1 VEKTORY V GEOMETRII

Nasledujúca kapitola je spracovaná podľa [1] vynechaním niektorých častí, ktorým sa budeme venovať neskôr. Cieľom tejto kapitoly je prispieť k vytvoreniu správnych predstáv spojených s učivom vzhľadom na to, že väčšina geometrických pojmov je známa z predchádzajúceho štúdia na strednej škole. Tieto pojmy budeme chápať intuitívne a tvrdenia o nich budeme zväčša prijímať z názoru, tak ako sa to robí na základnej a strednej škole. Priestor budeme označovať F^3, v ňom pevne zvolenú rovinu F^2, priamku F^1 a budeme hovoriť o *troj*-, *dvoj*- resp. *jednorozmernom fyzikálnom priestore*. Jednotné označenie pre všetky tri priestory je F^n pre $n = 1, 2, 3$.

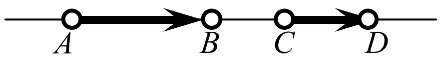
1.1 ORIENTOVANÉ ÚSEČKY

Orientovaná úsečka je úsečka spolu s poradím jej krajných bodov. Nenulová úsečka AB je podkladom pre práve dve *orientované úsečky* označované $orAB$ a $orBA$, nulová úsečka AA vedie k jedinej orientovanej úsečke $orAA$. Nenulovú orientovanú úsečku znázorňujeme rovnou šípkou, ktorá začína v prvom a končí v druhom krajnom bode orientovanej úsečky (Obr. 1.1).

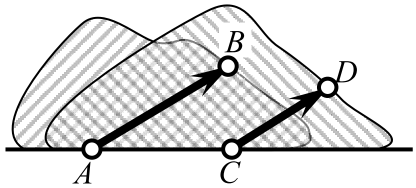
Obr. 1.1

Dĺžka orientovanej úsečky $|orAB|$ je dĺžka jej podkladovej úsečky $|AB|$, teda vzdialenosť jej krajných bodov. Je zrejmé, že nenulová orientovaná úsečka má kladnú a nulová orientovaná úsečka nulovú dĺžku.

Každé dve nulové úsečky *sú rovnako orientované*, nenulová orientovaná úsečka nikdy nie je rovnako orientovaná so žiadnou nulovou orientovanou úsečkou. Nenulové orientované úsečky $orAB$, $orCD$, ktoré ležia na jednej priamke, *sú rovnako orientované*, ak jedna z polpriamok AB, CD je časťou druhej (Obr. 1.2). Nenulové orientované úsečky AB, CD, ktoré neležia na jednej priamke, *sú rovnako orientované*, ak sú rovnobežné, a ak polroviny ACB a ACD splývajú (Obr. 1.3). O rovnako orientovaných úsečkách hovoríme, že *majú rovnaký smer*.



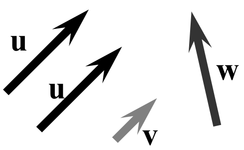
Obr. 1.2



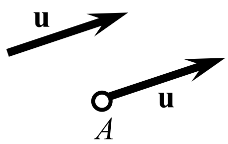
Obr. 1.3

1.2 VEKTORY

Každá orientovaná úsečka určuje ***vektor***. Dve orientované úsečky určujú *rovnaký vektor*, ak majú *rovnakú dĺžku a rovnaký smer* (Obr. 1.4). Vektor určený (ktoroukoľvek) nulovou úsečkou voláme ***nulový vektor***. Množinu všetkých vektorov priestoru F^n označujeme symbolom $V(F^n)$.



Obr. 1.4



Obr. 1.5

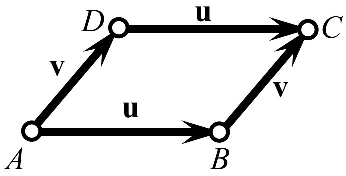
Umiestnením vektora nazývame každú orientovanú úsečku, ktorá ten vektor určuje. ***Umiestnením vektora do bodu*** nazývame také jeho umiestnenie, ktorého prvým krajným bodom je daný bod (Obr. 1.5).

Vektor je ***smerovým vektorom priamky*** resp. ***roviny***, ak v nej má umiestnenie. Hovoríme tiež, že takýto *vektor je rovnobežný s priamkou* resp. *s rovinou*.

Vektor určený orientovanou úsečkou AB označujeme $B - A$. Teda $B - A = D - C$ práve vtedy, keď $|AB| = |CD|$ a orientované úsečky AB, CD majú rovnaký smer. Zrejme tiež platí, že orientovaná úsečka AB je umiestnením vektora $B - A$ do bodu A.

Vektory ***budeme označovať*** tučnými latinskými písmenami ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ...), v písanej podobe používame latinské písmeno s pruhom ($\overline{a}, \overline{b}, \ldots$). V iných zdrojoch sa často používajú aj symboly $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ Nulový vektor označujeme symbolom $\mathbf{0}$ resp. $\overline{0}$, či $\vec{0}$. Teda $B - A = \mathbf{0}$ práve vtedy, keď $A = B$.

Určovanie vektorov môžeme jednoducho ilustrovať na rovnobežníku $ABCD$ (Obr. 1.6): $B - A = C - D$, $D - A = C - B$, ale $B - A \neq D - C$, hoci orientované úsečky AB a CD majú rovnakú dĺžku a sú rovnobežné.



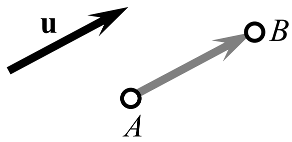
Obr. 1.6

Vektor sme definovali nepriamo – nepovedali sme, *čo vektor je*, ale *ako je určený*. Uvedenú definíciu môžeme však bez problémov prepísať do priamej podoby: Ako prvé treba dokázať, že relácia „určovať ten istý vektor“ je ekvivalencia na množine všetkých orientovaných úsečiek. Potom sa jednoducho povie, že vektor je trieda rozkladu vzhľadom na túto ekvivalenciu. Vtedy ***vektor je množina všetkých navzájom rovnako dlhých a rovnako orientovaných orientovaných úsečiek***.

Poznamenajme, že vzťah orientovanej úsečky k vektoru je taký istý ako vzťahom zlomku k racionálnemu číslu: Každý zlomok a/b, $b \neq 0$ určuje racionálne číslo, pričom zlomky a/b a c/d určujú to isté racionálne číslo práve vtedy, keď $ad = bc$. Namiesto frázy „zlomky určujú to isté racionálne číslo“ sa kvôli jednoduchosti hovorí, že „zlomky sa rovnajú“. Treba si však uvedomiť, že pritom nejde o rovnosť v základnom zmysle slova, ale o ekvivalenciu. Zlomok je totiž (neobvykle zapísaná) usporiadaná dvojica celých čísel s nenulovou druhou zložkou. Základná rovnosť zlomkov teda znamená, že sa navzájom rovnajú ich čitatele a menovatele.

Nasledujúca veľmi jednoduchá vlastnosť vektorov a ich umiestnení bude mať pre náš prístup ku geometrii zásadný význam:

(A1) Pre každý bod A a pre každý vektor $\mathbf{u}$ existuje práve jeden bod B, pre ktorý $\mathbf{u} = B - A$.



Obr. 1.7

Táto vlastnosť hovorí, že každý vektor možno umiestniť do ľubovoľného bodu a to **jediným spôsobom**.

Bod B z vlastnosti (A1) označujeme symbolom $A + \mathbf{u}$. Je to druhý krajný bod orientovanej úsečky, ktorá je umiestnením vektora $\mathbf{u}$ do bodu A. Hovoríme tiež, že bod $B = A + \mathbf{u}$ vznikol z bodu A *posunutím o vektor* $\mathbf{u}$. Operácie „súčet bodu s vektorom“ a „rozdiel bodov“ sú navzájom inverzné:

$$B = A + \mathbf{u} \iff \mathbf{u} = B - A.$$

Zrejme platí:

$$A + (B - A) = B,$$

$$(A + \mathbf{u}) - A = \mathbf{u},$$

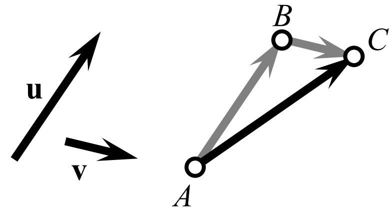
$$A + \mathbf{0} = A.$$

Tieto rovnosti, dobre známe zo sčitovania a odčitovania čísiel, dodatočne potvrdzujú vhodnosť zápisu vektora ako rozdielu bodov, hoci spočiatku táto symbolika môže pôsobiť podivne.

1.3 SČITOVANIE VEKTOROV

<u>Súčet vektorov</u> definujeme takto (Obr. 1.8):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = ((A + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - A$$



Obr. 1.8

Mali by sme sa presvedčiť, že pravá strana rovnosti nezávisí od bodu A, čo však neurobíme, lebo nemáme k dispozícii dostatočne presne vybudovanú geometriu (pozri [2]).

Zrejmým dôsledkom definície súčtu vektorov a súčtu bodu s vektorom je rovnosť

$$(A + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Ak označíme $B = A + \mathbf{u}$ a $C = B + \mathbf{v}$, získame nasledujúcu väzbu medzi súčtom vektorov a rozdielom bodov:

(A2’) Pre všetky body A, B, C platí $C - A = (B - A) + (C - B)$.

Ďalej možno dokázať, že pre všetky vektory **a**, **b**, a **c** platí

$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (komutatívny zákon sčitovania vektorov),

$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (asociatívny zákon sčitovania vektorov),

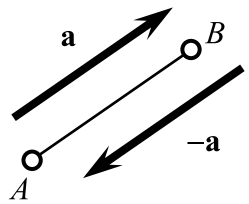
$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (**0** je neutrálny prvok sčitovania vektorov).

Rovnosť (A2’) môžeme pri využití komutatívneho zákona prepísať do krajšej podoby

(A2) Pre všetky body A, B, C platí $C - A = (C - B) + (B - A)$.

Z vlastnosti (A2) vyplýva, že $(B - A) + (A - B) = B - B = \mathbf{0}$, preto ku každému vektoru $\mathbf{a} = B - A$ existuje jednoznačne určený vektor $-\mathbf{a} = A - B$ (Obr. 1.9), pre ktorý platí

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

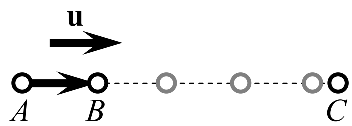


Obr. 1.9

Zhrnutie: Množina vektorov $V(F^n)$, $n = 1, 2, 3$, spolu s operáciou sčitovania tvorí komutatívnu grupu.

1.4 NÁSOBENIE VEKTORA REÁLNYM ČÍSLOM

Pre <u>nenulový vektor</u> $\mathbf{u} = B - A$ a pre **<u>nezáporné reálne číslo</u>** k definujeme $k\mathbf{u} = C - A$, kde C je bod polpriamky AB, pre ktorý $|AC| = k|AB|$. (Obr. 1.10)(Opäť treba dokázať nezávislosť vektora $k\mathbf{u}$ od umiestnenia vektora **u**, čo ale znova vynechávame.)



Obr. 1.10

Pre **záporné číslo** k definujeme $k\mathbf{u} = (-k)(-\mathbf{u})$ a pre nulové číslo resp. nulový vektor definujeme

$$0\mathbf{u} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

pre všetky vektory **u** a čísla k.

Možno dokázať, že pre všetky vektory **a**, **b** a pre všetky čísla k, l platí

$$k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a},$$

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b},$$

$$(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a},$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

To spolu so skôr uvedenými vlastnosťami súčtu vektorov znamená, že $V(F^n)$, $n = 1, 2, 3$, je vektorový priestor nad poľom reálnych čísiel. Dá sa dokázať, že $\dim V(F^n) = n$.

Opakovanie z lineárnej algebry:

Nech vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ sú vektory priestoru $V(\mathbf{F})$. Vektor **b** nazývame ***lineárnou kombináciou vektorov*** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ ak:

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + ... + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n$ sú prvky poľa **F**.

1.5 ALTERNATÍVNE DEFINÍCIE VEKTORA

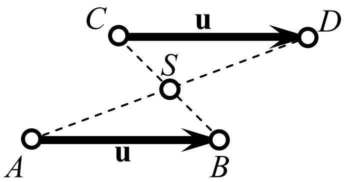
Našu definíciu vektora možno trochu zjednodušiť, lebo na jeho určenie nepotrebujeme celú orientovanú úsečku, pretože postačia jej krajné body. Môžeme teda povedať, že **vektor je určený usporiadanou dvojicou bodov: $(A, B) \rightarrow B - A$**. Dve usporiadané dvojice bodov určujú rovnaký vektor, ak odpovedajúce orientované úsečky sú rovnako dlhé a rovnako orientované. K tomuto pre nás základnému spôsobu určovania vektorov uvedieme tri alternatívy.

1. **Stred dvojice bodov** A, B, čo je stred odpovedajúcej úsečky, označíme $S(A,B)$. Zrejme platí

$$S(A,B) = A + ½(B - A) .$$

Usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) určujú ten istý vektor práve vtedy, keď dvojice bodov (A, D) a (B, C) majú rovnaký stred (Obr. 1.11), teda

$$B - A = D - C \quad \Leftrightarrow \quad S(A,D) = S(B,C).$$



Obr. 1.11

O takých dvojiciach bodov hovoríme, že sú *ekvipolentné*. Teda dve usporiadané dvojice bodov určujú ten istý vektor, keď sú ekvipolentné.

2. **Každá usporiadaná dvojica bodov určuje posunutie.** Posunutie určené dvojicou bodov (A,B) označujeme t_{AB}. Je to (jediné) posunutie, v ktorom sa bod A zobrazuje do bodu B. *Usporiadané dvojice bodov (A, B), (C, D) určujú ten istý vektor práve vtedy, keď určujú to isté posunutie*, teda

$$B - A = D - C \quad \Leftrightarrow \quad t_{AB} = t_{CD}.$$

V tomto prístupe vektory stotožňujeme s posunutiami. Posunutia sú zobrazenia z F^n do F^n, preto ich môžeme skladať. Pritom zloženie posunutí odpovedá súčtu vektorov:

Ak $\mathbf{u} = t_{AB}$ a $\mathbf{v} = t_{BC}$, tak $\mathbf{u} + \mathbf{v} = t_{AC} = t_{BC} \circ t_{AB}$. (Zobrazenia skladáme sprava doľava, čiže $t_{BC} \circ t_{AB}(X) = t_{BC}(t_{AB}(X))$.)

3. **Iná charakterizácia vektora posunutiami:** *Usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) určujú ten istý vektor práve vtedy, keď bod D je obrazom bodu B v posunutí t_{AC}*.

1.6 ZHRNUTIE

K bodom n-rozmerného fyzikálneho priestoru F^n, $n = 1,2,3$, sme pridali vektory a definovali sme operácie s nimi tak, že vznikol n-rozmerný vektorový priestor $V(F^n)$. Vektory priestoru F^n sú s jeho bodmi zviazané operáciou rozdiel bodov. Túto operáciu možno považovať za zobrazenie $F^n \times F^n \to V(F^n)$, ktoré usporiadanej dvojici bodov (A, B) priraďuje vektor $B - A$. Toto zobrazenie má vlastnosti (A1) a (A2).

1.7 ÚLOHY

1. Daný je rovnobežník $ABCD$. Vyjadrite vektor $M - A$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = B - A$ a $\mathbf{b} = D - A$, ak:

a) $M = B$ **Výsledok**: $1\mathbf{a} + 0\mathbf{b}$

b) $M = C$ **Výsledok**: $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b}$

c) M je priesečník uhlopriečok rovnobežníka **Výsledok**: $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$

d) M je stred strany AD **Výsledok**: $0\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$

e) M je stred strany CD **Výsledok**: $\frac{1}{2}\mathbf{a} + 1\mathbf{b}$

f) M rozdeľuje stranu BC v pomere 2:1. **Výsledok**: $1\mathbf{a} + 2/3\mathbf{b}$

2. Body E, F sú stredy základní AB, CD lichobežníka $ABCD$, v ktorom $|CD| = k|AB|$. Vyjadrite vektor $F - E$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = B - A$ a $\mathbf{b} = D - A$. **Výsledok**: $(k-1)/2\ \mathbf{a} + \mathbf{b}$

3. Daný je trojuholník ABC. Dokážte, že bod M leží na priamke AB práve vtedy, keď $M - C = a(A - C) + b(B - C)$ a $a + b = 1$. **Návod**: Začnite so vzťahom medzi vektormi $M - A$ a $B - A$.

4. Dané sú body A, B, C, D a $M = S(A,B)$, $N = S(C,D)$. Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$. **Výsledok**: $\frac{1}{2}(D - A) + \frac{1}{2}(C - B)$

5. Nech $M = A + k(B - A)$, $N = D + k(C - D)$, $k \in \mathbf{R}$.

a) Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$.

Výsledok: $(1 - k)(D - A) + k(C - B)$

b) Dokážte: Ak body A, B, C, D neležia v rovine, tak priamka MN je rovnobežné s rovinou ADE, kde $E = A + (C - B)$.

Návod: $MN \parallel AF$ pre $F = A + (1 - k)(D - A) + k(E - A)$

6. Na hranách štvorstena $ABCD$ nájdite všetky také body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, že $L - K = M - N$.

Výsledok: $K = A + k(B - A)$, $L = C + k(B - C)$, $M = C + k(D - C)$, $N = A + k(D - A)$.

Návod: Položte $K = A + k(B - A)$, $L = B + l(C - B)$, ... Vektor $(L - K) - (M - N)$ vyjadrite ako lineárnu kombináciu vektorov $A - D$, $B - D$, $C - D$.

1.8 Domáca úloha č.1:

1. Daný je pravidelný šesťuholník *ABCDEF*. Vyjadrite zadané vektory ako lineárne kombinácie vektorov $\mathbf{a} = B - A$, $\mathbf{b} = F - A$.

a) $C - B$ **Výsledok**: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

b) $D - C$ **Výsledok**: $0\mathbf{a} + 1\mathbf{b}$

c) $E - F$ **Výsledok**: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

d) $E - D$ **Výsledok**: $(-1)\mathbf{a} + 0\mathbf{b}$

e) $E - B$ **Výsledok**: $0\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

f) $E - C$ **Výsledok**: $(-1)\mathbf{a} + 1\mathbf{b}$

g) $D - F$. **Výsledok**: $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$

2. Stred dvojice bodov *A, B* je bod $S(A,B) = A + ½ (B - A)$. Dokážte (formálne!), že pre všetky body *A,B,C,D* platí:

a) $S(B,A)=S(A,B)$ **Návod**: Vyjadrite si $S(B,A) = B + ½(A - B)$ a $S(A,B) = A + ½(B - A)$ a ...

b) $B - A = D - C$ práve vtedy, keď $S(A,D)=S(B,C)$

3. Nech pre bod *M* v rovine *ABC* platí: $(A - M) + 2(B - M) + 3(C - M) = \mathbf{0}$.

a) Vyjadrite vektor $(M - A)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $B - A$ a $C - A$.

Výsledok: $(M - A) = 1/3(B - A) + 1/2(C - A)$

b) Leží bod *M* v trojuholníku *ABC*? **Výsledok**: Áno

4. Dané sú body *A*, *B*,*C*. Označme: $\mathbf{a} = B - A$, $\mathbf{b} = C - A$, $T = A + 1/3\mathbf{a} + 1/3\mathbf{b}$, $K = S(B,C)$, $L = S(C,A)$, $M = S(A,B)$.

a) Dokážte: $T - A = 2/3(K - A)$, $T - B = 2/3(L - B)$, $T - C = 2/3(M - C)$.

Návod: $T - B = -2/3\mathbf{a} + 1/3\mathbf{b}$, $L - B = -\mathbf{a} + 1/2\mathbf{b}$

b) Tvrdenie z časti a) interpretujte ako vetu o ťažniciach trojuholníka.