Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 5

---

1. Najskôr sa pozrime na klasický oscilátor. Ten má mať energiu odpovedajúcu základnému stavu, teda $E = \frac{\hbar\omega}{2}$. V maximálnej výchylke potom bude celá energia uložená v potenciálnej energii pružinky, a preto môžme písať

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\
\frac{1}{2}\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\
x &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}
\end{aligned}
$$

Tento výraz odpovedá parametru x_0. Pravdepodobnosť, že sa bude častica v kvantovom oscilátore nachádzať vo väčšej výchylke, ako x_0, je potom daná vzťahom

$$P = \int_{-\infty}^{-x_0} |\Psi(x)|^2 dx + \int_{x_0}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx \tag{1}$$

Keďže vieme, že stacionárne stavy oscilátora sú vždy párne alebo nepárne, znamená to, že hustota pravdepodobnosti je vždy symetrická. To znamená, že oba integrály nám dajú rovnaký výsledok, a tak nám stačí spočítať jeden z nich.

$$P = 2\int_{x_0}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 2\int_{x_0}^{\infty} \left(\pi x_0^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) dx = \left| x/x_0 = u, dx = x_0 du \right| = 2x_0 \left(\pi x_0^2\right)^{-1/2} \int_1^{\infty} \exp\left(-u^2\right) du =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0.139 = 0.157 = 15.7\%$$

2. V stave $n_x = n_y = n_z = 1$ je energia kvantového LHO daná vzťahom

$$E = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\hbar\omega = 9\hbar\pi f = 186\,\mathrm{meV} \tag{2}$$

Pre amplitúdu kmitov klasického oscilátora platí rovnaký vzťah ako v predchádzajúcom príklade

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\
\frac{9}{2}\hbar\omega &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\
x &= \sqrt{\frac{9\hbar}{m\omega}} = 12.8\,\mathrm{pm}
\end{aligned}
$$

Nakoniec, celková energia sa dá vyjadriť cez teplotu pomocou vzťahu pre strednú energiu častice pohybujúcej sa v troch rozmeroch:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}k_BT &= \frac{9}{2}\hbar\omega \\
T &= \frac{3\hbar\omega}{k_B} = 1440\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

3. V tomto príklade stačí dosadiť n do vzorca:

$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= \exp(x^2)\exp(-x^2) = 1 \\
H_1(x) &= -\exp(x^2)\frac{d}{dx}\exp(-x^2) = -\exp(x^2)\left(-2x\exp(-x^2)\right) = 2x \\
H_2(x) &= \exp(x^2)\frac{d^2}{dx^2}\exp(-x^2) = \exp(x^2)\left(4x^2-2\right)\exp(-x^2) = 4x^2 - 2 \\
H_3(x) &= -\exp(x^2)\frac{d^3}{dx^3}\exp(-x^2) = -\exp(x^2)\left(12x - 8x^3\right)\exp(-x^2) = 8x^3 - 12x
\end{aligned}
$$

4. Pre pravdepodobnosť prechodu sme si odvodili vzťah

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \sinh^2(\kappa d)} \tag{3}$$

kde $\kappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$. Po dosadení hodnôt $E = 4.2\,\mathrm{MeV}$, $U = 7\,\mathrm{MeV}$, $d = 0.6\,\mathrm{fm}$ a $m = 3.73\,\mathrm{GeV/c^2}$ dostávame

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + 1.04 \sinh^2 0.439} = 0.824 = 82.4\%. \tag{4}$$

Cez takúto bariéru prejde viac ako 80% častíc.