V nasledujúcich úlohách je číslo *n* prirodzené číslo: $n\in N$.

**Úlohy:**

1. Súčet 1 + 3 + 5 + ... + (2*n* – 1) zapíšte pomocou sumačnej symboliky, nájdite vzorec (formulu) pre jeho výpočet a pomocou neho vypočítajte 1 + 3 + ... + 99.
	1. Skúmajme čiastkové súčty:

1 + 3 = **4 = 22 ,**  1 + 3 + 5 = **9 = 32 ,** 1 + 3 + 5 + 7 = **16 = 42**

Pomocou matematickej indukcie dokážte, že platí: **1 + 3 + 5 + ... + (2*n* – 1) = *n*2.**

* 1. Súčet 1 + 3 + 5 + ... + (2*n* – 1) predstavuje aritmetickú postupnosť s parametrami: $a\_{1}=1,d=$

Pre jej súčet platí: $\sum\_{i=1}^{n}\left(2i-1\right)=\frac{n}{2}\left(1+\left(2n-1\right)\right)=n^{2}$ .

1. Nájdite vzorec (formulu) pre výpočet súčtu: $\sum\_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(3i-2\right)}\frac{1}{\left(3i+1\right)}=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+…$
2. Skúmajme čiastkové súčty:

Pre $i=1 $dostaneme: $\frac{1}{1.4}= \frac{1}{4}=\frac{1}{3.1+1}$

Pre $i=2 $ dostaneme: $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}= \frac{2}{7}=\frac{2}{3.2+1}$

Pre $i=3 $ dostaneme: $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}= \frac{3}{10}=\frac{3}{3.3+1}$

Pomocou matematickej indukcie dokážte, že platí: $\sum\_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(3i-2\right)}\frac{1}{\left(3i+1\right)}=\frac{n}{3.n+1}$

1. Pomocou rozkladu na parciálne zlomky súčet $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+…$ môžeme upraviť

Nech platí: $\sum\_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(3i-2\right)\left(3i+1\right)}\right)=\sum\_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{\left(3i-2\right)}-\frac{B}{\left(3i+1\right)}\right)$. Po úpravách určíme $A=\frac{1}{3}\rightarrow B=\frac{1}{3}$.

Pomocné úpravy:

$\frac{A}{\left(3i-2\right)}-\frac{B}{\left(3i+1\right)}=\frac{A\left(3i+1\right)-B\left(3i-2\right)}{\left(3i-2\right)\left(3i+1\right)}=\frac{A3i+A-3iB+2B}{\left(3i-2\right)\left(3i+1\right)}$

$$\left(3iA-3iB=0 ∧ A+2B=1\right)⟹\left(A-B=0 ∧ A+2B=1\right)⟹A=\frac{1}{3}\rightarrow B=\frac{1}{3}$$

Po dosadení:

$$\sum\_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(3i-2\right)\left(3i+1\right)}\right)=\sum\_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{3}}{\left(3i-2\right)}-\frac{\frac{1}{3}}{\left(3i+1\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+…+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=$$

V tejto postupnosti vyrušia všetky členy okrem prvého a posledného. Teda platí:

$$s\_{n}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{3n+1}\right]$$

1. Nájdite vzorec (formulu) pre výpočet súčinu:

$$\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{3^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{4^{2}}\right)…\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)$$

 a vypočítajte hodnotu súčinu pre $n=50.$

1. Počítajme:

Pre $i=2 $ dostaneme: $\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{3^{2}}\right)=\frac{3}{4}⋅\frac{8}{9}=\frac{2}{3}$

Pre $i=3 $ dostaneme: $\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{3^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{4^{2}}\right)=\frac{3}{4}⋅\frac{8}{9}⋅\frac{15}{16}=\frac{5}{8}$

Pre $i=4 $ dostaneme: $\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{3^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{4^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{5^{2}}\right)=\frac{3}{4}⋅\frac{8}{9}⋅\frac{15}{16}⋅\frac{24}{25}=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$

Pomocou matematickej indukcie dokážte: $\left(1-\frac{1}{2^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{3^{2}}\right).\left(1-\frac{1}{4^{2}}\right)…\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)=\frac{n+1}{2n}$

1. Upravme súčin:

$$\prod\_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^{2}}\right)=\prod\_{i=2}^{n}\left(\frac{i^{2}-1}{i^{2}}\right)=\prod\_{i=2}^{n}\left(\frac{\left(i-1\right)\left(i+1\right)}{i.i}\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}. ….\frac{n-2}{n-1}.\frac{n}{n-1}.\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}$$

Všetky vnútorné členy sa nám vykrátia a ostane nám len prvý a posledný člen

$$s\_{n}=\frac{1}{2}.\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

$$s\_{50}=\frac{50+1}{2.50}=0,51$$