Analytická geometria

Analytická geometria je oblasť matematiky, v ktorej sa študujú ***geometrické útvary*** a ***vzťahy medzi nimi*** pomocou ich ***analytických vyjadrení***. Praktický význam analytického vyjadrenia je v tom, že vieme ľahko zistiť - vypočítať, či bod **X** je bodom daného útvaru, ak poznáme súradnice bodu X.

Pomocou zvolenej ***súradnicovej sústavy*** vieme každý základný geometrický útvar vyjadriť jednoznačne v tvare istej ***rovnice*** (alebo ***nerovnice - NR***).

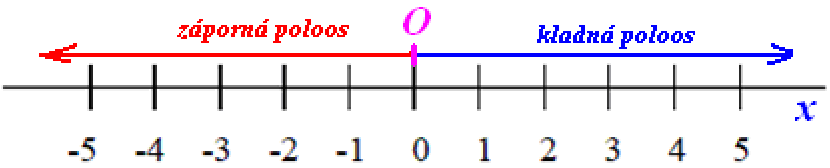
Vzťah medzi príslušným geometrickým útvarom a jeho rovnicou (NR) je daný nasledovným pravidlom:

Ľubovoľný bod **X** ***leží*** v danom útvare ***práve vtedy***, ak jeho súradnice ***spĺňajú*** rovnicu (NR) útvaru.

Na základe tohto pravidla ***prienikom*** útvarov $\mathbf{U_1}$ a $\mathbf{U_2}$ je množina všetkých bodov, ktorých súradnice ***spĺňajú súčasne*** rovnice (NR) obidvoch týchto útvarov, t. j. sústavu týchto rovníc (NR).

Súradnice bodu na priamke

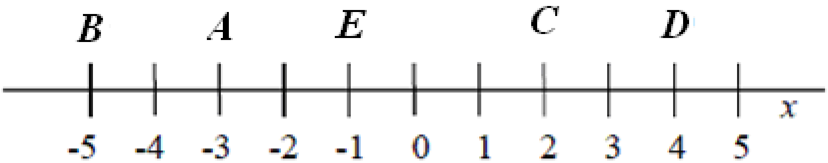
Číselná os je na priamke x určená voľbou jednotky a voľbou začiatku bodom O, ktorý rozdelí priamku x na dve ***opačné polpriamky – kladnú*** a ***zápornú poloos***. Takáto číselná os predstavuje ***jednorozmerný súradnicový systém – jednorozmernú súradnicovú sústavu***, ktorú označujeme O_x.



Bod O má súradnicu **0**, čo zapisujeme $O = [0]$, alebo zjednodušene $O\ [0]$.

Príklad 1: Zobrazte v O_x body: $A = [-3]$, $B = [-5]$, $C = [2]$, $D = [4]$, $E = [-1]$

Riešenie:

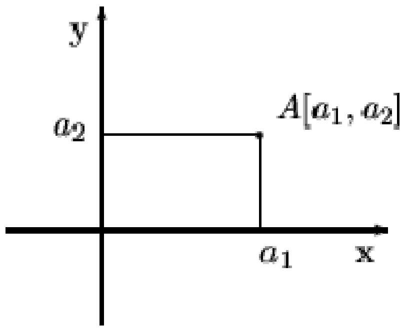


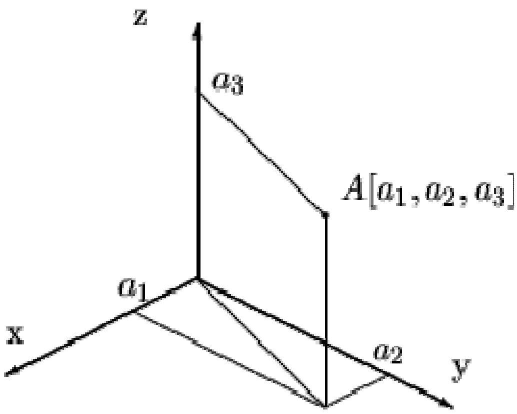
Súradnicová sústava

Karteziánska súradnicová sústava v rovine (v priestore) je sústava dvoch (troch) navzájom ***na seba kolmých priamok***, ktoré voláme ***osi súradnicovej sústavy***. Ich ***jediný spoločný bod*** voláme ***začiatok súradnicovej sústavy*** a označujeme ho znakom **O**
a súradnicovú sústavu označujeme $\mathbf{O_{xy}}$ ($\mathbf{O_{xyz}}$).

Každá os je rozdelená bodmi, ktoré na tej istej osi sú od seba rovnako vzdialené počínajúc bodom **O**. Túto vzdialenosť nazývame ***jednotka*** pre danú os. Jednotky jednotlivých osí môžu mať ***rovnakú*** alebo ***rôznu*** veľkosť.

Karteziánska súradnicová sústava ***je prostriedok***, pomocou ktorého ***každému bodu*** v rovine (v priestore) vieme ***jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu (trojicu) reálnych čísel***, ktoré voláme ***súradnice*** daného bodu.

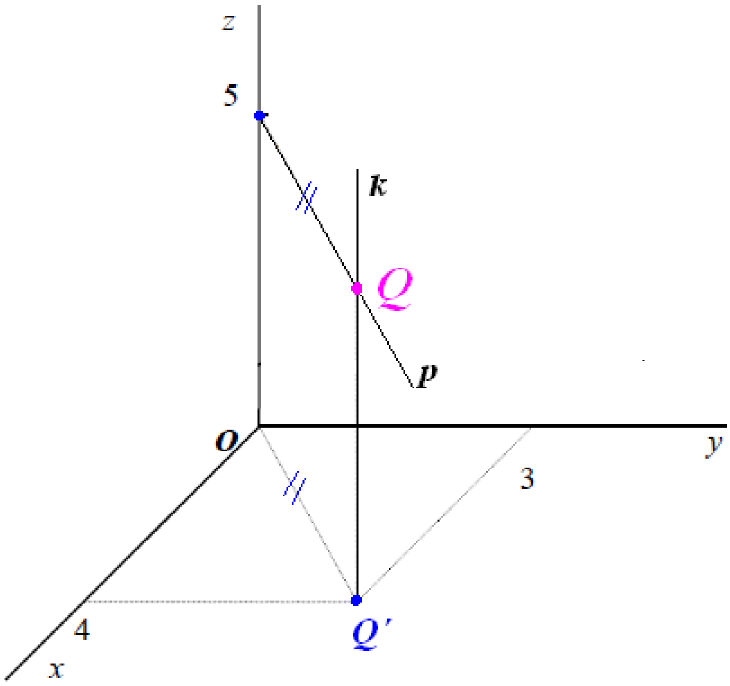




Fakt, že bod **A** má súradnice $\mathbf{a_1, a_2}$, $\mathbf{a_3}$, budeme zapisovať $\mathbf{A = [a_1; a_2; a_3]}$ alebo $\mathbf{A[a_1; a_2; a_3]}$.

<u>Príklad 2:</u> Zostrojte v Oxyz bod **Q = [4; 3; 5]**

<u>Riešenie:</u> V rovine ***xy*** (určenej osami ***x*** a ***y***) zostrojíme bod **Q´ = [4; 3; 0]** (tzv. *pomocný bod*).
Bodom **Q´** zostrojíme kolmicu ***k*** na rovinu ***xy*** ≈ ***rovnobežnú*** s osou ***z***.
Obrazom bodu **5** na osi ***z*** zostrojíme ***rovnobežku p*** so ***spojnicou OQ´***.
Priesečník priamky p a kolmice k je hľadaný bod Q, $\mathbf{p \cap k = \{Q\}}$.



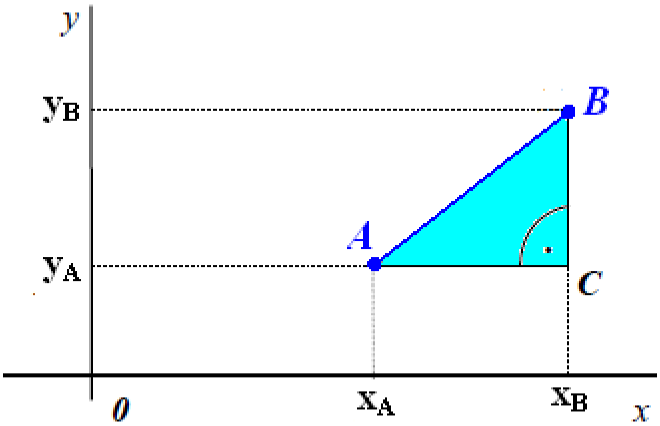
Vzdialenosť dvoch bodov na priamke

Vzdialenosť dvoch bodov **A**=[x_A], **B**=[x_B] na číselnej osi sa rovná absolútnej hodnote rozdielu reálnych čísel x_A a x_B , t.j. rozdielu ich súradníc:

$$|A, B| = |AB| = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Vzdialenosť dvoch bodov v rovine

Vzdialenosť dvoch bodov **A**=[x_A; y_A], **B**=[x_B; y_B] v rovine určíme ako veľkosť prepony pravouhlého trojuholníka ABC:



|AC| = | $x_B - x_A$ |, |BC| = | $y_B - y_A$ |

$$|A, B| = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Príklad 3: Vypočítajte vzdialenosť bodov **P** = **[–3; 2]** , **Q** = **[–7; –1]**

Riešenie: $|P, Q| = \sqrt{(-3+7)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \mathbf{5\ j}.$

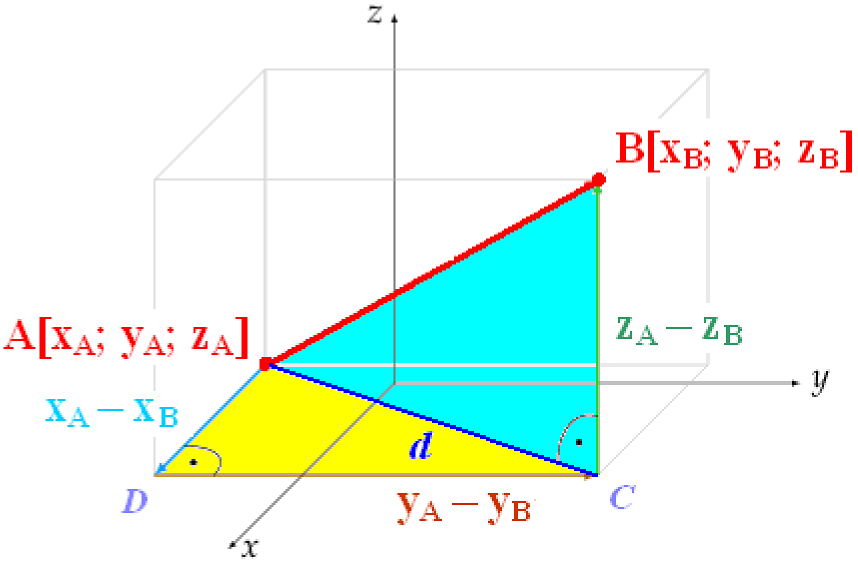
Vzdialenosť dvoch bodov v priestore

Vzdialenosť dvoch bodov **A**=[x_A; y_A; z_A], **B**=[x_B; y_B; z_B] v rovine určíme ako veľkosť prepony pravouhlého trojuholníka ABC s využitím pravouhlého trojuholníka ACD:

ΔACD: $d^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$

ΔABC: $|AB|^2 = d^2 + (z_A - z_B)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \Rightarrow$

$$|A, B| = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_B)^2} \qquad \textbf{(3)}$$



Príklad 4: Určte, či ΔABC s vrcholmi $A = [-1; 5; 1]$, $B = [3; -2; -1]$ a $C = [-3; 2; 1]$ je pravouhlý.

Riešenie: $|\mathbf{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-5)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{69}$

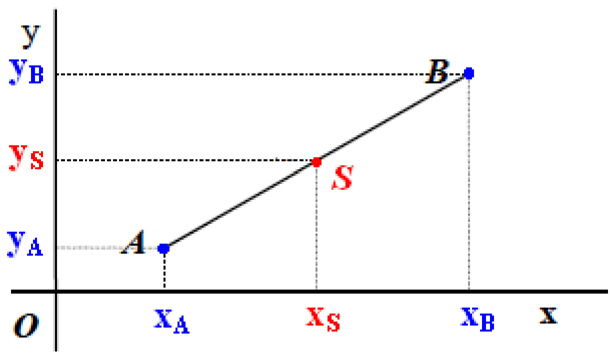
$|\mathbf{BC}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{56}$

$|\mathbf{AC}| = \sqrt{(-3+1)^2 + (2-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{13}$,

... **56 + 13 = 69** ⇒ ΔABC je pravouhlý

Stred úsečky

Bod **S** je ***stredom úsečky AB*** práve vtedy, ak platí $|\mathbf{AS}| = |\mathbf{BS}|$



Pre súradnice bodu S platí: $x_S = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ a $y_S = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Podobným spôsobom v trojrozmernom priestore platí: $z_S = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Záver: Pre súradnice ***stredu úsečky AB*** v rovine platí: **S** = $\left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right]$ **(4)**

Pre súradnice ***stredu úsečky AB*** v priestore platí: **S** = $\left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right]$ **(5)**

Symbolický zápis: $\mathbf{S = A \dotplus B}$ alebo $S = \frac{A + B}{2}$

Príklad 5: Vypočítajte súradnice stredu S úsečky AB, ak ***A*** **= [3; 1; –2]** , ***B*** **= [–1; 3; –4]**

Riešenie: ***S*** = $\left[\frac{3-1}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{-2-4}{2}\right]$ **= [1; 2; –3]**

Trocha matematickej „fantázie“:

Na základe výsledkov (1) až (5) môžeme predpokladať, že pre body v ľubovoľnom ***n-rozmernom*** priestore, kde $n \in N$ platí:

$$\mathbf{A=[a_1; a_2; a_3; ...; a_n] \wedge B=[b_1; b_2; b_3; ...; b_n] \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{A, B}| = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2+...+(a_n-b_n)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S = A \dotplus B} = \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}; ...; \frac{a_n+b_n}{2}\right]$$

Krása tej fantázie je v tom, že ***tie vzťahy sú pravdivé*** a na základe nich dokážeme vypočítať ***dĺžku úsečky*** alebo ***súradnice jej stredu*** napriek tomu, že si tú úsečku nedokážeme v 3-rozmernom priestore ani predstaviť, pokiaľ to budeme počítať pre **n ≥ 4**.

A práve aj v takýchto záveroch sa skrýva

KRÁSA MATEMATIKY

Úlohy :

1. V akom vzťahu sú obrazy bodov K=[1; –3] , L=[–1; –3] , M=[–1; 3] , N=[1; 3] ?
2. V O_{xyz} zobrazte body P[1; 2; 3] , Q[1; 2; –3] , R[1; –2; 3]
3. Vypočítajte vzdialenosť bodov: a) K=[3] , L=[–7]

   b) L=[–1; 1] , M=[12; –5] , N=[–4; 0] od bodu O=[0; 0] a určte obvod ΔLMN

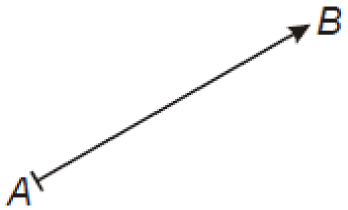
   c) P[0; –2; 1] , Q[3; 4; 1]
4. Určte súradnice bodu B tak, aby bod S=[2; 3] bol stredom úsečky AB, ak A=[3,5; –2] .
5. Vypočítajte súradnice stredu úsečky AB: a) A[3; –1; 6] , B[5; 1; –8]

   b) A[2; –4; 6] , B[–2; 2; –6]

Vektory

Niektoré fyzikálne veličiny (napríklad rýchlosť, sila) majú dve charakteristiky:
· ***veľkosť***
· ***smer***

Orientovaná úsečka je úsečka, u ktorej je ***jednoznačne*** určené (vyznačené), ktorý z jej krajných bodov je ***počiatočným*** a ktorý ***koncovým*** bodom (označený šípkou).



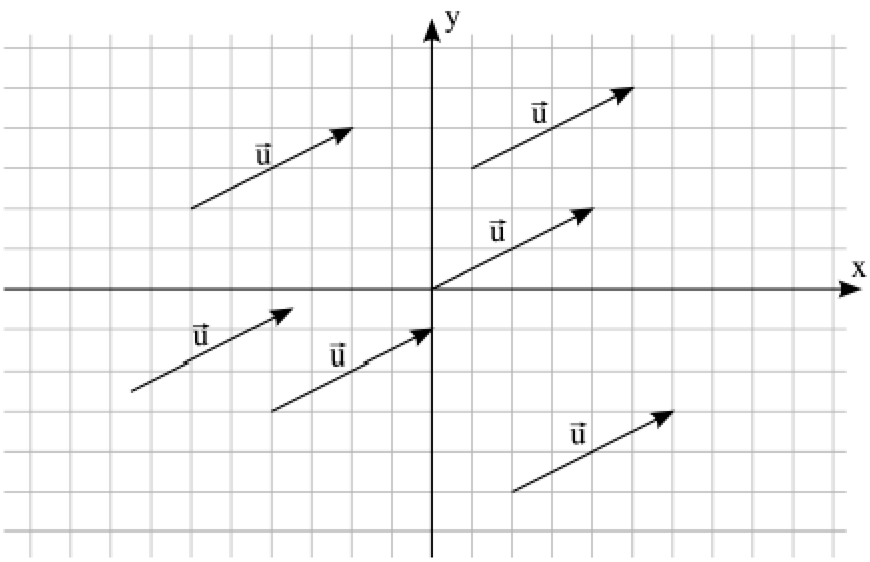
Na obrázku je ***orientovaná*** úsečka **AB**
s ***počiatočným*** bodom **A** a ***koncovým*** bodom **B**
· ***veľkosť:*** dĺžka úsečky AB
· ***smer:*** smer orientovanej úsečky

Ak A, B sú ***2 rôzne*** body, potom AB = BA, ale **pre orientované úsečky platí** ***AB ≠ BA*.**

Ak počiatočný a koncový bod ***splývajú,*** ide o tzv. ***nulovú orientovanú úsečku***, ktorej veľkosť je ***nulová***.

<u>Poznámka:</u> Zápis ***orientovaná*** úsečka **AB** často zapisujeme v tvare $\overline{AB}$.

Nenulový vektor u je množina ***všetkých orientovaných úsečiek***, ktoré majú ***rovnakú veľkosť*** a ***rovnaký smer***.



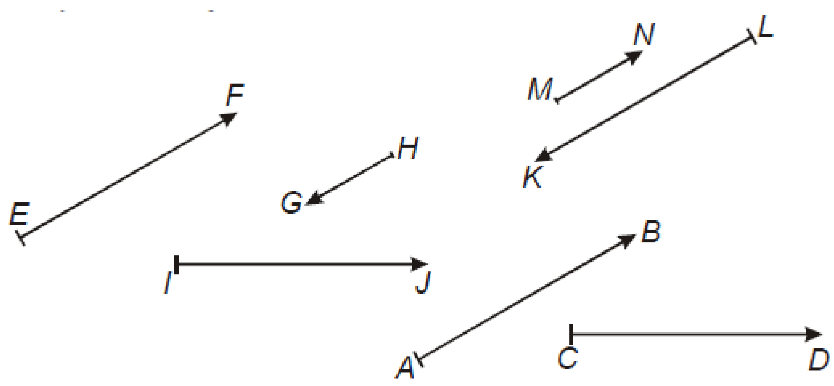
Nulový vektor je množina <u>*všetkých nulových orientovaných úsečiek*</u>.

Každá <u>*orientovaná úsečka*</u> vektora **u** sa nazýva <u>***umiestnenie***</u> vektora ***u***.

<u>Poznámky:</u>

1) Zápis ***vektor*** **u** často zapisujeme v tvare $\vec{u}$ (u so šípkou) alebo <u>hrubou</u> tlačou **u**.
2) Celý vektor sa graficky zobraziť nedá, nakoľko všetky zodpovedajúce orientované úsečky tohto vektora by vyplnili celú rovinu alebo 3-rozmerný priestor.

Príklad 1: Rozhodnite, ktoré orientované úsečky sú umiestnením (reprezentujú) toho istého vektora.
Koľko rôznych vektorov je zobrazených na obrázky ?



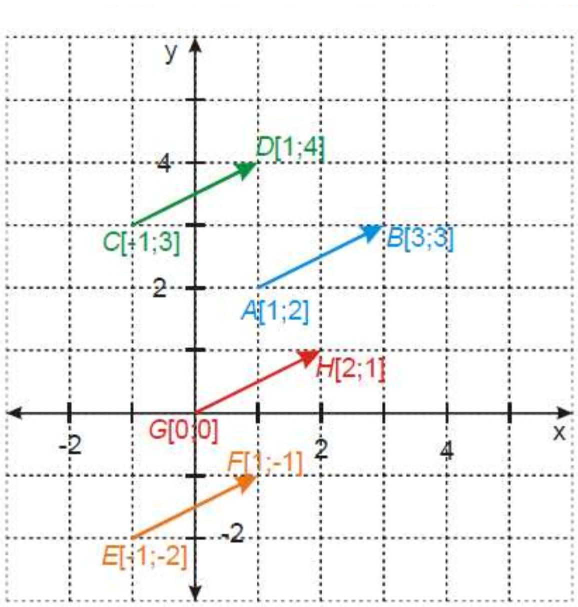
vektor u – orientované úsečky ***AB***, ***EF***
vektor v – orientované úsečky ***IJ***, ***CD***
vektor w – orientovaná úsečka ***LK***
vektor x – orientovaná úsečka ***HG***
vektor y – orientovaná úsečka ***MN***

Záver: Sedem orientovaných úsečiek reprezentuje len päť rôznych vektorov.

Príklad 2: V rovine je daný ***vektor u*** <u>*orientovanou úsečkou*</u> ***AB***, kde **A[1; 2]**, **B[3; 3].**
Zakreslite do $\mathbf{O_{xy}}$ ***umiestnenia vektora u*** pomocou <u>*orientovaných úsečiek*</u>:

a) ***AB*** b) ***CD***, ak **C[–1; 3]** c) ***EF***, ak **F[1; –1]** d) ***GH***, ak **G[0;** 0**]**

<u>*Riešenie:*</u>



Príklad 3: Rozhodni, koľko čísiel je potrebných v rovine na určenie:
a) *orientovanej úsečky* b) ***vektora***

Riešenie:

Orientovaná úsečka je určená štyrmi číslami – počiatočný a koncový bod je určený dvojicou čísiel.

Pri zakresľovaní *orientovaných úsečiek*, ktoré ***sú umiestnením toho istého vektora*** v príklade č. 2, stačilo využiť ako základ *orientovanú úsečku AB* a ostatné umiestnenia sa dali zakresliť podľa jedného z krajných bodov tak, aby šípka znamenala posun o ***dve jednotky doprava*** a ***jednu jednotku nahor***.

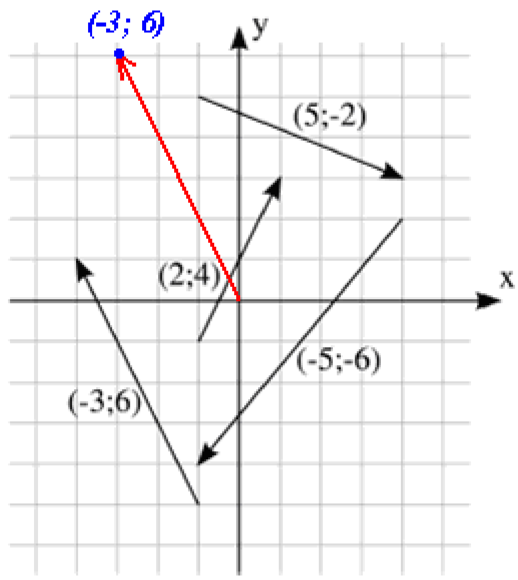
Z uvedeného vyplýva, že ***vektor v rovine*** by mohli charakterizovať ***dve*** čísla, ktoré reprezentujú ***posun*** z bodu **O** o tieto čísla v ***horizontálnom*** a ***vertikálnom*** smere v ***danom poradí***.

Preto by sme mohli uvedený vektor **u** zapísať v tvare **u = [2; 1]**.

Postreh:

1) Tieto dve čísla dostaneme v prípade každej orientovanej úsečky reprezentujúcej ten istý vektor, ak ***od súradníc koncového*** bodu ***odčítame súradnice počiatočného*** bodu.
2) Čísla charakterizujúce vektor **u = [2; 1]** sa zhodujú so súradnicami bodu **H** *orientovanej úsečky GH*
(***súradnice koncového bodu*** orientovanej úsečky, ktorej ***počiatočný bod*** je **bod O**).

Overiť uvedený postreh
na vektoroch zobrazených na obrázku:



Definícia:

Nech vektor **u** je určený orientovanou úsečkou ***AB***, kde A[a_1; a_2;] , B[b_1; b_2;]
Čísla $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$ (v prípade 3-rozmerného priestoru $u_3 = b_3 - a_3$) nazývame ***súradnice*** vektora **u**.

Zapisujeme **u** = B – A = **[u_1; u_2;]** (alebo **[u_1; u_2; u_3]**)

Poznámka: Zápis B – A je len formálny a ***operácia rozdielu sa týka len súradníc*** bodov **A, B**, nakoľko rozdiel bodov ako objektov neexistuje (je nezmysel).

Príklad 4: Určte súradnice vektorov $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{KL}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{MN}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{NM}$ ak:
K[4; –2], L[2; 5] , M[–2; 3; –7] , N[4; –2; –1]

Riešenie:
$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{KL} = L - K = [2 - 4; 5 - (-2)] = \boldsymbol{[-2; 7]}$
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{MN} = N - M = [4 - (-2); -2 - 3; -1 - (-7)] = \boldsymbol{[6; -5; 6]}$
$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{NM} = M - N = [-2 - 4; 3 - (-2); -7 - (-1)] = \boldsymbol{[-6; 5; -6]}$

Poznámka: Vektory **v** a **w** z príkladu č. 4 nazývame ***navzájom opačné vektory*** (majú opačné smery) a zapisujeme **v = – w**

Príklad 5: Daný je vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{[-2; 3]}$ a dve jeho umiestnenia ***AB*** a ***KL***, **A[1; 2], L[–1; 1]**.
Určte súradnice zvyšných krajných bodov orientovaných úsečiek, ktoré sú jeho umiestnením.

Riešenie:
$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{[-2; 3]} = \boldsymbol{AB} = B - A = [b_1 - 1; b_2 - 2] \Rightarrow b_1 - 1 = \boldsymbol{-2} \wedge b_2 - 2 = \boldsymbol{3}$, t. j.
$\boldsymbol{b_1 = -1 \wedge b_2 = 5}$ ***... B[– 1; 5]***

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{[-2; 3]} = \boldsymbol{KL} = L - K = [-1 - k_1; 1 - k_2] \Rightarrow -1 - k_1 = \boldsymbol{-2} \wedge 1 - k_2 = \boldsymbol{3}$, t. j.
$\boldsymbol{k_1 = 1 \wedge k_2 = -2}$ ***... K[1; – 2]***

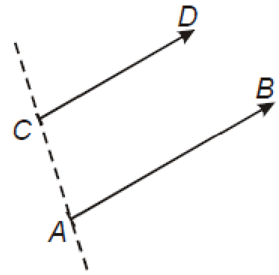
Problém: Ako spoznáme rovnakú veľkosť vektorov ?
Zistíme vzdialenosti krajných bodov ich umiestnení – reprezentantov.

Ako spoznáme rovnaký smer vektorov ?
Pohľadom celkom jednoduché, matematicky o niečo ťažšie.

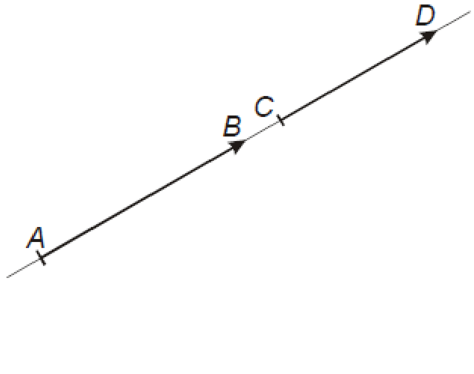
Definícia:

Dve <u>nenulové orientované úsečky</u> ***AB*** a ***CD*** majú ***rovnaký smer***, ak:

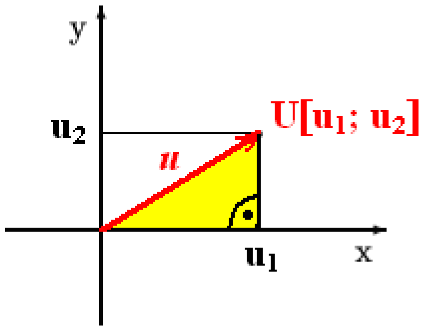
- ***priamky*** AB a CD sú ***rovnobežné***, ***rôzne*** a body ***B, D*** ležia ***v rovnakej polrovine*** s ***hraničnou priamkou AC***

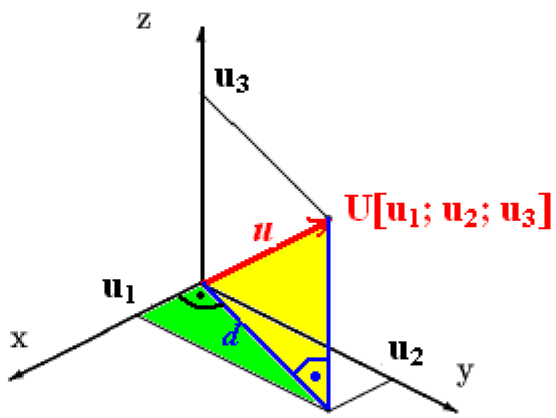


- ***priamky*** AB a CD sú ***totožné*** a ***prienikom polpriamok AB*** a ***CD*** je ***opäť polpriamka***.



Dĺžka vektora (***úsečky***) je určená ***vzdialenosťou počiatočného*** a ***koncového*** bodu ľubovoľného *smerového vektora, ktorý je jeho umiestnením*.





Z obrázka vyplýva, že aplikáciou Pytagorovej vety dostaneme:

$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ alebo $|\mathbf{u}| = \sqrt{d^2 + u_3^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Nech $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, A$[a_1; a_2; a_3]$, B$[b_1; b_2; b_3]$.

Potom platí: $|\mathbf{u}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{B} - \mathbf{A}| = \mathbf{d(AB)} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_2)^2}$

Nulový vektor je (jediný) vektor, ktorého dĺžka je **0**. Budeme ho označovať **o**.
Nulový vektor má ***všetky*** súradnice rovné ***0***.

Jednotkový vektor je ***každý vektor***, ktorého ***dĺžka*** je ***rovná*** **1**.

Jednotkový vektor ***orientovaný v kladnom*** smere osi **x** označujeme **i**, ... ***i[1; 0; 0]***
jednotkový vektor ***orientovaný v kladnom*** smere osi **y** označujeme **j**, ... ***j[0; 1; 0]***
jednotkový vektor ***orientovaný v kladnom*** smere osi **z** označujeme **k**. ... ***k[0; 0; 1]***

Vektory **i, j, k** tvoria ***bázu*** trojrozmerného priestoru.

V ďalšom texte predpokladajme, že $\mathbf{u}[\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}; \mathbf{u_3}]$ a $\mathbf{v}[\mathbf{v_1}; \mathbf{v_2}; \mathbf{v_3}]$.

Skalárny násobok vektora **v** a reálneho čísla **c** ***je vektor*** $c.\boldsymbol{v}$,

pričom: ***dĺžka*** vektora $c.\boldsymbol{v}$ je $|\mathbf{c}|$ násobkom dĺžky vektora $\boldsymbol{v}$ a
pre c > 0 oba vektory majú ***rovnaký smer***
pre c < 0 oba vektory majú ***navzájom opačný smer***
pre c = 0 platí $c.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$

Namiesto $c.\boldsymbol{v}$ budeme niekedy písať kratšie $c\boldsymbol{v}$.
V súradniciach: $c.\boldsymbol{v} = [cv_1; cv_2; cv_3]$

Vektor ***(-1).v*** voláme ***vektor opačný k vektoru v*** a označujeme $-\boldsymbol{v}$.
V súradniciach: $-\boldsymbol{v} = [-v_1; -v_2; -v_3]$

Platí:

Dva ***nenulové vektory sú rovnobežné*** práve vtedy, ak ***jeden z nich je skalárnym násobkom druhého***.
Je to práve vtedy, ak podiely ich prvých, druhých aj tretích súradníc sú zhodné.

Príklad 5: Nech A[– 3; 1; 7] a B[2; – 5; 0] .
Určte dĺžku vektora ***v = AB*** a súradnice ***jednotkového*** vektora rovnako orientovaného v jeho smere.

Riešenie:

Najskôr určíme súradnice vektora ***v = AB = B – A***:

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = [2-(-3), -5-1, 0-7] = [5, -6, -7].$$

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{B}-\mathbf{A}| = \mathbf{d(AB)} = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+36+49} = \sqrt{110}$$

Označme $\mathbf{u}[\mathbf{u_1}; \mathbf{u_2}; \mathbf{u_3}]$ ***jednotkový*** vektor v smere vektora ***v = AB = B – A***.
Nakoľko **u** je skalárnym násobkom vektora **v**, existuje také reálne číslo **c**, že platí :

$$u_1 = 5c, \quad u_2 = -6c, \quad u_3 = -7c.$$

Naviac, vektor **u** má dĺžku 1 a preto platí:

$$1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 25c^2 + 36c^2 + 49c^2 = 110c^2.$$

Teda $c^2 = \frac{1}{110}$ ... $c = \pm\frac{1}{\sqrt{110}}$

Hľadaný vektor dostaneme pre hodnotu c > 0, t. j. $c = \frac{1}{\sqrt{110}}$:

$$\boldsymbol{u} = [\frac{5}{\sqrt{110}}, \frac{-6}{\sqrt{110}}, \frac{-7}{\sqrt{110}}].$$

Príklad 6: Pre ktoré hodnoty čísel $p, q \in R$ sú vektory $\boldsymbol{a} = [-1; p; 4]$ a $\boldsymbol{b} = [q; 2; -3]$ rovnobežné?

Riešenie:

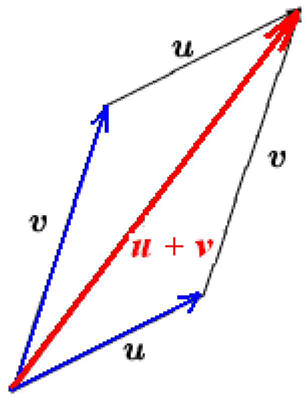
Podľa poznámky pred predchádzajúcim príkladom sú vektory ***a*** a ***b*** rovnobežné práve vtedy, ak platí : $\frac{-1}{q} = \frac{p}{2} = \frac{4}{-3}$. Porovnaním prvého zlomku s tretím a druhého zlomku s tretím dostávame: ***q = 3/4*** a ***p = – 8/3***

Operácie s vektormi môžeme geometricky realizovať len pomocou ich umiestení. Využívame najmä operácie s orientovanými úsečkami, ktoré majú spoločný začiatok. Ak $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$, tak

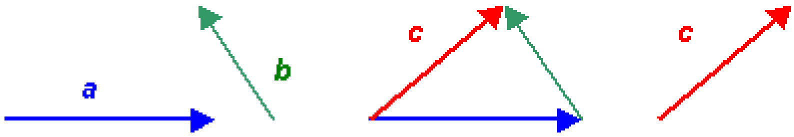
Súčet vektorov **u** a **v** je <u>vektor</u> $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$, ktorý môžeme znázorniť ako uhlopriečku v rovnobežníku so stranami tvorenými vektormi **u** a **v** , pričom jeho orientácia je znázornená na obr. :

Výsledok ***sčítania*** vektorov, ***nezávisí*** od toho, v akom poradí ich sčitujeme.

V súradniciach: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = [u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3]$



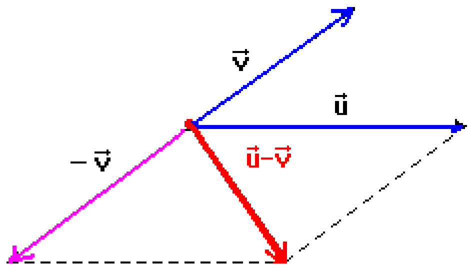
$a + b = c$:

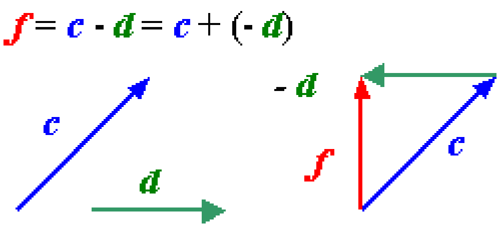


Rozdiel vektorov **u** a **v** je <u>vektor</u> $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{AB} + (-1).\boldsymbol{AC}$

Ak $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ (nulový vektor), tak **u** a **v** nazývame ***opačné vektory***.

V súradniciach: $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = [u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3]$

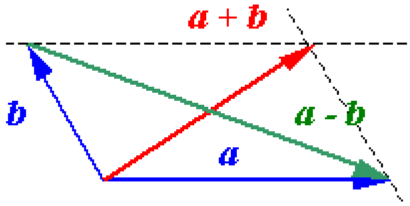




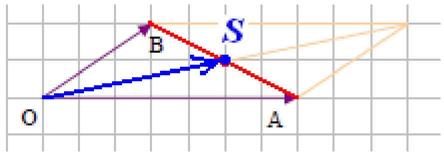
Výsledok operácii s vektormi nezávisí od umiestenia vektorov.

<u>Príklad 7:</u> Dva ***nekolineárne*** vektory, napr. **a**, **b** , môžeme chápať ako strany rovnobežníka. Graficky ukážte, že ich ***súčet*** a ***rozdie***l predstavujú ***uhlopriečky*** tohto rovnobežníka.

<u>Riešenie :</u>



Súradnice stredu úsečky



$$\mathbf{S - O} = \frac{1}{2}(\mathbf{A - O}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B - O})$$

$$\mathbf{S - O} = \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{O} + \frac{1}{2}\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{O} = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B} - \mathbf{O}$$

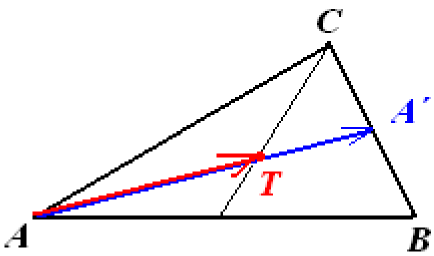
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B} = \frac{A+B}{2}$$

<u>Upozornenie:</u> ***Všetky operácie*** v predchádzajúcich rovnostiach ***sa robia so súradnicami bodov*** a **<u>nie s bodmi</u>** (aj keď to formálne vyhovuje).

<u>Platí:</u> Ak bod $\mathbf{S[s_1; s_2; s_3]}$ je ***stredom*** úsečky **AB**, v ktorej $\mathbf{A[a_1; a_2; a_3]}$ a $\mathbf{B[b_1; b_2; b_3]}$, potom

$$\mathbf{S[s_1; s_2; s_3]} = \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}\right].$$ Zapisujeme $\mathbf{S = A \dot{-} B}$

Súradnice ťažiska trojuholníka



$$\mathbf{T - A} = \frac{2}{3}(\mathbf{A' - A}) \quad \wedge \quad \mathbf{A' = B \dot{-} C} = \frac{B+C}{2}$$

$$\mathbf{T - A} = \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2} - \mathbf{A}\right) = \frac{1}{3}\mathbf{B} + \frac{1}{3}\mathbf{C} - \frac{2}{3}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3}\mathbf{B} + \frac{1}{3}\mathbf{C} + \frac{1}{3}\mathbf{A} = \frac{A+B+C}{3}$$

<u>Príklad 8:</u>

Určte súradnice ťažiska **T** v trojuholníku **ABC**, ak **A[1; - 2; 3]** , **B[- 10; 9; 14]** , **C[6; - 1; 10]** .

<u>Riešenie:</u> a) $\mathbf{A' = B \dot{-} C = [-2; 4; 12]}$ **...** $\mathbf{T - A} = \frac{2}{3}(\mathbf{A' - A}) = \frac{2}{3}\mathbf{[-3; 6; 9] = [-2; 4; 6]}$ **...**

$\mathbf{T = A + [-2; 4; 6] = [-1; 2; 9]}$

b) $\mathbf{T} = \frac{A+B+C}{3} = \mathbf{[-1; 2; 9]}$

Lineárna kombinácia vektorov u a ***v*** je vektor ***w***, pre ktorý platí:

$$\boldsymbol{w = c.u + d.v}, \text{ kde } \boldsymbol{c, d \in R}.$$

Čísla ***c***, ***d*** v lineárnej kombinácii nazývame ***koeficienty*** kombinácie. Pre každú konkrétnu hodnotu koeficientov dostávame konkrétny vektor.

Platí:

Ak máme v rovine dané dva ***nerovnobežné vektory*** (lineárne nezávislé), tak ***každý*** vektor tejto roviny sa dá ***jednoznačne*** vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie týchto dvoch vektorov.
Ak máme v priestore dané tri ***navzájom rôznobežné*** vektory, ktoré ***neležia všetky v jednej rovine*** (lineárne nezávislé), tak ***každý*** vektor v priestore sa dá j***ednoznačne*** vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie týchto troch vektorov.

V dôsledku toho každý vektor sa dá napísať v tvare lineárnej kombinácie vektorov bázy:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}\,.$$

V tomto vyjadrení sú koeficienty kombinácie zhodné so súradnicami vektora, teda platí

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \text{ práve vtedy, ak } \mathbf{u} = [u_1; u_2 ; u_3]$$

Príklad 9: Vyjadrime vektor ***[– 3; 1]*** ako lineárnu kombináciu vektorov ***[1; –1] a [2; 3]***.

Riešenie: Hľadáme čísla ***c, d*** $\in$ ***R***, pre ktoré platí

$$[- 3; 1] = c[1; - 1] + d[2; 3] = [c; - c] + [2d; 3d] = [c + 2d; - c + 3d]\,.$$

Porovnaním prvých a porovnaním druhých súradníc (usp. dvojice sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú po zložkách) dostávame sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi:
$c + 2d = -3 \wedge -c + 3d = 1 \Rightarrow$ ***c = – 11/5*** a ***d = – 2/5***

Teda platí : $[-3; 1] = \frac{-11}{5}.[1; -1] + \frac{-2}{5}.[2; 3]$.

Skalárne násobenie (skalárny súčin) vektorov

Definícia :

Ak **u** = ***AB*** a **v** = ***AC,*** tak ***konvexný*** uhol ***BAC*** ($< 180^{o}$) nazývame ***uhol vektorov u*** a ***v*** (ozn. φ).

Uhol nie je definovaný, ak aspoň jeden z vektorov je nulový.
Ak **u** a **v** sú nenulové vektory, ktoré zvierajú uhol φ, tak ***číslo*** $|u|.|v|.\cos\varphi$ nazývame ***skalárny súčin*** vektorov **u *a* v** (ozn. **u.v**).

$$\mathbf{u.v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos\varphi$$

Ak aspoň jeden z vektorov je nulový, tak ich skalárny súčin je 0.

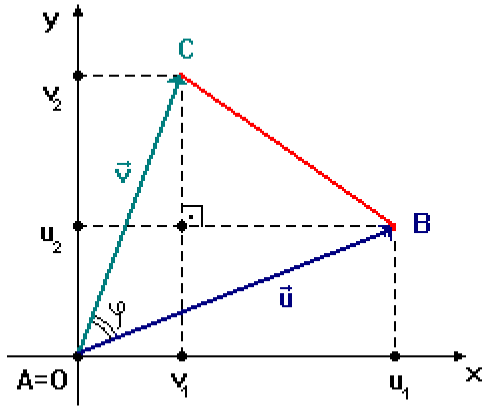
Veta (o skalárnom súčine) :

V ortonormálnej sústave súradníc ***v rovine*** pre každé dva vektory **u**$[u_1,u_2]$ a **v**$[v_1,v_2]$ platí :

$\mathbf{u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2}$.

V ortonormálnej sústave súradníc ***v priestore*** pre každé dva vektory **u**$[u_1,u_2,u_3]$ a **v**$[v_1,v_2,v_3]$ platí :

$\mathbf{u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}$.



<u>*Dôkaz (v rovine) :*</u>

Podľa kosínusovej vety :

$a^2 = b^2 + c^2 – 2.b.c.\cos φ$

$|BC|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2 \underbrace{–2.|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos φ}_{–2.\mathbf{u.v}}$

$\mathbf{u.v} = ½(|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2–|BC|^2)$

Po dosadení súradníc : $\mathbf{u.v} = ½[u_1^2+ u_2^2+ v_1^2+ v_2^2–(u_1–v_1)^2–(u_2–v_2)^2]$

Po úprave : $\mathbf{u.v} = \boldsymbol{u_1.v_1 + u_2.v_2}$

<u>Poznámka:</u>

Skalárny súčin vektorov je jediná operácia s vektormi, kde ***výsledkom nie je vektor*** ale ***skalár*** (konštanta).

Skalár (slovník c. slov) je veličina dostatočne určená svojou ***číselnou*** hodnotou (čas, dĺžka, objem, energia a pod.); je to <u>*opak vektora*</u>.

Použitie skalárneho súčinu

<u>Veta (o uhle vektorov) :</u>

Pre veľkosť uhla **φ** nenulových vektorov **u** a **v** platí :

$$\cos φ = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

<u>Dôsledok :</u> Nenulové **vektory u** a **v** sú na seba **<u>kolmé</u> práve vtedy,** keď **u.v = 0**.

$$\mathbf{u.v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos φ = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos 90° = 0$$

Z definície skalárneho súčinu a z vlastností funkcie ***kosínus*** vyplýva:

- **u.v > 0** práve vtedy, ak uhol vektorov **u** a **v** je ***ostrý***.
- **u.v = 0** práve vtedy, ak uhol vektorov **u** a **v** je ***pravý***.
- **u.v < 0** práve vtedy, ak uhol vektorov **u** a **v** je ***tupý***.

<u>Príklad 10:</u> Vypočítame uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, ak

$$\boldsymbol{u} = [-2, 1] \quad a \quad \boldsymbol{v} = [3, 4]$$

<u>Riešenie:</u>

$$cos\,\varphi = \frac{(-2).3 + 1.4}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}.\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}}.$$

Preto uhol **φ** vektorov **u** a **v** má približnú hodnotu ***100,3°.***

<u>Príklad 11:</u> Nájdite ***jedotkový*** vektor ***kolmý*** na vektor ***u = [3; 2]*** .

<u>Riešenie:</u> Najskôr určíme nejaký vektor **v** ***kolmý*** na vektor **u**.
Vo všeobecnosti, ak hľadáme nejaký vektor kolmý na vektor **[a; b]** , tak môžeme využiť vektor **[-b; a]**, pretože ich skalárny súčin je **0**. *<u>[a; b].[-b; a] = - ab + ab = 0</u>*
Takže vektor ***v = [-2; 3]*** je kolmý na vektor **u**.

Potom, spôsobom podobným ako v príklade 5 tejto kapitoly nájdeme dve riešenia úlohy

$$\boldsymbol{v_1} = [\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}] \quad a \quad \boldsymbol{v_2} = [\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}].$$

Vektorové násobenie vektorov

<u>Definícia :</u>

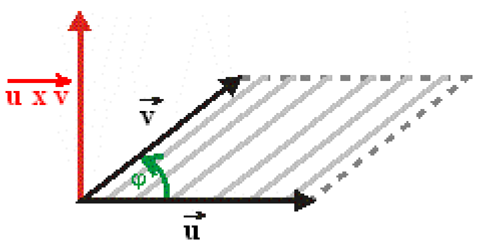
Vektorový súčin nenulových vektorov u a v je vektor **w**, ktorý má tieto vlastnosti :

1. **w** je ***kolmý*** na vektory **u** a **v**
2. smer vektora **w** je určený ***pravidlom pravej ruky***
3. **|w| = |u| . |v| . sin φ , φ ∈ ⟨ 0°; 180°⟩**

Ak je aspoň jeden z vektorov **u** a **v** nulový, tak ich vektorovým súčinom je ***nulový*** vektor.

Vektorový súčin označujeme **u** x **v.**

Pravidlo pravej ruky :
Ruku položíme dlaňou na rovinu, v ktorej ležia vektory **u** a **v**. Palec postavený kolmo k dlani určuje smer vektora **w**.



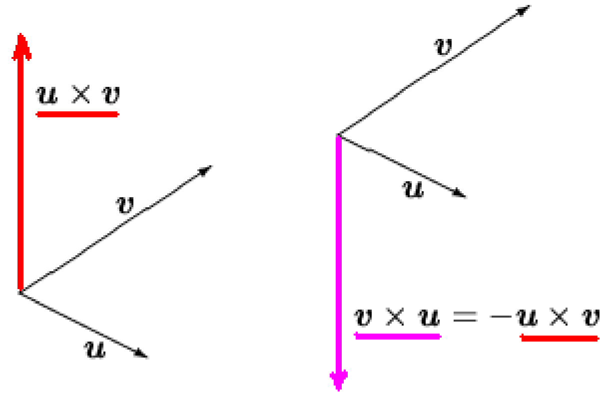
<u>Poznámka:</u>

Geometrický význam tretej vlastnosti je ten, že ***dĺžka*** (veľkosť) ***vektorového súčinu*** dvoch vektorov sa rovná ***veľkosti plošného obsahu rovnobežníka*** vytvoreného týmito vektormi.

Veta : Pre každé nenulové vektory **u** a **v** v priestore platí :

a) ak **u** je násobkom **v**, tak **u** x **v** = **0**

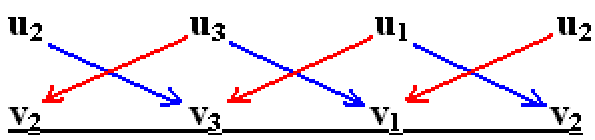
b) **u** x **v** = – (**v** x **u**)



Veta : Nech v ***pravotočivej*** ortonormálnej sústave súradníc v priestore sú dané vektory **u**[u_1; u_2; u_3] a **v**[v_1; v_2; v_3].
Potom súradnice vektora **w = u x v** ***môžeme vypočítať podľa vzorca*** **:**

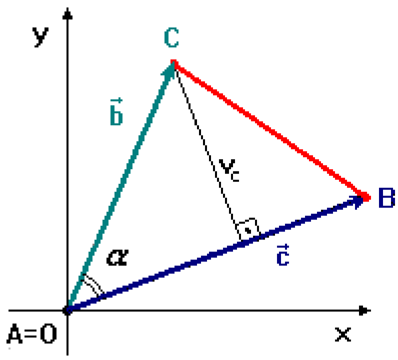
$$\mathbf{w_1 = u_2.v_3 - u_3.v_2,\ \ w_2 = u_3.v_1 - u_1.v_3,\ w_3 = u_1.v_2 - u_2.v_1}$$

alebo pomocou ***schémy***:



$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [u_2v_3 - u_3v_2\ ;\ u_3v_1 - u_1v_3\ ;\ u_1v_2 - u_2v_1]$$

Poznámka :
Ak potrebujeme určiť v priestore ľubovoľný vektor, ktorý je ***kolmý*** na dané vektory **u** a **v**, tak použijeme vektor **w = u** x **v**.



Veta (obsah trojuholníka) :

Nech v priestore je daný trojuholník ABC a nech
b = ***AC*** a **c** = ***AB***.

Potom $P_{\Delta ABC} = ½.|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$

Dôkaz :
$P_{\Delta ABC} = ½.c.v_c$, $v_c = b.\sin\alpha$, $b = |\mathbf{b}|$, $c = |\mathbf{c}|$

Po dosadení : $P_{\Delta ABC} = ½.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}|.\sin\alpha = ½.|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ podľa definície vektorového súčinu.

Poznámka :
Z každej úlohy v rovine môžeme urobiť úlohu v priestore tak, že za ***tretiu súradnicu*** bodov (vektorov) dosadíme ***nulu***.

Príklad 12: Vypočítame obsah trojuholníka s vrcholmi A[3; -1; 5] , B[0; 4; -2] , A[-3; 3; 1]

Riešenie:

Hľadaný obsah je rovný polovici plochy rovnobežníka, ktorá sa rovná dĺžke vektorového súčinu vektorov **u** = B – A = **[-3; 5; -7]** a **v** = C – A = **[-6; 4; -4]**.

Podľa vety využitím vzorca alebo schémy platí: **u** x **v** = **[8; 30; 18]**

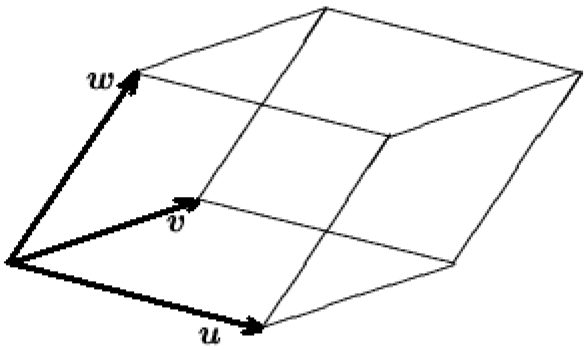
$$\mathbf{P_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 30^2 + 18^2} = \sqrt{322} \approx 17{,}95 \text{ j}^2.$$

Veta (objem rovnobežnostena) :
Rovnobežnosten je štvorboký hranol, ktorého protiľahlé steny sú rovnobežné.
Pre objem rovnobežnostena ABCDEFGH, v ktorom **u** = ***AB***, **v** = ***AD*** a **w** = ***AE*** platí :

$$V = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\mathbf{w}|$$

Rovnobežnosten ABCDEFGH danou trojicou vektorov (orientovanými úsečkami so spoločným počiatočným bodom) je ***jednoznačne*** určený.

Poznámka : Súčin **(u** x **v).w** sa nazýva ***zmiešaný súčin vektorov***.
Nakoľko na základe poradia operácií ako posledná sa vykonáva skalárny súčin vektorov , výsledkom zmiešaného súčinu je ***konštanta***



Príklad 13: Vypočítame objem a obsah povrchu rovnobežnostena ABCDEFGH, s vrcholmi A[-1; 2; -4] , B[2; 3; 0] , D[-2; 7; -4] , E[1; -1; -6] .
Riešenie:
Objem bude rovný absolútnej hodnote zmiešaného súčinu vektorov **u** = B – A = **[3; 1; 4]** , **v** = D – A = **[-1; 5; 0]** , **w** = E – A = **[2; -3; -2]**

u x v = [-20; -4; 16] ... **(u x v).w** = – 40 + 12 – 32 = **– 60** ... **V = |– 60| = 60 j³.**

Obsah povrchu vypočítame pomocou vektorových súčinov

$$\mathbf{S = 2(|u \times v| + |u \times w| + |v \times w|) = 2(}|[-20; -4; 16]| + |[10; 14; -11]| + |[-10; -2; -7]|\mathbf{)} =$$
$$= \mathbf{2(}\sqrt{672} + \sqrt{417} + \sqrt{153}\mathbf{)} \approx \mathbf{117{,}4\ j^2.}$$

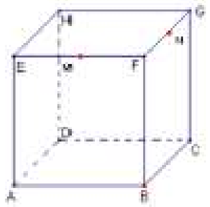
Obsah trojuholníka
pomocou vektorov:

Príklad:

Daná je kocka ABCDEFGH a rovina $\boldsymbol{\rho} = \overleftrightarrow{MNB}$, **kde M je stred EF, N stred FG**

a) zostrojte rez kocky rovinou ρ,

b) vypočítajte obsah rovinného rezu, ak hrana kocky **a = 2cm.**



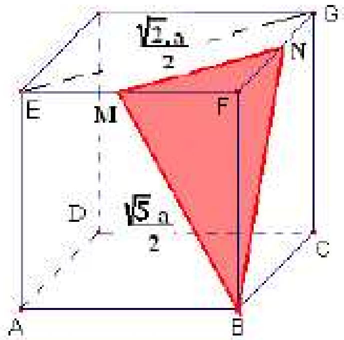
Riešenie:

1. spôsob: (nástrojmi z planimetrie)

- *vzniknutý rez je rovnoramenný trojuholník MNB, ktorého veľkosti strán sú :*

$|MN| = \frac{\sqrt{2}.a}{2}$, *lebo je to stredná priečka trojuholníka EGF, polovica veľkosti uhlopriečky*

$|MB| = \frac{\sqrt{5}.a}{2} = |NB|$

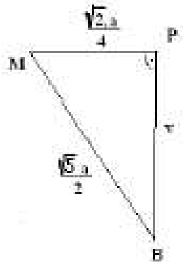


- *b)* $S_{MNB} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}.v}{2} = \frac{\sqrt{2}a.v}{4}$ *, kde jeho výšku určíme z trojuholníka BMP*

pomocou Pytagorovej vety:

$v^2 = \left(\frac{\sqrt{5}.a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}.a}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}a^2$, *kde P je päta výšky a aj stred základneMN*

$v = \frac{3}{2\sqrt{2}}.a$



$$\boxed{S_{MNB} = \frac{\sqrt{2}a.v}{4} = \frac{\sqrt{2}a.\frac{3}{2\sqrt{2}}a}{4} = \frac{3}{8}a^2 = \frac{3}{8}2^2 = \frac{3}{2}cm^2}$$

ak a =2cm.

2. spôsob: (pomocou nástrojov analytickej geometrie)

Vložme kocku do súradnicovej sústavy: tak aby **D[0;0;0]**, potom stačí určiť vektorový súčin vektorov $\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BN}$, pričom

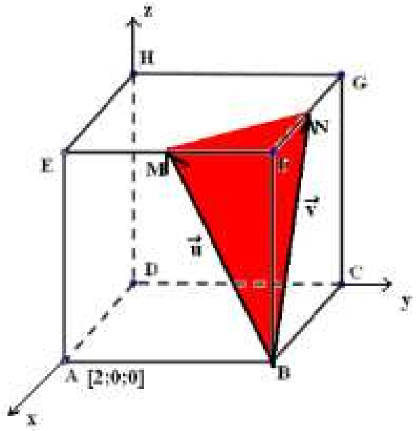
B[2;2;0]; M[2;1;2]; N[1;2;2]

$\vec{u} = \overrightarrow{BM} = \vec{m} - \vec{b} = (0;\ -1;\ 2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{BN} = \vec{n} - \vec{b} = (-1;\ 0;\ 2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-2;\ -2;\ -1)$

$$\boxed{S\Delta = \frac{1}{2}.|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}.\sqrt{4+4+1} = \frac{3}{2}\ cm^2}$$



Úlohy - súhrn

1. Znázornite vektor $\vec{u}$ a určte jeho veľkosť, ak: a) $\vec{u} = (2; 6)$; b) $\vec{u} = (-3; 4)$

2. Znázornite vektor $\vec{u}$ a určte jeho veľkosť, ak:

a) $\vec{u} = (5; 6; 4)$; b) $\vec{u} = (-3; 2; -3)$; c) $\vec{u} = (4; 0; 2)$

3. Dané sú body A[2;-3] a B[x;0]. Určite x, aby pre veľkosť vektora platilo |AB| = 5.

4. Daná je kocka ABCDEFGH. Zostrojte vektor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{DB}$

5. Daný je pravidelný šesťuholník ABCDEF. Zostrojte vektor $\overrightarrow{AB} - 2.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}$

6. Určte súradnice stredu úsečky

a) A[3; 7]; B[-1; 3] b) A[-2; 1; 0,8]; B[-1; 7; 3,2]

7. Vypočítajte súradnice koncového bodu B vektora $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ a jeho veľkosť, ak vieme súradnice bodu A[1;1] a súradnice stredu úsečky AB: S[4;5].

8. Určte veľkosť vektora

a) $\overrightarrow{AB}$ ak $A[6; -5]$; $B[4; 1]$ b) $\overrightarrow{KL}$ ak $K[-7; 1; -2]$; $L[-4; 2; 3]$

9. Zisti, či vektory $\vec{u}$; $\vec{v}$ sú lineárne závislé, ak:
a) $\vec{u} = (4; 2)$; $\vec{v} = (-6; -3)$ b) $\vec{u} = (1; 4; 2)$; $\vec{v} = (2; 2; 1)$

10. Doplňte súradnice vektora $\vec{b}$, aby vektory boli lineárne závislé, ak $\vec{a}\,(15; -5; 10)$; $\vec{b}\,(6; y; z)$

11. Zisti, či body A, B, C tvoria trojuholník, ak áno, vypočítajte veľkosti jeho strán a veľkosti vnútorných uhlov.
a) A[4; 2]; B[2; 6]; C[−1; 3] b) A[4; 2]; B[2; 6]; C[6; −2]

12. Určte súradnice ťažiska trojuholníka ABC, ak: A[4; 2]; B[3; 6]; C[−1; 3].

13. Dané sú body A[1; 3]; B[5; 4]; D[2; 6]. Určte (vypočítajte) súradnice bodu C tak, aby body A,B,C,D tvorili rovnobežník.

14. Daný je vektor $\vec{u}\,(3; 4)$. Určte súradnice vektora $\vec{v}$, ktorý je na vektor $\vec{u}$ kolmý a má veľkosť 15.

15. Určte chýbajúcu súradnicu vektora $\vec{u}$ tak aby platilo: $\vec{u}.\vec{v} = 0$, ak :
a) $\vec{u}\,(2; u_2)$; $\vec{v}\,(1; 2)$ b) $\vec{u}\,(2; u_2; -1)$; $\vec{v}\,(1; -5; -3)$

16. Dané sú vektory $\vec{a}\,(3; -2)$; $\vec{b}\,(-1; 5)$. Určte vektor $\vec{c}$ pre ktorý platí: $\vec{a}\,.\,\vec{c} = 17$; $\vec{b}\,.\,\vec{c} = 3$.

17. Určte výpočtom uhol vektorov a) $\vec{u}\,(3; 1)$ a $\vec{v}\,(4; 2)$. b) $\vec{u}\,(2; -4; 2)$ a $\vec{v}\,(-2; 1; 1)$

18. Určte súradnice vektora, ktorý je kolmý na vektory $\vec{a}\,(2; -3; 5)$ a $\vec{b}\,(4; -1; -2)$.

19. Určte obsah rovnobežníka *ABCD*, ak *A*[0, 4, 7], *B*[2, 2, 2], *D*[6, 1, 5].
20. Určte obsah trojuholníka *ABC*, ak A[2; 2; 0]; B[2; 1; 2]; C[1; 2; 2].

Analytická geometria lineárnych útvarov

V tejto časti budeme narábať s pojmami:

Smerový vektor priamky **p** je každý ***vektor rovnobežný*** s priamkou **p**.
Normálový vektor priamky **p** je každý ***vektor kolmý*** na priamku **p**.
Smerový vektor roviny α je každý ***vektor rovnobežný*** s rovinou α.
Normálový vektor roviny α je každý ***vektor kolmý*** na rovinu α.

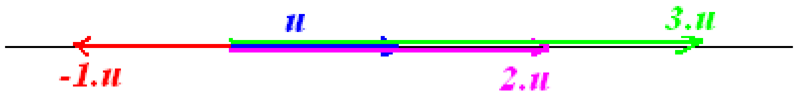
Poznámka:
Ak niektorý vektor je smerovým alebo normálovým vektorom priamky alebo roviny, tak aj jeho ľubovoľný nenulový skalárny násobok je taký. To znamená, že každá priamka alebo rovina má nekonečne veľa smerových a normálových vektorov. Dôležité však je, že

- ak máme určenú priamku v rovine, tak **smery** jej **normálového** a **smerového** vektora sú **jednoznačne určené**
- ak máme určenú priamku v priestore, tak **smer** jej **smerového** vektora je **jednoznačne určený**, avšak má **nekonečne veľa normálových** vektorov **rôznych smerov**
- ak máme určenú rovinu v priestore, tak **smer** jej **normálového** vektora je **jednoznačne určený**, avšak má **nekonečne veľa smerových** vektorov **rôznych smerov**.

1. Parametrické vyjadrenie priamky

Lineárne útvary sú **priamka a rovina** a ich časti.
Zápis **v** = B – A znamená, že umiestením vektora **v** je orientovaná úsečka ***AB***.
Zápis **B = A + v** čítame ***súčet súradníc*** bodu ***A*** a vektora ***v*** – je to bod **B**, ktorý vznikne ***posunutím*** bodu **A** rovnakým smerom ako je smer vektora **v** o vzdialenosť zhodnú s veľkosťou vektora **v**.

Úloha : Aký ***útvar*** vytvoria body, ktoré vzniknú súčtom súradníc daného bodu **A** so ***všetkými reálnymi násobkami vektoru v*** ?



Záver : priamku ???

Nech bod **X** je ***ľubovoľný*** bod priamy **p** určenej ***dvoma rôznymi bodmi A, B***.

Potom pre vektor určený orientovanou úsečkou ***AX*** platí: X – A = t.**u,** t ∈ R , odkiaľ matematickou úpravou dostaneme X = A + t.**u** – táto rovnica platí len pre súradnice bodu **A** a vektora **u**, nakoľko doslovný súčet bodu a vektora je nezmysel.

<u>Definícia :</u>

Každú priamku p = AB môžeme vyjadriť rovnicou X = A + t.**u**, kde **u** = B – A je tzv. ***smerový vektor priamky*** p = AB, **X** je ľubovoľný bod ležiaci na priamke p = AB a ***t∈R*** je tzv. ***parameter***.

Túto rovnicu nazývame ***parametrické vyjadrenie priamky***.

Ak **A**$[a_1; a_2; a_3]$ a **u**$[u_1; u_2; u_3]$, tak pre **súradnice bodu X[x; y; z]** platí:

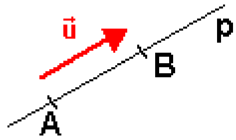
$$X = A + t.\mathbf{u} \;\; \ldots \;\; [\mathbf{x; y; z}] = [\mathbf{a_1; a_2; a_3}] + \mathbf{t.}\, [\mathbf{u_1; u_2; u_3}] \;\; \ldots$$

$$\mathbf{x = a_1 + t.u_1} \wedge \mathbf{y = a_2 + t.u_2} \wedge \mathbf{z = a_3 + t.u_3,\ t \in R}$$

alebo
$$\mathbf{x = a_1 + t.u_1}$$
$$\mathbf{y = a_2 + t.u_2}$$
$$\mathbf{z = a_3 + t.u_3,\ t \in R}$$

<u>1. veta :</u>

Každá priamka má nekonečne veľa parametrických vyjadrení.
Každá rovnica $X = A + t.\mathbf{u}$, $t \in R$
je parametrickým vyjadrením ***práve jednej*** priamky.



<u>2. veta :</u>

Smerový vektor priamky je ***rovnobežný*** s danou priamkou**.**

Zmenou množiny parametra môžeme vyjadriť aj ***časti priamky***:

- polpriamka AB: $X = A + t.\mathbf{u}$, $\mathbf{t \in \langle 0; \infty)}$
- polpriamka BA: $X = A + t.\mathbf{u}$, $\mathbf{t \in (- \infty; -1\rangle}$
- úsečka AB: $X = A + t.\mathbf{u}$, $\mathbf{t \in \langle 0; 1\rangle}$
- izolované body ležiace na priamke AB: $X = A + t.\mathbf{u}$, $\mathbf{t \in \{-3; 0; 5; 7\}}$

<u>Príklad 1:</u> Sú dané body A[6; -1] a B[-4; 5] .
Napíšeme rovnicu ***úsečky AB*** a nájdeme súradnice takého bodu **C** na ***úsečke AB*** aby platilo **d(A, C) = 2.d(B, C)**.

<u>*Riešenie:*</u> **u** = B – A = **[-10; 6]**

Parametrické vyjadrenie (rovnice) úsečky AB:
$$\mathbf{x = 6 - 10.t}$$
$$\mathbf{y = -1 + 6.t\,,\ t \in \langle 0; 1\rangle}$$

alebo $\mathbf{[x; y] = [6 - 10.t\, ; -1 + 6.t\,]\,,\ t \in \langle 0; 1\rangle}$

Bod **C** leží v dvoch tretinách úsečky AB smerom od bodu **A** k bodu **B**, preto jeho súradnice dostaneme pre hodnotu parametra **t = 2/3** a dosadením do parametrických rovníc dostaneme **C[-2/3; 3].**

2. Všeobecná rovnica priamky

Nech priamka p je určená bodom **A**$[\mathbf{a_1; a_2}]$ a smerovým vektorom **u**$[\mathbf{u_1; u_2}]$, t.j. platí

p: $X = A + t.\mathbf{u}$, $t \in R$ alebo
$$\mathbf{x = a_1 + t.u_1}$$
$$\mathbf{y = a_2 + t.u_2\,,\ t \in R}$$

$x = a_1 + t.u_1 \quad /.u_2$
$\underline{y = a_2 + t.u_2 \quad /.(-u_1)}$ <u>rovnice sčítame</u>
$u_2.x - u_1.y = a_1.u_2 - a_2.u_1$ ... $u_2.x - u_1.y - a_1.u_2 + a_2.u_1 = 0$ ... $\mathbf{a.x + b.y + c = 0}$, kde
a, b, c $\in$ R pre ktoré platí $\boldsymbol{a = u_2}$, $\boldsymbol{b = -u_1}$ a $\boldsymbol{c = -a_1.u_2 + a_2.u_1}$

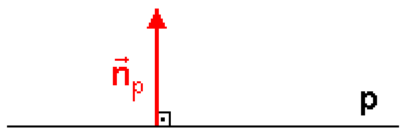
<u>Definícia :</u>
Rovnicu **p: a.x + b.y +c = 0**, v ktorej aspoň jedno z reálnych čísel a, b je rôzne od nuly, nazývame ***všeobecná*** rovnica priamky ***p*** v ***rovine***.
Vektor **n[a; b]** sa nazýva ***normálový*** vektor priamky ***p***.

<u>3. veta (o počte všeobecných rovníc) :</u>

Každá priamka má ***v rovine nekonečne veľa všeobecných*** rovníc, ktoré sú nenulovým násobkom jednej z nich.
Každá rovnica **a.x + b.y + c = 0**, kde a,b,c $\in$ R, je rovnicou práve jednej priamky.

<u>4. veta :</u>

Normálový vektor priamky ***je kolmý na priamku.***



<u>*Dôkaz :*</u> Na základe zápisov pred definíciou platí:

Smerový vektor priamky **p** je **u**$[u_1,u_2]$, jej ***normálový*** vektor je **n**$[u_2,-u_1]$.
u.n $= u_1.u_2 + u_2.(-u_1) = \mathbf{0} \Rightarrow$ vektory **u** a **n** sú na seba kolmé.

Tento dôkaz je zároveň ***návod na napísanie všeobecnej rovnice priamky***,
ak poznáme jej ***parametrické*** vyjadrenie alebo súradnice 2 bodov ležiacich na priamke (využitím smerového vektora).

<u>*Poznámka:*</u>

Všeobecná rovnica priamky existuje len v rovine,
t. j. v dvojrozmernom priestore.

<u>Príklad 2:</u> Napíšeme všeobecnú rovnicu priamky určenej bodmi A[2; 5] a B[-1; 3] a potom zistite, či bod C[-5; -3] je bodom priamky AB.

<u>*Riešenie:*</u> ***Smerový*** vektor **u** = B – A = **[-3; -2]** ... normálový vektor **n** = **[2; -3]**
Pre priamku p = AB platí: **2.x – 3.y + c = 0**, kde **c** $\in$ **R**.
Nakoľko body **A**, **B** sú bodmi danej priamky, ich súradnice musia vyhovovať danej rovnici – <u>základ ANALYTICKEJ GEOMETRIE</u> – súradnice bodu musia vyhovovať rovnici (nerovnici) geometrického útvaru, ktorá tento útvar popisuje.
Musia vyhovovať' = po dosadení dostaneme PRAVDIVÝ VÝROK.

A$\in$p: $2.2 - 3.5 + c = 0$ ... $c = 11$
B$\in$p: $2.(-1) - 3.3 + c = 0$ ... $c = 11$

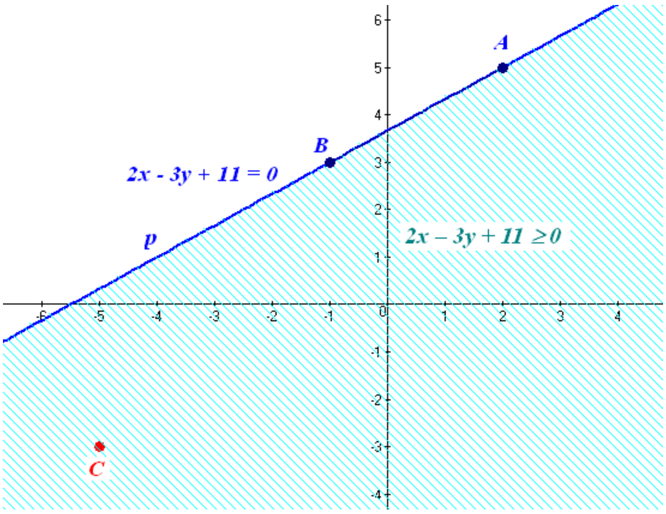
p = AB: **2.x – 3.y + 11 = 0**

Poznámka:

Na určenie konštanty **c** stačí dosadiť čo čiastkovej všeobecnej rovnice priamky súradnice len jedného bodu, ktorý tejto priamke patrí.

Nech C∈p: 2.(-5) – 3. (-3) + 11 = 0 ... **10 = 0** ≈ ***nepravdivý výrok*** ⇒ **C ∉ p**.

Keďže bod C nevyhovuje rovnici 2x – 3y + 11 = 0, ktorá je všeobecnou rovnicou priamky p ležiacej v rovine, neleží na priamke p, t. j. leží v jednej z polrovín, na ktoré táto priamka rovinu rozdeľuje.
Nakoľko súradnice bodu **C** vyhovujú nerovnici **2x – 3y + 11 ≥ 0**, táto nerovnica musí byť analytickým vyjadrením ***polroviny*** ohraničenej priamkou **p** a obsahujúcej bod **C**.



Poznámka:

Dosadením bodu **O[0; 0]** do danej nerovnice dostaneme tiež pravdivý výrok **11 ≥ 0** ⇒ **O** ∈ $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{pC}$.
Pokiaľ hraničná priamka polroviny neprechádza bodom **O[0; 0]**, ***znamienko*** nerovnosti pre určenie ***všeobecnej nerovnice polroviny*** sa najjednoduchšie určuje pomocou tohto bodu.

Platí: Nech priamka ***p: ax + by + c = 0*** je súčasťou roviny ρ (leží v rovine ρ).
Priamka p rozdeľuje rovinu ρ na ***dve opačné polroviny***, ktorých analytickým vyjadrením sú ***nerovnice***:

$$ax + by + c \geq 0 \quad \vee \quad ax + by + c \leq 0$$

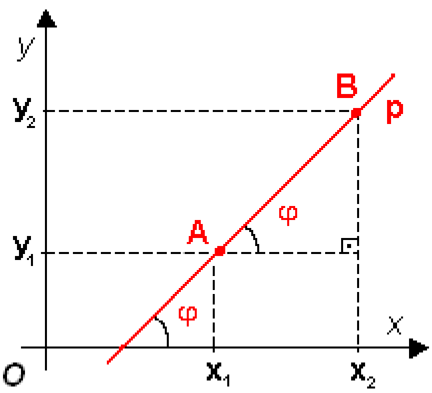
3. Ďalšie vyjadrenia priamky

Grafom funkcie **f: y = a.x + b**, kde a, b ∈ R, ***je priamka***.

Definícia :

Rovnica **y = k.x + q,** kde **k, q ∈ R**, sa nazýva ***smernicová rovnica priamky***, číslo **k** je ***smernica*** priamky.

Nech **φ** je uhol, ktorý zviera ***priamka p s kladnou polosou osi x***.



Platí : **$tg\ \varphi = (y_2 – y_1)/(x_2 – x_1)$.**
Pretože body A a B ležia na priamke p, zároveň platí : $y_1 = k.x_1 + q$
$y_2 = k.x_2 + q$
Rovnice odčítame : $\boldsymbol{y_2 – y_1 = k.(x_2 – x_1)}$ a vyjadríme **$k = (y_2 – y_1)/(x_2 – x_1)$**

5. veta :

Smernica priamky *je zároveň* ***tangensom uhla,***
ktorý priamka zviera ***s kladnou polosou osi x, t. j.*** $\boldsymbol{k = tg\ \varphi}$.

Dôsledky :

Priamky **rovnobežné s osou y nemajú smernicovú rovnicu**, pretože s osou x zvierajú uhol 90^o a tg 90^o nie je definovaný (neexistuje).
Všetky navzájom ***rovnobežné*** priamky majú ***rovnakú smernicu***, lebo s kladnou polosou osi x zvierajú rovnaký uhol.
X – y

Príklad 3: Napíšeme ***všeobecnú***, ***smernicovú*** a ***parametrické*** rovnice priamky **p** so smernicou **–1/2** prechádzajúcou bodom **P[3; –2]**.

Riešenie: Smernicová rovnica priamky **p** má tvar $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x + q}$.

Z vlastnosti $P \in p$ vyplýva, že platí $-2 = -\frac{1}{2}.3 + q$ ... $q = -\frac{1}{2}$

Hľadaná ***smernicová*** rovnica priamky **p** je $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$.

Keď v tejto rovnici prenesieme výraz z pravej strane na ľavú stranu, dostaneme

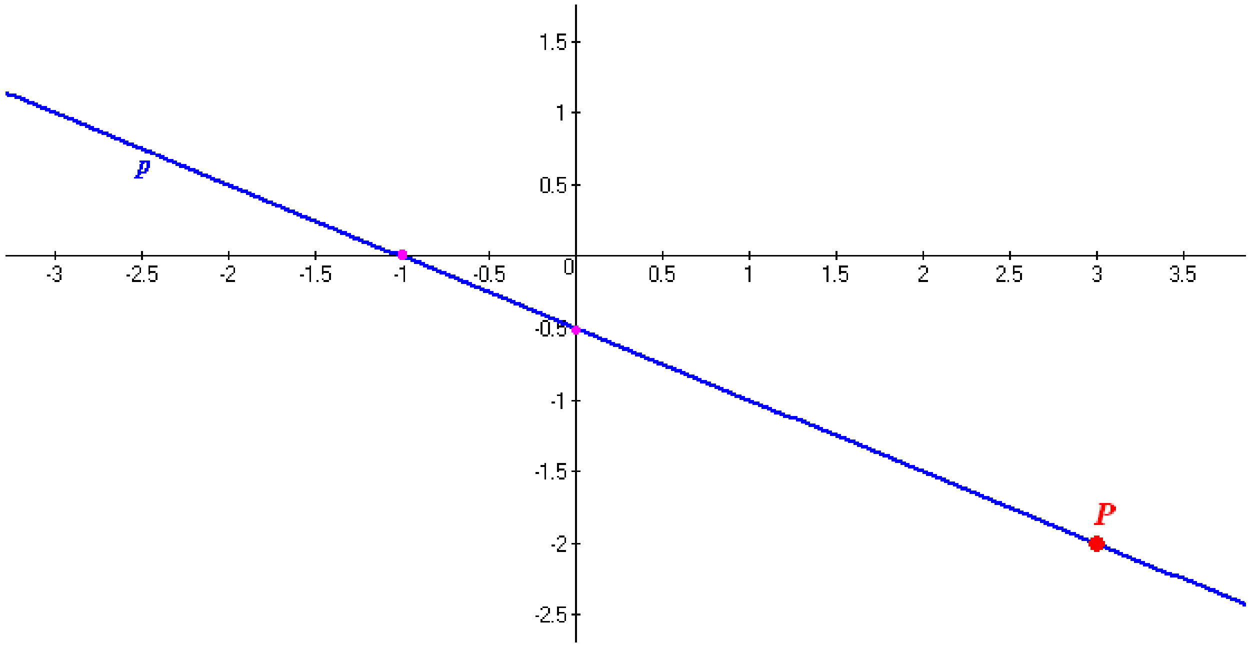
všeobecnú rovnicu priamky **p:** $\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2} = 0.$

Túto rovnicu môžeme upraviť na rovnicu s ***celočíselnými*** koeficientami:

$$\mathbf{x + 2y + 1 = 0}\ .$$

Na určenie ***parametrických*** rovníc potrebujeme súradnice ***smerového*** vektora priamky, pričom z poslednej rovnice poznáme jej ***normálový*** vektor **n = [1; 2]**.
Môžeme preto pracovať so ***smerovým*** vektorom **u = [– 2; 1]**, ktorý spolu s bodom **P** určí ***parametrické*** rovnice priamky **p:** $[x; y] = [3 - 2t; -2 + t],\ t \in R$ alebo

p: $x = 3 - 2t$
$y = -2 + t,\ t \in R$



<u>Trocha matematickej hry nezaškodí:</u>

x + 2y + 1 = 0 ... x + 2y = – 1 / : (– 1) ... – x – 2y = 1 ... $\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{1}{-2}}=1$ **...** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-0{,}5}=1$

Priamka **p** pretína **os x** v obraze čísla **– 1** a **os y** v obraze čísla **– 0,5** a ak to porovnáme s upravenou rovnicou, vidíme, tieto konštanty sú ***menovateľmi*** zlomkov v tejto rovnici.

<u>Platí:</u>

Nech **p: a.x + b.y + c = 0, a, b∈R – {0}**. Potom túto priamku je možné zapísať rovnicou

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

kde **p** <u>určuje úsek</u>, aký ***priamka vytína na osi x*** a
q <u>určuje úsek</u>, aký ***priamka vytína na osi y***.

Rovnicu ***x/p + y/q = 1*** nazývame ***úsekový tvar rovnice priamky***.

Postup prechodu ***zo všeobecnej*** rovnice priamky ***na úsekový tvar*** rovnice priamky:

a.x + b.y + c = 0 ... a.x + b.y = – c / : (– c) ... $\frac{a.x}{-c}+\frac{b.y}{-c}=1$ **...** $\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$ **...**

... nech **p =** $\frac{-c}{a}$ a **q =** $\frac{-c}{b}$ **...** $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

<u>Príklad 4:</u> Napíšeme ***všeobecnú***, ***smernicovú*** a ***parametrické*** rovnice priamky **p** prechádzajúcou bodmi **K[– 5; 0]** a **L[0; 3]**.

<u>Riešenie:</u> ***Úseková*** rovnica priamky **p** má tvar $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$, ktorú potom upravíme na

3x – 5y = – 15 ... ***všeobecná*** rovnica priamky **p: 3x – 5y + 15 = 0.**

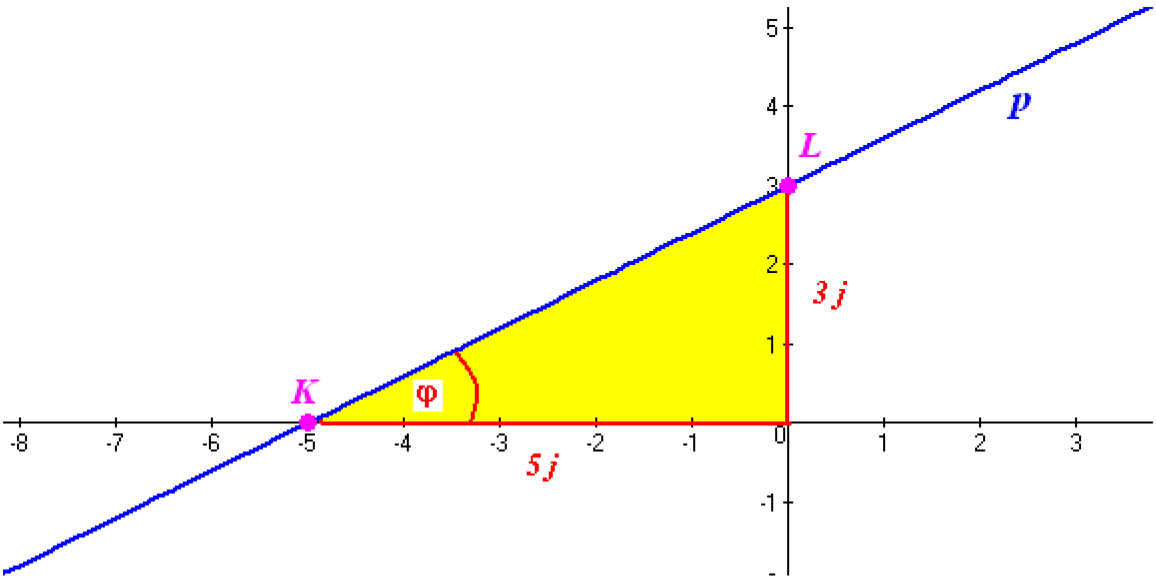
Zo všeobecnej rovnice vyjadríme y = $\frac{3}{5}x+3$, čím dostaneme

smernicovú rovnicu priamky **p: y =** $\frac{3}{5}$**x + 3 ... tg φ = 3/5**

Zo všeobecnej rovnice priamky vyjadríme ***normálový*** vektor **n = [3; –5]** na základe ktorého určíme jej ***smerový*** vektor **u = [5; 3]** .

Parametrická rovnica priamky **p:** $x = 0 + 5t$

$y = 3 + 3t,\ t \in R$



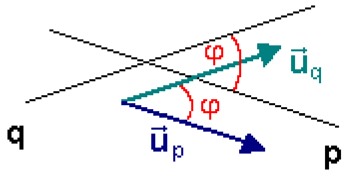
4. Uhol a vzájomná poloha 2 priamok

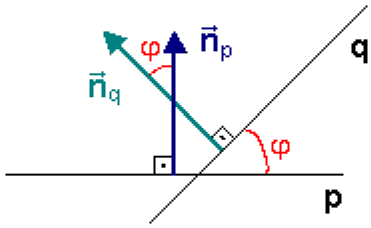
<u>6. veta (o uhle priamok):</u>

Uhol 2 priamok je uhol ***ich smerových* (**alebo*** normálových* **)** *vektorov.***
Za uhol 2 priamok považujeme ***menší*** z dvojice možných uhlov.

Preto na výpočet uhla priamok používame vzorec **cos φ =** $\left|\frac{u_1.v_1+u_2.v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}.\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right|$, ak oba vektory sú toho istého typu (smerový – smerový alebo normálový – normálový).

Ak vektory sú typu smerový – normálový, používame vzorec **sin φ =** $\left|\dfrac{u_1.n_1 + u_2.n_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}.\sqrt{n_1^2+n_2^2}}\right|$





V prípade, že ***skalárny súčin smerových*** alebo ***normálových*** vektorov ***sa rovná nule***, ***priamky sú na seba kolmé***.

Spôsob určenia <u>vzájomnej polohy</u> dvoch priamok:

Priamky určené

všeobecnými rovnicami

Schéma určenia vzájomnej polohy
2 priamok **p** a **q**:

Je $\mathbf{n_p}$ násobkom $\mathbf{n_q}$?
áno → Je rovnica pre **p** ***násobkom*** rovnice pre **q ?**
- *áno* → ***totožné***
- *nie* → ***rovnobežné***

nie → ***rôznobežné***

parametrickými rovnicami

Dané sú priamky : **p:** X = A+t.**u**, t∈R
q: X = B+s.**v**, s∈R
Schéma určenia ich vzájomnej polohy:

Je **u** násobkom **v** ?
áno → Leží bod **A** na **q** ?
- *áno* → ***totožné***
- *nie* → ***rovnobežné***

nie → V ***rovine*** určite ***rôznobežné***
V ***priestore*** musíme zistiť, či existuje ***ich priesečník:***
- *áno* → ***rôznobežné***
- *nie* → ***mimobežné***

<u>Príklad 5:</u> Vypočítajte odchýlku (uhol) priamok **p: 2x – 4y + 7 = 0** a
q: [x; y] = [1 – t; - 3 + 2t] , t ∈ R.

<u>Riešenie:</u>

$\mathbf{n_p} = [2; -4]$ a $\mathbf{u_q} = [-1; 2]$ alebo $\mathbf{n_q} = [2; 1]$ a nech uhol priamok p, q je **φ**

$$\cos\varphi = \frac{2.2-4.1}{\sqrt{4+16}.\sqrt{4+1}} = \frac{0}{\sqrt{20.5}} = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$ alebo

$$\sin\varphi = \left|\frac{2.(-1)-4.2}{\sqrt{4+16}.\sqrt{1+4}}\right| = \left|\frac{-10}{10}\right| = \mathbf{1} \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

<u>Príklad 6:</u> Určte vzájomnú polohu priamok **p** a **q** ležiacich v rovine, ak
p: [x; y] = [1 – t; 2 – 3t] , t∈R a **q: 2x + 6y + 3 = 0**

<u>Riešenie:</u>

Smerový vektor **s[–1; –3]** priamky **p** je ***násobkom*** normálového vektora **n[2; 6]** priamky **q**
($\mathbf{s} = -\frac{1}{2}.\mathbf{n}$) ⇒ priamky **p** a **q** sú na seba ***kolmé***.
Nakoľko sa tieto priamky nachádzajú v jednej rovine a sú na seba kolmé,
musia mať aj ***spoločný bod.***

p ∩ q: pri analytickom určovaní ***prieniku geometrickýh útvarov*** je potrebné riešiť sústavu rovníc (nerovníc), ktoré tieto útvary reprezentujú. Hľadáme totiž ***všetky spoločné*** body, nachádzajúce sa v daných útvaroch a preto ***ich súradnice musia vyhovovať*** všetkým rovniciam (nerovniciam), t. j. ***sústave týchto rovníc*** (nerovníc).

[x; y] = [1 – t; 2 – 3t] , t∈R ∧ **2x + 6y + 3 = 0 ...** 2.(1 – t) + 6.(2 – 3t) + 3 = 0 ...
... 17 – 20t = 0 ... **t = 17/20**

p ∩ q = {[1 – t; 2 – 3t]} = {[1 – 17/20; 2 – 3. 17/20]} = **{[3/20; – 11/20]}**

<u>Príklad 7:</u> Určte vzájomnú polohu priamok **p: [x; y; z] = [2 – 3t; –5; 2t] , t∈R** a
q: [x; y; z] = [– 1 + 4r; 3 – r; – 3r] , r∈R

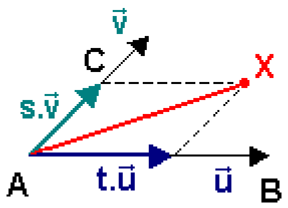
<u>Riešenie:</u>

Smerové vektory $\mathbf{s_p}$ = **[– 3; 0; 2]** a $\mathbf{s_q}$ = **[4; – 1; – 3]** ***nie sú násobkom*** jeden druhého, preto sú ***rôznobežné*** a preto aj priamky sú ***buď rôznobežné alebo mimobežné***.
Rôznobežné sú práve vtedy, ak majú spoločný bod (<u>prienikom je neprázdna množina</u>) a to je práve vtedy, ak existujú také čísla **t** a **r** , pre ktoré platí sústava:

$$\begin{aligned} 2 - 3t &= -1 + 4r \\ -5 &= 3 - r \\ 2t &= -3r \end{aligned}$$

Z druhej rovnice vyplýva, že ak také čísla existujú, tak **r = 8**. Dosadením do tretej rovnice dostávame **t = – 12**. Dosadením obidvoch čísel do prvej rovnice dostávame **38 = 31** , čo je ***nepravdivý výrok*** .
Preto ***sústava rovníc nemá riešenie***, v dôsledku čoho ***priamky nemajú spoločný bod*** a preto sú ***mimobežné***.

5. Parametrické vyjadrenie a všeobecná rovnica roviny



Každými ***troma rôznymi*** bodmi **A**, **B**, **C**, ktoré ***nežia*** na jednej priamke (***nekolineárne***), prechádza (je určená) ***jediná*** rovina ρ.
Ak **u** = ***AB*** a **v** = ***AC***, tak vektor **u** nie je násobkom vektora **v**.

Potom pre ***každý*** bod **X**, ktorý ***leží v rovine*** ρ (je bodom roviny ρ) platí :

X = A + t.**u** + s.**v**, kde t, s ∈ R**.**

Definícia :

Každú ***rovinu ABC*** ($\xrightarrow[ABC]{}$) môžeme pomocou bodu **A** a vektorov **u** = ***AB*** a **v** = ***AC***
vyjadriť (zapísať) rovnicou X = A + t.**u** + s.**v,** kde t,s∈ R a
X je bod ležiaci v ***rovine ABC***.
Túto rovnicu nazývame ***parametrické vyjadrenie roviny*** alebo ***parametrická rovnica roviny***.

Ak **X[x; y; z]**, **A[**$\mathbf{a_1; a_2; a_3}$**]**, **u[**$\mathbf{u_1; u_2; u_3}$**]** a **v[**$\mathbf{v_1; v_2; v_3}$**]**, tak parametrické vyjadrenie roviny ρ môžeme zapísať pomocou sústavy súradníc ρ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a_1 + u_1.t + v_1.s} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{a_2 + u_2.t + v_2.s} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{a_3 + u_3.t + v_3.s}, \quad \mathbf{t, s \in R} \end{aligned}$$

alebo $\mathbf{[x; y; z] = [a_1 + u_1.t + v_1.s;\ a_2 + u_2.t + v_2.s;\ a_3 + u_3.t + v_3.s]}$, **t, s∈R**

8. veta :

Každá rovina má ***nekonečne veľa parametrických*** vyjadrení**.**
Každá rovnica typu X = A + t.**u** + s.**v**, kde t,s∈ R a vektor **u** nie je násobkom vektora **v**, je ***parametrickým vyjadrením práve jednej*** roviny.

Príklad 6: Overte, či bod **P[11; 1; – 12]** leží v rovine určenej parametrickými rovnicami
[x; y; z] = [2 – 3t + s; – 1 – t; 2t – 3s]

Riešenie:

Nech bod **P** leží v danej rovine. Potom ***existujú*** také čísla **t** a **s** , pre ktoré platí
11 = 2 – 3t + s ∧ **1 = – 1 – t** ∧ **– 12 = 2t – 3s**

Z druhej rovnice ⇒ **t = – 2** a dosadením tejto hodnoty do prvej a tretej rovnice dostaneme dve rovnice pre **s**. Prvá z nich má riešenie **s = 3**, kým druhá má riešenie **s = 8/3**, čo je spor s predpokladom, nakoľko neznáma v tej istej sústave rovníc nemôže mať rôzne hodnoty.
Preto bod **P** ***neleží*** v danej rovine.
Ak by mali posledné dve rovnice to isté riešenie, bod by v rovine ležal.

Trocha matematickej hry opäť nezaškodí:

Nech ρ: **[x; y; z] = [2 – 3t + s; – 1 – t; 2t – 3s] ,** t, s∈R, t. j.

$$\begin{array}{rl} x = & 2 - 3t + s \quad /.3 \\ y = & -1 - t \quad /.(-7) \\ \underline{z =} & \underline{2t - 3s} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 3x = & 6 - 9t + 3s \\ -7y = & 7 + 7t \\ \underline{z =} & \underline{2t - 3s} \end{array}$$

$$3x - 7y + z = 13 \;\; \ldots \;\; 3x - 7y + z - 13 = 0$$

Získali sme rovnicu, ktorej vyhovujú súradnice všetkých bodov roviny ρ, t.j. táto rovnica reprezentuje túto rovinu.

Definícia :

Rovnicu ρ: **a.x + b.y + c.z + d = 0,** kde **a, b, c ∈R** a ***aspoň jeden*** z koeficientov a, b, c je ***nenulový*** , nazývame ***všeobecná rovnica roviny***.
Vektor **n[a; b; c]** sa nazýva ***normálový*** vektor roviny.

9. veta :

Normálový vektor roviny je ***kolmý*** na túto rovinu.

Táto veta je zároveň návodom, ako napísať všeobecnú rovnicu roviny ρ,
ak poznáme jej parametrické vyjadrenie ρ: X = A + t.**u** + s.**v**, kde t, s∈R :

1. Nájdeme vektor **n**, ktorý je kolmý na vektory **u** a **v**, napr. **n** = **u** x **v**.
2. Súradnice vektora **n** sú koeficienty a, b, c zo všeobecnej rovnice roviny.
3. Do neúplnej všeobecnej rovnice dosadíme súradnice bodu A a vypočítame koeficient d.

Napr.: Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ρ: **[x; y; z] = [2 – 3t + s; – 1 – t; 2t – 3s] ,** t, s∈R.

$\mathbf{u}_\rho = [-3; -1; 2]$, $\mathbf{v}_\rho = [1; 0; -3]$, bod $\mathbf{A}[2; -1; 0] \in \rho$

$\mathbf{u}_\rho \times \mathbf{v}_\rho = [3; -7; 1]$

ρ: $3x - 7y + z + d = 0 \;\wedge\; A[2; -1; 0] \in \rho \;\Rightarrow\; 3.2 - 7.(-1) + 0 + d = 0 \;\ldots\; d = -13$

Záver: ρ: $3x - 7y + z - 13 = 0$

10. veta :

Každá rovina **má nekonečne** veľa **všeobecných** rovníc, ktoré sú ***nenulovým*** násobkom jednej z nich.
Každá rovnica typu ρ: **a.x + b.y + c.z + d = 0**, kde a, b, c ∈ R a aspoň jeden z koeficientov a, b, c je nenulový, je ***všeobecnou rovnicou práve jednej roviny***.

Poznámka:

**Všeobecná rovnica roviny existuje len v priestore,
t. j. v trojrozmernom priestore.**

Príklad 7: Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi **A[– 1; 3; 0]** , **B[2; 4; 8]** a **C[0; – 4; 1] .**
Zistite, pre ktoré číslo **d** leží bod **D[d; 10; – 1]** v tejto rovine.

Riešenie:

Na určenie ***všeobecnej rovnice roviny*** potrebujeme jej ***normálový*** vektor a jej ***jeden*** bod.

Nech $\overleftrightarrow{ABC}$ = ρ: $\mathbf{u}_\rho = \boldsymbol{AB}$ = B – A = **[3; 1; 8] ,** $\mathbf{v}_\rho = \boldsymbol{AC}$ = C – A = **[1; – 7; 1]**

$\mathbf{u}_\rho \times \mathbf{v}_\rho$ **= [57; 5; – 22]** ... **Poznámka:** v prípade $\mathbf{u}_\rho \times \mathbf{v}_\rho$ **= [0; 0; 0],** body **A, B, C** sú ***kolineárne***, t. j. ležia na jednej priamke a preto ***nemôžu*** jednoznačne určovať rovinu **ρ.**

ρ: $57x + 5y - 22z + d = 0 \;\wedge\; A[-1; 3; 0] \in \rho \;\Rightarrow\; 57.(-1) + 5.3 - 22.0 + d = 0 \;\ldots\; d = 42 \;\ldots$

ρ: $57x + 5y - 22z + 42 = 0$

Bod **D** leží v tejto rovine práve vtedy, ak platí **57.d + 5.10 – 22.(–1) + 42 = 0 ...** **d = – 2**

Poznámka:

Nech ρ**: a.x + b.y + c.z + d = 0,** kde **a, b, c** $\in$ **R** a ***aspoň jeden*** z koeficientov a, b, c je ***nenulový.***
Všetky body **X[x; y; z],** ktoré ***vyhovujú danej všeobecnej rovnici roviny ρ*** ***ležia*** v tejto rovine.
Všetky body **X[x; y; z],** ktoré ***nevyhovujú danej všeobecnej rovnici roviny ρ*** ***neležia*** v tejto rovine, t. j. ležia v jednom z polpriestorov, ktorých hraničnou rovinou je rovina ρ.
Ak bod **X[x; y; z]** ***nevyhovuje*** rovnici **a.x + b.y + c.z + d = 0,** potom ***nutne vyhovuje jednej***

z nerovníc: $a.x + b.y + c.z + d \leq 0 \;\vee\; a.x + b.y + c.z + d \geq 0$ **.**

Tieto nerovnice sú analytickým vyjadrením ***polpriestoru***.

6. Uhol a vzájomná poloha dvoch rovín

<u>11. veta (o uhle rovín):</u>

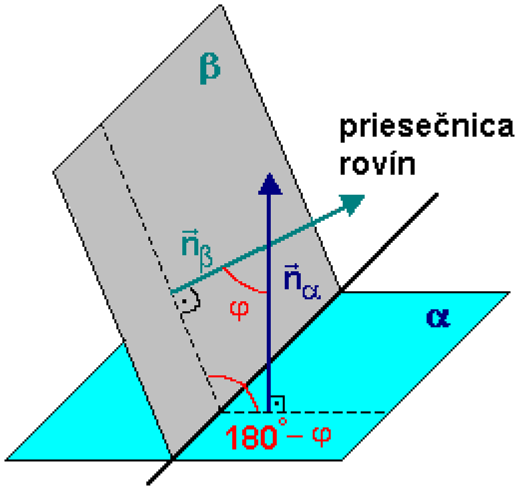
Uhol 2 rovín je uhol ich normálových vektorov.
Ak uhol normálových vektorov φ je ***tupý***, tak uhol rovín je $\boldsymbol{180^o - \varphi}$.

<u>*Poznámka:*</u>

Použitím vzorca $\cos \varphi = \dfrac{|n_\alpha . n_\beta|}{|n_\alpha| . |n_\beta|}$ máme zaručené, že kosínus uhla φ ***nie je záporný***, t. j. uhol φ ***nebude tupý***.

Ak sú dané ***všeobecné rovnice*** 2 rovín α a β,
ich ***vzájomnú polohu*** zistíme podľa schémy :

Je $\mathbf{n}_\alpha$ násobkom $\mathbf{n}_\beta$?
- *áno* → Je rovnica roviny α násobkom rovnice β ?
  - *áno* → **totožné**
  - *nie* → **rovnobežné**
- *nie* → **rôznobežné**



<u>*Poznámka:*</u>

Ak potrebujeme zistiť ***vzájomnú polohu*** alebo ***uhol rovín zadaných parametricky***,
je potrebné ***prepísať' parametrické vyjadrenia na všeobecné rovnice***.

<u>Príklad 8:</u> Určte ***vzájomnú polohu*** a ***odchýlku*** rovín : $\boldsymbol{\alpha: 2x + 5y - 3z + 11 = 0}$ a
$\boldsymbol{\beta: -3x + y + 2z - 6 = 0}$.

<u>*Riešenie:*</u>

$\mathbf{n}_\alpha = [2; 5; -3]$ a $\mathbf{n}_\beta = [-3; 1; 2]$ **...** tieto vektory ***nie sú násobkom jeden druhého*** , t. j. sú *rôznobežné*, preto aj roviny α a β sú ***rôznobežné.***

$$\cos \varphi = \frac{|2.(-3) + 5.1 + (-3).2|}{\sqrt{4+25+9}.\sqrt{9+1+4}} = \frac{|-7|}{\sqrt{38}.\sqrt{14}} \approx 0{,}30349 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi \approx 72{,}33°}$$

7. Vzájomná poloha a uhol priamky a roviny

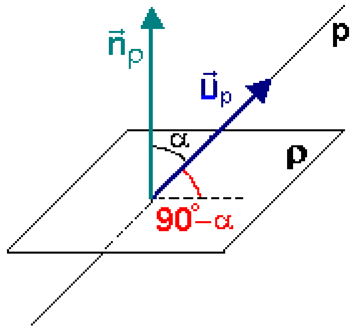
12. veta (o uhle priamky a roviny) :

Uhol φ ***priamky a roviny*** sa rovná $|\mathbf{90^\circ - \alpha}|$, kde α je ***uhol*** ***smerového*** ***vektoru*** ***priamky*** a ***normálového*** ***vektoru*** ***roviny***.

Vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ
zistíme podľa ***schémy*** :

Je $\mathbf{n_\rho}$ kolmý na $\mathbf{u_p}$?
áno → Leží bod **A** v rovine ρ ?
nie → **rôznobežné**

Leží bod **A** v rovine ρ ?
áno → **priamka leží v rovine**
nie → **rovnobežné**



Príklad 9: Napíšte rovnicu priamky **p** kolmej na rovinu ρ: **3x +2y – 5z + 1 = 0** a prechádzajúcej bodom **P[– 4; 0; 2].**

Riešenie:

Keďže hľadaná priamka **p** je ***kolmá*** na danú rovinu ρ (**p** $\perp$ ρ), ako jej smerový vektor môžeme použiť normálový vektor roviny, t. j. $\mathbf{u_p = n_\rho = [\ 3;\ 2;\ -5\ ]}$ **.**

Parametrické vyjadrenie priamky **p: [x; y; z] = [– 4 + 3t; 2t; 2 – 5t] , t∈R.**

Príklad 10: Vypočítame odchýlku priamky **p: [x; y; z] = [2 – t; 4t; 1 + 3t] , t∈R.**

a roviny **ρ: 5x + 2z – 1 = 0 ≡ 5x + 0.y + 2z – 1 = 0**

Riešenie:

$$\mathbf{\sin\varphi} = \frac{|-1.5+4.0+3.2|}{\sqrt{1+16+9}.\sqrt{25+0+4}} = \frac{1}{\sqrt{26}.\sqrt{29}} \approx \mathbf{0{,}0364}\ \ \mathbf{...}\ \ \varphi \approx \mathbf{2{,}087^\circ}$$

Poznámka:

Odchýlka (uhol) dvoch priamok, dvoch rovín alebo priamky a roviny je číslo z intervalu **⟨0°; 90°⟩**.

8. Vzdialenosť bodu od priamky a roviny

13. veta (o vzdialenosti bodu od priamky) :

Vzdialenosť bodu **M[m_1; m_2]** od ***priamky*** **p**: **a.x + b.y + c = 0** je

$$|\mathbf{Mp}| = \frac{|a.m_1 + b.m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

14. veta (o vzdialenosti bodu od roviny) :

Vzdialenosť bodu **M[m_1; m_2; m_3]** od ***roviny*** **ρ**: a.x + b.y + c.z + d = 0 je

$$|\mathbf{M\rho}| = \frac{|a.m_1 + b.m_2 + c.m_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Poznámka:
Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok v rovine určíme tak, že na ľubovoľnej z nich určíme ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od druhej priamky.
Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín určíme tak, že na ľubovoľnej z nich určíme ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od druhej roviny.
Vzdialenosť priamky rovnobežnej s rovinou určíme tak, že na priamke určíme ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od roviny.
Vzdialenosť bodu od priamky v priestore je rovná vzdialenosti tohto bodu od jeho ***kolmého priemetu na danú priamku***. Tento priemet sa robí kolmou rovinou.
Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok v priestore určíme tak, že na ľubovoľnej z nich si zvolíme ľubovoľný bod a postupujeme podľa predchádzajúceho prípadu.

Príklad 11: Vypočítame vzdialenosť bodu **P[– 7; 3]** od priamky **p: [x; y] = [– 2 + 3t; 1 – t] , t∈R**.

Riešenie:

Najskôr nájdeme všeobecnú rovnicu priamky **p**. Jej normálové vektory sú kolmé k jej smerovému vektoru **[3; – 1]** , napríklad vektor **n = [1; 3]**.

Preto všeobecná rovnica priamky **p: x + 3y – 1 = 0 .**

Použitím vzťahu pre vzdialenosť bodu od priamky v rovine dostávame:

$$d(P,p) = \frac{|1.(-7) + 3.3 - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Príklad 12: Vypočítajte vzdialenosť rovín **π: x – 2y + 3z – 6 = 0** a **ρ: 2x – 4y + 6z + 6 = 0** .

Riešenie:

n_ρ = [2; – 4; 6] == 2. n_π = [1; – 2; 3] ⇒ ***roviny sú rovnobežné***

Zvoľme napríklad **[– 3; 0; 0]** ∈ **ρ** a vypočítajme jeho vzdialenosť od **π:**

$$d = \frac{|-3-6|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$$

<u>Príklad 13:</u> Vypočítajte vzdialenosť bodu **Q [–2; 3; 1]** od priamky
p: [x; y; z] = [9 + 4t; – 2 – t; 2 + 3t] , t∈R. .

<u>Riešenie:</u>

Bodom **Q** „zostrojíme“ rovinu **κ** kolmú na priamku **p**, t. j. ***smerový vektor priamky p*** môže byť zároveň ***normálovým vektorom roviny κ*** .

κ: 4x – y + 3z + d = 0 ∧ **Q [–2; 3; 1] ∈ κ ⇒** 4.(-2) – 1.3 + 3.1 + d = 0 **...** d = 8 ...
4x – y + 3z + 8 = 0

κ ∩ p = { Q* } ~ ***kolmý priemet*** bodu **Q** na priamku **p:**

4.(9 + 4t) – 1.(– 2 – t) + 3.(2 + 3t) + 8 = 0 ... 26t = 52 **... t = – 2 ... Q*[1; 0; – 4] ...**

|Q, p| = |Q, Q*| = |Q* – Q| = |[3; – 3; – 5]| = $\sqrt{9+9+25} = \sqrt{43}$

Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok určíme v štyroch krokoch:

1. vyjadríme všeobecný vektor spájajúci ľubovoľný bod jednej priamky s ľubovoľným bodom druhej priamky v závislosti od parametrov obidvoch priamok,
2. nájdeme tie (jednoznačne určené) hodnoty parametrov, pre ktoré je tento vektor kolmý na smerové vektory obidvoch priamok,
3. dosadíme takto získané parametre do vyjadrenia všeobecného vektora,
4. hľadaná vzdialenosť sa rovná dĺžke takto získaného vektora.

<u>Príklad 14:</u> Určte priamku **p** , ktorá je ***prienikom rovín*** **α: x + 2y + z – 5 = 0** a
β: x – 2y – 3z – 1 = 0 .

<u>Riešenie:</u>

Smerový vektor priamky **p** je ***kolmý na normálové vektory obidvoch rovín***, ktoré ju obsahujú ⇒ je ním teda ***ľubovoľný násobok vektorového súčinu***

$\mathbf{s_p} = \mathbf{k.(n_\alpha} \times \mathbf{n_\beta}$ **, k ∈ R – {0}**

$$[1, 2, 1] \times [1, -2, -3] = [-4, 4, -4].$$

Kvôli jednoduchosti budeme pracovať s vektorom

$$\boldsymbol{s_p} = [1, -1, 1].$$

Parametrické rovnice priamky **p** dostaneme voľbou ľubovoľného spoločného bodu rovín **α** a **β**, napríklad bodu so súradnicami **[5; – 1; 2] ...**

$$p: \; [x, y, z] = [5 + s, -1 - s, 2 + s].$$

Príklad 15: Vypočítame vzdialenosť priamky

$$p: \ [x, y, z] = [5 + s, -1 - s, 2 + s].$$

od priamky

$$q: \ [x, y, z] = [-6 + 3t, -3, -2t]$$

Z rovníc priamok **p** a **q** vidíme, že sú buď rôznobežné alebo mimobežné, nakoľko smerový vektor $\mathbf{s_p}$ = **[1; – 1; 1]** nie je násobkom smerového vektora $\mathbf{s_q}$ = **[3; 0; – 2]** .
Priamka **p** pretína rovinu **α** v bode so súradnicami **[45; – 3; – 34]** , ktorý neleží v rovine **β**.
Preto priamka **q** nepretína priamku **p** a ***obidve sú mimobežné***.
Ak A je ľubovoľný bod priamky **p** a B je ľubovoľný bod priamky **q** , tak vektor

B – A **= [–11 + 3t – s; – 2 + s; – 2 – 2t – s]** je kolmý na obidva smerové vektory $\mathbf{s_p}$ = **[1; – 1; 1]** a $\mathbf{s_q}$ = **[3; 0; – 2]** práve vtedy, ak

$$1(-11 + 3t - s) - 1(-2 + s) + 1(-2 - 2t - s) = 0$$

a súčasne

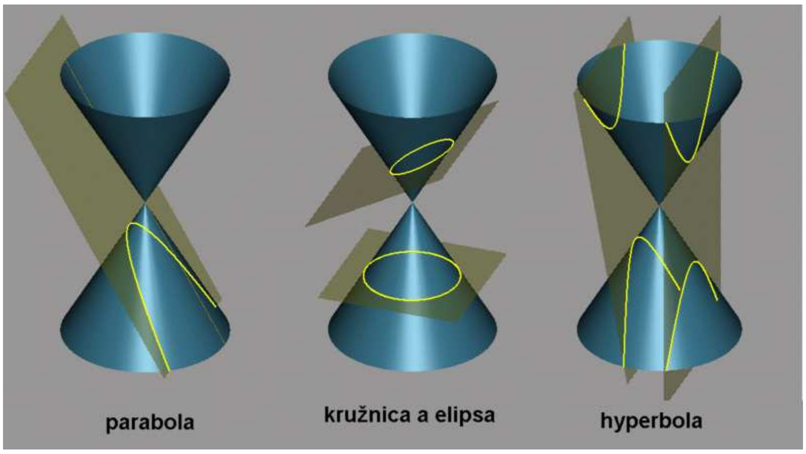
$$3(-11 + 3t - s) + 0(-2 + s) - 2(-2 - 2t - s) = 0.$$

Po úprave a riešení sústavy rovníc dostaneme hodnoty **s = – 3** a **t = 2**.
Dosadením vypočítaných hodnôt parametrov dostávame konkrétny vektor $\boldsymbol{B_0} - \boldsymbol{A_0}$ **= [–2; –5; –3]**.
Hľadaná vzdialenosť mimobežiek **p** a **q** je

$$d = ||\boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{A}_0|| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}.$$

Kužeľosečky

Kužeľosečka je ***rovinná krivka***, ktorá vznikne ***rezom rotačnej kužeľovej plochy*** s rovinou ***neprechádzajúcou jej vrcholom***.



Podľa sklonu roviny rezu vzhľadom na rotačnú os kužeľovej plochy vzniká ***kružnica, elipsa, parabola a hyperbola.***

- ***Elipsa*** je množina všetkých bodov v rovine, ktorých ***súčet vzdialeností od daných dvoch rôznych bodov je konštantný*** a väčší ako vzdialenosť daných bodov.

- ***Parabola*** je množina všetkých bodov v rovine, ktorých podiel vzdialeností od daného bodu a danej priamky je 1, t. j. ***majú rovnakú vzdialenosť od priamky a bodu***, ktorý neleží na priamke.

- ***Hyperbola*** je množina všetkých bodov v rovine, ktorých ***rozdiel vzdialeností v absolútnej hodnote od daných dvoch rôznych bodov je konštantný*** a menší ako vzdialenosť daných bodov.

- ***Kružnica*** so stredom *S* a polomerom *r* je ***množina všetkých bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od bodu S je r***.

Všeobecný tvar rovnice kužeľosečky

- je v tvare: $\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$
- podľa koeficientov **A**, **B** môžeme rozpoznať, o ktorú z pravých kužeľosečiek sa jedná, t.j. ak:
  - **A = B**, pričom sú rozdielne od nuly, ide o ***kružnicu***
  - **A ≠ B** a tiež **A.B > 0**, ide o ***elipsu***
  - **A.B < 0**, ide o ***hyperbolu***
  - sa ***jeden*** z koeficientov **rovná nula**, ide o ***parabolu***

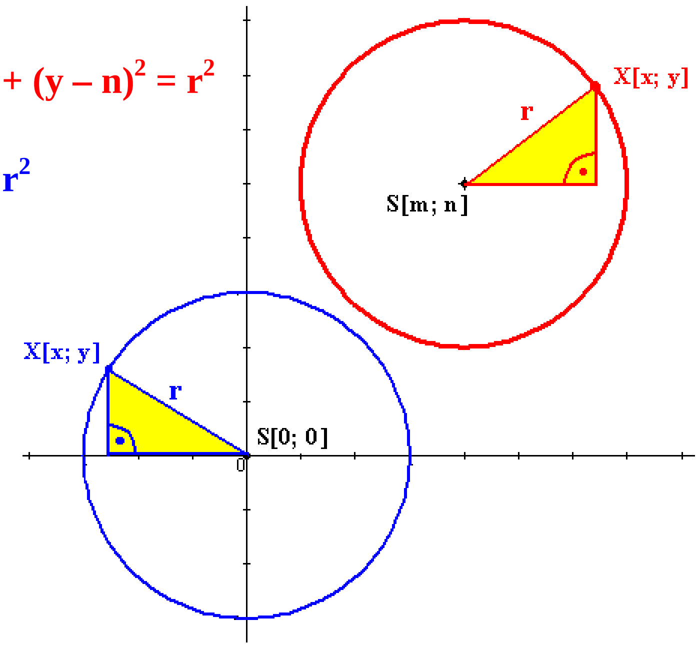
Kružnica a jej dotyčnica

Definícia.

Nech **S** je bod patriaci rovine ρ a $\mathbf{r \in R^+}$ **.**
Kružnica je množina všetkých bodov roviny ρ, ktoré majú od bodu **S** vzdialenosť **r**.
S je stred kružnice a **r** je polomer kružnice.

$|X, S| = r$ ... $\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2} = r$ ... $\mathbf{(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$

$|X, S| = r$ ... $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r$ ... $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$



Stredová rovnica kružnice

analytické vyjadrenie kružnice, ktorá má stred v začiatku súradnicovej sústavy **S[0;0]** a má polomer **r** je rovnica: $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$
analytické vyjadrenie kružnice s polomerom **r** a stredom **S [m; n]** je rovnica:

$$\mathbf{(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$$

<u>*Trocha matematickej hry nezaškodí:*</u>

$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ ... $x^2 - 2m.x + m^2 + y^2 - 2n.y + n^2 - r^2 = 0$ ...

... $x^2 + y^2 - 2m.x - 2n.y + m^2 + n^2 - r^2 = 0$ a nech $a = -2m$, $b = -2n$, $c = m^2 + n^2 - r^2$, potom

$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \sim$ $\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$, **a, b, c** $\in$ **R**

Všeobecná rovnica kružnice

analytické vyjadrenie kružnice, ktorá má stred **S[m;n]** a má polomer **r** je
$\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$, <u>iba v prípade</u>, že sa dá upraviť na
stredový tvar $\mathbf{(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2}$

V opačnom prípade toto vyjadrenie ***nepredstavuje rovnicu kružnice.***

<u>Príklady:</u>

1. Napíšte rovnicu kružnice v stredovom tvare ak:
   a) S[0;0] a r = 2
   b) S[-1;2] a r = 3

<u>*Riešenie:*</u> a) $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$, b) $\mathbf{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9}$

2. Vypíšte súradnice stredu **S** a polomer **r** z daných stredových rovníc kružnice:
   a) $x^2 + (y-3)^2 = 25$
   b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

<u>*Riešenie:*</u> a) **S[0;3]** a **r = 5**, b) **S[-2;1]** a **r = 2**

3. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá má polomer r = 8 a dotýka sa obidvoch súradnicových osí.

<u>*Riešenie:*</u> S [8; 8] , r = 8

$(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 8^2$
$x^2 - 16x + 64 + y^2 - 16y + 64 - 64 = 0$
$x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$

Rovnica kružnice je $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$

4. Zistite, či body A[-2;3], B[0;2], C[-2;2] ležia na kružnici, v kružnici, alebo mimo kružnice k: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

<u>*Riešenie:*</u> **A: $(-2+2)^2 + (3-1)^2 = 0^2 + 2^2 = 4$, leží na k**
B: $(0+2)^2 + (2-1)^2 = 4+1=5$, leží mimo k (vo vonkajšej oblasti kružnice k)
C: $(-2+2)^2 + (2-1)^2 = 0 + 1 = 1$, leží v k (vo vnútornej oblasti kružnice k)

5. Napíšte rovnicu kružnice, ktorej priemerom je úsečka AB, ak A [-1 ; 4], B [5 ; 6]

<u>*Riešenie:*</u>

$$S = \frac{A+B}{2}, \quad S[2;5]$$

$$r = |AS| = \sqrt{(2+1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$$

Rovnica kružnice je $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$

6. Zistite, či rovnice k_1: $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ a
k_2 : $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 30 = 0$ predstavujú kružnice.

Riešenie:

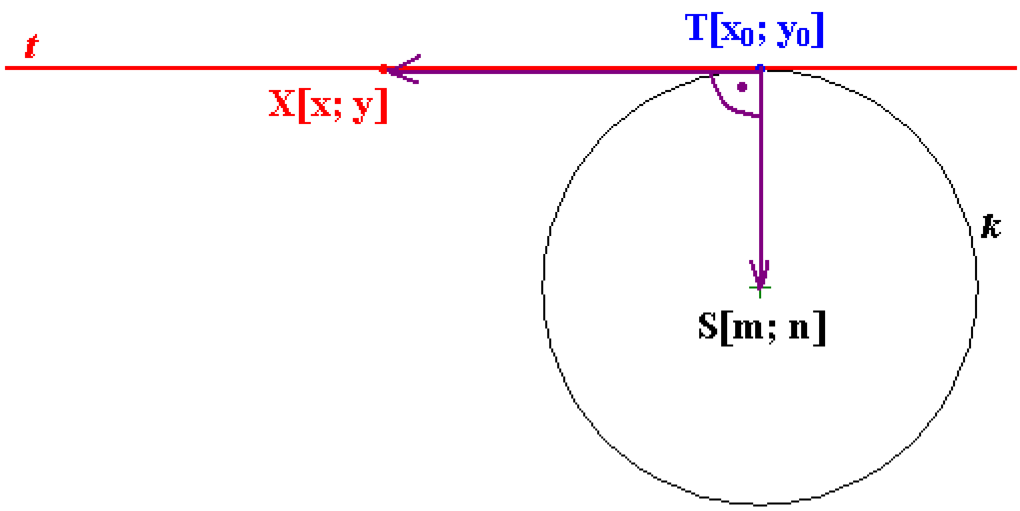
k_1: $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$
$x^2 + 2x + y^2 + 4y = -1$
$(x + 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = -1$
$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow$ **S[–1; –4]** a **r = 2**

k_2 : $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 30 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 + 6y = -30$
$(x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 = -30$
$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -5$ ... ***SPOR***, *nakoľko* ***súčet nezáporných členov nemôže byť záporný výsledok*** $\Rightarrow$
<u>**rovnica k_2 nereprezentuje rovnicu kružnice**</u>

<u>*Vzájomná poloha priamky a kružnice*</u>

sa určuje na základe počtu spoločných bodov: **dva** – priamka sa nazýva ***sečnica***
jeden – priamka sa nazýva ***dotyčnica***
žiadny – priamka sa nazýva ***nesečnica***

Dotyčnica kružnice



Pre ľubovoľný bod **X[x; y]** dotyčnice **t** , dotykový bod **T[x_0; y_0]** a stred **S[m; m]** kružnice **k** platí:

$$TX \perp TS \Rightarrow [X - T].[S - T] = 0$$

$[x - x_0;\ y - y_0].[\ m - x_0;\ n - y_0] = 0$ ... <u>*skalárny súčin*</u>

$$t: (x - x_0).(\ m - x_0) + (y - y_0).(\ n - y_0) = 0$$

<u>**Veta:**</u> Nech kružnica **k** je určená rovnicou: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ a nech bod **T[x_0; y_0]** je bodom dotyku priamky **t** - dotyčnice ku kružnici **k.** Potom platí:

$(x - m).(x - m) + (y - n).(y - n) = r^2$ ...

$$t: (x - m).(x_0 - m) + (y - n).(y_0 - n) = r^2$$

<u>**Príklad 7:**</u> Určte vzájomnú polohu priamky **p: [x; y] = [1 + t; 4 + 2t] , t∈R** a kružnice **k:** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

<u>*Riešenie – spôsob č.1:*</u>

k ∩ p: Dosadíme za **x** a **y** z rovnice priamky do rovnice kružnice:

$$(1 + t + 2)^2 + (4 + 2t - 3)^2 = 25.$$

Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu :

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

s riešeniami $t_1 = -3$ a $t_2 = 1$.

Keď tieto dve hodnoty dosadíme do rovníc priamky, dostaneme súradnice spoločných bodov priamky a kružnice **[-2; -2]** a **Q[2; 6]** .

Záver: ***Priamka p je sečnicou kružnice k***.

<u>**Poznámka:**</u>

Vzájomnú polohu priamky **p** a kružnice **k[S; r]** je možné určiť aj na základe ***vzdialenosti stredu S kružnice k od priamky p***:

$|S; p| < r$ ... **p** je ***sečnica***

$|S; p| = r$ ... **p** je ***dotyčnica***

$|S; p| > r$ ... **p** je ***nesečnica***

Riešenie – spôsob č.2:

p: $x = 1 + t \quad / . (-2)$ $\qquad$ **k:** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \Rightarrow$ **S[– 2; 3]** a **r = 5**

$\underline{y = 4 + 2t}$

$\mathbf{2x + y - 2 = 0}$

$$|S; p| = \frac{|2.(-2)+1.3-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} \quad \ldots \quad r = 5 = 5.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{25}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow |S; p| < r$$

... priamka **p** je ***sečnica.***

Výhoda 1. spôsobu spočíva v tom, že môžeme ***ľahko určiť súradnice spoločných bodov***.

Príklad 8: V prípade, že rovnica $\mathbf{x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0}$ je rovnicou ***kružnice***, napíšte rovnice jej ***dotyčníc*** v bodoch $\mathbf{T[x_0; 7]}$ a určte ich ***vzájomný uhol***.

Riešenie:

$\mathbf{x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \;\ldots\; x^2 + 4x + y^2 - 8y = 5 \;\ldots\; (x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 = 5 \;\ldots}$

$\mathbf{\ldots\; (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25} \Rightarrow$ je to ***kružnica*** **k: S[– 2; 4]** a **r = 5.**

Ak bod T má byť bodom dotyku, potom musí byť aj bodom kružnice k.

Nech $\mathbf{T[x_0; 7] \in k: (x_0 + 2)^2 + (7 - 4)^2 = 25 \;\ldots\; (x_0 + 2)^2 + 9 = 25 \;\ldots\; (x_0 + 2)^2 = 16 \;\ldots}$
$\mathbf{|x_0 + 2| = 4 \;\ldots\; x_{0,1} = -6}$ a $\mathbf{x_{0,2} = 2}$ **,** t. j. ***existujú dva dotykové*** body: $\mathbf{T_1[-6; 7]}$ **,** $\mathbf{T_2[2; 7]}$

Spôsob č.1: $\quad$ ***TX ⊥ TS*** $\Rightarrow$ **[X – T].[S – T] = 0**

t_1 : $\boldsymbol{(x - x_{0,1}).(m - x_{0,1}) + (y - y_{0,1}).(n - y_{0,1}) = 0}$ **...** $(x + 6).(-2 + 6) + (y - 7).(4 - 7) = 0$ **...**
$4x + 24 - 3y + 21 = 0$ **...** $\boldsymbol{4x - 3y + 45 = 0}$

t_2 : $\boldsymbol{(x - x_{0,2}).(m - x_{0,2}) + (y - y_{0,2}).(n - y_{0,2}) = 0}$ **...** $(x - 2).(-2 - 2) + (y - 7).(4 - 7) = 0$ **...**
$-4x + 8 - 3y + 21 = 0$ ... $-4x - 3y + 29 = 0$ **...** $\boldsymbol{4x + 3y - 29 = 0}$

Spôsob č.2: $\quad$ **t: $\mathbf{(x - m).(x_0 - m) + (y - n).(y_0 - n) = r^2}$**

t_1 : $\boldsymbol{(x - m).(x_{0,1} - m) + (y - n).(y_{0,1} - n) = r^2}$ **...** $(x + 2).(-6 + 2) + (y - 4).(7 - 4) = 25$ **...**
$-4x - 8 + 3y - 12 - 25 = 0$ **...** $-4x + 3y - 45 = 0$ **...** $\boldsymbol{4x - 3y + 45 = 0}$

t_2 : $\boldsymbol{(x - m).(x_{0,2} - m) + (y - n).(y_{0,2} - n) = r^2}$ **...** $(x + 2).(2 + 2) + (y - 4).(7 - 4) = 25$ **...**
$4x + 8 + 3y - 12 - 25 = 0$ **...** $\boldsymbol{4x + 3y - 29 = 0}$

Uhol priamok $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$ určíme za pomoci ***uhla normálových vektorov*** daných priamok.

$\mathbf{n_1} = [4; -3]$ a $\mathbf{n_2} = [4; 3]$ **...** $\cos\varphi = \dfrac{|4.4 - 3.3|}{\sqrt{16+9}.\sqrt{16+9}} = \dfrac{7}{25} \Rightarrow \varphi \approx 73{,}73979°$

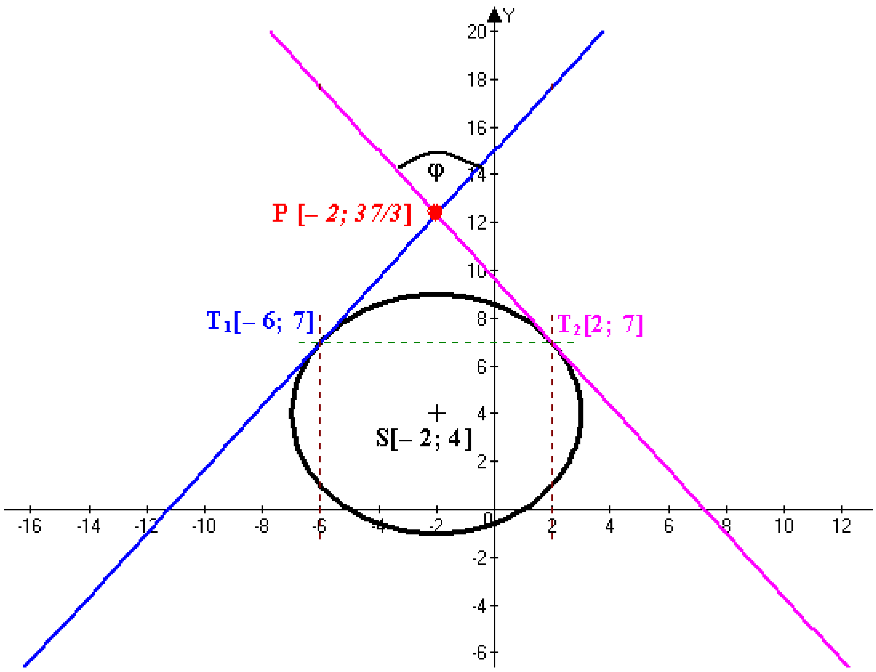
$\varphi \approx 73° \, 44' \, 23{,}26''$

<u>Prídavok:</u> Určte ***súradnice priesečníka*** priamok $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$.

<u>Riešenie:</u>

$$\begin{aligned} &4x - 3y + 45 = 0 \\ &\underline{4x + 3y - 29 = 0} \\ &8x \qquad + 16 = 0 \;\; \dots \;\; x = -2 \;\; \dots \;\; y = 37/3 \end{aligned}$$

$$t_1 \cap t_2 = \{[-2; 37/3]\} = \{P\}$$



Úlohy – súhrn

1. Sú dané vektory **a** = **[- 4; 1; 3]** a **b** = **[1; - 2; 3]**.
   Určte vektory: **2.a + 3.b** , **-4a** , $\frac{3}{4}$**.a** - $\frac{2}{3}$**.b** , $\frac{a}{|a|}$.

2. Sú dané body **A[- 1; 2; 4]** , **B[5; - 2; 1]** a **C[1; 3; 0]** .
   Určte vektory: **B – A** , **3(C – A)** , **(B – C) + (B – A)** , **3(A – C) – 2(B – C)** a zistite ich dĺžky.

3. Vyjadrite vektor **v** ako lineárnu kombináciu vektorov **a = [5; 3; - 1]** a **b = [- 2; 0; 1]** , ak
   a) **v = [0; 0; 0]** b) **v = [1; - 1; - 2]** c) **v = [4; 0; - 2]**

4. Nájdite všetky jednotkové vektory kolmé k vektoru **a = [- 3; 4]**.

5. Nájdite všetky jednotkové vektory kolmé k obidvom vektorom **u = [0; - 1; 2]** a **v = [3; 2; - 1]**.

6. Vypočítajte uhol vektorov:
   a) **[3; 4]** a **[- 2; 6]** b) **[1; 4; - 2]** a **[2; - 2; - 3]** c) **[1; 1; - 1]** a **[- 1; 2; 3]**

7. Vypočítajte veľkosti uhlov a dĺžky strán v trojuholníku ABC, ak
   a) A**[1; - 2] ,** B**[4; 6] ,** C**[1; 3]**
   b) A**[- 1; - 1; - 2] ,** B**[0; - 2; 4] ,** C**[1; - 4; 0] ,**

8. Vypočítajte obsahy trojuholníkov z predchádzajúceho príkladu.

9. Vypočítajte objem a obsah povrchu rovnobežnostena, v ktorom bod **A[1; - 3; 4] ,** je spojený hranami s bodmi **B[- 2; 0; - 1] , D[3; - 1; 0] , A_1[0;4; - 2] .**

10. Napíšte všeobecnú, smernicovú a parametrické rovnice priamky, ktorá je určená tak, že
    a) prechádza bodmi **A[1; - 4] , B[4; 3]**
    b) prechádza bodom **A[- 3; 0]** a je rovnobežná s priamkou ***q: y = 3x - 5***
    c) prechádza bodom **A[3; - 2]** a je kolmá na priamku **q: [x; y] = [4 – 2t; – 1 + t]**

11. Zistite spoločné body úsečky **u** a priamky **p: 2x – 3y + 6 = 0**, ak

$$u:\ x = 1 - 2t,\ y = -2 + 3t, \quad t \in \langle -1, 2 \rangle$$
$$u:\ x = 1 - 2t,\ y = -2 + 3t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$
$$u:\ x = 3 + 3t,\ y = 4 + 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

12. Vypočítajte súradnice ťažiska a priesečníka výšok v trojuholníku ABC, ak .

$$A = [-2, -1],\ B = [-1, 3],\ C = [5, 2]$$

13. Určte rovnice kružnice opísanej trojuholníku ABC z predchádzajúcej úlohy.

14. Určte typ kužeľosečky a súradnice jej stredu (vrcholu)

$$4x^2 + 4y^2 - 16y + 10 = 0$$

\- - - - - - - - - - - -

18. Napíšte rovnicu dotyčnice ku kružnici $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ v bode $T=[2,-2]$

19. Určte všetky hodnoty čísla **k**, pre ktoré má priamka **p: y = k(x – 4)** aspoň jeden spoločný bod s kružnicou $\mathbf{x^2 + y^2 = 5}$.

20. Koľko spoločných bodov môže mať priamka s kužeľosečkou?

21. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny určenej
   a) bodmi **A[-1; 1; 0], B[3; 0; - 1], C[1; 2; 3]**
   b) bodom **A[0; 0; 0]** a priamkou **p: [x; y; z] = [1 - t; 1 + t; - 3t]** kolmou na rovinu
   c) rovnobežnými priamkami **p: [x; y; z] = [- 1 + 2t; t; 4 - t]** a
   q: [x; y; z] = [3 – 2u; - 1 - u; u] .
   d) rôznobežnými priamkami **p: [x; y; z] = [- 1 + 2t; 1 + t; 2 - t]** a
   q: [x; y; z] = [3 – 2u; - 1 + u; u] .

22. Napíšte rovnice priamky určenej
   a) bodmi **A[- 1; 4; 1]** a **B[2; 0; 3]**
   b) bodom **A[3; - 2; 1]** a rovnobežnou priamkou **p: [x; y; z] = [1 - 2t; 3t; - 4]**
   c) bodom **A[1; 1; 1]** a rovinou ρ: **3x – 2y + 5z – 1 = 0**, ktorá je na ňu kolmá
   d) bodom **A[- 2; 0; 7]** , pričom hľadaná priamka je rôznobežná so všetkými tromi súradnicovými osami.

- - - - - - - - - - - -

24. Popíšte vzájomnú polohu dvojíc priamok

$p:\ [x,y,z]=[-2t,7+4t,-11]\qquad q:\ [x,y,z]=[-2+u,-2u,0]$,

$p:\ [x,y,z]=[2-3t,t,-1+t]\qquad q:\ [x,y,z]=[2+u,-2-u,4u]$,

$p:\ [x,y,z]=[2-t,2t,1-t]\qquad q:\ [x,y,z]=[u,-u,-13+4u]$,

$p:\ [x,y,z]=[2+t,2t,1-t]\qquad q:\ [x,y,z]=[6-3u,8-6u,-3+3u]$.

25. Napíšte rovnice polpriamky, ktorá leží v rovinách 2x – y + 7 = 0, x + 2y – z + 1 = 0 a v polpriestore x + y + z ≥ 0.

26. Popíšte vzájomnú polohu dvoch rovín

$x-2y+z=3\qquad -2x+4y-2z+6=0$,

$x-2y+z+3=0\qquad -2x+4y-2z+6=0$,

$x-2y+z-3=0\qquad 2x+4y-2z+6=0$.

27. Popíšte vzájomnú polohu priamky **p: [x; y; z] = [2 - 3t; - 1 + t; 2t]** a roviny

$\varrho:\ 3x+y+2z-4=0$,

$\varrho:\ x-y+2z+7=0$,

$\varrho:\ x-y+2z-3=0$.

- - - - - - - - - - - -

30. Vypočítajte odchýlku

a) priamky **p: [x; y; z] = [2 - t; - 1 + 4t; 3]** a priamky **q: [x; y; z] = [- 1; 5 – 2u; 1 + u]**

b) priamky **p: [x; y; z] = [1 + 2t; - 3t; - 3 - t]** a roviny **ρ: x + 2y – 4z + 11 = 0**,

c) roviny **ρ: x – 2y + 2z = 0** a roviny ν: **x + 4y – z + 5 = 0**.

31. Vypočítajte odchýlku priamky **p: [x; y; z] = [- 1 + t; 4; 2 -** $\sqrt{3}$ **t]** od všetkých troch osí súradnicovej sústavy a od všetkých troch rovín, určených dvojicami osí.

32. Vypočítajte vzdialenosti

a) bodu **P[- 1; 4; 7]** od roviny ρ: **3x – 5y + z – 9 = 0**

b) dvoch rovín ρ: **- x + 2y + z = 7** a ν: **3x – 6y – 3z = 0** ,

c) priamky **p: [x; y; z] = [t; - 1 - 3t; 5]** a roviny ρ: **3x + y – 2z + 11 = 0**

d) rovnobežných priamok **p: [x; y; z] = [3t; - 2t; - 1 + t]** a
q: [x; y; z] = [5 – 3u; 1 + 2u; - u] ,

e) mimobežných priamok **p: [x; y; z] = [3t; - 2t; 1 + t]** a
q: [x; y; z] = [5 – u; 1 + 2u; - 3u] .

33. Os mimobežiek je priamka rôznobežná s obidvomi mimobežkami a kolmá na každú z nich. Určte rovnicu osi mimobežiek **p: [x; y; z] = [3 + 2t; 6 + t; - 4 - 3 t]** a
q: [x; y; z] = [- 4 + 4u; - 2 + u; 2 - u] .

34. Je daný štvorsten $ABCD$, kde .

$$A = [-3, -2, 5],\ B = [-3, 0, 2],\ C = [-2, 4, -3],\ D = [-7, 6, 6]$$

a) Vypočítajte ***odchýlku hrán*** **AB** a **CD**,

b) vypočítajte ***odchýlku stien*** **ABC** a **ABD**,

c) vypočítajte ***odchýlku hrany*** **AD** a ***steny*** **ABC**,

d) vypočítajte ***vzdialenosť*** vrcholu **D** od ***protiľahlej steny*** štvorstena,

e) vypočítajte ***obsah povrchu*** štvorstena,

f) vypočítajte ***objem*** štvorstena.

Výsledky úloh

1. **2a + 3b = [-5; - 4; 15]** , **- 4a = [16; - 4; - 12]** , $\frac{3}{4}$**a** + $\frac{-2}{3}$**b** = **[-**$\frac{11}{3}$**;** $\frac{25}{12}$ **;** $\frac{1}{4}$**]**

   $\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = [-\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}]$.

2. **B – A= [6; - 4; - 3] , 3(C – A) = [6; 3; - 12] , (B – C) + (B – A) = [10; - 9; - 2]** ,
   3(A – C) – 2(B – C) = [-14; 7; 10]

3. a) 0.**a** + 0.**b** b) nedá sa vyjadriť c) **– 2b**.

4. $\left[\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right]$ a $\left[-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right]$

5. $\left[-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$ a $\left[\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

6. a) **55,3°** b) **90°** c) **108°**.

7. a) **a = 3**$\sqrt{2}$**, b = 5, c =** $\sqrt{73}$**, α = 20,6°, β = 24,4°, γ = 135°,**
   b) a = $\sqrt{21}$, b = $\sqrt{17}$, c = $\sqrt{38}$, **α = 48°, β = 42°** , **γ = 90°**.

8. a) **7,5** b) $\frac{\sqrt{357}}{2}$.

9. **V = 80** a **S = 2(**$\sqrt{632}+\sqrt{782}+16\sqrt{3}$ **).**

10. a) **7x – 3y –19 = 0, y =** $\frac{7}{3}$**x –** $\frac{19}{3}$ **, [x; y] = [1 + 3t; – 4 + 7t]** ,
    b) **3x – y + 9 = 0, y = 3x + 9, [x; y] = [- 3 + t; 3t]** ,
    c) **2x – y – 8 = 0, y = 2x – 8, [x; y] = [3 + t; – 2 + 2t]** .

11. a) $\left[-\frac{15}{13};\frac{16}{13}\right]$, b) $\varnothing$, c) **u ⊂ p**.

12. **T =** $\left[\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$**, V =** $\left[-\frac{31}{25};\frac{89}{25}\right]$.

13. **k:** $\left(x-\frac{81}{50}\right)^2+\left(y-\frac{11}{50}\right)^2=\frac{18241}{1250}$.

14. **kružnica, S = [0; 2]**

\- - - - - - - - - - - -

18. $\mathbf{3x - 4y - 14 = 0}$

19. $\mathbf{k} \in \langle -\sqrt{\frac{5}{11}}; \sqrt{\frac{5}{11}} \rangle$

20. **Žiaden** (***nesečnica***), **jeden** (***dotyčnic***a) alebo **dva** (***sečnica***).

21. a) $\mathbf{x + 7y - 3z - 6 = 0}$, b) $\mathbf{x - y + 3z = 0}$, c) $\mathbf{5x - 4y + 6z - 19 = 0}$, d) $\mathbf{x + 2z - 3 = 0}$.

22. a) $\mathbf{[x; y; z] = [-1 + 3t; 4 - 4t; 1 + 2t],}$
b) $\mathbf{[x; y; z] = [3 - 2t; -2 + 3t; 1],}$
c) $\mathbf{[x; y; z] = [1 + 3t; 1 - 2t; 1 + 5t],}$
d) $\mathbf{[x; y; z] = [2t; 0; -7t].}$

- - - - - - - - - - - -

24. a) priamky sú ***rovnobežné***,
b) priamky sú ***mimobežné***,
c) priamky sú ***rôznobežné***, pretínajú sa v bode **[4; – 4; 3]**,
d) priamky sú ***totožné***.

25. $\mathbf{[x; y; z] = [-3 + t; 1 + 2t; 5t]} \wedge \mathbf{t \geq -1/4}$

26. a) roviny sú ***zhodné***,
b) roviny sú ***rovnobežné***,
c) roviny sú ***rôznobežné***, pretínajú sa v ***priamke:*** $\mathbf{[x; y; z] = [0; 1 + t; 5 + 2t]}$.

27. a) priamka je s rovinou ***rôznobežná***, ***prienik*** je bod **[5/4; – 3/ 4; 1/2]** ,
b) priamka je s rovinou ***rovnobežná***,
c) priamka ***leží v*** rovine.

- - - - - - - - - - - -

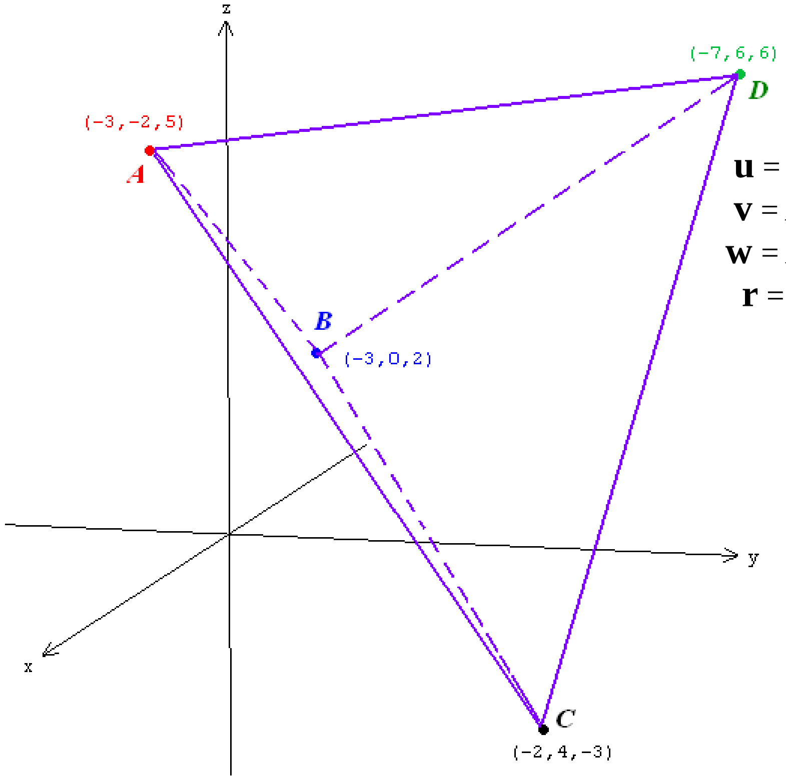
30. a) **29,8°**, b) **0°**, c) **45°**.

31. Odchýlky od osí $\mathbf{o_x, o_y, o_z}$ sú postupne **60°, 90° , 30°**.
Odchýlky od rovín $\rho_{x,y}, \rho_{x,z}, \rho_{y,z}$ sú postupne **60°, 0° , 30°**.

32. a) $\mathbf{d} = \frac{5\sqrt{35}}{7}$, **b)** $\mathbf{d} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$, **c)** $\mathbf{d = 0}$, **d)** $\mathbf{d} = \sqrt{13}$, **e)** $\mathbf{d} = \sqrt{6}$.

33. $\mathbf{[x; y; z] = [-t; -1 + 5t; 1 + t]}$.

34.



u = *AB* = B – A = **[0; 2; –3]**
v = *AC* = C – A = **[1; 6; –8]**
w = *AD* = C – A = **[–4; 8; 1]**
r = *CD* = D – C = **[–5; 2; 9]**

a) $\cos\varphi = \dfrac{23}{\sqrt{13}.\sqrt{110}} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi \approx 52{,}54°}$ b) $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{17}.\sqrt{74}} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi \approx 81{,}9°}$

c) $\sin\varphi = \dfrac{34}{\sqrt{81}.\sqrt{17}} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi \approx 66{,}38°}$ d) $|D, ABC| = \dfrac{34}{\sqrt{17}} = 2.\sqrt{17}$

e) $\mathbf{n}_{ABC} = \mathbf{[2; -3; -2]}$, $\mathbf{n}_{ABD} = \mathbf{[32; 12; 8]}$, $\mathbf{n}_{ACD} = \mathbf{[68; 31; 32]}$, $\mathbf{n}_{BCD} = \mathbf{[46; 16; 22]}$

S = $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{17} + \sqrt{1232} + \sqrt{6609} + \sqrt{2856}\right)$ f) **V** = $\dfrac{1}{6}.34$ **= 17/3**