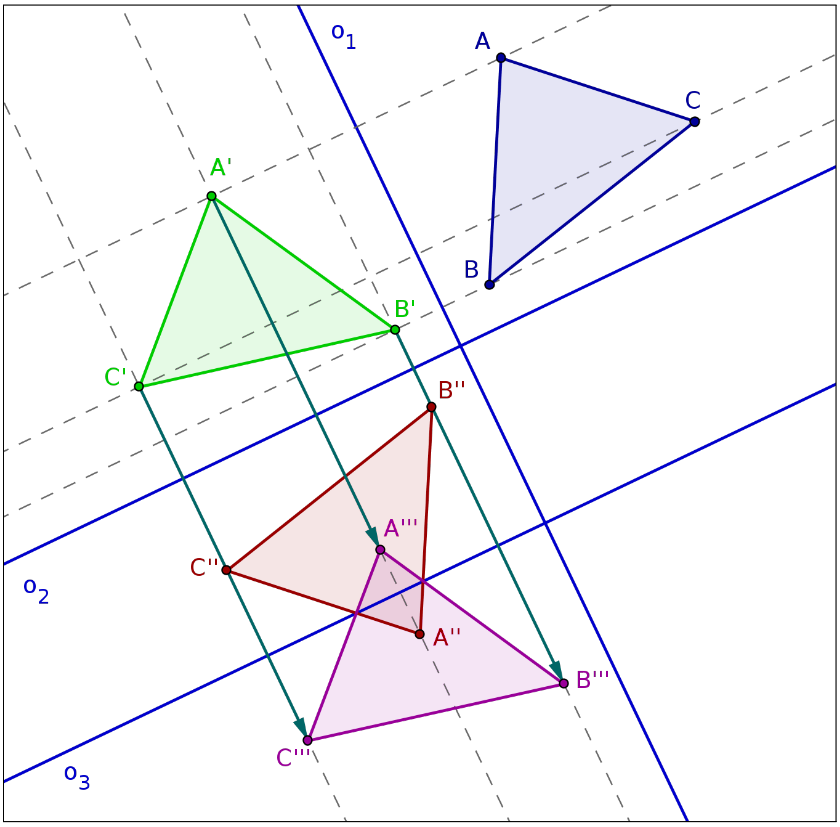
Tím jsme ukázali, jak získáme otočení o orientovaný úhel α pomocí složení dvou osových souměrností. Při opačném pořadí skládání osových souměrností bychom postupovali obdobně. I zde necháme postup na rozmyšlenou čtenáři.

Posunutá souměrnost je poslední shodné zobrazení v rovině, kterému budeme věnovat pozornost. Posunutá souměrnost je zobrazení, které vznikne složením osové souměrnosti a posunutí ve směru osy souměrnosti (viz obr. 3.10). Často se na posunutou souměrnost díváme jako na složené zobrazení a proto se většinou neuvádí v učebnicích v kapitole o shodných zobrazeních. My mu pozornost věnovat budeme, protože platí, že skládáním shodností nezískáme žádné jiné zobrazení, než jedno z následujících: identitu, středovou souměrnost, osovou souměrnost, posunutí, otočení, nebo posunutou souměrnost.

Protože víme, jak získáme posunutí pomocí dvou osových souměrností, je nám jasné, že i posunutá souměrnost půjde složit z osových souměrností – bude třeba složit tři osové souměrnosti. Dvě osy souměrností určující posunutí budou rovnoběžné a třetí osa určující osovou souměrnost k nim bude kolmá, viz obr. 3.11.

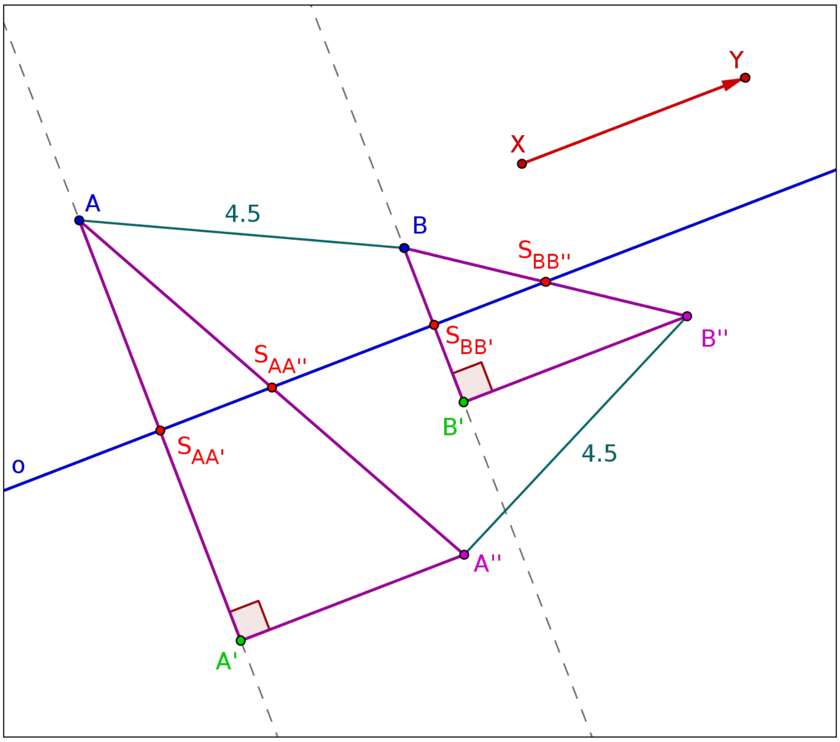


Obrázek 3.10: Posunutá souměrnost



Obrázek 3.11: Posunutá souměrnost jako složení tří osových souměrností

V následujícím appletu můžeme ověřit, že posunutá souměrnost je shodné zobrazení. Můžeme posouvat body A, B a sledovat, jak se mění obrazy bodů. Zároveň můžeme pozorovat, že vzdálenost bodů A, B se bude rovnat vzdálenosti bodů A'', B''. V appletu můžeme měnit i velikost vektoru $Y - X$.



Obrázek 3.12: Applet 2

Posunutá souměrnost je shodné zobrazení v rovině, které vznikne složením osové souměrnosti a posunutí ve směru osy souměrnosti. Je jednoznačně určena osou posunuté souměrnosti a vektorem posunuté souměrnosti.
Posunutá souměrnost s nenulovým vektorem posunuté souměrnosti nemá žádný samodružný bod. Posunutá souměrnost má jednu samodružnou přímku – osu posunuté souměrnosti.

3.1.1 Příklady

Příklad 1
Ukažte, že existují takové dvě osové souměrnosti, jejichž složením získáme středovou souměrnost se středem v počátku $P = [0; 0]$.

Řešení. Středová souměrnost je shodné zobrazení, analytický předpis shodného zobrazení je $X' = XA + B$. Určeme prvky matic A a B. Prvky matice B jsou souřadnice obrazu počátku, protože počátek je zároveň středem souměrnosti, je to samodružný bod zobrazení. Matice B je proto $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Abychom určili prvky matice A, potřebujeme znát souřadnice dvou různých bodů a jejich obrazů. Zvolme si například body $M = [1; 1]$, $N = [-1; 0]$. Jejich obrazy v dané středové souměrnosti zřejmě budou $M' = [-1; -1]$, $N' = [1; 0]$. Dosadíme do předpisu $X' = XA + B$ a vyřešíme soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -1 &= 1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21}, \\ -1 &= 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22}, \\ -1 &= 1 \cdot a_{11}, \\ 0 &= 1 \cdot a_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1, \\ a_{12} &= 0, \\ a_{21} &= 0, \\ a_{22} &= -1. \end{aligned}$$

Středová souměrnost má předpis

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že stejný předpis získáme i složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou na sebe kolmé a prochází počátkem. Zvolíme dvě takové osy, určíme analytické předpisy obou souměrností a ty pak složíme. Zvolme například osy x a y, ty obě prochází středem souměrnosti. Můžeme zvolit i libovolné jiné navzájem kolmé přímky, které prochází středem souměrnosti, ale s osami x a y se nám bude lépe počítat. Podobně jako u předpisu středové souměrnosti získáme i předpisy osových souměrností – zvolíme dva body, určíme jejich obrazy, dosadíme do předpisu $X' = X \cdot A + B$ a určíme prvky matic. Pro osovou souměrnost určenou osou x získáme předpis:

$$O_1 : \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pro osovou souměrnost určenou osou y získáme předpis:

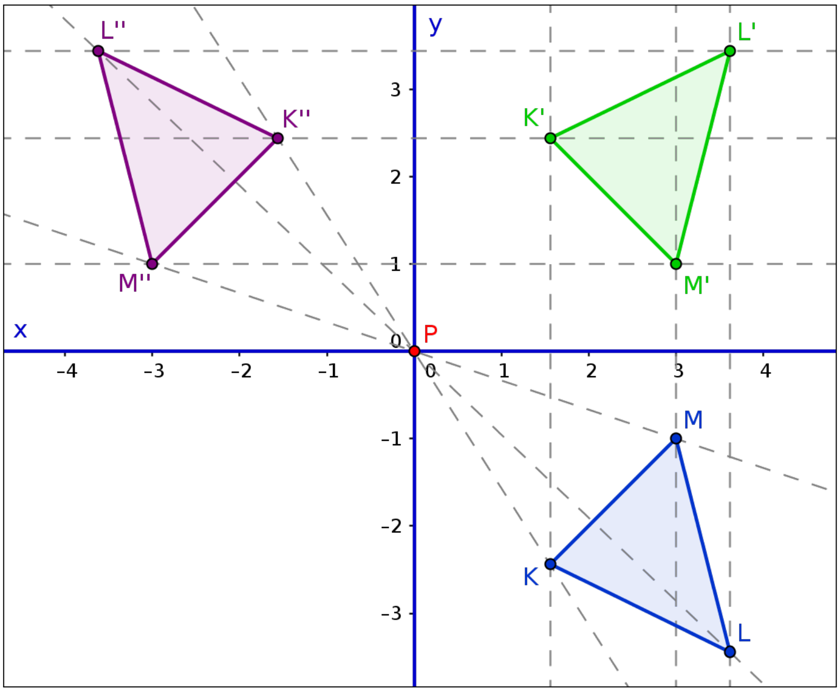
$$O_2 : \begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Složíme osové souměrnosti $O_2 \circ O_1$, tedy dosadíme do analytického vyjadření jedné osové souměrnnosti vyjádření druhé osové souměrnosti:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Porovnáme-li analytický předpis složeného zobrazení a analytický předpis středové souměrnosti, zjistíme, že jsme získali stejné předpisy. Tím jsme ukázali, že složením daných dvou osových souměrností opravdu získáme danou středovou souměrnost (viz obr. 3.13).

Poznámka. Prvky matice A v předpisu shodného zobrazení můžeme určit i jiným postupem. Stačí si uvědomit, že v řádcích matice A jsou souřadnice obrazů souřadnicových vektorů v daném zobrazení. Můžeme tedy prvky matice A určit i tak, že bychom si rozmysleli, na jaké vektory se v dané shodnosti zobrazí vektory $\vec{e}_1 = (1; 0)$ a $\vec{e}_2 = (0; 1)$.



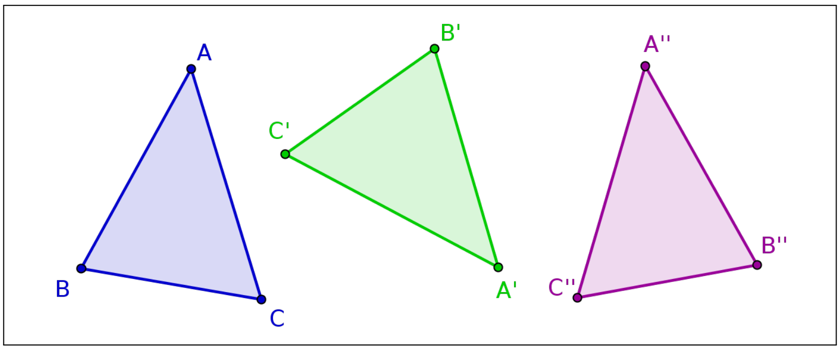
Obrázek 3.13: Skládání osových souměrností

3.2 Přímé a nepřímé shodnosti

Připomeňme si nejprve definici přímé a nepřímé shodnosti v rovině.

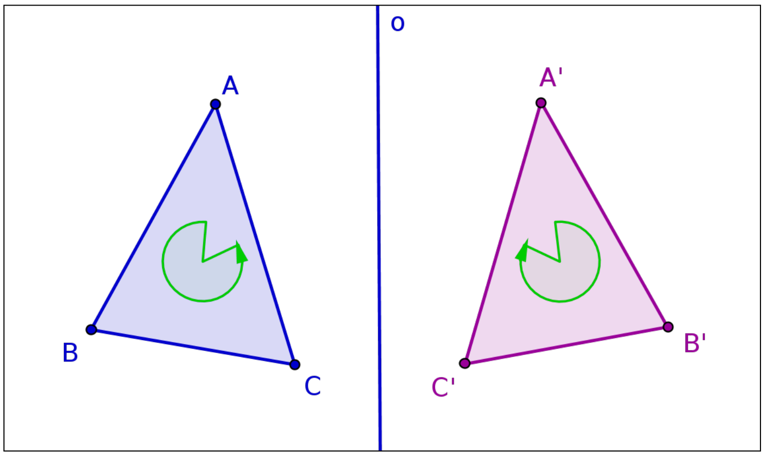
Definice. *Přímá shodnost je každá shodnost, ve které jsou libovolný trojúhelník a jeho obraz přímo shodné. Nepřímá shodnost je každá shodnost, ve které jsou libovolný trojúhelník a jeho obraz nepřímo shodné.*

Dva trojúhelníky jsou shodné, pokud je můžeme přemístit tak, že se kryjí. Jak rozlišíme přímou a nepřímou shodnost? Nejprve zvolíme pořadí čtení vrcholů vzoru, např. vrcholy trojúhelníka ABC čteme proti směru pohybu hodinových ručiček, od A přes B k C. Pak se zaměříme na obraz trojúhelníka. Vrcholy trojúhelníka $A'B'C'$ musíme číst také proti směru pohybu hodinových ručiček, abychom je přečetli ve stejném pořadí jako vrcholy vzoru trojúhelníka. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou přímo shodné. Naopak abychom přečetli vrcholy trojúhelníka $A''B''C''$ v daném pořadí, musíme číst vrcholy po směru pohybu hodinových ručiček. Trojúhelníky ABC a $A''B''C''$ jsou nepřímo shodné (obr. 3.14).



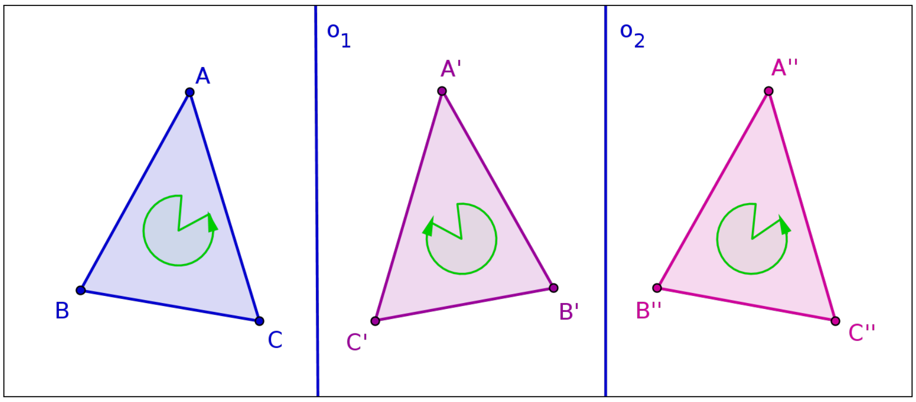
Obrázek 3.14: Shodnost trojúhelníků

V předchozí kapitole jsme uvedli, že osová souměrnost má speciální postavení oproti ostatním shodným zobrazením v rovině. Fakt, že každá shodnost je buď osová souměrnost, nebo ji lze složit z několika osových souměrností, dává zajímavý důsledek, i pokud jde o určení přímé a nepřímé shodnosti. Nejprve si rozmysleme, zda-li je osová souměrnost přímá nebo nepřímá shodnost, pomůže nám v tom následující obrázek (obr. 3.15).



Obrázek 3.15: Osová souměrnost je nepřímá shodnost

Z obrázku je patrné, že osová souměrnost je nepřímá shodnost – vrcholy trojúhelníka $A'B'C'$ musíme číst po směru hodinových ručiček, zatímco vrcholy trojúhelníka ABC musíme číst proti směru hodinových ručiček, abychom je přečetli ve stejném pořadí. Co se ale stane, pokud složíme dvě osové souměrnosti? První osová souměrnost vytvoří obraz nepřímo shodný se vzorem, druhá osová souměrnost nám vyrobí nepřímo shodný obraz obrazu. Dostamene tedy přímo shodný obraz (viz trojúhelníky ABC a $A''B''C''$ na obr. 3.16).



Obrázek 3.16: Skládání osových souměrností

V kontextu předchozí kapitoly jsme došli k závěru, že shodnost je přímá, pokud ji lze složit ze sudého počtu osových souměrností, nepřímá, pokud je složena z lichého počtu osových souměrností (tabulka 3.1).

Shodnost	*Složena z … osových souměrností*	*Klasifikace shodnosti*
Identita	2	přímá shodnost
Středová souměrnost	2	přímá shodnost
Osová souměrnost	1	nepřímá shodnost
Posunutí	2	přímá shodnost
Otočení	2	přímá shodnost
Posunutá souměrnost	3	nepřímá shodnost

Tabulka 3.1: Přímé a nepřímé shodnosti

3.3 Přímé a nepřímé shodnosti II

Zkusme se zamyslet, jestli bychom mohli z analytického předpisu shodného zobrazení určit, zda-li se jedná o přímou nebo nepřímou shodnost. Co zatím víme, je, že analytický předpis shodného zobrazení má tvar $X' = X \cdot A + B$, přičemž pro matici A musí platit $A \cdot A^T = E$. A právě omezující podmínka pro matici A by nás mohla dovést k něčemu zajímavému.
Označme si prvky matice A následovně:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dosaďme do vztahu $A \cdot A^T = E$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti matic získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 1, \\ c^2+d^2 &= 1, \\ ac+bd &= 0. \end{aligned}$$

V oboru reálných čísel známe funkce, jejíchž funkční hodnoty splňují danou soustavu rovnic – jsou to funkce $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$; vzoreček $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ je nám dobře znám. Zvolme tedy $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Pak máme dvě možnosti pro c a d: $c_1 = -\sin\alpha$, $d_1 = \cos\alpha$, nebo $c_2 = \sin\alpha$, $d_2 = -\cos\alpha$, aby byla splněna rovnost $ac + bd = 0$.
Získáme dvě možné matice A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ nebo } A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matice A_1 je typově matice

$$\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix},$$

kde $m, n \in \mathbb{R}$. Matice tohoto typu jsou matice *přímých shodností*.

Druhá matice A_2 je typově matice

$$\begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix},$$

kde $m, n \in \mathbb{R}$, což je typ matice *nepřímých shodností*.
Někdo by mohl namítnout, že bychom mohli zvolit např. $a = \sin\alpha$ a $b = \cos\alpha$, protože pak bude stále platit vztah $a^2 + b^2 = 1$. To je sice pravda, ale dospěli bychom typově ke stejným maticím.

3.4 Klasifikace shodností

V předchozí kapitole jsme zjistili, jak vypadají matice zobrazení přímých a nepřímých shodností. Jak nám to pomůže při klasifikaci shodností?

3.4.1 Přímé shodnosti

Přímé shodnosti v rovině mají analytický předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Zkusme vyšetřit samodružné body přímého shodného zobrazení. Dosaďme do předpisu $X \cdot (E - A) = B$:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Zbytek výpočtu můžeme rozdělit na dvě možnosti z hlediska množiny řešení. První možnost je $\cos\alpha = 1$ a druhá možnost je $\cos\alpha \neq 1$. Pokud $\cos\alpha = 1$ (a tedy $\sin\alpha = 0$), pak má předpis tvar

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

čímž se výrazně zjednoduší určení samodružných bodů. Pro nulovou matici B platí vztah pro libovolnou matici X, tj. pro libovolný bod. Každý bod zobrazení je samodružný (tím pádem je i každá přímka samodružná) a předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = X.$$

je předpisem *identity*.
Pokud matice B není nulová, pak vztah neplatí pro žádnou matici X. To znamená, že neexistuje žádný samodružný bod daného zobrazení. Když bychom chtěli vyšetřit i „kandidáty“ na směrové vektory samodružných přímek zobrazení, zjistili bychom, že každý nenulový vektor je možný „kandidát“. Jedná se tedy o posunutí.
Posunutí o nenulový vektor má předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = X + B,$$

kde $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$.

Druhou možností je, že $\cos\alpha \neq 1$. Při vyšetřování samodružných bodů bychom získali soustavu rovic, která má právě jedno řešení – tedy existuje právě jeden samodružný bod. To znamená, že se jedná o otočení nebo o středovou souměrnost. Předpokládejme, že máme otočení se středem v počátku o orientovaný úhel α, $\alpha \neq k \cdot 360°$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Analytický předpis daného otočení je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obraz bodu $X = [x; y]$ je $X' = [x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha; x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha]$. Zvolme bod $X \neq P$ a spočítejme skalární součin $(X - P) \circ (X' - P)$:

$$\begin{aligned} (X - P) \circ (X' - P) &= (x; y) \circ (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha; x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) = \\ &= x^2 \cdot \cos\alpha - x \cdot y \cdot \sin\alpha + x \cdot y \cdot \sin\alpha + y^2 \cdot \cos\alpha = \\ &= (x^2 + y^2) \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Protože velikost vektoru $X - P = (x; y)$ je rovna $\sqrt{x^2 + y^2}$, můžeme ještě výraz $(x^2 + y^2) \cdot \cos\alpha$ upravit:

$$(x^2 + y^2) \cdot \cos\alpha = |X - P|^2 \cdot \cos\alpha.$$

Navíc, neboť otočení je shodné zobrazení, platí: $|X - P| = |XP| = |X'P| = |X' - P|$. Odtud získáme

$$\begin{aligned} (X - P) \circ (X' - P) &= |X - P|^2 \cdot \cos\alpha = \\ &= |X - P| \cdot |X' - P| \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Pokud vyjádříme $\cos\alpha$, získáme

$$\cos\alpha = \frac{(X - P) \cdot (X' - P)}{|X - P| \cdot |X' - P|}.$$

Tento vzoreček také známe z hodin analytické geometrie, používáme ho pro určení odchylky dvou vektorů. Odvodili jsme tedy, že vektory $(X - P)$, $(X' - P)$ svírají úhel α. Spolu s faktem, že v řádcích matice A jsou obrazy souřadnicových vektorů, určíme, že se jedná o otočení o orientovaný úhel α. V následujícím obrázku (obr. 3.17) můžeme vidět, že souřadnice obrazů obou souřadnicových vektorů odpovídají řádkům matice A v otočení kolem počátku o orientovaný úhel $\alpha = +55°$. (Rozmyslete si, že opravdu souhlasí souřadnice vektoru e'_2.)
Otočení má předpis

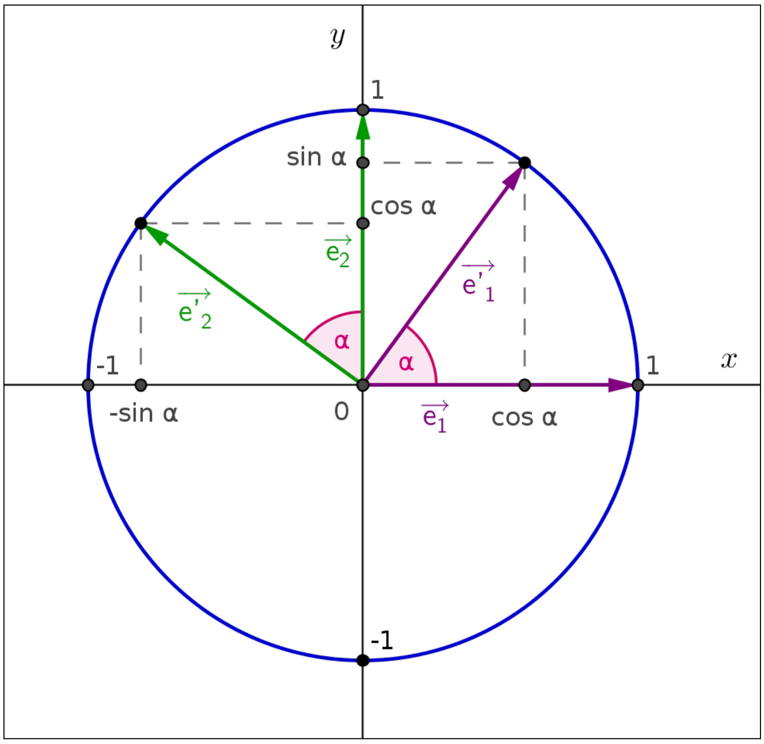
$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq k \cdot 360°$ pro $k \in \mathbb{Z}$ je úhel otočení. Například otočení o orientovaný úhel $\alpha = +90°$ kolem počátku má analytický předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otočení o orientovaný úhel α, kde $\alpha \neq k \cdot 360°$ pro $k \in \mathbb{Z}$, má vždy dané analytické vyjádření. Středová souměrnost je speciálním případem otočení o základní úhel velikosti 180°. *Středová souměrnost* má tedy předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 3.17: Obrazy souřadnicových vektorů

3.4.2 Nepřímé shodnosti

Nepřímé shodnosti v rovině mají analytický předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Pro nepřímé shodnosti neexistuje jednoduchý způsob, jak odlišit analytické vyjádření osové souměrnosti od analytického vyjádření posunuté souměrnosti. Musíme postupovat vyšetřením samodružných bodů. Osová souměrnost má množinu samodružných bodů, které tvoří přímku – osu souměrnosti. Posunutá souměrnost nemá žádný samodružný bod.

4. Příklady

4.1 Příklad 1

Určete obraz čtyřúhelníka $KLMN$, kde $K = [-2; 1]$, $L = [1; 3]$, $M = [0; 4]$, $N = [-3; 3]$, v posunutí určeném analytickým vyjádřením

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení

- Víme, že

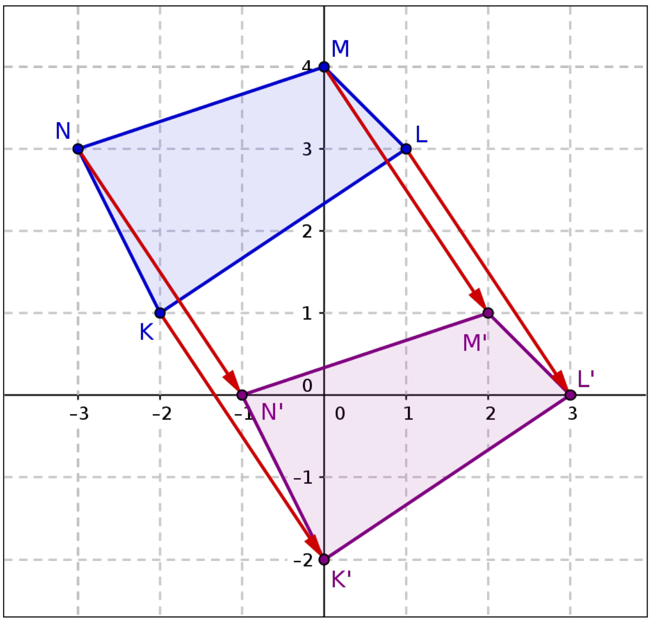
  $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},$$

  takže předpis zobrazení si můžeme zjednodušit:

  $$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

  Obraz čtyřúhelníka určíme tak, že určíme obraz jeho vrcholů. Z vlastností shodných zobrazení víme, že obrazem bude čtyřúhelník shodný se vzorem. Obraz vrcholů čtyřúhelníka zjistíme po dosazení do předpisu zobrazení. Bod $K = [-2; 1]$ se zobrazí na bod $K' = [0; -2]$:

  $$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4.1: Obraz čtyřúhelníka v daném posunutí

- Bod $L = [1; 3]$ se zobrazí na bod $L' = [3; 0]$:

  $$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bod $M = [0; 4]$ se zobrazí na bod $M' = [2; 1]$:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bod $N = [-3; 3]$ se zobrazí na bod $N' = [-1; 0]$:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Obraz čtyřúhelníka $KLMN$ je čtyřúhelník $K'L'M'N'$, kde $K' = [0; -2]$, $L' = [3; 0]$, $M' = [2; 1]$, $N' = [-1; 0]$.

  Pro kontrolu si můžeme zkonstruovat čtyřúhelník a jeho obraz v daném posunutí o vektor $\vec{u} = (2; -3)$ (obr. 4.1).

4.2 Příklad 2

Napište rovnice všech samodružných přímek posunutí určeného analytickým vyjádřením

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Máme napsat rovnice všech samodružných přímek posunutí. Víme, že samodružné přímky posunutí jsou všechny přímky rovnoběžné s vektorem posunutí. Vektor posunutí je jednoznačně určen vzorem a obrazem libovolného bodu. Nejvýhodnější je zvolit si počátek P, neboť souřadnice obrazu počátku jsou prvky matice B v předpisu zobrazení $X' = X \cdot A + B$, tedy $P' = [2; -3]$. Vektor posunutí je $P' - P = (2; -3)$. Abychom mohli napsat obecnou rovnici přímky, musíme znát normálový vektor přímky $\vec{n} = (3; 2)$. Samodružné přímky jsou všechny přímky tvaru $3x + 2y + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$.

4.3 Příklad 3

Ověřte, zda je předpis

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

předpisem shodného zobrazení. Pokud ano, určete o jaké shodné zobrazení se jedná.

Řešení

Aby byl předpis $X' = X \cdot A + B$ předpisem shodného zobrazení, musí pro matici A platit $A \cdot A^T = E$. Ověřme vztah:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A \cdot A^T = E$ neplatí, proto se nejedná o shodné zobrazení.

4.4 Příklad 4

Určete obraz přímky $p: y = \sqrt{3}x - 1$ v otočení určeném analytickým vyjádřením

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

určete střed a úhel otočení.

Řešení

- Přímka je jednoznačně určena dvěma svými body, zvolme si dva různé body na přímce p a určeme jejich obrazy. Zvolme například body $Q = [0; 2]$ a $R = [\sqrt{3}; 5]$. Obrazy bodů získáme po dosazení do analytického předpisu otočení. Dosadíme bod $Q = [0; 2]$:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

získáme souřadnice obrazu Q':

$$\begin{aligned} x' &= 0 \cdot \Big(-\frac{1}{2} \Big) + 2 \cdot \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} \Big) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' &= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \Big(-\frac{1}{2} \Big) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

tedy $Q' = \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \Big]$.

- Podobně dosadíme bod $R = [\sqrt{3}; 5]$:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

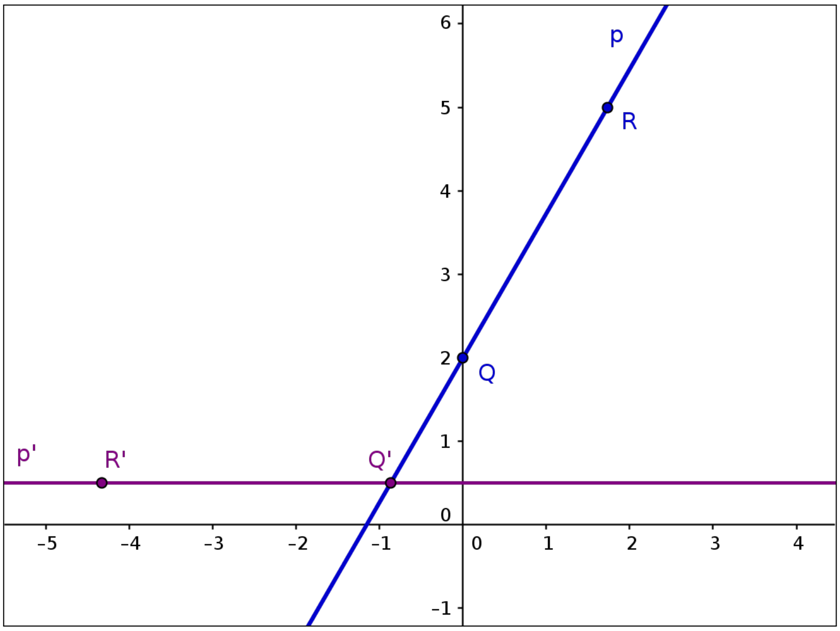
$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{3} \cdot \Big(-\frac{1}{2} \Big) + 5 \cdot \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} \Big) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}, \\ y' &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \Big(-\frac{1}{2} \Big) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

obraz bodu R je $R' = \Big[-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \Big]$.

- Máme dva body, které leží na obrazu p' přímky p, můžeme napsat rovnici přímky p'. Z bodů Q', R' je rovnice přímky hned vidět, neboť body mají stejnou y-ovou souřadnici (obr. 4.2). Jde tedy o přímku $p': y = \frac{1}{2}$.

- Střed otočení je jediný samodružný bod otočení (z obrazu přímky p již víme, že se nejedná o identitu). Pro samodružný bod platí, že $X' = X$ a $X' = X \cdot A + B$, odtud $X(E - A) = B$. Dosaďme:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4.2: Obraz přímky v daném otočení

Získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, vyřešením dostamene souřadnice samodružného bodu:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad / \cdot \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y &= \frac{3}{2}, \quad / \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}y + \frac{9}{2}y &= \frac{3}{2} + \frac{9}{2}, \\ 12y &= 12, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Dopočítáme x-ovou souřadnici dosazením do první rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Střed otočení je $S = [0; 1]$.

- Úhel otočení můžeme získat přímo z analytického vyjádření otočení. Víme, že $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, odtud $\alpha = +120\,°$.

4.5 Příklad 5

Určete analytické vyjádření středové souměrnosti, ve které se trojúhelník KLM, $K = [0; 4]$, $L = [-2; 3]$, $M = [2; 2]$ zobrazí na trojúhelník $K'L'M'$ s vrcholy $K' = [-2; 2]$, $L' = [0; 3]$, $M' = [-4; 4]$.

Řešení

- Analytické vyjádření středové souměrnosti má tvar

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

  kde b_1,b_2 jsou souřadnice obrazu počátku. Musíme tedy určit čísela b_1,b_2.

- Souřadnice obrazu počátku získáme dosazením libovolného bodu a jeho obrazu do analytického vyjádření. Dosaďme například souřadnice bodů K a K':

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

  Sestavme soustavu rovnic a tu vyřešme:

$$\begin{aligned} -2 &= 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + b_1, \\ 2 &= 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + b_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -2, \\ b_2 &= 6. \end{aligned}$$

- Středová souměrnost má analytické vyjádření

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.6 Příklad 6

Určete analytické vyjádření shodnosti, ve které se čtyřúhelník $KLMN$ s vrcholy $K = [1; 2]$, $L = [2; -2]$, $M = [4; -1]$, $N = [4; 3]$ zobrazí na čtyřúhelník $K'L'M'N'$, kde $K' = [0; 3]$, $L' = [-4; 4]$, $M' = [-3; 6]$, $N' = [1; 6]$.

Řešení

- Analytický předpis shodného zobrazení má tvar

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}.$$

  Musíme určit hodnoty neznámých a, b, c, d, e, f.

- Hodnoty neznámých určíme tak, že dosadíme do předpisu souřadnice bodů a jejich obrazů, získáme soustavu rovnic a tu vyřešíme. Dosazením souřadnic libovolné dvojice bod – obraz získáme soustavu dvou rovnic o šesti neznámých. Abychom mohli určit hodnoty všech neznámých, musíme dosadit do předpisu tři vrcholy a jejich obrazy. Dostaneme tak soustavu šesti rovnic o šesti neznámých. Dosaďme například souřadnice bodů $K = [1; 2]$, $L = [2; -2]$, $M = [4; -1]$ a jejich obrazů:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sestavme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
0 &= a + 2c + e, \\
3 &= b + 2d + f, \\
-4 &= 2a - 2c + e, \\
4 &= 2b - 2d + f, \\
-3 &= 4a - c + e, \\
6 &= 4b - d + f.
\end{aligned}
$$

Soustavu si rozdělíme na dvě dílčí soustavy, neboť každá z rovnic obsahuje buď neznámé a, c, e, nebo neznámé b, d, f:

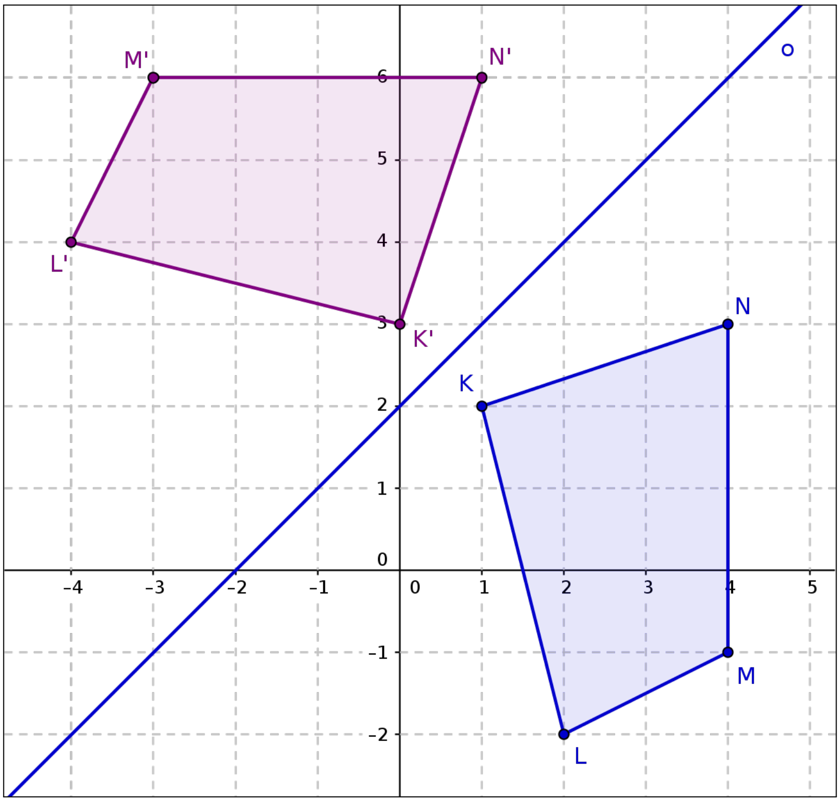
$$
\begin{aligned}
0 &= a + 2c + e, & 3 &= b + 2d + f, \\
-4 &= 2a - 2c + e, & 4 &= 2b - 2d + f, \\
-3 &= 4a - c + e, & 6 &= 4b - d + f.
\end{aligned}
$$

Každou soustavu vyřešme zvlášť. Z první soustavy získáme řešení $a = 0$, $c = 1$, $e = -2$, z druhé soustavy získáme řešení $b = 1$, $d = 0$, $f = 2$.

- Shodné zobrazení, ve kterém se čtyřúhelník čtyřúhelník $KLMN$ zobrazí na čtyřúhelník $K'L'M'N'$, má analytické vyjádření

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Zkusme se ještě zamyslet, o jaké zobrazení se jedná. Nakreslíme-li si obrázek, dojdeme k závěru, že se jedná o osovou souměrnost. Ověřme předpoklad na základě našich znalosti o analytickém vyjádření shodností. Z tvaru matice A určíme, že se jedná o nepřímou shodnost. Jde buďto o osovou souměrnost nebo o posunutou souměrnost. Vyšetřením množiny samodružných bodů daného zobrazení získáme přímku samodružných bodů – osu souměrnosti $y = x + 2$.



Obrázek 4.3: Osová souměrnost

4.7 Příklad 7

Určete obraz kružnice $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$ v otočení se středem $S = [-1; 1]$ o orientovaný úhel $\alpha = -60\,°$.

Řešení

- Abychom mohli určit obraz kružnice, musíme znát analytické vyjádření daného otočení. Z kapitoly o klasifikaci shodností víme, jak vypadá analytické vyjádření otočení:

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

  kde α je úhel otočení a b_1,b_2 jsou souřadnice obrazu počátku.

- Dosaďme do předpisu hodnotu $\alpha = -60\,°$:

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

  Souřadnice obrazu počátku získáme dosazením libovolného bodu a jeho obrazu. Jediný zadaný bod, o kterém víme, kam se zobrazí, aniž bychom museli počítat souřadnice obrazu bodu, je střed otočení (jediný samodružný bod daného otočení). Dosadíme do vyjádření střed otočení $S = S' = [-1; 1]$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

sestavme soustavu rovnic a vyřešme ji:

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + b_1, \\ 1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + b_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \\ b_2 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Analytické vyjádření daného otočení je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

- Předpis obrazu kružnice získáme tak, že určíme obraz středu kružnice v daném zobrazení. Poloměr kružnice se otočením nezmění, protože otočení je shodné zobrazení a zachovává tedy vzdálenosti bodů. Určeme obraz středu kružnice. Střed kružnice je bod $S_k = [-2; 2]$. Obraz středu kružnice získáme dosazením do analytického vyjádření otočení:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Sestavme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \\ y' &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{3}-3}{2}, \\ y' &= \frac{\sqrt{3}+3}{2}. \end{aligned}$$

Střed kružnice S_k se zobrazí na bod $S'_k = \left[\frac{\sqrt{3}-3}{2}; \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right]$.

- Obrazem kružnice $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$ je kružnice

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)^2 = 9.$$

4.8 Příklad 8

Shodné zobrazení je dáno analytickým vyjádřením

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete, o jaké zobrazení se jedná. Vyšetřete samodružné body a samodružné přímky daného zobrazení.

Řešení

- Z tvaru matice A analytického vyjádření $X' = X \cdot A + B$ zobrazení poznáme, že se jedná o nepřímou shodnost, tedy v úvahu přichází osová souměrnost nebo posunutá souměrnost. Jak rozlišíme, o jaké zobrazení jde? Vyšetříme množinu všech samodružných bodů zobrazení. Osová souměrnost má samodružné body – body osy souměrnosti, zatímco posunutá souměrnost nemá žádný samodružný bod.

- Zaměřme se nejprve na samodružné body daného zobrazení. Víme, že samodružné body musí splňovat rovnici $X \cdot (E - A) = B$. Dosaďme do rovnice prvky matic A a B:

  $$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Sestavme soustavu rovnic:

  $$\begin{aligned} 1 \cdot x + 1 \cdot y &= 3, \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y &= -1. \end{aligned}$$

  Soustava zřejmě nemá řešení, zobrazení nemá žádné samodružné body.

- Protože zobrazení nemá žádný samodružný bod, můžeme říci, že se jedná o posunutou souměrnost. Jedinou samodružnou přímkou posunuté souměrnosti je osa posunuté souměrnosti. Pojďme ji nalézt.

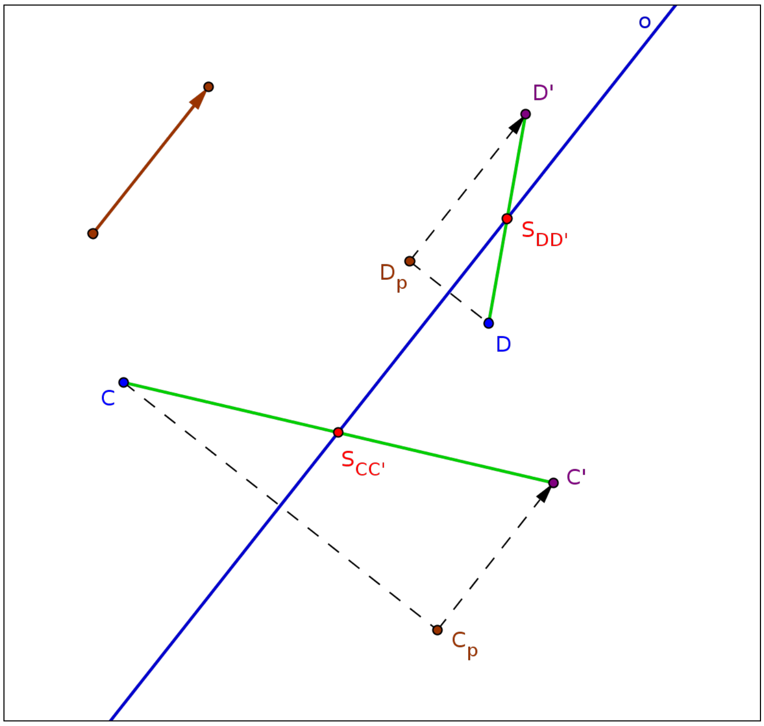
  Při vyšetřování samodružných přímek jsme hledali „kandidáty“ směrových vektorů samodružných přímek. Podívejme se, jaké „kandidáty“ vyšetřením v tomto případě získáme. Vyjděme ze vztahu $\vec{u} \cdot (A - k \cdot E) = O$, ze kterého jsme „kandidáty“ směrových vektorů samodružných přímek určovali:

  $$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - k & -1 \\ -1 & 0 - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Dosaďme hodnoty $k = 1$ a $k = -1$ a sestavme příslušné soustavy rovnic:

  $$\begin{aligned} u_1 \cdot (-1) + u_2 \cdot (-1) &= 0, \qquad & u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot (-1) &= 0, \\ u_1 \cdot (-1) + u_2 \cdot (-1) &= 0, \qquad & u_1 \cdot (-1) + u_2 \cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

  Vyřešením soustav získáme vektory $s \cdot (1; 1)$ a $t \cdot (1; -1)$, kde $s,t \in \mathbb{R}$. Opět můžeme zvolit libovolné reprezentanty, například vektory $\vec{u} = (1; 1)$ a $\vec{v} = (1; -1)$. Zbývá určit, který z vektorů určuje osu posunuté souměrnosti. Zamysleme se, jak bychom na to mohli přijít. Nakresleme si náčrtek situace (obr. 4.4).



Obrázek 4.4: Určení osy posunuté souměrnosti

- Zobrazíme-li v posunuté souměrnosti dva různé body C, D, pak středy $S_{CC'}$, $S_{DD'}$ úseček CC', DD' leží na ose posunuté souměrnosti, kde C', D' jsou obrazy bodů C, D. To plyne přímo z podobnosti trojúhelníků CC_pC' a $CS_{CC_p}S_{CC'}$. Trojúhelník CC_pC' je podobný trojúhelníku $CS_{CC_p}S_{CC'}$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$. Pokud známe dva body $S_{CC'}$, $S_{DD'}$ ležící na přímce, jsme schopni napsat její analytické vyjádření, například obecnou rovnici přímky.
  Zvolme tedy dva různé body $P = [0; 0]$, $Y = [1; 2]$, dosaďme je do analytického vyjádření dané posunututé souměrnosti a určeme jejich obrazy. Ve skutečnosti stačí dosadit pouze bod Y, neboť souřadnice obrazu počátku jsou napsány v matici B.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

  Získáme obrazy $P' = [3; -1]$, $Y' = [1; -2]$. Středy $S_{PP'}$, $S_{YY'}$ úseček PP', YY' jsou $S_{PP'} = \left[\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$, $S_{YY'} = [1; 0]$. Směrový vektor osy souměrnosti je $S_{PP'} - S_{YY'} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1; -1)$. Známe bod na přímce a známe její směrový vektor $(1; -1)$, můžeme napsat obecnou rovnici. Určeme normálový vektor osy souměrnosti $\vec{n} = (1; 1)$, dosaďme do předpisu pro obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$:

$$x + y + c = 0.$$

  Dosaďme bod na přímce, například bod $S_{YY'} = [1; 0]$, a dopočítejme c:

$$\begin{aligned} 1 + 0 + c &= 0, \\ c &= -1. \end{aligned}$$

Obecná rovnice osy posunuté souměrnosti, jediné samodružné přímky dané posunuté souměrnosti, je $x + y - 1 = 0$.

4.9 Příklad 9

Ověřte, zda je předpis

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

analytickým vyjádřením shodného zobrazení. Pokud ano, určete o jaké shodné zobrazení se jedná.

Řešení

- Aby byl předpis $X' = X \cdot A + B$ předpisem shodného zobrazení, musí pro matici A platit $A \cdot A^T = E$. Ověřme vztah:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} + \frac{2}{4} & \frac{2}{4} - \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} - \frac{2}{4} & \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Vztah platí, jde o předpis shodného zobrazení.

- Z tvaru matice A poznáme, že se jedná o přímou shodnost, tedy v úvahu přichází identita, středová souměrnost, otočení, nebo posunutí. Z těchto možností můžeme hned vyloučit identitu, středovou souměrnosti i posunutí, neboť prvky matice A neodpovídají těmto zobrazením. Jedná se tedy o otočení.

- Otočení je určeno středem a úhlem otočení. Úhel otočení lze získat z prvků matice A. Z kapitoly o klasifikaci shodností víme, že úhel otočení α se dá vyjádřit například jako $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Odtud určíme, že $\alpha = 135\,°$.
  Střed otočení je jediný samodružný bod otočení. Určíme ho vyšetřením samodružných bodů zobrazení. Dosaďme do vztahu $X \cdot (E - A) = B$ pro určení samodružných bodů:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

  Sestavme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \\ x \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

  Vyřešením soustavy získáme souřadnice x, y samodružného bodu (středu otočení) $S = [1; 0]$.

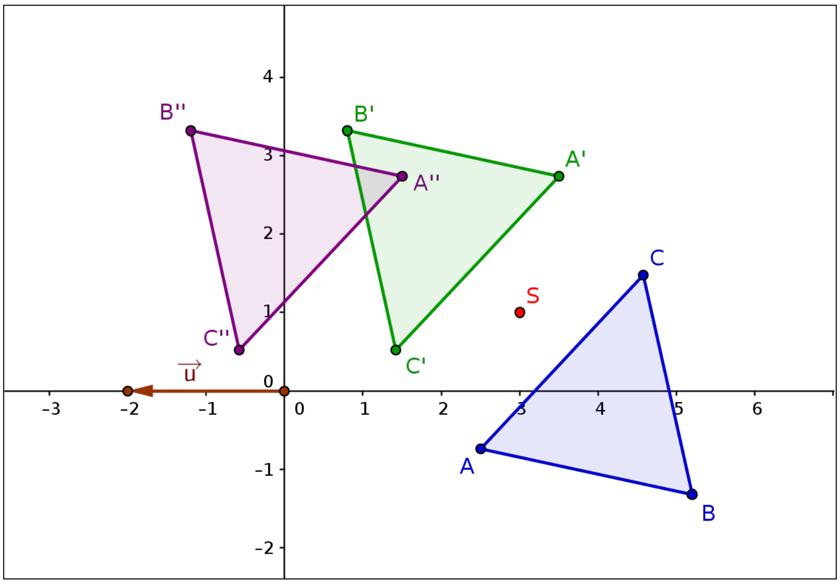
- Analytické vyjádření

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

je předpisem otočení kolem středu $S = [1; 0]$ o úhel $\alpha = +135\,°$.

4.10 Příklad 10

Určete zobrazení, které získáme složením středové souměrnosti se středem $S = [3; 1]$ a posunutí určeném vektorem $\vec{u} = (-2; 0)$ v daném pořadí.



Obrázek 4.5: Skládání středové souměrnosti a posunutí

Řešení

- Nejprve musíme určit analytický předpis složeného zobrazení. Ten určíme složením analytických vyjádření daných zobrazení. Analytický předpis středové souměrnosti je $X' = X \cdot A + B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a v matici B jsou souřadnice obrazu počátku. Počátek $P = [0; 0]$ se ve středové souměrnosti se středem $S = [3; 1]$ zobrazí na bod $P' = [6; 2]$. Analytické vyjádření středové souměrnosti je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analytický předpis posunutí o vektor $\vec{u} = (-2; 0)$ je

$$X'' = X' + \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Složením středové souměrnosti a posunutí získáme analytický předpis složeného zobrazení:

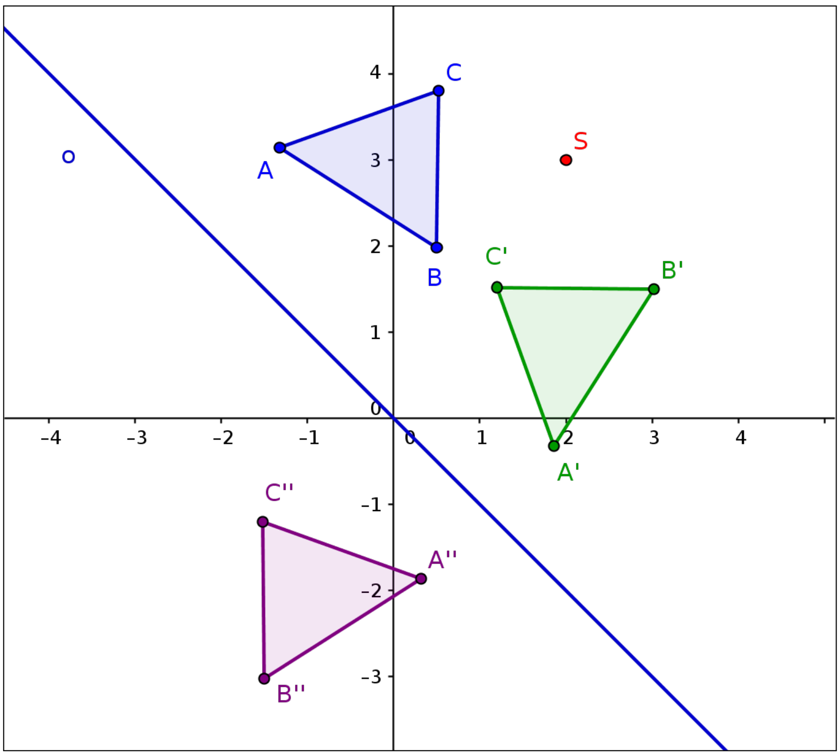
$$\begin{aligned} X'' &= X' + \begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix} = \\ &= \left[X \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6 & 2\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix} = \\ &= X \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Z analytického vyjádření složeného zobrazení, konkrétně z tvaru matice A, určíme, že se jedná o středovou souměrnost. Střed souměrnosti můžeme získat buďto vyšetřením samodružných bodů zobrazení, nebo to lze vyčíst z prvků matice B. Aby se počátek $P = [0; 0]$ zobrazil na bod $P' = [4; 2]$, musí být střed souměrnosti v bodě $[2; 1]$.

- Složením středové souměrnosti se středem $S = [3; 1]$ a posunutí určeném vektorem $\vec{u} = (-2; 0)$ získáme středovou souměrnost se středem v bodě $[2; 1]$.

4.11 Příklad 11

Určete zobrazení, které získáme složením osové souměrnosti určené osou $o : y = -x$ a otočení se středem $S = [2; 3]$ o úhel $\alpha = +90°$.



Obrázek 4.6: Skládání osové souměrnosti a otočení

Řešení

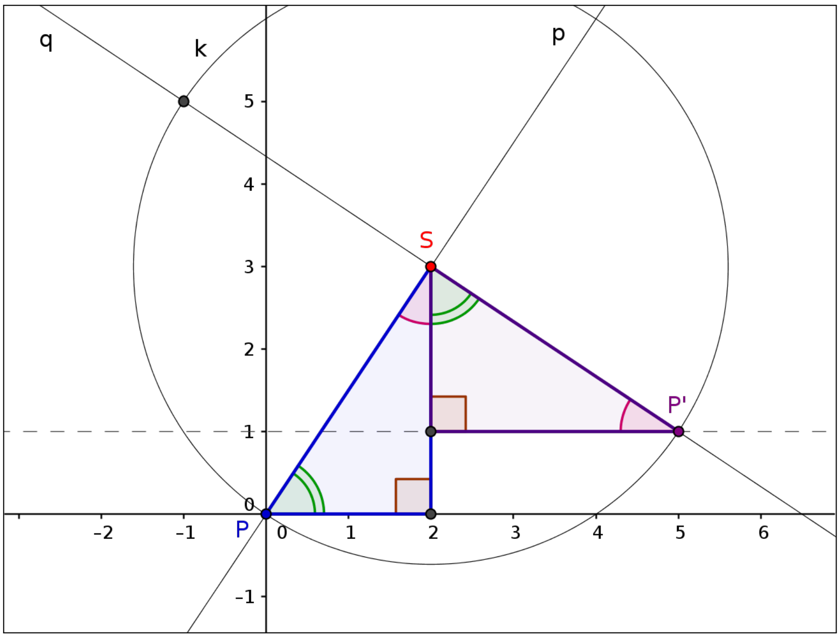
- Nejprve musíme určit analytický předpis složeného zobrazení. Určíme ho složením analytických vyjádření daných zobrazení. Analytický předpis osové souměrnosti určené osou $o: y = -x$ je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analytický předpis otočení se středem $S = [2; 3]$ o úhel $\alpha = +90^\circ$ je

$$X'' = X' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

kde b_1, b_2 jsou souřadnice obrazu počátku. Počátek $P = [0; 0]$ se v daném otočení zobrazí na bod $P' = [5; 1]$. Patrně nejjednodušší způsob, jak přijít na souřadnice obrazu počátku,je přes dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, viz obr. 4.7. Pokud bychom chtěli na souřadnice přijít analytickou cestou, stačilo by určit rovnici přímky q a rovnici kružnice k s poloměrem $|SP|$ cm a spočítat průsečíky kružnice a přímky. Úvahou nebo z obrázku (obr. 4.7) bychom určili, že obraz počátku je průsečík $P' = [5; 1]$.



Obrázek 4.7: Určení obrazu počátku v otočení

Analytický předpis daného otočení je

$$X'' = X' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Analytický předpis složeného zobrazení je:

$$\begin{aligned} X'' &= X' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Z tvaru matice A určíme, že se jedná o nepřímou shodnost. Možnosti jsou osová souměrnost nebo posunutá souměrnost. Zda-li se jedná o osovou nebo posunutou souměrnost určíme tak, že vyšetříme samodružné body zobrazení. Osová souměrnost má samodružné body, které tvoří osu souměrnosti, posunutá souměrnost nemá žádné samodružné body.
  Samodružné body daného zobrazení musí splňovat rovnici $X \cdot (E - A) = B$, dosaďme a vypočítejme samodružné body:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 5, \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y &= 1. \end{aligned}$$

  Soustava rovnic nemá řešení, tedy neexistuje žádný samodružný bod zobrazení. Odtud plyne, že se jedná o posunutou souměrnost.

4.12 Příklad 12

Určete zobrazení, které získáme složením $O_4 \circ O_3 \circ O_2 \circ O_1$ čtyř osových souměrností O_1, O_2, O_3, O_4. První osová souměrnost O_1 je určená osou $o_1 : y = 1$, druhá souměrnost O_2 je určená osou $o_2 : x = -1$, třetí souměrnost O_3 je určená osou $o_3 : y = x + 2$ a čtvrtá osová souměrnost O_4 je dána osou $o_4 : y = -x$.

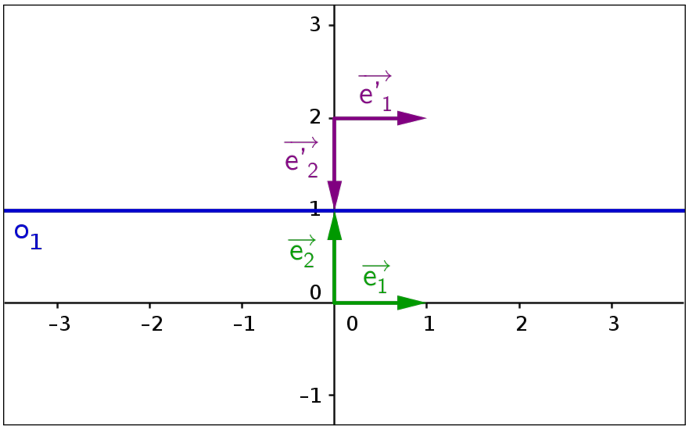
Řešení

- Nejprve musíme určit analytický předpis $O_4 \circ O_3 \circ O_2 \circ O_1$ složeného zobrazení. K tomu budeme potřebovat analytické předpisy jednotlivých osových souměrností.

- Určeme analytický předpis $X' = X \cdot A_1 + B_1$ osové souměrnosti určené osou $o_1 : y = 1$. Osová souměrnost je nepřímá shodnost, má analytický předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ n & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

  Obraz počátku $P = [0; 0]$ v dané souměrnosti je $P' = [0; 2]$. Zbývá určit hodnoty m a n. Víme, že v řádcích matice A_1 jsou souřadnice obrazů souřadnicových vektorů. Zamysleme se, jak se zobrazí v dané souměrnosti souřadnicové vektory (obr. 4.8).



Obrázek 4.8: Obraz souřadnicových vektorů v osové souměrnosti

Vektor $\vec{e_1} = (1;0)$ se zobrazí na vektor $\vec{e_1'} = (1;0)$, vektor $\vec{e_2} = (0;1)$ se zobrazí na vektor $\vec{e_2'} = (0;-1)$. Analytické vyjádření osové souměrnosti O_1 určené osou $o_1 : y = 1$ je:

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Podobně určíme analytická vyjádření ostatních osových souměrností:

$$\begin{aligned}
O_2 &: X'' = X' \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}, \\
O_3 &: X''' = X'' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}, \\
O_4 &: X'''' = X''' \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- Určeme analytický předpis složeného zobrazení

$$O_4 \circ O_3 \circ O_2 \circ O_1 = O_4(O_3(O_2(O_1(X)))).$$

Pro větší přehlednost si to nejprve zapišme symbolicky:

$$\begin{aligned}
O_1 &: X' = X \cdot A_1 + B_1, \\
O_2 &: X'' = X' \cdot A_2 + B_2, \\
O_3 &: X''' = X'' \cdot A_3 + B_3, \\
O_4 &: X'''' = X''' \cdot A_4 + B_4.
\end{aligned}$$

Analytický předpis složeného zobrazení je

$$X'''' = (((X \cdot A_1 + B_1) \cdot A_2 + B_2) \cdot A_3 + B_3) \cdot A_4 + B_4.$$

Zkusme postupně dopočítat analytické vyjádření shodného zobrazení:

$$\begin{aligned}
X'''' &= X''' \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \left[X'' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= X'' \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= X'' \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

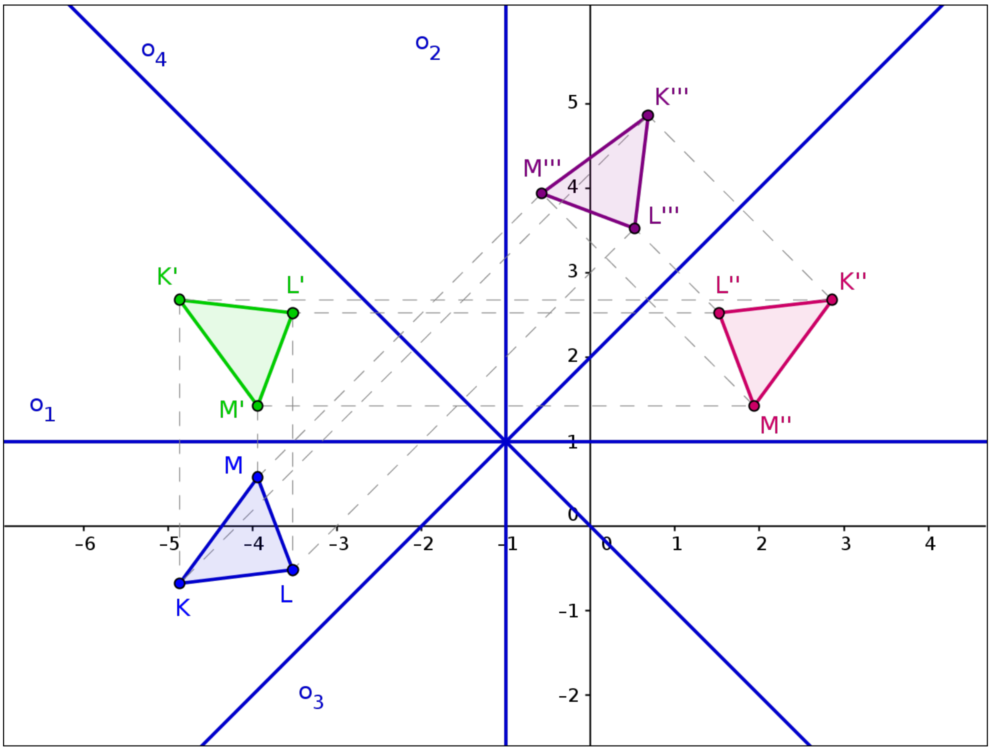
Dosaďme za X'' analytické vyjádření osové souměrnosti O_2 a upravme:

$$\begin{aligned}
X'''' &= X'' \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \left[X' \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= X' \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= X' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= X' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A konečně dosaďme za X' analytické vyjádření osové souměrnosti O_1:

$$\begin{aligned}
X'''' &= X' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \left[X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X.
\end{aligned}$$

- Zobrazení, které vznikne složením daných osových souměrností v daném pořadí, je identita (obr. 4.9).



Obrázek 4.9: Složení daných osových souměrností

5. Úlohy na procvičení

5.1 Úloha 1

Určete obraz trojúhelníka KLM, kde $K = [-3; 5]$, $L = [-5; 2]$, $M = [1; 3]$, ve středové souměrnosti určené analytickým vyjádřením

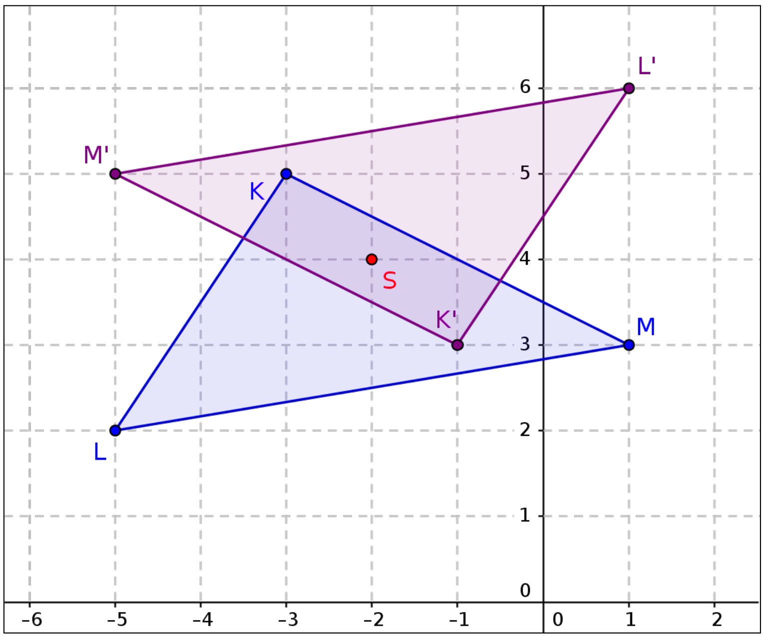
$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nápověda

Postupně dosadit do analytického vyjádření body K,L,M.

Řešení

Obrazem trojúhelníka KLM je shodný trojúhelník $K'L'M'$, $K' = [-1; 3]$, $L' = [1; 6]$, $M' = [-5; 5]$ (obr. 5.1).



Obrázek 5.1: Obraz trojúhelníka ve středové souměrnosti

5.2 Úloha 2

Ověřte, zda je předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

analytickým vyjádřením shodného zobrazení. Pokud ano, určete o jaké shodné zobrazení se jedná.

Nápověda

- Pro zobrazení s analytickým vyjádřením $X' = X \cdot A + B$ ověřit podmínku $A \cdot A^T = E$.
- Vyšetřit samodružné body a samodružné přímky zobrazení.

Řešení

Neplatí podmínka $A \cdot A^T = E$, proto se nejedná o analytické vyjádření shodného zobrazení.

5.3 Úloha 3

Ověřte, zda je předpis

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$$

analytickým vyjádřením shodného zobrazení. Pokud ano, určete o jaké shodné zobrazení se jedná.

Nápověda

- Pro zobrazení s analytickým vyjádřením $X' = X \cdot A + B$ ověřit podmínku $A \cdot A^T = E$.
- Vyšetřit samodružné body a samodružné přímky zobrazení.

Řešení

Dané analytické vyjádření je vyjádřením osové souměrnosti určené osou $x = 2$.

5.4 Úloha 4

Napište rovnice všech samodružných přímek shodného zobrazení určeného analytickým vyjádřením

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nápověda

- Klasifikujeme shodné zobrazení – určíme samodružné body a vyšetříme „kandidáty“ na směrové vektory samodružných přímek.
- Napíšeme obecné rovnice samodružných přímek.

Řešení

Jedná se o středovou souměrnost se středem v bodě $S = [\frac{3}{2}; -1]$. Samodružné přímky středové souměrnosti jsou všechny přímky, které prochází středem souměrnosti, bodem S. Obecné rovnice samodružných přímek jsou

$$a \cdot x + b \cdot y + \left(b - \frac{3}{2} \cdot a\right) = 0,$$

kde $a,b \in \mathbb{R}$, $(a; b) \neq (0; 0)$.

5.5 Úloha 5

Určete obraz přímky $p: y = 3x + \frac{1}{2}$ v posunutí určeném vektorem $(1; -3)$.

Nápověda

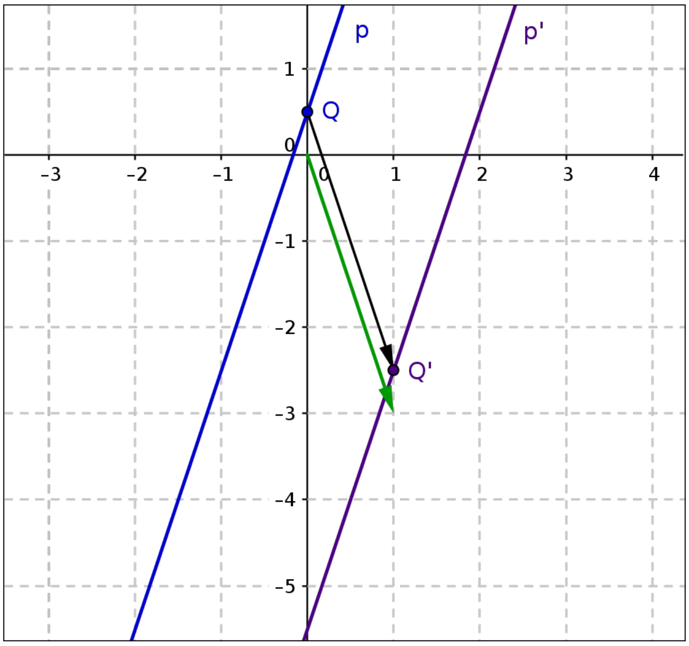
- Přímka p se v posunutí zobrazí na rovnoběžnou přímku p', proto budou mít obě přímky stejný směrový vektor. Stačí tedy dopočítat číslo c v obecné rovnici přímky $p': y = 3x + c$.

- Určíme analytické vyjádření daného posunutí.

- Určíme bod na přímce p' dosazením bodu přímky p do analytického vyjádření posunutí, pomocí něj určíme číslo c.

Řešení

Obraz přímky p v daném posunutí je přímka $p': y = 3x - \frac{11}{2}$ (obr. 5.2).



Obrázek 5.2: Obraz přímky v daném posunutí

5.6 Úloha 6

Určete obraz kružnice $k: (x-3)^2 + y^2 = 4$ ve středové souměrnosti se středem $S = [0; 2]$.

Nápověda

- Určíme analytické vyjádření dané středové souměrnosti.

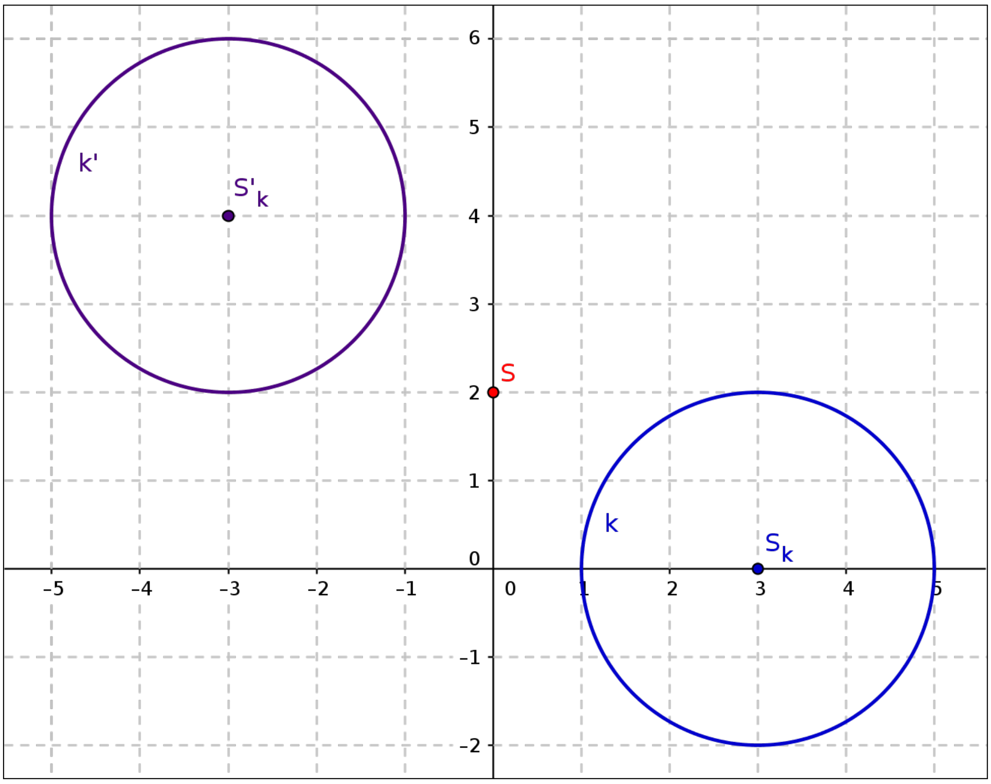
- Určíme obraz středu kružnice. Poloměr kružnice se zachová, neboť shodné zobrazení zachovává vzdálenosti bodů.

- Napíšeme rovnici obrazu kružnice.

Řešení

Obraz kružnice k (obr. 5.3) v dané středové souměrnosti je kružnice

$$k' : (x+3)^2 + (y-4)^2 = 4.$$



Obrázek 5.3: Obraz kružnice ve středové souměrnosti

5.7 Úloha 7

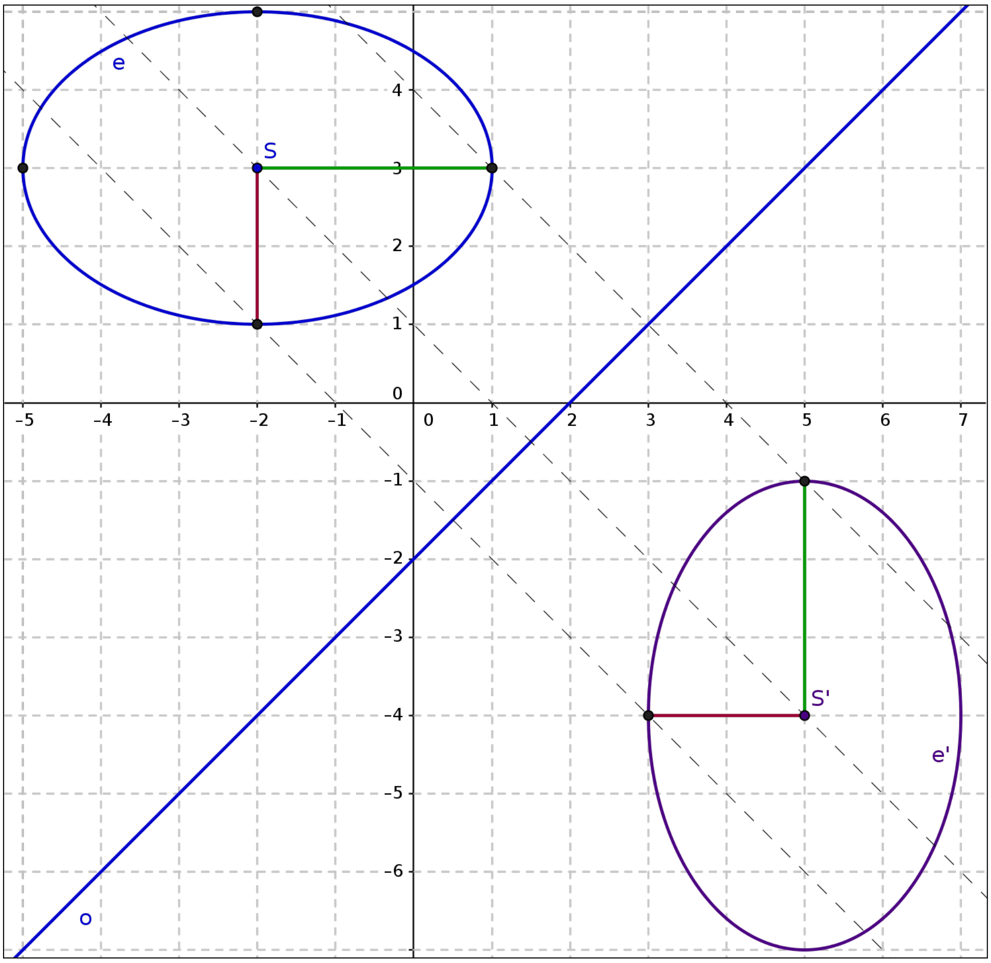
Určete obraz elipsy

$$e : \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

v osové souměrnosti určené osou $o : y = x - 2$.

Nápověda

- Nakreslíme si náčrtek situace (obr. 5.4).
- Zjistíme analytické vyjádření dané osové souměrnosti.
- Určíme obraz středu elipsy.
- Napíšeme rovnici obrazu elipsy.



Obrázek 5.4: Obraz elipsy v osové souměrnosti

Řešení

Analytické vyjádření dané osové souměrnosti je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Obraz elipsy je

$$e' : \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1.$$

5.8 Úloha 8

Určete analytický předpis shodného zobrazení, ve kterém se trojúhelník KLM, kde $K = [-2;2]$, $L = [0;1]$, $M = [1;3]$, zobrazí na trojúhelník $K'L'M'$, kde $K' = [4;4]$, $L' = [5;2]$, $M' = [3;1]$.

Nápověda

- Do analytického vyjádření $X' = X \cdot A + B$ dosadíme postupně souřadnice bodů K,L,M a jejich obrazů, získáme soustavu rovnic.

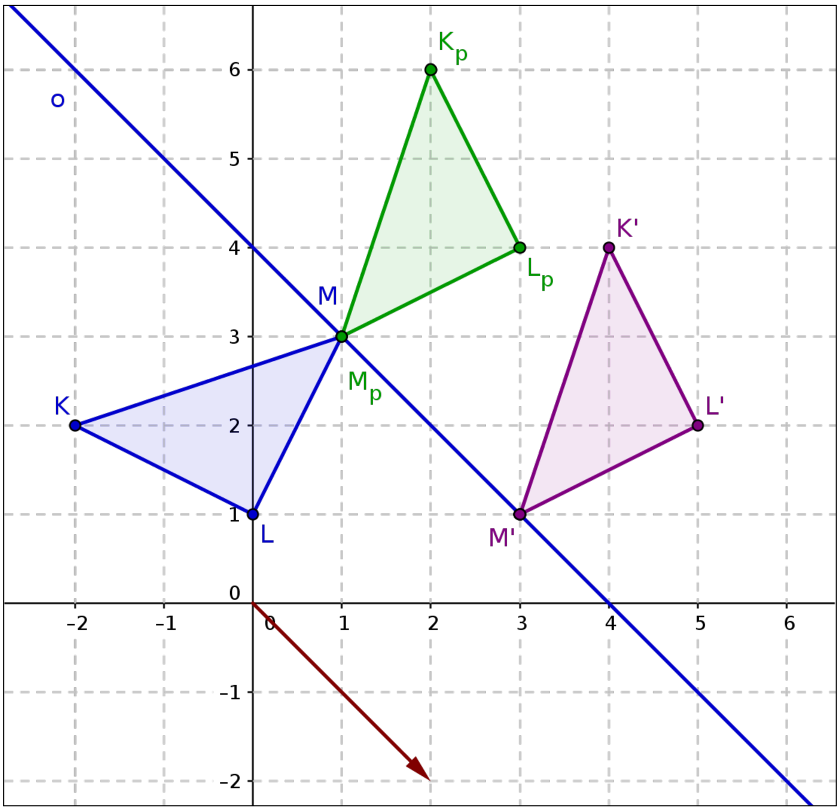
- Vypočítáme prvky matic A,B vyřešením soustavy rovnic.

Řešení

Analytické vyjádření daného shodného zobrazení je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jde o analytické vyjádření posunuté souměrnosti určené přímkou $y = -x + 4$ a vektorem $(2; -2)$ (obr. 5.5).



Obrázek 5.5: Posunutá souměrnost

5.9 Úloha 9

Shodné zobrazení je dáno předpisem

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete, o jaké zobrazení se jedná. Vyšetřete samodružné body a samodružné přímky daného zobrazení.

Nápověda

- Vyšetříme množinu samodružných bodů a „kandidátů“ na směrové vektory samodružných přímek.
- Zjistíme určující prvky daného shodného zobrazení.

Řešení

Jedná se o otočení o úhel $\alpha = +90^\circ$ se středem v bodě $S = [-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}]$.

5.10 Úloha 10

Určete zobrazení, které vznikne složením posunuté souměrnosti určené analytickým vyjádřením

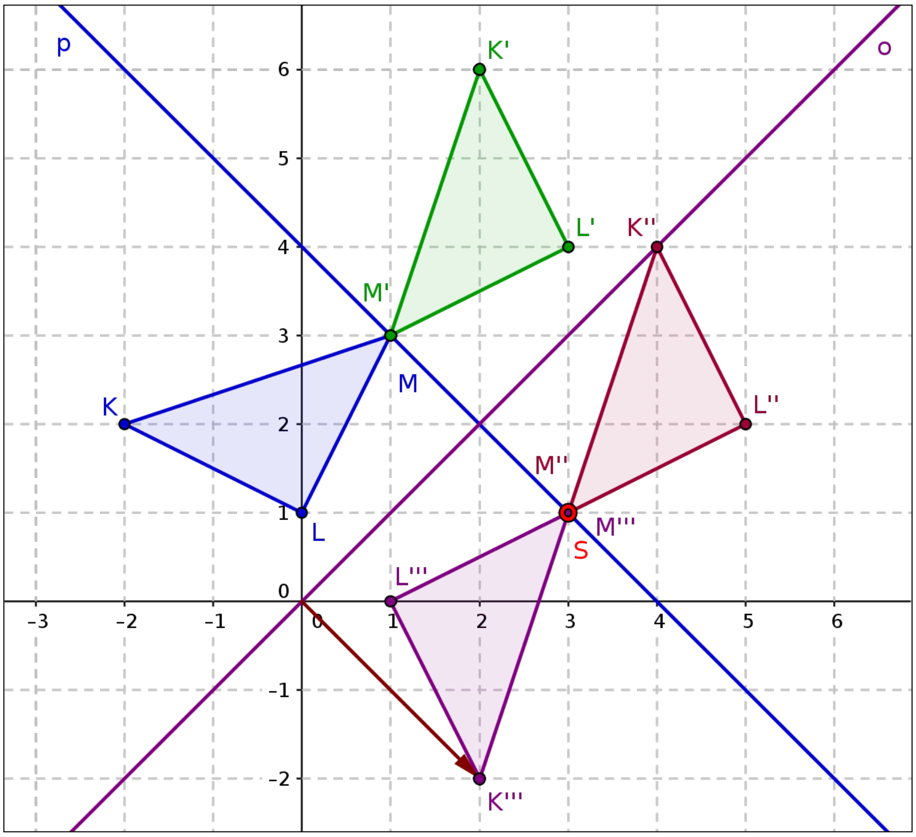
$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}$$

a středové souměrnosti se středem $S = [3;1]$ v uvedeném pořadí. Vyšetřete samodružné body a samodružné přímky daného zobrazení.

Nápověda

- Určíme analytické vyjádření dané středové souměrnosti.
- Složíme zobrazení.
- Klasifikujeme složené zobrazení.

Řešení



Obrázek 5.6: Osová souměrnost

Analytické vyjádření dané středové souměrnosti je

$$X'' = X' \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření složeného zobrazení je

$$X'' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jde o osovou souměrnost určenou osou $o : y = x$ (obr. 5.6).

Poznámka. Pokud zaměníte pořadí skládání zobrazení, vyjde vám jiný výsledek!

5.11 Úloha 11

Určete zobrazení, které vznikne složením otočení určeném analytickým vyjádřením

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a otočení se středem v bodě $S = [-1; 0]$ o orientovaný úhel $\alpha = +270\,^\circ$ v uvedeném pořadí.

Nápověda

- Určíme analytické vyjádření druhého otočení.
- Složíme zobrazení.
- Klasifikujeme složené zobrazení.

Řešení

Analytické vyjádření otočení se středem v bodě $S = [-1; 0]$ o orientovaný úhel $\alpha = +270\,^\circ$ je

$$X'' = X' \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření složeného zobrazení je

$$X'' = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Složením daných dvou otočení získáme identitu.

Poznámka. Pokud zaměníte pořadí skládání zobrazení, může vám vyjít jiný výsledek!

5.12 Úloha 12

Určete zobrazení, které vznikne složením dvou osových souměrností v uvedeném pořadí. První osová souměrnost je určená osou $y = -2$, druhá osová souměrnost je určená osou $y = -x - 1$.

Nápověda

- Určíme analytické vyjádření daných osových souměrností.
- Složíme osové souměrnosti.
- Klasifikujeme složené zobrazení.

Řešení

Analytické vyjádření osové souměrnosti určené osou $y = -2$ je

$$X' = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

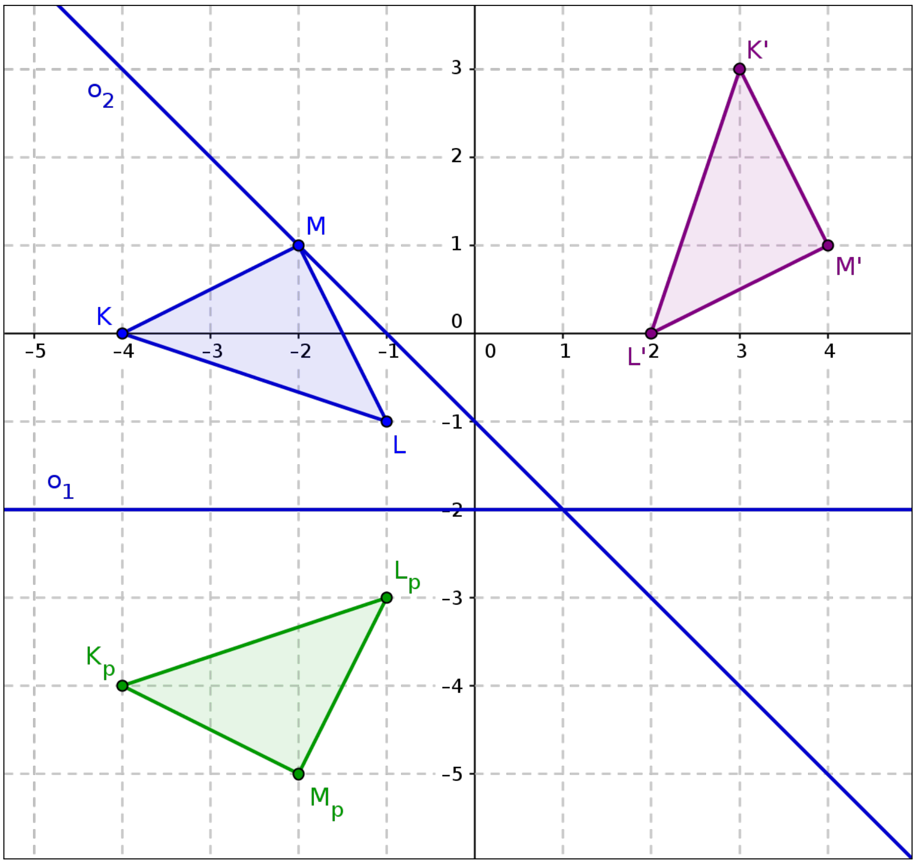
Analytické vyjádření osové souměrnosti určené osou $y = -x - 1$ je

$$X'' = X' \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření složeného zobrazení je

$$X'' = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jde o otočení o orientovaný úhel $\alpha = +270\,^\circ$ kolem bodu $[1; -2]$ (obr. 5.7).



Obrázek 5.7: Otočení

Poznámka. Pokud zaměníte pořadí skládání zobrazení, vyjde vám jiný výsledek!

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit webové stránky, které by propojily syntetický a analytický přístup ke shodným zobrazením a naučily žáky řešit příklady analytickou metodou. Daný cíl byl naplněn prostřednictvím vybudování analytické teorie s použitím syntetických znalostí daných zobrazení. V práci byla vytvořena řada příkladů, které jsou doplněny o vzorová řešení a poznámky k nim. Navíc se v práci vyskytují i úlohy, kde není detailně popsán postup řešení, ale jsou tam jen výsledky a nápověda k řešení. Stránky budou dostupné na portálu středoškolské matematiky, webových stránkách katedry didaktiky matematiky MFF UK.

Literatura

[1] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie.* Vyd. 2, dotisk. Praha: Prometheus, 1995.

[2] Bečvář, J.: *Lineární algebra.* Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010.

[3] Kubát, V., Trkovská, D.: *Analytická geomerie v afinních a eukleidovských prostorech.* Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2011.

[4] Jurgenson, R. C., Brown R. G., King A. M.: *Geometry, new edition.* Vyd. 1. United States of America: Houghton Mifflin, 1980.

[5] Kadleček, J.: *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 1996.

[6] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Vyd. 3, dotisk. Praha: Prometheus, 1993.