Seminár 1: Úvod do seminára, očakávania, *Matematico*

Seminár 2: Menová reforma v Tramtárii – samostatné objavovanie matematického problému

Úlohy a riešenia

Úloha 2.1. [[BH82], úloha 43] V Tramtárii chcú zaviesť novú základnú peňažnú jednotku: toliar. V spojitosti s reformou sa vynorila otázka: aké majú mať hodnoty mince, ktoré pripraví mincovňa? Starí obyvatelia Tramtárie považovali 3 a 5 za šťastné čísla. Preto popredný historik navrhol, aby sa obmedzili na razenie troj- a päťtoliarových mincí. Svoj návrh zdôvodňoval takto: troj- a päťtoliarovými mincami možno vyplatiť hociktorú celočíselnú sumu a to skoro vždy presne, bez vrátenia. Ten, kto peniaze dostáva, musí niečo vrátiť iba vtedy, ak je vyplácaná suma 1, 2, 4 alebo 7 toliarov. Bola by to pravda?

Úloha 2.2. [[BH82], úloha 44] K návrhu z predchádzajúcej úlohy došiel upravujúci návrh. Istý občan píše: Uznávam síce, že troj- a päťtoliarovými mincami možno opísaným spôsobom naozaj zaplatiť každú sumu, ale sú to primalé hodnoty. Navrhujem, aby sa razili radšej päť- a osemtoliarové mince. Je zrejmé – zdôvodňoval ďalej –, že berúc do úvahy aj výdavok z peňazí, všetko, čo možno vyplatiť 3 a 5 toliarmi, možno vyplatiť aj 5 a 8 toliarmi. Tiež je zrejmé, že od istého čísla – vlastne v prípade väčších súm toliarov – ani tu netreba vrátiť mince. Je to skutočne také zrejmé?

Úloha 2.3. [[BH82], úloha 45] Diskusia, o ktorej sme v predchádzajúcich dvoch úlohách referovali, pokračovala aj ďalej. Boli aj takí, ktorí päť- a osemtoliarové mince považovali za primalé hodnoty a navrhovali väčšie. Návrhy na dve hodnoty toliarov boli napokon tieto:

a) 8 a 13,

b) 21 a 34,

c) 144 a 233.

Autori všetkých troch návrhov tvrdili, že týmito dvojicami hodnôt možno vyplatiť hocikoľko (celočíselných) súm toliarov a keď vyplácaná suma je dosť veľká, tak netreba ani vrátiť peniaze. Tvrdenie ktorého z týchto autorov je správne a ktorého nie?

Úloha 2.4. [[BH82], úloha 46] Tri návrhy, ktoré sme uviedli v predchádzajúcej úlohe, neboli náhodné. Starí obyvatelia uctievali nielen čísla 3 a 5, ale aj všetky čísla Fibonacciho postupnosti. Pravdepodobne dospeli až k variáciám týchto čísel, pretože sa objavili aj také návrhy, aby hodnoty dvoch mincí boli

a) 2 a 8,

b) 3 a 21,

c) 21 a 144 toliarov.

Ktorý z týchto troch návrhov je vhodný na zaplatenie hocijakej (celočíselnej) sumy toliarov, dokonca tak, aby sa pri dostatočne veľkej sume nemuselo nič vrátiť?

Úloha 2.5. [[BH82], úloha 47] Diskusia o peňažnej reforme v Tramtárii nadobúdala čoraz väčšie rozmery. Mnohí jej účastníci tvrdili, že návrhy z úlohy sa ukazujú byť správne, lebo rešpektujú aj poradie magických čísel, zatiaľ čo v úlohe sú neúspešné, pretože toto pradie nerešpektovali. Ako skutočná bomba preto zapôsobil návrh, aby sa vydali mince v hodnote 4 a 11 toliarov. Ani jedna hodnota sa nenachádza medzi „magickými" číslami! Napriek tomu autor tvrdil, že aj tieto hodnoty spĺňajú potrebné dve požiadavky: možno nimi vyplatiť hocijaké celočíselné množstvo toliarov a keď je táto suma dostatočne veľká, tak netreba ani nič vrátiť. Mal pravdu?

Úloha 2.6. [[BH82], úloha 48] Veľká diskusia však odrazu skončila (práve vtedy, keď bola najživšia), pretože Národná banka Tramtárie na veľké prekvapenie oznámila, že zavedie dve platidlá: troj- a päťtoliarové mince. Koľkými spôsobmi možno nimi vyplatiť 49 toliarov bez vrátenia peňazí?

Seminár 3: Prístup k riešeniu matematických úloh, typy dôkazov

Úloha 3.1. [Lode] Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na ňom jedna loď 2×3. Môžeme vystreliť na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, strieľame znova. Určte najmenší počet výstrelov, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

Seminár 4: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti I – úprava výrazov

Úlohy a riešenia

Úloha 4.1. [65-I-3-N1] Pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z dokážte nezápornosť hodnoty každého z výrazov

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz,\ x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13,\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zistite tiež, kedy je dotyčná hodnota rovná nule.

Úloha 4.2. [63-I-1-N1-N4] a) Určte najmenšiu hodnotu výrazu $V = 5 + (x-2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pre ktoré x ju výraz nadobúda?

b) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $W = 9 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je W minimálne?

c) Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $Y = 12 - ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 6$. Pre ktoré hodnoty a, b je Y minimálne?

d) Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $K = 5 + ab$, kde a, b sú reálne čísla spĺňajúce podmienku $a + b = 8$. Pre ktoré hodnoty a, b je K maximálne?

Úloha 4.3. [63-I-1] Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

Úloha 4.4. [63-S-1] Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $V = ab + bc + cd + da$, ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4, \\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

Úloha 4.5. [65-I-3]

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

Úloha 4.6. [65-II-1] Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla.

Úloha 4.7. [65-I-3-D1, resp. B-61-S-1] V obore celých čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

Seminár 5: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti II – nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 5.1. [58-S-1] Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a,b,c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 5.2. [66-I-1-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z platia nerovnosti

a) $2xyz \leq x^2 + y^2z^2$,

b) $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2$.

Úloha 5.3. [66-I-1-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Úloha 5.4. [62-I-2-N1] Dokážte nerovnosť

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{8}{(a+b)(c+d)}$$

pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d.

Úloha 5.5. [66-I-1] Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 5.6. [59-I-5] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a,b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

Úloha 5.7. [59-II-2] Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a,b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 5.8. [66-I-1-D3, resp. 58-I-6] Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a,b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Seminár 6: Algebraické výrazy, rovnice a nerovnosti III – lineárne rovnice a sústavy lineárnych rovníc

Úlohy a riešenia

Úloha 6.1. [60-I-1-N1] Máme tri čísla so súčtom 2010, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch. Aké sú to čísla?

Úloha 6.2. [60-I-1-N2] Máme tri čísla, o ktorých vieme, že každé z nich je aritmetickým priemerom niektorých dvoch z našich troch čísel. Dokážte, že naše tri čísla sú rovnaké.

Úloha 6.3. [60-I-1] Lucia napísala na tabuľu dve nenulové čísla. Potom medzi ne postupne vkladala znamienka plus, mínus, krát a delené a všetky štyri príklady správne vypočítala. Medzi výsledkami boli iba dve rôzne hodnoty. Aké dve čísla mohla Lucia na tabuľu napísať?

Úloha 6.4. [60-II-1] Na tabuli sú napísané práve tri (nie nutne rôzne) reálne čísla. Vieme, že súčet ľubovoľných dvoch z nich je tam napísaný tiež. Určte všetky trojice takých čísel.

Úloha 6.5. [60-S-1] Po okruhu behajú dvaja atléti, každý inou konštantnou rýchlosťou. Keď bežia opačnými smermi, stretávajú sa každých 10 minút, keď bežia rovnakým smerom, stretávajú sa každých 40 minút. Za aký čas zabehne okruh rýchlejší atlét?

Úloha 6.6. [66-I-4-N1] Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax+b$, pre ktoré platí $P(2) = 3$ a $P(3) = 2$.

Úloha 6.7. [66-I-4-N2] Určte všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$, pre ktoré platí $P(1) = 4$, $P(2) = 9$ a $P(3) = 18$.

Úloha 6.8. [66-I-4-N3] Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax+b$ s celočíselnými koeficientmi a a b, pre ktoré platí $P(1) < P(2)$ a $P(1)^2 + P(2)^2 = 5$.

Úloha 6.9. [66-I-4-D2] Koeficienty a,b,c trojčlena $P(x) = ax^2 + bx + c$ sú reálne čísla, pritom každá z troch jeho hodnôt $P(1), P(2)$ a $P(3)$ je celým číslom. Vyplýva z toho, že aj čísla a,b,c sú celé, alebo je nutne celé aspoň niektoré z nich (ktoré)?

Úloha 6.10. [59-S-3] Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

Úloha 6.11. [66-I-4] Nájdite všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficientami a,b,c, pre ktoré platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň

$$(P(1))^2 + (P(2))^2 + (P(3))^2 = 22.$$

Úloha 6.12. [62-II-3] Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je číslo $a^2 + b$ o 62 väčšie ako číslo $b^2 + a$.

Úloha 6.13. [60-I-1-D1] Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 2. Máme n čísel so súčtom n, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom ostatných čísel. Aké sú to čísla?

Seminár 7: Teória čísel I – úlohy o deliteľnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 7.1. [[Hol10], úloha 38, str. 115] Nech N je päťciferné kladné číslo také, že $N = \overline{a679b}$. Ak je N deliteľné 72, určte prvú cifru a a poslednú cifru b.

Úloha 7.2. [66-I-2-N1] Dokážte, že v nekonečnom rade čísel

$$1\cdot 2\cdot 3, 2\cdot 3\cdot 4, 3\cdot 4\cdot 5, 4\cdot 5\cdot 6, \ldots,$$

je číslo prvé deliteľom všetkých čísel ďalších.

Úloha 7.3. [63-I-5-N1] Dokážte, že pre každé prirodzené n je číslo n^3+2n deliteľné tromi.

Úloha 7.4. [63-I-5-N2] Dokážte, že pre každé nepárne číslo n je číslo n^2-1 deliteľné ôsmimi.

Úloha 7.5. [63-I-5-N3+63-I-5-N4, resp. 55-I-1]

a) Dokážte, že pre všetky celé kladné čísla m je rozdiel m^6-m^2 deliteľný šesťdesiatimi.

b) Určte všetky kladné celé čísla m, pre ktoré je rozdiel m^6-m^2 deliteľný číslom 120.

Úloha 7.6. [59-II-1] Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2}-n^k$ deliteľné dvanástimi.

Úloha 7.7. [58-S-3] Keď isté dve prirodzené čísla v rovnakom poradí sčítame, odčítame, vydelíme a vynásobíme a všetky štyri výsledky sčítame, dostaneme 2 009. Určte tieto dve čísla.

Úloha 7.8. [66-I-2-N2] Nájdite všetky celé $d > 1$, pri ktorých hodnoty výrazov $U(n) = n^3+17n^2-1$ a $V(n) = n^3+4n^2+12$ dávajú po delení číslom d rovnaké zvyšky, nech je celé číslo n zvolené akokoľvek.

Úloha 7.9. [66-I-2-D1] Pre ktoré prirodzené čísla n nie je výraz $V(n) = n^4+11n^2-12$ násobkom ôsmich?

Úloha 7.10. [66-I-2] Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu

$$V(n) = n^4+11n^2-12$$

deliteľná číslom d.

Úloha 7.11. [66-S-2] Označme M množinu všetkých hodnôt výrazu $V(n) = n^4+11n^2-12$, pričom n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky možné zvyšky po delení číslom 48, ktoré dávajú prvky množiny M.

Úloha 7.12. [60-I-2] Dokážte, že výrazy $23x+y$, $19x+3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y.

Seminár 8: Teória čísel II – úlohy o najmenšom spoločnom násobku a najväčšom spoločnom deliteli

Úlohy a riešenia

Úloha 8.1. [61-I-3-N1] Určte, pre ktoré prirodzené čísla a,b platí $(a,b) = 10$ a zároveň $[a,b] = 150$.

Úloha 8.2. [60-I-5-N1] Nech d je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. Ukážte, že čísla a/d a b/d sú celé a nesúdeliteľné.

Úloha 8.3. [60-I-5-N2] Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a,b platí vzťah

$$[a,b] \cdot (a,b) = ab.$$

Úloha 8.4. [64-I-5-N4] Platí pre každé tri prirodzené čísla a,b,c a ich najväčší spoločný deliteľ d a ich najmenší spoločný násobok n rovnosť $abc = nd$?

Úloha 8.5. [64-I-5-N5] Ak majú prirodzené čísla a,b najväčšieho spoločného deliteľa d, majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla a, b, $a-b$, $a+b$. Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

Úloha 8.6. [61-I-3-N4, resp. 50-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a,b, pre ktoré platí $a+b+[a,b]+(a,b) = 50$.

Úloha 8.7. [61-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a,b, pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a,b], b \cdot (a,b)\} = \{45, 180\}.$$

Úloha 8.8. [64-I-5] Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 2010 a ich najväčší spoločný deliteľ je 2014-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.

Úloha 8.9. [60-I-5-D3] Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a,b, pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu.

Úloha 8.10. [60-I-5] Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a,b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a,b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a,b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] \geq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

Úloha 8.11. [61-I-3] Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a,b,c, pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y.

Úloha 8.12. [63-S-2] Čísla $1, 2, \ldots, 10$ rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčinu všetkých čísel prvej skupiny a súčinu všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.

Seminár 9: Teória čísel III – úlohy o ciferných zápisoch

Úlohy a riešenia

Úloha 9.1. [59-I-6-N1] Trojciferné číslo sa končí cifrou 4. Ak túto cifru presunieme na prvé miesto (a ostatné dve cifry necháme bez zmeny), dostaneme číslo, ktoré je o 81 menšie ako pôvodné číslo. Určte pôvodné číslo.

Úloha 9.2. [[Hol10], úloha 20, str. 110] Nájdite všetky prirodzené dvojciferné čísla, ktoré sa rovnajú dvojnásobku súčinu svojich cifier.

Úloha 9.3. [61-II-2] Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách?

Úloha 9.4. [63-II-1] Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier a,b,c také, že päťciferné čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere 63 : 36.

Úloha 9.5. [57-I-6-D2, resp. 53-II-4] Žiaci mali vypočítať príklad $x + y \cdot z$ pre trojciferné číslo x a dvojciferné čísla y, z. Martin vie násobiť a sčítať čísla zapísané v desiatkovej sústave, ale zabudol na pravidlo prednosti násobenia pred sčítaním. Preto mu vyšlo síce zaujímavé číslo, ktoré sa píše rovnako zľava doprava ako sprava doľava, správny výsledok bol ale o 2004 menší. Určte čísla x, y, z.

Úloha 9.6. [58-I-3-N1, resp. 56-S-1] Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ktorých zápise sa vyskytujú práve dve jednotky.

Úloha 9.7. [58-I-3-N2, resp.54-I-5] Určte počet všetkých trojíc dvojciferných prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky cifry rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich iba raz.

Úloha 9.8. [58-I-3] Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi.

Úloha 9.9. [57-I-6] Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré sa začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať?

Seminár 10: Geometria I – základné poznatky

Úlohy a riešenia

Úloha 10.1. Dokážte, že súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného trojuholníka je $180°$.

Úloha 10.2. [66-I-3-N1] Z trojuholníkových nerovností medzi dĺžkami strán ľubovoľného trojuholníka odvoďte známe pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$ o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku ABC.

Úloha 10.3. [63-I-4-N3] Dokážte vety:

a) Ak majú dva trojuholníky rovnakú výšku, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru dĺžok príslušných základní.
b) Ak majú dva trojuholníky zhodné základne, potom pomer ich obsahov sa rovná pomeru príslušných výšok.

Úloha 10.4. [61-I-5-N1] Pre všeobecný trojuholník ABC so stranami a, b, c a obsahom S platí pre polomer r vpísanej kružnice vzorec $r = 2S/(a+b+c)$. Dokážte.

Úloha 10.5. Dokážte, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom polia.

Úloha 10.6. [58-I-4-N1] Označme U priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky ADU a BCU majú rovnaký obsah.

Úloha 10.7. [64-I-4-N1] Lichobežník $ABCD$ má základne s dĺžkami $|AB| = a$ a $|CD| = c$ a jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode U. Aký je pomer obsahov trojuholníkov ABU a CDU?

Úloha 10.8. [58-I-2-D1] Nech k je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB dĺžky c. Označme S stred strany AB a D a E priesečníky osí strán BC a AC s jedným oblúkom AB kružnice k. Vyjadrite obsah trojuholníka DSE pomocou dĺžky prepony c.

Úloha 10.9. [58-I-2-D2] Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD pomocou dĺžok a, c jeho základní a dĺžky b jeho ramien.

Seminár 11: Geometria II – podobné trojuholníky a Pytagorova veta

Úlohy a riešenia

Úloha 11.1. [66-S-3] Päta P výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $|AP| : |PB| = 1 : 3$. V rovnakom pomere sú aj obsahy štvorcov nad jeho stranami AC a BC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.

Úloha 11.2. [66-I-3] Päta výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere 1 : 2. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí nerovnosť

$$3|a-b| < c.$$

Úloha 11.3. [63-S-3] Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Stredom I kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami CA a CB, ktoré pretnú preponu postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

Úloha 11.4. [58-S-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB. Priesečník úsečky AB s priamkou, ktorá prechádza vrcholom C a stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBC, označíme D. Dokážte, že úsečky AD a AC sú zhodné.

Úloha 11.5. [64-I-4] Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$.

Úloha 11.6. [63-I-4] Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm.

Úloha 11.7. [65-II-3] V pravouhlom lichobežníku $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A základne AB je bod K priesečníkom výšky CP lichobežníka s jeho uhlopriečkou BD. Obsah štvoruholníka $APCD$ je polovicou obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník BCK.

Úloha 11.8. [58-I-2] Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC.

Úloha 11.9. [58-II-2] V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D,E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.

Seminár 12: Geometria III – obsahy trojuholníkov a štvoruholníkov

Úlohy a riešenia

Úloha 12.1. [57-S-2] V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$.

Úloha 12.2. [62-II-2] Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L. Obsahy trojuholníkov ABK, BCK, DAK a DCL sú $S_{ABK} = 18\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL.

Úloha 12.3. [64-S-2] Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC.

Úloha 12.4. [64-II-3] Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, pričom $2|AB| = 3|CD|$.

a) Nájdite bod P vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov ABP a CDP boli v pomere $3:1$ a aj obsahy trojuholníkov BCP a DAP boli v pomere $3:1$.

b) Pre nájdený bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP.

Úloha 12.5. [62-I-6] Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM.

Úloha 12.6. [65-I-4] Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2:3$ rovnaký ako pre $p = 3:2$.

b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.

Seminár 13: Geometria IV – kružnica vpísaná a opísaná trojuholníku

Úlohy a riešenia

Úloha 13.1. [57-II-1] Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leq b \leq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, L a M. Dokážte, že z úsečiek AK, BL a CM možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b+c < 3a$.

Úloha 13.2. [61-S-2] Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.

Úloha 13.3. [62-S-1] Danému rovnostrannému trojuholníku vpíšme a opíšme kružnicu. Označme S obsah vzniknutého medzikružia a T obsah kruhu, ktorého priemer je zhodný s dĺžkou strany daného trojuholníka. Ktorý z obsahov S, T je väčší? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 13.4. [61-I-5] Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geq 2r$ a zistite, kedy nastane rovnosť.

Úloha 13.5. [63-I-2] V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov.

Úloha 13.6. [59-I-4] Kružnica $k(S;r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T;s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB.

Úloha 13.7. [61-I-2] Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.

Seminár 14: Matematická súťaž v riešení úloh *Náboj*

Seminár 15: Domáce kolo MO – analýza úloh

Seminár 16: Konzultačné stretnutie v réžii študentov

Seminár 17: Školské kolo MO – analýza úloh

Seminár 18: Algebraické výrazy a (ne)rovnice IV – zložitejšie nerovnosti

Úlohy a riešenia

Úloha 18.1. [61-II-1] Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Úloha 18.2. [66-II-4] Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \leq b \leq c$ platí

$$(-a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3.$$

Úloha 18.3. [60-II-4] Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ je nezáporné.

Úloha 18.4. [61-I-4] Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Úloha 18.5. [62-I-2] Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$?

Úloha 18.6. [62-I-2-N1] Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u + v) \geq \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geq 0$ vhodnou voľbou hodnoty a a b.

Úloha 18.7. [62-I-2-N1] Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

a zistite, kedy prechádza v rovnosť.

Seminár 19: Algebraické výrazy a rovnice – zložitejšie rovnice a ich systémy

Úlohy a riešenia

Úloha 19.1. [59-S-1] Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu 1/20 väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu 1/12 väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky.

Úloha 19.2. [59-I-3-N1] Určte $\lfloor 0\rfloor, \lfloor 3{,}5\rfloor, \lfloor 2{,}1\rfloor, \lfloor -4\rfloor, \lfloor -3{,}9\rfloor, \lfloor -0{,}2\rfloor$. Symbol $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.

Úloha 19.3. [59-I-3-N2] Nech a je celé číslo a $t \in \langle 0;1)$. Určte $\lfloor a\rfloor, \lfloor a+t\rfloor, \lfloor a+\frac{1}{2}t\rfloor, \lfloor a-t\rfloor$, $\lfloor a+2t\rfloor, \lfloor a-2t\rfloor$.

Úloha 19.4. [59-I-3] Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x-2\lfloor x\rfloor = 5$.

Úloha 19.5. [57-I-3-N1] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré nadobúda zlomok $(4n+27)/(n+3)$ celočíselné hodnoty.

Úloha 19.6. [57-I-3] Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

Úloha 19.7. [57-II-4] Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$x+y\sqrt{3}+z\sqrt{7} = y+z\sqrt{3}+x\sqrt{7}.$$

Úloha 19.8. [64-I-1] Určte všetky dvojice (x,y) reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y,\\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

Úloha 19.9. [59-II-4] Určte všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &= 2010,\\ \lfloor x\rfloor - y &= p,\end{aligned}$$

ak a) $p=2$, b) $p=3$. Symbol $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x).

Úloha 19.10. [64-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1,\\ |1+y| &= z-2,\\ |2-z| &= x-x^2.\end{aligned}$$

Seminár 20: Teória čísel IV – prvočísla

Úlohy a riešenia

Úloha 20.1. [63-I-3-N2] Číslo n je súčinom dvoch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme menšie z nich o 1 a druhé ponecháme, ich súčin sa zväčší o 7. Určte číslo n.

Úloha 20.2. [63-I-3-N4] Číslo n je súčinom dvoch prvočísel. Ak zväčšíme každé z nich o 1, ich súčin sa zväčší o 35. Určte číslo n.

Úloha 20.3. [63-I-3] Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n.

Úloha 20.4. [64-S-3] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s ciferným súčtom 8, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, pričom rozdiel dvoch najmenších z nich je 8.

Úloha 20.5. [57-S-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.

Úloha 20.6. [65-I-1-D2, resp. 55-II-4] Nájdite všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p+q^2 = q+145p^2$.

Úloha 20.7. [62-I-5] Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.

Komentár. Aj keď vzorové riešenie môže vyzerať trikovo, po vyskúšaní niekoľko málo hodnôt n je vždy hodnota zo zadania deliteľná 3, čo by študentov mohlo priviesť na myšlienku skúsiť dokázať deliteľnosť čísla zo zadania tromi.

Úloha 20.8. [[HKŠ11], príklad 2.3, str. 174] Nájdite všetky prvočísla, ktoré sú súčasne súčtom a rozdielom dvoch vhodných prvočísel.

Úloha 20.9. [[Thi86], príklad 3, str. 95] Nájdite celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde p je pevne dané prvočíslo.

Úloha 20.10. [65-I-1] Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí

$$p^2 - (q+r)^2 = 637.$$

Seminár 21: Teória čísel V – miš-maš

Úlohy a riešenia

Úloha 21.1. [65-II-4] Adam s Barborou hrajú so zlomkom

$$\frac{10a+b}{10c+d}$$

takúto hru na štyri ťahy: Hráči striedavo nahrádzajú ľubovoľné z doposiaľ neurčených písmen a, b, c, d nejakou cifrou od 1 do 9. Barbora vyhrá, keď výsledný zlomok bude rovný buď celému číslu, alebo číslu s konečným počtom desatinných miest; inak vyhrá Adam (napríklad keď vznikne zlomok $\frac{11}{29}$). Ak začína Adam, ako má hrať Barbora, aby zaručene vyhrala? Ak začína Barbora, je možné poradiť Adamovi tak, aby vždy vyhral?

Úloha 21.2. [57-I-1-N1] Ak m, k a $\sqrt[k]{m}$ sú celé čísla väčšie ako 1, tak v rozklade čísla m na súčin prvočísel sa každé prvočíslo vyskytuje v mocnine, ktorej exponent je násobkom čísla k. Dokážte.

Úloha 21.3. [57-I-1] Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.

Úloha 21.4. [60-II-2] Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo n^2+6n druhou mocninou celého čísla.

Úloha 21.5. [66-II-1] Nájdite všetky mnohočleny $P(x) = ax^2+bx+c$ s celočíselnými koeficientami spĺňajúce

$$1 < P(1) < P(2) < P(3) \quad \text{a súčasne} \quad \frac{P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)}{4} = 17^2.$$

Úloha 21.6. [64-II-1] Celé čísla od 1 do 9 rozdelíme ľubovoľne na tri skupiny po troch a potom čísla v každej skupine medzi sebou vynásobíme.

a) Určte tieto tri súčiny, ak viete, že dva z nich sa rovnajú a sú menšie ako tretí súčin.

b) Predpokladajme, že jeden z troch súčinov, ktorý označíme S, je menší ako dva ostatné súčiny (ktoré môžu byť rovnaké). Nájdite najväčšiu možnú hodnotu S.

Úloha 21.7. [58-I-5] Z množiny $\{1,2,3,\ldots,99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)

Úloha 21.8. [64-I-6] Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve deviatky.

Seminár 22: Geometria V – štvoruholníky

Úlohy a riešenia

Úloha 22.1. [57-I-2] Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD|$, ak $|\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°$

Úloha 22.2. [61-II-3] Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka ABCE vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede.

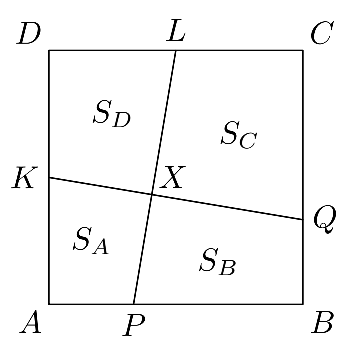
Úloha 22.3. [59-II-3] Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný.

Úloha 22.4. [60-I-3] Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC. Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A, S_B, S_C, S_D.

a) Dokážte, že $S_B = S_D$.

b) Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.

c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.



Seminár 23: Geometria VI – miš-maš

Úlohy a riešenia

Úloha 23.1. [66-II-3] Dokážte, že obdĺžnik s rozmermi 32×120 sa dá zakryť siedmimi zhodnými štvorcami so stranou 30.

Úloha 23.2. [60-S-2] Daný je štvorec so stranou dĺžky 6 cm. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah $12\,\mathrm{cm}^2$. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.)

Úloha 23.3. [65-S-3] V kružnici so stredom S zostrojíme priemer AB a ľubovoľnú naň kolmú tetivu CD. Zdôvodnite, prečo je obvod trojuholníka ACD menší ako dvojnásobok obvodu trojuholníka SBC.

Úloha 23.4. [59-S-2] Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l.

Úloha 23.5. [63-II-4] Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom$E$ vnútri strany AB tak, že platí $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle DEC| = |\measuredangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne $18\,\mathrm{cm}^2$ a $8\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah trojuholníka ECD.

Seminár 24: Náboj

Seminár 25: Kombinatorika I – úlohy na mriežke a šachovnici

Úlohy a riešenia

Úloha 25.1. [66-II-2] Štvorcovú tabuľku 6×6 zaplníme všetkými celými číslami od 1 do 36.

a) Uveďte príklad takého zaplnenia tabuľky, že súčet každých dvoch čísel v rovnakom riadku či v rovnakom stĺpci je väčší ako 11.

b) Dokážte, že pri ľubovoľnom zaplnení tabuľky sa v niektorom riadku alebo stĺpci nájdu dve čísla, ktorých súčet neprevyšuje 12.

Úloha 25.2. [62-I-1-N1] Kobylka skáče po úsečke dĺžky 10 cm a to skokmi o 1 cm alebo o 2 cm (vždy rovnakým smerom). Koľkými spôsobmi sa môže dostať z jedného krajného bodu úsečky do druhého?

Úloha 25.3. [62-I-1-N2] Škriatok sa pohybuje v tabuľke 10×15 skokmi o jedno políčko nahor alebo o jedno políčko doprava. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať z ľavého dolného do pravého horného políčka?

Úloha 25.4. [64-II-2] V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané "$-$" a v ostatných políčkach "$+$". V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

Úloha 25.5. [64-I-3-N3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leq k \leq 9$, vyberie Simona k políčok šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatné políčka napíše číslo 0. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom pokryje tromi triminovými kockami, t. j. kockami tvaru 3×1, a čísla pod ich políčkami vynásobí. Ak je počet kociek so súčinom 0 nepárny, vyhráva Simona, v ostatných prípadoch vyhráva Lenka. Určte, v koľkých percentách prípadov (vzhľadom na hodnotu k) má vyhrávajúcu stratégiu Simona.

Úloha 25.6. [61-I-6-N1] Na hracej ploche $m \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele a zafarbí toto políčko namodro. Pritom pod skokom rozumieme ťah šachovou vežou, t. j. presuny figúrky v smere riadkov alebo v smere stĺpcov hracej dosky (o ľubovoľný počet políčok). Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Rozhodnite, ktoré z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky?

Úloha 25.7. [62-I-1] Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.)

Úloha 25.8. [61-I-6] Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.

Seminár 26: Kombinatorika II – hry s hľadaním víťaznej stratégie a logické úlohy.

Úlohy a riešenia

Úloha 26.1. [61-I-6-N2] Na tabuli sú napísané všetky prvočísla menšie ako 100. Gitka a Terka sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najprv Gitka zmaže jedno z prvočísel. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zmaže jedno z prvočísel, ktoré má s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom jednu zhodnú číslicu (tak po prvočísle 3 je možné zmazať trebárs 13 alebo 37). Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne prvočíslo zmazať, prehráva. Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky?

Úloha 26.2. [61-II-4] Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.

Úloha 26.3. [61-I-6-N3] Dve hráčky majú k dispozícii pre hru, ktorú opíšeme, neobmedzený počet dvadsaťcentových mincí a stôl s kruhovou doskou s priemerom 1 m. Hra prebieha tak, že sa hráčky pravidelne striedajú v ťahoch. Najprv prvá hráčka položí jednu mincu kamkoľvek na prázdny stôl. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, položí na voľnú časť stola ďalšiu mincu (tak, aby nepresahovala okraj stola a aby sa skôr položených mincí nanajvýš dotýkala). Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky?

Úloha 26.4. [59-I-1] Erika a Klárka hrali hru "slovný logik" s týmito pravidlami: Hráč A si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč B vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč A mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena A, $Á$ sú rôzne). Keby si hráč A myslel napríklad slovo *LOĎKA* a B by vyslovil slovo *KOLÁČ*, odpovie hráč A, že jedno písmeno uhádol hráč B na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „1 + 2“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene O vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách K a L, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová *KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA* a *ZÁPAL*. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala 0 + 3, 0 + 2, 1 + 2, 2 + 0 a 1 + 2. Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť.

Úloha 26.5. [63-I-6] Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako posledné štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí.

Úloha 26.6. [63-II-2] Šachového turnaja sa zúčastnilo 5 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za prvenstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Poradie hráčov na turnaji sa určuje podľa počtu získaných bodov. Jediným ďalším kritériom rozhodujúcim o konečnom umiestnení hráčov v prípade rovnosti bodov je počet výhier (kto má viac výhier, je na tom v umiestnení lepšie). Na turnaji získali všetci hráči rovnaký počet bodov. Vojto porazil Petra a o prvé miesto sa delil s Tomášom. Ako dopadla partia medzi Petrom a Martinom?

Úloha 26.7. [64-I-3] Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leq k \leq 64$, vyberie Simona k políčok šachovnice 8×8 a každé z nich označí krížikom. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom vyplní tridsiatimi dvoma dominovými kockami. Ak je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky nepárny, vyhráva Lenka, inak vyhráva Simona. V závislosti od k určte, ktoré z dievčat má vyhrávajúcu stratégiu.

Seminár 27: Krajské kolo MO

Seminár 28: Hra SET

Úloha 28.1. Koľko kariet obsahuje hrací balíček?

Úloha 28.2. Ak vyberiem dve ľubovoľné kartičky z balíčka, koľko kartičiek existuje takých, aby s pôvodnými dvoma tvorili SET a prečo?

Úloha 28.3. Koľko rôznych SETov (kartičky sa v rámci jednotlivých SETov môžu opakovať) sa nachádza v celom balíčku?

Úloha 28.4. Z balíčka vyberieme jednu kartičku. Koľkých rôznych SETov môže byť táto kartička súčasťou?

Úloha 28.5. Ako je možné ukázať, že v danom rozložení kartičiek na stole sa nenachádza žiadny SET?

Úloha 28.6. Je možné SETy nejako kategorizovať? Ako? Koľko SETov v jednotlivých kategóriách je možné vytvoriť? Vieme správnosť našich výpočtov overiť pomocou nejakých predchádzajúcich úvah?

Seminár 29: Algebraické výrazy a rovnice VI – sústavy rovníc, rovnice s parametrom

Úloha 29.1. [B-66-II-1] Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí

$$a+\frac{66}{a}=b+\frac{66}{b}.$$

Úloha 29.2. [B-58-II-1] V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ x-y&=a,\\ -4ax+4y&=z^2+4 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a.

Úloha 29.3. [B-60-S-1] V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=p$$

s neznámou x a reálnym parametrom p.

Úloha 29.4. [B-58-I-2] Určte všetky trojice (x,y,z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2+xy&=y^2+z^2,\\ z^2+zy&=y^2+x^2. \end{aligned}$$

Úloha 29.5. [B-60-I-1] V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2}&=z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2}&=x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2}&=y+1. \end{aligned}$$

Seminár 30: Algebraické výrazy a rovnice VII – Kvadratické rovnice

Úlohy a riešenia

Úloha 30.1. [B-57-I-5-N3] Nájdite všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc $x^2+(a-2)x+b-3=0$, $x^2+(a+2)x+3b-5=0$ dvojnásobný koreň.

Úloha 30.2. [B-57-I-5] Určte všetky dvojice a,b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2+2bx+1=0, \quad bx^2+2ax+1=0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

Úloha 30.3. [B-57-II-1] Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2-ax-b=0, \quad x^2-bx-a=0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a+b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a,b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

Úloha 30.4. [B-62-II-1] Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2+px+q=0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2=(k+1)^2q$.

Úloha 30.5. [B-59-I-6] Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2-ax+b-1=0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2-ax+b+1=0$.

a) Dokážte nerovnosť $b>3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc.

Úloha 30.6. [B-64-II-4] Na tabuli je zoznam čísel $1,2,3,4,5,6$ a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2+\frac{\square}{\square}x+\frac{\square}{\square}=0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

Úloha 30.7. [B-57-S-2] Určte všetky dvojice (a,b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2+(3a+b)x+4a=0, \quad x^2+(3b+a)x+4b=0$$

spoločný reálny koreň.

Úloha 30.8. [B-59-S-1] Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p,q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p)=3+q, \quad x(x+p)=3-q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice.

Seminár 31: Geometria VII – stredové, obvodové, úsekové uhly, tetivové štvoruholníky

Úlohy a riešenia

Úloha 31.1. [B-66-II-3] V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

Úloha 31.2. [B-65-II-2] Daná je úsečka AB, jej stred C a vnútri úsečky AB bod D. Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F. Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE.

Úloha 31.3. [B-65-I-5] Vrcholy konvexného šesťuholníka $ABCDEF$ ležia na kružnici, pričom $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF sa pretínajú v bode G a úsečky BE a DF sa pretínajú v bode H. Dokážte, že úsečky GH, AD a BC sú navzájom rovnobežné.

Úloha 31.4. [B-58-I-5] Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.

Seminár 32: Geometria VIII – výpočtové úlohy

Úlohy a riešenia

Úloha 32.1. [B-59-II-1] Kružnica $l(T;s)$ prechádza stredom kružnice $k(S;2cm)$. Kružnica $m(U;t)$ sa zvonka dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich.

Úloha 32.2. [B-66-S-2] Na odvesnách AC a BC daného pravouhlého trojuholníka ABC určte postupne body K a L tak, aby súčet

$$|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2$$

nadobúdal najmenšiu možnú hodnotu a vyjadrite ju pomocou $c = |AB|$.

Úloha 32.3. [B-63-S-3] Na priamke a, na ktorej leží strana BC trojuholníka ABC, sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body B a C nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej.

Úloha 32.4. [B-65-I-3] V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4\,\text{cm}$ a $|BC| = 3\,\text{cm}$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC, zatiaľ čo k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu polomeru r_2.

Úloha 32.5. [B-61-II-3] Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K. Úsečku AK otočíme o 90° do polohy AP a úsečku BK otočíme o 90° do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC.

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK.Kedy nastane rovnosť obvodov?

Seminár 33: Opakovanie I – pohľad späť na všetko, čo sme sa naučili

Seminár 34: Opakovanie II – samostatné riešenie úloh

Úlohy a riešenia

Úloha 34.1. [B-51-S-1] Určte reálne číslo p tak, aby rovnica

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

mala dva rôzne korene x_1, x_2 a aby súčet $x_1^2 + x_2^2$ bol čo najmenší.

Úloha 34.2. [B-51-S-2] Vnútri strán BC, CA, AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC sú po rade vybrané body X, Y a Z tak, že každému zo štvoruholníkov $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ sa dá opísať kružnica. Dokážte, že body X, Y, Z sú päty výšok trojuholníka ABC.

Úloha 34.3. [B-51-S-3] Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 17$. Čísla postupne zotierame, a to tak, že z doposiaľ nezotretých čísel zvolíme ľubovoľné číslo k a zotrieme všetky tie čísla na tabuli, ktoré delia číslo $k + 17$. Dokážte, že opakovaním tejto procedúry sa nám nepodarí zotrieť všetky čísla.