Skladanie zobrazení

využitie matíc

Pavol Hanzel
Fakulta prírodných vied UMB

7. augusta 2023

1. Dva prístupy
   - syntetický - euklidovský
   - analytický - maticový počet
2. Rozšírené matice
   - matice 2 x 2
   - rozšírené matice 3 x 3
3. Zhodné zobrazenia

Konštrukčná metóda

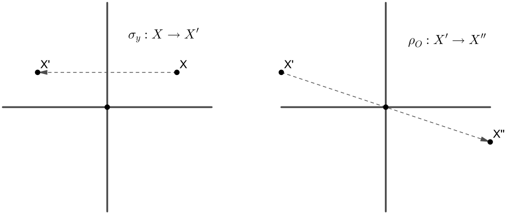
Budeme skúmať zložené zobrazenie z:

- osovej súmernosti podľa súradnej osi y
- a stredovej súmernosti podľa počiatku O

Konštrukčná metóda

Budeme skúmať zložené zobrazenie z:

- osovej súmernosti podľa súradnej osi y
- a stredovej súmernosti podľa počiatku O



- výsledné zobrazenie je osová súmernosť podľa osi x.

Poznámky

Zobrazenie v euklidovskej rovine, ktoré vznikne zložením

1. Párneho počtu osových súmerností je buď
   - identita,
   - rotácia špeciálne stredová súmernosť,
   - posunutie (translácia).

Poznámky

Zobrazenie v euklidovskej rovine, ktoré vznikne zložením

1. Párneho počtu osových súmerností je buď
   - identita,
   - rotácia špeciálne stredová súmernosť,
   - posunutie (translácia).
2. Nepárneho počtu osových súmerností je buď
   - osová súmernosť,
   - posunuté zrkadlenie

Poznámky

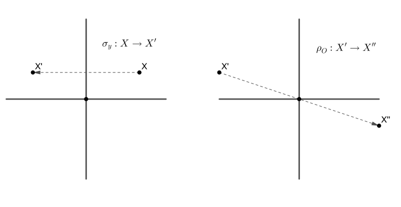
Zobrazenie v euklidovskej rovine, ktoré vznikne zložením

1. Párneho počtu osových súmerností je buď
   - identita,
   - rotácia špeciálne stredová súmernosť,
   - posunutie (translácia).
2. Nepárneho počtu osových súmerností je buď
   - osová súmernosť,
   - posunuté zrkadlenie
3. V našom príklade išlo o zloženie 3 osových súmerností.

Konštrukčná metóda

Dôkaz.

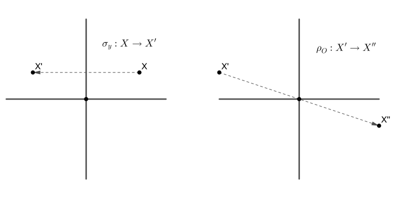
1. Osová súmernosť σ_y je určená priamkou y.



Konštrukčná metóda

Dôkaz.

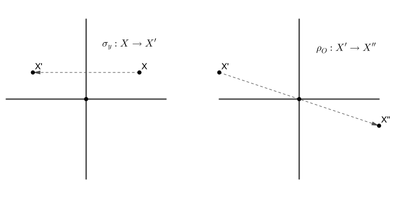
1. Osová súmernosť σ_y je určená priamkou y.
2. Pre stredovú súmernosť ϱ_o platí $\varrho_o = \sigma_x \circ \sigma_y$.



Konštrukčná metóda

Dôkaz.

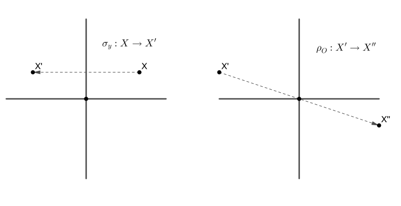
1. Osová súmernosť σ_y je určená priamkou y.
2. Pre stredovú súmernosť ϱ_o platí $\varrho_o = \sigma_x \circ \sigma_y$.
3. Zožené zobrazenie $\varrho_o \circ \sigma_y = \sigma_x \circ \sigma_y \circ \sigma_y$



Konštrukčná metóda

Dôkaz.

1. Osová súmernosť σ_y je určená priamkou y.
2. Pre stredovú súmernosť ϱ_o platí $\varrho_o = \sigma_x \circ \sigma_y$.
3. Zožené zobrazenie $\varrho_o \circ \sigma_y = \sigma_x \circ \sigma_y \circ \sigma_y$
4. Ale $\sigma_y \circ \sigma_y$ je identita, odkiaľ $\varrho_o \circ \sigma_y = \sigma_x$. □



Analytická metóda

- Zobrazenie σ_y zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[-x_1, x_2]$ (symbolicky pomocou matíc)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Analytická metóda

- Zobrazenie σ_y zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[-x_1, x_2]$ (symbolicky pomocou matíc)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Zobrazenie ϱ_o zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[-x_1, -x_2]$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Analytická metóda

Skúmajme ako sa postupne zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ v zobrazení $\varrho_o \circ \sigma_y$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varrho_o}$$

Analytická metóda

Skúmajme ako sa postupne zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ v zobrazení $\varrho_o \circ \sigma_y$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varrho_o}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] =$$

Analytická metóda

Skúmajme ako sa postupne zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ v zobrazení $\varrho_o \circ \sigma_y$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varrho_o}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

Analytická metóda

Skúmajme ako sa postupne zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ v zobrazení $\varrho_o \circ \sigma_y$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varrho_o}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

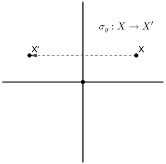
Záver

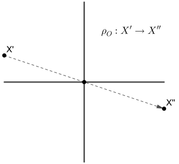
Zožené zobrazenie $\varrho_o \circ \sigma_y$ môžeme vyjadriť pomocou súčinu matíc:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledné zobrazenie je súmernosť podľa osi x. Maticový zápis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$





Problém

V zobrazenie, ktoré je dané maticou

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

počiatok $X[0,0]$ necháva pevný (samodružný bod).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posunutie

Posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ nevieme vyjadriť maticou 2 x 2, keďže zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[x_1 + u_1, x_2 + u_2]$.

Posunutie

Posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ nevieme vyjadriť maticou 2 x 2, keďže zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[x_1 + u_1, x_2 + u_2]$.

Musíme použiť sčítanie matíc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Posunutie

Posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ nevieme vyjadriť maticou 2 x 2, keďže zobrazuje bod $X[x_1, x_2]$ na bod $X'[x_1 + u_1, x_2 + u_2]$.

Musíme použiť sčítanie matíc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_y} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Sčitovanie matíc môžeme nahradiť rozšírenou maticou typu 3 x 3.

Rozšírené matice

Posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vyjadríme ako súčin matíc.

Rozšírené matice

Posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vyjadríme ako súčin matíc.

Pokúsme sa nájsť rozšírenú maticu typu 3 x 3 tak, aby platilo:

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \end{pmatrix}$$

Rozšírené matice

Posunutie τ_u o vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vyjadríme ako súčin matíc.

Pokúsme sa nájsť rozšírenú maticu typu 3 x 3 tak, aby platilo:

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \end{pmatrix}$$

Ľahko zistíme, že matica

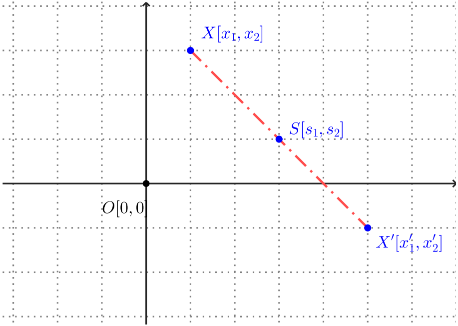
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vyhovuje našim požiadavkám.

Stredová súmernosť

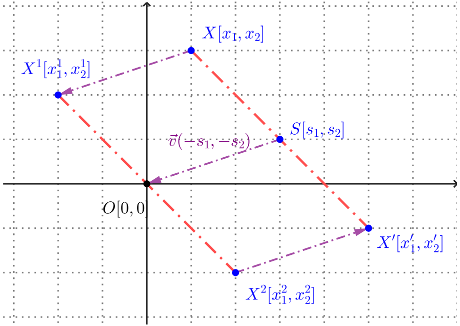
Príklad

Vyjadrite stredovú súmernosť $\varrho_{S[s_1,s_2]}$ podľa ľubovoľného stredu $S[s_1, s_2] \neq S[0, 0]$ pomocou rozšírenej matice.



Stredová súmernosť - konštrukčné riešenie

1. Danú stredovú súmernosť vyjadríme ako zložené zobrazenie
   - posunutia τ_{-v} o vektor $\vec{v} = (-s_1, -s_2)$
   - stredovej súmernosti $\varrho_{S[0,0]}$
   - posunutia τ_v o vektor $\vec{-v} = (s_1, s_2)$



Stredová súmernosť - analytické riešenie

1. Posunutie τ_{-v} o vektor $\vec{v} = (-s_1, -s_2)$ je určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stredová súmernosť - analytické riešenie

1. Posunutie τ_{-v} o vektor $\vec{v} = (-s_1, -s_2)$ je určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Stredová súmernosť je daná maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stredová súmernosť - analytické riešenie

- Zrejme posunutie τ_v o vektor $\vec{v} = (s_1, s_2)$ je určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stredová súmernosť - analytické riešenie

- Zrejme posunutie τ_v o vektor $\vec{v} = (s_1, s_2)$ je určené maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stredová súmernosť ako zložené zobrazenie je dané súčinom matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stredová súmernosť - analytické riešenie

Postupným roznásobením dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & -1 & 0 \\ s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Stredová súmernosť - analytické riešenie

Postupným roznásobením dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & -1 & 0 \\ s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2s_1 & -1 & 0 \\ 2s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stredová súmernosť - záver

Tvrdenie

Pre obraz bodu $X[x_1, x_2]$ v stredovej súmernosti $\varrho_{S[s_1,s_2]}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2s_1 & -1 & 0 \\ 2s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

Stredová súmernosť - záver

Tvrdenie

Pre obraz bodu $X[x_1, x_2]$ v stredovej súmernosti $\varrho_{S[s_1,s_2]}$ platí

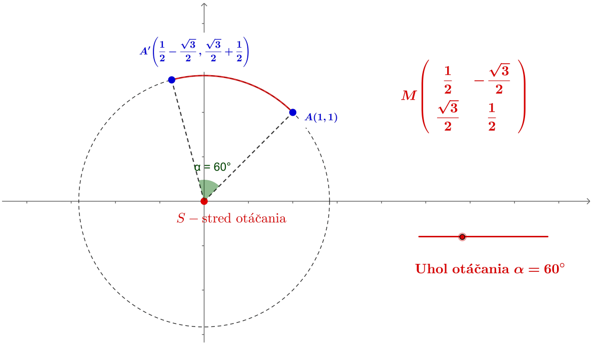
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2s_1 & -1 & 0 \\ 2s_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2s_1 - x_1 \\ 2s_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

To je analytický výsledok.

Otáčanie

Otáčanie $\rho_{(S,\alpha)}$ so stredom $S\,[0,0]$ zobrazuje bod $A\,[x_1, x_2]$ do

$$A'\,[(x_1.\cos\ \alpha - x_2.\sin\ \alpha)\,, (x_1.\cos\ \alpha + x_2.\sin\ \alpha)]$$



Applet otvoríteTu

Využitím polárnych súradníc dokážte toto tvrdenie.

Otáčanie - záver

Tvrdenie

Maticový zápis otočenia $\rho_{([0,0],\alpha)}$ okolo $S\,[0,0]$ o uhol α má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

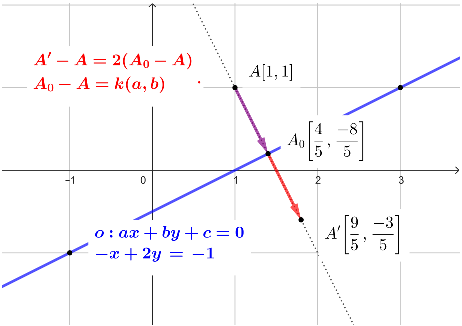
Úloha

Určite maticový zápis otočenia okolo ľubovoľného bodu.

Osová súmernosť

Osová súmernosť s osou $o : ax + by + c = 0$ zobrazuje bod $A\left[x_1, x_2\right]$ do bodu $A'\left[x_1', x_2'\right]$. Pre vektory $\overrightarrow{AA_0}, \overrightarrow{AA'}$ zrejme platí:

$$A_0 - A = k(a, b), \ A' - A = 2(A_0 - A), \text{ kde } A_0 = \left[x_1^0, x_2^0\right].$$



Applet otvoríteTu

Osová súmernosť

Z prvej rovnosti vyjadríme $x_1^0 = x_1 + ka, x_2^0 = x_2 + kb$ a dosadíme ho do rovnice osi o:

$$a(x_1 + ka) + b(x_2 + kb) + c = 0.$$

Odkiaľ vyjadríme parameter

$$k = -\frac{ax_1 + bx_2 + c}{a^2 + b^2},$$

ktorý dosadíme do rovnice

$$A' - A = 2k(a, b)$$

Osová súmernosť - záver

Tvrdenie

Rovnice osovej súmernosti s osou $o : ax + by + c = 0$ tvorí sústava

$$x_1' = x_1 - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax_1 + bx_2 + c)$$

$$x_2' = x_2 - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax_1 + bx_2 + c)$$

matica osovej súmernosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2} & \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{-2bc}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} & -\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

Applet otvoríteTu

Osová súmernosť - maticový zápis

Iný spôsob určenia matice osovej súmernosti s osou $o: -x+2y+1=0$.

Vhodným presunutím bodu A v applete zo snímky 20 zistíme, že

- počiatok $O[0,0]$ sa zobrazí do bodu $O\left[\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right]=[m,n]$
- body $A[1,0], B\left[0,-\frac{1}{2}\right]$ sú saamodružné..

Po dosadení súradníc týchto bodov do rovnosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & a & b \\ n & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

dostaneme maticu osovej súmernosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$