

Kvantová, atómová a subatómová fyzika

KVANTOVÁ INFORMÁCIA

ILUSTRÁČNÉ PROBLÉMY

10.11.2021

Príklad 1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné spinory Pauliho matíc

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Príklad 2. Nájdite operátor prislúchajúci priemetu spinu do smeru daného jednotkovým vektorom \vec{n} a vyjadrite zložky vektora \vec{n} pomocou uhlov θ, φ vo sférických súradniciach!

Príklad 3. Priemet spinu elektrónu do smeru daného uhlami (θ, φ) sa rovná $\hbar/2$. Nájdite pravdepodobnosť toho, že v tomto stave nájdeme elektrón s priemetom spinu $\hbar/2$ do smeru osi z . Opíšte fyzikálne usporiadanie experimentu odpovedajúceho takémuto meraniu.

Príklad 4. Identifikujte na Blochovej sfére vlastné stavy operátorov $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$.

Príklad 5. Akej polarizácii fotónu by zodpovedali bázové stavy spinu $1/2$, ktoré sú vlastnými stavmi priemetu spinu na os y ?

Príklad 6. Nájdite transformačné vzťahy medzi amplitúdami a, b a uhlami ϑ, φ z vyjadrenia

$$a|0\rangle + b|1\rangle = e^{i\xi} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle \right)$$

Príklad 7. Ako sa zmení stav $a|0\rangle + b|1\rangle$ pri aplikácií

a. operátora $\hat{X} = \sigma_x$

b. operátora $\hat{Y} = \sigma_y$

c. operátora $\hat{Z} = \sigma_z$

d. operátorov $\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$

e. operátorov $\hat{Z}\hat{Y}\hat{X}$

f. operátorov $\hat{Z}\hat{X}\hat{X}$

g. operátorov $\hat{H}\hat{X}\hat{H}\hat{X}$

Príklad 8. Ktoré z týchto operácií nemôžeme aplikovať na kvantový stav a prečo?

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle \quad |1\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (1)$$

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (2)$$

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle + |1\rangle \quad |1\rangle \rightarrow -|0\rangle + |1\rangle \quad (3)$$

Príklad 9. Ukážte, že dvakrát aplikované hradlo \sqrt{NOT} dáva hradlo NOT .

Príklad 10. Vyjadrite stavy základnej bázy systému dvoch qubitov ako lineárne kombinácie stavov Bellovej bázy.

Príklad 11. V procese kvantovej teleportácie sme začínali so stavom troch qubitov

$$|q_A\rangle|\phi^+\rangle = (a|0_A\rangle + b|1_A\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_{A'}\rangle|0_B\rangle + |1_{A'}\rangle|1_B\rangle)$$

Ukážte, že tento systém sa dá vyjadriť ako

$$\begin{aligned} |q_A\rangle|\phi^+\rangle &= \frac{1}{2} |\phi_A^+\rangle (a|0_B\rangle + b|1_B\rangle) + \frac{1}{2} |\phi_A^-\rangle (a|0_B\rangle - b|1_B\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} |\psi_A^+\rangle (b|0_B\rangle + a|1_B\rangle) - \frac{1}{2} |\psi_A^-\rangle (b|0_B\rangle - a|1_B\rangle) . \end{aligned}$$

- Príklad 12.** Ukážte, že Bob dostane v poslednom kroku teleportácie (keď rotuje svoj stav) naozaj prenášaný stav.
- Príklad 13.** Aká je pravdepodobnosť odhalenia špióna v algoritme BB84, ak si komunikujúci partneri vymenia 10 qbitov?
- Príklad 14.** Ukážte, že hradlo SWAP naozaj vymieňa stavy dvoch qubitov.