

UNIVERZITA MATEJA BELA V BANSKEJ BYSTRICI
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

Práca učiteľa v nových podmienkach

Didaktika matematiky - prednáška

Práca učiteľa v nových podmienkach

Zavádzanie nových technológií do matematického vzdelávania si vyžaduje aj primeranú zmenu foriem a metód prác učiteľa. Pri implementácii programu GeoGebra priamo do vyučovacieho procesu je nutné mať na zreteli

1. na ktorom stupni vzdelávania prebieha implementácia
2. v akom tematickom celku využívame program GeoGebra

Dnes sme svedkami, že digitálne technológie prenikajú nielen do všetkých oblastí každodenného života nevynímajúc školy. Počítače, tablety, inteligentné telefóny s programovými vybaveniami sú súčasťou dnešnej generácie žiakov už od narodenia. Nemôžeme sa čudovať, že sa prirodzene objavujú aj na hodinách matematiky. V práci (Kis-Tóth, Hauser, Stoffová 2012) sa konštatuje: "Pre učiteľa matematiky je aktuálnou otázkou, čo z týchto digitálnych technológií využiť vo vyučovaní matematiky. Ukazuje sa, že každá zo spomínaných technológií má svoje miesto a dá sa efektívne použiť pri dosahovaní vyučovacích cieľov."

Matematické vzdelávanie na rôznych stupňoch vzdelávania umožňuje rozvíjať viaceré kompetencie vymedzených ISTE (International Society for Technology in Education)¹. Kolegyňa Koreňová z FMFI UK Bratislava veľmi výstižne uvádza "Pomocou softvéru GeoGebra môžu žiaci experimentovať, vytvárať a overovať hypotézy. V rámci projektovej metódy môžu spolupracovať, komunikovať, zbierať a vyhodnocovať informácie z internetu, spracovávať štatistické údaje. V práci (Korenova 2006) je popísaný aj stav digitalizácie škôl na Slovensku v roku 2012. V tom období na základných a stredných školách SR pripadla priemerne jedna interaktívna tabuľa na 91 žiakov, 43% percent učiteľov pravidelne využívalo vo vyučovacom procese počítače a viac ako 90% učiteľov absolvovalo školenia v oblasti IKT. Na základe tohto nepriaznivého stavu MŠ SR si vytýčilo cieľ postupne zvyšovať digitalizáciu vzdelávania na našich školách a zlepšiť dostupnosť digitálneho učiva na každom stupni vzdelávania. V priebehu poslednej dekády sa stav výrazne zlepšil.

Digitálne technológie pomáhajú učiteľom prispievať k napĺňaniu viacerých didaktických funkcií vo vyučovacom procese. Spomenieme niektoré z nich. Podľa práce (Lukáč, 2001) sú to hlavne:

¹Štandardy ISTE predstavujú rámec, ktorý vedie pedagógov pri používaní digitálnych technológií na vytváranie vysoko účinných, udržateľných a spravodlivých vzdelávacích skúseností. Pozri stránku [Tu](#).

- Motivačná funkcia - počítače môžu formovať kladný postoj žiakov k preberanému učivu.
- Informačná funkcia – technológie umožňujú získavať a pracovať s informáciami.
- Riadiaca funkcia – vhodné interaktívne výučbové programy môžu riadiť cieľavedomú výmenu názorov medzi subjektom vzdelávania a počítačom.
- Sociálna funkcia – práca v skupine podnecuje diskusie o preberanej problematike.

V ďalších podkapitolách sa budeme venovať špecifikám práce učiteľa na rôznych úrovniach vzdelávania v procese implementácie nových moderných technológií do vyučovania matematiky. Proces matematického vzdelávania podľa (Hejný, Littler 2006) je rozložený na päť úrovní. Prvá úroveň je motiváciou, ktorá smeruje od konkrétneho poznávania matematického pojmu ku generickému modelu a smeruje k abstraktnému zovšeobecneniu. Vzdelávací proces a jeho úrovne:

- motivácia
- izolované modely
- generický model (modely)
- abstraktné poznanie
- kryštalizácia a automatizácia.

Motivácia je napätie, ktoré v myslí človeka vytvára nesúlad medzi existujúcim a požadovaným stavom poznania. Rozpor pochádza z rozdielu medzi „neviem“ a „potrebujem vedieť“. Podľa (Gunčaga 2011) GeoGebry je možné využiť ako efektívny motivačný nástroj, pretože umožňuje zohľadňovať mnohé matematické pojmy vo vzájomných vzťahoch viditeľnejšie a navyše dynamicky.

Učiteľ pri zavádzaní nového matematického pojmu sa snaží použiť vhodné motivačné izolované modely. Napríklad pri (lineárnej) závislosti výsledná cena je závislá od množstva tovaru, čo v GeoGebre je možné jednoducho znázorniť dynamickou tabuľkou a grafom lineárnej funkcie. Graf funkcie síce bude predstavovať len množina izolovaných bodov.

V druhej fáze (izolované modely) učiteľ žiakom už na primárnom stupni vzdelávania predkladá viaceré izolované modely a ich reprezentácie v prostredí GeoGebry. Napríklad pri meraní nárastu alebo poklesu teploty v rámci dopoludňajšieho vyučovania a pod. Učiteľ pomocou GeoGebry postupne vkladá výsledky práce žiakov do tabuľky a následne ich graficky znázorní. Vytvára digitálne reprezentácie izolovaných modelov. Je to prípravný stupeň v procese matematického vzdelávania.

V tretej fáze (generické modely) učiteľ vedie žiakov na nižšom sekundárnom stupni vzdelávania, aby sa pokúsili nájsť krivku, ktorá prechádza cez zostrojené body. Vytvárajú tak aproximáciu izolovaného modelu. Výsledok tejto aktivity smeruje k zostrojeniu grafu funkcie, ktorý bude predstavovať konkrétny (lineárny - priamo úmerný) vzťah.

V tejto fáze s výdatnou pomocou GeoGebry môže učiteľ zaviesť definíciu (lineárnej) funkcie ako základ pre abstraktné poznanie. Je to štvrtá etapa v procese matematického vzdelávania. Práca učiteľa a jeho žiakov v predchádzajúcich štyroch etapách je spontánna a má formu krok za krokom (Step by Step). Sleduje postupnosť od prvých izolovaných modelov až k vytváraniu generických modelov.

V piatej fáze "Kryštalizácia a automatizácia" celý proces pozostáva z manipulácie s konkrétnymi funkciami, ktoré postupne už majú zložitejší tvar. Táto fáza je predovšetkým zastúpená na strednej škole.

Primárne vzdelávanie

Vzdelávanie detí mladšieho školského veku podporujúce rozvoj logického myslenia a operovania s abstraktnými pojmami má slovami Piageta prebiehať na tomto stupni vzdelávania, resp. v štádiu konkrétnych operácií výlučne vo vzťahu ku konkrétnym, zmyslami vnímaným objektom (Johnson, a kol. 2015; (Piaget, Inhelderová, 1997). V matematickom vzdelávaní na prvom stupni základnej školy zavádzaní nových matematických pojmov je dôležitá vizualizácia a prípadná dynamičnosť týchto pojmov. V práci (Valentová, Pracharová 2023) sa uvádza, že vhodnými podpornými modelmi pre vizualizáciu učiva je práve prostredie dynamickej geometrie, konkrétne pre tento stupeň vzdelávania sa odporúča program GeoGebra.

Medzi základné konštrukcie, ktoré sa žiaci na primárnom stupni vzdelávania učia, patrí okrem iného aj rysovanie úsečky (bez aj so zadaním dĺžky), priamky, polpriamky, rysovanie uzavretej lomenej čiary, označovanie a pomenovanie bodov, rysovanie konkrétnych rovinných útvarov v štvorcovej sieti a pod. (Štátny vzdelávací program pre primárne vzdelávanie – 1. stupeň základnej školy, 2015). Predmetné konštrukcie je možné realizovať aj v programe GeoGebra.

Pri zavádzaní abstraktných matematických pojmov a pri rysovaní základných geometrických útvarov na 1. stupni ZŠ sledujeme dve základné línie

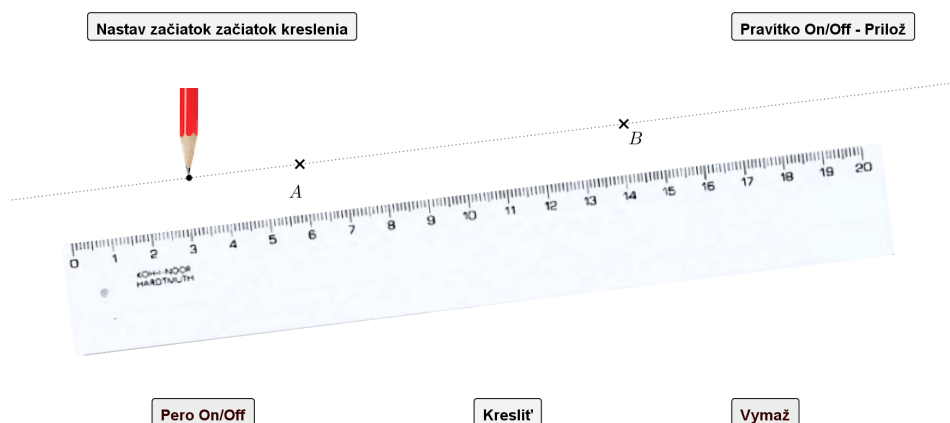
- definovanie geometrického pojmu, s dôrazom na popis jeho určujúcich prvkov, ako sú vrcholy, strany a pod.;
- zdokonaľovanie sa v jemnej motorike pri rysovaní jednoduchých útvarov.

Z toho dôvodu program GeoGebra odporúčame využívať len učiteľom a to len ako didaktickú pomôcku pri výklade nového učiva. Najčastejšie ide o využitie pri rysovaní na interaktívnej tabuli alebo priamo pomocou online aplikácie². Na obrázku 1 vidíme jednu z takýchto možností pri zavádzaní východiskového pojmu "Úsečka" v euklidovskej rovine. Ide o učivo druhého ročníka primárneho vzdelávania.

Applet znázornený na tomto obrázku je voľne dostupný v interaktívnej forme na adrese <https://www.geogebra.org/m/cebethht>. Prácu učiteľa s týmto appletom si predstavujeme ako synchronizovanú činnosť s prácou žiakov vo svojich "paper" zošitoch. Učiteľ najskôr na prezentačnej ploche (interaktívna prezentačná plocha) aktivuje pomocou navigačného panela "čistý applet" (Step 1) a zároveň vyzve žiakov, aby si vo svojich zošitoch zvolili (narysovali) dva ľubovoľné body. V ďalších krokoch (Step 2 až 6) postupuje tak, ako to znázorňuje tabuľka 1

Všimnime si, že v tomto applete nie sú zobrazené nástroje GeoGebry. A to z jednoduchého dôvodu, keďže applet slúži len a len učiteľovi, tak zobrazené nástroje by pôsobili rušivo na

²<https://www.geogebra.org/geometry>

Rysovanie úsečky AB 

Obr. 1: Rysovanie úsečky formou Step by Step

učiteľ	žiak
aktivuje tlačítko "Pravítko On/Off"	vyberie si svoje pravítko
aktivuje tlačítko "Nastav začiatok"	priloží pravítko k bodom A, B
aktivuje tlačítko "Pero On/Off"	priloží pero k bodu A
aktivuje tlačítko "Kresliť"	rysuje od bodu A k bodu B

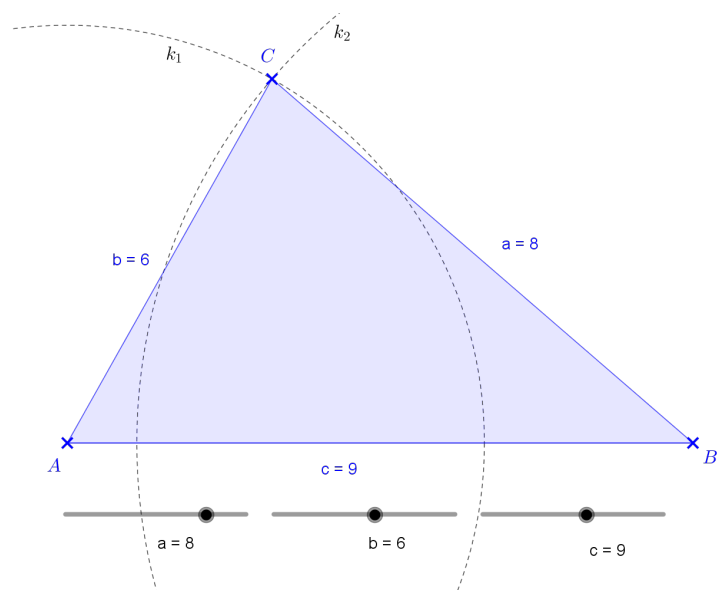
Tabuľka 1: Rysovanie úsečky

žiakov. V tomto štádiu neodporúčame používať GeoGebru priamo žiakmi, ani pri interaktívnej tabuli. Odporúčame rysovanie žiakmi na tabuli len bežnými pomôckami.

Postupne vo vyšších ročníkoch primárneho vzdelávania rozširujeme používanie programu GeoGebra na náročnejšie konštrukcie s použitím viacerých online nástrojov GeoGebry - priamka, kružnica, priesečník, uhol a pod. Pri týchto úlohách objavným spôsobom pripravujeme žiakov na niektoré euklidovské tvrdenia. Napríklad, že trojuholník môžeme zostrojiť len ak platí trojuholníková nerovnosť. Aktivujte si applet na obrázku 2.

Činnosť na vyučovacej hodine má podobný charakter ako sme uviedli v tabuľke 1. Avšak cieľom tejto vyučovacej hodiny je nielen narysovať trojuholník ale interaktívnou manipuláciou vytvárať situácie kedy trojuholník môžeme resp. vieme zostrojiť a kedy nie. Manipuláciu (zmenu parametrov veľkostí strán) by mal robiť vo väčšom rozsahu učiteľ ale nevylučujeme, že zmenu parametrov môžu robiť aj žiaci pri interaktívnej tabuli. Nie na vlastných tabletoch.

Okrem geometrie môžeme s výhodou nové technológie integrovať do vyučovacieho procesu aj v iných predmetoch. Napríklad pri aritmetických operáciách. Appletov v prostredí

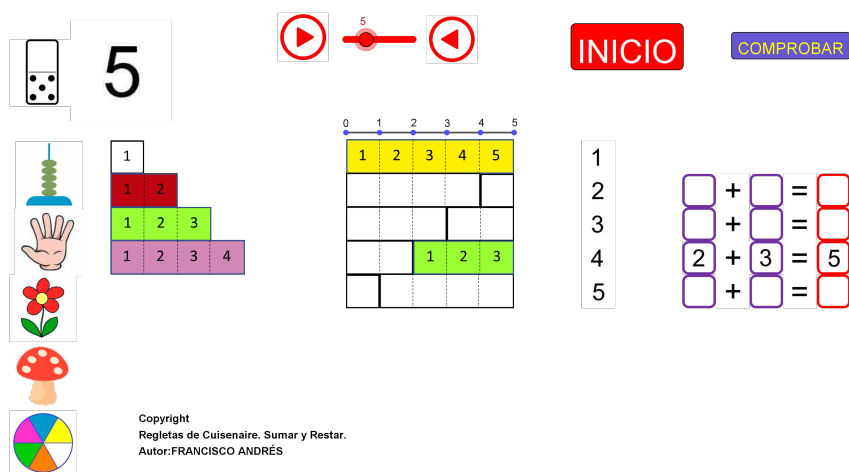


Postupne zostrojime:

1. Bod A a úsečku AB dĺžky $c = 9$
2. Kružnicu $k_1 = (A, b = 6)$
3. Kružnicu $k_2 = (B, a = 8)$
4. Priesečník C kružníc k_1, k_2
5. Trojuholník ABC

Obr. 2: Konštrukcia trojuholníka z daných strán, dostupné [Tu](#).

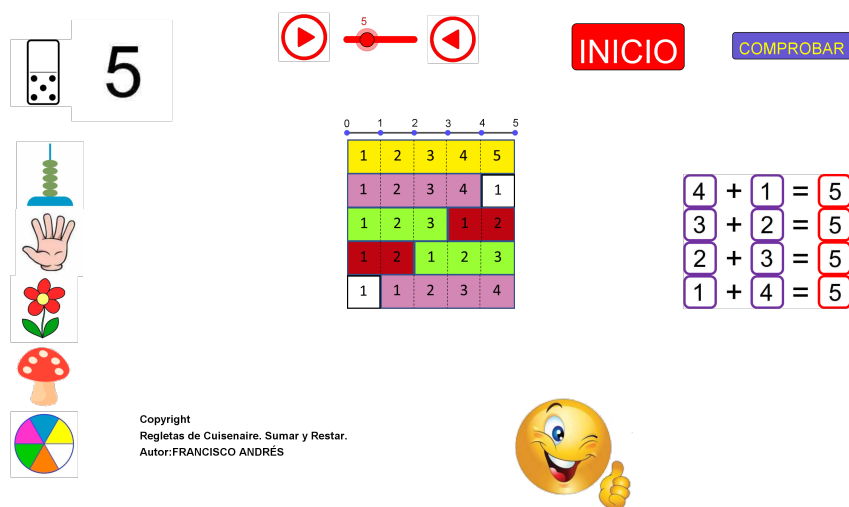
GeoGebra nájdeme pomerne veľa k kategórii "Materiály" na [tejto adres](#). Pred ich používaním odporúčame preverit' ich odbornú aj didaktickú úroveň. Mnohé obsahujú aj závažnejšie odborné matematické chyby alebo nespĺňajú súčasné požiadavky na technologické a didaktické spracovanie. Na ukážku sme vybrali aktivitu [3](#) vhodnú ako prezentáciu pri zavádzaní pojmu prirodzené číslo a na precvičovanie sčítania prirodzených v obore do 10. Autorom tohto appletu je FRANCISCO ANDRÉS. Jeho rozsah je podivuhodný, zahŕňa až 3212 konštrukčných krokov. Avšak jeho zaradenie do vyučovania na slovenských školách si vyžaduje len preklad dvoch slov: INICIO - ŠTART; COMPROBAR - KONTROLA.




Copyright
Regletas de Cuisenaire. Sumar y Restar.
Autor: FRANCISCO ANDRÉS

Obr. 3: Aktivita na sčítanie v obore do 10, dostupné [Tu](#).

Práca s appletom 3 je pomerne jednoduchá a prívetivá pre žiakov primárneho vzdelávania. Učiteľ môže zaradiť túto interaktívnu činnosť do vyučovania napríklad pri upevňovaní vlastnosti *komutatívnosť sčítania* prirodzených čísel. Na začiatku učiteľ aktivity prezentuje niektorú sekvenciu, napr. sekvenciu na obrázku 3 pre celú triedu. Súčasne do odpovedí zapája viacerých žiakov. Po niekoľkých pokusoch učiteľ na tabuli zverejní inštrukcie podľa, ktorých budú žiaci individuálne pracovať. Potom nechá samostatne pracovať žiakov, sleduje ich činnosť a individuálne im pomáha. Inštrukcie pre žiakov:



Obr. 4: Aktivita na sčítanie - riešenie

1. Najskôr musíš presunúť obdĺžniky z ľavej pyramídy na správne miesto v štvorcovom modeli v strede.
2. Následne musíš umiestniť číslice zo stĺpca pod nápisom INICO do schémy pod nápisom COMPROBAR.
3. Potom over správnosť výsledku stlačením COMPROBAR.
4. V prípade, že sa ti objaví ľahko zamračený smajlík  stlač INICO a pokús sa o opravu.

Ukážka správneho riešenia je na obrázku 4. Uviedli sme len tri ukážky appletov vhodných na zaradenie do vyučovania v nižších ročníkoch základnej školy. Vytvorenie appletov v prostredí GeoGebry nie je jednoduché. Vyžaduje si od jeho tvorcov značný čas, trpezlivosť a to hlavne na úkor osobného voľna. V práci (Híc, Pokorný 2011) sa uvádza, že "*príprava elektronických vzdelávacích materiálov, ako sú e-learningové Moodle kurzy či testy k nim, applety vytvorené programom GeoGebra a ich T_EXovské popisy je pomerne náročný proces. Výsledky s ich použitím vo vzdelávacom procese naznačujú, že sa oplatí investovať čas do ich prípravy*". Svedčia

o tom skúsenosti nielen autorov P. Híc a M. Pokorný ale aj mnohých súčasných didaktikov matematiky.

O implementácií nových technologických prvkov v príprave elementaristov bolo v poslednom desaťročí publikovaných viacero zaujímavých vedecko-výskumných prác. Výsledky takýchto výskumov boli prezentované na rôznych medzinárodných konferenciách. Jedna už pomerne dobre známa konferencia je Elementary Mathematics Education, z ktorej publikácie sú dostupné na adrese <https://www.eme.upol.cz/historie.html>.

Nižšie sekundárne vzdelávanie

Školská reforma, ktorá sa začala realizovať v školskom roku 2008/2009 mala za cieľ umožniť učiteľom viac prispôbiť vzdelávací proces potrebám a záujmom žiaka s ohľadom na ich budúce uplatnenie sa na medzinárodnom trhu práce. V práci (Tomkova, V. , Zemberova 2015) sa konštatuje, že "*školská reforma* z roku 2008 v SR *nepriniesla* očakávané zlepšenie vedomostí a zručností žiakov základnej školy, je potrebné hľadať možnosti, ktoré by daný stav zmenili".

Kurikulárna reforme v matematike

Zlepšenie vedomostí a zručností žiakov sa pokúša riešiť nový Štátny vzdelávací program (ŠVP), ktorý bol schválený v roku 2023 a základné školy začnú povinne učiť podľa nového ŠVP od školského roku 2026/2027. otvára príležitosti pre školy učiť moderne. Deti žijú v súčasnosti v odlišnom svete, v inom, ako žili ich rodičia a iné generácie pred nimi. Majú iné skúsenosti, iné podnety a stoja pred nimi iné príležitosti a výzvy. To je hlavným signálom preto, aby vzdelávací systém začal pripravovať naše deti na budúcnosť inak. Rezort školstva začal s prípravou kurikulárnej reformy s cieľom naplnenia týchto potrieb. Kurikulárna reforma patrí medzi kľúčové nástroje plánu obnovy SR, ktoré majú potenciál lepšie pripraviť deti na budúcnosť. Základná myšlienka kurikulárnej reformy pre oblasť matematiky je formulovaná v dokumente Vzdelávanie pre 21. storočie³ v preambule časti Matematika a Informatika. Píše sa v nej:

Cieľom vyučovania matematiky je rozvíjať matematické myslenie na riešenie problémov reálneho života. Prostriedkami rozvoja matematického myslenia sú matematické poznatky (pojmy, vzťahy a postupy) a matematické činnosti (používanie matematických reprezentácií, matematického modelovania a osvojenie si matematickej komunikácie). Matematika pri riešení problémov rozvíja tiež kritické myslenie žiakov založené na osobnostných, postojoyých a poznávacích schopnostiach.

Schválený Štátny vzdelávací program predstavuje konkrétne ciele výchovy a vzdelávania, profil absolventa či rámcové učebné plány. Samotné výkonové a obsahové štandardy presnejšie definujú, čo majú žiaci vedieť na konci jednotlivých vzdelávacích cyklov, teda tretieho, piateho a deviateho ročníka základnej školy.

Doplniť ako seminárnu prácu

³Portál vzdelávania pre 21. storočie [Tu](#)

Ukážky využívania IKT

V predchádzajúcich častiach sme spomenuli závery výskumov viacerých uznávaných zahraničných autorov, ktorí sa zaoberali využívaním nových digitálnych technológií vo vzdelávaní. Tieto závery môžeme zovšeobecniť a konštatovať, že prostriedky zvyšujúce efektivitu vzdelávania žiakov na všetkých stupňoch vzdelávania môžeme rozdeliť do troch základných kategórií:

- zariadenia umožňujúce obrazovú prezentáciu pojmov - interaktívna tabuľa;
- komplexné vzdelávacie systémy - LMS, GeoGebra;
- špecificky zamerané softvéry - \TeX , Matlab a pod.;

Toto musíme mať na zreteli pri hľadaní nových metód zvyšovania efektivity matematického vzdelávania na základnej škole aj v Slovenskej republike. V primárnom vzdelávaní učitelia hlavne pracujú s interaktívnymi tabuľami a menej využívajú moderné IKT. Na druhom stupni základnej školy (nižšie sekundárne vzdelávanie) učitelia (ale i žiaci) pracujú nielen s interaktívnou tabuľou, ale už aktívne pracujú so vzdelávacími systémami a špecificky zameranými softvérmi.

Problematiku efektivity vzdelávania žiakov s podporou IKT skúma aj práca (Türel & Johnson 2012). Autori tejto práce realizovali výskum na vzorke 174 učiteľov základných škôl. Došli k záveru, že

- až 91,4 % respondentov súhlasí, že IKT poskytujú prostriedky na lepšiu názornosť a predstavivosť;
- IKT prispievajú k ľahšiemu zapamätaniu si učiva 64,0% a
- rýchlejšiemu zapamätaniu si učiva (65,4 %)

Z doterajších výskumov môžeme urobiť záver, že u žiakov na nižšom sekundárnom vzdelávaní, moderné digitálne technológie pozitívne ovplyvňujú ich schopnosť porozumieť textu. Z toho dôvodu sa v dnešnej dobe javí ako nevyhnutnosť využívanie moderných technológií učiteľmi základných škôl.

Zlomky na ZŠ

Obsahové a výkonové štandardy pre tematický okruh Zlomky na ZŠ zahŕňajú:

1. Zlomok ako časť celku, chápať, prečítať, zapísať, znázorniť diagramom.
2. Zlomok ako číslo, umiestniť na osi. Nulový a jednotkový, pravý a nepravý zlomok. Prevod na zmiešané číslo. Vyjadrenie desatinným číslom.
3. Rovnosť zlomkov, rozširovanie a krátenie zlomkov
4. Porovnávanie a usporiadanie. Rovnaké zlomky v inom tvare. Základný tvar. Rozširovanie a krátenie.
5. Sčítanie a odčítanie zlomkov s rovnakým a rôznym menovateľom.
6. Násobenie a delenie zlomkov prirodzeným číslom a zlomkom. Krátenie do kríža. Úprava výsledku na základný tvar, resp. zmiešané číslo.

Na zlomok sa môžeme pozerat' z hľadiska mnohosti, operátora a adresy. (Hejný a kol. 1989). Mnohosť odpovedá na otázku „Kol'ko?“ Operátor sa chápe ako príkaz zmeny, napr. zober z toho $3/4$. Adresa hovorí o usporiadaní, o zaradení do štruktúry, v matematike ide najčastejšie o umiestnenie na číselnú os.

Profesor Hejný identifikuje kritické miesta vo vyučovaní zlomkov.

1. Prvá predstava zlomku je vo forme operátora - nie $3/4$ ako číslo, ale ako vziať $3/4$ z niečoho. Ako časť koláča, ktorú si odkrojím.
2. Pochopiť zlomok ako mnohosť vyžaduje abstrakciu. Pomôžeme si číselnou osou. Zlomok $3/4$ predstavuje primárne adresu na číselnej osi. Avšak reprezentuje aj mnohosť - dĺžka úsečky od začiatku osi v čísle 0 po číslo $3/4$. A tiež reprezentuje operátor - vyčlenenie troch štvrtín z úsečky s krajnými bodmi 0, 1.
3. Pred zavedením súčtu a súčinu zlomkov je potrebné doviest' žiaka od predstavy zlomku ako operátora ku zlomku ako mnohosti.

Pri interpretácii zlomkov využívame tri praktické (klasické) modely

- úsečka (tyč, doska);
- kruh (torta, pizza);
- obdĺžnik rozdelený na štvorčeky (čokoláda).

Každý z nich reprezentuje pevnú jednotku, ktorú rozdelíme na časti. Ak ide o $3/4$, štandardná predstava je taká, že rozdelíme tortu na 4 kúsky a naložíme si tri. Slovné vyjadrenia postupne skrácujeme a povieme už len „štvrtina“. Takto sa utvára abstraktnejšia predstava

zlomku ako mnohosti. Ďalší krok je vziať $\frac{3}{4}$ z dvoch tort, potom $\frac{3}{4}$ z ľubovoľného celočíselného počtu tort a napokon $\frac{3}{4}$ z torty, ktorá už raz bola rozkrájaná. Napríklad $\frac{3}{4}$ z polovice torty. Názorná dynamická vizualizácia týchto krokov je práve hlavným cieľom dynamických geometrických systémov (DGS).

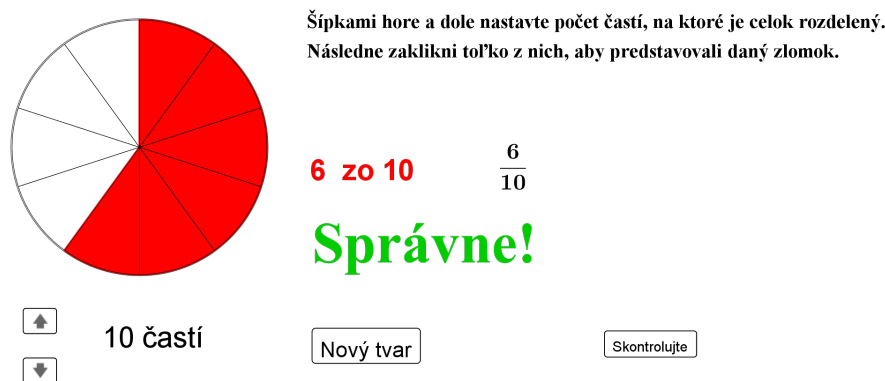
Uvedieme niektoré aplikácie programu GeoGebra, ktoré učiteľ môže využívať v matematickom vzdelávaní v rámci tematického celku Zlomky. Učítelia pri využívaní takýchto aplikácií môžu si zvoliť dve cesty:

1. ísť cestou vlastnej tvorby
2. využiť na portáli GeoGebra funkčné applety

Prvá cesta je náročnejšia, pretože si vyžaduje dobré skúsenosti práce s týmto programom. Poznamenajme, že súčasní absolventi novo akreditovaného študijného programu Učiteľstvo matematiky majú v tomto smere výhodu, lebo programovanie so systémom LMS Moodle a GeoGebra majú ako povinný predmet.

Druhá cesta je na prvý pohľad jednoduchšia, lebo akože stačí si vybrať z množstva appletov, ktoré sú voľne dostupné na internete. Takým materiálom je napríklad zbierka⁴. Nachádza sa v nej celkovo 41 appletov zoskupených do 4 kapitol. Z toho 23 od autora Duane Habecker, zvyšok je od iných autorov. Má to však "háčik". Niektoré applety v tejto zbierke (a nielen v tejto) sú v anglickom jazyku resp. aj inom jazyku. Upraviť takýto applet pre potreby základného vzdelávania v slovenských školách znamená preložiť do slovenčiny sprievodné texty a pokyny k používaniu. To si vyžaduje hlbšie odborné znalosti s týmito systémami. Podrobnejšie popíšeme aktivity vhodné pri zavádzaní pojmu zlomok.

Šípkami hore a dole nastavte počet častí, na ktoré je celok rozdelený.
Následne zaklikni toľko z nich, aby predstavovali daný zlomok.



6 zo 10 $\frac{6}{10}$

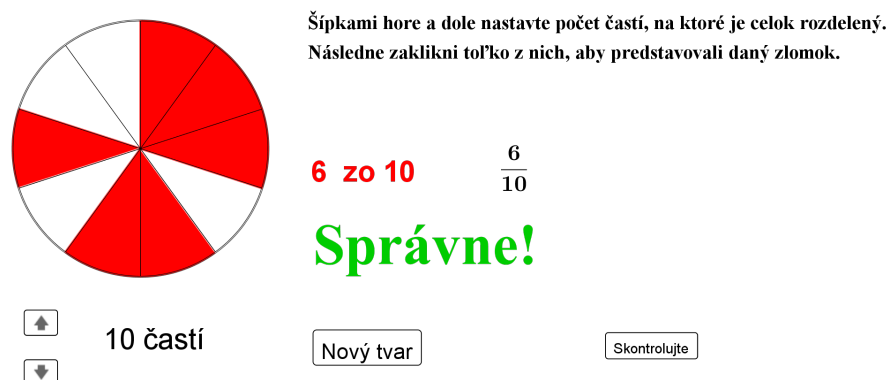
Správne!

↑ 10 častí Nový tvar Skontrolujte
↓

Obr. 5: Úloha menovateľa a čitateľa 1, dostupné [Tu](#)

⁴Fraction Book. Dostupné na <https://www.geogebra.org/m/K7cDMUC7>

Šípkami hore a dole nastavte počet častí, na ktoré je celok rozdelený.
Následne zaklikni toľko z nich, aby predstavovali daný zlomok.



6 zo 10 $\frac{6}{10}$

Správne!

10 častí

Nový tvar

Skontrolujte

Obr. 6: Úloha menovateľ a a čitateľ a 2

Učiteľ pri výklade pojmov súvisiacich s témou *Zlomok* môže sa pomocou appletov zamerať na didaktický problém "Čo budeme riešiť". Nami vybraný modelový applet "Visualizing fractions with various models" môže žiakom napomôcť pri rozvíjaní predstavy zlomku ako mnohosti a adresy. Zvolený model umožňuje utvárať dobré predstavy o pojme zlomok. Umožňuje abstrahovať od predmetnej predstavy zlomku, vytvára priestor pre modelovanie rôznych zlomkov. Využitie appletu navyše zabezpečí okamžitú, automatickú kontrolu výsledku.

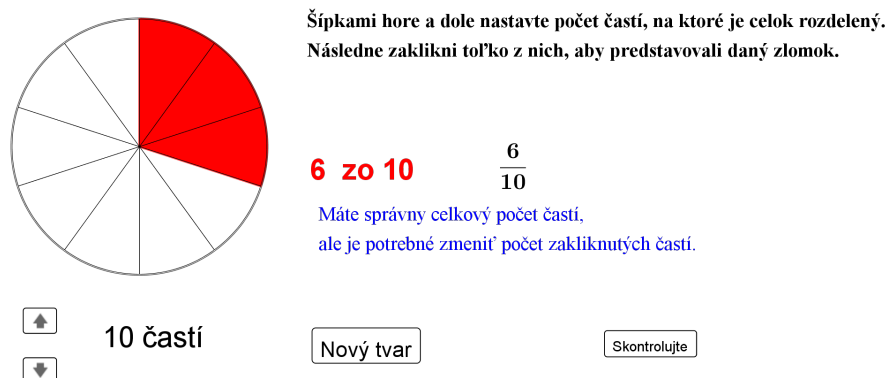
Applet *Vizualizácia zlomkov pomocou rôznych modelov*⁵ znázornený na obrázku 8 popisuje úlohu nielen menovateľ a ale aj čitateľ a. Učiteľ applet aktivuje tlačítkom *Nový tvar*. Výsledok aktivácie je:

- Náhodne sa vygeneruje tvar separovaného modelu, pričom sa vyberá z možností - kruh a dva druhy obdĺžnikov.
- Tvar sa zároveň náhodne rozdelí na určitý počet častí. Prípad na obrázku 8 predstavuje delenie na 7 častí.
- Zároveň sa vygeneruje náhodne text „3 zo 7“ a vpravo od tohto textu sa zobrazí symbol $\frac{3}{7}$ používaný v školskej matematike pre zápis zlomku.

Učiteľ vo svojom výklade o zlomku zdôrazní, že menovateľ určuje celkové rozdelenie útvaru, na obrázku 8 to predstavuje 10 častí. Preto musíme najskôr pomocou „šípky dole“ nastaviť hodnotu „10 častí“. V ďalšej časti výkladu sa zameria na pojem „čitateľ“, ktorý je vyjadrený číslom 6 nad zlomkovou čiarou. „Klikaním“ na jednotlivé časti nastavuje hodnotu pre určitý počet. Odporúčali by sme začať výberom zobrazeným na obrázku 5 a pokračovať výbermi z obrázkov 6 a 7. Kliknutím na tlačidlo „Nový tvar“ dostaneme okrem nového

⁵<https://www.geogebra.org/m/axmnppte>

Šípkami hore a dole nastavte počet částí, na které je celok rozdelený.
Následne zaklikni toľko z nich, aby predstavovali daný zlomok.



6 zo 10 $\frac{6}{10}$

Máte správny celkový počet částí,
ale je potrebné zmeniť počet zakliknutých částí.

↑
↓ 10 částí Nový tvar Skontrolujte

Obr. 7: Úloha menovateľ a a čitateľ a 3

zlomku aj iný obrázok celku. Ten sa môže zmeniť z kruhu na obdĺžnik, resp. naopak. Pripomína to krájanie koláča alebo rezanie dosky.

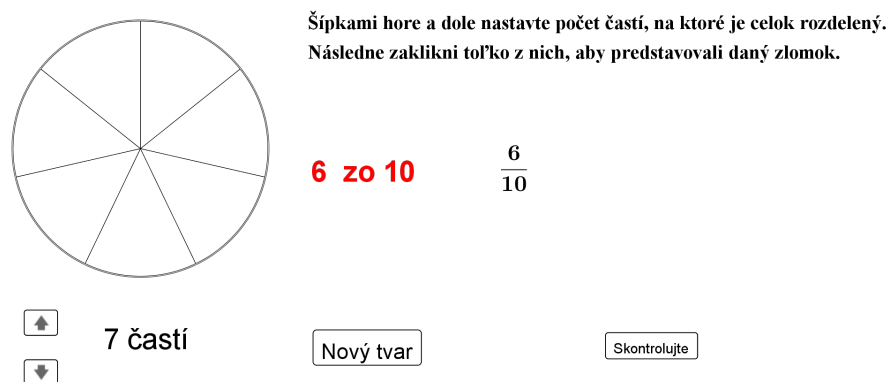
Vhodných aplikácií, ktoré sú voľne dostupné na internete, učiteľ základnej školy nájde dnes veľké množstvo. Mnohé z nich sú navzájom kompatibilné. Jedna z takých aplikácií je aj WordWall, ktorá podľa ich tvorcov „značne a rýchlejšie prispieva k vytváraniu lepších vyučovacích hodín“.

WordWall je systém, ktorý umožňuje prispôbiť vlastnú obrazovku ako priestor (SlovnáStena) pre interaktívne didaktické pomôcky na vyučovacie hodiny. Systém WordWall je publikovaný na webovej stránke [Tu](#). Ide o jednoduchý spôsob, ako vytvoriť svoje vlastné učebné zdroje, vlastné aktivity typu: porovnania, kvízy, slovné hry, pexeso a pod. Systém WordWall ponúka až 18 šablón na vytváranie takýchto pomôcok. Spôsob vytvárania je prispôbený interaktívnemu prístupu, ktorý zahŕňa online písanie textu a vkladanie externých obrázkov priamo z vyrovnávacej pamäte počítača.

Vytvorené didaktické pomôcky je možné vložiť na svoju vlastnú webovú stránku. Systém WordWall umožňuje zdieľanie vytvorenej aktivity tromi spôsobmi - pomocou rámca `iframe`", pomocou hypertextovej ikonky alebo pomocou QR kódu. Rámec `iframe`" načítava stránku HTML zo servera WordWall v rámci dokumentu, v ktorom chceme prezentovať vytvorenú aktivitu. V podstate umiestni inú webovú stránku do nami zvolenej stránky. Hypertextová ikonka predstavuje len obrázok, ktorý po kliknutí naň nás presmeruje na stránku WordWall.

Pri vytváraní interaktívnej didaktickej pomôcky je k dispozícii celý rad technických možností.

1. Pri písaní textu môžeme využiť veľké množstvo symbolov, ktoré umožňujú vytvoriť

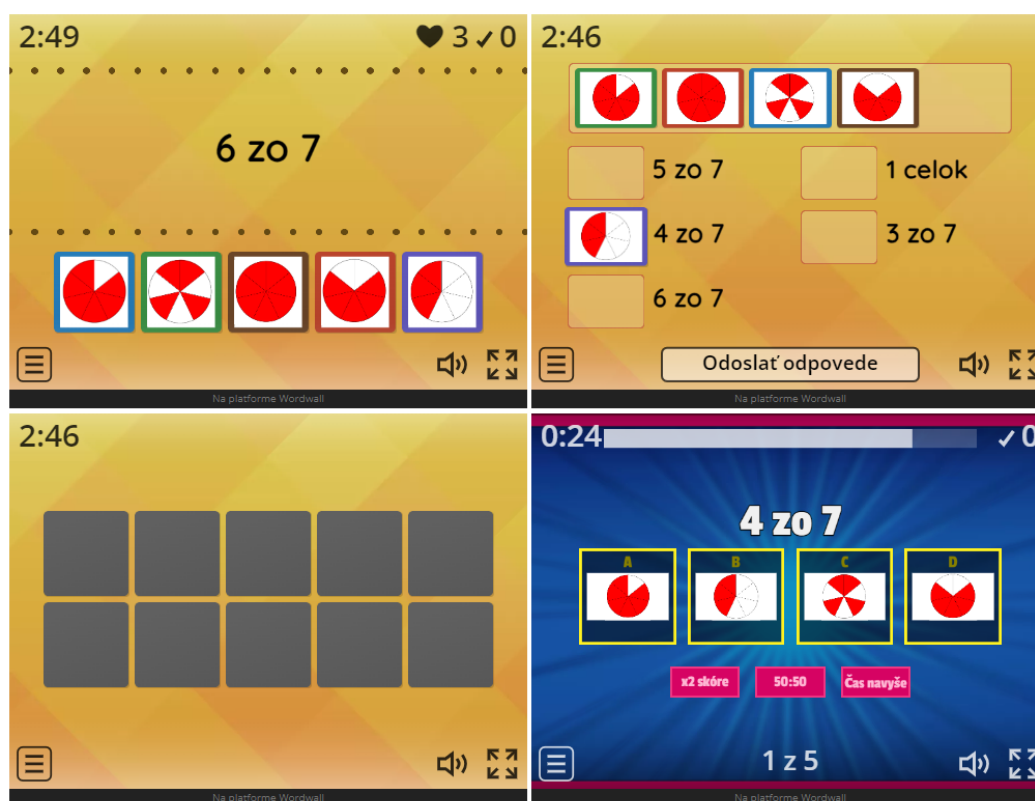


Obr. 8: Vizualizácia zlomkov pomocou rôznych modelov

špeciálne zápisy (matematická symbolika, Letterlike Symbols, fonetická abeceda a mnoho ďalších) dokonca aj Braillovo písmo.

2. Vkladať obrázky rôznych typov. Dokonca je možné použiť grafické výstupy z programu GeoGebra, ktoré sa dajú implementovať do vybraných šablón zo systému WordWall.
3. Vytvoriť zvukovú stopu resp. systém WordWall umožňuje ozvučiť zapísané Kľúčové slovo a to buď mužským alebo ženským hlasom.
4. Po spustení vytvorenej aktivity priamo na stránke WordWall je možné interaktívne vyberať medzi rôznymi šablónami.
5. Vytvorené interaktívne pomôcky je možné zdieľať v ľubovoľnom HTML prostredí, teda aj v LMS Moodle. Teda aj v nami používanom LMS Moodle.

Na obrázku 9 je ukážka produktu WordWall, v ktorej sme použili grafické výstupy z programu GeoGebra a následne sme ju transformovali do LMS Moodle. Táto aktivita je voľne dostupná v kurze *Didaktika matematiky* v knihe *Didaktika matematiky - východiská* v kapitole *WordWall* na adrese tu.



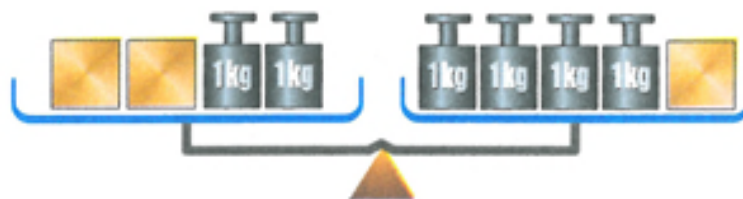
Obr. 9: Aplikácia Wordwall, dostupné [Tu](#).

Rovnice na ZŠ

Súčasná doba si vyžaduje nové postupy vo vyučovacom procese, ktorých cieľom je zvyšovanie aktívnej činnosti žiakov, viesť ich k hlbšiemu pochopeniu učiva na konkrétnych príkladoch s využitím moderných didaktických pomôcok. Prechod od pasívnej k aktívnej činnosti žiakov dosahujeme aplikovaním rôznych prístupov pri vyučovaní matematiky, ktoré prispievajú k lepšiemu porozumeniu preberaného učiva. Jedným z takýchto úspešných prístupov pri vyučovaní matematiky je používanie interaktívnych učebných pomôcok. Takéto učebné pomôcky vo vyučovaní prinášajú možnosť budovania nových poznatkov a sú zdrojom množstva užitočných informácií. v súčasnosti učitelia majú dostatočné možnosti si zvolit' vhodnú interaktívnu učebnú pomôcku, ktorú potom zaradia do vyučovacieho procesu, a tak urobia vyučovací predmet zaujímavejším.

V tejto časti sa budeme venovať ekvivalentným úpravám pri riešení lineárnych rovníc. Začneme problémovou úlohou z učebnice matematiky pre 7. ročník (Šedivý a kol. 2000), ktorá znie:

Siedmak Ivan rieši so svojou sestrou štvrtáčkou Betkou úlohy na prípravu do prímý osemročného gymnázia. Pomôžte mu Betke vysvetliť, ako sa dá iba z obrázka vyriešiť táto úloha. Určte hmotnosť kocky.



Obr. 10: Určte hmotnosť kocky

Nami vybraná úloha je doplnená názorným ale statickým obrázkom 10 rovnoramenných váh. Učiteľ pri komentovaní riešenia nemá k dispozícii interaktívny model. Autori učebnice odporúčajú pre učiteľ a nasledovný komentár:

VŠIMNIME SI

Na rovnoramenných váhach nastane rovnováha vtedy, ak na ľavú aj pravú miskú položíme závažia alebo predmety rovnakej hmotnosti. Hovoríme, že medzi hmotnosťami predmetov na oboch miskách váh nastala rovnosť.

RIEŠENIE

Betka určuje hmotnosť kocky: rovnováha sa nezmení, ak z oboch misiek odoberiem po dve závažia a po jednej kocke. Hmotnosť jednej kocky je potom súčet hmotností závaží na

pravej strane, teda 2 kg.

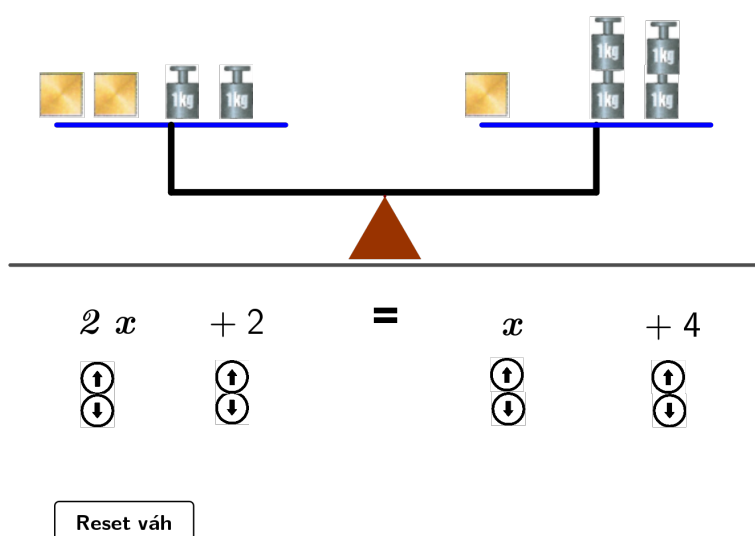
Riešenie je doplnené obrázkom 11



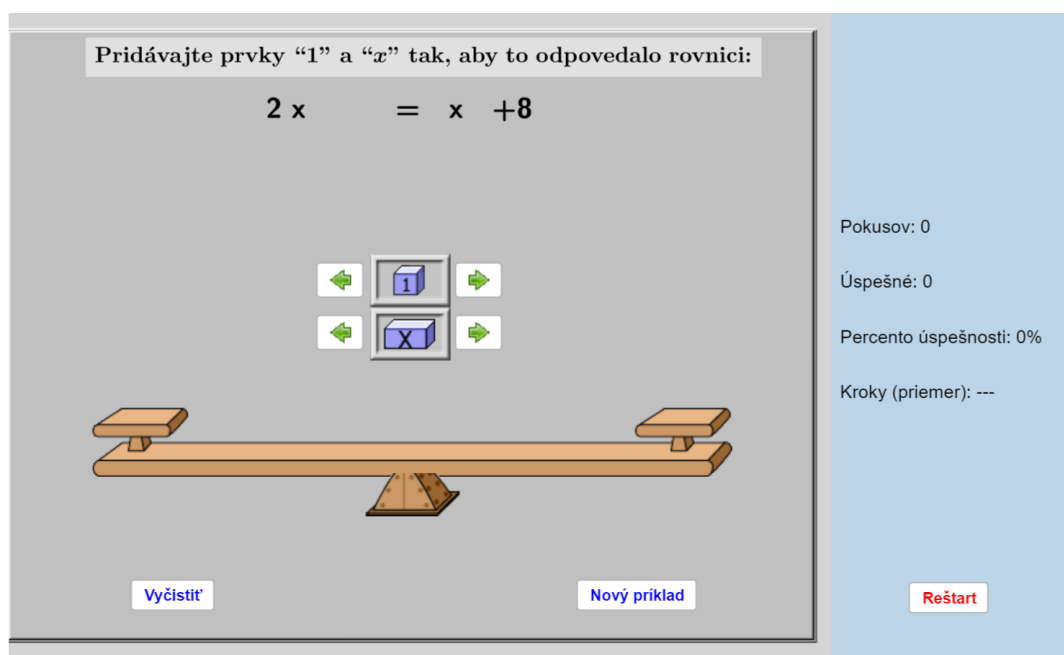
Obr. 11: Hmotnosť kocky je 2 kg.

Spôsob spracovania tejto úlohy a je na svoju dobu naozaj skvelý a zaslúži si výborné hodnotenie. Je veľký predpoklad, že žiaci pri používaní tejto učebnice a pri vhodnom výklade učiteľ a pochopia zmysel ekvivalentnej úpravy: *pričítanie ľubovoľného (reálneho) čísla k obovom stranám rovnice*.

Úpravy lineárnych rovníc v spomínanej učebnici sú vysvetľované pomocou modelu váh. Následne sú uvádzané riešené príklady lineárnych rovníc. Určitý problém je v tom, že žiak nevidí dynamickú zmenu na váhach a riešenie príkladu vidí naraz celé. Samozrejme, že pri-niesť rovníramenné váhy do triedy nemá zmysel. Dnes však učiteľ si môže vytvoriť (alebo nájsť na internete) interaktívny model váh, ktorý použije pri riešení tejto a jej podobných úloh. V rámci didaktických seminárov sme navrhli model znázornený na obrázku 12. Applet je dostupný [Tu](#).



Obr. 12: Separovaný model - lineárna rovnica



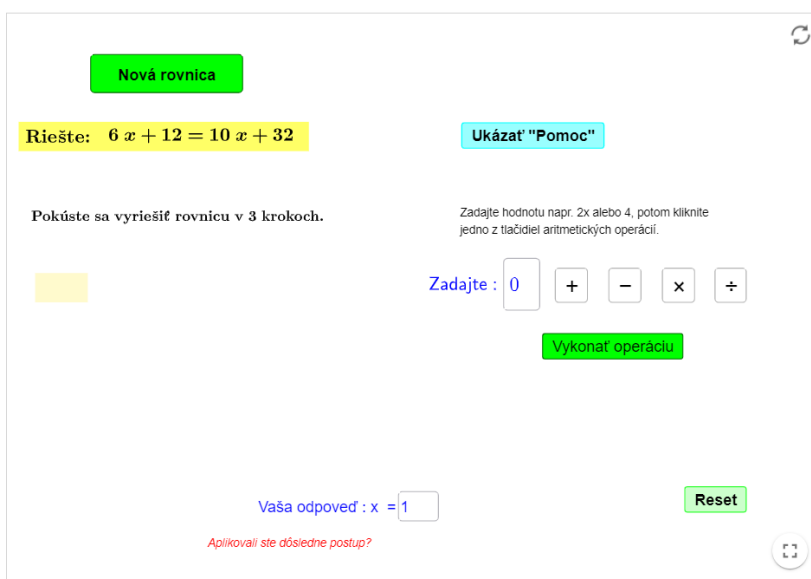
Obr. 13: Generický model - lineárna rovnica

Pomocou tohto dynamického modelu môže učiteľ priniest do triedy dynamiku a zároveň umožniť žiakom interaktívne modelovať situácie súvisiace s riešením lineárnych rovníc. V applete je možné generovať aj nové úlohy. Pomocou šípok, ktoré sú umiestnené pod príslušnými členmi rovnice, môžeme zmeniť zadanie rovnice.

O niečo inteligentnejší model/applet je znázornený na obrázku 13. Model pomocou tlačítka „Nový príklad“ vygeneruje nové zadanie lineárnej rovnice. Práca s modelom je rozdelená na tri časti.

1. Po vygenerovaní rovnice je najskôr nutné nastaviť na rovnoramenných váhach množstvá, ktoré odpovedajú vygenerovanej rovnici. Počet predmetov x a počet jednotiek sa nastaví pomocou šípok. Pri chybnom nastavení použijeme tlačítko „Vymazať“ a začneme odznova.
2. V druhej časti budeme riešiť rovnicu pomocou ekvivalentných úprav. Do textového poľa „Pridajte k obidvom ...“ vpisujeme vhodné hodnoty, ktoré použijeme pri úpravách. Potom zvolíme vhodnú aritmetickú operáciu.
3. Stlačením tlačidla „Opera“ vykonáme zvolenú operáciu. Táto operácia sa použije na obidve misky rovnoramenných váh, teda na celú rovnicu. Ak správne zvolíme operácie, rovnica sa bude viac a viac zjednodušovať, až kým nedôjdeme k výsledku.

Upravený model v slovenskej verzii je dostupný na <https://www.geogebra.org/m/dnetcfmf>. Vychádza z pôvodného appletu od autora: Rafael Losada Liste, [Person Link](#) Originál: La balanza je dostupný [Tu](#).



Obr. 14: Lineárne rovnice ekvivalentné úpravy, applet aktivujete [Tu](#).

Pri tejto aktivite je pridaná hodnota aj v sledovaní percenta úspešnosti žiackych pokusov pri riešení lineárnych rovníc. Zaujímavá je tiež skutočnosť, že pri nevhodnom návrhu ekvivalentnej úpravy, model respondenta upozorní oznamom „Táto operácia nezjednodušuje rovnicu.“ Na základe týchto inteligentných doplnkov môžeme tento model považovať za generický v zmysle klasifikácie profesora Hejného. Pre úplnosť uvádzame ešte GeoGebra [link](#) na iné dostupné modely rovníramenných váh.

Na záver uvedieme ešte jednu dynamickú GeoGebra konštrukciu. V dynamickom modeli „Lineárne rovnice ekvivalentné úpravy“ znázornenom na obrázku [14](#) je aplikovaný koncept ekvivalentných úprav na riešenie jednoduchých lineárnych rovníc s jednou premennou x . Slovenská verzia tohto modelu je dostupná [Tu](#). Popíšeme len niektoré základné funkcie tohto modelu. Jeho obsluha je dostatočne inteligentná na to, aby to zvládol učiteľ na základnej škole.

1. Model automaticky generuje nové zadanie pomocou tlačítka „Nová rovnica“.
2. Do textového poľa „Zadajte:“ sa vkladajú/vpisujú vhodné hodnoty, ktoré sa použijú pri ekvivalentnej úprave.
3. Zvolíme požadovanú aritmetickú operáciu a aktivujeme tlačítka „Vykonať operáciu“
4. Po vyriešení rovnice výsledok zapíšeme do textového poľa „Vaša odpoveď“. Model vypíše, či ste správne vyriešili rovnicu

Učiteľ môže s týmto appletom pracovať rôznymi spôsobmi. Môže viesť dialóg so žiakmi, pričom žiaci navrhujú učiteľovi, čo má vpísať, čo stlačiť, . . . Môže zámerne nesprávne riešiť

rovniciu a potom použiť tlačítko „Ukázat pomoc“. S trochou námahy a s minimom znalostí z programovania môže upraviť applet tak, aby generoval aj zložitejšie rovnice.

Všetky applety v slovenskej verzii použité v tejto sekcii sú výsledkom práce študentov učiteľského štúdia na Fakulte prírodných vied UMB v Banskej Bystrici v rámci praktických cvičení didakticky orientovaných predmetov.

Literatúra

- [1] Azizah, A. N., Kusmayadi, T. A., & Fitriana, L. (2021). The Effectiveness of Software GeoGebra to Improve Visual Representation Ability. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 1808(1). [DOI](#)
- [2] Ball, D. L., Heather C. Hill, and Hyman Bass.(2005) *Knowing Mathematics for Teaching Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide?* Reprinted with permission from the Fall 2005 issue of *American Educator*, the quarterly journal of the American Federation of Teachers, AFL-CIO.
- [3] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*. Volume 59(5),389-407.
- [4] Bedada, T. B., & Machaba, F. (2022a). The effect of GeoGebra on STEM students learning trigonometric functions. *Cogent Education*, 9(1), 1–19. [DOI](#)
- [5] Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P., Kovács, Z., Petrović, I., Recio, T., & Weitzhofer, S. (2015). Automated theorem proving in GeoGebra: Current achievements. *Journal of Automated Reasoning*, 55, 39–59.
- [6] Deny Hadi Siswanto¹, Kanako Tanikawa, Eka Kevin Alghiffari, Masako Limori, Dede Dwi Aprilia. (2023) A Systematic Review: Use of GeoGebra in Mathematics Learning at Junior High School in Indonesia and Japan. *Jurnal Pendidikan Matematika (Kudus)* P-ISSN 2615-3939 | E-ISSN 2723-1186. [Here](#)
- [7] Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191–203. [DOI](#)
- [8] Gunčaga, J. (2011) *GeoGebra in Mathematical Educational Motivation*. In: *Anale. Seria Informatică*. Vol. IX fasc. 1 – 2011. *Annals. Computer Science Series*. 9th Tome 1st Fasc. – 2011
- [9] Hanzel, P.(2011). *Vytvorenie elektronického kurzu v LMS Moodle. Učebný materiál*, UMB Banská Bystrica, 2011, ISBN 978-80-557-0180-6.

- [10] Hejný, M. a kol. (1989) *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava SPN, 1989.
- [11] Hejný, M., Littler, G. (2006) - Transmissive and constructivist approaches to teaching. *Creative Teaching in Mathematics*: 11 – 34. Charles University, Prague, 2006.
- [12] Híc, P., Pokorný, M.: Blended Learning as an Efficient Tool in Mathematics Teaching. In: XXIV Didmattech 2011. Problems in Teachers Education, Instytut Techniki UP, Kraków 2011, s. 188-193. ISBN 978-83-7271-679-8
- [13] Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126–131.
- [14] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2011). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon.
- [15] Chytas, C., Van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2023). Computational Thinking in Secondary Mathematics Education using GeoGebra: Results from a Design Study. In *Digital Experiences in Mathematics Education (Issue 0123456789)*. Springer International Publishing. DOI
- [16] Johnson, J. E., Eberle, S. G., Henricks, T. S., Kuschner, D. (2015). *The Handbook of the Study of Play 2*. Lanham: Rowman Littlefield. 600 s. ISBN 978-1475-580-796-7
- [17] Kis-Tóth, L., Hauser, Z., Stoffová, V. Laptop-based classroom instruction and personalized e-learning environments In *New Technologies in research, science and education*. Editor Veronika Stoffová. 1. edition, Komárno : J. Selye University Komárno, 2012, pp. 88–100. ISBN 978-80-8122-063-0.
- [18] Koreňová, L. (2015). *Digitálne technológie v školskej matematike*. FMFI UK, Bratislava ISBN: ISBN 978 – 80 – 8147 – 026 – 4
- [19] Lukáč, S. (2001). *Multimédiá a počítačom podporované učenie sa v matematike*. Univerzita Pavla Jozefa Šafárika Košice. 2001. ISBN: 80-7097-42-30
- [20] Majovská, R. (2006). *Grafická podpora při výuce určitého integrálu v kombinovanom studiu*, In: ERIE 2006, Praha, 2006, ISBN 80-213-1349-8
- [21] Piaget, J., Inhelderová, B. (1997). *Psychologie dítěte*. Praha: Portál, ISBN 80-7178-608-X.

- [22] Paoletti, T., Monahan, C., & Vishnubhotla, M. (2017). Designing GeoGebra applets to maximize student engagement. *The Mathematics Teacher*, 110(8), 628–630.
- [23] Partová, E.(2023). Informačné komunikačné technológie vo vyučovaní elementárnej matematiky. In: *Pedagogické spektrum*. Roč. 11, č. 3/4, 2002, s. 50 – 54, ISSN 1335-5589
- [24] Prieto-González, J. L., Gutiérrez-Araujo, R. E., Arredondo, E. H., & Montecino, A. (2023). Contradictions in the learning of Euclidean constructions with GeoGebra by pre-service mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 0123456789. <https://doi.org/10.1007/s10857-023-09606-2>
- [25] Regecová M., Slavíčková M. (2011). Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov matematiky. *Nové trendy v teórii vyučovania matematiky*. Nitra UKF 2011. str. 46-54. ISBN 978-80-8094-853-5
- [26] Rosa, V., Turek, I., Zelina, M.(2003) Koncepcia rozvoja výchovy a vzdelávania v Slovenskej republike na najbližších 15 – 20 rokov. In: www.education.gov.sk, 2003.
- [27] Šedivý, O. a kol. (2000) *Matematika pre 7. ročník základných škôl : 2. časť*. Bratislava. ISBN 80-08-02680-4
- [28] Thomas, A. O., & Adebowale, A. M.(2003. *Geogebra Software: Synergy That Improves Performance in Geometry Learning in Ogbomosho Education Zone of Oyo State*. *African Journal of Education and Practice*, 2023). 9(4), 1–14. <https://doi.org/10.47604/ajep.219>
- [29] Tomkova, V. & Zemberova, I. (2015). Development of the educational skills of primary school learners through ICT. 619-623. 10.1109/ICAICT.2015.7338635.
- [30] Türel, Y. K. - Johnson, T. E. (2012) Teachers' Belief and Use of Interactive Whiteboards for Teaching and Learning. In: *Educational Technology Society*, vol. 15 (1), s. 381-394, 2012.
- [31] Turek, I.(2003). Príloha Školstvo v štátoch EÚ: Vzdelávacia politika Európskej únie. In: *Pedagogické rozhľady*, č. 2, 2003.
- [32] Valentová, L., Pracharová, I. (2023). Využitie programu GeoGebra v intenciách primárneho matematického vzdelávania. In: *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Online. Ružomberok: VERBUM – vydavateľstvo Katolíckej univerzity v Ružomberku, roč. XXII., č. 1, s. 109-121. ISSN 1336-2232. Dostupné na: <https://doi.org/10.54937/ssf.2023.22.1.109-121>

- [33] Vallo, D. Konceptia výučby geometrie podporovanej implementáciou dynamických geometrických programov. Habilitačná práca. UKF Nitra 2021.
- [34] Weinhandl, R., Houghton, T., Lindenbauer, E., Mayerhofer, M., Lavicza, Z., & Hohenwarter, M. (2021). Integrating Technologies Into Teaching and Learning Mathematics at the Beginning of Secondary Education in Austria. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(12), 1–15. <https://doi.org/10.29333/EJMSTE/11428>
- [35] Yuan, Z., Liu, J., Deng, X., Ding, T., & Wijaya, T. T. (2023a). Facilitating Conditions as the Biggest Factor Influencing Elementary School Teachers' Usage Behavior of Dynamic Mathematics Software in China. *Mathematic*, 11(6), 15–36. [DOI](#). MDPI AG.
- [36] Ye, H., Liang, B., Ng, O. L., & Chai, C. S. (2023). Integration of Computational Thinking in K-12 Mathematics Education: A Systematic Review on CT-Based Mathematics Instruction and Student Learning. *International Journal of STEM Education*, 10(3), 1–26. [DOI](#)
- [37] Zulnaidi, H., Oktavika, E., & Hidayat, R. (2020). Effect of use of GeoGebra on achievement of high school mathematics students. *Education and Information Technologies*, 25(1), 51–72. [DOI](#)