Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 6

---

1. Pre vyžarovanú frekvenciu platí (vzťah z prednášky):

$$2\pi\nu = \omega = \frac{\hbar}{I}(l+1) = \frac{\hbar}{\mu d^2}(l+1)$$

kde μ je redukovaná hmotnosť daná vzťahom

$$\mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} = 1.139 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}. \tag{1}$$

Teraz už stačí vyjadriť si vzdialenosť:

$$d = \sqrt{\frac{\hbar(l+1)}{\mu 2\pi\nu}} = 113.1\,\text{pm}.$$

2. Pravdepodobnosť, že sa elektrón nachádza v určitej vzdialenosti, dostaneme preintegrovaním hustoty pravdepodobnosti:

$$P = \iiint |\Psi(x,y,z)|^2 dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{\infty} |\Psi(x,y,z)|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr =$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = \frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a_0}^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr$$

Prvý integrál nám dáva výsledok 2, druhý integrál nám dáva 2π, tretí je už trochu komplikovanejšie spočítať, no dojdeme k výsledku $\frac{5a_0^3}{4e^2}$. To nám dohromady dáva

$$P = \frac{1}{\pi a_0^3} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{5a_0^3}{4e^2} = \frac{5}{e^2} = 67.7\%.$$

3. Aby sme dostali predpis pre radiálnu hustotu pravdepodobnosti, musíme si uvedomiť, že pravdepodobnosť, že elektrón sa bude nachádzať v oblasti r od jadra s hrúbkou dr je daná objemom tejto vrstvy, t.j.

$$dP = 4\pi r^2 dr \cdot |\Psi(x,y,z)|^2$$

Radiálna hustota pravdepodobnosti je preto daná vzťahom

$$4\pi r^2 |\Psi(x,y,z)|^2 = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) = \frac{4}{a_0^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

Aby sme našli najpravdepodobnejšiu vzdialenosť, teda maximum tejto funkcie, musíme prvú deriváciu položiť rovnú nule:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{4}{r_0^2}\left(2r\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) - \frac{2r^2}{a_0}\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right)$$
$$0 \stackrel{!}{=} 1 - \frac{r}{a_0}$$
$$r = a_0$$

Najpravdepodobnejšia vzdialenosť elektrónu od jadra je presne Bohrov polomer a_0.

4. (a) Sila je daná gradientom potenciálnej energie, a tá je zase daná vzťahom $U = -\mu_z B$. Vzťah pre silu je potom

$$F = \mu_z \frac{dB}{dz}$$

pričom magnetický moment je rovný Bohrovmu magnetónu $\mu_z = \mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T}$. Pôsobiaca sila je potom

$$F = \mu_B \frac{dB}{dz} = 1.48 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{N}.$$

(b) Najskôr potrebujeme určiť čas, za ktorý elektrón prejde magnetickým poľom:

$$t = \frac{d}{v_x}$$

Počas tohto času pôsobí na atóm sila spôsobujúca zrýchlenie

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\mu_B}{m} \frac{dB}{dz}$$

To spôsobí, že po prechode magnetickým poľom bude mať atóm rýchlosť (kolmú na svoj pôvodný smer)

$$v_z = a \cdot t = \frac{\mu_B d}{m v_x} \frac{dB}{dz} \tag{2}$$

Odchýlka od pôvodného smeru sa potom určí pomocou trigonometrie

$$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{v_z}{v_x} = \frac{\mu_B d}{m v_x^2} \frac{dB}{dz} = 4.93 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad} = 0.003^\circ \tag{3}$$

5. (a) V prípade oboch fotónov sa elektrón dostane do rovnakého stavu (nazvime E_0). Prvý elektrón však pri tom stratí energiu $E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$, druhý $E_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$. Keď chceme vedieť celkový energetický rozdiel, musíme odčítať celkové energie:

$$\Delta E = (E_0 + E_1) - (E_0 + E_2) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 2.1\,\mathrm{meV}.$$

(b) Rozdiel medzi energetickými hladinami elektrónu, ktorý má dve možné hladiny, v magnetickom poli B je

$$\Delta E = 2\mu_B B$$

V takom prípade je vnútorné magnetické pole

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = 18\,\mathrm{T}. \tag{4}$$