Didaktika matematiky - východiská

Portál:	Virtuálna Univerzita Mateja Bela	Vytlačil(a):	Hosťovský používateľ
Kurz:	Didaktika matematiky	Dátum:	utorok, 7 októbra 2025, 11:39
Kniha:	Didaktika matematiky - východiská		

Obsah

Odborová didaktika

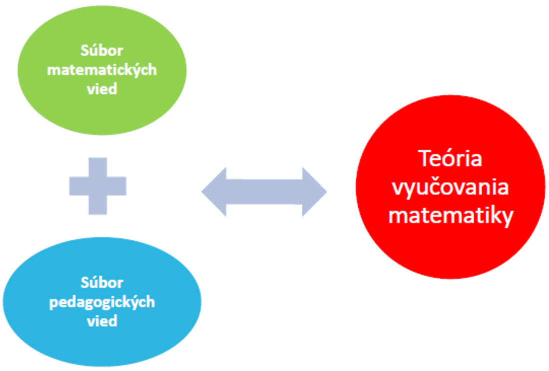
*V škole sa má nielen **učiť**, ale aj **naučiť**.*[1]

V súčasnosti výučbu treba chápať ako **tvorivý a neopakovateľný proces**, ktorý sa nedá spútať do presných schém, modelov, či spojiť len s jedinou teóriou.

Učiteľ matematiky sa dostáva do pozície koordinátora a **manažéra vo vyučovacom procese**, ktorý sa snaží o rozvíjanie zásadných matematických kompetencií žiakov. Funkcia autoritatívneho školiteľa, ktorý vyžaduje len memorovanie matematických definícií a tvrdení sa stáva skôr podpornou.

Moderná **didaktika** sa chápe ako disciplína, ktorej predmetom skúmania je **proces výučby** ako jednota činnosti učiteľa (učenie) a činnosti žiakov (učenie sa). Zaoberá sa procesom výučby vo všeobecnosti, bez ohľadu na konkrétny vyučovací predmet. 3)

Odborové didaktiky skúmajú proces výučby v určitých skupinách príbuzných vyučovacích predmetov.



Didaktika matematiky skúma procesy v školskej matematike. Didaktika matematiky analyzuje

obsah, prostriedky, metódy a formy

vyučovania a štúdia matematiky.

Pre termín Didaktika matematiky sa v niektorých prácach používa termín Teória vyučovania matematiky[2)]. V práci "Matematika jako pedagogický problém"[4)] sa uvádza aj zaužívaný anglický termín od E. Whittmann "Mathematics Education". Komparáciou viacerých prác a viacerých autorov uvedieme hlavné charakteristiky pre vymedzenie pojmu didaktika matematiky.

Didaktika matematiky

- jej cieľom je výskum nových, efektívnejších metód vyučovania matematiky na všetkých stupňoch vzdelávania a ich aplikácie do školskej praxe

- je založená predovšetkým na poznatkoch základných matematických disciplín, na historickom vývoji matematiky ako vedy a ich aplikácií do školskej matematiky
- výsledky experimentov aplikuje do prípravy budúcich učiteľov matematiky, pričom využíva najnovšie výsledky v oblasti pedagogicko-psychologických disciplín a moderné informačno-komunikačné technológie.

Teoretici v oblasti vyučovania matematiky sa v súčasnosti opierajú o významnú publikáciu

[Ball] Ball, D. L., Hill, H. C, & Bass, H. (2005, Fall). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 29, 14 – 22. Dostupné na https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Upravená SK verzia Tu.

---

1) Blaško, M.: Úvod do modernej didaktiky. →

2) Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, Bratislava, SPN 1989. →

3) Komenský, J. A.: Veľká didaktika: →

4) Kuřina, F.: Matematika jako pedagogický problém. Gaudeamus. Univerzita Hradec Králové 2016.

Historické medzníky

Korene didaktiky matematiky a medzníky jej vývoja v 20. storočí

1. V roku 1872 Felix Klein publikoval Erlangenský program[1)] a predniesol prednášku o matematickom vzdelávaní, v ktorej apeloval na väčšiu aplikovateľnosť matematiky pri jej vyučovaní. Ku konci svojej kariéry sa začal zaujímať i o výuku matematiky na nemeckých školách, **snažil sa o modernizáciu matematiky**. Presadil, aby sa na stredných školách vyučovali základy teorie funkcií a základy diferenciálneho a integrálneho počtu (tzv. Kleinsche Reform). Neskôr aktívne prispel k tomu, aby bola didaktika matematiky uznaná ako vedná disciplína. Viac Tu.
2. Dôležitým medzníkom bol rok 1908 a Štvrtý medzinárodný kongres matematikov v Ríme, počas ktorého bola ustanovená nová organizácia:

   International Commision on Mathematical Instruction

   (Medzinárodný výbor pre výučbu matematiky), ktorej prezidentom sa stal práve Felix Klein. Linka na web Tu.
3. Ďalším významným krokom bolo vytvorenie

   Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching - CIEAEM

   (Komisia pre štúdium a rozvoj vyučovania matematiky) v roku 1950. Linka na web Tu.
4. Šesťdesiate roky 20. storočia sú obdobím, keď matematici „znovu objavujú“ školu. Objavuje sa hnutie New Math (Nová matematika) u nás známe ako

   Modernizácia vyučovania matematiky.
5. V roku 1970 časopis

   Journal for Research in Mathematics Education,

   ktorý sa zaradil medzi najrenomovanejšie vedecké časopisy týkajúce sa problematiky didaktiky matematiky.

Poznámky.

1. Významný **zdroj voľne dostupných publikácií** z matematiky na DML-CZ (Czech Digital Mathematics Library), kde sú uvedené takmer všetky ročníky cesko-slovenských časopisov venovaných vyučovaniu matematiky. Linka na web Tu.
2. Pozrite si prácu zo šesťdesiatych roky 20. storočia "Programovaná učebnice moderní matematiky", ktorá sumarizuje historické etapy modernizácie vyučovania matematiky v Európe. (str. 34 - 41, zdroj Tu)

Vzťah didaktiky matematiky k dejinám matematiky

Dejiny matematiky približujú spojenie matematiky so životom, odhaľujú proces tvorby matematických pojmov a tvrdení. Historické vsuvky na hodinách matematiky žiakov motivujú, odbúravajú strach z matematiky. Priblížením histórie matematiky môžeme získať užitočné predstavy o vývoji matematického myslenia a tieto potom ďalej aplikovať vo vyučovaní. Podľa P. M. Erdnija:

„**Rast stromu matematických znalostí** v hlave jedného človeka bude úspešný len vtedy, keď **v určitej miere zopakuje históriu** rozvoja tejto vedy“[2)].

Keď sledujeme vývoj vzniku určitého matematického pojmu v histórii ľudstva, a následne pozorujeme myšlienkový proces u našich žiakov, často nachádzame zaujímavú paralelu. Môžeme to pozorovať a porovnávať na vývoji matematického myslenie z obdobia starobylých civilizácií (Egypt, Mezopotámia) s myslením Grékov, Arabov a Európanov v neskoršom období.

Matematické myslenie u Grékov je jasný posun k abstraktnejšiemu mysleniu. Pozrite si Tu.

Podobný proces sa deje aj v školskej matematike: od experimentovania v mladšom veku, žiaci postupne prechádzajú ku kauzálnemu mysleniu v staršom veku. Porovnajte vyučovanie matematiky v starovekom Egypte a v súčasnosti, na príklade riešenia úlohy z Rhindovho papyrusu.

Úloha. (Rhindov papyrus - R40[3)])
Je treba rozdeliť 100 chlebov medzi 5 mužov tak, aby bola jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole.[4)]

Poznámky.k pôvodnému riešeniu, ktoré je uvedené na papyruse.

1. Celkový počet chlebov je 100 a je potrebné tieto chleby nejakým spôsobom rozdeliť medzi 5 mužov. V úlohe sa spomínajú traja horní muži a dvaja dolní. Toto naznačuje určité usporiadanie, ale nie je celkom isté, že ide o aritmetickú postupnosť. To vyplýva až z prezentovaného riešenia.
2. Ďalej je tu podmienka, ktorú je možné interpretovať tak, že súčet počtu chlebov troch horných mužov v usporiadaní sa rovná súčtu chlebov dvoch mužov dole v usporiadaní.
3. Upravené pôvodné riešenie prezentujeme v ďalšej podkapitole. Pokúste sa o riešenie prostriedkami školskej matematiky.
4. Úloha je riešená **metódou chybného predpokladu**.
5. Táto úloha a jej riešenie poukazujú na ústredné postavenie pojmu zlomok a postupnosti v školskej matematike, s ktorými sa bližšie budeme zoznamovať v tejto lekcii.

Pôvodné riešenie vychádza z predstavy aritmetickej postupnosti tvaru: $\{1, 1+d, 1+2d, 1+3d, 1+4d\}$. Chybným predpokladom je to, že prvým členom tejto postupnosti explicitne stanovili číslo 1. Stručný prepis riešenia tejto úlohy zaznamenaného na papyruse:

1. Podmienku, že jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole, môžeme vyjadriť vzťahom:
$$1 + (1+d) = 1/7[(1+2d) + (1+3d) \\ + (1+4d)]$$
.
2. Z predchádzajúceho vzťahu vypočítame
$$d = 5\tfrac{1}{2}\ (\ldots \tfrac{11}{2}).$$
3. Ide teda o postupnosť $1,\ 6\frac{1}{2},\ 12,\ 17\frac{1}{2},\ 23$, ktorej súčet je 60.
4. Číslo 60 musíme vynásobiť číslom $1\frac{2}{3}\ (\ldots \frac{5}{3})$, aby sme získali požadovaný súčet 100.
5. Týmto číslom musíme preto vynásobiť aj členy vyššie uvedenej postupnosti.

Hľadaná aritmetická postupnosť je
$$1\tfrac{2}{3},\ 10\tfrac{5}{6},\ 20,\ 29\tfrac{1}{6},\ 38\tfrac{2}{3},$$
ktorej diferencia je $9\frac{1}{6}$.

Poznámky.
Tento výsledok však na papyruse nie je uvedený. V súčasnosti by sa táto úloha mohla riešiť takto:

1. Chybný predpoklad by sa nahradil neznámou a. Dostali by sme dve rovnice o dvoch neznámych:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)$$
$$= 100$$
$$a + (a + d) = 1/7[(a + 2d) + (a + 3d)$$
$$+ (a + 4d)]$$

.

2. Jednoduchým výpočtom by sme sa dostali k tomu istému riešeniu.

---

1) Erlangenský program je v matematice metoda, charakterizující geometrie na základě teorie grup. Dostupné Tu

2) Erndnijev, P. M.:Prepodavanije matematiky v škole. Moskva, Prosvedčenije 1978

3) Rhindov papyrus bol napísaný pisárom Ahmosem asi v 1650 pred naším letopočtom (prepis od Amenehmet III z 19. storočia p.n.l.). Viac Tu.

4) Bečvár J., Bečvářová M., Vymazalová H.(ed.): Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie. Prometheus, Praha 2003, s. 69. Dostupné Tu.

$< spanclass = " nolink ">$ \(\)

Didaktika matematiky ako vedná disciplína

Didaktika matematiky
Jej cieľom je *vedecké poznanie procesov vyučovania a učenia sa matematiky* a vytváranie rámca, v ktorom sa rozhodnutia učiteľa stávajú *odbornými* a *zdôvodnenými*.
Didaktika matematiky sa neobmedzuje na metodické odporúčania. Skúma nielen *čo* sa má učiť, ale aj *prečo* a *ako*. Spája logiku matematiky so psychológiou učenia a reálnou triednou praxou.

Didaktika matematiky je samostatná vedná disciplína, ktorá skúma zákonitosti procesu vyučovania a učenia sa matematiky. Sústreďuje sa na ciele, obsah, metódy, prostriedky a výsledky vzdelávania v matematike na rôznych úrovniach školskej praxe i mimo nej. Didaktika matematiky patrí medzi špeciálne didaktiky a má status samostatnej vednej disciplíny. Skúma proces vyučovania a učenia sa matematiky ako celok, analyzuje jeho zákonitosti a vytvára odporúčania pre pedagogickú prax. Je mostom medzi teóriou matematiky a konkrétnym vyučovaním v triede.

1. **Predmet výskumu**: vzťah učiteľa a žiaka, učebný obsah a prostriedky jeho sprostredkovania, kognitívne procesy pri osvojovaní poznatkov. Predmetom skúmania didaktiky matematiky je vo všeobecnosti proces sprostredkovania a osvojovania matematických poznatkov.
2. **Metódy výskumu**: analýza učebníc, pedagogické experimenty, didaktické testy, pozorovanie, rozhovory so žiakmi, historicko-komparatívne štúdie. Metódy sú zamerané predovšetkým na empirické a experimentálne prístupy.
3. **Úlohy didaktiky matematiky**: objasňovať ciele matematického vzdelávania, určovať optimálny obsah, vypracúvať metódy výučby a hodnotenia, skúmať efektívnosť edukačných postupov.

Didaktická poznámka.
Učiteľ, ktorý chápe didaktiku matematiky ako vedu, sa opiera o overené výsledky a nie iba o vlastnú skúsenosť či improvizáciu. Tým rastie profesionalita jeho práce. Ak chceme porozumieť didaktike matematiky v plnom rozsahu, musíme ju vnímať v súvislosti s inými vedami. Práve na to sa zameriava nasledujúca kapitola.

Vzťah didaktiky matematiky k iným vedám

Didaktika matematiky má interdisciplinárny charakter. Pre svoju činnosť čerpá z viacerých vedných oblastí a zároveň im prináša spätnú väzbu. Tento vzťah je obojsmerný:

1. **Pedagogika**: poskytuje všeobecnú teóriu výchovy a vzdelávania, z ktorej didaktika matematiky vychádza pri určovaní cieľov a štruktúry výučby.
2. **Psychológia učenia**: skúma myslenie žiakov, ich kognitívny vývin, chyby a omyly. Zastáva významné miesto pri rozvoji matematických predstáv a pri tvorivej činnosti žiaka. Významné sú poznatky Piageta, Vygotského či Brunnera.
3. **Matematika a logika**: určujú vnútornú štruktúru poznatkov, ktoré sa transformujú do učiva. Je veľmi prínosná pri zostavovaní základných pravidiel zavádzania nových matematických pojmov a pri dokazovaní matematických tvrdení. Jednoducho povedané "*Filozofia matematiky otvára otázky o povahe pojmov a dôkazov*".
4. **História matematiky**: umožňuje učiteľovi prezentovať učivo v historickom kontexte a podporiť motiváciu žiakov. Dejiny matematiky spájajú matematiku s reálnym životom, približujú proces objavovania krásnych matematických výsledkov v kontexte so školskou matematikou. Popularizačné a historicky podložené poznámky s ilustračnými doplnkami priaznivo ovplyvňujú motiváciu žiakov pri vyučovaní.
5. **Informačné technológie**: otvárajú nové možnosti pre vizualizáciu, modelovanie a interaktívne prostredia (napr. GeoGebra, Moodle).

Didaktická poznámka: Učiteľ, ktorý integruje poznatky z psychológie, histórie či IKT, ponúka žiakovi bohatší obraz matematiky ako iba súboru vzorcov a úloh.

> **Didaktika matematiky**
>
> je *priesečníkom* pedagogiky, psychológie, matematiky a technológií. Učiteľ, ktorý sa pohybuje v tomto priesečníku, je schopný poskytnúť žiakovi hlbšie a zmysluplnejšie vzdelanie.

Vzťah k iným vedám nám umožňuje lepšie pochopiť, *ako* sa matematika učí. Nasledujúca kapitola sa sústredí na *čo* sa má učiť – teda na obsah matematiky na základnej a strednej škole.

Obsah matematiky so zameraním na ZŠ a SŠ

Obsah školského vyučovania matematiky je výsledkom *didaktickej transformácie* – výberu, úpravy a usporiadania poznatkov matematiky do podoby vhodnej pre žiakov. Zohľadňuje:

1. **Vekové osobitosti**: pre nižšie ročníky sú typické intuitívne a názorné prístupy, pre vyššie ročníky abstrakcia a formalizácia.
2. **Základná škola**: prirodzené čísla, operácie, zlomky, percentá, elementárna geometria, úvod do algebry, štatistika a pravdepodobnosť.
3. **Stredná škola**: algebraické štruktúry, funkcie a ich grafy, planimetria a stereometria, analytická geometria, kombinatorika, diferenciálny a integrálny počet v elementárnej podobe.
4. **Vertikálne prepojenie**: obsah sa buduje v špirále – žiak sa k témam vracia na vyššej úrovni, čím sa rozvíja kontinuita poznania.
5. **Didaktické ciele**: formovanie logického myslenia, schopnosti riešiť problémy a pripraviť žiaka na praktické aj vysokoškolské využitie matematiky.

Didaktická poznámka: Dôležité je, aby učiteľ dokázal vidieť „veľkú mapu“ obsahu a ukázal žiakom zmysel jednotlivých tém v širšom kontexte matematiky a reálneho života.

> **Obsah matematiky**
> na ZŠ a SŠ musí byť *zrozumiteľný* žiakovi, *systematický* v postupnosti a zároveň *otvorený* pre budúce rozširovanie. Ide o rovnováhu medzi *základnými kompetenciami* a *prípravou na ďalšie štúdium*.

Otázka obsahu úzko súvisí s tým, *ako žiak matematiku poznáva*. Preto sa v nasledujúcej kapitole sústredíme na samotnú povahu matematického poznania a jeho osvojovanie.

Matematické poznanie

Matematické poznanie predstavuje špecifický druh ľudského poznania, ktoré sa zakladá na abstrakcii, generalizácii a logickej argumentácii. V didaktike matematiky sa skúma jeho povaha, proces osvojovania a didaktické cesty jeho sprostredkovania.

1. **Formy poznania**: pojmy, súdy, dôkazy, algoritmy, vizualizácie.
2. **Proces osvojovania**: od empirických skúseností žiaka (manipulácia s predmetmi, merania) cez tvorbu mentálnych modelov až po formálne symbolické myslenie.
3. **Prostriedky**: jazyk matematiky (symbolika), vizualizácie (grafy, schémy), digitálne prostredia (GeoGebra, simulácie).
4. **Funkcie poznania**: kognitívna (rozvoj myslenia), praktická (aplikácie v technike a prírodných vedách), kultúrna (súčasť vzdelanosti).
5. **Didaktická výzva**: balansovať medzi abstraktnosťou matematiky a potrebou žiaka zakotviť poznanie v reálnej skúsenosti.

Didaktická poznámka: Učiteľ musí hľadať rovnováhu: abstraktnosť je silou matematiky, no pre žiaka môže byť bariérou. Preto je dôležité využívať modely, metafory a praktické problémy.

> **Matematické poznanie**
> sa buduje *postupne*: od konkrétneho k abstraktnému, od skúsenosti k formalizácii, od individuálneho chápania k spoločnému jazyku matematiky.

Pochopenie povahy matematického poznania je východiskom pre ďalšie kapitoly didaktiky, ktoré sa budú venovať konkrétnym metódam a stratégiám vyučovania.

Poznávací proces

V tejto kapitole si priblížime proces poznávania na tematických okruhoch

1. zlomky na ZŠ
2. lineárne rovnice

Začneme dvoma známym výrokmi:

Mark Twain:

"***Vysoká škola je miestom, kde poznámky z prednášok profesorov idú rovno do študentovho zápisníka bez toho, aby prešli mozgom***."

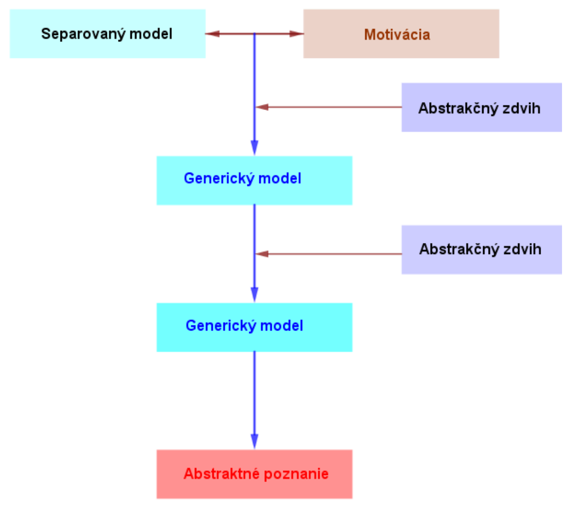
Profesor Hejný:

"***Matematické poznání člověka má dvě rozsáhle oblasti, které pokrývají většinu tohoto teritoria lidského intelektu: obsah a schopnosti***."[1)]

Naša znalosť obsahu matematického poznania (znalostí) je dosť bohatá, ale naša znalosť súboru matematických schopností zatiaľ zaostáva za obsahom.
Problémom je aj skutočnosť, že schopnosti (napr. experimentovanie, analyzovanie situácie, objavovanie, argumentácia, ...) presahujú oblasť matematiky. Z toho plynie, že **rozvoj schopností je dôležitejšia než rozvoj znalostí**.

Osvojovanie matematických schopností je úzko spojené s duševným výkonom žiaka, ktorého dôležitou súčasťou je **proces abstrakcie**. Poznávací proces bol skúmaný mnohými bádateľmi. Pokúsime sa v krátkosti charakterizovať konštruktivistický prístup profesora Hejného. Vychádza z toho, že vo vzdelávacom procese žiak/študent

1. najskôr vníma a pochopí elementárne javy a súvislosti na viacerých konkrétnych situáciách (**separované modely**)
2. neskôr hľadá čo majú spoločné tieto elementárne javy (**generické modely**) a následne objavuje obecnejšie javy a vzťahy, pričom **prichádza k abstraktnému poznaniu**



Príklad. (Separovaný model pre zavedenie súčtu prvých n - členov aritmetickej postupnosti.)

Motivácia - príbeh o slávnom matematikovi K. F. Gaussovi.
"Ide o pomerne známy príbeh, v ktorom sa hovorí, že keď Gauss navštevoval národnú školu, žiaci jeho triedy dostali za úlohu vypočítať súčet:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 100 = ?$$

Učiteľ sa domnieval, že si urobí krátku pauzu. Toto mu však zmaril žiak Gauss, ktorý sa vzápätí prihlásil so správnym výsledkom 5050."

Pokúste sa urobiť analýzu poznávacieho procesu tejto situácie. Pozrite si text, ktorý analyzuje Gaussovo riešenie Tu.

Matematická obec nie je jednotná v názore na postavenie didaktiky matematiky. Niektorí autori preferujú dôležitosť odborného matematického vzdelania. Podľa ich názoru "**byť dobrým učiteľom matematiky**" znamená perfektnú odbornú úroveň matematiky.
Na opačnom konci sa nachádza extrémny názor, že dobrým učiteľom matematiky môže byť človek s minimálnymi znalosťami matematiky (približne na úrovni strednej školy).
Podľa profesora Hejného: **Dobrý učiteľ matematiky hľadá harmonickú rovnováhu medzi matematikou a vyučovaním**.

Veľmi výstižne o "mizernom" učiteľovi matematiky sa vyjadril Karel Čapek takto:

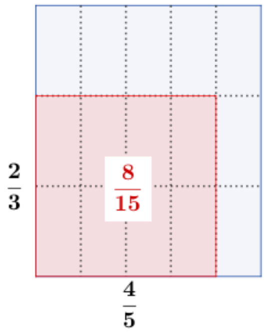
Tvrdenie. (Karel Čapek)
Najmizernejšími učiteľmi matematiky sú "odborní hnidopiši zarajtovaní do uzoučkého okruhu vědátorství" a na druhom póle sú to "školskí řemeselníci, kterí taktak ovládají svou látku ... jejich vyučovaní záleží v tom, že tabule musí být čiste umyta, žáci tiši jako kameny a jednou za čas musejí dostat pumu, kuli ..."

Ukážka deformácie poznávacieho procesu.

1. Najčastejšou deformáciou poznávacieho procesu je **nedostatočná motivácia**. Pri jej zanedbávaní žiaci sa nesnažia preberanú látku pochopiť ale snažia sa hlavne vyhovieť učiteľovi. Často sa potom na hodinách matematiky stretávame s učením spamäti, odpisovaniu, výhovorkách a pod.
2. Druhým vážnym nedostatkom poznávacieho procesu je **formalizmus v poznávacom procese**. V práci Rendl, M., Vondrová, N. a kol. 2013) sa uvádza názor učiteľky z praxe:

   "*Jedna polovina, krát jedna polovina a ona z toho vyleze jedna štvrtina. Takže jak to ukázat*?"

   Profesor Kuřina k tomu dodáva, že dotyčná pani učiteľka má medzery v didaktickom vzdelaní resp. pri preberaní zlomkov sa zamerala len na formálnosť (predpis) násobenia zlomkov (súčin čitateľov lomene súčin menovateľov). Zároveň pripomína možnosť interpretovať násobenie reálnych čísel pomocou veľkostí úsečiek, pri ktorej sa súčin interpretuje ako obsah obdĺžnika.



$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$$

Grafický súčin zlomkov

Cvičenie

Vytvorte applet v GeoGebre pre súčin zlomkov, v ktorom je možné meniť vstupné zlomky pomocou posuvníkov. Pozrite si návrh od Colm Duffin a preklad do SK.

---

1) Hejný, M. a kol,: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.Praha 2004.ISBN 80-7290-189-3 (1. sv.). Dostupné Tu.
2) Rendl, M., Vondrová, N. a kol.: Kritická místa atematiky na základní škole očima učitelu. UK Praha 2013.

< spanclass =" nolink "> \(\)

Poučenie z histórie

V súčasnosti sa pri zavádzaní zlomkov na základnej škole stále stretávame s problémami. Žiaci majú pravidlá práce so zlomkami uchované v pamäti, ale nedokážu:

- použiť jazyk zlomkov pri modelovaní reálnych situácií,
- argumentačne zdôvodniť pravidlá práce so zlomkami.

V predchádzajúcej časti sme poukázali na pomerne dobré zručnosti pri počítaní so zlomkami v starovekom Egypte. Uvedieme ešte jednu ukážku z histórie, ktorá môže slúžiť aj ako motivácia pri experimentovaní so zlomkami na ZŠ. Nasledujúcu úlohu z egyptského papyrusu sa pokúste experimentálne spracovať na rozdeľovanie (n chlebov pre k ľudí) pomocou separovaného modelu - štvorčekovaného papiera.

Úloha z egyptských papyrusov

Spravodlivo rozdeľ 5 chlebov medzi 21 mužov.

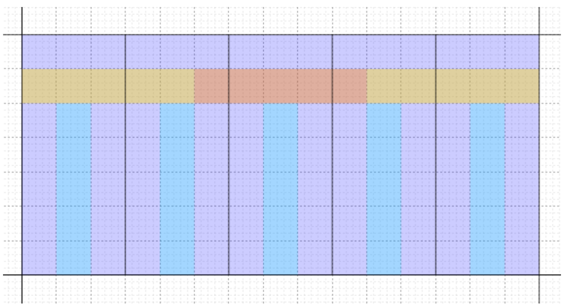
Egyptský pisár uviedol, že každý človek by dostal $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{42}$ chleba. Ako na to prišiel?

Vytvorte modelovú situáciu, v ktorej významnú úlohu zohrá **separovaný model - kmeňové zlomky**. Pozrite si študentskú prezentáciu o zlomkoch Tu.

Riešenie úlohy o delení chlebov

Dnešný žiak by úlohu vyriešil tak, že každému mužovi by dal $\frac{5}{21}$ chleba. Také zlomky však v Egypte nepoužívali, egyptskí pisári pracovali len s kmeňovými zlomkami $\frac{1}{k}$ alebo so zlomkami typu $\frac{2}{k}$, pre ktoré mali tabuľky rozkladov[1]. Najskôr urobili rozklad čitateľa $5 = 1 + 2 + 2$.

1. V tabuľkách vyhľadali, ako je možné 2 chleby rozdeliť medzi 21 ľudí.
2. Našli vzťah $\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.
3. Podľa takéhoto delenia by každý muž dostal $\frac{1}{21}$ z prvého chleba a $\frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ z prvej dvojice chlebov a to isté z druhej dvojice chlebov.
4. Čo v súčte znamená $\frac{1}{21} + (\frac{1}{14} + \frac{1}{42}) + (\frac{1}{14} + \frac{1}{42})$.
5. Po úprave za pomoci spomínaných tabuliek $\frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}$, $\frac{1}{42} + \frac{1}{42} = \frac{1}{21}$ dostali výsledok $\frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$.
6. Opäť za pomoci tabuliek upravili na tvar $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.



Štvorcová sieť Tu

____

1) Pozri prácu: Bečvár, J.: Matematika ve starém Egyptě, str 55-56. Dostupné Tu.

< spanclass =" nolink "> \(

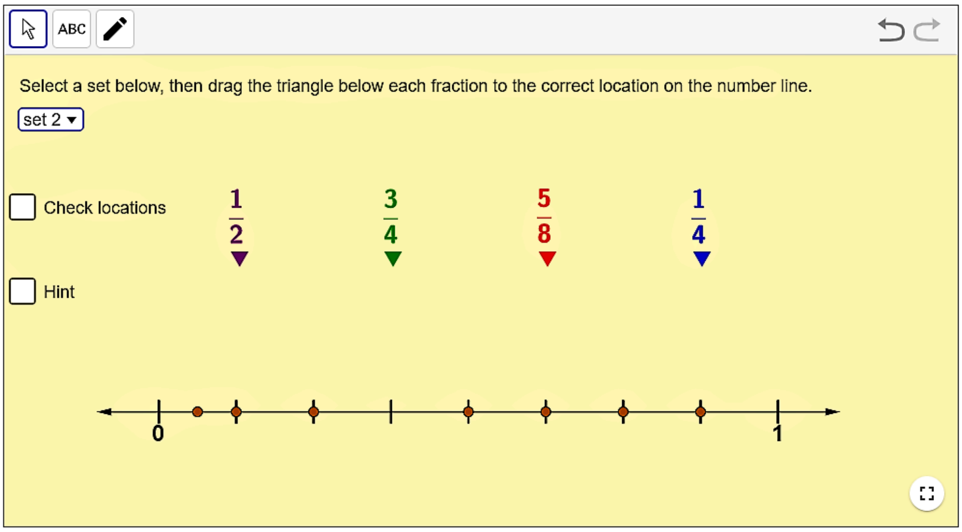
Zlomky na ZŠ

Obsahové a výkonové štandardy pre tematický okruh **Zlomky na ZŠ** zahŕňajú:

1. Zlomok ako časť celku, chápať, prečítať, zapísať, znázorniť diagramom
2. Zlomok ako číslo, umiestniť na osi. Nulový a jednotkový, pravý a nepravý zlomok. Prevod na zmiešané číslo. Vyjadrenie desatinným číslom.
3. Porovnávanie a usporiadanie. Rovnaké zlomky v inom tvare. Základný tvar. Rozširovanie a krátenie.
4. Sčítanie a odčítanie zlomkov s rovnakým a rôznym menovateľom.
5. Násobenie a delenie zlomkov prirodzeným číslom a zlomkom. Krátenie do kríža. Úprava výsledku na základný tvar, resp. zmiešané číslo.

Na zlomok sa môžeme pozerať z hľadiska mnohosti, operátora a adresy. (Hejný a kol., 1989)

1. **Mnohosť** odpovedá na otázku „Koľko?"
2. **Operátor** sa chápe ako príkaz zmeny, napr. zober z toho 3/4.
3. **Adresa** hovorí o usporiadaní, o zaradení do štruktúry, v matematike ide najčastejšie o umiestnenie na číselnú os.



Applet je dostupný Tu, stiahnite si ho a preložte do slovenčiny!

Profesor Hejný identifikuje **kritické miesta vo vyučovaní zlomkov**.

1. Prvá predstava zlomku je vo forme operátora – nie 3/4 ako číslo, ale ako vziať 3/4 z niečoho. Ako časť koláča, ktorú si odkrojím.
2. Pochopiť zlomok ako mnohosť vyžaduje abstrakciu. Pomôžeme si číselnou osou. Zlomok 3/4 predstavuje primárne adresu na číselnej osi. Avšak reprezentuje aj mnohosť – dĺžka úsečky od začiatku osi v čísle 0 po číslo 3/4. A tiež reprezentuje operátor – vyčlenenie troch štvrtín z úsečky s krajnými bodmi 0, 1.
3. Pred zavedením súčtu a súčinu zlomkov je potrebné doviesť žiaka od predstavy zlomku ako operátora ku zlomku ako mnohosti.

Pri interpretácii zlomkov využívame tri praktické (klasické) modely :

- úsečka (tyč, doska)

- kruh (torta, pizza)
- obdĺžnik rozdelený na štvorčeky (čokoláda).

Každý z nich reprezentuje pevnú jednotku, ktorú rozdeľujeme na časti. Ak ide o 3/4, štandardná predstava je taká, že rozdelíme tortu na 4 kúsky a naložíme si tri. Slovné vyjadrenia postupne skracujeme a povieme už len „štvrtina". Takto sa utvára abstraktnejšia predstava zlomku ako mnohosti.
Ďalší krok je vziať 3/4 z dvoch tort, potom 3/4 z ľubovoľného celočíselného počtu tort a napokon 3/4 z torty, ktorá už raz bola rozkrájaná. Napríklad 3/4 z polovice torty. Názorná dynamická vizualizácia týchto krokov je práve hlavným cieľom DGS.

Z pohľadu vyššej matematiky (Teoretická aritmetika) zlomky v školskej matematike chápeme ako racionálne čísla, pričom dva zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ budú predstavovať to isté racionálne číslo, ak bude platiť rovnosť

$$ad = cb$$

Počas štúdia na VŠ sme zistili, že množina racionálnych čísel obsahuje všetky zlomky, ktorých čitateľ je celé číslo a menovateľ je kladné prirodzené číslo.

Pri zavádzaní operácií sčítania a násobenia racionálnych čísel v školskej matematike sa opierame o sčítanie a násobenie zlomkov. Pre ľubovoľné dva zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ platí:

sčítanie $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

násobenie $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Úloha

Posúďte Cilkino uvažovanie resp. jej riešenie.

Ukážka z práce "Hejný, M. a kol., 25 kapitol z didaktiky matematiky".

Cilka chodí do 6. triedy a doteraz mala samé jednotky. V druhom polroku došlo k zmene učiteľa matematiky, ktorý ku koncu prvej hodiny dal náročnú úlohu.

Úloh

Koľko šestín je nutné pridať k dvom tretinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?

Cilkino riešenie

Cilka chcela od pána učiteľa vysvetliť návod na riešenie takýchto úloh. Keď sa dozvedela, že návod neexistuje, zneistela. Za pomoci pána učiteľa a množstva obrázkov, ktoré jej pán učiteľ ponúkol, Cilka nedokázala určiť správny výsledok.
Nevzdávala sa. Nakoniec však zažiarila a zvolala: "Už to viem! Je to na odčítanie zlomkov. Akože 4/4 mínus 2/3. To som vyrátala a dostala som

4/12. Ale to (zvýši hlas) treba ešte vykrátiť dvomi, aby sme mali šestiny.

To sú dve šestiny. Takže sú to dva. Je to tak?

Záver - zhodnotenie učiteľa: "Radosť Cilky a moja bezmocnosť spôsobili, že som túto **polopravdu** zbabelo odsúhlasil a vzdal som sa ďalšieho vysvetľovania."

Poznámky.

1. Podľa prof. Hejného: "Zrejme pre Cilku zlomok nie je objekt, ale len dvojica čísel oddelená vodorovnou čiarou." Súhlasíte s týmto názorom?
2. V čom je výnimočný Cilkin algebraický postup?
3. Pokúste sa vytvoriť vhodný separovaný model, ktorý by pomohol Cilke vyriešiť túto úlohu a argumentačne zdôvodniť riešenie. Náš návrh modelu si stiahnite Tu.
4. Analyzujte situáciu keby sme pozmenili úlohu takto: Koľko tretín je nutné pridať k dvom pätinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?
5. Ktorú z metód v takto pozmenenej úlohe je výhodnejšie aplikovať - Cilkinu, či (nezverejnenú) metódu "nového" učiteľa?
6. Nájdite univerzálny (generický) model na interpretáciu úloh typu: Koľko $\frac{1}{p}$ treba pridať k $\frac{1}{q}$, aby sme dostali $\frac{m}{m}$?

Pozrite si knihu appletov ku zlomkom Tu a prácu Zlomky a Geogebra[1)]

---

1) Podmanický, M.: Zlomky a GeoGebra, Práca DPŠ, FPV UMB 2020. Dostupné Tu

2) Študentská prezentácia - Hejný, M. a kol.: 25 kapitol/Zlomky. Dostupné Tu

< spanclass =" nolink "> \(\)

Rovnice na ZŠ

- Otvorte si kapitolu "**Rovnice na ZŠ**" z práce "Práca učiteľa v nových podmienkach", ktorá je dostupná Tu.
- Preštudujte si text od strany 19.

Interaktívna ukážka pomôcky " Generický model - lineárna rovnica".

Upravený model appletu z predchádzajúceho obrázka v slovenskej verzii je dostupný na na {https://www.geogebra.org/m/dnetcfmf}. Vychádza z pôvodného appletu od autora Rafael Losada Liste, Originál: La balanza je dostupný Tu.

WordWall

WordWall - aplikácia pre "živé tapety"

WordWall je systém , ktorý umožňuje prispôsobiť vlastnú obrazovku ako priestor (SlovnáStena) pre interaktívne didaktické pomôcky na vyučovacie hodiny.

Systém WordWall je publikovaný na webovej stránke Tu. Ide o jednoduchý spôsob, ako vytvoriť svoje vlastné učebné zdroje, vlastné aktivity typu: *porovnania*, *kvízy*, *slovné hry*, *pexeso* a pod. Systém WordWall ponúka až 18 šablón na vytváranie takýchto pomôcok. Spôsob vytvárania je prispôsobený interaktívnemu prístupu, ktorý zahŕňa online písanie textu a vkladanie externých obrázkov priamo z vyrovnávacej pamäte počítača.

Vytvorené didaktické pomôcky je možné vložiť na svoju vlastnú webovú stránku. Systém WordWall umožňuje zdieľanie vytvorenej aktivity tromi spôsobmi - pomocou rámca "iframe", pomocou hypertextovej ikonky alebo pomocou QR kódu. Rámec "iframe" načítava stránku HTML zo servera WordWall v rámci dokumentu, v ktorm chceme prezentovať vytvorenú aktivitu. V podstate umiestni inú webovú stránku do nami zvolenej stránky. Hypertextovej ikonky predstavuje len obrázok, ktorý po kliknití naň nás presmeruje na stránku WordWall.

Zdieľanie aktivity

Na platforme Wordwall

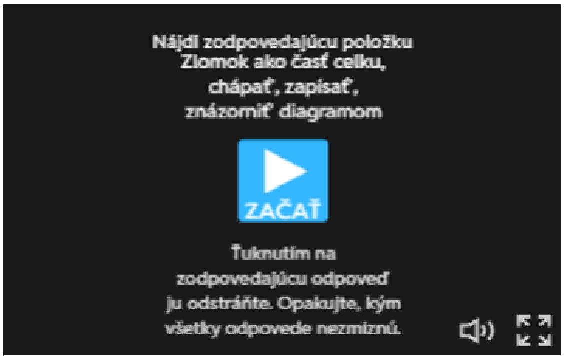
hypertextová ikonka **rámec "iframe"**

Poznámky.

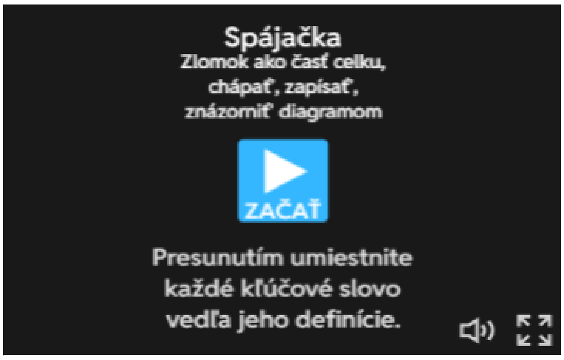
Pri vytváraní interaktívnej didaktickej pomôcky je k dispozícii celý rad technických vymožeností.

1. Pri písaní textu môžeme využiť veľké množstvo symbolov, ktoré umožňujú vytvoriť špeciálne zápisy (matematická symbolika, Letterlike Symbols, fonetická abeceda a mnoho ďalších) dokonca aj Braillovo písmo.
2. Vkladať obrázky rôznych typov. Dokonca je možné použiť grafické výstupy z programu GeoGebra, ktoré sa dajú implementovať do vybraných šablón zo systému WordWall.
3. Vytvoriť zvukovú stopu resp. systém WordWall umožňuje ozvučiť zapísané *Kľúčové slovo* a to buď mužským alebo ženským hlasom.
4. Po spustení vytvorenej aktivity priamo na stránke WordWall je možné interaktívne vyberať medzi rôznymi šablónami.
5. Vytvorené interaktívne pomôcky je možné zdieľať v ľubovoľnom HTML prostredí, teda aj v LMS Moodle.

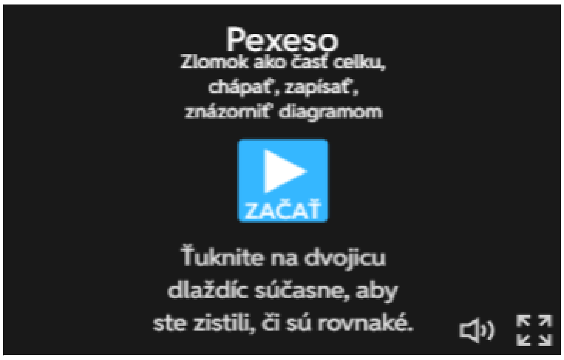
V nasledujúcich ukážkach sme využili šablóny Spájačka, Pexeso a Televízny kvíz.



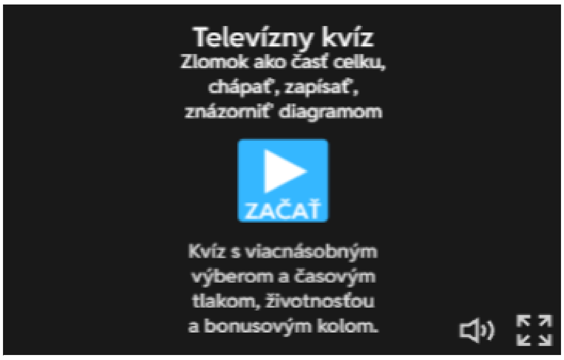
Na platforme Wordwall



Na platforme Wordwall



Na platforme Wordwall



Na platforme Wordwall

Kvíz

Seminárne zadania

Vo svojich IKT blokoch **vytvorte kapitoly v Moodle knihách**, kde postupne budete vkladať riešenia úloh.

1. Vytvorte Beamer prezentáciu k článku "Vedieť' matematiku pre vyučovanie" od Ball a kol. Použite ZIP súbor "Vzor prezentácie".
2. Vytvorte Moodle knihu, ktorá bude prezentovať pôvodné riešenie aspoň štyroch úloh z Rhindov resp. Moskovského papyrusu. K pôvodnému riešeniu pripojte riešenie pomocou modernej matemnatiky.
3. Navrhnite demonštračný applet na prezentáciu podielu dvoch prirodzených čísel pomocou egyptského rozpoľovania a tvorenia iných kmeňových zlomkov[1)], ktorá bude vhodná pre žiakov základnej školy. Inšpirujte sa úlohami z Rhindovho papyrusu zo starovekého Egypta. Prezrite si kurz[2)]. Ukážka egyptského násobenia: $13 \times 12 = ?$:

   Vypočítaj zdvojnásobovaním súčin 13×12

medzi-súčet	násobok	výsledok - 2×
1	1	12
3	2	24
7	4	48
15	8	96

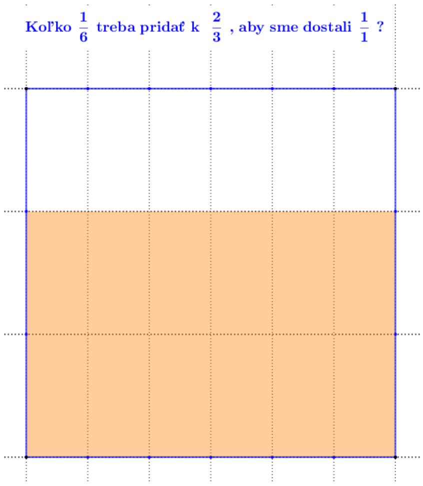
   Otvorte dynamický applet Tu.
4. Úprava appletu "Multiplying Fractions" od Colm Duffin; preklad do SK.
5. Premyslite spôsob ako priblížiť žiakom tvrdenie: **Súčin dvoch záporných čísel je kladné reálne číslo**. Poznáte nejaké separované modely pre operácie s reálnymi číslami? Aký model by ste pri zdôvodňovaní tvrdenia o súčine dvoch záporných čísel použili?
6. ...

Pri riešení nasledujúcich úloh aplikujte konštruktivistický prístup podľa profesora Hejného, v ktorom žiak

- najskôr vníma a pochopí elementárne javy a súvislosti na viacerých konkrétnych situáciách (**separované modely**),
- neskôr hľadá čo majú spoločné tieto elementárne javy (**generické modely**),
- a následne **objavuje obecnejšie vzťahy**, pričom prichádza k abstraktnému poznaniu.

Seminárne cvičenie.

1. Analyzujte modifikovanú Celkinu úlohu o zlomkoch: "Koľko tretín je nutné pridať k dvom pätinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?"
   V GeoGebre vytvorte univerzálny (generický) model na interpretáciu úloh typu: Koľko $\frac{1}{p}$ treba pridať k $\frac{1}{q}$, aby sme dostali $\frac{m}{m}$?



Separovaný model pre pôvodnú Celkinu úlohu.

2. Vymyslite príbeh alebo problém, ktorý by viedol k riešeniu

$$1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2}.$$

Pokúste sa najskôr transformovať podiel na súčin a k nemu hľadať vhodnú interpretáciu.

3. Vytvorte alebo nájdite vhodný applet, ktorý vám pomôže zodpovedať otázky:

    Ako sa mení hodnota zlomku $\frac{p}{q}$, keď zväčšujeme číslo p?

    Ako ovplyvňuje hodnotu zlomku zväčšenie menovateľa q?

---

1) Bečvář, J.: Matematika ve starém Egyptě. Dostupné Tu, Pozrite si strany 41 až 45.

2) Hanzel, P.. Staroveké civilizácie. Kurz Dejiny matematiky. Dostupné Tu.

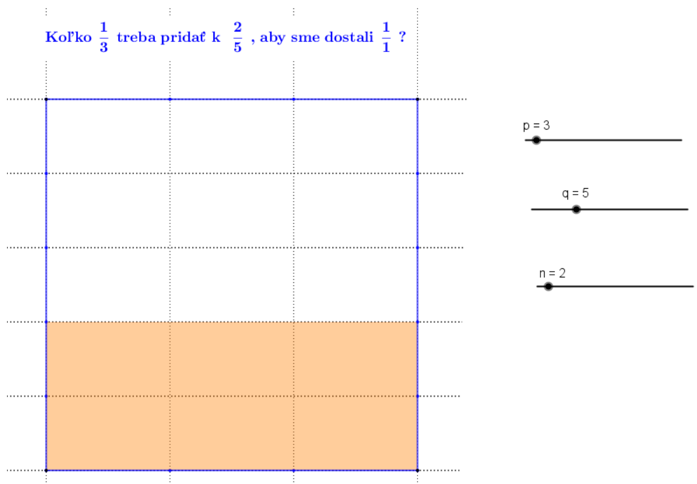
Modifikovaná Celkina úloha o zlomkoch.

a. Analyzujte situáciu keby sme úohu pozmenili takto:

Koľko tretín je nutné pridať k dvom pätinám, aby sme dostali štyri štvrtiny?

b. V GeoGebre vytvorte univerzálny (generický) model na interpretáciu úloh typu:

Koľko $\frac{1}{p}$ treba pridať k $\frac{1}{q}$, aby sme dostali $\frac{m}{m}$?



Otvorte si applet Tu.

V navrhnutom applete (generický model) môžete nastavovať požadované hodnoty pre modifikovanú úlohu. V našom prípade je štvoruholník rozdelený priamkami

1. vertikálne na tretiny,
2. horizontálne na pätiny, čo celkovo predstavuje rozdelenie štvoruholníka na 15 zhodných neprekrývajúcich obdĺžnikov.

Analýza úlohy.

Generický model ukazuje, že

- vybrať (pridať, vziať a pod.) $\frac{1}{3}$ znamená vybrať 5 zhodných obdĺžnikov,
- pridať k $\frac{2}{5}$ znamená pridať k šiestim zhodným obdĺžnikom (černený útvar) ...,
- ... aby sme dostali $\frac{4}{4} = 1$ musíme pridať 9 malých obdĺžnikov,
- čo predstavuje **pridať** 5 zhodných obdĺžnikov = $\frac{1}{3}$ celého štvoruholníka **plus** 4 malé obdĺžniky = $\frac{4}{5}$ z $\frac{1}{3}$,
- po úprave $\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ daného štvoruholníka,

Záver: K dvom pätinám je nutné pridať **jednu celú a $\frac{4}{5}$ tretiny**, matematicky zapísané $1\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Egyptské delenie

Úloha.

Navrhnite demonštračný applet na prezentáciu podielu dvoch prirodzených čísel pomocou egyptského rozpoľovania a tvorenia iných kmeňových zlomkov[1)], ktorá bude vhodná pre žiakov základnej školy.

Poznámky

1. Inšpirujte sa úlohami z Rhindovho papyrusu zo starovekého Egypta. Prezrite si kurz[2)].
2. Ukážka egyptského násobenia: $13 \times 12 = ?$:

Vypočítaj zdvojnásobovaním súčin 13 × 12

medzi-súčet	násobok	výsledok - 2×
1	**1**	**12**
3	**2**	**24**
7	**4**	**48**
15	**8**	**96**

Otvorte si dynamický applet Tu

---

1) Bečvář, J.: Matematika ve starém Egyptě. Dostupné Tu, Pozrite si strany 41 až 45.

2) Hanzel, P.. Staroveké civilizácie. Kurz Dejiny matematiky. Dostupné Tu.

Násobenie záporných čísel

Záporné čísla - násobenie

Modely vhodné pre propedeutiku záporných čísel podľa prof. Hejného. Najbežnejšie modely využívané v školskej praxi môžeme rozdeliť na:

1. **Adresa** je udaj miesta alebo času vyjadrené záporným číslom. Separované modely sú reálne stupnice (**teplomer, výťah**) a generickým modelom je **číselná os**. Žiaci sa prvý krát zoznamujú so zápornými číslami pri meraní teploty. Ich predstavy sú chápané ako adresa na stupnici teplomeru. Na nižšom stupni vzdelávania jedine **finančný model** zaujme niektorých žiakov tak, že sa pre nich stane generickým.
2. **Veličina** je usporiadaná trojica (číslo, jednotka, objekt). Napríklad pri meraní orientovaného uhla (vyšší stupeň vzdelávania). Orientovaný obsah sa objavuje v integrálnom počte.
3. **Operátor porovnania** meria kvantitatívny rozdiel dvoch adries alebo mnohostí. Formulácie „ ...je vyšší o -3cm ako ...“, „dlhuješ mi −50 korún“ znejú divne, ale ich zmysel je v súlade s predchádzajúcim sémantickým modelom a je jasný.
4. **Operátor zmeny** – napríklad zmeny výšky pri putovaní tajnou chodbou (kde sú rôzne schodištia).

Úloha 2

Premyslite spôsob ako priblížiť žiakom tvrdenie: **Súčin dvoch záporných čísel je kladné reálne číslo**. Aký model by ste pri zdôvodňovaní tohto tvrdenia použili?

Poznámky.

Klasická didaktika odpovedá na túto otázku **nereálnou konštrukciou** pri pohybe vlaku, pričom je dôležitý aj čas. Napr.:

1. Ak vlak ide rýchlosťou v smere z A do B budeme považovať jeho rýchlosť za kladnú - napr. +50km/hod. V opačnom smere za zápornú - napr. -50/hod.
2. Začíname meranie o 12 hod v daný deň. Čas, ktorý už uplynul budeme považovať za záporný. Napr. od 9 hod do 12 hod znamená -3 hodiny.
3. Otázka "Akú dráhu prešiel vlak, ktorý vyšiel pred 2 hodinami smerom z B do A, ak išiel rýchlosťou 50km/hod. Napíšte formálny zápis výpočtu."
4. Odpoveď, ktorú ponúka teoretická aritmetika nájdete na Tu.

Naše odporúčanie: Použite upravenú číselnú os ako generický model "**Násobenie a delenie celých čísel**" od Kwanchau. Model je dostupný Tu. Preskúmajte aj iné modely.

Úloha 3

Vymyslite príbeh alebo problém, ktorý by viedol k riešeniu

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}.$$

Poznámka

Pokúste sa najskôr transformovať podiel na súčin a k nemu hľadať vhodnú interpretáciu.

< spanclass =" nolink "> \(\)