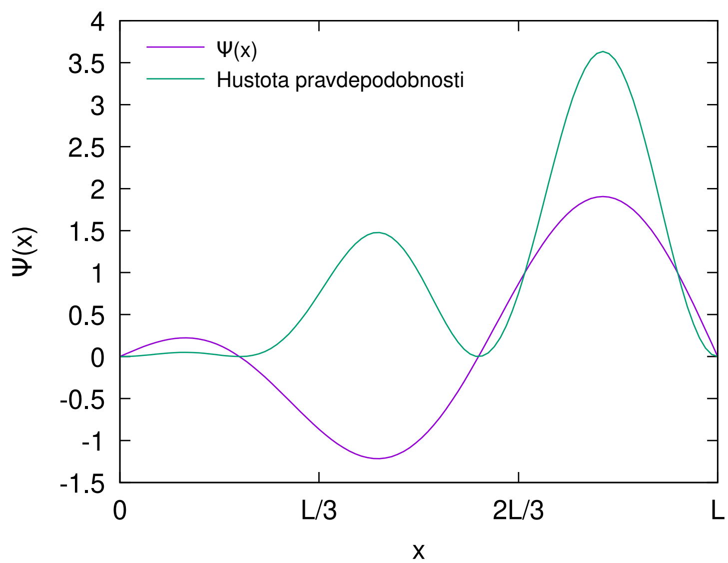
# Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 4

1. Máme vlnovú funkciu
$$\Psi(x,t=0) = \frac{A}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) \tag{1}$$

   (a) Normalizačná podmienka má tvar
   $$\int |\Psi(x)|^2 dx = 1 \tag{2}$$
   Musíme teda spočítať integrál
   $$\int_0^L \frac{A^2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos^2\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) dx = \left| \frac{\pi x}{2L} = u, dx = \frac{2L}{\pi} du \right| = \frac{2A^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 5u du =$$
   $$= \frac{2A^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right) \left(\frac{1+\cos 10u}{2}\right) du = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2u + \cos 10u - \cos 2u \cos 10u) du =$$
   $$= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos 2u + \cos 10u - \frac{\cos 8u + \cos 12u}{2}\right) du = \frac{A^2}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{A^2}{4} \stackrel{!}{=} 1$$
   Odtiaľ dostávame
   $$A = 2 \tag{3}$$

   (b) + (c)




   (d) Pravdepodobnosť dostaneme jednoduchým preintegrovaním hustoty pravdepodobnosti, ktorá je daná druhou mocninou vlnovej funkcie. Budeme tak počítať podobný integrál, ako v časti A. Koniec koncov, normalizačná podmienka nám hovorí, že pravdepodobnosť, že sa častica nachádza kdekoľvek, je 1.

$$\int_{L/3}^{2L/3} \frac{4}{L}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\cos^2\left(\frac{5\pi x}{2L}\right)dx = \left|\frac{\pi x}{2L} = u, dx = \frac{2L}{\pi}du\right| = \frac{8}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 u \cos^2 5u du =$$
$$= \frac{8}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 10u}{2}\right)du = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\cos 2u+\cos 10u-\cos 2u\cos 10u)du =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(1-\cos 2u+\cos 10u-\frac{\cos 8u+\cos 12u}{2}\right)du = \frac{2}{\pi}\left[u-\frac{\sin 2u}{2}+\frac{\sin 10u}{10}-\frac{\cos 8u}{16}+\frac{\sin 12u}{24}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \approx 26\%$$

(e) Z prednášky vieme, že vlnové funkcie stacionárnych stavov majú všeobecný tvar

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4}$$

Našu vlnovú funkciu tak musíme rozložiť na jednotlivé sínusy, to spravíme s použitím trigonometrických vzorcov

$$\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{6\pi x}{2L}\right)-\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{4\pi x}{2L}\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\Psi_3(x)-\sqrt{\frac{1}{2}}\Psi_2(x) \tag{5}$$

(f) Každý stacionárny stav má iný časový vývoj závislý od svojej energie

$$\Psi_n(x,t) = \Psi_n(x)\exp\left(-i\frac{E_n t}{\hbar}\right) \tag{6}$$

Energia $n$-tého stavu má tvar

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 \tag{7}$$

Časový vývoj našej funkcie potom vyzerá nasledovne:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right) \tag{8}$$

(g) Opäť musíme spočítať pravdepodobnosť, tentokrát si však treba dať pozor, že vlnová funkcia má aj komplexnú časť:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \frac{1}{L}\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\exp\left(i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\exp\left(i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{L}\left(\sin^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)-\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)2\cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right)$$

$$\int_{L/3}^{2L/3}|\Psi(x,t)|^2dx = \left|\frac{\pi x}{L} = u, dx = \frac{L}{\pi}du\right| = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(\sin^2 2u+\sin^2 3u-2\sin 2u\sin 3u\cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right)du =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(\frac{1-\cos 4u}{2}+\frac{1-\cos 6u}{2}-(\cos u-\cos 5u)\cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right)du =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[u-\frac{\sin 4u}{8}-\frac{\sin 6u}{24}-\left(\sin u-\frac{\sin 5u}{5}\right)\cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}-0\cdot\cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right) = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \approx 26\%$$

Tu vidíme, že napriek tomu že sa vlnová funkcia v čase mení, pravdepodobnosť nájdenia častice v prostrednej časti zostáva rovnaká.

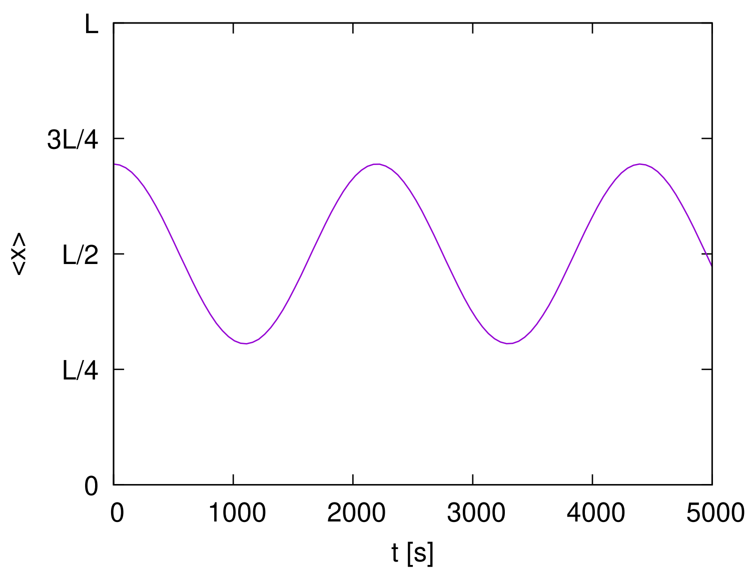
(h) + (i) Strednú polohu častice dostaneme aplikovaním operátoru polohy:

$$\hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^L \Psi^*(x,t) x \Psi(x,t) dx = \int_0^L x|\Psi(x,t)|^2 dx = \left| \frac{\pi x}{L} = u, dx = \frac{L}{\pi} du \right| = \\
&= \frac{L}{\pi^2} \int_0^\pi u \left( \sin^2 2u + \sin^2 3u - 2 \sin 2u \sin 3u \cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)\right) du = \\
&= \frac{L}{\pi^2} \int_0^\pi u \left(1 - \frac{\cos 4u}{2} - \frac{\cos 6u}{2} - (\cos u - \cos 5u) \cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)\right) du = \left| \int x \cos Nx dx = \frac{\cos Nx}{N^2} + \frac{x \sin Nx}{N} \right| \\
&= \frac{L}{\pi^2} \left[ \frac{u^2}{2} - \frac{\cos 4u}{32} - \frac{u \sin 4u}{8} - \frac{\cos 6u}{72} - \frac{u \sin 6u}{12} - \left( \cos u + u \sin u - \frac{\cos 5u}{25} - \frac{u \sin 5u}{5} \right) \cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)\right]_0^\pi = \\
&= \frac{L}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{2} - \left(-2 + \frac{2}{25}\right) \cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)\right) = \frac{L}{2} + \frac{L}{\pi^2} \frac{48}{25} \cos\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2} t\right)
\end{aligned}$$

Z tohto príkladu vidíme, že superpozíciou dvoch stacionárnych stavov dostávame stav, ktorému osciluje stredná hodnota polohy. Z výsledku tiež vidíme, že stredná hodnota osciluje okolo prostriedku jamy, pričom v čase $t = 0$ dostávame hodnotu

$$\langle x \rangle \Big|_{t=0} = \frac{L}{2} + \frac{L}{\pi^2} \frac{48}{25} \approx 0.69L \tag{10}$$




(j) + (k) Aj strednú hybnosť budeme počítať aplikovaním operátoru:

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \Psi(x) \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \int_0^L \Psi^*(x,t)(-i\hbar)\frac{d}{dx}\Psi(x,t)dx = \int_0^L \frac{-i\hbar}{L}\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\exp\left(i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\exp\left(i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right)\cdot \\
&\cdot\left(\frac{3\pi}{L}\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\frac{2\pi}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right)dx = \left|\frac{\pi x}{L}=u, dx=\frac{L}{\pi}du\right| = \\
&= \frac{-i\hbar}{L}\int_0^\pi \left(\sin 3u\exp\left(i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\sin 2u\exp\left(i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right)\cdot \\
&\cdot\left(3\cos 3u\exp\left(-i\frac{9\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-2\cos 2u\exp\left(-i\frac{2\pi^2\hbar}{mL^2}t\right)\right)du = \\
&= \frac{-i\hbar}{L}\int_0^\pi\left(3\sin 3u\cos 3u+2\sin 2u\cos 2u-2\sin 3u\cos 2u\exp\left(i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-3\sin 2u\cos 3u\exp\left(-i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right)du = \\
&= \frac{-i\hbar}{L}\int_0^\pi\left(\frac{3}{2}\sin 6u+\sin 4u-(\sin 5u+\sin u)\exp\left(i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)-\frac{3}{2}(\sin 5u-\sin u)\exp\left(-i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right)du = \\
&= \frac{-i\hbar}{L}\left[-\frac{\cos 6u}{4}-\frac{\cos 4u}{4}+\left(\frac{\cos 5u}{5}+\cos u\right)\exp\left(i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\cos 5u}{5}-\cos u\right)\exp\left(-i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right]_0^\pi = \\
&= \frac{-i\hbar}{L}\left(-\frac{12}{5}\exp\left(i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)+\frac{12}{5}\exp\left(-i\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)\right) = \frac{-i\hbar}{L}\frac{12}{5}(-2i)\sin\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right) = -\frac{6}{5}\frac{\hbar}{L}\sin\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2mL^2}t\right)
\end{aligned}
$$

Tento výsledok dáva zmysel a je konzistentný s predchádzajúcim obrázkom: v čase nula sa stredná poloha častice nemení, čo si môžme predstaviť, že častica stojí, a teda aj stredná hybnosť by mala byť nulová, a potom sa poloha začne zmenšovať, čo odpovedá klesajúcej hybnosti a teda funkcii mínus sínus. V čase $t = 0$ je teda stredná hybnosť nulová a časový vývoj je znázornený na nasledujúcom obrázku.