Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 3

---

1. Z prednášky vieme, že počet častíc rozptýlených pod uhlom θ je úmerný

$$dn \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \tag{1}$$

So známym počtom častíc $dn_1 = 10^6$ pri uhle $\theta_1 = 10°$ si to môžeme zapísať ako

$$dn_1 = K \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}} \tag{2}$$

kde K je konštanta obsahujúca parametre experimentálnej aparatúry, ktorú si však vieme z tohto vzťahu vyjadriť.

$$dn_i = dn_1 \frac{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}{\sin^4 \frac{\theta_i}{2}} \tag{3}$$

Dosadením dostávame výsledky:

θ_i	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	...	180°
dn_i	10^6	$6.3 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^4$	$4.2 \cdot 10^3$	$1.8 \cdot 10^3$	923	533	338	231	168	...	58

2. Účinný prierez je plocha, na ktorú musia častice dopadnúť, aby sa odrazila pod daným uhlom. Na prednáške sme si ukázali, že pokiaľ sa častica rozptýli pod uhlom θ, znamená to, že na jadro nalietala s parametrom zrážky daným vzťahom

$$p = \frac{k}{2E_k} \cot \frac{\theta}{2}. \tag{4}$$

Plocha prstenca, na ktoré tieto častice dopadajú, je daná vzťahom

$$da = 2\pi p dp, \tag{5}$$

kde dp je šírka prstenca. Celková plocha, a teda tiež celkový účinný prierez, pri rozptyle väčšom než θ_i je daný vzťahom

$$A = \int_0^{p_i} 2\pi p dp = \int_\pi^{\theta_i} 2\pi \frac{k}{2E_k} \cot \frac{\theta}{2} \left(-\frac{k}{4E_k} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) d\theta = -\pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \int_\pi^{\theta_i} \frac{\cos \theta/2}{\sin^3 \theta/2} d\theta = \left| \theta/2 = \phi,\ d\theta = 2d\phi \right|$$

$$= -2\pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \int_{\pi/2}^{\theta_i/2} \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} d\phi = \left| \sin \phi = x,\ \cos \phi d\phi = dx \right| = -2\pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \int_1^{\sin \theta_i/2} x^{-3} dx =$$

$$= -2\pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{\sin \theta_i/2} = -2\pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \left(-\frac{1}{2 \sin^2 \theta_i/2} + \frac{1}{2} \right) = \pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta_i}{2}.$$

Pre hodnoty zo zadania ($E_k = 12\,\text{MeV}$, $Z = 47$, $\theta_1 = 10°$, $\theta_2 = 30°$, $\theta_3 = 90°$) dostávame účinné prierezy:

$$A_1 = 1.31 \cdot 10^{-26}\,\text{m}^2 = 13056\,\text{fm}^2,$$
$$A_2 = 1.39 \cdot 10^{-27}\,\text{m}^2 = 1392\,\text{fm}^2,$$
$$A_3 = 1.00 \cdot 10^{-28}\,\text{m}^2 = 100\,\text{fm}^2.$$

3. Už sme si odvodili, že účinný prierez (teda plocha) jedného jadra je daná vzťahom

$$A = \pi \left(\frac{k}{2E_k} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2}. \tag{6}$$

Celkový počet jadier v tenkej fólií je

$$N = \frac{Sh\rho N_A}{M} \tag{7}$$

kde S je plocha fólie, $h = 2\,\mu$m je hrúbka fólie, $\rho = 19.3\,\mathrm{g/cm^3}$ a $M = 197\,\mathrm{g/mol}$. Zlomok častíc, ktoré sa rozptýlia pod uhlom väčším ako 90° dostaneme ako podiel plochy všetkých účinných prierezov a celkovej plochy fólie:

$$P = \frac{AN}{S} = \pi \frac{h\rho N_A}{M} \left(\frac{k}{2E_k}\right)^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} = 9.8 \cdot 10^{-5} = 0.0098\%.$$

Pre časť (b) to bude o kúsok komplikovanejšie. Nechceme totiť plochu celého účinného prierezu, ale rozdiel dvoch účinných prierezov. Zlomok častíc preto bude:

$$P = \frac{AN}{S} = \pi \frac{h\rho N_A}{M} \left(\frac{k}{2E_k}\right)^2 \left(\cot^2 \frac{45°}{2} - \cot^2 \frac{75°}{2}\right) = 4.0 \cdot 10^{-4} = 0.04\%. \tag{8}$$

4. Na tento príklad využijeme zákon zachovania energie. V dostatočnej vzdialenosti má α častica nulovú potenciálnu energiu a kinetickú energiu má rovnú E_k - tú chceme určiť. V momente, keď bude k jadru najbližšie, bude mať nulovú kinetickú energiu, a jej potenciálna energia bude

$$E_p = k\frac{q_1 q_2}{r}. \tag{9}$$

My chceme, aby sa v tomto momente častica dotýkala jadra, a teda r v tejto rovnici bude rovný polomeru jadra $r = r_0 A^{1/3}$. Keď si to dáme všetko dokopy, dostaneme

$$E_k = E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e \cdot 82e}{r_0 208^{1/3}} = 33.2\,\mathrm{MeV}. \tag{10}$$

5. Z prednášky vieme, že spektrálne čiary vodíka sú opísané rovnicou

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{11}$$

Stačí nám teda dosadiť do vzťahu za λ a zistiť, či vieme nájsť celočíselné m a n, ktoré budú spĺňať túto rovnicu. Jeden spôsob je napríklad vypočítať si v Exceli všetky kombinácie m a n od 1 do 20 a porovnať hodnoty, ktoré dostaneme.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7460\,\mathrm{nm} \cdot R} &= 0.01222 = \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \\
\frac{1}{4654\,\mathrm{nm} \cdot R} &= 0.01959 = \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} \\
\frac{1}{4103\,\mathrm{nm} \cdot R} &= 0.02222 \\
\frac{1}{3741\,\mathrm{nm} \cdot R} &= 0.02437 = \frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2}
\end{aligned}$$

Z týchto výsledkov vidíme, že sa jedná o Pfundtovu sériu a že spektrálna čiara 4103 nm nepatrí k spektru vodíka.

6. Polomer vodíkového atómu môžeme dostať z Bohrovho modelu

$$r_n = \frac{4\pi\hbar^2\epsilon_0}{e^2 m} n^2 = 4.76\,\mu\mathrm{m}. \tag{12}$$

Rýchlosť elektrónu si môžeme vyjadriť napr. zo vzťahu pre moment hybnosti

$$\begin{aligned}
mvr &= n\hbar \\
v &= \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\hbar\epsilon_0 n} = 7292\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$