

Vedecké poznávanie vo vyučovaní matematiky

Pavol Hanzel

Úvod

Vedecké poznávanie možno chápať ako sled metodických krokov, v ktorom sa z pozorovania a experimentovania postupne rodia hypotézy, tieto sa overujú, korigujú a nakoniec zovšeobecňujú do teórií. Analogicky vo vyučovaní matematiky učiteľ vedie žiakov od problémovej situácie k formulovaniu predpokladov, ich skúmaniu, k dôkazom a aplikáciám. Takýto prístup nielen rozvíja matematické myslenie, ale zároveň napodobňuje proces poznávania v samotnej matematike.

Názornosť v matematike má významné miesto vo vyučovaní **vizualizácia**, teda názorné znázorňovanie matematických štruktúr. Už Euklides zdôrazňoval kreslenie obrazcov ako súčasť dôkazu, a moderné technológie (GeoGebra, Maple) tento princíp posúvajú ďalej – umožňujú žiakovi nielen sledovať obrázok, ale aj dynamicky manipulovať s objektmi.

- **Cieľ prednášky:** ukázať, ako sa dá prepojiť vedecké poznávanie s vyučovaním matematiky, najmä prostredníctvom problémového vyučovania a heuristických stratégií.
- **Úlohy:**
 1. vysvetliť fázy vedeckého poznávania a ich analógiu vo vyučovaní matematiky,
 2. predstaviť problémové vyučovanie a jeho metodické postupy,
 3. analyzovať heuristické stratégie a typické učiteľské otázky,
 4. ukázať možnosti IKT podpory (Moodle, GeoGebra) na konkrétnych príkladoch.

Didaktická poznámka 1

Názornosť a problémovosť sa nedajú vnímať izolovane – učiteľ vytvára pre žiakov „mikro-model“ vedeckého bádania. Pri probléme „*Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?*“ môže žiak najprv pozorovať, potom experimentovať (GeoGebra), vysloviť hypotézu, a nakoniec dôjsť k dôkazu. Takto sa krokmi približuje k metodológii matematiky ako vedy.

1 Vedecké poznávanie a jeho analógia vo vyučovaní matematiky

Charakteristickou črtou vedeckého poznávania je proces systematického skúmania, dôslednej analýzy a následného vysvetľovania javov a vzťahov vo svete. V matematike a didaktike matematiky ide o spôsob, ako systematicky zisťovať pravidlá, princípy a postupy, ktoré umožňujú efektívne vyučovanie a učenie sa. Cieľom tejto sekcie je ukázať, ako sa metódy vedeckého skúmania dajú analogicky uplatniť pri problémovom vyučovaní matematiky.

1.1 Fázy vedeckého poznávania

Vedecké skúmanie možno rozdeliť do niekoľkých fáz, ktoré sú užitočné aj pre učiteľov a študentov matematiky:

1. **Formulácia problému alebo výskumnej otázky** – určenie presného cieľa a definovanie, čo chceme skúmať.
2. **Hypotéza alebo predpoklad** – predpoklad, ktorý je možné testovať experimentom alebo pozorovaním.
3. **Zber dát** – využitie pozorovania, experimentu, dotazníkov alebo iných nástrojov na získanie relevantných informácií.
4. **Analýza dát** – spracovanie zozbieraných informácií pomocou kvantitatívnych alebo kvalitatívnych metód.
5. **Interpretácia a diskusia výsledkov** – hodnotenie a vysvetlenie zistení, identifikácia vzťahov a súvislostí.
6. **Záver a odporúčania do praxe** – formulácia záverov a odporúčaní pre ďalšie vyučovanie alebo výskum.

1.2 Výskumné metódy v kontexte vyučovania

Profesor Kopka navrhol viacero metód, ktoré podporujú systematické a kritické myslenie vo vedeckom poznávaní. Profesor Kopka zdôrazňuje, že stratégia alebo taktika pri riešení problémov sa nazýva **heuristika**. Výskumný prístup pri výučbe školskej matematiky sa v značnej miere opiera o **experimentovanie**. Uvedieme použitie heuristickej metódy na jednoduchom matematickom príklade.

Príklad 1.1. Je dané celé číslo. Vydelím ho číslom 3. K výsledku pripočítam číslo 7. Takto získané číslo ešte vynásobím číslom -2 . Výsledné číslo, ktoré som takto získal je -6 . Aké číslo bolo dané na začiatku?

Riešenie. Budeme experimentovať

1. Skúsime, či by „dané číslo“ nemohlo byť napr. číslo 6 (skúšame len čísla deliteľné tromi?)
2. Vypočítame, že v tomto prípade výsledné číslo je rovné: $(2 + 7) \cdot (-2) = -18$.
3. Teda číslo 6 nemôže byť daným začiatočným číslom.
4. Zvolíme iné číslo, napr. 3 a budeme si všímať, ako sa približujeme k výsledku: -16
5. V prípade, že „nemáme šťastie“ pokračujeme v experimentovaní.
6. Experiment opakujeme pokiaľ neprídeme k „rozumnému“ zisteniu.

Priebežné riešenie - zistenie.

Experimentálne číslo sa zmenšilo o 3 a „výsledné číslo“ sa zväčšilo o 2. K výsledku (t.j. k číslu -6) sa „približujeme“! Pokračujeme v experimentovaní. Naše experimentálne výsledky zapíšme do tabuľky.

Dané číslo	Výsledné číslo
6	-18
3	-16
0	-14
...	...

Tabuľka 1: Experimentálne výsledky

Pokúsme sme sa tento postup zovšeobecniť:

1. K číslu -18 je nutné 6 x pripočítať číslo 2, aby sme získali výsledné číslo -6 .
2. K číslu 6 je nutné 6 x odpočítať číslo 3. Spočítajme $6 + 6 \cdot (-3) = -12$.

Dané číslo by teda mohlo byť číslo -12 , o čom sa presvedčíme skúškou. Urobme skúšku správnosti a zistíme, že dané číslo je naozaj číslo -12 .

Odpoveď. Na začiatku bolo dané číslo rovné -12 .

□

Tieto všeobecné fázy a výskumné metódy sa neobmedzujú iba na akademický výskum. Pri vhodnej didaktickej adaptácii ich môžeme využiť aj v školskej matematike, kde majú potenciál viesť žiakov k aktívnemu objavovaniu a kritickému mysleniu. Nasledujúca podkapitola ukazuje, ako sa tieto metódy premietajú do vyučovacej praxe.

Poznámka 1.1: Terminologická poznámka

Pojem *výskumná metóda* označuje všeobecný rámec skúmania (pozorovacia, analytická, experimentálna), kým *heuristická stratégia* sa vzťahuje na konkrétny postup alebo taktiku, ktorú žiak volí pri riešení problému (analógia, náčrt, špeciálny prípad a pod.). Vo vyučovaní sa obe roviny prirodzene prelínajú.

1.3 Využitie výskumných metód v školskej matematike

Celý proces poznávania s využitím výskumných metód môžeme stotožniť so schémou:

konkretizácia(špecializácia) → zovšeobecňovanie → vyslovenie hypotézy → dôkaz

Uvedená schéma je v súlade so štruktúrou separovaných a generických modelov, ktorú zaviedol profesor Hejný. Zároveň odráža aj hlavné rysy problémového vyučovania v matematike na ZŠ a SŠ. Preto heuristické výskumné metódy možno výhodne využiť aj pri problémovom vyučovaní matematiky. Sú to predovšetkým tieto metódy:

- **Analytická metóda** – systematické rozkladanie problému, identifikácia jeho častí a vzťahov. Využitelná pri identifikácii kľúčových ťažkostí žiakov.
- **Experimentálno-pozorovacia metóda** – získavanie empirických dát o správaní a úspešnosti žiakov pri riešení úloh.
- **Historicko-porovnávacia metóda** – skúmanie zmien didaktických postupov v čase, ukazuje vývoj matematického myslenia.
- **Matematická modelácia** – využitie modelov na kvantifikáciu vzťahov, napr. medzi typom úlohy a úspešnosťou žiakov.

1.4 Heuristické stratégie vo vyučovaní matematiky

Heuristické stratégie predstavujú osvedčené postupy, ktorými sa žiak alebo učiteľ usiluje o riešenie problémovej úlohy. Ich význam spočíva v tom, že poskytujú nástroje na prekonanie tzv. *blokády v myslení*, keď priama cesta k riešeniu nie je zrejmá. Učiteľ môže tieto stratégie nielen uplatňovať, ale aj reflektovať spolu so žiakmi, čím rozvíja ich metakognitívne schopnosti – teda schopnosť učiť sa učiť.

Príklady stratégií.

- **Analógia** – hľadanie podobnosti medzi novou úlohou a už riešenou situáciou.
- **Špeciálny prípad** – skúmanie jednoduchšej alebo hraničnej situácie (napr. dosadenie konkrétneho čísla, degenerovaného prípadu).
- **Náčrt** – vizualizácia problému pomocou obrázku, grafu alebo schémy.
- **Experimentovanie** – skúšanie viacerých možností a sledovanie vzorcov či pravidielností.
- **Algoritmizácia** – systematizovanie postupu do krokov alebo pravidiel.
- **Rozklad problému** – dekompozícia na menšie, ľahšie riešiteľné podproblémy.

Prepojenie s metakogníciou. Učiteľ, ktorý využíva heuristické stratégie, zároveň vedie žiakov k metakognícii: k uvedomovaniu si *ako uvažujú*, ktoré stratégie im pomohli a ktoré boli menej účinné. Tak sa žiac učia plánovať svoje kroky, sledovať priebeh riešenia a spätne hodnotiť vlastné myslenie. Tento proces je základom kompetencie „učiť sa učiť“.

1.5 Analógia s problémovým vyučovaním

Vedecké poznávanie a problémové vyučovanie sú príbuzné procesy:

- začínajú identifikáciou problému,
- vyžadujú tvorbu hypotéz a predpokladov,
- spoliehajú sa na pozorovanie a experiment,
- končia analýzou, interpretáciou a závermi.

Heuristické stratégie študentov pri riešení problémových úloh možno chápať ako aplikáciu experimentálno-pozorovacích a analytických metód. Integrácia Kopkových metód umožňuje systematické a reflektované vyučovanie.

Príklad 1.2. *Majme určiť súčet prvých n nepárnych čísel.*

Riešenie.

- **Špeciálny prípad:** Pre $n = 1$: $1 = 1^2$, pre $n = 2$: $1 + 3 = 4 = 2^2$, pre $n = 3$: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.
- **Experimentovanie:** Skúsme vypočítať aj pre $n = 4$: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$. Objavuje sa pravidelnosť.
- **Analógia:** Uvedomíme si, že podobne ako súčet prvých n prirodzených čísel má známy vzorec, aj tu môžeme očakávať jednoduchý uzavretý tvar.
- **Náčrt:** Učiteľ môže použiť geometrickú ilustráciu – poskladaním štvorca z jednotkových štvorcov (1, potom 3 okolo, potom 5 okolo, atď.) sa vizualizuje, že ide vždy o rozšírenie štvorca na ďalší.
- **Rozklad problému:** Dá sa ukázať, že $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Záver: Súčet prvých n nepárnych čísel je n^2 . □

Poznámka 1.2:

Táto úloha je vhodná na ukážku viacerých heuristických stratégií v praxi. Učiteľ môže viesť diskusiu tak, že nechá žiakov najprv vypočítať niekoľko *špeciálnych prípadov* a hľadať pravidelnosť. Následne sa otvorí priestor na *experimentovanie* – skúšanie ďalších hodnôt a preverovanie hypotézy. Pri vhodnej otázke „*Nepodobá sa to na niečo, čo už poznáte?*“ sa dá využiť *analógia* so vzorcom pre súčet aritmetickej postupnosti. Vizualný *náčrt* v podobe rastúceho štvorca z jednotkových kociek umožní žiakom lepšie pochopiť súvislosť a zároveň podporuje metakognitívnu reflexiu („*Ako som prišiel na tento vzorec?*“).

Úloha sa tak stáva nielen matematickým cvičením, ale aj prostriedkom na spoznanie a pomenovanie stratégií, ktoré žiaci pri riešení používajú. Takto sa rozvíja schopnosť *učiť sa učiť* a vedome využívať heuristické postupy.

Ukážky typických heuristických otázok učiteľa.

- Čo sa stane, ak skúsiš jednoduchší alebo špeciálny prípad?
- Vyskytuje sa podobný problém, ktorý už poznáme?
- Ako by sme situáciu znázornili na obrázku?
- Je možné rozdeliť úlohu na viac menších častí?

- Aký je ďalší krok, ktorý by si mohol urobiť?
- Ako môžeš overiť, či je tvoje riešenie správne?
- Vieš opísať, akú stratégiu práve používaš?

Tieto otázky smerujú žiakov k tomu, aby si vedome uvedomovali vlastné postupy a rozvíjali metakogníciu, t. j. schopnosť premýšľať o svojom myslení a učení sa.

Didaktická poznámka 2

Heuristické stratégie vo vyučovaní matematiky nadobúdajú praktický význam až vtedy, keď sú sprevádzané vhodnými otázkami učiteľa. Ich cieľom nie je poskytnúť okamžité riešenie, ale naviesť žiaka k objavovaniu, porovnávaniu a overovaniu vlastných myšlienok. Nasledujúci výber otázok môže slúžiť ako metodická pomôcka pri plánovaní vyučovacej hodiny.

1.6 Prepojenie s IKT

Informačné a komunikačné technológie (napr. GeoGebra, Moodle) umožňujú vizualizovať problémy, zbierať dáta a analyzovať výsledky žiakov, čím podporujú aplikáciu Kopkových metód v praxi.

- **GeoGebra:** dynamická manipulácia s vrcholmi trojuholníka umožňuje rýchle experimentovanie a testovanie hypotéz.
- **Moodle:** úloha typu *otvorená odpoveď* môže viesť žiakov k tomu, aby zapísali svoje hypotézy a vysvetlili, ako ich overovali. Učiteľ môže prideliť odznaky za originálne heuristické prístupy.

Konkrétny scenár využitia IKT môže vyzerat' nasledovne:

Príklad 1.3. Učiteľ zadá v Moodle úlohu: „Skúmajte, či sa výšky trojuholníka vždy pretínajú v jednom bode.“ Žiaci majú:

1. zostrojiť trojuholník v GeoGebre a zakresliť jeho výšky,
2. v prostredí Moodle zapísať svoju hypotézu a krátky opis postupu,
3. diskutovať v tematickom fóre o rôznych polohách ortocentra.

Na záver učiteľ vráti spätnú väzbu a ocení odznakom originálny prístup alebo jasnú argumentáciu.

2 Problémové vyučovanie

Problémové vyučovanie predstavuje taký prístup k vyučovaniu matematiky, v ktorom sa nové poznatky odvodzujú z riešenia problémových úloh. Žiaci sú vedení k aktívnej činnosti, k objavovaniu a k hľadaniu vlastných riešení. Úlohou učiteľa nie je podať hotový poznatok, ale vhodne viesť proces riešenia problému.

2.1 Didaktické ciele a význam

- rozvíja tvorivé a kritické myslenie žiakov,
- vedie k hlbšiemu porozumeniu matematických pojmov,
- podporuje motiváciu žiakov prostredníctvom otázok a výziev,
- umožňuje rozvíjať spoluprácu v skupine pri riešení.

Historická vsuvka

Thalés z Milétu (6. stor. pred n. l.) je považovaný za prvého, ktorý matematické poznatky systematicky *odvodzoval* z pozorovania a logickej úvahy. Jeho známe výroky (napr. o pravom uhle v polkruhu) sú príkladom prechodu od experimentálneho zistenia k teoretickému tvrdeniu.

Euklides (3. stor. pred n. l.) vytvoril v *Elementoch* súbor definícií, postulátov a dôkazov, čím ukázal, ako sa poznanie *systematizuje*. Vo svojich dôkazoch často využíval názorné znázorňovanie (konštrukciu obrazcov), ktoré je predchodcom dnešnej vizualizácie v softvéroch typu GeoGebra.

Príklad 2.1. „Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?“

Riešenie.

1. MOTIVAČNÁ ÚLOHA VHODNÁ NA EXPERIMENTOVANIE

V danom trojuholníku ABC postupne zostrojte priesečníky $V_1 = v_a \cap v_b$, $V_2 = v_a \cap v_c$, $V_3 = v_b \cap v_c$.
Aktivuj applet Ortocentrum - experiment.

2. FORMULÁCIA PROBLÉMU

Zistite, či tieto priesečníky predstavujú jeden a ten istý bod. Použite v GeoGebre príkaz „Vzt'ah“
 $a = b$, ktorý sa nachádza v skupine nástrojov „Uhly“.

3. STANOVENIE HYPOTÉZY

Výšky trojuholníka sa „**pretínajú**“ v jednom bode (ortocentrum).

4. EXPERIMENTÁLNE OVERENIE HYPOTÉZY

V prostredí GeoGebra žiaci zostroja ľubovoľný trojuholník a jeho výšky. Menia polohu vrcholov trojuholníka a skúmajú, či aj po zmene polohy vrcholu trojuholníka jeho výšky sa opäť pretínajú v jednom bode.

5. ZÁVER „VEDECKÉHO“ BÁDANIA

- zovšeobecnenie a formulácia tvrdenia: **V každom trojuholníku sa výšky pretínajú v jednom bode,**
- diskusia o polohe ortocentra (vnútri, mimo alebo na vrchole trojuholníka).

□

Didaktická poznámka 2

Žiaci týmto postupom prechádzajú „malým vedeckým procesom“: z pozorovania vytvoria hypotézu, experimentujú s jej overovaním a nakoniec dospejú k formulácii všeobecného tvrdenia.

Takáto aktivita podporuje matematické myslenie a približuje žiakov k autentickému obrazu matematiky ako tvorivej vedy.

Výška trojuholníka je definovaná buď ako úsečka alebo kolmica (priamka) resp. ako číslo (veľkosť).

Ako ukážku využitia výskumného heuristického poznávania spojeného s problémovým vyučovaním uvedieme ne riešení nasledujúceho príkladu.

Príklad 2.2. Ukážte, že všetky štvorciferné palindromy sú deliteľné číslom 11.

Pri riešení budeme využívať riadený výskumný proces, ktorý je vhodný pre žiakov stredných škôl. Je dosť pravdepodobné, že žiaci nepoznajú pojem "palindrom". Z toho dôvodu by mal učiteľ ešte pred riadeným výskumným procesom, priblížiť žiakom na konkrétnych prípadoch pojem palindromu. Uvedieme definíciu palindromu.

Definícia 2.1. Čísla, ktoré sa čítajú rovnako odpredu aj odzadu, ako napríklad 452 254, sa nazývajú palindromy.

Riešenie. Samotný priebeh heuristického skúmania v danej triede učiteľ koordinuje resp. usmerňuje pokynmi/otázkami typu:

1. Vypíšte náhodne niekoľko čísel, ktoré sú polyndromy: $4554 = 11 \cdot 414$, $1001 = 11 \cdot 91$, ...
2. Koľko bude všetkých možností? (Je ich 90 - prečo?)
3. Vypíšme niekoľko podľa veľkosti - 1001, 1111, 1221, 1331, 1441, ...
4. Skúmame vlastnosti tejto postupnosti - je aritmetická s diferenciou 110?
5. Avšak pri "prechode" cez tisícky ... 1991, 2002, ... , 2992, 3003, ... - diferencia je 11!
6. Prvé číslo $1010 = 11 \cdot 91$ je deliteľné 11 a každé ďalšie tiež deliteľné 11 $\Rightarrow$ tvrdenie je pravdivé.

□

Žiaci SŠ majú dostatok vedomostí z aritmetiky, aby dokázali algebraickými metódami tvrdenie

Veta 2.1 (Veta o palindromoch). *Dokážte, že platí:*

$$abba = 1000a + 100b + 10b + a = \dots$$

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi, využije vlastnosti zápisu prirodzeného čísla v desiatkovej číselnej sústave.

□

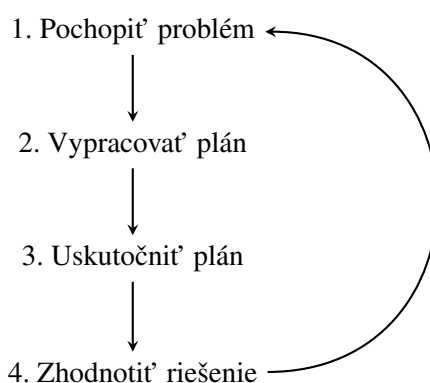
Poznámka 2.1

Úlohou učiteľa je viesť žiakov k formulovaniu otázok: *Čo vieme? Čo hľadáme? Aké podobné úlohy sme už riešili? Ako môžeme overiť výsledok?* Takto sa žiaci učia metódam vedeckého poznávania: od hypotézy cez experiment až k dôkazu. Rizikom je prílišná náročnosť úloh; je potrebné voliť také problémy, ktoré sú primerané vedomostiam a skúsenostiam žiakov.

Historická vsuvka

Korene problémového vyučovania siahajú do začiatku 20. storočia. Americký filozof a pedagóg John Dewey zdôrazňoval potrebu učenia sa činnosťou (*learning by doing*) a hľadanie riešení reálnych problémov. Podľa neho má žiak poznatky získavať aktívnym skúmaním a overovaním hypotéz.

Jean Piaget rozpracoval konštruktivistický prístup, v ktorom je poznávanie procesom aktívnej konštrukcie vedomostí prostredníctvom riešenia nových situácií.



Obr. 1: Pólyove štyri kroky riešenia problému

Poznámka 2.2: Pólyove kroky a typické učiteľské otázky

1. **Pochopiť problém** – „Čo je tu neznáme? Aké údaje poznáme?“
2. **Vypracovať plán** – „Podobá sa táto úloha na nejakú inú? Čo by pomohol náčrt?“
3. **Uskutočniť plán** – „Ktorý krok je najvhodnejší urobiť teraz?“
4. **Zhodnotiť riešenie** – „Ako si overíme, že výsledok je správny? Dalo by sa to vyriešiť aj inak?“

Takto formulované otázky pomáhajú žiakom uvedomovať si vlastný postup riešenia a podporujú rozvoj metakognície (*učenie sa učiť*).

Najväčší vplyv na vyučovanie matematiky mal však George Pólya, ktorý vo svojej práci *How to Solve It* (1945) formuloval heuristické stratégie riešenia problémov. Jeho štyri kroky riešenia – pochopiť problém, vypracovať plán, uskutočniť ho a skontrolovať výsledok – sa stali základom moderného problémového vyučovania matematiky. **George Pólya**, v práci *How to Solve It* (1945), systematizoval riešenie matematických problémov do štyroch krokov:

1. *Pochopiť problém* (What is the unknown? What are the data?),
2. *Vypracovať plán* (Have you seen it before? Draw a figure!?),

3. *Uskutočniť plán* (implementovať postup),

4. *Zhodnotiť riešenie* (Check the result! Could you derive it differently?) :contentReference[oaicite:1]index=1.

Tieto heuristické fázy dodnes tvoria základ moderného problémového vyučovania matematiky. Pri problémovom vyučovaní je možné využiť rôzne heuristické postupy. Podľa Pólyu môžeme riešenie problémov rozdeliť do spomínaných štyroch fáz. Medzi konkrétne heuristické stratégie patria:

1. Rozklad problému na jednoduchšie podproblémy.
2. Hľadanie analógie a podobnosti s už riešenými úlohami.
3. Náčrt, grafická vizualizácia, experimentovanie.
4. Odhad a overenie správnosti riešenia.

3 Vizualizácia problému

Vizualizácia patrí medzi kľúčové heuristické stratégie riešenia problémov, ktoré dopĺňajú postupy ako analógia, špeciálny prípad či rozklad problému. Už **George Pólya** vo svojom diele *How to Solve It* (1945) [POL] zdôrazňoval význam vhodnej reprezentácie problému. Podľa neho je dôležité zvoliť takú formu znázornenia, ktorá uľahčuje porozumenie zadaniu a usporiadanie informácií.

Alan Schoenfeld vo svojej práci ¹ upozorňuje, že vizualizácia sa spája najmä s prvou fázou riešenia problému – *hlbokým porozumením*. Táto fáza zahŕňa:

- dôkladné prečítanie zadania,
- identifikáciu daných a odvodených údajov,
- hľadanie podobných problémov,
- vizualizáciu alebo dramatizáciu problému.

Prečo je vizualizácia užitočná?

Vizualizácia pomáha:

- zmeniť abstraktný problém na konkrétny, čím sa stáva zrozumiteľnejším,
- odhaliť vzory alebo vzťahy, ktoré by inak zostali skryté,
- aktivovať intuitívne chápanie pomocou obrázkov, tabuliek, grafov či fyzických modelov,
- podporiť diskusiu a metakogníciu – žiak si uvedomuje, ako uvažuje.

Vizualizácia pomáha:

- zmeniť abstraktný problém na konkrétny a zrozumiteľnejší,
- odhaliť vzory alebo vzťahy, ktoré by inak zostali skryté,
- aktivovať intuitívne chápanie pomocou obrázkov, tabuliek, grafov či fyzických modelov.

3.1 Formy vizualizácie v matematike

V didaktike matematiky existuje viacero foriem znázorňovania:

- *symbolické vizualizácie* – množinovo-teoretický formalizmus, algebraické symboly,
- *grafické vizualizácie* – Descartov súradnicový systém, grafy funkcií, tabuľky,
- *dynamické vizualizácie* – softvérové produkty (GeoGebra, Maple),
- *mentálne a pojmové mapy* – schémy a konceptuálne diagramy.

¹<https://kitchentablemath.com/s/Paper-in-progress-Problem-Solving-116.pdf>

Každá forma má inú didaktickú funkciu: napríklad tabuľka môže odhaliť číselný vzor, graf funkcie zase zviditeľní závislosť medzi veličinami. Historicky možno pozorovať, že zavedenie nových symbolických alebo grafických reprezentácií vždy akcelerovalo pokrok v matematike.

Poznámka 3.1: Didaktická poznámka

Súčasná prax často trpí nedostatkom názorného zdôvodňovania. Formálne sprostredkovanie poznatkov bez vizualizácie vedie k povrchnej reprodukcii učiva. Preto je dôležité cielene rozvíjať vizualizačné stratégie a integrovať ich s modernými technológiami.

V rámci experimentovania v GeoGebre pri riešení príkladu 2.1 "Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?" sme zostrojili priesečník výšok trojuholníka a sledovali sme zmenu polohy tohto priesečníka pri manipulácii s vrcholmi.

Stanovili sme hypotézu: "Výšky sa vždy pretínajú v jednom bode (ortocentrum)." Toto tvrdenie sme overovali pomocou dynamickej manipulácie - **vizualizácie** - a naznačili stabilnosť priesečníka.

Nakoniec pri diskusii sme zistili, že poloha ortocentra môže byť rôzna v závislosti od veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka (vnútri, mimo alebo na vrchole trojuholníka).

Didaktická poznámka

Vizualizácia pomocou GeoGebry umožňuje žiakovi intuitívne „vidieť“ pravidelnosť a vytvoriť si hypotézu. Treba však zdôrazniť, že **vizualizácia nenahrádza dôkaz**, ale pripravuje pôdu pre jeho formuláciu. Takto sa spája experimentovanie s požiadavkou matematickej argumentácie.

Prepojenie s IKT

Moderné technológie výrazne rozširujú možnosti vizualizácie:

- **GeoGebra:** dynamické manipulovanie s objektmi podporuje *mentálne experimentovanie*.
- **Moodle:** úlohy s obrázkami a interaktívnymi appletmi umožňujú žiakovi reprezentovať problém rôznymi spôsobmi.

Poznámka 3.2: Heuristické otázky

Pri riešení problémov možno žiakovi položiť typické heuristické otázky: „Vieš si to nakresliť?“ „Dá sa problém predstaviť na konkrétnom príklade?“ „Ako by vyzerala situácia v grafe alebo v tabuľke?“ Takto sa podporuje nielen vizualizácia, ale aj metakognitívna zručnosť „učiť sa učiť“.

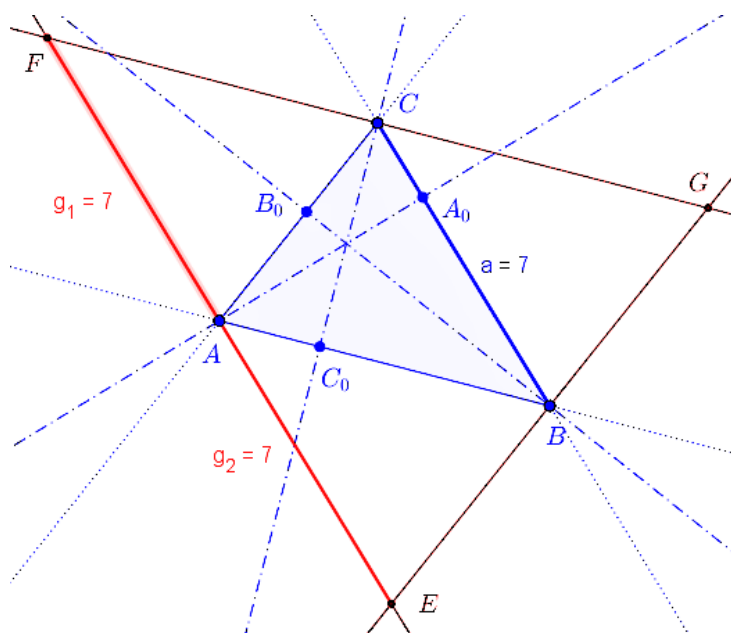
3.2 Problémy v matematickom vzdelávaní

V súčasnosti sa prehľbujú problémy v matematickom vzdelávaní, ktoré sú dôsledkom najmä týchto troch príčin:

1. dlhodobu klesajúcej úrovne matematických vedomostí (zreteľne to vidieť pri prechode na vyšší stupeň vzdelávania),
2. nedostatočného matematického zdôvodňovania a argumentácie (mnohí učitelia len formálne sprostredkujú žiakom matematické tvrdenia),
3. nevýrazného takmer zanedbateľného využívania moderných technológií (ich (ne)používanie sa prejavilo hlavne pri online vyučovaní).

Pre účely tejto prednášky sme zvolili jednu z možností využitia GeoGebry, ktorá pomáha urobiť matematiku názornejšiu, zaujímavejšiu. Vybrali sme tematický okruh "Priečky v trojuholníku", konkrétne tému "Priečník výšok v trojuholníku".

Príklad 3.1. V trojuholníku ABC zostrojte jeho výšky a určte priesečníky ich výšok. Dokážte, že tieto priesečníky sú totožné body. Inými slovami: "V každom trojuholníku sa výšky pretínajú v jednom bode".



Obr. 2: Priečník výšok v trojuholníku - dôkaz
Dostupné na Výška a stredná priečka

Riešenie. Žiaci môžu postupovať nasledovne:

1. Najprv zostroja ľubovoľný trojuholník KLM a ukážu, že osi jeho strán sa pretínajú v jednom bode - v strede opísanej kružnice. Dôkaz tejto vlastnosti si v rámci samo-štúdia môžu overiť v Euklidových Základoch ².
2. V novom GeoGebra applete (čistý výkres) zostroja trojuholník ABC , ktorého strany budú určené pomocou troch posuvníkov a, b, c . Jeden posuvník (napr. c) musí spĺňať podmienku

$$|a - b| \leq c \leq a + b$$

3. Zostroja trojuholník EFG , ktorého strany sú rovnobežné so stranami trojuholníka ABC a sú incidentné s vrcholmi A, B, C . Pozri obrázok 2.
4. Dokážu, že vrcholy A, B, C sú stredmi strán trojuholníka EFG . Môže využiť vlastnosť: "V rovnobežníku protíahlé strany majú rovnakú veľkosť".³
5. Zostroja osi strán trojuholníka EFG , ktoré zrejme prechádzajú bodmi A, B, C . Teda osi strán trojuholníka EFG sú výšky trojuholníka ABC .

Tým je dôkaz ukončený. □

Didaktická poznámka k vizualizácii

Tento riešený príklad vedie žiakov k prepojeniu:

- **experimentu** (dynamické manipulácie v GeoGebre),
- **hypotézy** (výšky sa pretínajú v jednom bode),
- **dôkazu** (následná argumentácia).

Vizualizácia tu nie je len pomôckou, ale jadrom poznávacieho procesu.

Názornosť a problémovosť sa nedajú vnímať izolovane – učiteľ vytvára pre žiakov „mikro-model“ vedeckého bádania. Pri probléme „Kde sa pretínajú výšky trojuholníka?“ môže žiak najprv pozorovať, potom experimentovať (GeoGebra), vysloviť hypotézu, a nakoniec dôjsť k dôkazu. Takto sa krokmi približuje k metodológii matematiky ako vedy.

Pripomíname, že téma *Výšky trojuholníka* spolu s dôkazom je zaradená do učiva ZŠ!

²Priamka prechádzajúca stredom kruhu a stredom tetivy je kolmá na túto tetivu a rozpoluje túto tetivu. Euclid's Elements, Book III, P3. Toto tvrdenie bolo pravdepodobne známe už Thálesovi.

³Pozrite Euclid's Elements, Book I, Proposition 34.

Literatúra

[SCH] Schoenfeld, A. H.: *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando, 1985. ISBN 978-0126288704.

[SER] Servít, F.: *Eukleidovy Základy (Elementa)*. Jednota českých matematiků, Praha, 1907.

Dostupné online: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf>.

[JOY] Joyce, D. E.: *Euclid's Elements*. Clark University, 1994.

Dostupné online: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.

[LAR] Larson, L. C.: *Problem-Solving Through Problems*. Springer-Verlag, New York, 1983. ISBN 978-0387961712.

Dostupné online:

<https://math.la.asu.edu/~ifulman/spring13/mat194/problem-solving.pdf>.

[POL] Pólya, G.: *How to Solve It*. Princeton University Press, Princeton, 1945.