Kvantová, atómová a subatómová fyzika

Riešenie domácej úlohy 1

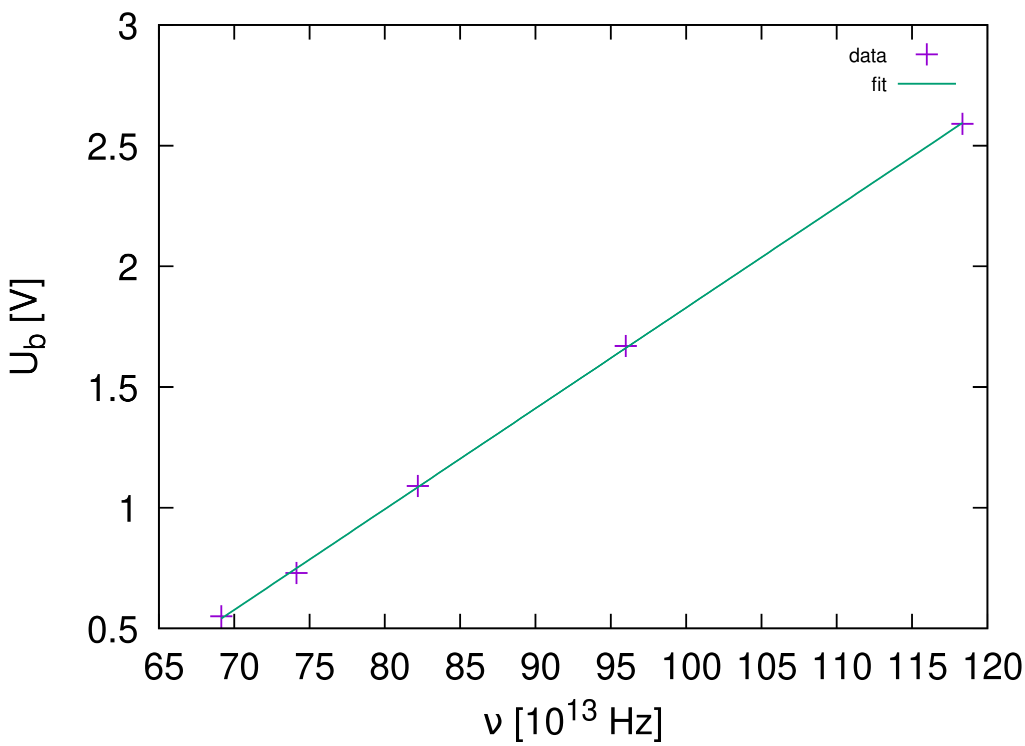
1. Rozptyl fotónov na voľných elektrónoch je prípadom Comptonovho efektu. Pre ten sme na prednáške ukázali vzťah
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \tag{1}$$
Zo zadania poznáme $\lambda = 2{,}4\,\mathrm{pm}$ a $\theta = 30°$. Vlnová dĺžka po rozptýlení je potom
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 2{,}73\,\mathrm{pm}. \tag{2}$$
Pre uhol $\theta = 120°$ dostaneme $\lambda' = 6{,}04\,\mathrm{pm}$.

2. Najprv si vlnovú dĺžku fotónov prepočítame na frekvenciu:

λ [nm]	433,9	404,7	365,0	312,5	253,5
U_b [V]	0,55	0,73	1,09	1,67	2,59
ν [THz]	690,93	740,78	821,3	959,34	1182,6

Pre fotoelektrický jav platí vzťah
$$U_b e = h\nu - A, \tag{3}$$
to znamená, že Planckovu konštantu dostaneme preložením priamky cez experimentálne dáta, napr. metódou najmenších štvorcou. To vie za nás spraviť aj softvér, či už Gnuplot, alebo Excel.

Graf závislosti brzdného napätia od frekvencie spolu s preloženou priamkou je znázornený na Obr. 1. Z tohoto fitu následne dostaneme hodnotu $h = 6{,}687 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, pričom tabuľková hodnota je $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.



Obr. 1: Graf závislosti brzdného napätia od frekvencie

3. Urýchlenie pomocou potenciálu $U = 25\,\mathrm{kV}$ dodá elektrónu kinetickú energiu $E_{kin} = 25\,\mathrm{keV}$. Keďže táto energia je v porovnaní s pokojovou energiou elektrónu omnoho menšia (511 keV), môžeme príklad uvažovať nerelativisticky a v takom prípade hybnosť spočítame jednoducho ako

$$p = \sqrt{2mE_{kin}}. \tag{4}$$

S použitím de Broglieho vzťahov potom vlnovú dĺžku dostaneme ako

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = 7{,}76\,\mathrm{pm}. \tag{5}$$

4. Vlnová dĺžka fotónu s danou energiou sa dá vypočítať z de Broglieho vzťahov

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} \tag{6}$$

Vlnovú dĺžku elektrónu potrebujeme minimálne v druhom prípade riešiť relativisticky, preto si odvodíme tento vzťah. Pre relativistické energie platí:

$$E = mc^2 + E_{kin} \tag{7}$$

kde E je celková energia a m je pokojová hmotnosť, ktorá sa s rýchlosťou nijako nemení. Zároveň však platí

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{8}$$

Spojením týchto dvoch rovníc si môžeme vyjadriť vzťah pre hybnosť ako

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(mc^2 + E_{kin})^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(mc^2)^2 + 2mc^2E_{kin} + E_{kin}^2 - (mc^2)^2} = \\ &= E_{kin}\sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E_{kin}}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Z tohto vzťahu si môžeme všimnúť napr. aj to, že pokiaľ je kinetická energia oveľa väčšia ako pokojová energia, tak je hybnosť rovná kinetickej energii. Vlnovú dĺžku už potom určíme jednoducho:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E_{kin}\sqrt{1 + \frac{2mc^2}{E_{kin}}}}. \tag{10}$$

Keď už máme vzťahy, stačí si dosadiť hodnoty energií a výsledky nájdeme v nasledujúcej tabuľke. Takže

	λ [m]	
E [eV]	fotón	elektrón
1	$1{,}24 \cdot 10^{-6}$	$1{,}22 \cdot 10^{-9}$
10^9	$1{,}24 \cdot 10^{-15}$	$1{,}24 \cdot 10^{-15}$

vidíme, že pre nízke energie je rozdiel medzi vlnovou dĺžkou elektrónu a fotónu obrovský, zatiaľ čo pri vysokých energiách, kedy sa pokojová energia elektrónu stáva zanedbateľnou, dostávame rovnaký výsledok pre fotóny aj elektróny.

5. Podmienka interferencie je aby bol dráhový rozdiel násobkom vlnovej dĺžky:

$$n\lambda = d\sin\theta. \tag{11}$$

Zo zadania máme $n = 1$. S použitím de Broglieho vzťahu môžeme rovnicu upraviť do tvaru

$$\lambda = d\sin\theta = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

$$d = \frac{h}{\sin\theta\sqrt{2meU}} = 218\,\mathrm{pm}. \tag{12}$$