

Nech p je prirodzené číslo väčšie ako 1. Nech $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ p -adických čísl $x_i \in \{0, \dots, p-1\}$ sa nazýva **p -adický zápis čísla x** , píšeme

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_i \dots |_p,$$

ak

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p^{-i}. \quad (9.10)$$

Ak existuje n také, že pre $i > n$ je $x_i = 0$, tak píšeme

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n |_p.$$

V tomto prípade totiž

$$x = \sum_{i=0}^n x_i \cdot p^{-i}.$$

Hovoríme, že číslo x má **konečný p -adický zápis**. V opačnom prípade je zápis **nekonečný**

Príklad 9.1 Číslo $\frac{1}{5}$ má konečný desiatkový zápis

$$0,2 = 0,2000\dots = 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + \dots + 0 \cdot 10^{-i} + \dots = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

To isté číslo má aj nekonečný desiatkový zápis:

$$\begin{aligned} 0,1999\dots9\dots &= 1 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots + 9 \cdot 10^{-i} + \dots = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-i} + \dots). \end{aligned}$$

V zátvorke je súčet geometrického radu s kvocientom 10^{-1} a ten je rovný číslu

$$\frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{10 - 1} = \frac{10}{9}.$$

Teda

$$0,1999\dots9\dots = \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

Podobne možno vypočítať, že $0,999\dots9\dots = 1$. Naozaj

$$\begin{aligned} 0,999\dots9\dots &= 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \dots + 9 \cdot 10^{-i} + \dots = \\ &= \frac{9}{10} \cdot (1 + 10^{-1} + \dots + 10^{-i} + \dots) = \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1. \end{aligned}$$

Tento výsledok môžeme zovšeobecniť takto:

$$1 = 0, (p-1)(p-1)\dots(p-1)\dots |_p.$$

Podobne možno ukázať, že ak $x_i = p-1$ pre $i > m$ a $x_m < p-1$, tak

$$\begin{aligned} 0, x_1 x_2 \dots x_m (p-1)(p-1)\dots |_p &= 0, x_1 x_2 \dots (x_m + 1) 00 \dots |_p = \\ &= 0, x_1 x_2 \dots (x_m + 1) |_p. \end{aligned}$$